Gravity

Yury Holubeu *

October 20, 2025

This note is not intended for distribution. Gravity is discussed in detail. Links below show contents of solved problems, summary of special topics. Readers who have opened this note for the first time are highly recommended to read the preface.

Contents

Preface and main motivation **17**

I —— Typical Gravity in a Nutshell —— **20**

1 Nature of Gravity and Main Models **20**
1.1 Main laws and models in a nutshell . . . 20
1.1.1 Minimal Coupling, Stress-Energy Tensor, Einstein's Equations . . . 20
1.1.2 Details of Einstein's Equations . . . 32
1.1.3 Newtonian gravity . . . 32
1.1.4 Schwarzschild model . . . 34
1.1.5 Conservation of energy (!?!) . . . 54
1.2 Typical math for gravity . . . 60
1.2.1 Basics of Differential Geometry, Tensors, and Forms . . . 60
1.2.2 g_{ik}, h_{ik}, ψ^{ij}, ∇, Γ^i_{kl}, R_{iklm}, R_{ik}, R, K . . . 60
1.2.3 Manifolds, Killing vectors, symmetries . . . 70
1.2.4 Riemannian Geometry for gravity . . . 75
1.2.5 Diffeomorphisms, Lie Derivative, Forms, Integration . . . 93

2 Important Details and Models in a Nutshell **111**
2.1 Typical Gravitational Fields and Models . . . 111
2.1.1 Overview of Black Holes . . . 111
2.1.2 Typical BH Coordinates, Diagrams, Rotation, Charge . . . 112
2.1.3 Collapsars, dust spheres . . . 120
2.1.4 Particles and rays in gravity . . . 124
2.1.5 Stars . . . 129
2.2 Gravitational waves: Typical models and properties . . . 129
2.3 Cosmology: Typical models and important questions . . . 141
2.3.1 Overview of evolution of the Universe . . . 141
2.3.2 Friedman Universe . . . 145
2.3.3 The Physics of Inflation . . . 151
2.3.4 Other generally important questions about cosmology . . . 154
2.4 Penrose Singularity, initial values, Raychaudhuri's Equation, causality (!!) . . . 154
2.4.1 7.1 The Initial Value Problem . . . 155
2.4.2 7.2 Geodesic Congruences . . . 158
2.4.3 7.3 Raychaudhuri's Equation . . . 162
2.4.4 7.4 Causal Structure . . . 164
2.5 8 Asymptotic Flatness . . . 165
2.5.1 8.1 Conformal Compactification . . . 165
2.5.2 8.2 Asymptotic Flatness . . . 169
2.5.3 8.3 Event Horizons and Killing Horizons . . . 170

II Fundamentals of Gravity **172**

*https://yuriholubeu.github.io/, yuri.holubev@gmail.com

3 Nature of Gravity **172**
3.1 Philosophy of Space, Time, Gravity: Basics . . . 172
3.1.1 Where Does Gravity Come From? . . . 172
3.1.2 Illustration of Gravity and Basic Thought Experiments . . . 173
3.1.3 The Concept of Time in GR . . . 173
3.1.4 Equality of Inertial and Gravitational Mass . . . 174
3.1.5 On Mach's Principle . . . 175
3.1.6 The Gravitational Constant G . . . 177
3.1.7 The Idea of a Metric . . . 177
3.1.8 The Idea of Curvature . . . 177
3.1.9 Is Statistical Physics Applicable for Models with Gravitational Field? . . . 178
3.1.10 The Equivalence Principle . . . 178
3.1.11 Illustration of the Equivalence Principle . . . 179
3.1.12 Applications of the Equivalence Principle . . . 179
3.2 Philosophy of Space, Time, Gravity: Physical, Experimental Facts . . . 180
3.2.1 Measurements of the Gravitational Constant . . . 180
3.2.2 What is Exactly Time? . . . 180
3.2.3 Time Travel: GR View Point . . . 180
3.2.4 Time Travel: Other Statements . . . 180
3.3 Philosophy of Space, Time, Gravity: Extra Discussion of Basics . . . 180
3.3.1 What Else Can be Gravity? . . . 180
3.3.2 On Misconceptions about the Nature of Gravity . . . 181
3.3.3 Equivalence of Gravitational and Inertial Masses . . . 181
3.3.4 What is a Force? . . . 181
3.4 Newtonian Gravity . . . 181
3.4.1 Gravitational Field in Nonrelativistic Mechanics . . . 181
3.4.2 Typical Models in Scope of Newtonian Gravity . . . 187
3.4.3 Gravitational Field in Relativistic Mechanics . . . 187
3.4.4 Newtonian Mechanics as a Particular Case of GR . . . 190
3.5 Basic topics in gravity by Zhou . . . 191
3.5.1 Riemannian Geometry for gravity . . . 191
3.5.2 7.1 The Initial Value Problem . . . 208
3.5.3 7.2 Geodesic Congruences . . . 211
3.5.4 7.3 Raychaudhuri's Equation . . . 215
3.5.5 7.4 Causal Structure . . . 217
3.6 8 Asymptotic Flatness . . . 219
3.6.1 8.1 Conformal Compactification . . . 219
3.6.2 8.2 Asymptotic Flatness . . . 223
3.6.3 8.3 Event Horizons and Killing Horizons . . . 224
3.7 Foundations of the GR Formalism . . . 226
3.7.1 Independence on coordinates . . . 226
3.7.2 Why Are We Attracted to the Earth? . . . 228
3.7.3 General Properties of General Relativity . . . 228
3.7.4 Influence of Gravitation on Matter . . . 230
3.7.5 Experimentally Verified Properties of the Gravitational Field . . . 230
3.7.6 Variational Principle . . . 230
3.7.7 Distances in Curved Spacetime . . . 230
3.8 Einstein's Equations . . . 233
3.8.1 Einstein–Hilbert Action . . . 233
3.8.2 Properties of Einstein's Equations . . . 236
3.8.3 Illustration of Einstein's Equations (????) . . . 238
3.8.4 Einstein's Path to General Relativity . . . 239
3.8.5 Einstein's Equations in the Tetrad Formalism (??) . . . 239

3.8.6 Einstein's Equations in the Second Order . . . 242
3.8.7 Einstein's Equations in the Second Order: Applications and Importance . . . 247
3.8.8 Overview of Various Solutions of Einstein's Equations . . . 250
3.8.9 Palatini Formalism (??) . . . 250
3.8.10 The Cauchy Problem (???) . . . 255
3.8.11 Harmonic Coordinates . . . 258
3.8.12 Features of Einstein Equations for Real Applications . . . 260
3.9 Conservation Laws in General Relativity . . . 260
3.9.1 Energy–Momentum Tensor . . . 260
3.9.2 Energy–Momentum Pseudotensor of the Gravitational Field . . . 263
3.9.3 The Law of Energy Conservation in GR . . . 266
3.9.4 4-Momentum and 4-Moment of Momentum of the Gravitational Field . . . 266
3.9.5 Examples of Energy Calculations in Curved Spacetime (!!!!) . . . 270
3.10 Other Fundamentals of GR . . . 270
3.10.1 Concept of Feynman Integral in Gravity (??) . . . 270
3.10.2 Feynman Integral in Gravity: Overview of Applications (??) . . . 270

4 Other Physics in the Presence of Gravitation 270
4.1 Other Equations of GR . . . 270
4.1.1 Geodesic Deviation Equation . . . 270
4.1.2 Geodesic Deviation Equation: Applications . . . 271
4.1.3 Light Cone (???) . . . 271
4.2 Electrodynamics in a Gravitational Field . . . 271
4.2.1 Typical Maxwell Equations in Curved Space . . . 272
4.2.2 Examples of Maxwell Equations in GR . . . 272
4.2.3 Einstein–Maxwell Equations . . . 272
4.3 Optics . . . 272
4.3.1 Optical Phenomena . . . 272
4.3.2 Fundamentals of Geometric Gravitational Lensing . . . 272
4.3.3 Geometric Gravitational Lensing: Other Useful Concepts . . . 273
4.3.4 Other about Gravitational Lensing . . . 273
4.4 Thermodynamics . . . 273
4.4.1 Thermodynamic Equations in GR (?) . . . 273
4.5 Hydrodynamics . . . 273
4.5.1 Hydrodynamic Equations (?) . . . 273

5 Other Details of Fundamentals of Gravity 275
5.1 Theory and Experiment in Gravitational Physics by Will . . . 275
5.2 Does GR Has a Meaning in Particular Cases? . . . 275
5.2.1 Is the Sky is Stable in GR? . . . 275
5.2.2 Is the principle of equivalence violated when a charged particle moves? . . . 276
5.3 Vacuum in GR: Fundamentals . . . 288
5.3.1 Vacuum in a homogeneous gravitational field and excitation of a uniformly accelerated detector . . . 288
5.4 Other Fundamental Details of the Theory of Gravitation . . . 292
5.4.1 Other Theoretical Properties of Gravity . . . 292
5.4.2 Everyday Analogies of GR . . . 292
5.4.3 Relativistic Mechanics as a Particular Case of GR . . . 293

III Basic Models of Gravity 294

6 Typical Models of GR **294**
6.1 General Properties of a Black Hole . . . 294
6.2 Schwarzschild Solution . . . 294
6.2.1 Derivation of the Schwarzschild Solution . . . 294
6.2.2 Derivation of the Schwarzschild Solution by Landau . . . 298
6.2.3 Dynamics in the Schwarzschild Solution . . . 307
6.2.4 Typical Consequences of the Schwarzschild Metric . . . 314
6.2.5 Kruskal Coordinates . . . 321
6.2.6 Penrose Diagrams . . . 322
6.2.7 Static Spherically Symmetric Body . . . 324
6.3 General Black Holes . . . 326
6.3.1 9.1 The Reissner-Nordstrom Solution . . . 326
6.3.2 9.2 The Kerr Solution . . . 328
6.3.3 9.3 Mass, Charge, and Spin . . . 330
6.3.4 9.4 Black Hole Mechanics . . . 333
6.4 Typical Particular Cases of Einstein Equations . . . 335
6.4.1 Weak Gravitational Fields . . . 335
6.4.2 Weak Gravitational Field in Terms of ψ . . . 343
6.4.3 Constant Gravitational Field (!!) . . . 346
6.4.4 Einstein Equations in Vacuum (??) . . . 351
6.4.5 Rotating Reference Frame . . . 354
6.4.6 Synchronous Reference Frame . . . 356
6.4.7 de Sitter Space . . . 363
6.4.8 Anti-de Sitter Space . . . 363

7 Typical Dynamical Models of GR **363**
7.1 Description of Motion of Particles in a Gravitational Field . . . 363
7.1.1 Equation of Motion of Particles in a Gravitational Field (??) . . . 363
7.1.2 Properties of Motion of Particles in Curved Spaces . . . 366
7.1.3 Deflection Angle of Particles . . . 366
7.1.4 Trajectory in Gravitational and Electromagnetic Fields . . . 372
7.1.5 Dynamics of Particles via Feynman Integral (??) . . . 374
7.2 Influence of Gravitational Field on Bodies . . . 374
7.2.1 Lense-Thirring Effect . . . 374
7.2.2 Geodetic Precession (de Sitter Effect) . . . 374
7.2.3 Deflection of Light by Gravitational Field . . . 375
7.2.4 Dust Falling into a Black Hole . . . 375
7.3 Time delays . . . 377
7.3.1 Time Delay . . . 377
7.3.2 Shapiro time delay . . . 380
7.4 Perihelion Precession . . . 380
7.4.1 Description of Perihelion Precession . . . 380
7.4.2 Other about Perihelion Precession . . . 382
7.5 Deflection of Light . . . 382
7.5.1 Description Template . . . 382
7.5.2 Gravitational Lensing in Centrally Symmetric Field . . . 384
7.6 Other Effects (??) . . . 385
7.6.1 Influence of Other Planets in the Schwarzschild Metric (??) . . . 385
7.6.2 Spin in Gravitational Field (??) . . . 387

8 Experiments on general relativity **387**
8.0.1 Line displacement . . . 387
8.0.2 Confirmation the Redshift . . . 388
8.0.3 The discovery of gravitational waves . . . 388
8.0.4 Experiments on graviton mass . . . 388
8.1 Classical tests . . . 388
8.1.1 Perihelion Advance of Mercury . . . 388
8.1.2 Deflection of light . . . 388
8.1.3 Gravitational Redshift . . . 388
8.2 Modern tests . . . 388
8.2.1 Shapiro Delay . . . 388
8.2.2 Gravitational Time Dilation . . . 388
8.2.3 Frame-dragging and Geodetic effect . . . 388
8.2.4 Equivalence principle tests . . . 388
8.2.5 Solar-system tests . . . 389
8.3 Strong field tests . . . 389
8.3.1 Gravitational lensing . . . 389
8.3.2 Gravitational waves . . . 389
8.3.3 Timing pulsars . . . 389
8.3.4 Extreme Environments . . . 389
8.4 Cosmological tests . . . 389
8.4.1 Expanding universe . . . 389
8.4.2 Cosmological observations . . . 389
8.4.3 Weak lensing surveys . . . 389

9 Black Holes: Special Types and Special Physics **389**
9.1 Typical Effects and Properties of Black Holes . . . 389
9.1.1 On Penrose–Hawking singularity theorems . . . 389
9.1.2 On Raychaudhuri equation (??????) . . . 390
9.1.3 Hawking Radiation: Basics (??!!?) . . . 390
9.1.4 Hawking Radiation: Other Statements (??!!?) . . . 390
9.1.5 What Happens when one Falls into BH? . . . 390
9.1.6 The Entropy of Black Holes (??) . . . 390
9.2 Charged Black Holes . . . 390
9.2.1 1 The Reissner-Nordstrom Solution . . . 390
9.3 Other Black Holes (???) . . . 392
9.3.1 Rotating Black Holes . . . 392
9.3.2 Requirements to Create a Black Hole . . . 393

10 Stars [see Miesner Thorn Wheeler!] **393**

11 Gravitational Waves: Typical Cases **394**
11.1 Typical Gravitational Waves . . . 394
11.1.1 GW by Tong (???) . . . 394
11.1.2 GW by Landau . . . 394
11.1.3 GW by Lashkevich (???) . . . 398
11.1.4 Proof that there are GW . . . 404
11.2 Radiation of GW . . . 404
11.2.1 Radiation of GW by Lashkevich (???) . . . 404
11.2.2 Radiation of GW by Landau (???) . . . 410
11.2.3 Some Models That Radiate GWs . . . 413
11.3 Other about GW . . . 416
11.3.1 Polarization of GW . . . 416
11.3.2 Some Other Features of GW . . . 418

11.3.3 Other about GW . . . 420
11.3.4 GW in Different Theories and Dimensions (????) . . . 420
11.4 Detection of GW . . . 421

12 Other Models of GR **421**
12.1 Collapsars . . . 421
12.1.1 Collapse of Spherical Body . . . 421
12.1.2 Collapse of Dust Sphere . . . 427
12.1.3 Collapse of Non-spherical and Rotating Bodies . . . 432
12.2 Other Models . . . 440
12.2.1 Interaction of Gravitational Field with Matter . . . 440
12.2.2 Gravitational Fields of Other Bodies . . . 440
12.3 Catalogue of Spacetimes by Müller, Grave . . . 441
12.3.1 Introduction to Catalogue of Spacetimes and Notation . . . 441
12.3.2 Minkowski . . . 453
12.3.3 Schwarzschild spacetime . . . 457
12.3.4 Alcubierre Warp . . . 467
12.3.5 Barriola-Vilenkin monopol . . . 468
12.3.6 Bertotti-Kasner . . . 470
12.3.7 Bessel gravitational wave . . . 472
12.3.8 Cosmic string in Schwarzschild spacetime . . . 473
12.3.9 Ernst spacetime . . . 475
12.3.10 Ernst spacetime II (???) . . . 476
12.3.11 Friedman-Robertson-Walker . . . 478
12.3.12 Gödel Universe . . . 485
12.3.13 Halilsoy standing wave . . . 488
12.3.14 Janis-Newman-Winicour . . . 489
12.3.15 Kasner . . . 490
12.3.16 Kerr . . . 492
12.3.17 Kottler spacetime . . . 495
12.3.18 Morris-Thorne . . . 497
12.3.19 Oppenheimer-Snyder collapse . . . 499
12.3.20 Petrov-Type D – Levi-Civita spacetimes . . . 501
12.3.21 Plane gravitational wave . . . 506
12.3.22 Reissner-Nordstrøm . . . 507
12.3.23 de Sitter spacetime . . . 509
12.3.24 Straight spinning string . . . 514
12.3.25 Sultana-Dyer spacetime . . . 516
12.3.26 TaubNUT . . . 517

IV Problems in Gravity **519**

13 Basic Problems **519**
13.1 Preparatory Problems for GR . . . 519
13.1.1 Problems about Kinematic Models of SR . . . 519
13.1.2 Problems about Dynamic Models of SR . . . 519
13.1.3 Problems about Coordinate Transformations in SR . . . 519
13.1.4 Problems about Electromagnetic Field . . . 519
13.1.5 Problems about Matter and Radiation . . . 527
13.2 Problems on the Mathematical Foundations of GR . . . 544
13.2.1 Problems about Metric . . . 544
13.2.2 Problems about Covariant Differentiation and Geodesics . . . 549
13.2.3 Other Problems on Differential Geometry . . . 562

13.2.4 Problems about Curvature . . . 574
13.2.5 Problems about Killing Vectors and Symmetries . . . 598
13.2.6 Problems about Angular Momentum (?????) . . . 610
13.3 Typical Formalism and Laws of Gravity . . . 621
13.3.1 Problems about Gravitational Field Equations and Their Linearization . . . 621
13.3.2 Problems about Schwarzschild Geometry . . . 634
13.3.3 Problems from Lashkevich 1 . . . 661
13.3.4 Problems from Lashkevich 2 . . . 665
13.3.5 Problems from Lashkevich 3 . . . 668
13.3.6 Problems from Lashkevich 4 . . . 673
13.3.7 Problems from Lashkevich 5 . . . 679
13.3.8 Problems from Lashkevich 6 . . . 687
13.3.9 Problems from Lashkevich 7 . . . 693
13.4 Questions on Understanding Gravity . . . 696
13.4.1 Questions on Understanding the Nature of Gravity . . . 696
13.4.2 Questions on Understanding the Formalism of GR . . . 696
13.4.3 Questions on Understanding the Properties of GR . . . 696
13.4.4 Questions on Understanding the Details of GR . . . 696
13.5 Problems about Typical Models . . . 696
13.5.1 Problems about Physics in Gravity (???) . . . 696
13.5.2 Problems about Physical Effects of Gravity 2 . . . 703
13.5.3 Problems about Physical Effects of Gravity 3 . . . 714
13.5.4 Problems about Structure of Stars 1 . . . 721
13.5.5 Problems about Structure of Stars 2 . . . 725
13.5.6 Problems about Structure of Stars 3 . . . 735
13.5.7 Problems about Black Holes 1 . . . 740
13.5.8 Problems about Black Holes 2 . . . 744
13.5.9 Problems about Black Holes 3 . . . 750
13.5.10 Problems about Black Holes 4 . . . 754
13.5.11 Problems about Gravitational Radiation 1 . . . 766
13.5.12 Problems about Gravitational Radiation 2 . . . 775
13.5.13 Problems about Basics of Cosmology 1 . . . 783
13.5.14 Problems about Basics of Cosmology 2 . . . 789
13.5.15 Problems about Basics of Cosmology 3 . . . 795
13.5.16 Problems about Basics of Cosmology 4 . . . 800
13.5.17 Other Problems (??) . . . 807
13.5.18 Problems about Experiments Testing Gravity Models . . . 816
13.6 Problems within Newtonian Theory of Gravitation . . . 824
13.6.1 Interaction Energy of Gravitational Systems (???) . . . 824
13.7 Problem book in relativity and gravitation by Lightman, Press, Price, Teukolskv . . . 825
13.7.1 1 Special-Relativistic Kinematics . . . 825
13.7.2 2 Special-Relativistic Dynamics . . . 841
13.7.3 3 Special-Relativistic Coordinate Transformations . . . 850
13.7.4 4 Electromagnetism . . . 861
13.7.5 5 Matter and Radiation . . . 869
13.7.6 6 Metrics . . . 885
13.7.7 7 Covariant Differentiation and Geodesic Curves . . . 892
13.7.8 8 Differential Geometry: Further Concepts . . . 906
13.7.9 9 Curvature . . . 919
13.7.10 10 Killing Vectors and Symmetries . . . 938
13.7.11 11 Angular Momentum . . . 944
13.7.12 12 Gravitation Generally . . . 956
13.7.13 13 Gravitational Field Equations and Linearized Theory . . . 966

13.7.14 14 Physics in Curved Spacetime . . . 978
13.7.15 15 The Schwarzschild Geometry . . . 988
13.7.16 16 Spherical Symmetry and Relativistic Stellar Structure . . . 1005
13.7.17 17 Black Holes . . . 1025
13.7.18 18 Gravitational Radiation . . . 1039
13.7.19 19 Cosmology . . . 1056
13.7.20 20 Experimental Tests . . . 1080
13.7.21 21 Miscellaneous . . . 1089

V —— Special Topics in Gravity in a Nutshell —— 1101

14 Special methods and theories 1101
14.1 How we understand nature of gravity? . . . 1101
14.1.1 Main Experimental Data and Other Cues for True Theory of Gravity . . . 1101
14.1.2 Equivalence Principle, acceleration . . . 1102
14.1.3 Gravitational constant (?) . . . 1105
14.1.4 Speeds, Times, Acceleration, Forces (???) . . . 1105
14.1.5 Λ Term . . . 1112
14.2 Other basic mathematical concepts for gravity . . . 1112
14.2.1 Special Constructions of Differential Geometry (?!?!?) . . . 1112
14.2.2 Geodesics, Deviation of Geodesics . . . 1113
14.2.3 Frames of Reference, Tetrad Formalism (!?!?) . . . 1113
14.3 Other potentially useful mathematics in a nutshell . . . 1116
14.3.1 Solving Differential Equations in a Curved Space (?!) . . . 1116
14.3.2 On special diffgeom properties (!!??) . . . 1116
14.3.3 On perturbation theory (!!??) . . . 1117
14.3.4 Multipole Expansion of GW Radiation (???) . . . 1117
14.3.5 On gravity as a field theory (???) . . . 1117
14.4 Other established properties in a nutshell . . . 1118
14.4.1 Second Order Equation of Motion in GR . . . 1118
14.4.2 Special Formalisms for GR (????) . . . 1119
14.4.3 Equation of State . . . 1119
14.4.4 Optics, Lensing in GR . . . 1120
14.4.5 Electrodynamics in gravity . . . 1120
14.4.6 Geons, Kugelblitz, gravitational solitons . . . 1121
14.4.7 Primordial quantum bubbles and phase transitions in a nutshell . . . 1121
14.5 Other experimental data (?) . . . 1121
14.6 Other potentially useful formalisms in a nutshell . . . 1122
14.6.1 Hamiltonian Mechanics for GR (??) . . . 1122
14.7 Numerical relativity (??) . . . 1122
14.8 Other gravitational models . . . 1122

15 Special models in a nutshell 1122
15.1 Modified theories of gravity in a nutshell . . . 1122
15.1.1 Scalar Theories of Gravity . . . 1122
15.1.2 Quasilinear Theories of Gravity . . . 1123
15.1.3 Scalar-Tensor Theories of Gravity . . . 1123
15.1.4 Vector-Tensor Theories of Gravity . . . 1123
15.1.5 Non-metric Theories of Gravity . . . 1124
15.1.6 Mach's gravity . . . 1124
15.1.7 Supergravities . . . 1124
15.2 Quantization of gravity in a nutshell . . . 1124
15.2.1 Idea of Quantization of Gravity and Main Difficulties . . . 1124

15.2.2 Main concepts of quantum gravity . . . 1124
15.3 Fields, particles and QFT in Curved Spacetime in a Nutshell . . . 1125
15.3.1 10.1 Flat Spacetime by Zhou . . . 1125
15.3.2 10.2 Curved Spacetime . . . 1130
15.3.3 10.3 The Unruh Effect by Zhou . . . 1134
15.3.4 10.4 Hawking Radiation and Black Hole Thermodynamics . . . 1137
15.3.5 10.5 Spinors in Curved Spacetime . . . 1140
15.3.6 Fields and QFT По Зи и Степаньянцу . . . 1141
15.3.7 Spinors in Curved Spacetime . . . 1141
15.4 Stars . . . 1142
15.4.1 Star Models: Details . . . 1142
15.5 Black Holes: Detailed Models . . . 1142
15.5.1 Massive Black Holes: Details . . . 1142
15.5.2 Charged Black Holes: Details . . . 1142
15.5.3 Spinning and Charged Black Holes: Details . . . 1143
15.5.4 Collision of Black Holes . . . 1144
15.5.5 Other Collapsars (???) . . . 1144
15.6 Cosmology: other well-known models . . . 1145
15.6.1 Cosmological Models from Landau's book (???) . . . 1145
15.6.2 On The Hot Big Bang . . . 1145
15.6.3 On Equilibrium . . . 1151
15.6.4 On Beyond Equilibrium . . . 1156
15.6.5 On other topics in cosmology . . . 1162
15.6.6 Some Special Models of Cosmology . . . 1162
15.7 High-Energy Phenomena of Gravity (???) . . . 1162
15.8 Gravitational real and hypothetical inventions in a nutshell . . . 1163
15.8.1 Warp drive . . . 1163

VI Basics of Cosmology 1164

16 General Ideas of Cosmology 1164
16.0.1 What is a Universe? . . . 1164
16.0.2 Homogeneity of the Universe . . . 1164
16.0.3 Features of Laws of Physics at the Scale of the Universe (???) . . . 1164
16.0.4 Is Cosmology a Science? . . . 1164

17 Typical Models of Cosmology 1164

18 Other about Cosmology 1164
18.1 Other Properties of the Universe . . . 1164
18.1.1 Number of Particles in the Universe . . . 1165
18.1.2 What Is on the Edge of the Universe? . . . 1165
18.2 Basics of Quantum Cosmology . . . 1165
18.3 Special Cosmological Phenomena and Paradoxes . . . 1165

VII Numerical Relativity 1166

19 Phantom: A smoothed particle hydrodynamics and magnetohydrodynamics code for astrophysics 1166
19.1 Introduction . . . 1166
19.2 Numerical method . . . 1167
19.2.1 Fundamentals . . . 1167
19.2.2 Hydrodynamics . . . 1174

19.2.3 Time integration . . . 1179
19.2.4 External forces . . . 1182
19.2.5 Driven turbulence . . . 1186
19.2.6 Accretion disc viscosity . . . 1188
19.2.7 Navier-Stokes viscosity . . . 1190
19.2.8 Sink particles . . . 1192
19.2.9 Stellar physics . . . 1196
19.2.10 Magnetohydrodynamics . . . 1196
19.2.11 Non-ideal magnetohydrodynamics . . . 1201
19.2.12 Self-gravity . . . 1203
19.2.13 Dust-gas mixtures . . . 1208
19.2.14 Interstellar medium (ISM) physics . . . 1218
19.2.15 Particle injection . . . 1221
19.3 Initial conditions . . . 1222
19.3.1 Uniform distributions . . . 1222
19.3.2 Stretch mapping . . . 1222
19.3.3 Accretion discs . . . 1223
19.3.4 Stars and binary stars . . . 1224
19.3.5 Galactic initial conditions . . . 1224
19.3.6 Damping . . . 1225
19.4 Software Engineering . . . 1225
19.5 Numerical tests . . . 1225
19.5.1 Hydrodynamics . . . 1226
19.5.2 External forces . . . 1232
19.5.3 Accretion discs . . . 1235
19.5.4 Physical viscosity . . . 1240
19.5.5 Sink particles . . . 1240
19.5.6 Magnetohydrodynamics . . . 1242
19.5.7 Non-ideal MHD . . . 1256
19.5.8 Self-gravity . . . 1259
19.5.9 Dust-gas mixtures . . . 1261
19.5.10 ISM cooling and chemistry . . . 1267
19.6 Example applications . . . 1268
19.6.1 Supersonic turbulence . . . 1268
19.6.2 Star cluster formation . . . 1269
19.6.3 Magnetic outflows during star formation . . . 1271
19.6.4 Galaxy merger . . . 1271
19.6.5 Gap opening in dusty discs . . . 1274
19.7 Summary . . . 1275
19.8 Details of code implementation . . . 1275
19.8.1 Smoothing kernels . . . 1275
19.8.2 Particle types . . . 1276
19.8.3 Evaluating density and acceleration . . . 1276
19.8.4 OpenMP parallelisation . . . 1279
19.8.5 MPI parallelisation . . . 1282
19.8.6 Timestepping algorithm . . . 1284
19.8.7 Initial conditions: Monte Carlo particle placement . . . 1286
19.8.8 Runtime parameters in PHANTOM in relation to this paper . . . 1286
19.8.9 The PHANTOM testsuite . . . 1286

VIII Other Topics 1290

20 Quantization of Gravity (???) 1290

21 Some Proposed More General Theories of Gravity **1290**
21.1 Brans-Dicke Theory (?) . . . 1290
21.1.1 Overview . . . 1290
21.1.2 Theory . . . 1290
21.1.3 Other about Brans-Dicke Theory (??) . . . 1290

22 Multipole expansions of gravitational radiation by Thorne **1290**
22.1 The General Multipole-Moment Formalism . . . 1291
22.1.1 Introduction and Summary . . . 1291
22.1.2 Spherical Harmonics: Scalar, Vector, and Tensor . . . 1296
22.1.3 Solutions of Laplace's equation . . . 1305
22.1.4 Solutions of the wave equation . . . 1306
22.1.5 Regions of Spacetime Around an Isolated Source . . . 1309
22.2 Multipole Expansion of the Radiation Field by Thorne . . . 1311
22.2.1 Radiation field itself . . . 1311
22.2.2 Energy in the waves . . . 1312
22.2.3 Linear momentum in the waves . . . 1314
22.2.4 Angular momentum in the waves . . . 1315
22.3 Multipole Moments Expressed as Integrals over Source by Thorne . . . 1317
22.4 Slow-Motion Sources of Gravitational Waves by Thorne . . . 1325
22.4.1 Linearized Theory . . . 1326
22.4.2 Dynamical Sources in de Donder Gauge . . . 1329
22.4.3 Stationary Sources in de Donder Gauge . . . 1338
22.4.4 Stationary Sources in an "Acmc" Coordinate System . . . 1340
22.4.5 Transformations between ACMC coordinate systems . . . 1341
22.4.6 Multipole moments of the Kerr metric . . . 1345
22.4.7 Formalism for Calculating Wave Generation . . . 1348
22.4.8 Appendix: Tails of the Gravitational Waves . . . 1349

23 Other Questions **1349**
23.1 Classical Theory of Gravity (from Ivanenko's Collection of Articles) . . . 1350
23.2 Quantum Theory of Gravity and Elementary Particles (from Ivanenko's Collection of Articles) . . . 1350
23.3 Experimental Studies (from Ivanenko's Collection of Articles) . . . 1350

24 Other Fundamental Ideas **1350**
24.0.1 Strong and Weak Equivalence Principles in the Theory of Gravitation by G. Treder 1350
24.0.2 Theory of Gravitation — Theories of Reference Systems by G. Treder . . . 1351

25 Black holes, GW and fundamental physics: a roadmap by Barack et al. **1351**
25.0.1 Glossary . . . 1351
25.0.2 Preface . . . 1352
25.1 I: The astrophysics of compact object mergers: prospects and challenges . . . 1353
25.1.1 Introduction . . . 1353
25.1.2 LIGO and Virgo Observations of Binary BH Mergers and a Binary Star . . . 1354
25.1.3 Black hole genesis and archaeology . . . 1355
25.1.4 Classical binary stellar evolution . . . 1360
25.1.5 Dynamical Formation of Stellar-mass Binary Black Holes . . . 1368
25.1.6 Primordial Black Holes and Dark Matter . . . 1375
25.1.7 Formation of supermassive black hole binaries in galaxy mergers . . . 1378
25.1.8 Probing supermassive black hole binaries with pulsar timing arrays . . . 1381
25.1.9 Numerical Simulations of Stellar-mass Compact Object Mergers . . . 1384
25.1.10 Electromagnetic Follow-up of Gravitational Wave Mergers . . . 1388
25.1.11 X-ray and gamma-ray binaries . . . 1392

25.1.12 Supermassive black hole binaries in the cores of AGN . . . 1393
25.1.13 Cosmology and cosmography with gravitational waves . . . 1395
25.2 II: Modelling black-hole sources of gravitational waves: prospects and challenges . . . 1402
25.2.1 Introduction . . . 1402
25.2.2 Perturbation Methods . . . 1403
25.2.3 Post-Newtonian and Post-Minkowskian Methods . . . 1408
25.2.4 Numerical Relativity and the Astrophysics of Black Hole Binaries . . . 1413
25.2.5 Numerical relativity in fundamental physics . . . 1417
25.2.6 Effective-One-Body and Phenomenological models . . . 1423
25.2.7 Source modelling and the data-analysis challenge . . . 1427
25.2.8 The view from Mathematical GR . . . 1432
25.3 III: Gravitational waves and fundamental physics . . . 1434
25.3.1 Introduction . . . 1434
25.3.2 Beyond GR and the standard model . . . 1434
25.3.3 Detecting new fields in the strong gravity regime . . . 1442
25.3.4 The nature of Compact Objects . . . 1450
25.3.5 The dark matter connection . . . 1461

26 Prospects for Fundamental Physics with LISA by Barausse et al. 1469
26.0.1 Introduction . . . 1469
26.0.2 Modified Dispersion Relations and the Speed of Gravity . . . 1471
26.0.3 Violations of the Equivalence Principle and Fundamental Symmetries . . . 1473
26.0.4 Tests of the Nature of Black Holes . . . 1475
26.0.5 Dark Energy and the ΛCDM Model . . . 1476
26.0.6 Dark Matter and Primordial Black Holes . . . 1478
26.0.7 Other Model-Independent Tests . . . 1479
26.0.8 Astrophysical Systematics . . . 1480
26.0.9 Waveform Systematics . . . 1482
26.0.10 Conclusions . . . 1484

IX Deeper Understanding of Gravity and Hypothetical Ideas 1485

27 General Relativity by Arifov 1485
27.1 Physical Foundations of the Theory of Relativity . . . 1485
27.1.1 1. Equality of Inertial and Gravitational Mass . . . 1485
27.1.2 2. Limitations of Special Relativity . . . 1489
27.1.3 3. Einstein's Theory of Gravitation . . . 1498
27.1.4 4. The Correspondence Principle . . . 1502
27.1.5 5. Measurement of the Metric of the Physical World . . . 1509
27.1.6 6. Dimensionality of the Physical World . . . 1514
27.1.7 7. Reference Frames. Absolute Acceleration . . . 1516
27.1.8 8. Fermi Coordinates . . . 1524
27.1.9 9. Measurement of Absolute Acceleration . . . 1529
27.1.10 10. Measurement of the Curvature of the Physical World . . . 1531
27.1.11 11. Standards for Measuring Proper Time . . . 1534
27.1.12 12. Equipping the World with Standards of Proper Time . . . 1540
27.1.13 13. Synchronization of Clocks . . . 1544
27.1.14 14. Anisotropy of the Speed of Light . . . 1555
27.1.15 15. Rotating Reference Frame . . . 1556
27.1.16 16. Covariant Formulation of Simultaneity . . . 1558
27.1.17 17. Uniqueness of the Metric Vector Field . . . 1561
27.1.18 18. The Cauchy Problem and Reference Frames . . . 1564
27.1.19 19. Conservation Laws . . . 1572

27.2 Relativistic Geometrical Optics by Arifov . . . 1580
27.2.1 20. Method and Problems . . . 1580
27.2.2 21. Fermat's Principle . . . 1581
27.2.3 22. Propagation of Light in a Metric Field . . . 1584
27.2.4 23. Anisotropy of Wavelength on a Rotating Body . . . 1589
27.2.5 24. Measurement of the Metric Vector Field . . . 1591
27.2.6 25. Dependence of Emission Frequency on the Metric Field . . . 1592
27.2.7 26. Isotropic Optical Medium . . . 1595
27.2.8 27. Reflection and Refraction of Light at the Boundary of a Medium . . . 1600
27.2.9 28. Principle of Local Reversibility of Rays . . . 1602
27.2.10 29. Group Velocity . . . 1604
27.3 Gravitational Field of an Isolated Body . . . 1606
27.3.1 30. General Static Solution of Einstein's Equations . . . 1606
27.3.2 31. Light Rays and World Lines of Free Test Particles . . . 1619
27.3.3 32. What Lies on the Singular World Line of the Center? . . . 1624
27.3.4 33. Gravitational Repulsion . . . 1628
27.3.5 34. Extremality of the Mass of the Equilibrium State of an Isolated Body . . . 1630
27.3.6 35. Stable Equilibrium Configurations of an Isolated Body . . . 1634
27.3.7 36. Stable Equilibrium Configurations for a Supercritical Number of Particles . . . 1636
27.3.8 37. Compact Objects with Large Mass Defect . . . 1639
27.3.9 38. Why a Nonrelativistic Analog Does Not Exist? . . . 1641
27.3.10 39. Small Rotational Perturbations . . . 1642
27.3.11 40. Axial Rotation of an Isolated Body . . . 1650

28 Frames of reference in the theory of gravity by Vladimirov Yu.S. (1982) 1657
28.1 Overview of Frames of reference in the theory of gravity by Vladimirov Yu.S. (1982) . . . 1657
28.2 Metric Relations and Space-Time Symmetry . . . 1660
28.2.1 1. Admissible Coordinate Systems . . . 1660
28.2.2 2. Covariant and Contravariant Quantities. Fundamentals of Tensor Algebra . . . 1661
28.2.3 3. Metric Tensor . . . 1662
28.2.4 5. Operators of Covariant Differentiation. Parallel Transport . . . 1664
28.2.5 6. Curvature Tensor and Its Properties . . . 1666
28.2.6 7. Fundamental Equations of General Relativity . . . 1667
28.2.7 8. Mobility of Riemannian Spaces . . . 1670
28.2.8 9. Correspondences Between Riemannian Spaces . . . 1674
28.3 Asymmetry of Space and Time . . . 1676
28.3.1 1. Signature of Space-Time . . . 1676
28.3.2 2. Petrov Algebraic Classification of Einstein Spaces . . . 1677
28.3.3 3. Chronogeometry . . . 1680
28.3.4 4. Equations of Motion of Test Particles . . . 1682
28.3.5 5. Reference Frames . . . 1686
28.4 Monad Method for Describing the Motion of Reference Frames . . . 1687
28.4.1 1. Algebra of the General Covariant Monad Method . . . 1687
28.4.2 2. Monad Physical-Geometric Tensors . . . 1689
28.4.3 3. Operators of Differentiation in Monad Formalism . . . 1691
28.4.4 4. Fundamental Equations of General Relativity and Field Theory in Monad Form 1693
28.4.5 5. Monad Method in Chronometric Coordinate Systems . . . 1696
28.4.6 6. Normal Reference Frames. Kinemetric Invariants . . . 1699
28.4.7 7. Particular Types of Reference Frames . . . 1702
28.4.8 8. Transition from One Reference Frame to Another . . . 1704
28.4.9 9. Concept of Tetrads. AME Gauge (????) . . . 1708
28.4.10 1. Schwarzschild Metric . . . 1709
28.4.11 2. Motion of Monopole Test Bodies in Schwarzschild Metric . . . 1712
28.4.12 3. Effect of Mercury Perihelion Shift . . . 1714

28.4.13 4. Deflection of Light Rays Passing Near the Sun. Gravitational Redshift . . . 1715
28.4.14 5. Small Oscillations of Test Bodies on Circular Orbits (Shirokov Effect) 1717
28.4.15 6. General Relativistic Relation of Translational and Rotational Motion of Planets 1719
28.4.16 7. Spherically Symmetric Metrics 1722
28.5 Some Effects of General Relativity in Axially Symmetric Metrics 1723
28.5.1 1. Kerr Metric 1723
28.5.2 2. Equations of Motion of Monopole Test Bodies in Kerr Metric 1725
28.5.3 3. Drift of the Meeting Point of Two Monopole Test Particles Moving in Opposite Directions on Circular Orbits (Mitskevich Effect) 1728
28.5.4 4. Schiff Effect 1730
28.5.5 5. Small Oscillations of Test Bodies on Circular Orbits in Kerr Metric 1733
28.5.6 6. Axially Symmetric Particle-like Solutions of Einstein–Maxwell Equations of Type D 1734
28.6 Spatial Sections and Time in Cosmological Models 1735
28.6.1 1. Homogeneous Isotropic Cosmological Models. Problem Statement 1735
28.6.2 2. Spatial Sections of Constant Positive, Negative and Zero Curvature 1737
28.6.3 3. Homogeneous Isotropic Models of the Universe 1739
28.6.4 4. Dependence of the Character of Spatial Sections in Cosmological Models on the Choice of Reference Frame 1741
28.6.5 5. Observables in Friedmann Models 1744
28.6.6 6. Homogeneous Anisotropic Models of the Universe 1745
28.7 Complete and Incomplete Methods of Describing Observers in General Relativity . . . 1747
28.7.1 1. Mathematical Apparatus of the General Covariant Dyad Formalism 1748
28.7.2 2. Group Gauges of the Dyad Formalism 1750
28.7.3 3. Physical Applications of the Dyad Formalism 1752
28.7.4 4. General Covariant Diar Formalism 1754
28.7.5 5. Group Gauges of the Diar Formalism 1756
28.7.6 6. Possible Physical Interpretations of the Diar Formalism 1758
28.7.7 7. Tetrad Formalism 1760
28.7.8 8. Gauges of the Tetrad Formalism 1763
28.7.9 9. Dirac Equations in Curved Spacetime 1764
28.7.10 10. Newman–Penrose Isotropic Tetrad Formalism and its Relation to the Dyad Method 1766
28.8 The Problem of Energy-Momentum of the Gravitational Field 1768
28.8.1 1. Essence of the Energy-Momentum Problem in General Relativity 1768
28.8.2 2. Pseudotensors of Energy-Momentum of the Gravitational Field 1769
28.8.3 3. Monad Vectors of Energy of the Gravi-Inertial Field 1772
28.8.4 4. Definitions of Superenergy of the Gravi-Inertial Field 1774
28.8.5 5. Dyad and Tetrad Complexes of Energy-Momentum of the Gravi-Inertial Field 1775
28.9 Gravi-Inertial Waves 1776
28.9.1 1. The Problem of Describing Gravitational Waves 1776
28.9.2 2. Algebraic Criteria for Gravitational Waves 1778
28.9.3 3. Referential Definition of Gravi-Inertial Waves 1780
28.9.4 4. Dyad Description of Gravi-Inertial Waves 1782
28.9.5 5. Examples of Exact Wave Solutions of Einstein's Equations 1784
28.9.6 6. Weak Plane Gravi-Inertial Waves 1787
28.9.7 7. Behavior of Instruments in a Weak Plane Gravi-Inertial Wave 1789
28.10 Towards Quantization of Gravity 1793
28.10.1 1. Necessity of Constructing a Quantum Theory of Gravity 1793
28.10.2 2. Problem Statement and Difficulties of Gravity Quantization 1794
28.10.3 3. Hamiltonian Formalism in Curved Spacetime 1795
28.10.4 4. Hamiltonian Formulation of General Relativity and Kinemetric Invariants . . 1799
28.10.5 5. Separation of Two Pairs of Dynamical Variables Using the Dyad Method . . 1802

28.10.6 6. Examples of Separation of Gravitational Dynamical Variables . . . 1804
28.10.7 7.Towards the Theory of Superspace . . . 1806
28.10.8 8. Examples of Superspaces . . . 1807
28.11 Gauge-Invariant 5-Dimensional Theory of Spacetime . . . 1810
28.11.1 1. Five-Dimensionality and the Monad Method . . . 1810
28.11.2 2. Mathematical Apparatus of Gauge-Invariant 5-Dimensional Theory . . . 1811
28.11.3 3. Physical Reality and Cylindrically Symmetric 5D Riemannian Geometry in the Fifth Coordinate . . . 1814
28.11.4 4. Electrically Charged Field in the 5D Theory . . . 1816
28.11.5 5. Spherically Symmetric Solutions of 5D "Einstein Equations" . . . 1819
28.11.6 6. Homogeneous Isotropic Cosmological Models in 5D Theory . . . 1822
28.12 Features of 4-Dimensional Spacetime . . . 1825
28.12.1 1. The Problem of Justifying the 4-Dimensionality of Spacetime . . . 1825
28.12.2 2. General Covariant Features of 4-Dimensional Manifolds . . . 1826
28.12.3 3. Physical Features of 4D in Static Spacetime Manifolds . . . 1827
28.12.4 4. Properties of Solutions of Wave Equations in Spacetime Manifolds of $n+1$ Dimensions . . . 1828
28.12.5 5. Rigidity of Field Equations. Number of Dynamical Variables . . . 1830
28.12.6 6. Algebraic Features and Discrete Transformations in Manifolds with Signature $(+---...)$ . . . 1831

29 Philosophical Questions about Gravity **1836**
29.1 Theories of Gravitation of Ancient Philosophers . . . 1836

30 Hypothetical Ideas **1836**
30.1 Hypothetical Wormholes . . . 1836
30.1.1 Einstein-Rosen Bridge (???) . . . 1836
30.2 Parallel Worlds . . . 1836
30.2.1 How Can We See that There Could Be Parallel Worlds? . . . 1836
30.2.2 Life Beyond the Black Hole . . . 1836
30.3 Probably Incorrect Theories of Gravitation . . . 1836
30.3.1 Relativistic Theory of Gravitation (??) . . . 1836
30.4 Other Hypothetical Models . . . 1836
30.4.1 Zero-energy Universe (???) . . . 1836
30.5 Fun, But Impossible Objects . . . 1837
30.5.1 Gravity of a Flat Planet (???) . . . 1837

X Appendix **1838**

A Introduction to Gravity **1838**
A.1 How Real Professional in Gravity Think? . . . 1838
A.1.1 Other Motivation to Study Gravity . . . 1838
A.1.2 Prospects of Studying GR . . . 1839
A.1.3 Motivation for Sections of GR . . . 1839
A.1.4 My Attitude to the Science of Gravity . . . 1840
A.1.5 Which Formalism is the Best? . . . 1840
A.1.6 How Not to Make Mistakes while Solving Problems on Gravity? . . . 1841
A.1.7 How to Guess the Main Ideas and Laws of Gravity? . . . 1841
A.1.8 On Bypassing Dead Ends in Understanding Gravity . . . 1842
A.1.9 Overview of the Most Applied Topics . . . 1842
A.1.10 Features of Effective Studying . . . 1842
A.2 Acknowledgements . . . 1844
A.3 Literature on Gravity . . . 1844

A.3.1 Main Literature . . . 1844
A.3.2 Additional Literature . . . 1845
A.4 Description of this Note . . . 1850
A.5 General Overview of Gravity . . . 1852
A.5.1 Overview of Gravity as a Physical Phenomena . . . 1852
A.5.2 Overview of Gravity as a Science . . . 1853
A.5.3 Amazing Facts . . . 1853
A.5.4 Review of Different Formalisms and Modified Theories of Gravity . . . 1853
A.5.5 Connection of Gravity with Other Sciences . . . 1853
A.6 Puzzles of Gravity . . . 1857
A.6.1 Popular and Simple Puzzles for a Semi-Philosophical Talk with an Enthusiast . . . 1858
A.6.2 Puzzles for a Semi-Philosophical Talk with Someone Who Knows Gravity . . . 1859
A.6.3 Fun Puzzles about Models of GR . . . 1862
A.6.4 Puzzles for Preparation to Gravity and Introduction . . . 1863
A.7 History of Research in Gravity in a Nutshell . . . 1863

B Some Mathematics **1869**
B.1 Riemannian Geometry . . . 1869
B.1.1 Basics of Differential Geometry . . . 1869
B.1.2 Typical Constructions of Differential Geometry . . . 1873
B.1.3 Vector Analysis . . . 1875
B.1.4 Metric . . . 1876
B.1.5 Covariant Derivative . . . 1879
B.1.6 Parallel Transport . . . 1895
B.1.7 Riemann, Ricci Tensors . . . 1899
B.1.8 Other, Special Constructions of Riemannian Geometry . . . 1910
B.2 Equations of PDE . . . 1914
B.3 Some Other Constructions of Mathematics for GR . . . 1915
B.3.1 Numerical Relativity . . . 1915
B.3.2 Integral Theorems of Analysis . . . 1915
B.3.3 Catalog of Integrals Useful for GR . . . 1916
B.3.4 Variational Methods . . . 1917
B.3.5 Differential Equations . . . 1917
B.3.6 Linear Algebra . . . 1917

C Some Physics and Programming **1919**
C.1 Типичная подразумевающаяся понятной физика для гравитации . . . 1919
C.1.1 Other SR and Mechanics . . . 1919
C.1.2 Field Theory and Electrodynamics . . . 1923
C.1.3 Field Theory in Curved Space in a Nutshell . . . 1925
C.2 Programming for Gravity . . . 1928

D Bibliography **1932**

Preface and main motivation



Fundamentals of Gravity

Basic Models of Gravity

Basics of Cosmology

Other Topics

Deeper Understanding of Gravity

Appendix

I used the following literature.

Let's start with discussing some minimum knowledge and motivation that would be good to understand for studying the subject.

Можно изучать разные космические системы, даже всю Вселенную

(раскрою, для именно моделей мы и готовимся в первую очередь)

Так что же в конце концов такое гравитация?

(тут мотивирующие абзацы, где я такой говорю, что типа такие-то и такие-то идеи очень глубокие и крутые, но все-таки остаются большие вопросы.)

(тут про разные попытки все-таки объяснить, что это, элементы истории, кто там в чем был уверен? и что это на самом деле один из фундаментальных вопросов в физике. коротко, подробнее - дополнения.)

О результатах общей теории относительности

(такие-то штуки мы теперь умеем описывать, потом напишу)

Несостоятельность Ньютоновой теории гравитации как пример одного из самого гениального открытия в физике (!??!?)

(пропишу подробнее, потому что это именно так и очень многим всегда это будет не очевидно это. почему гравитация это на самом деле не сила? сперва теорию пишу, потом очень мотивирующе тут напишу.)

Мотивация к разделам и особым темам теории гравитации

(потом раскрою в подпараграфах)

Получая информацию от гравитационных волн, можно, наверное, узнать, что происходило далеко в галактике давно в прошлом

(напишу подробнее потом)

Изучение модификаций гравитации помогает очень детально понять, что же на самом деле из себя представляет гравитация

(потом раскрою эту мысль, по этой причине в первую очередь и многие сидят в этом.)

Лучшие идейные головоломки для мотивации

Приведу одни из лучших головоломок для мотивации.

m-th.1 Что же такое система отсчета

Some instructions
(напишу точнее условие)

m-th.2 Как же выглядит падение в черную дыру?

Some instructions
(напишу точнее условие)

m-th.3 Finally, what is about anti-gravity?

Some instructions
(this also motivates us to understand gravity)

m-th.4 Что же могут нам рассказать гравитационные волны?

И почему? Как так вообще, что столько информации в них может быть?
Some instructions
(напишу точнее условие)

Лучшие технические головоломки для мотивации

Приведу одни из лучших головоломок для мотивации.

m-te.1 Как падает облако пыли?

(напишу потом, интересно на самом деле)

m-te.2 Простейшее поле

Определим статическое гравитационное поле в пустоте вокруг неподвижного аксиально-симметричного тела. (H. Weyl, 1917)

m-te.3 Как летит спутник вокруг Земли?

(типа в рамках ОТО укажу решение, а также почему в рамках Ньютоновой механики не очень это фундаментально, мб эксперимент какой-то укажу. пока отрабатывать нужно методы.)

m-te.4 Волчок рядом с вращающемся телом

Определить частоту прецессии шарового волчка, совершающего орбитальное движение в гравитационном поле вращающегося вокруг своей оси центрального тела.

Some instructions

(Это большая задача из ЛЛ2, мне на 13.12.23 нужно неделю как минимум дорабатывать структуру, чтобы такие уметь решать. Укажу что-то словами тут, все равно почти никто такие не может решать задачи.)

m-te.5 Как устроена заряженная черная дыра?

(напишу потом, интересно на самом деле)

Part I
Typical Gravity in a Nutshell

1 Nature of Gravity and Main Models

(!!!! проверю, чтобы на каждый раздел Лайтмана были тут задачи тоже!!! скоро раз в подход по штук 4 задачи буду решать - вот и допишу многие очень указания!)

1.1 Main laws and models in a nutshell

1.1.1 Minimal Coupling, Stress-Energy Tensor, Einstein's Equations

Уравнения Эйнштейна в координатном виде

Вид уравнений

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

или после свертки с $g^{\mu\nu}$: имеем $\frac{d-2}{2} R = -8\pi G T$, где $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$. Или после подстановки его в изначальное:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} T \right)$$

Или $R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{d-2} T \right)$ Тут $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$.

$$R_{ik} = g^{lm} R_{limk} = R^{l}_{ilk},$$

$$R = g^{ik} R_{ik} = g^{il} g^{km} R_{iklm},$$

$$R_{iklm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l} \right) + g_{np} \left(\Gamma^n_{kl} \Gamma^p_{im} - \Gamma^n_{km} \Gamma^p_{il} \right),$$

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right)$$

Чаще всего у нас есть какая-то метрика или какой-то анзац метрики, мы считаем эти геометрические ее свойства и подставляем их в уравнения Эйнштейна. (???? перерешаю ЛЛ2, напишу точнее, что чаще всего делаем с ур Эйнштейна!!!)

О линейном приближении (??)

(выпишу суть)

Об уравнениях Эйнштейна в вакууме (??)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$$

или

$$R_{\mu\nu} = 0$$

Основные свойства уравнений Эйнштейна

О числе независимых переменных в пустоте (???)

(думаю, это в пустоте, Лашкевич четко не написал, но вроде как это так!)

Уравнения Эйнштейна есть $\frac{d(d-1)}{2}$ динамических уравнений, остальные d уравнений - связи. Начальных данных нужно:

$$d(d-3).$$

Это из следующих соображений. Изначально работаем с метрикой, у которой за счет ее симметрии $\frac{d(d+1)}{2}$ степеней свободы. Изначально, чтобы задать эволюцию метрики, мы должны задать на пространственноподобной поверхности S_0 начальные значения $g_{ij}, g_{0\mu}, \dot{g}_{ij}$ - всего $d(d+1)/2 + d(d-1)/2 = d^2$ переменных, но мы можем переходить в синхронную систему отсчета, так что $g_{0\mu} = \delta_{0\mu}$ фиксированы, так что уже $d^2 - d$ компонент, еще есть d уравнений движения - связи, и еще d степеней свободы устраняются остаточной калибровкой.

Для доказательства числа динамических уравнений просто посчитаем тензоры Риччи. Выделим члены со вторыми производные $\ddot{g}_{ik}$ по времени (x^0) в тензоре Риччи. Нетрудно проверить (????), что

$$R_{00} = -\frac{1}{2}g^{ik}\ddot{g}_{ik} + \bar{R}_{00}, \quad R_{0i} = \frac{1}{2}g^{0k}\ddot{g}_{ik} + \bar{R}_{0i}, \quad R_{ik} = -\frac{1}{2}g^{00}\ddot{g}_{ik} + \bar{R}_{ik}$$

Тут $\bar{R}_{\mu\nu}$ - члены с не более чем первыми производными. Компоненты тензора Риччи вообще не содержат вторых производных по времени от компонент $g_{0\mu}$. Это же, если поднять первый индекс и вычесть след (???):

$$R^0_0 - \frac{1}{2}R = \bar{R}^0_0 - \frac{1}{2}\bar{R}, \qquad R^0_i = \bar{R}^0_i$$

$$R^i_k - \frac{\delta^i_k}{2}R = \frac{1}{2}\left(g^{0l}g^{0m} - g^{00}g^{lm}\right)\left(\delta^i_l\ddot{g}_{km} - \delta^i_k\ddot{g}_{lm}\right) + \bar{R}^i_k - \frac{\delta^i_k}{2}\bar{R}$$

Таким образом, уравнения Эйнштейна, в левую часть которых входит R^0_μ, являются связями, а не динамическими уравнениями.

Уравнения Эйнштейна в бескоординатном виде (??)

(?? мб когда-то напишу, пока не готов писать.)

5.1 The Linearized Einstein Equation

In a situation with weak gravity, the Einstein equation is approximately linear. We perform some setup to approach this result.

• We work in "almost inertial" coordinates

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

and assume the spacetime manifold is $M = \mathbb{R}^4$. We work to lowest order in h everywhere. Because of this, we may raise and lower indices on h itself with the flat metric, since the correction is second order, so we may think of h as a tensor field in a flat spacetime background.

• As shown earlier, the inverse metric is

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma}$$

which follows from the identity $g^{\mu\nu}g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$.

• To first order, the Christoffel symbols are

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}\left(h_{\sigma\nu,\rho} + h_{\sigma\rho,\nu} - h_{\nu\rho,\sigma}\right)$$

That is, the lowest-order term is $O(h)$. Then we may neglect $\Gamma\Gamma$ terms in the Riemann tensor,

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \eta_{\mu\tau}\left(\partial_\rho\Gamma^\tau_{\nu\sigma} - \partial_\sigma\Gamma^\tau_{\nu\rho}\right) = \frac{1}{2}\left(h_{\mu\sigma,\nu\rho} + h_{\nu\rho,\mu\sigma} - h_{\nu\sigma,\mu\rho} - h_{\mu\rho,\nu\sigma}\right)$$

Contracting a pair of indices gives

$$R_{\mu\nu} = \partial^\rho\partial_{(\mu}h_{\nu)\rho} - \frac{1}{2}\partial^\rho\partial_\rho h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h, \quad h = h^\mu{}_\mu$$

• Thus, we arrive at the linearized Einstein equation,

$$G_{\mu\nu} = \partial^\rho\partial_{(\mu}h_{\nu)\rho} - \frac{1}{2}\partial^\rho\partial_\rho h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu h - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\left(\partial^\rho\partial^\sigma h_{\rho\sigma} - \partial^\rho\partial_\rho h\right) = 8\pi T_{\mu\nu}$$

All quantities above besides the metric itself are $O(h)$ as they vanish in Minkowski space. Moreover, we see that $T_{\mu\nu}$ must also be small for consistency.

• This can be simplified by writing it in terms of the trace-reversed metric perturbation

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu}, \quad h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{h}\eta_{\mu\nu}$$

where the second equation follows because $\bar{h} = -h$. Then we find

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial^\rho\partial_\rho\bar{h}_{\mu\nu} + \partial^\rho\partial_{(\mu}\bar{h}_{\nu)\rho} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^\rho\partial^\sigma\bar{h}_{\rho\sigma}$$

That is, the trace terms have canceled out.

Next, we simplify the situation using the gauge symmetry.

• We don't want to apply an arbitrary diffeomorphism, because the resulting metric might be far from the Minkowski metric. Instead we restrict ourselves to infinitesimal diffeomorphisms,

$$\left(\phi_{-t}\right)_* T = T + t\mathcal{L}_X T + O\left(t^2\right) = T + \mathcal{L}_\xi T$$

where $\xi^a = tX^a$, X^a is the vector field that generates ϕ_t, and T is an arbitrary tensor.

• We expand all quantities to lowest order in ξ and h. Since all our quantities above are already $O(h)$, they are completely unchanged. However, the metric picks up a new term,

$$\left(\phi_{-t}\right)_*(g) = g + \mathcal{L}_\xi g + ... = \eta + h + \mathcal{L}_\xi\eta + ...$$

which yields the shift

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu$$

This is closely analogous to the gauge transformation of A_μ in electromagnetism. In that case, $F^{\mu\nu}$ is gauge invariant; in this case, the Riemann tensor is.

• We choose the harmonic/Lorenz/de Donder gauge

$$\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

To see this is possible, note that under a gauge transformation we have

$$\bar{h}_{\mu\nu} \to \bar{h}_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu - \eta_{\mu\nu}\partial^\rho\xi_\rho$$

and thus

$$\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} \to \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} + \partial^\nu \partial_\nu \xi_\mu$$

so we simply choose ξ_μ to be $\Box^{-1}\left(\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}\right)$, which is possible with a Green's function and appropriate boundary conditions.

• In harmonic gauge, the linearized Einstein equation (with $G = 1$) simplifies to

$$\partial^\rho \partial_\rho \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}$$

That is, every component of $\bar{h}_{\mu\nu}$ satisfies the wave equation, sourced by $T_{\mu\nu}$, so the Einstein equation can be solved by Green's functions.

О выводе уравнений Эйнштейна

О выводе из действия Эйнштейна-Гильберта

$$S_{\text{грав}} = -\frac{1}{16\pi G}\int d^d x\sqrt{|g|}(R + 2\Lambda).$$

где $G > 0$ и Λ - две постоянные. Второе слагаемое - лямбда-член - не содержит производных и может быть отнесено к материи, положив $T^{\mu\nu}_\Lambda = \frac{\Lambda}{4\pi G\sqrt{|g|}}\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{\Lambda}{8\pi G}g^{\mu\nu}$, тогда имелось бы вещество с уравнением состояния $p = -\varepsilon = -\Lambda/8\pi G$. Если $\Lambda > 0$ плотность энергии положительна, а давление отрицательно. Если же $\Lambda < 0$, все наоборот. Такого рода материи неизвестны, однако в некоторых модельных теориях поля имеются метастабильные состояния с такими свойствами (? какие?), а также такой вакуум (? почему?). Экспериментально лямбда-член слишком мал, чтобы играть роль во взаимодействиях даже на галактических масштабах, но он используется для описания эволюции Вселенной в целом. В рамках ОТО им пренебрегаем. Варьируем:

$$\begin{aligned}\delta\int d^4x\sqrt{|g|}R &= \int d^4x\left(\delta(\sqrt{|g|})R + \sqrt{|g|}\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\right)\\ &= \int d^4x\left(\sqrt{|g|}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\right).\end{aligned}$$

Здесь последний член под интегралом исчезает, потому что он - полная дивергенция: $\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \partial_\lambda\left(\sqrt{|g|}w^\lambda\right) = \sqrt{|g|}w^\lambda_{;\lambda}$, где $w^\lambda := g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\lambda\mu}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu}$. (?? проверю еще раз!) Тут и видны уравнения Эйнштейна.

Действие Эйнштейна-Гильберта содержит вторые производные от компонент метрики, обычно они означают наличие дополнительных степеней свободы в системе, но в ОТО их нет из-за ее специфики. Это же действие после добавления члена с полной дивергенцией уже имеет только 1е производные:

$$S_{\text{грав}}[g] = -\frac{1}{16\pi G}\int d^d x\sqrt{|g|}\mathcal{R}(g, \partial_\bullet g),$$
$$\mathcal{R} := g^{\mu\nu}\left(\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\kappa} - \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\lambda}\right) = \frac{1}{4}g_{\mu\nu,\rho}g_{\kappa\lambda,\sigma}\left(g^{\mu\nu}g^{\kappa\lambda}g^{\rho\sigma} + g^{\mu\kappa}g^{\nu\sigma}g^{\rho\lambda} - 2g^{\mu\nu}g^{\kappa\rho}g^{\lambda\sigma}\right).$$

(? не проверял, когда-то проверю, верю.) Величина $\mathcal{R}$, в отличие от скалярной кривизны R, зависит от системы координат, то есть не задает однозначно скалярную функцию на многообразии.

О физическом выводе уравнений Эйнштейна

(скопирую суть из Вергелеса, важное идейно соображение, пока не до него.)

On weak gravity

Main formulas

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$$

$$\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} = \frac{1}{2}\eta^{\sigma\lambda}\left(\partial_\nu h_{\lambda\rho} + \partial_\rho h_{\nu\lambda} - \partial_\lambda h_{\nu\rho}\right)$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial^\rho\partial_\mu h_{\nu\rho} + \partial^\rho\partial_\nu h_{\mu\rho} - \Box h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h\right)$$

with $h = h^\mu_\mu$ the trace of $h_{\mu\nu}$ and $\Box = \partial^\mu\partial_\mu$. The Ricci scalar is

$$R = \partial^\mu\partial^\nu h_{\mu\nu} - \Box h$$

The linearised equations of motion can be derived from Fierz and Pauli action

$$S_{FP} = \frac{1}{8\pi G}\int d^4x\left[-\frac{1}{4}\partial_\rho h_{\mu\nu}\partial^\rho h^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\rho h_{\mu\nu}\partial^\nu h^{\rho\mu} + \frac{1}{4}\partial_\mu h\partial^\mu h - \frac{1}{2}\partial_\nu h^{\mu\nu}\partial_\mu h\right]$$

This is the expansion of the Einstein-Hilbert action to quadratic order in h (after some integration by parts).

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \left(\mathcal{L}_\xi\eta\right)_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu$$

О приближении до второго порядка

(ЛЛ2)

$$h^{(2)}_{00} = 0, \quad h^{(2)}_{\alpha\beta} = -\left(\frac{r_g}{r}\right)^2 n_\alpha n_\beta$$

Перейдя от сферических пространственных координат к декартовым (для чего надо заменить $dr = n_\alpha dx^\alpha$, где $\mathbf{n}$ - единичный вектор в направлении $\mathbf{r}$), получим следующие значения:

$$h^{(1)}_{00} = -\frac{r_g}{r}, \quad h^{(1)}_{\alpha\beta} = -\frac{r_g}{r}n_\alpha n_\beta, \quad h^{(1)}_{0\alpha} = 0,$$

где $r_g = 2km/c^2$.

$$h^{(2)}_{00} = 0, \quad h^{(2)}_{\alpha\beta} = -\left(\frac{r_g}{r}\right)^2 n_\alpha n_\beta.$$

$$R_{iklm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k\partial x^l} + \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i\partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i\partial x^l} - \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k\partial x^m}\right)$$

Если же исходить из метрики Шварцшильда в изотропных пространственных координатах (см. задачу 4 § 100), мы получили бы:

$$h^{(1)}_{00} = -\frac{r_g}{r}, \quad h^{(1)}_{\alpha\beta} = -\frac{r_g}{r}\delta_{\alpha\beta}, \quad h^{(1)}_{0\alpha} = 0,$$

Переход от (105.6) к (105.6a) осуществляется преобразованием (105.5) с $\xi^{(0)} = 0, \quad \xi^\alpha = -\frac{r_g x^\alpha}{2r}$.

$$R_{ik} = g^{im} R_{ilmk} \approx g^{im(0)} R_{limk} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(-g^{lm(0)}\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m} + \frac{\partial^2 h_i^l}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_k^l}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^k}\right).$$
$$h_{ik}: \qquad \frac{\partial \psi_i^k}{\partial x^k} \equiv 0, \qquad \psi_i^k := h_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k h.$$

Тогда последние три члена в (105.9) взаимно сокращаются и остается

$$R_{ik} = -\frac{1}{2} g^{lm(0)} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m}.$$

(абзац про важность этого! профессионалы точно знают, что это важно, потом пойму глубоко.)

Линейное приближение уравнений Эйнштейна (??)

Линейное уравнение Эйнштейна в калибровке ψ

$$\psi_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} h,$$

И уравнение гравитационных волн имеет вид:

$$\Box \psi_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu},$$

если мы пользуемся калибровкой $\psi^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu} = 0$. Обратно $h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{d-2}\psi, \psi = \psi^{\bar{\mu}}_{\mu} = -\frac{d-2}{2}h$. Отсюда

$$h_{00} = \frac{d-3}{d-2}\psi_{00} \qquad \text{и} \qquad h_{ij} = \frac{\psi_{00}}{d-2}\delta_{ij}.$$

На больших расстояниях

$$|\psi_{00}| \gg |\psi_{0i}|,$$

(??? потом изучу еще раз вывод этого.)

Линейное уравнение Эйнштейна в общем случае

Без калибровок линеаризованные уравнения Эйнштейна есть

$$\eta^{\lambda\kappa} h_{\mu\nu,\lambda\kappa} - 2h^{\bar{\lambda}}_{(\mu,\nu)\lambda} + h_{,\mu\nu} = -16\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{d-2}T\right),$$

учтено, что линеаризованный тензор Риччи $R^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(-\eta^{\lambda\kappa} h_{\mu\nu,\lambda\kappa} + 2h^{\bar{\lambda}}_{(\mu,\nu)\lambda} - h_{,\mu\nu}\right)$.

Solution уравнения на слабую метрику

$$\Box\psi_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu},$$

решение:

$$\psi_{\mu\nu}(t,\boldsymbol{r}) = -16\pi G \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \int d^{d-1}x' G^R(t-t', |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) T_{\mu\nu}(t',\boldsymbol{r}'),$$

где $G^R(t,\boldsymbol{r})$: $\Box G^R(t,\boldsymbol{r}) = \delta(t)\delta(\boldsymbol{r})$, откуда $G^R(t,\boldsymbol{r}) = \frac{\delta(t-r)}{4\pi r}$, поэтому

$$\psi_{\mu\nu}(t,\boldsymbol{r}) = -4G \int d^3x' \frac{T_{\mu\nu}(t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|, \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}.$$

В дальней зоне:

$$\psi_{\mu\nu}(t,\boldsymbol{R}) = -\frac{4GM_{\mu\nu}(t-R,\boldsymbol{n})}{R},$$

где $M_{\mu\nu}(t,\boldsymbol{n}) := \int d^3x T_{\mu\nu}(t+\boldsymbol{n}\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})$. Он не является тензором (?!?!? поч?). Выберем $\boldsymbol{R} = R\partial_1$, то есть $X^2 = X^3 = 0, X^1 = R > 0$. Тогда

$$M_{\mu\nu}(t) \equiv M_{\mu\nu}(t,\partial_1) = \int d^3x T_{\mu\nu}\left(t+x^1,\boldsymbol{r}\right)$$

Далее производя некоторые (??? тут в теории сперва напишу, что за они, вообще плохо еще ориентируюсь) преобразования, получим

$$h_+(t,\boldsymbol{R}) = -\frac{4GM_+(t-R,\boldsymbol{n})}{R}, \qquad h_\times := h_{23} = \psi_{23}$$
$$h_\times(t,\boldsymbol{R}) = -\frac{4GM_\times(t-R,\boldsymbol{n})}{R}, \qquad 2h_+ := h_{22} - h_{33} = \psi_{22} - \psi_{33}$$

и

$$M_+(t) := \frac{1}{4}\partial_0^2 \int d^3x \rho(t,\boldsymbol{r}) \left(\left(x^2\right)^2 - \left(x^3\right)^2\right)$$
$$M_\times(t) := \frac{1}{2}\partial_0^2 \int d^3x \rho(t,\boldsymbol{r}) x^2 x^3$$

Введя квадрупольный момент

$$D_{ij}(t) := \int d^3x \rho(t,\boldsymbol{r}) \left(3x^i x^j - r^2\delta_{ij}\right).$$

Из определения $\sum\limits_{i=1}^{3} D_{ii} = 0$. Поэтому (??)

$$h_+(t,R\partial_1) = -\frac{G}{3R}\left(\ddot{D}_{22}(t-R) - \ddot{D}_{33}(t-R)\right), \quad h_\times(t,R\partial_1) = -\frac{2G}{3R}\ddot{D}_{23}(t-R)$$

(?????) Тогда 01-я компонента ТЭИ равна

$$t^{01}(t+R,R\partial_3) = \frac{G}{36\pi R^2}\left(\left(\frac{\dddot{D}_{22}(t) - \dddot{D}_{33}(t)}{2}\right)^2 + \dddot{D}_{23}^2(t)\right)$$

И интенсивность

$$dI(t,\partial_1) = t^{01}(t+R,R\partial_1)R^2 do = \frac{G}{36\pi}\left(\left(\frac{\dddot{D}_{22}(t) - \dddot{D}_{33}(t)}{2}\right)^2 + \dddot{D}_{23}^2(t)\right) do.$$

После перехода к тензору поляризаций и усреднения (??? нужно указание!!!), получаем

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = I = \frac{G}{45}\dddot{D}_{ij}^2.$$

Параметры гравитирующей системы через метрику на далеком расстоянии

(пока в теории пишу, не уверен, в чем суть вывода Лашкевича)

Обзор применений линеаризованных уравнений Эйнштейна (?)

я не четко понимаю, когда следует ими пользоваться, а когда нет

Другое о слабом режиме

Об ТЭИ в слабом режиме (???)

(ЛЛ2 формулы про это есть)
Момент $M_{\alpha\beta}$ связан только с $h_{0\alpha}$, и потому при вычислении все остальные компоненты h_{ik} можно считать отсутствующими. С точностью до членов первого порядка по $h_{0\alpha}$ имеем из (96.2)-(96.3) (замечаем, что $g^{\alpha 0} = -h^{\alpha 0} = h_{\alpha 0}$, а $-g$ отличается от 1 лишь на величины второго порядка):

$$h^{\alpha 0\beta} = \frac{c^4}{16\pi k}\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\left(g^{\alpha 0}g^{\beta\gamma} - g^{\gamma 0}g^{\alpha\beta}\right) = -\frac{c^4}{16\pi k}\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\left(h_{\alpha 0}\delta_{\beta\gamma} - h_{\gamma 0}\delta_{\alpha\beta}\right).$$

При подстановке второй член под знаком производной исчезает, а первый дает

$$h^{\alpha 0\beta} = -\frac{c}{8\pi}M_{\alpha\gamma}\frac{\partial^2}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}\frac{1}{r} = -\frac{c}{8\pi}M_{\alpha\gamma}\frac{3n_\beta n_\gamma - \delta_{\beta\gamma}}{r^3}.$$

В векторном виде

$$\mathbf{g} = \frac{2k}{c^3 r^2}[\mathbf{nM}],$$

где $\mathbf{M}$ - вектор полного момента тела.

В стационарном гравитационном поле на частицу действует «кориолисова сила», такая же, какая действовала бы на частицу в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью:

$$\mathbf{\Omega} = \frac{c}{2}\sqrt{g_{00}}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{g}$$

Поэтому можно сказать, что в поле вращающегося тела на удаленную частицу действует кориолисова сила, отвечающая угловой скорости:

$$\mathbf{\Omega} \approx \frac{c}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{g} = \frac{k}{c^2 r^3}[\mathbf{M} - 3\mathbf{n}(\mathbf{Mn})].$$

Наконец, применим выражения (105.6) для вычисления полной энергии гравитирующего тела по интегралу (96.16). Вычислив нужные компоненты h^{ikl} по формуле (96.2)-(96.3), получим с требуемой точностью (оставляем члены $\sim 1/r^2$):

$$h^{\alpha 0\beta} = 0,$$
$$h^{00\alpha} = \frac{c^4}{16\pi k}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(g^{00}g^{\alpha\beta}\right) = \frac{mc^2}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(-\frac{\delta^{\alpha\beta}}{r} + \frac{x^\alpha x^\beta}{r^3}\right) = \frac{mc^2}{4\pi}\frac{n^\alpha}{r^2}.$$

Интегрируя теперь в (96.16) по сфере радиуса r, получим окончательно;

$$P^\alpha = 0, \quad P^0 = mc$$

- результат, который естественно было ожидать.

В случае постоянного гравитационного поля оказывается возможным вывести простое выражение для полной энергии материи вместе с полем в виде интеграла только по пространству, занятому материей.

$$P^0 = mc = \frac{1}{c}\int \left(T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3\right)\sqrt{-g}dV.$$

(укажу потом, как это сделать, 1 стр ЛЛ2)

Обзор некоторых статических полей

(обзор задач по сути, их пока не так много таких знаю. максимум страница на это)

Определим статическое гравитационное поле в пустоте вокруг неподвижного аксиально-симметричного тела. (H. Weyl, 1917) Статический элемент интервала в цилиндрических пространственных координатах $x^1 = \varphi, x^2 = \rho, x^3 = z$ ищем в виде

$$ds^2 = e^{\nu}c^2dt^2 - e^{\omega}d\varphi^2 - e^{\mu}\left(d\rho^2 + dz^2\right)$$

(???? дальше словами укажу переходы, вроде все типичное, но еще потренироваться нужно!!!!) Составив для этой метрики уравнения $R_0^0 = 0, R_3^3 - R_2^2 = 0, R_2^3 = 0$, найдем:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\nu}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2\nu}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial z} = \rho\frac{\partial\nu}{\partial\rho}\frac{\partial\nu}{\partial z}, \quad \frac{\partial\gamma}{\partial\rho} = \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial\nu}{\partial\rho}\right)^2 - \left(\frac{\partial\nu}{\partial z}\right)^2\right]$$

Отметим, что (2) имеет вид уравнения Лапласа в цилиндрических координатах (для функции, не зависящей от φ). Если это уравнение решено, то функция $\gamma(\rho, z)$ целиком определяется уравнениями (2)-(3). Вдали от создающего поле тела функции ν и γ должны стремиться к нулю.

Об уравнениях Эйнштейна в тетрадах (!!!!)

(!! быстро напишу, просто дойти нужно до этого!!!)

О свойствах постоянного гравитационного поля

Постоянное гравитационное поле - поле, в котором можно выбрать такую систему отсчета, в которой все компоненты $g_{\mu\nu}$ не зависят от временной координаты (мирового времени) x^0. Это быть поле от неподвижного одного тела или от равномерно вращающегося аксиально-симметричного тела.

Статическое гравитационное поле - частный случай постоянного поля, это поле от неподвижного тела, в системе отсчета, в которой g_{ik} не зависит от x^0, в нем оба направления времени эквивалентны. При должном выборе начала отсчета времени во всех точках пространства, интервал ds в этом случае не должен меняться при изменении знака x^0, а потому все компоненты $g_{0\alpha} \equiv 0$.

$$\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}x^0$$

3.1 Minimal Coupling

Physical laws should exhibit general covariance; they should not depend on the choice of coordinates, and should be ideally written in a manifestly coordinate-invariant form.

• In special relativity, we wrote equations that were manifestly invariant under Lorentz transformations. We can often make these equations generally covariant using the minimal coupling procedure:

• Replace the Minkowski metric with a general metric.

• Replace partial derivatives with covariant derivatives associated with the Levi-Civita connection; this is called minimal coupling.

• To write the result in abstract indices, replace Greek letters (referring to inertial frames only) with Latin ones.

To go back, we simply work in a locally inertial frame, which reverses the above steps.

• The minimal coupling prescription is not unique, because we can always add terms depending on the curvature, which vanish in flat spacetime. For instance, the action for a scalar field can contain the term $\xi R\phi^2$, where ξ is a dimensionless free parameter. (However, higher powers of the curvature would generally be expected to be suppressed by powers of $M_{\rm pl}$.)

• As another warning, you can't consistently generalize every equation in a theory with minimal coupling, because partial derivatives always commute, while covariant derivatives don't. If one generalizes the basic equations of motion of a theory using minimal coupling, then derived equations higher order in derivatives will generally contain commutators of covariant derivatives, and hence explicit curvature terms, though they wouldn't show up if you applied minimal coupling to those equations directly. It's the same problem as quantization: you can do it by replacing Poisson brackets with commutators in the simplest cases, but it can be tough to do it consistently in general.

Example. A massless scalar field satisfies the equation

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi = 0$$

Applying minimal coupling gives the result

$$g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi = \nabla^a\nabla_a\phi = \phi_{;a}{}^a = 0$$

The operator $\nabla^a\nabla_a$ is the Laplacian in curved spacetime, also called the Laplace-Beltrami operator. To get a more explicit expression, note that for the Levi-Civita connection

$$\nabla_\mu V^\mu = \partial_\mu V^\mu + \Gamma^\mu_{\mu\lambda}V^\lambda, \quad \Gamma^\mu_{\mu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\partial_\lambda g_{\rho\mu}$$

The last term is heuristically $(1/2)\,\mathrm{tr}\, g^{-1}\partial g$. To simplify this, note that for a matrix A,

$$\det(A+\epsilon B) = \exp\mathrm{tr}\log(A+\epsilon B) = \exp\mathrm{tr}\left(\log A + \epsilon A^{-1}B\right) = (\det A)\exp\left(\epsilon\,\mathrm{tr}\left(A^{-1}B\right)\right)$$

from which we conclude

$$\frac{\partial(\det A)}{\partial(\delta A)} = (\det A)\,\mathrm{tr}\left(A^{-1}\delta A\right)$$

Here we set $A = g$ and $\delta A = \partial_\lambda g$. Multiplying both sides by -1 because $g \equiv \det g_{\mu\nu}$ is negative,

$$\partial_\lambda \log(-g) = g^{\mu\rho}\partial_\lambda g_{\rho\mu}$$

Then the divergence of a vector and Laplacian of a scalar become

$$\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}V^\mu\right), \quad \nabla_\mu\nabla^\mu\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\partial^\mu\phi\right)$$

where we used the product rule, and the index on ∂^μ is raised with the metric g. These expressions are useful since they only involve the metric and its determinant.

Example. The formulas above give quick shortcuts to compute the divergence and Laplacian in curvilinear coordinates. For example, in spherical coordinates on $\mathbb{R}^3$, $g = r^4\sin^2\theta$, so

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{F} &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\partial_r\left(r^2\sin\theta F^r\right) + \partial_\theta\left(r^2\sin\theta F^\theta\right) + \partial_\phi\right)\left(r^2\sin\theta F^\phi\right)\Big) \\ &= \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2F^r\right) + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta F^\theta\right) + \partial_\phi F^\phi\end{aligned}$$

Example. In flat spacetime, the source-free Maxwell equations take the form

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu F_{\nu\rho} = 0, \quad \partial_{[\mu}F_{\nu\rho]} = 0$$

Thus in curved spacetime we have

$$g^{ab}\nabla_a F_{bc} = 0, \quad \nabla_{[a}F_{bc]} = 0$$

The Lorentz force law for a particle of charge q and mass m is

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{q}{m}\eta^{\mu\nu}F_{\nu\rho}u^\rho$$

Noting as before that the left-hand side is $u^\nu\partial_\nu u^\mu$, performing minimal coupling gives

$$u^b\nabla_b u^a = \frac{q}{m}g^{ab}F_{bc}u^c$$

As expected, if the field vanishes we simply get back the geodesic equation.

Example. A single particle. Consider a particle with four-momentum p^μ and an observer which has four-velocity w^μ. In the case where $w^\mu = (1,0,0,0)$, the energy is p^0, so in general it must be

$$E = -\eta_{\mu\nu}w^\mu p^\nu$$

in flat spacetime. Moreover, the particle's mass is $m^2 = -\eta_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$. These equations become

$$m^2 = -g_{ab}p^a p^b, \quad E = -g_{ab}w^a p^b$$

in curved spacetime. Note that in general relativity, it is only possible for an observer to measure a particle's energy if their locations coincide.

3.3 Einstein's Equation

In this section we cover some of the physics of the Einstein field equation.

• Einstein's equation is a set of ten second-order differential equations for g_{ab}. However, the contracted Bianchi identity $\nabla^a G_{ab} = 0$ reduces the number of independent equations to six. Physically, this is because any metric satisfying Einstein's equation should also satisfy it in any other coordinate system, using up four degrees of freedom.

• Einstein's equation is nonlinear: it does not obey a superposition principle. Upon quantization, gravitons couple to themselves. This self-interaction is required physically: consider two particles bound by gravity. The inertial mass of the system is less than the sum of the inertial masses of the particles because of the negative gravitational binding energy. For the gravitational mass to be equal to the inertial mass, gravity must couple to this binding energy.

• Einstein's equation makes the geodesic equation redundant; it can be shown that a test mass follows geodesics using only energy-momentum conservation. The simplest way to see this is to note that for dust, $T^{ab} = \rho U^a U^b$, and using $\nabla_a T^{ab} = 0$ produces $U^a \nabla_a U^b = 0$.

• We may also postulate a vacuum energy density ρ_v, which would have $T_{\mu\nu} = -\rho_v g_{\mu\nu}$. Then Einstein's equation becomes

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 8\pi G \left(T_{ab} - \rho_v g_{ab} \right)$$

where T_{ab} does not include the vacuum energy, or equivalently

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi G T_{ab}$$

Thus the cosmological constant can be thought of as either a property of spacetime or a form of matter in spacetime.

• Therefore, vacuum solutions of the Einstein field equations in $d = 4$ satisfy

$$R_{ab} = \Lambda g_{ab}$$

Manifolds where the Ricci tensor is proportional to the metric are called Einstein manifolds.

• Lovelock's theorem states that the only symmetric, covariantly conserved tensor that depends on $g, \partial g$ and $\partial^2 g$, in $d = 4$ with at most linear dependence on $\partial^2 g$, is a linear combination of G_{ab} and g_{ab}. Thus there is no further freedom to modify the Einstein equation.

Note. The Newtonian limit. Parametrize a geodesic with proper time, and assume it is moving slowly. Then to lowest order in v/c the geodesic equation is

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00} = 0$$

Assuming the metric is static, so $\partial_0 g^{\mu\nu} = 0$, we have

$$\Gamma^\mu_{00} = -\frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \partial_\lambda g_{00}$$

Next, we assume the gravitational field is weak, so that we may perturb the metric about η,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

In general, we can expand everything else as a perturbation series in h. For example,

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + O\left(h^2\right)$$

where the indices on h are raised using η, not g, as the error is second order in h. Returning to our computation, to lowest order in h, we have

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu h_{00}, \quad \frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} \partial_i h_{00}$$

This identifies the Newtonian gravitational potential Φ via

$$g_{00} = -(1 + 2\Phi)$$

For example, in the Schwarzschild metric, we have $\Phi = -GM/r$ as expected.

Note. Motivating Einstein's equation. We wish to generalize the equation

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

We know that ρ generalizes to $T^{\mu\nu}$, and we've seen that Φ is a metric component in the Newtonian limit, so the left-hand side should contain second derivatives of the metric. This is enough to motivate a guess of the form

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}.$$

To pin down the constant κ, note the our equation is equivalent to

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right)$$

Now consider a spacetime with sparse dust. In the rest frame, $T^{00} = \rho u^0 u^0$ with all other elements zero. As above we write $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ and work to lowest order in h. We know u^0 is set by the normalization condition $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$, so to lowest order $u^0 = 1$ and

$$R_{00} \approx \frac{1}{2} \kappa \rho$$

Next, we compute R_{00}. We may ignore products of connection coefficients because they are higherorder in h, and time derivatives of the metric vanish since the situation is static, so

$$R^i_{0j0} = \partial_j \Gamma^i_{00} - \partial_0 \Gamma^i_{j0} + \Gamma^i_{j\lambda} \Gamma^\lambda_{00} - \Gamma^i_{0\lambda} \Gamma^\lambda_{j0} \approx \partial_j \Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2} \partial_j \partial_i h_{00}$$

which implies that

$$R_{00} = R^i_{0i0} = -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00}$$

Above, we identified $h_{00} = -2\Phi$, so the Newtonian limit works if $\kappa = 8\pi G$.

1.1.2 Details of Einstein's Equations

Einstein's Equations up to Second Order

(write that summary from Landau)

Examples of applications of Einstein's equations up to second order

(??!!!)

1.1.3 Newtonian gravity

О гравитационном законе Ньютона и приложениях

Суть гравитационного закона Ньютона

(тут про формулы)
(тут про оригинальную идею Ньютона)

О другом

(тут о том, когда это работает, для каких моделей)
(тут про основные особенности и свойства)

Закон Ньютона как приближение ОТО

(1/2-1 страница про явно то, что ОТО - это Ньютон + такие-то члены! хочу четко их видеть. пока в теории целый раздел про это, там мб это и буду писать. пока додумать нужно.)

О законах Кеплера и приложениях

Суть законов Кеплера

(тут про формулы)
(тут про оригинальную идею Ньютона)

О другом

(тут о том, когда это работает, для каких моделей)
(тут про основные особенности и свойства)

О простых движениях спутников и планет

(Кепелра темы, все такое.)

О деталях Ньютоновской гравитации

(на задачах это потренирую, а также очень важные теор особенности)

О нерелятивистской потенциальной энергии (!?!???!?!)

Потенциальная энергия любого распределения масс:

$$U = \frac{1}{2}\int \mu\varphi dV$$

Об отсутствии дипольного члена

В отличие от электрического поля, в гравитационном поле всегда можно исключить дипольный член: разложение потенциала φ имеет вид

$$\varphi = -k\left(\frac{M}{R_0} + \frac{1}{6}D_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\frac{1}{R_0} + \ldots\right)$$

где $M = \int \mu dV$ - полная масса системы, а $D_{\alpha\beta} = \int \mu\left(3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta}\right)dV$ - тензор квадрупольного момента масс, через обычный тензор момента импульса $J_{\alpha\beta} = \int \mu\left(r^2\delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta\right)dV$:

$$D_{\alpha\beta} = J_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} - 3J_{\alpha\beta}$$

(порешаю задачи, скорее всего детали еще указать нужно будет!)

О законе Ньютона как частном случае ОТО

(!! проверю это еще раз!!)

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$$

Уравнения Эйнштейна $R_i^k = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k T\right)$ при $i = k = 0$ дают:

$$R_0^0 = \frac{4\pi k}{c^2}\mu$$

Так как $\Gamma_{00}^{\alpha} \approx -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\beta} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}$, получаем $R_0^0 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{\alpha 2}} \equiv \frac{1}{c^2}\Delta\varphi$, и уравнения Эйнштейна дают:

$$\Delta\varphi = 4\pi k\mu.$$

общее решение:

$$\varphi = -k\int \frac{\mu dV}{R}.$$

В частности, для потенциала поля одной частицы с массой m имеем:

$$\varphi = -\frac{km}{R},$$

и, следовательно, сила $F = -m_2\frac{\partial \varphi}{\partial R}$, действующая в этом поле на другую частицу (массы m_2), равна

$$F = -\frac{kmm'}{R^2}.$$

Это - известный закон тяготения Ньютона.

О законе Ньютона в других размерностях

В произвольной размерности другие степени:

$$\phi(t, \boldsymbol{r}) = -\frac{8\pi G}{(d-2)S_{d-1}}\sum_a \frac{m_a}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a(t)|^{d-3}}.$$

Это берется из уравнения Лапласа для соответствующей размерности. (Я это в рамках ОТО знаю, как сделать, где по сути тоже уравнение Лапласа, это выше тут. потом когда-то в рамках ньютоновой гравитации продумаю это, напишу сюда.)

1.1.4 Schwarzschild model

Суть модели Шварцшильда

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \qquad d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2.$$

where $M = Gm/c^2$ is the "geometric mass" (where m is a mass). Это единственное сферически симметричное решение уравнений Эйнштейна и типичная модель черной дыры.

$$[M] = [\text{length}]$$

$M \sim 1$ km for the Sun, whereas $R \sim 7 \times 10^5$ km.

$$\Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{M}{r}\frac{1}{r-2M}, \qquad \Gamma_{tt}^r = c^2\frac{M}{r^3}(r-2M), \qquad \Gamma_{rr}^r = -\frac{M}{r}\frac{1}{r-2M},$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = 2M - r, \qquad \Gamma_{\phi\phi}^r = (2M-r)\sin^2\theta, \qquad \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r},$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot\theta, \qquad \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin\theta\cos\theta.$$

$$R_{0101} = \frac{r_g}{r^3}, \qquad R_{0202} = \frac{R_{0303}}{\sin^2\theta} = -\frac{r_g\,(r-r_g)}{2r^2}$$
$$R_{1212} = \frac{R_{1313}}{\sin^2\theta} = \frac{r_g}{2\,(r-r_g)}, \qquad R_{2323} = -r r_g \sin^2\theta.$$

Расстояния между точками на любой сфере $r = \text{const}$, в том числе и при $r = r_g$, даются метрикой на сфере радиуса r:

$$dl^2_{\text{sph}} = r^2 d\Omega^2$$

Расстояния же вдоль радиуса растут с приближением к сфере Шварцшильда:

$$dl_{\text{рад}} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} dr.$$

Расстояние от сферы Шварцшильда до любой близлежащей точки (и, следовательно, до любой вообще точки) конечно (???).

Для $r - r_g \ll r_g$

$$l_{\text{ра}}\,(r, r_g) = \int dr \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} \simeq \sqrt{r}_g \int \frac{dr}{\sqrt{r - r_g}} = 2\sqrt{r_g\,(r - r_g)}.$$

О расстояниях в метрике Шварцшильда

Пространственная метрика:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2\left(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2\right).$$

Геометрический смысл координаты r в том, что тут длина окружности с центром в центре поля равна $2\pi r$. Расстояние между двумя точками r_1 и r_2 на одном радиусе:

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} > r_2 - r_1$$

ибо $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \ldots$.

Из того, что $g_{00} \leqslant 1$ собственное время $d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}dt$ течет медленнее, чем время на бесконечности:

$$d\tau \leqslant dt.$$

То есть пока на бесконечности проходит условно 1 минута, вблизи черной дыры проходит условно 1 секунда. Знак равенства имеет место на бесконечности, где t совпадает с истинным временем.

(абзац слов про геодезические и движение в шварцшильде. формулы - другой раздел ниже про движение частицы.)

О векторах Киллинга и сохраняющихся величинах (!!!???)

(построение, потом конкретно, как выглядят сохр вел! важно!!!!)

$$K^\mu = (\partial_t)^\mu = (1, 0, 0, 0).$$

The Killing vector whose conserved quantity is the magnitude of the angular momentum is

$$R^\mu = (\partial_\phi)^\mu = (0, 0, 0, 1).$$

In both cases it is convenient to lower the index to obtain

$$K_\mu = \left(-\left(1 - \frac{2GM}{r}\right), 0, 0, 0 \right)$$

and

$$R_\mu = \left(0, 0, 0, r^2 \sin^2\theta\right).$$

Since (5.56) implies that $\sin\theta = 1$ along the geodesics of interest to us, the two conserved quantities are

$$E = -K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda}$$

О горизонте событий и том, что внутри него (!?!??)

(1/2-1 страница про это)
Внутри будет притяжение к центральной сингулярности. (?? проверю)
(???? так все-таки что внутри горизонта тогда, если дыра - именно центральная сингулярность????7)

О выводе метрики Шварцшильда через анзац

$$ds^2 = h(r,t)dr^2 + k(r,t)\left(\sin^2\theta \cdot d\varphi^2 + d\theta^2\right) + l(r,t)dt^2 + a(r,t)drdt$$
$$r = f_1\left(r', t'\right), \quad t = f_2\left(r', t'\right),$$

где f_1, f_2 - любые функции от новых координат r', t'.

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2\right) - e^\lambda dr^2$$

Дальше считаем кристоффеля, подставляем в уравнения Эйнштейна для отсутствия массы (проделаю еще когда-то это в теории!), получаем:

$$\lambda + \nu = f(t)$$

$$e^{-\lambda} = e^\nu = 1 + \frac{\text{const}}{r}.$$

О другом про метрику Шварцшильда

О полях внутри масс

(тут итоговые формулы)
Для вывода снова подставляем изначальный анзац в уравнения Эйнштейна, одно из них $\frac{8\pi k}{c^4}T_0^0 = -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2}$ с граничным условием $\lambda|_{r=0} = 0$ дает:

$$\lambda = -\ln\left(1 - \frac{8\pi k}{c^4 r}\int\limits_0^r T_0^0 r^2 dr\right).$$

Свойства пространственной метрики и хода часов $\int\limits_{r_1}^{r_2} dr/\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} > r_2 - r_1$ и $d\tau \leqslant dt$ в центрально-симметричном поле в пустоте относятся в той же мере и к полю внутри гравитирующих масс.

Если гравитационное поле создается сферическим телом «радиуса» a, то при $r > a$ имеем $T_0^0 = 0$. Для точек с $r > a$ $\lambda = -\ln\left(1 - \frac{8\pi k}{c^4 r}\int\limits_0^a T_0^0 r^2 dr\right)$, С другой стороны, для пустоты $\lambda = -\ln\left(1 - \frac{2km}{c^2 r}\right)$. Сравнивая оба выражения, получим

$$m = \frac{4\pi}{c^2}\int\limits_0^a T_0^0 r^2 dr$$

В частности, для статического распределения вещества в теле имеем $T_0^0 = \varepsilon$, так что

$$m = \frac{4\pi}{c^2}\int\limits_0^a \varepsilon r^2 dr.$$

Для инвариантов I_1 и I_2:

$$I_1 = \left(\frac{r_g}{2r^3}\right)^2, \quad I_2 = -\left(\frac{r_g}{2r^3}\right)^3$$

(произведения с участием дуального тензора $\underset{*}{R}_{klm}$ равны нулю тождественно).

О других свойствах

Для «плоскостей», перпендикулярных к радиусам, гауссова кривизна равна (??)

$$K = \frac{P_{\theta\varphi\theta\varphi}}{\gamma_{\theta\theta}\gamma_{\varphi\varphi}} = -P_r^r > 0$$

(то есть для небольших треугольников, проведенных на участке «плоскости» вблизи ее пересечения с перпендикулярным к ней радиусом, сумма углов больше, чем π). Для «плоскостей» же, проходящих через центр, гауссова кривизна $K < 0$; это значит, что сумма углов, проведенных в «Плоскости» небольших треугольников, меньше, чем π (это не относится к треугольникам, охватывающим центр, - сумма углов для таких больше, чем π).

(детали мне не актуальны, потом мб добавлю сюда из Ландау их)

On Eddington-Finkelstein Coordinates (!!!)

We are interesting only in radial motion, we introduce $dr_\star^2 := \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-2} dr^2$, so basically

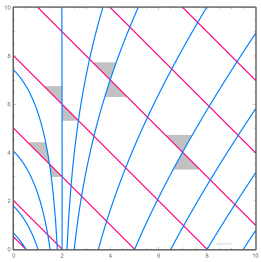
$$r_\star := r + 2GM\log\left(\frac{r - 2GM}{2GM}\right)$$

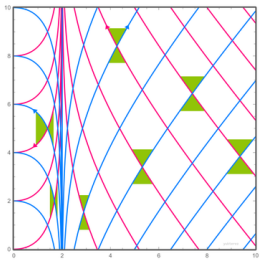
$$v := t + r_\star, \qquad u := t - r_\star$$

because from $ds^2 = 0$ we have $\frac{dr}{dt} = \pm\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)$, where the + denotes an outgoing light ray (going towards larger r) and the - denotes an ingoing light ray (going towards smaller r, i.e. closer to the object). So $\frac{dr_\star}{dt} = \pm 1$.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega_2^2, \qquad \text{ingoing E-F}, v = t + r_*$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)du^2 - 2dudr + r^2 d\Omega_2^2, \qquad \text{outgoing E-F}, u = t - r_*$$





(!!?!?!?!?!? разберусь потом с физикой в ней!!!)

On Kruskal (Kruskal-Szekres) Spacetime (T, R, θ, ϕ)

Kruskal coordinates complite the picture (??!! add how???). Introduce the Kruskal coordinates:

$$V = \exp\left(\frac{v}{4M}\right), \quad U = -\exp\left(-\frac{u}{4M}\right),$$

in terms of which the metric is given by:

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-r/(2M)} dU dV + r^2 d\Omega^2,$$

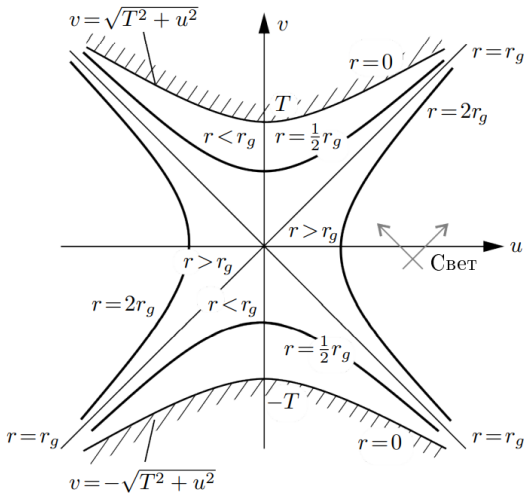
where r should be understood as a function of U, V, implicitly determined by:

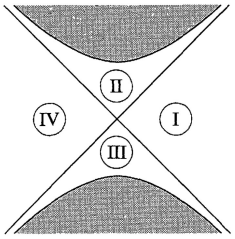
$$UV = \left(1 - \frac{r}{2M}\right) e^{r/(2M)}.$$

We can also use $U = T - R, V = T + R$ to get:

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/(2M)} \left(-dT^2 + dR^2\right) + r^2 d\Omega^2,$$

where again r is a function of T, R implicitly determined by $UV = T^2 - R^2$.





- Region I: the original $r > 2M$ coordinate patch where Schwarzschild coordinates are well-defined.

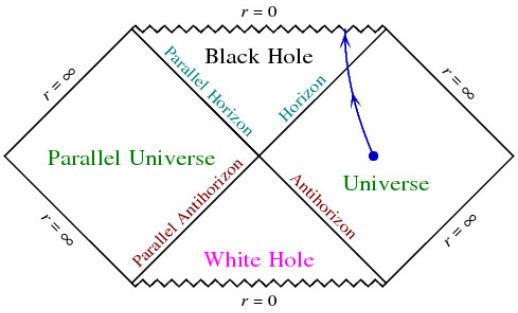
- Region II: the black hole, which we obtain by following future-directed null rays from region I.

- Region III: the white hole, which we obtain by following past-directed null rays from region I. In some sense, this is the "time-reversed" version of the black hole.

- Region IV: a second, asymptotically flat region (like Region I) that is causally disconnected from Region I. Observers in Regions I and IV could only "communicate" once both in Region II. We can think of Regions I and IV as being connected by an "Einstein-Rosen bridge", i.e. a wormhole (but this is nontraversable!)

On Penrose diagram results

(только итоги!)



6.1 The Schwarzschild Metric

Before starting, we define some useful properties of spacetimes.

• A spacetime is symmetric in a variable s if there exist coordinates x^α so that one of the x^α is s, and the metric components don't depend on s.

• A spacetime is stationary if there exist coordinates x^α so that x^0 is timelike at infinity and the metric components don't depend on x^0. Equivalently, the spacetime has a Killing vector that is timelike at infinity. We need the "at infinity" condition because x^0 may become spacelike in the interior, as it does for the Schwarzschild metric. If the Killing vector is always timelike, the spacetime is strictly stationary.

• A spacetime is static if it is stationary, and there are no cross-terms in the metric, $g_{0i} = 0$. Equivalently, the timelike Killing vector is orthogonal to a family of hypersurfaces.

• Intuitively, a stationary spacetime is "doing the same thing at all times", since it has time translational symmetry, while a static spacetime is "doing nothing at all", since it has time reversal symmetry; a cross term in the metric would pick up a sign, $dtdx^i \to -dtdx^i$. For example, a rotating black hole is stationary but not static.

Note. Relating the two definitions of stationary spacetime. Suppose we start with a Killing vector k^a. Then take a hypersurface Σ nowhere tangent to k^a. We define spatial coordinates x^i on Σ. The spacetime point (t, x^i) is reached by starting on Σ and following an integral curve of k^a for parameter distance t. Then the metric components are independent of t.

Note. Relating the two definitions of static spacetime. First, we give a criterion for a Killing vector to be orthogonal to a family of hypersurfaces. We say a one-form n is normal to a hypersurface Σ if $n(t) = 0$ for any tangent vector t to Σ. For example, df is normal to the hypersurface $f = 0$. Any other one-form n normal to Σ must have the form $n = gdf + fn'$, and direct calculation gives

$$(n \wedge dn)|_\Sigma = n_{[a}\nabla_b n_{c]}\big|_\Sigma = 0$$

which is a useful identity. Conversely, a differential form version of Frobenius' theorem says that if n is a nonzero one-form so that $n \wedge dn = 0$ everywhere, then $n = gdf$, so n is normal to surfaces of constant f, which foliate the spacetime.

Now suppose a Killing vector k^a satisfies this condition, where we use the metric to convert it to a one-form. Then we construct spatial coordinates on a hypersurface Σ of constant f and construct the t coordinate as above. By orthogonality the cross-terms in the metric vanish on Σ. Since the cross-terms are independent of t, they vanish everywhere.

We can show that the Schwarzschild metric is unique, assuming the spacetime is static and spherically symmetric.

• We take spherical symmetry to mean that we can choose coordinates (t, r, θ, ϕ) where θ and ϕ take the usual angle values, so that the last two coordinates contribute to the metric in the combination $d\Omega^2$, and t is as constructed above.

• More formally, this means that the spacetime has an $SO(3)$ subgroup of isometries whose orbits are 2-spheres; the angular variables θ and ϕ are coordinates on these spheres.

• We also assume there are no cross terms between r and θ and ϕ. Heuristically, this follows from demanding invariance under the 'parity transformation' $\theta \to \pi - \theta, \phi \to -\phi$. In this case, the most general possible metric is

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + e^{2\beta(r)}dr^2 + e^{2\gamma(r)}r^2 d\Omega^2$$

where we use exponentials to fix the metric signature.

• We are free to rescale the radial coordinate so that

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + e^{2\beta(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

where we have redefined r and $\beta(r)$. The new coordinate r is defined so that the area of a sphere with coordinate r is $4\pi r^2$.

• Imposing the constraint $R_{\mu\nu}$, we eventually find the constraints

$$\partial_r \alpha + \partial_r \beta = 0, \quad \partial_r \left(re^{2\alpha}\right) = 1$$

The solution to the first is $\alpha = -\beta + c$, and we can set $c = 0$ by rescaling the time coordinate. The second equation implies that $e^{2\alpha} = 1 - 2GM/r$, so

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

• Since the Schwarzschild metric reduces to the Minkowski metric for $r \gg 2M$, we can interpret t as the time measured by an observer at spatial infinity. In this limit, the Newtonian limit says that the potential is $-GM/r$, so we interpret M as the mass. A more formal approach is to calculate the ADM mass, which also turns out to be M.

• The Schwarzschild metric is singular at $r = 0$ and $r = 2M$, but the latter is just an artifact of the coordinates; we know this because we can choose coordinates without singularities there. A physical singularity is associated with singularities in curvature scalars. Since

$$R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48M^2}{r^6}$$

we see that $r = 0$ is a physical singularity. To make sure it's physically relevant, we must also check that it can be reached by traveling a finite distance along a curve.

Birkhoff's theorem states that the Schwarzschild metric is the unique vacuum solution to the Einstein equations with spherical symmetry. We'll give a sketch of this proof below.

• First, we need to define spherical symmetry. It's not suitable to define spherical symmetry relative to an origin, because the space $\mathbb{R}\times S^2$ has no identifiable origin, but clearly has spherical symmetry. Instead, we suppose there are three Killing vectors R, S, and T with the $SO(3)$ commutation relations

$$[R, S] = T, \quad [S, T] = R, \quad [T, R] = S$$

By Frobenius' theorem, this provides a foliation of spacetime by 2 -spheres. This can only fail at isolated points, such as the origin at $\mathbb{R}^3$, since the Killing vectors vanish there.

• Next, we define angular coordinates (θ, ϕ) on each sphere, and define coordinates (a, b) on the set of spheres so that a sphere has constant a and b. Then the metric on each sphere is $f(a, b)d\Omega^2$. Moreover, no metric coefficients can depend on θ and ϕ, except for the $\sin^2\theta$ in $d\Omega^2$, by spherical symmetry.

• However, there may be cross terms such as $dad\theta$, since we haven't lined up the angular coordinates on the spheres with each other; moving perpendicular to a sphere may change θ and ϕ. Instead, we define the coordinate system by choosing coordinates (θ, ϕ) on one sphere, then considering the set of geodesics perpendicular to this sphere. A geodesic that goes through (θ_0, ϕ_0) on our original sphere defines points with angular coordinates (θ_0, ϕ_0) on nearby spheres, ensuring there are no cross terms.

• Now, the angular part of the metric is $r^2(a, b)d\Omega^2$ and we replace the coordinate b with r for

$$ds^2 = g_{aa}(a, r)da^2 + g_{ar}(a, r)(dadr + drda) + g_{rr}(a, r)dr^2 + r^2d\Omega^2$$

We claim that we can replace a with $t(a, r)$ so that there is no $drdt$ cross term, giving

$$ds^2 = m(t, r)dt^2 + n(t, r)dr^2 + r^2d\Omega^2$$

This is generically possible because we start with three degrees of freedom, g_{aa}, g_{ar}, and g_{rr}, and end with three, t, m, and n. To do it explicitly, we use integrating factors.

• We then make the assumption that m is negative and n is positive, giving the parametrization

$$ds^2 = -e^{2\alpha(t,r)}dt^2 + e^{2\beta(t,r)}dr^2 + r^2d\Omega^2$$

This is the same as what we had before, but α and β may depend on t.

• Einstein's equations show that

$$\partial_t\beta = 0, \quad \partial_t\partial_r\alpha = 0$$

which implies that

$$\beta = \beta(r), \quad \alpha = f(r) + g(t)$$

We can rescale the time-coordinate so that $g(t) = 0$, getting us back to where we were before.

• Remarkably, we've shown that spherical symmetry implies a unique solution, which must be static. This is in some sense a generalization of the shell theorem. For example, the metric outside a spherically symmetric star must be Schwarzschild no matter how it evolves; for example, this implies it emits no gravitational waves during its collapse.

6.2 Spherical Stars

We now apply our general relativity to spherically symmetric stars. First, we review astrophysics.

• Stars are supported against gravity by the pressure generated by nuclear fusion. When the fuel for these reactions runs out, the star collapses.

• For smaller stars, the final state is a white dwarf, where gravity is balanced by electron degeneracy pressure. A white dwarf cannot have a mass greater than the Chandrasekhar limit $1.4M_\odot$, derived with Newtonian gravity.

• Above this limit, the final state can be a neutron star, supported by neutron degeneracy pressure; the protons are removed by inverse beta decay. Neutron stars are extremely small, with Newtonian potentials $|\Phi| \sim 0.1$, so general relativity is required to describe them.

• Neutron stars cannot exist with a mass above the TOV limit, $3M_\odot$, and we will heuristically derive this result below. The outside of a spherical star is described by the Schwarzschild metric, while we model the inside by a perfect fluid.

Now we turn to the metric inside a spherical star.

• From our earlier work, we know we can set the metric to

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)}dt^2 + e^{2\Psi(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

The matter is a perfect fluid,

$$T_{ab} = (\rho + p)u_a u_b + p g_{ab}$$

where u^a is the four-velocity of the fluid, and since the situation is static and spherically symmetric the four-velocity must point in the timelike direction, $u^\mu = e^{-\Phi}(\partial_t)^\mu$. Here, p and ρ are functions of r that vanish outside the star, $r > R$.

• The equations of motion for the fluid follow from conservation of T^{ab}, but this follows from the Einstein equation. By symmetry, the only independent components of this equation are the tt, rr, and $\theta\theta$ components.

• We define $m(r)$ by

$$e^{2\Psi(r)} = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}$$

so that in the Newtonian limit, $m(r)$ corresponds roughly to the mass within radius r. The tt and rr components of the Einstein equation are

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad \frac{d\Phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 p}{r(r - 2m)}$$

Finally, the $\theta\theta$ component is more easily derived as the r component of $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$,

$$\frac{dp}{dr} = -(p + \rho)\frac{m + 4\pi r^3 p}{r(r - 2m)}$$

This is essentially force balance. These equations are collectively called the TOV equations.

• An equation of state relates T, p, and ρ. In the zero-temperature limit, this gives a barotropic equation of state $p = p(\rho)$, where we assume $dp/d\rho > 0$, giving four equations for the four unknowns m, p, ρ, and Φ.

• In the case of no matter, we have $p = \rho = 0$ and $m(r) = M$, implying

$$\Phi = \frac{1}{2}\log(1 - 2M/r) + \Phi_0$$

Rescaling the time to set Φ_0 to zero recovers the Schwarzschild solution. Since the solution outside a star is always Schwarzschild, a star must have radius $R > 2M$.

Next, we integrate these equations.

• Integrating the equation for dm/dr gives

$$m(r) = 4\pi \int_0^4 \rho\left(r'\right) r'^2 dr' + m_*$$

The integration constant m_* must be zero, because spacetime is locally flat; very small spheres near the origin should have the same area/radius relation as in flat space. Then $\Psi(0) = 0$ which implies $m_* = 0$.

• To match onto the Schwarzschild solution, we must have

$$M = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr$$

This looks deceptively like the Newtonian formula for total mass but it has the wrong volume element. The total mass-energy is actually

$$E = 4\pi \int_0^R \rho e^{\Psi} r^2 dr > M$$

We interpret M as the total energy, and $E - M$ as the gravitational binding energy.

• We can improve our bound on the radius of a star. Since we must have $m(r)/r < 1/2$ for all r, and $dp/dr \leq 0$ which implies $d\rho/dr \leq 0$, it can be shown that

$$\frac{m(r)}{r} \leq \frac{2}{9}\left(1 - 6\pi r^2 p(r) + \sqrt{1 + 6\pi r^2 p(r)}\right)$$

and evaluating at $r = R$ and $p = 0$, we have the Buchdahl inequality $R > 9M/4$.

• In general, to solve the equations numerically, we fix $p(\rho)$ and regard the dm/dr and dp/dr equations as coupled first-order differential equations with initial condition $m(0) = 0$ and $\rho(0) = \rho_c$. We then integrate again to find $\Phi(r)$.

• For a typical equation of state, the result is that $M\left(\rho_c\right)$ has a maximum, implying a maximum possible mass. For example, using the equation of state for a white dwarf reproduces the Chandrasekhar bound.

• Remarkably, we can still find an upper bound for an arbitrary equation of state. Define the core of the star to be the region $r < r_0$ where we don't know the equation of state, and let $m_0 = m\left(r_0\right)$. Since $d\rho/dr < 0$,

$$m_0 \geq \frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho_0$$

On the other hand, the Buchdahl inequality also holds for the core,

$$\frac{m_0}{r_0} \leq (\text{ RHS at } p = p_0) \leq (\text{ RHS at } p = 0) = \frac{4}{9}$$

These two inequalities define a finite region in the (m_0, r_0) plane with bound

$$m_0 < \sqrt{\frac{16}{243\pi\rho_0}}$$

The mass of the envelope outside the core can be determined with a known equation of state and typically contributes less than 1%.

• We typically set $\rho_0 = 5 \times 10^{14}$ g/cm^3, the density of nuclear matter. Then numerically optimizing over the combined core and envelope mass, the mass of the star is at most $5M_\odot$. This bound can be strengthened with further physical assumptions. For example, the speed of sound is $\sqrt{dp/d\rho}$, so requiring $dp/d\rho \leq 1$ gives a bound of $3M_\odot$.

• The physical intuition behind these bounds is that the gravity due to mass density can be resisted by pressure, but in general relativity, pressure is also a source of gravity. Thus, at some point collapse will occur no matter what the pressure is.

6.3 Geodesics of Schwarzschild

In this section, we find the geodesics and cover some classic tests of general relativity.

• Rather than use the geodesic equation, we work directly with the Lagrangian,

$$\mathcal{L} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2$$

where the dot is a derivative with respect to the parameter λ. The θ component of the EulerLagrange equation is

$$\ddot{\theta} + 2\frac{\dot{r}\dot{\theta}}{r} - \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 = 0$$

which shows that if we begin with $\theta = \pi/2$ and $\dot{\theta} = 0$, then $\dot{\theta} = 0$ at all times. Hence we can choose our coordinate system so that $\theta = \pi/2$ without loss of generality.

• There are also conserved quantities due to the cyclic coordinates t and ϕ, with

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{t}} = -2\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = 2r^2\sin^2\theta\dot{\phi} = 2r^2\dot{\phi}$$

There is also the analogue of 'time translation' symmetry, since $\partial\mathcal{L}/\partial\lambda = 0$. This yields conservation of the 'Hamiltonian', but since $\mathcal{L}$ is a homogeneous polynomial in the velocities $\dot{x}^\mu$, it is equivalent to conservation of the Lagrangian, $d\mathcal{L}/d\lambda = 0$.

• This leads to the conserved quantities

$$E = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}, \quad L = r^2\dot{\phi}, \quad Q = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$$

and we scale λ so that $Q = -1$ on timelike paths and $Q = 0$ on null paths. Note that we can't change λ arbitrarily, as the non-square root form of the action we're using is not reparametrization invariant; only affine transformations are allowed.

• There are two other conserved quantities from the other two components of angular momentum; these specify the direction of angular momentum and imply the motion lies in a plane, which we used earlier to set $\theta = \pi/2$.

• Note that the quantity E includes "gravitational potential energy". The "kinetic energy" alone is given by $p^\mu u_\mu$, but this is not conserved. For $r \gg 2M$, the two match up, as $E = \dot{t} = \gamma$. Then E and L can be interpreted as the energy and angular momentum per unit mass.

Now we use our setup to investigate the orbits.

• Plugging everything into our equation for Q gives

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V(r) = \frac{1}{2}E^2, \quad V(r) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{L^2}{r^2} - Q\right)$$

The E^2 on the right-hand side looks a bit strange, but when we take the Newtonian limit, we will have $E \approx mc^2 + mv^2/2$, and $E^2/2$ has quadratic term proportional to $mv^2/2$ as expected.

• To analyze the geodesics, it is more convenient to write

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{GR}}(r) = \text{ const }, \quad V_{\text{GR}}(r) = \frac{1}{2}\frac{L^2}{r^2} + Q\frac{GM}{r} - \frac{GML^2}{r^3}$$

where we restored factors of G. By contrast, in the Newtonian case we have

$$V_{\text{N}}(r) = \frac{1}{2}\frac{L^2}{r^2} - \frac{GM}{r}$$

That is, the $1/r^3$ term is missing, and $Q = -1$ is fixed.

• First, consider a massless particle. This is a bit ambiguous; if we take the Newtonian limit first, the massless limit does nothing, since the mass cancels out everywhere. On the other hand, if we set $Q = 0$ first in general relativity, then take the Newtonian limit, the potential is just $L^2/2r^2$, that of a free particle.

• For $Q = -1$, in the Newtonian limit, all circular orbits are stable. In the case of general relativity, we find two circular orbits for each value of L,

$$r = \frac{L^2}{2M} \pm \sqrt{\frac{L^4}{4M^2} - 3L^2}$$

where the outer one is stable and the inner is unstable. For $L^2 = 12M^2$ these orbits merge at $r = 6M$. Then there are no stable orbits for $r < 6GM$. As L is varied, we find unstable orbits for $3GM < r < 6GM$.

• We can also handle $Q = 0$ in general relativity. In this case, there is only one initial condition, the direction of the light ray at infinity, and accordingly E^2 and L^2 combine into one parameter, since reparametrization absorbs the second. We find a single unstable circular orbit at $r = 3M$, called the light ring or photon sphere.

We now study the precession of elliptical orbits in detail. (todo: Shapiro delay)

• It is useful to parametrize the orbit as $r(\phi)$. Since an ellipse has the form $r \propto 1/(1 + \epsilon\cos\phi)$, we expect the equation will be simpler if we use the dimensionless variable $x = L^2/Mr$. Switching to x and differentiating with respect to ϕ to remove the constant energy term gives

$$\frac{d^2x}{d\phi^2} - 1 + x = \alpha x^2, \quad \alpha = \frac{3M^2}{L^2}$$

The term on the right is the contribution from general relativity.

• We expand in a perturbation series in α, letting $x = x_0 + x_1 + ...$ At zeroth order,

$$\frac{d^2x_0}{d\phi^2} - 1 + x_0 = 0, \quad x_0 = 1 + e\cos\phi$$

which recovers the elliptical orbit. The first-order equation is

$$\frac{d^2x_1}{d\phi^2} + x_1 = \alpha x_0^2 = \alpha\left[\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) + 2e\cos\phi + \frac{e^2}{2}\cos 2\phi\right].$$

• Now, $x_1(\phi)$ satisfies the same equation as a driven harmonic oscillator. The constant driving term just gives a constant shift, and the $\cos 2\phi$ term yields an oscillation proportional

to $\cos 2\phi$. However, the $\cos\phi$ term is resonant, so the solution is $x_1 \sim \phi\cos\phi$. Since we are interested in perihelion shift, we keep only this term, for

$$x \approx 1 + e\cos\phi + \alpha e\phi\sin\phi \approx 1 + e\cos[(1-\alpha)\phi].$$

The last step drops $O(\alpha^2)$ terms, which is fine since we're working to leading order in α.

• Therefore, we find that per orbit, the perihelion precesses by

$$\Delta\phi = 2\pi\alpha = \frac{6\pi M^2}{L^2}$$

Using the Newtonian equation $L^2 = GM(1-e^2)a$, correct to leading order in α, we have

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{c^2(1-e^2)a}$$

where we restored units. For Mercury, this is 43 arcseconds per century, matching the experimental result. Note that this required sophisticated developments in celestial mechanics, because the true precession is over 10 times larger, with most of it accounted for by the influences of the other planets; the relativistic perihelion shift is just the remainder.

As a second application, we consider the deflection of light.

• In the Newtonian picture where light does deflect, it obeys the equation

$$\frac{dx^2}{d\phi^2} + x = 1$$

A general solution has the form

$$x = 1 + a\sin\phi, \quad a = \frac{L^2}{Mb} = \frac{b}{M}$$

where b is the distance of closest approach. Note that since L is the angular momentum per unit mass, we have $L = bc = b$ since we've set $c = 1$.

• As a tends to infinity, the path becomes a straight line, so that the velocities at infinity are related by an angle π. Generally, the angle is the difference of the zeroes of $x(\phi)$. For finite a, the angle is shifted by $\Delta\phi = 2/a = 2M/b$.

• In general relativity, the equation of motion is instead

$$\frac{dx^2}{d\phi^2} + x = \frac{3M^2}{L^2}x^2 = \frac{3x^2}{a^2}$$

We expand order by order in $1/a$, where

$$x_0 = a\sin\phi, \quad \frac{dx_1^2}{d\phi^2} + x_1 = 3\sin^2\phi$$

Then the solution for x_1 is

$$x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\phi) + \text{ homogeneous solution.}$$

• It would be best to choose the homogeneous solution so that $x_0 + x_1$ has the same distance of closest of approach as x_0, but it doesn't matter since it only results in higher-order corrections. Instead, we simply set it to zero, and compute the angle shift

$$\Delta\phi = \frac{4}{a} = \frac{4M}{b}$$

where b is the distance of closest approach for x_0 alone; adjusting b gives a second-order correction. We find an angle shift that is twice as large as in the Newtonian case, as famously observed by Eddington during the solar eclipse of 1919. In some sense, this is because the Newtonian case only accounts for the shift to g_{tt}, and not the equal shift to g_{rr}.

Example. Gravitational redshift. Suppose that observers A and B at $r = r_A$ and $r = r_B$ exchange signals. If A sends two photons separated by a coordinate time Δt, then they arrive at B separated by a coordinate time Δt since $\partial/\partial t$ is a Killing vector. Then the proper times are related by

$$\frac{\Delta\tau_B}{\Delta\tau_A} = \sqrt{\frac{1-2M/r_B}{1-2M/r_A}}$$

Now for light waves, the period is equal to the wavelength, so the wavelength redshifts by

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_B}{\lambda_A} = \sqrt{\frac{1}{1-2M/r_A}}$$

in the case where B is at infinity. This diverges when $r_A \to 2M$. In addition, by the Buchdahl inequality, the maximum redshift observable from the surface of a spherical star is $z = 2$.

As stated earlier, for weak fields, the gravitational redshift is by $\Delta\phi/c^2$. The gravitational redshift has been tested and confirmed in various circumstances, such as in Earth orbit by Gravity Probe-A ($\Delta\phi/c^2 \sim 0.0002$), and with stars approaching the supermassive black hole at the center of the galaxy ($\Delta\phi/c^2 \sim 0.1$).

Note. Detection methods for black holes. Due to the Chandrasekhar and TOV limits, a very small and very massive object must be a black hole. For example, stars are observed to be orbiting about the galactic center, which we can infer has a mass of $4 \times 10^6 M_\odot$. The stars also get close enough to bound the radius, ruling out anything besides a black hole. Many galaxies are believed to contain a supermassive black hole at their centers, i.e. a black hole with mass over $10^6 M_\odot$. Usually, these black holes contain about 0.1% of the mass of the galaxy; it is unclear how they form.

Another way to detect black holes is by their accretion disks. As a particle orbits a black hole, it slowly loses energy, decreasing its orbit radius, until it hits $r = 6M$, at which point it quickly falls in. It can be shown that this process releases $1 - \sqrt{8/9} \approx 0.06$ of the rest mass as energy, typically as X-rays. Such a signal has a characteristic cutoff corresponding to $r = 6$M. The accretion disks around supermassive black holes power quasars; accretion disks can also form around smaller black holes in binary systems, by stripping mass off their companion by tidal forces.

6.4 Schwarzschild Black Holes

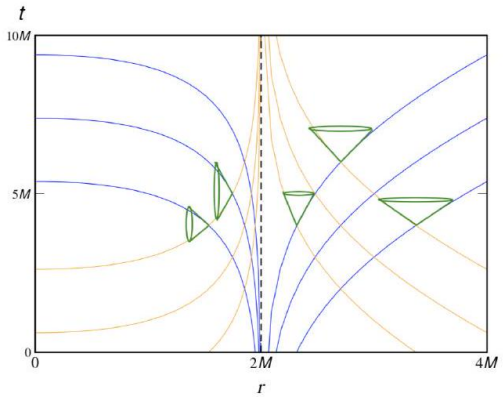
We now investigate the event horizon of the Schwarzschild solution.

• We focus on radially moving light, where setting $ds^2 = 0$ gives

$$\frac{dt}{dr} = \pm\frac{r}{r-2M}, \quad t(r) = \pm(r + 2M\log|r-2M|) + k$$

where k is a real constant. We take the absolute value in the logarithm to keep everything real, though we can still get a valid solution without it by letting k be complex.

• When $r > 2M$, the + sign gives outgoing geodesics and the - sign gives ingoing geodesics. The ingoing geodesics take an infinite amount of coordinate time to hit $r = 2M$.



When $r < 2M$, the situation is more subtle. Now r is timelike, and it is ambiguous whether the light cone points towards decreasing or increasing r. We can't resolve this by continuity across $r = 2M$ since the metric is singular there; more rigorously we really shouldn't consider the $r < 2M$ region to be covered by the coordinates at all because of the coordinate singularity. It turns out there are two $r < 2M$ regions, one where the light cone points in and one where it points out, as we'll show later.

• Next, we consider the perspective of an infalling observer. Energy conservation gives

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} = E$$

and we parametrize by proper time so that

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 = -1$$

For simplicity we suppose the observer is at rest at infinity, so $E = 1$. Rearranging,

$$\dot{r}^2 = \frac{2M}{r}, \quad \Delta\tau = -\frac{2}{3\sqrt{2M}} \Delta\left(r^{3/2}\right)$$

Then a falling observer takes a finite proper time to fall through the event horizon, with nothing special happening when they cross it.

• On the other hand, we can parametrize the geodesic by t for

$$\frac{dt}{dr} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}} = -\sqrt{\frac{r}{2M}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$$

The solution is complicated, but it takes infinite coordinate time to fall through $r = 2M$. That is, a distance observer only sees the infalling one slowly redshift more and more as they approach the horizon, never quite crossing it. However, an observer falling into a black hole doesn't 'see the end of the universe'. A detailed calculation shows that they can only receive a finite number of evenly-spaced light signals from outside.

To better understand the behavior near the event horizon, we switch to an improved coordinate system adapted to null geodesics.

• In the incoming Eddington-Finkelstein (EF) coordinates, we define

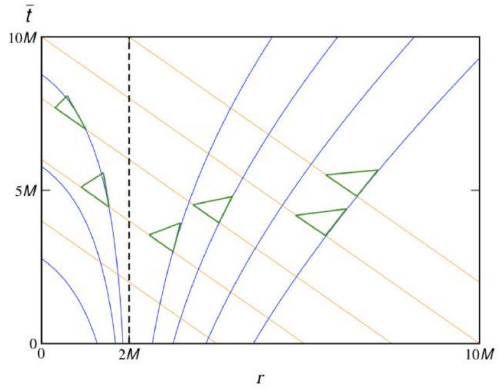
$$\bar{t} = t + 2M \log|r - 2M|, \quad d\bar{t} = dt + \frac{2M}{r - 2M} dr$$

so that the Schwarzschild metric becomes

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\bar{t}^2 + \frac{4M}{r} d\bar{t} dr + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

These coordinates are chosen so that ingoing radial null geodesics are simple; they are

$$\bar{t} = \begin{cases} -r + k & \text{incoming} \\ r + 4M \log|r - 2M| + k & \text{outgoing.} \end{cases}$$



• The light cones now vary smoothly across $r = 2M$, and 'tip over' at the event horizon, so that particles can only fall inward. It's now clear that the event horizon itself is a null surface; a photon could travel on it forever.

• Formally, we define an event horizon to be the outermost boundary of a region of spacetime from which no null geodesics, and hence no timelike curves can escape to infinity. Israel's theorem states that the Schwarzschild spacetime is the unique static, asymptotically flat spacetime with a regular horizon.

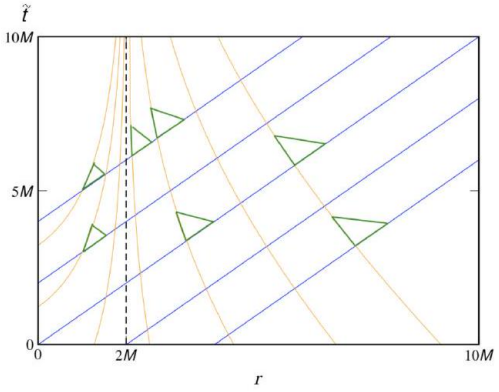
• Mathematically, we have extended the original Schwarzschild solution, i.e. found a larger spacetime with metric which contains the $r > 2M$ region of the Schwarzschild solution as a subset. The Einstein field equation still holds everywhere, because it holds for $r > 2M$ and the metric is real analytic.

• Similarly, we can adapt our coordinate system to outgoing null geodesics, defining the outgoing EF coordinates, with metric

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tilde{t}^2 - \frac{4M}{r} d\tilde{d}dr + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

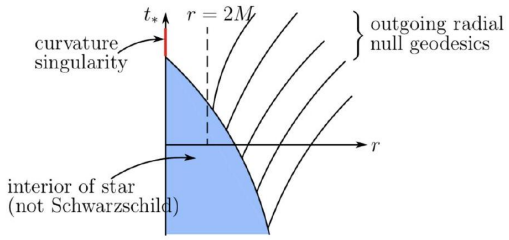
The radial null geodesics are

$$\tilde{t} = t - 2M \log|r - 2M|, \quad \tilde{t} = \begin{cases} -r - 4M \log|r - 2M| + k & \text{incoming} \\ r + k & \text{outgoing.} \end{cases}$$



• In this case, the physical picture is exactly the opposite: geodesics can only ever come out of $r = 2M$. This is still a valid extension of the Schwarzschild spacetime, but it's not the same one as the incoming EF coordinates.

Note. The (incoming) Finkelstein diagram for a collapsing star is shown below.



The metric everywhere outside the star is Schwarzschild, so to an external observer it is exactly Schwarzschild once the outside passes $r = 2M$, which occurs in finite time. It can be shown that a particle on the outside must then hit $r = 0$ within proper time πM, i.e. the singularity forms in finite proper time. In the original Schwarzschild coordinates, the star never finishes collapsing; instead it makes an increasingly thin and redshifted shell at $r = 2M$ that quickly becomes invisible. Of course, this makes no difference to an observer actually falling in.

6.5 Kruskal Coordinates

Now we switch to the Kruskal-Szekeres coordinates, which yield the maximal extension of the Schwarzschild spacetime.

• For the incoming EF coordinates, we transform to the null coordinate

$$v = \bar{t} + r, \quad ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2dr dv + r^2 d\Omega^2$$

Similarly, for the outgoing EF coordinates, we define

$$u = \tilde{t} - r, \quad ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) du^2 - 2du dr + r^2 d\Omega^2$$

• Next, we switch to the variables u and v, which obey

$$\frac{1}{2}(v + u) = t, \quad \frac{1}{2}(v - u) = r + 2M \log \frac{r - 2M}{r_*}$$

where we've absorbed the integration constant into r_*. The Schwarzschild metric becomes

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) du dv + r^2 d\Omega^2$$

where r is implicitly defined in terms of u and v.

• Next, we change variables to an exponential version of u and v,

$$V = e^{v/4M}, \quad U = -e^{-u/4M}$$

so that

$$ds^2 = \frac{16M^2}{UV}\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dU dV + r^2 d\Omega^2$$

To simplify, we note that

$$UV = -e^{v-u}4M = -\frac{r-2M}{r_*}e^{r/2M}, \quad ds^2 = -\frac{16M^2}{r/r_*}e^{-r/2M}dUdV + r^2d\Omega^2$$

The original spacetime only contained $U \geq 0$ and $V \leq 0$, but we can now extend to all U and V, with $r(U,V)$ defined the same way.

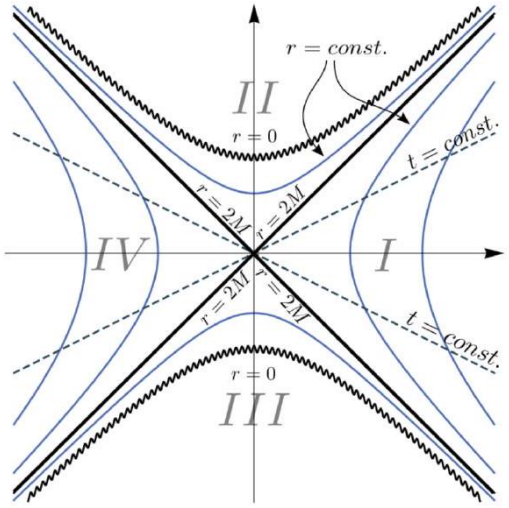
• Now, U and V are null coordinates, so we can switch back to spatial and radial coordinates by

$$\hat{t} = \frac{1}{2}(V+U), \quad \hat{r} = \frac{1}{2}(V-U)$$

Then we have $dVdU = d\hat{t}^2 - d\hat{r}^2$, so

$$ds^2 = \frac{16M^2}{r}e^{-r/2M}\left(-d\hat{t}^2 + d\hat{r}^2\right) + r^2d\Omega^2$$

where we set $r_* = 1$ by rescaling, though sometimes $r_* = 2M$ is also chosen.



• The metric is now manifestly regular at $r = 2M$, and radial null geodesics have the simple form $\hat{t} = \pm\hat{r} + k$. To relate $\hat{r}$ and $\hat{t}$ back to r, note that

$$\hat{t}^2 - \hat{r}^2 = -(r-2M)e^{r/2M}$$

Then $r = 2M$ is given by $\hat{t} = \pm\hat{r}$, while $r = 0$ is given by $\hat{t} = \pm\sqrt{\hat{r}^2 + 2M}$. There are no restrictions on our coordinates besides $r > 0$.

• We can now understand some of the puzzles we ran into earlier. The Schwarzschild coordinates only work in region I, running into singularities at $r = 2M$. The incoming geodesics take an infinite amount of time to fall into $r = 2M$, and the outgoing geodesics take an infinite amount of time to come out.

• The incoming EF coordinates work in regions I and II, extending through $t \to \infty$, so that they contain the entirety of incoming geodesics. The outgoing EF coordinates instead extend through $t \to -\infty$, so they contain the entirety of outgoing geodesics.

• The point is that it's perfectly possible to come out of the surface $r = 2M$, though we can never observe it since it takes an infinite coordinate time. But this isn't that strange, because we can't observe anything falling in either.

• We can think of region III as the image of region II under time reversal; in this region there is a 'white hole' from which things can only exit. One might think that a black hole must map to a black hole under time reversal, since the Schwarzschild metric is static, but

that's not right because t is spacelike inside the hole. The $r = 0$ singularity of the black hole is a time, not a place, lying in the infinite future; the $r = 0$ singularity of the white hole lies in the infinite past. Both describe gravitationally attractive objects of mass M. They behave somewhat analogously to a 'Big Bang' and 'Big Crunch'.

• Finally, region IV is a mirror image of region I. We can think of it as being briefly connected to region I by a wormhole, as can be shown by taking slices of constant T, which closes too fast for any timelike observer to pass through.

Note. Why don't we see white holes in reality? All of this discussion only applies to the 'eternal' black hole of the Schwarzschild metric. In a real black hole formed by star collapse, there is no region III, so the white hole isn't physical. A deeper reason is from thermodynamics. We expect that a black hole is stable, i.e. that small perturbations decay. Then small perturbations of a white hole grow, so it is thermodynamically impossible to create them.

We give a more formal definition of 'black hole' and 'event horizon'.

• A vector is causal if it is timelike or null, where we stipulate that a null vector must be nonzero. A curve is causal if its tangent vector is everywhere causal. Note that a causal curve traveled backwards is also causal.

• A spacetime is time-orientable if it admits a time-orientation, i.e. a global causal vector field T^a. Another causal vector X^a is future-directed if it lies on the same light cone as T^a and past-directed otherwise. Because of the $(-+++)$ metric convention, if T^a and X^a have negative inner product, they are in the same light cone.

• It is most convenient to use the null incoming EF coordinates (v, r, Ω) defined above, as ∂_r is null everywhere. Note that ∂_r in the original EF coordinates is not null, because ∂_r is defined as an element of the dual basis of the dx^μ, where the x^μ are all the coordinates, so changing t to v changes ∂_r.

• At infinity, we choose positive time to point along ∂_t, and this is parallel to ∂_v. Then $\partial_v \cdot \partial_r$ is positive at infinity, which means our time-orientation is $-\partial_r$.

• We can now use this setup to show rigorously that if $x^\mu(\lambda)$ is a future-directed causal curve and $r(\lambda_0) \leq 2M$, then $r(\lambda) \leq 2M$ for $\lambda \geq \lambda_0$. The tangent vector $V^\mu = dx^\mu/d\lambda$ satisfies

$$0 \geq -\partial_r \cdot V = -g_{r\mu}V^\mu = -V^v = -\frac{dv}{d\lambda}$$

Next, rearranging the norm of V^2 gives

$$-2\frac{dv}{d\lambda}\frac{dr}{d\lambda} = -V^2 + \left(\frac{2M}{r} - 1\right)\left(\frac{dv}{dr}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\Omega}{d\lambda}\right)^2$$

where the last term stands in for the angular parts. For $r \leq 2M$, we have $(dv/d\lambda)(dr/d\lambda) \leq 0$, which essentially gives the result.

• There are a few more annoying cases. For example, we could have $dr/d\lambda > 0$ if $dv/d\lambda = 0$. In that case, we need $V^2 = d\Omega/d\lambda = 0$. But then only V^r is nonzero, and V^r is a negative multiple of $-\partial_r$, so it is not in the same light cone. There's a similarly annoying case when $r = 2M$ exactly.

• This establishes that it is impossible to send a signal from $r \leq 2M$ to infinity. We define a region of spacetime where this is true to be a black hole, and the boundary of a black hole to be an event horizon.

• As another application, the incoming and outgoing EF coordinates only differ by the sign of the time orientation; this is formally the statement that they are time reverses of each other.

Now we give a few more details about the Kruskal coordinates.

• The time translation vector field is

$$k = \frac{1}{4M}\left(V\frac{\partial}{\partial V} - U\frac{\partial}{\partial U}\right), \quad k^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

and it is timelike in regions I and IV, and spacelike in regions II and III.

• There is a 'wormhole' between regions I and IV. We define the isotropic coordinate ρ by

$$r = \rho + M + \frac{M^2}{4\rho}$$

so that for a fixed $r > 2M$, there are two solutions for ρ. We choose $\rho > M/2$ for region I and $0 < \rho < M/2$ for region IV. Then the metric in coordinates (t, ρ, θ, ϕ) is

$$ds^2 = -\frac{(1 - M/2\rho)^2}{(1 + M/2\rho)^2} dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2\rho}\right)^4 \left(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2\right)$$

The resulting spacetime is symmetric between regions I and IV by the isometry $\rho \to M^2/4\rho$. The metric is singular at $\rho = M/2$, but this is just a coordinate singularity.

• These coordinates are called isotropic coordinates because for fixed t, the metric is Euclidean up to a local scale factor. The metric

$$ds^2 = \left(1 + \frac{M}{2\rho}\right)^4 \left(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2\right)$$

describes a Riemannian 3-manifold with topology $\mathbb{R} \times S^2$ called an Einstein-Rosen bridge.

• A wormhole connects the asymptotically flat regions $\rho \to \infty$ and $\rho \to 0$ by a 'throat' of minimum radius $2M$ at $\rho = M/2$. We may visualize the wormhole by embedding it in Euclidean $\mathbb{R}^4$, straightforward in isotropic coordinates, and suppressing an angular coordinate. The wormhole closes too fast to be traversed, as seen from the Kruskal diagram.

Finally, we take a careful look at singularities.

• A spacetime is extendable if it is isometric to a proper subset of another spacetime; we have seen that the Schwarzschild spacetime is extendable to the Kruskal spacetime, which is not extendable.

• We have defined physical singularities as points where a curvature scalar diverges, but this is not general enough. For example, consider the conical space

$$ds^2 = dr^2 + \lambda^2 r^2 d\phi^2$$

where $\lambda > 0$ is not equal to one. Then the curvature vanishes everywhere, but the point $r = 0$ is not locally isomorphic to Euclidean space; circles don't have the right circumferences, no matter how small we make them. This is called a conical singularity.

• Mathematically, we don't want to define singularities as points where curvature scalars diverge because we are working with smooth manifolds with smooth metrics; the singularities aren't regarded as points in the manifold at all. Instead we detect singularities through geodesics; they are places where geodesics end in finite time. To rule out cases where we just haven't made the parameter space large enough, we define inextendability.

• We say $p \in M$ is a future endpoint of a future-directed causal curve $\gamma : (a, b) \to M$ if, for any neighborhood O of p, there exists t_0 so that $\gamma(t) \in O$ for all $t > t_0$. We say γ is futureinextendable if it has no future endpoint.

• For example, in Minkowski spacetime, consider $\gamma : (-\infty, 0) \to M$ where $\gamma(t) = (t, 0, 0, 0)$. Then γ has a future endpoint, the origin, so it is not future-inextendable. However, if the origin is deleted, then γ is future-inextendable.

• A geodesic is complete if an affine parameter for the geodesic extends to $\pm\infty$, and a spacetime is geodesically complete if all inextendable causal geodesics are complete.

• For example, the Schwarzschild spacetime is not geodesically complete, because of geodesics that go through the horizon; here the incompleteness arises because we are not considering the entire spacetime. We define a spacetime to be singular if it is geodesically incomplete and inextendable, so the Kruskal spacetime is singular.

1.1.5 Conservation of energy (!?!)

Perfect Fluids

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu}$$

3.2 The Stress-Energy Tensor

We now introduce the stress-energy tensor, initially focusing on flat spacetime.

• The stress-energy tensor is a rank two symmetric tensor $T^{\mu\nu}$. With mixed indices, $T^\mu{}_\nu$ describes the flux of four-momentum p^μ across a surface of constant x^ν.

• T^0_0 is the flux of energy across a surface of constant t, or in other words, the energy density. Similarly, T^i_0 is the momentum density.

• Therefore, in a general frame, the energy-momentum current measured by an observer with four-velocity u^a is $j^a = T^a{}_b u^b$.

• $T^0{}_i$ is the flux of energy across a surface of constant x^i. It is equal to T^i_0 because momentum corresponds to the spatial flow of energy, which is shown in the notes on Quantum Field Theory by applying Noether's theorem to boosts. (Note this doesn't hold in curved spacetime, and we shouldn't expect it to, since boosts are no longer a symmetry.)

• $T^i{}_j$ is the flux of momentum p^i across a surface of constant x^j, i.e. the i-component of the force on a surface of constant x^j. It is also called the stress tensor and used in nonrelativistic continuum mechanics, as shown in the notes on Undergraduate Physics. (As a warning, the nonrelativistic stress tensor may differ by a sign, depending on conventions.)

• In the rest frame of a fluid, the T^i_i are pressures and the off-diagonal elements are shear stresses. For each piece of the fluid, we must have $T^i{}_j = T^j{}_i$ for internal torques to balance.

• In special relativity, conservation of the stress-energy tensor is expressed by $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$. Then in general relativity, we postulate

$$\nabla^a T_{ab} = 0$$

• Dust is a set of free particles with uniform density and uniform velocity u^μ. Then the number flux is $N^\mu = n u^\mu$ where n is the number density in the rest frame. In the rest frame, we have $T^{00} = \rho = mn$ with all other elements zero. To generalize to arbitrary frames, note that this agrees with the tensorial equation $T = N \otimes p$, where p^μ is the momentum of each particle, so

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$$

This is the stress-energy tensor of dust, a pressureless fluid.

• More generally, we would like to consider a fluid with a pressure p in its rest frame. That is, in the rest frame, $T^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(\rho, p, p, p)$. This generalizes to

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + p\eta^{\mu\nu}$$

and in general relativity η is simply promoted to g. An alternative definition of a perfect fluid is one which has no viscosity or heat conduction. In the rest frame in flat spacetime, these conditions set $T^{ij} = 0$ for $i \neq j$ and $T^{0i} = 0$ respectively, and isotropy sets $T^{11} = T^{22} = T^{33}$.

• Finally, dark energy is a perfect fluid which we demand is Lorentz invariant, i.e. it must look the same in all inertial reference frames. Then we cannot use u^μ to build $T^{\mu\nu}$, so

$$T^{\mu\nu} = -\rho\eta^{\mu\nu}$$

which again generalizes by promoting η to g.

• The relationship between p and ρ is called the equation of state. In cosmology, we often have $p = w\rho$. Dust has $w = 0$, a photon gas has $w = 1/3$, and dark energy has $w = -1$. On the other hand, in stellar astronomy, we often have a "polytropic" equation of state $p \propto \rho^\gamma$.

Example. Conservation of the stress-energy tensor for a perfect fluid gives

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = (\partial_\alpha \rho + \partial_\alpha p)\, u^\alpha u^\beta + (\rho + p)\left(u^\beta \nabla_\alpha u^\alpha + u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta\right) + (\partial_\alpha p)\, g^{\alpha\beta} = 0$$

Now we contract both sides with u_β, noting that

$$u_\beta u^\beta = -1, \quad u_\beta \nabla_\alpha u^\beta = \nabla_\alpha \left(u_\beta u^\beta\right) = 0$$

which yields

$$u^\alpha \nabla_\alpha \rho + (\rho + p)\nabla_\alpha u^\alpha = \nabla_\alpha \left(\rho u^\alpha\right) + p \nabla_\alpha u^\alpha = 0$$

Taking the Newtonian limit, the pressure term is negligible, so ρu^α is a conserved current. Therefore we have the law of mass conservation. Plugging this result back into our original equation for one of the $\rho + p$ terms, we find

$$(\rho + p) u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = -\left(g^{\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta\right) \nabla_\alpha p$$

which reduces to the Euler equation in the Newtonian limit.

Example. Energy is not conserved in general relativity. As an explicit example, consider an isotropic universe filled with a perfect fluid, so

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}\left(-1, a^2, a^2, a^2\right)$$

in comoving coordinates. In the rest frame of the fluid, the mass conservation law above becomes

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p)$$

which implies

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}$$

However, the spatial volume scales as $\sqrt{-g} = a^3$, so the energy is not conserved. This is to be expected, since the time variation of a breaks time-translational invariance.

Note. One can think of the energy as going into gravitational field energy. However, this is difficult to make precise. In the Newtonian limit, the energy is proportional to $(\nabla\phi)^2$, so we expect it is proportional to $(\partial g)^2$ here. But we can always set $\partial g = 0$ at any point by working in normal coordinates. Hence it is impossible to unambiguously define gravitational field energy locally.

There are two options at this point. One option is to only define the total energy globally, which can be done assuming asymptotic flatness, leading to the Komar mass or ADM mass, or other variants. The other option is to give up on a tensorial definition. One can define energymomentum pseudotensors that are coordinate-dependent but locally conserved in all coordinates, which establishes that energy cannot "teleport". However, since they are strongly coordinatedependent their precise physical meaning is controversial.

Note. How is energy non-conservation consistent with the conservation of the stress-energy tensor? For a conserved vector, $\nabla_\mu J^\mu = 0$, we have a conserved quantity by the divergence theorem. For a conserved symmetric tensor such as $T^{\mu\nu}$, it is not possible to simply "set $\nu = 0$ " to get a conserved vector. However, for a conserved symmetric rank r tensor it is generally true that we can form a conserved vector by contraction with $r - 1$ Killing vectors.

Example. The electromagnetic field. The energy density is

$$\epsilon = \frac{E_i E_i + B_i B_i}{8\pi}$$

and the momentum density/energy flux density is given by the Poynting vector

$$S_i = \frac{1}{4\pi}\epsilon_{ijk} E_j B_k$$

The stress tensor is

$$t_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{2}\left(E_k E_k + B_k B_k\right)\delta_{ij} - E_i E_j - B_i B_j\right)$$

Then conservation of energy and momentum are written as

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \partial_i S_i = 0, \quad \frac{\partial S_i}{\partial t} + \partial_j t_{ij} = 0$$

In special relativity, all of these results are combined into the stress-energy tensor

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{\mu\rho}F^{\rho}_{\nu} - \frac{1}{4}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\eta_{\mu\nu}\right), \quad \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

This can also be derived from Noether's theorem, but using the theorem directly will yield a result that is neither symmetric nor gauge invariant. The expression above is the "improved" version, which does not have these problems. It is easy to guess, because the two terms present are the only possible ones that are symmetric, gauge invariant, and bilinear in the field strength; their coefficients are fixed by the energy density $T^{00} = \epsilon$.

In general relativity, the stress-energy tensor above is the physically correct one; the only changes are that we must replace η with g, and raise and lower indices using g. Then Maxwell's equations imply $\nabla_a T^{ab} = 0$. It's also worth noting that the stress-energy tensor is traceless.

Example. A single particle of mass m, following a path $q^\mu(\tau)$. The number flux is

$$N^\mu(x) = \int d\tau \frac{dq^\mu}{d\tau}\delta(x - q(\tau))$$

Weighting this by momentum, the stress-energy tensor is

$$T^{\mu\nu}(x) = \int d\tau \frac{dq^\mu}{d\tau} p^\nu \delta(x - q(\tau)) = \frac{1}{m}\int d\tau p^\mu p^\nu \delta(x - q(\tau))$$

More explicitly, we can perform the integral by splitting the delta function as $\delta\left(t - q^0(\tau)\right)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}(\tau))$,

$$N^\mu(\mathbf{x}, t) = \left.\frac{dq^\mu/d\tau}{dq^0/d\tau}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}(\tau))\right|_{\tau=\tau_0} = \left.\frac{dq^\mu}{dq^0}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}(\tau))\right|_{\tau=\tau_0}$$

Similarly, the stress-energy tensor is

$$T^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = \left.\frac{p^\mu p^\nu}{m dq^0/d\tau}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}(\tau))\right|_{\tau=\tau_0} = \left.\frac{p^\mu p^\nu}{E}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{q}(\tau))\right|_{\tau=\tau_0}$$

where τ_0 is the proper time when $q^0 = t$. This final expression looks a bit unfamiliar, but it reduces to what we expect for a gas; the energy density averages over E while the pressure averages over $p^i p^j/E = \left(p^2/3E\right)\delta^{ij}$ as expected.

The Slippery Business of Energy Conservation

Energy Conditions

***E* энергия**

Основные формулы энергии

(из ЛЛ2 многое выпишу, он очень часто её использует)
(?? в общем виде какая формула?)
Энергия частицы определяется как:

$$\mathscr{E} = \frac{-c\partial S}{\partial x^0},$$

где S - действие, x^0 - мировое время.

(в механике должны быть комментарии по поводу того, почему это так)

Она же есть 0-я компонента ковариантного 4-вектора импульса $p_k = mcu_k \equiv mcg_{ki}u^i$. В статическом поле $ds^2 = g_{00}\left(dx^0\right)^2 - dl^2$, поэтому энергия:

$$\mathscr{E} = mc^2 g_{00}\frac{dx^0}{ds} = mc^2 g_{00}\frac{dx^0}{\sqrt{g_{00}\left(dx^0\right)^2 - dl^2}}$$

Введем скорость частицы:

$$v = \frac{dl}{d\tau} = \frac{cdl}{\sqrt{g_{00}}dx^0}$$

измеренную в собственном времени, т. е. наблюдателем, находящимся в данном месте. Тогда мы получим для энергии:

$$\mathscr{E} = \frac{mc^2\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Энергия остается постоянной при движении частицы.

(?? а ЗСЭ мы кстати пишем? мб тут задачу можно придумать простую на формулу энергии, нпр в том же шварцшильде?)

On other about matter

On center of masses (????)

$$X^i = \frac{\int d^{d-1}x|g|\left(T^{00}+t^{00}\right)x^i}{\int d^{d-1}x|g|\left(T^{00}+t^{00}\right)}$$

Тут ТЭИ ЛЛ.

(?? ни разу это не нужно было, так что не особо думал, вот общая сложная формула для гравитации и материи, показывающая где центр масс. мб когда-то про это тоже подумаю.)

Сохранение энергии в ОТО

В произвольной системе координат псевдотензор энергии-импульса Ландау-Лифшица определяется равенством

$$|g|t^{\mu\nu} = |g|T^{\mu\nu}_{\text{грав}} + \tau^{\mu\nu\lambda},$$

где

$$\chi^{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{|g|}{16\pi G}\left(g^{\mu\nu}g^{\kappa\lambda} - g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda}\right),$$

а также $T^{\mu\nu} = -T^{\mu\nu}_{\text{грав}}$, и $T_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi G}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)$.

Или, в другом виде,

$$t_{\mu x} \equiv \frac{1}{8\pi G}\left[R_{\mu x} - \frac{1}{2}g_{\mu x}R^{\lambda}{}_{\lambda} - R^{(1)}_{\mu\varkappa} + \frac{1}{2}\eta_{\mu x}R^{(1)\lambda}{}_{\lambda}\right],$$

где линейная часть тензора Риччи $R^{(1)}{}_{\mu x} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h^{\lambda}{}_{\lambda}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\varkappa}} - \frac{\partial^2 h^{\lambda}{}_{\mu}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{x}} - \frac{\partial^2 h^{\lambda}{}_{x}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 h_{\mu x}}{\partial x^{\lambda}\partial x_{\lambda}}\right)$.

(??? эта формула нуждается в проверке??? см. Вайнберга книга стр 183. Также где-то в теории будет параграф с указанием того, почему эти формулы равны?)

Мы говорили, что уравнения Эйнштейна формально означают обращение в нуль суммарного тензора энергии-импульса материи и гравитации (уравнение $T^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = 0$.

Это, разумеется, не нарушает законов сохранения энергии, импульса и момента импульса, но делает их бессодержательными: все эти величины для любой области пространства просто равны нулю.

Гравитационная (да и любая другая) волна в такой картине не переносит энергию и импульс, а просто передает сигнал: превратить такое-то количество энергии, импульса и момента гравитации в такой-то точке пространства в энергию, импульс и момент материи.

Хотелось бы как-то переопределить гравитационные энергию и импульс так, чтобы вернуть смысл обычной физической интуиции.

(потом подумаю)

t^{01} есть плотность энергии

Поток энергии $dI(t, \boldsymbol{n})$ в элемент телесного угла $do = \sin\theta d\theta d\varphi$ в направлении x^1 равен

$$dI\left(t, \partial_1\right) = t^{01}\left(t + R, R\partial_1\right) R^2 do.$$

Он же равен потерям энергии $-d\mathcal{E}/dt$ системой.

(?? вывод допишу в теорию.)

$$\sqrt{|g|}t^E\mu^{\nu} = -\frac{1}{16\pi G}\left(g_{\alpha\beta,\mu}\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{R})}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} - \delta^{\nu}_{\mu}\sqrt{|g|}\mathcal{R}\right)$$

Неинвариантность псевдотензора $t^E\mu^{\nu}$ означает, что понятие энергии и импульса гравитационного поля зависит от системы отсчета.

По сути, определение $t^E\mu^{\nu}$ привязано к «фоновой» плоской метрике.

Покажем, что если массы сосредоточены в конечной области и настоящая метрика $g_{\mu\nu}$ достаточно быстро стремится к плоской на больших расстояниях от этой области, то энергия и импульс такой системы определены однозначно.

Действительно, равенство нулю дивергенции суммарного псевдотензора энергии-импульса в односвязном пространстве эквивалентно существованию так называемого суперпотенциала $\tau^{E\nu\lambda}_{\mu}$, такого что

$$\sqrt{|g|}\left(T^{\nu}_{\mu} + t^{E\nu}_{\mu}\right) = \sqrt{|g|}\left(-\left(T_{\text{грав}}\right)^{\nu}_{\mu} + t^{E\nu}_{\mu}\right) = \partial_{\lambda}\tau^{E\nu\lambda}_{\mu}, \quad \tau^{E\nu\lambda}_{\mu} = -\tau^{E\lambda\nu}_{\mu}$$

Суперпотенциал определен неоднозначно.

Его можно найти явно, например, в виде

$$\tau^{E\nu\lambda}_{\mu} = |g|^{-1/2}g_{\mu\kappa}\chi^{\kappa\nu\lambda\rho}{}_{,\rho}$$

где

$$\chi^{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{|g|}{16\pi G}\left(g^{\mu\nu}g^{\kappa\lambda} - g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda}\right)$$

Отсюда получаем, что вектор импульса равен
????

$$(-g)\left\{\frac{c^4}{8\pi k}\left(R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R\right) + t^{ik}\right\} = \frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}$$

(????)

$$\begin{aligned} t^{ik} = \frac{c^4}{16\pi k}\Big\{ & \left(2\Gamma^n_{lm}\Gamma^p_{np} - \Gamma^n_{lp}\Gamma^p_{mn} - \Gamma^n_{ln}\Gamma^p_{mp}\right)\left(g^{il}g^{km} - g^{ik}g^{lm}\right) + \\ & + g^{il}g^{mn}\left(\Gamma^k_{lp}\Gamma^p_{mn} + \Gamma^k_{mn}\Gamma^p_{lp} - \Gamma^k_{np}\Gamma^p_{lm} - \Gamma^k_{lm}\Gamma^p_{np}\right) + \\ & + \Big\{g^{kl}g^{mn}\left(\Gamma^i_{lp}\Gamma^p_{mn} + \Gamma^i_{mn}\Gamma^p_{lp} - \Gamma^i_{np}\Gamma^p_{lm} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^p_{np}\right) + \\ & + g^{lm}g^{np}\left(\Gamma^i_{ln}\Gamma^k_{mp} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^k_{np}\right)\Big\} \end{aligned}$$

(???)

$$\begin{aligned} (-g)t^{ik} = \frac{c^4}{16\pi k}\Big\{ & \mathfrak{g}^{ik}_{,l}\mathfrak{g}^{lm}_{,m} - g^{il}_{,l}\mathfrak{g}^{km}, m + \frac{1}{2}g^{ik}g_{lm}\mathfrak{g}^{ln}_{,p}\mathfrak{g}^{pm}, n - \\ & - \left(g^{il}g_{mn}\mathfrak{g}^{kn}, p^{mp}_{,l} + g^{kl}g_{mn}\mathfrak{g}^{in}, p^{mp}_{,l}\right) + g_{lm}g^{np}\mathfrak{g}^{il}_{,n}\mathfrak{g}^{km}, p + \\ & + \frac{1}{8}\left(2g^{il}g^{km} - g^{ik}g^{lm}\right)\left(2g_{np}g_{qr} - g_{pq}g_{nr}\right)\mathfrak{g}^{nr}_{,l}\mathfrak{g}^{pq}{}_{,m}\Big\}, \end{aligned}$$

$\mathfrak{g}^{ik} = \sqrt{-g}g^{ik}$,
This is a general formula, but I haven't seen that somewhere it was used.
(???)

Примеры сохранения энергии в ОТО

Например, для плоской гравитационной волны имеем:

$$t^{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi G}h^{\lambda,\mu}_{\kappa}h^{\kappa,\nu}_{\lambda}.$$

Она получается из типичной формулы для псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля, через суперпотенциал, разве что нужно решить уравнения Эйнштейна с точностью до 2-го порядка малости.
(?? другие примеры?)

Об идее, как вычислять сохранение энергии? (!!!???)

(!! важные общие параграфы!)

Уравнение непрерывности (???)

Вид и основные свойства

что производные от ТЭИ дают ноль:
Мы уже говорили о том, что ковариантный закон сохранения импульса $T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$ в первом порядке по $h_{\mu\nu}$ дает сохранение импульса и момента импульса в пространстве Минковского:

$$T^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu} = 0$$

Обзор применений

О важных деталях про сохранение энергии в ОТО (??)

(знаю, что их много, потом и продумаю их.)

1.2 Typical math for gravity

1.2.1 Basics of Differential Geometry, Tensors, and Forms

О векторах

(один параграф, суть про это напишу и все, уже много где писал это.)

О тензорах

(тут определение)
(тут формулы свойств)
Часто используется то, что свертка симметричного с антисимметричным нулевая.
(от Проена добавлю другое тоже)
Если у нас тензор симметричный/антисимметричный, то он равен себе же, но со знаком симметризации/антисимметризации. Это часто использовать можно для быстрых преобразований выражений!

О формах

(один параграф, суть про это напишу и все, уже много где писал это.)

О структурных уравнениях Картана (!?!??)

(говорят, они важны, пока не особо проверял это)

О координатах

О координатах светового конуса

$$x^{\pm} = x^0 \pm x^1$$

(строчка про вообще идею перехода к коорд свет конуса и применения их!!! А то часто может это понадобиться.)

1.2.2 g_{ik}, h_{ik}, ψ^{ij}, ∇, Γ^i_{kl}, R_{iklm}, R_{ik}, R, K

Основные свойства метрики

Определение и смысл метрики

По определению метрика есть:

$$g = dx^1 \otimes dx^1 + ... + dx^n \otimes dx^n$$

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

The length of a vector X on a Riemannian manifold at each point is

$$|X| = \sqrt{g(X,X)}$$

$$X^\mu = g^{\mu\nu}X_\nu \qquad X_\mu = g_{\mu\nu}X^\nu$$

Обратную метрику ищем методом (?!?!?? дотренировать это нужно!!!!) (!??!? напишу нормально формулу, в линале она же в этом вопросе!! Там не матрица, а большая вертикальная черта должна быть!)

$$\left[M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$
$$\cdots \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M^{-1}\right]$$

Справа эта матрица. Или по формуле: (?? так еще нужно тренироваться немного)

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{|A|}, \qquad \operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \left((-1)^{i+j}\mathbf{M}_{ji}\right)_{1\le i,j\le n}.$$

тут adj A - соответствующая присоединённая матрица, $|A|$ - определитель матрицы A.

У метрического тензора $d(d+1)/2$ независимых компонент, что равно числу независимых компонент симметричной матрицы, это находится через суммирование арифметической прогрессии.

Основные тождества метрики

Обсудим самые используемые тождества для метрики.

Формула вариации инвариантного объема через метрику есть:

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$$

В помощь для вывода: $dg = gg^{ik}dg_{ik} = -gg_{ik}dg^i$, поскольку $g_{ik}g^{ik} = \delta^i_i = 4$, то $g^{ik}dg_{ik} = -g_{ik}dg^{ik}$.

(потом еще раз вывод пройду этот)

(укажу, где нужна эта ф-ла вариации)

$$g^{ik}\delta g_{lk} = -g_{lk}\delta g^{ik}$$

Свертка $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$

(??? это для любой метрики или для галилеевой? чет путаюсь)

Преобразования метрики при заменах координат

При замене

$$x^0 \to x^0 + f\left(x^1, x^2, x^3\right)$$

с произвольной функцией $f\left(x^1, x^2, x^3\right)$ компоненты g_{ik} заменяются согласно

$$g_{\alpha\beta} \to g_{\alpha\beta} + g_{00}f_{,\alpha}f_{,\beta} - g_{0\alpha}f_{,\beta} - g_{0\beta}f_{,\alpha}$$
$$g_{0\alpha} \to g_{0\alpha} - g_{00}f_{,\alpha}, \quad g_{00} \to g_{00}$$

где $f_{,\alpha} \equiv \partial f/\partial x^\alpha$. При этом, очевидно, трехмерный тензор $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}$ не меняется.

(?? проверю позже)

Искомые уравнения должны быть инвариантны по отношению к преобразованию

При преобразовании

$$x^\alpha \to x^\alpha, \quad x^0 \to x^0 + f\left(x^\alpha\right),$$

как легко убедиться $g_\alpha \to g_\alpha - \partial f/\partial x^\alpha$

(?? потом убеждусь)

g_{00}, нулевая компонента метрики

(вроде она важная, обсудим, что в ней такого?)

Используется в собственном времени:

$$\tau = \frac{1}{c}\int \sqrt{g_{00}}dx^0$$

(тут очень важное проявляется понимание метрики, пока не понимаю глубоко, так что остаются вопросы.)

Поэтому g_{00}, как видно из приведенных, формул, положительна:

$$g_{00} > 0$$

(?? но есть же другие сигнатуры?)

Таким образом, компонента g_{00} метрического тензора в предельном случае равна

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$$

$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ik}\delta g^{ik}$

возмущения метрики h_{ik}

Изменение h_{ik} при сдвигах координат

$\psi^k_i = h^k_i - \frac{1}{2}\delta^k_i h$ - тензор метрики пси

вроде его так называют.

нужен там для волн, он какой-то удобнее более

Второй порядок возмущений метрики

(в грав волнах чет Лашкевич с этим делал)

В общем случае (???)

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{(1)\mu\nu} - h^{(2)\overline{\mu\nu}} + \left(h^{(1)2}\right)^{\overline{\mu\nu}} + \cdots$$
$$|g| = 1 + \operatorname{tr} h^{(1)} + \operatorname{tr} h^{(2)} + \frac{1}{2}\left(\left(\operatorname{tr} h^{(1)}\right)^2 - \operatorname{tr} h^{(1)2}\right) + \cdots$$

В частности, если калибровочные условия $h^{(1)}_{\alpha\nu} = 0, \operatorname{tr} h^{(1)} = 0$. Отсюда получаем во втором порядке

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{(2)\overline{\alpha\beta}}$$
$$g^{\alpha b} = -h^{(2)\overline{\alpha b}},$$
$$g^{ab} = \eta^{ab} - h^{(1)ab} - h^{(2)\overline{ab}} + \left(h^{(1)2}\right)^{\overline{ab}}$$
$$|g| = 1 + \operatorname{tr} h^{(2)} - \frac{1}{2}\operatorname{tr} h^{(1)2}$$

Параметр ψ из метрики для линейного приближения

Полезен параметр вида:

$$\psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2}h$$

Обратно,

$$h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{d-2}\psi, \quad \psi = \psi^{\bar{\mu}}_{\mu} = -\frac{d-2}{2}h$$

(тут укажу, где он нужен)

Основные формулы пространственной метрики

Пространственная метрика выражается как:

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + hg_\alpha g_\beta$$

(? потом пойму, почему это так)
Пространственная часть метрики выражается через всю метрику формулой:

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}$$

Эти соотношения устанавливают связь между метрикой реального пространства и метрикой четырехмерного пространства-времени.
(?? почему??)
(?? зачем она???)

$(-\gamma_{\alpha\beta})$, тензор обратной метрики

Полезно заметить, что тензор $-\gamma_{\alpha\beta}$ является тензором, обратным контравариантному трехмерному тензору $g^{\alpha\beta}$.
(???)
Действительно, расписав в компонентах равенство $g^{ik}g_{kl} = \delta^i_l$, имеем:

$$g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} + g^{\alpha 0}g_{0\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$$
$$g^{\alpha\beta}g_{\beta 0} + g^{\alpha 0}g_{00} = 0$$
$$g^{0\beta}g_{\beta 0} + g^{00}g_{00} = 1$$

Определив $g^{\alpha 0}$ из второго равенства и подставив в первое, получим:

$$-g^{\alpha\beta}\gamma_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma,$$

что и требовалось доказать.

Этот результат можно сформулировать иначе, сказав, что величины $-g^{\alpha\beta}$ составляют контравариантный трехмерный метрический тензор, отвечающий метрике (84.6):

$$\gamma^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta}$$

Определители g и γ, составленные соответственно из величин g_{ik} и $\gamma_{\alpha\beta}$ связаны друг с другом простым соотношением:

$$-g = g_{00}\gamma$$

(????)

О случаях применения

(четко укажу, где нужна она потом)

Метод выделения пространственной части метрики из полной (??)

(!! обсудим его, см ЛЛ2, пока тут слабая структура)
(соединю с пар-ом выше)

Трехмерный вектор g

(?? потом пропишу применения, пока не помню)
В ОТО встречается трехмерный вектор **g**, ковариантные компоненты которого есть

$$g_\alpha = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}.$$

Рассматривая **g** как вектор в пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$, мы должны определить его контравариантные компоненты как $g^\alpha = \gamma^{\alpha\beta} g_\beta$.
С помощью $\gamma^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta}$ и $g^{\alpha\beta} g_{\beta 0} + g^{\alpha 0} g_{00} = 0$ легко видеть, что

$$g^\alpha = \gamma^{\alpha\beta} g_\beta = -g^{0\alpha}$$

Отметим также формулу

$$g^{00} = \frac{1}{g_{00}} - g_\alpha g^\alpha$$

следующую из $g^{0\beta} g_{\beta 0} + g^{00} g_{00} = 1$.
(тут укажу, где он нужен)

Параметр $\chi^{\mu\nu\kappa\lambda}$ из разности произведений метрики

такой есть

$$\chi^{\mu\nu\kappa\lambda} = \frac{|g|}{16\pi G}\left(g^{\mu\nu} g^{\kappa\lambda} - g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda}\right)$$

в псевдо тэи Э используется
(пока зеленый я, чтобы писать это)

Применения параметра $\chi^{\mu\nu\kappa\lambda}$

(В ТЭИ используется, пока не доучил л6 лшк)

Основные формулы ковариантной производной и символов Кристоффеля (!!!)

$$(\nabla_\nu Y)^\mu = \partial_\nu Y^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} Y^\rho. \qquad \text{up - plus}$$
$$(\nabla_\mu \omega)_\rho = \partial_\mu \omega_\rho - \Gamma^\nu_{\mu\rho} \omega_\nu. \qquad \text{down - mimus}$$
$$[\nabla_\rho, \nabla_\sigma] V_\mu = -R^\nu{}_{\mu\rho\sigma} V_\nu \qquad \forall V.$$

In general for every upper index μ we get a $+\Gamma T$ term, while for every lower index we get a $-\Gamma T$ term:

$$T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q;\rho} = T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q,\rho} + \Gamma^{\mu_1}_{\rho\sigma} T^{\sigma\mu_2 \dots \mu_p}{}_{\nu_1 \dots \nu_q} + \dots + \Gamma^{\mu_p}_{\rho\sigma} T^{\mu_1 \dots \mu_{p-1}\sigma}{}_{\nu_1 \dots \nu_q}$$
$$-\Gamma^\sigma_{\rho\nu_1} T^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\sigma\nu_2 \dots \nu_q} - \dots - \Gamma^\sigma_{\rho\nu_q} T^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\nu_1 \dots \nu_{q-1}\sigma}$$

Properties:

$$\Gamma^{\beta}_{\alpha\mu} = \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}$$

If the metric is diagonal then any symbol with three different indices (like $\Gamma^r_{t\phi}$) will vanish. (???? додумаю!)

(тут другие свойства для быстрого вычисления кристоффелей!)

По определению a connection is a map $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$. We usually write this as $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$ and the object ∇_X is called the covariant derivative. It satisfies the following properties for all vector fields X, Y and Z,

- $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- $\nabla_{(fX+gY)}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ for all functions f, g.
- $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (\nabla_X f)\, Y$ where we define $\nabla_X f = X(f)$

The covariant derivative endows the manifold with more structure. To elucidate this, we can evaluate the connection in a basis $\{e_\mu\}$ of $\mathfrak{X}(M)$. We can always express this as

$$\nabla_{e_\rho} e_\nu = \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} e_\mu$$

with $\Gamma^{\mu}_{\rho\nu}$ the components of the connection. ’

(!!!!??? тут про интуитивное понимание ее, это еще нужно додумать!!!)

Для связности Леви-Чивита:

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right),$$

$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right)$$

В частности:

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k}$$

Преобразования

$$DA^i = dA^i - \delta A^i$$

задаются через символы Кристоффеля. (?? как??)

The Connection is Not a Tensor. (???? напишу пару еще предложений про это, пока не так это важно. в диффгеме док-во четкое будет)

(!!! повывожу в диффгеме все это еще раз!!!!! остается пока тренировка)

Основные формулы тензора кривизны Римана

Curvature is a rank $(1, 3)$ tensor R, it acts on $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ and $\omega \in \Lambda^1(M)$ by

$$R(\omega; X, Y, Z) = \omega \left(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \right)$$

Torsion is a rank $(1, 2)$ tensor T and defined to act on $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ and $\omega \in \Lambda^1(M)$ by

$$T(\omega; X, Y) = \omega \left(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \right)$$

Тензор Римана имеет свойства:

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}$$

$$R_{iklm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l} \right) + g_{np} \left(\Gamma^n_{kl}\Gamma^p_{im} - \Gamma^n_{km}\Gamma^p_{il} \right)$$

(индексы запоминаются мнемонически как: 1й с последним и 2й с 3м минус два наоборот)

$$R^{\sigma}{}_{\rho\mu\nu} = -R^{\sigma}{}_{\rho\nu\mu}.$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}, \qquad R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta},$$
$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}, \qquad R_{\alpha[\beta\gamma\delta]} = 0.$$

$$2\nabla_{[\mu}\nabla_{\nu]}Z^{\sigma} = R^{\sigma}{}_{\rho\mu\nu}Z^{\rho} - T^{\rho}{}_{\mu\nu}\nabla_{\rho}Z^{\sigma} \qquad \text{(Ricci identity)}$$

where $T^{\rho}{}_{\mu\nu} = 2\Gamma^{\rho}_{[\mu\nu]}$ and $R^{\sigma}{}_{\rho\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}\Gamma^{\sigma}_{\nu]\rho} + 2\Gamma^{\sigma}_{[\mu|\lambda|}\Gamma^{\lambda}_{\nu]\rho}$.

При параллельном переносе вектора A по замкнутому контуру, он изменяется как:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} R^i_{klm} A_i \Delta f^{lm}$$

(это посмотрю еще раз, не усвоил пока идею эту. кстати, в чем смысл, почему так получается?)

(?? её еще раз выведу, пока забыл вывод.)

О другом про тензор Римана

Другие формулы тензора Римана

Тензор Римана через возмущение метрики h_{il} имеет вид:

$$R_{iklm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m}\right),$$

Которая используется в задачах про волны или про возмущение метрики. (??)

(???? докажу уже скоро эту ф-лу)

Число независимых компонент тензора Римана равно

$$n^2\left(n^2-1\right)/12.$$

(?? строчка про суть док-ва)

Об инвариантах тензора Римана (????)

(не знаю, зачем это, но у Ландау про это много написано, верю, что в некоторых книгах тоже это обсуждается, так что укажу потом)

О пространственной кривизне

О типичных ошибках о тензоре Римана (????)

(будет опыт ошибок - впишу, чтобы не тупить еще раз)

Основные формулы тензора Риччи

$$R_{ik} = R^{l}{}_{ilk} = g^{lm} R_{milk}$$

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}$$

(проверю потом)

Заметим, что такое упрощение тензора R_{iklm} можно произвести только одним способом: по индексам i и k или l и m дает нуль в силу антисимметричности по ним, а упрощение по любым другим парам дает, с точностью до знака, одинаковый результат. (???? поч???)

Свойства:

$$R_{ik} = R_{ki}$$

Тензор Риччи через метрику и кристоффеля

Из выражения тензора Римана через кристоффеля,

$$R^0_0 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{-g} g^{i0} \Gamma^\alpha_{0i} \right)$$

подставляя тензор римана через кристоффеля (???), имеем

$$R^0_0 = g^{0i} R_{i0} = g^{0i} \left(\frac{\partial \Gamma^l_{i0}}{\partial x^l} + \Gamma^l_{i0} \Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il} \Gamma^l_{0m} \right)$$

а с помощью (86.5) и (86.8) находим, что это выражение может быть написано как

$$R^0_0 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{-g} g^{0i} \Gamma^l_{i0} \right) + g^{im} \Gamma^0_{ml} \Gamma^l_{i0}$$

с помощью того же соотношения (86.8) легко убедиться в том, что второй член справа тождественно равен $-\frac{1}{2} \Gamma^0_{lm} \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^0}$ и вследствие независимости всех величин от x^0 обращается в нуль.

Наконец, заменив по той же причине в первом члене суммирование по l суммированием по α, получим (105.22).

вроде это что-то нужное.

Если $R_{ik} = 0$, то в произвольной системе координат тензор кривизны имеет всего 10 независимых компонент. Надлежащим преобразованием координат можно тогда привести тензор R_{iklm} (в заданной точке 4-пространства) к «каноническому» виду, в котором его компоненты выражаются в общем случае через 4 независимые величины; в особых случаях это число может оказаться даже меньшим.

Линеаризованный тензор Риччи

Тензор Риччи в первом порядке имеет вид:

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(-\eta^{\lambda\kappa} h_{\mu\nu,\lambda\kappa} + 2 h^{\bar{\lambda}}_{(\mu,\nu)\lambda} - h_{,\mu\nu} \right)$$

где скобки - симметризация: $a_{(\mu_1 \ldots \mu_n)} := \frac{1}{n!} \sum\limits_{\sigma \in S^n} a_{\mu_{\sigma_1} \ldots \mu_{\sigma_n}}$. Тут первое слагаемое имеет вид лапласиана от $h_{\mu\nu}$, и хотелось бы как-то избавиться от остальных членов. Представим его в виде

$$\begin{aligned} R^{(1)}_{\mu\nu} =& K^{\lambda\kappa}_{\mu\nu} h_{\lambda\kappa} \\ & K^{\lambda\kappa}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(-\delta^\lambda_\mu \delta^\kappa_\nu \Box + \delta^\lambda_\mu \eta^{\kappa\alpha} \partial_\alpha \partial_\nu + \delta^\kappa_\nu \eta^{\lambda\alpha} \partial_\alpha \partial_\mu - \eta^{\lambda\kappa} \partial_\mu \partial_\nu \right), \qquad \Box := \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \end{aligned}$$

Оператор K вырожден (необратим), потому что любой тензор вида $\varphi_{\mu,\nu} + \varphi_{\nu,\mu}$ является его собственной функцией с 0 собственным значением. Вырождение снимается малым преобразованием $x^\mu = x'^\mu + \xi^\mu$, для него метрика меняется как $\delta_\xi g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}$.

Близость метрики к плоской не фиксирует однозначно систему координат: остается свобода относительно преобразований той же малости, что и тензор h, в 1 порядке:

$$h_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} + \xi_{\bar{\mu},\nu} + \xi_{\bar{\nu},\mu}$$

Полагая $\varphi_\mu = \xi_{\bar{\mu}}$, мы видим, что именно малые преобразования координат и вырождают оператор K. (??? насколько понял, посмотрели на вырождение и все, дальше я не понимаю, как это связано с ψ. видимо, калибровка как раз забивает возможность так вот разные преобразования делать. додумаю это когда-то)

Наложим d условий:

$$\psi^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu} = 0, \quad \psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2}h.$$

Обратно:

$$h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{d-2}\psi, \quad \psi = \psi^{\bar{\mu}}_{\mu} = -\frac{d-2}{2}h.$$

Теперь $R^{(1)}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu}$,

(мб удалю это, это в слабой гравитации итак написано)

Компоненты тензора Риччи через вторые производные по времени и всё остальное

(?? проверю это!!)

Компоненты тензора Риччи вообще не содержат вторых производных по времени от компонент $g_{0\mu}$.

Действительно, выделим члены со вторыми производные по времени (x^0) в тензоре Риччи. Нетрудно проверить, что

$$R_{00} = -\frac{1}{2}g^{ik}\ddot{g}_{ik} + \bar{R}_{00},$$
$$R_{0i} = \frac{1}{2}g^{0k}\ddot{g}_{ik} + \bar{R}_{0i},$$
$$R_{ik} = -\frac{1}{2}g^{00}\ddot{g}_{ik} + \bar{R}_{ik},$$

где точки над буквами означают производные по времени, а Через $\bar{R}_{\mu\nu}$ обозначены члены, содержащие не более чем первые производные по времени.

Обзор типичных ошибок при работе с тензором Риччи

Обсудим типичные ошибки при работе с тензором Риччи.
(пока мало опыта, так что я хз.)

R скалярная кривизна

Из тезора Риччи R_{ik} можно получить инвариант - скалярную кривизну:

$$R = g^{ik}R_{ik} = g^{il}g^{km}R_{iklm}$$

(Тут указание на Доказательство того, что скалярная кривизна - скаляр. первое, что я хотел бы увидеть.)

(Тут простой пример, показывающий, что она на самом деле инвариант при любых заменах координат)

О гауссовой кривизне

О гауссовой кривизне (??)

(тут потренироваться нужно!)

Рассмотрим сначала случай пространства двух измерений, т. е. обычную поверхность; обозначим в этом случае (в отличие от четырехмерных величин) тензор кривизны через P_{abcd}, а метрический тензор - через γ_{ab}, где индексы $a, b, ...$ пробегают значения $1, 2$. Поскольку в каждой из пар ab и cd два индекса должны иметь различные значения, то очевидно, что все отличные от нуля компоненты тензора кривизны либо совпадают друг с другом, либо отличаются знаком. Таким образом, в этом случае имеется лишь одна независимая компонента, например P_{1212}. Легко найти, что скалярная кривизна при этом равна

$$P = \frac{2P_{1212}}{\gamma}, \quad \gamma \equiv |\gamma_{ab}| = \gamma_{11}\gamma_{22} - (\gamma_{12})^2$$

Величина $P/2$ совпадает с так называемой гауссовой кривизной поверхности K:

$$\frac{P}{2} = K = \frac{1}{\rho_1\rho_2}$$

где ρ_1, ρ_2 - главные радиусы кривизны поверхности в данной ее точке (напомним, что ρ_1 и ρ_2 считаются имеющими одинаковые знаки, если соответствующие им центры кривизны расположены по одну сторону от поверхности, и имеющими разные знаки, если центры кривизны лежат по разные стороны от поверхности; в первом случае $K > 0$, а во втором $K < 0$)[1].

1) Формулу $\frac{P}{2} = K = \frac{1}{\rho_1\rho_2}$ легко получить, написав уравнение поверхности вблизи заданной точки ($x = y = 0$) в виде $z = \frac{x^2}{2\rho_1} + \frac{y^2}{2\rho_2}$. Тогда квадрат элемента длины на ней:

$$dl^2 = \left(1 + \frac{x^2}{\rho_1^2}\right) dx^2 + \left(1 + \frac{y^2}{\rho_2^2}\right) dy^2 + 2\frac{xy}{\rho_1\rho_2} dxdy$$

Вычисление P_{1212} в точке $x = y = 0$ по формуле (92.1) (в которой нужны лишь члены со вторыми производными от $\gamma_{\alpha\beta}$) приводят к (92.12).

1) Для фактического вычисления главных значений тензора $P_{\alpha\beta}$ нет необходимости производить преобразование к системе координат, декартовой в данной точке. Эти значения можно определить как корни λ уравнения $|P_{\alpha\beta} - \lambda\gamma_{\alpha\beta}| = 0$ 2) Знание тензора $P_{\alpha\beta\beta\delta}$ позволяет определить гауссову кривизну K любой поверхности в пространстве. Укажем здесь лишь, что если x^1, x^2, x^3 - ортогональная система координат, то

$$K = \frac{P_{1212}}{\gamma_{11}\gamma_{22} - (\gamma_{12})^2}$$

есть гауссова кривизна для «Плоскости», перпендикулярной (в данной ее точке) к оси x^3; под «плоскостью» понимается поверхность, образованная геодезическими линиями.

(!!! в диффгеме про это точнее напишу и разберу это там!)

$$P = \frac{2P_{1212}}{\gamma}, \quad \gamma \equiv |\gamma_{ab}| = \gamma_{11}\gamma_{22} - (\gamma_{12})^2$$

Величина $P/2$ совпадает с так называемой гауссовой кривизной поверхности K:

$$\frac{P}{2} = K = \frac{1}{\rho_1\rho_2}$$

Тензор $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ позволяет определить гауссову кривизну K любой поверхности в пространстве. Если x^1, x^2, x^3 ортогональная система координат, то

$$K = \frac{P_{1212}}{\gamma_{11}\gamma_{22} - (\gamma_{12})^2}$$

есть гауссова кривизна для «плоскости», перпендикулярной (в данной ее точке) к оси x^3; под «плоскостью» понимается поверхность, образованная геодезическими линиями.

1.2.3 Manifolds, Killing vectors, symmetries

Manifolds

We review the basics of differential geometry, considering structures that can be defined without using a metric. We begin with the tangent space.

• Consider an n-dimensional manifold M. A scalar field $f : M \to \mathbb{R}$ is smooth if $F = f \circ \phi^{-1}$ is smooth for all charts ϕ. For example, coordinate functions themselves are smooth because transition functions are smooth by the definition of a smooth manifold.

• A smooth curve is a smooth function $\lambda : I \to M$ where I is an open interval in $\mathbb{R}$.

• If $f : M \to \mathbb{R}$ is smooth, then $f \circ \lambda : I \to \mathbb{R}$ is smooth, and in particular it has a derivative. We thus define the tangent vector to λ at p as the map

$$X_p(f) = \left(\frac{d}{dt} f(\lambda(t))\right)_{t=0}$$

where $\lambda(0) = p$. Then X_p is a linear map on smooth functions and a derivation,

$$X_p(fg) = X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g)$$

The set of tangent vectors of p forms a vector space in the usual way.

• We may also write the tangent vector in components, by noting

$$f \circ \lambda = \left(f \circ \phi^{-1}\right) \circ (\phi \circ \lambda)$$

which gives

$$X_p(f) = \left(\frac{\partial F(x)}{\partial x^\mu}\right)_{x=\phi(p)} \left(\frac{dx^\mu(\lambda(t))}{dt}\right)_{t=0}$$

where we used the chain rule.

• Now we check that the tangent space T_p is an n-dimensional vector space.

• First, we check that it is closed under linear combinations. Note that if $\lambda(t)$ and $\kappa(t)$ give vectors X_p and Y_p, then

$$\nu(t) = \phi^{-1}(\alpha(\phi(\lambda(t)) - \phi(p)) + \beta(\phi(k(t)) - \phi(p)) + \phi(p))$$

has tangent vector $\alpha X_p + \beta Y_p$, as desired.

• Next, we check that T_p has dimension n. The expression above shows that any $X_p(f)$ can be written as a linear combination of $\partial F(x)/\partial x^\mu$, so the vectors $\partial/\partial x^\mu$ are a complete set; they correspond to paths that only change the coordinate x^μ.

• The vectors $\partial/\partial x^\mu$ are independent because if $\alpha^\mu \partial_\mu F = 0$ for all F, then choosing $F = x^\nu$ gives $\alpha^\nu = 0$. Thus they are a basis, giving the result.

The basis $\partial/\partial x^\mu$ depends on the coordinate chart. It is defined inside the entire patch and forms a coordinate basis in the patch. A general vector is written $X = X^\mu e_\mu$ for a basis e_μ.

• To see how coordinate bases change under coordinate change, let ϕ and ϕ' give coordinates x and x'. Then formally,

$$(\partial_\mu)(f) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(f \circ \phi^{-1}\right) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\left(f \circ \phi'^{-1}\right) \circ \left(\phi' \circ \phi^{-1}\right)\right)$$

where ∂_μ is an abstract vector. We can now use the chain rule, giving

$$\frac{\partial F}{\partial x^\mu} = \frac{\partial F}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}, \quad \partial_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\partial'_\nu$$

More casually, we can heuristically derive this result by writing

$$\frac{\partial f\left(x'(x)\right)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}$$

where we implicitly identified a few quantities. By a very similar argument,

$$X'^\mu = X^\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}$$

This leaves vectors $X^\mu \partial_\mu$ invariant since the transformation factors cancel.

Next, we define covectors.

• The dual space V^* of a vector space V is the set of linear maps $V \to \mathbb{R}$. Given a basis e_μ of V there is a dual basis f^μ of V^* defined by $f^\mu(e_\nu) = \delta^\mu_\nu$.

• There is no natural isomorphism between V and V^*, though there is one between V and V^{**} by "shuffling parentheses".

• Define the cotangent space $T^*_p(M)$ as the dual space of the tangent space. Given a smooth function f, we may define a covector df, called the gradient of f, by

$$(df)_p(X) = X(f)_p$$

In particular, dx^μ is the dual basis to ∂_μ.

• Writing a covector as $\omega = \omega_\mu dx^\mu$, we have the transformation laws

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}dx'^\nu, \quad \omega'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\omega_\nu$$

Again, these follow by lining up the derivatives.

Note. We use Greek indices in equations that are only true in a particular coordinate system, and Latin indices in equations that are always true. For example, for a vector X, we can write $X^\mu = \delta^\mu_0$ in some coordinate system, but generally $df(X) = df_a X^a$. Equations in Latin should be interpreted as component-free, with the indices only indicating where the parentheses go.

Finally, we introduce tensors.

• A tensor of type (r, s) at p is a multilinear map which takes r covectors and s vectors to $\mathbb{R}$. For example, covectors are tensors of type $(0, 1)$ and vectors are tensors of type $(1, 0)$. Also, defining $\delta(\omega, X) = \omega(X)$, δ is a $(1, 1)$ tensor.

• Choosing a basis of vectors $\{e_\mu\}$ with dual basis $\{f^\mu\}$, the components of a tensor are

$$T^{\mu_1 \cdots \mu_r}{}_{\nu_1 \ldots \nu_s} = T\left(f^{\mu_1}, \ldots, e_{\nu_1}, \ldots\right)$$

For example, the components of δ are

$$\delta^\mu{}_\nu = \delta\left(f^\mu, e_\nu\right) = f^\mu(e_\nu) = \delta^\mu_\nu$$

The set of tensors at p is a vector space with dimension n^{r+s}.

• Now we consider how tensor components change under a general change of coordinates,

$$f^{\mu'} = A^{\mu'}{}_{\nu} f^{\nu}.$$

The same arguments as before tell us that

$$e_{\mu'} = \left(A^{-1}\right)^{\nu} \mu_{\mu'} e_{\nu}, \quad X^{\mu'} = A^{\mu'}{}_{\nu} X^{\nu}, \quad \eta_{\mu'} = \left(A^{-1}\right)^{\nu}{}_{\mu'} \eta_{\nu}$$

Plugging these results in, a tensor transforms as, e.g.

$$T^{\mu'\nu'}{}_{\rho'} = A^{\mu'}{}_{\sigma} A^{\nu'}{}_{\tau} \left(A^{-1}\right)^{\lambda}{}_{\rho'} T^{\sigma\tau}_{\lambda}.$$

In the special case of a coordinate transformation, $A^{\mu'}{}_{\nu} = \partial x^{\mu'}/\partial x^{\nu}$. In the even more special case of a Lorentz transformation, A is Λ.

• Given an (r, s) tensor, we can construct an $(r-1, s-1)$ tensor by contracting two indices. This is done by plugging in a basis and dual basis,

$$T\left(f^{\mu}, e_{\mu}, ...\right) = S(...)$$

This is basis independent because the left-hand side transforms as $T \to AA^{-1}T = T$.

• We can also construct tensors by the tensor product. For example,

$$(S \otimes T)(\omega, X) = S(\omega)T(X)$$

with the same pattern holding for arbitrary tensors. The components simply multiply.

• Finally, we may symmetrize and antisymmetrize tensors. For example, given a $(0, 2)$ tensor T, its symmetric and antisymmetric parts are

$$S(X, Y) = \frac{T(X, Y) + T(Y, X)}{2}, \quad A(X, Y) = \frac{T(X, Y) - T(Y, X)}{2}$$

which, in index notation, reads

$$S_{\mu\nu} = \frac{T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}}{2}, \quad A_{\mu\nu} = \frac{T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}}{2}$$

We will also use vertical bars to denote exclusion from (anti)symmetrization. For example,

$$T_{(\mu|\nu\rho|\sigma)} = \frac{T_{\mu\nu\rho\sigma} + T_{\sigma\nu\rho\mu}}{2}$$

The most useful property is that contractions of symmetric and antisymmetric tensors vanish.

• Similarly we may define vector and tensor fields on M. A vector field X is smooth if $X(f)$ is a smooth function for all smooth f, with other definitions similar.

Next, we review some geometric objects derived from vector fields.

• Given a vector field X, an integral curve of X through p is a curve through p whose tangent at every point is X. Taking coordinates, this means that

$$\frac{dx^{\mu}(t)}{dt} = X^{\mu}(x(t)), \quad x^{\mu}(0) = x^{\mu}|_{p}$$

Note that $X^{\mu}(x(t))$ means X^{μ} evaluated at the point $x(t)$, not acting on anything.

• If f is a function satisfying $X(f) = 0$, then f is conserved on integral curves.

• Flow along integral curves generates a one-parameter group of diffeomorphisms $\phi_t : M \to M$ by flowing along the integral curves for time t. Conversely, ϕ_t gives a vector field by differentiation at $t = 0$.

• The commutator of two vector fields is

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

It turns out to be a vector field, since the second derivatives cancel, with components

$$[X,Y]^\mu = X^\nu \partial_\nu Y^\mu - Y^\nu \partial_\nu X^\mu$$

The commutator operation turns the set of vector fields on M into a Lie algebra, whose corresponding Lie group is the set of diffeomorphisms of M.

• Note that we can define the components of a tensor with respect to any set of vector fields $\{e_\mu\}$ that form a basis at every point. By Frobenius' theorem, we have $[e_\mu, e_\nu] = 0$ if and only if the e_μ are a coordinate basis, i.e. $e_\mu = \partial_\mu$. Most of the time we'll work in a coordinate basis, but we'll try to point out what extra terms appear outside such a basis.

Note. More examples of Lie algebras.

• An explicit basis for the Lie algebra $\mathrm{diff}(\mathbb{R})$ is

$$X_\alpha = -x^{\alpha+1}\partial_x, \quad \alpha \in \mathbb{Z}, \quad [X_\alpha, X_\beta] = (\alpha - \beta)X_{\alpha+\beta}$$

• There exist only two two-dimensional Lie algebras,

$$[X,Y] = 0 \text{ and } [X,Y] = Y$$

The latter is the Lie algebra of affine transformations of the line.

• The Euclidean group $E(2)$ acts on $M = \mathbb{R}^2$ by rotations and translations,

$$\mathbf{x} \to R(\theta)\mathbf{x} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Then $E(2)$ is a three-dimensional Lie group, parametrized by θ, a, and b. We can assign a vector field to every infinitesimal transformation (alternatively, every one-parameter subgroup gives a one-parameter family of diffeomorphisms), giving

$$X_a = \partial_x, \quad X_b = \partial_y, \quad X_\theta = x\partial_y - y\partial_x$$

which form a basis for $\mathfrak{e}(2)$ with

$$[X_a, X_b] = 0, \quad [X_a, X_\theta] = X_b, \quad [X_b, X_\theta] = -X_a$$

More generally, the set of Killing vectors will form a Lie algebra.

Note. With index notation, we simultaneously speak about tensors and their components; however, this leads to ambiguity, especially when working with covariant derivatives, and is a bit inelegant to mathematicians because we always need to specify a coordinate system. If necessary, we will use abstract indices, which only mean the former. For instance, $X^a f_a$ is simply a shorthand for $X(f)$ and does not indicate a coordinate system; the "abstract index" a does not take numeric values.

Main properties

$$K_\mu : \qquad \nabla_\mu K_\nu + \nabla_\nu K_\mu = 0.$$

Killing vectors correspond to isometries of the metric, i.e. coordinate changes that leave the metric invariant. Физический смысл этих векторов в том, что если мы находимся на данной поверхности и сдвинемся вдоль них, то мы вокруг увидим ровно все то же, что и до сдвига.

An arbitrary linear combinations of Killing vectors are also Killing vectors. Commutator (of two Killing vectors K_1, K_2) $[K_1, K_2]$ is also a Killing vector. Так что их очень много, а (?? сколько линейно независимых??).

Находится вектор Киллинга так: 1) некоторые будут очевидны, потому что просто метрика может не зависеть от координаты (? додумаю это!), 2) считаем кристоффеля, пишем векторы Киллинга в шаблонной форме типа $K = f(\eta, \tau)\partial_\eta + g(\eta, \tau)\partial_\tau$, с данной метрикой опускаем индексы, 3) подставляем в уравнения Киллинга для разных компонент, получаем систему уравнений в частных производных, смотрим на зависимости от отдельных компонент, пробуем находить зависимости функций $f = F(g)$, получаем решения. Там часто возня с этим (???).

Для проверки киллинговости делаем очевидные вещи, просто аккуратно: 1) выписываем явно метрику, последовательность координат, например $x^\mu = (\theta, \phi, ..)$, и ее Кристоффеля, 2) получаем из вектора $A \equiv A^\mu \partial_\mu$, компоненты ковектора, используя вообще говоря неплоскую метрику, 3) из определения вектора Киллинга получаем два типа уравнений, одно с одинаковыми координатами, например, $0 = \nabla_\theta K_\theta = \partial_\theta K_\theta - \Gamma^\mu_{\theta\theta} K_\mu$, а второе с разными, например, $0 = \nabla_\theta K_\phi + \nabla_\phi K_\theta = \partial_\theta K_\phi + \partial_\phi K_\theta - 2\Gamma^\mu_{\theta\phi} K_\mu$. 4) Оно должно без проблем обнулиться.

(тут еще есть указания про сложные выражения про вектора Киллинага, потом допишу это. В целом, обычной аккуратности и последовательности достаточно для определения их.)

If a Killing vector field χ^μ is null along some null hypersurface Σ, we say that Σ is a **Killing horizon** of χ^μ. This Killing vector field is normal to Σ and obeys the geodesic equation

$$\chi^\mu \nabla_\mu \chi^\nu = -\kappa \chi^\nu,$$

along the Killing horizon. To every Killing horizon, we can define the surface gravity κ. From Killing's equation $\nabla_{(\mu}\chi_{\nu)} = 0$ and that $\chi^\mu \perp \Sigma$, i.e., $\chi_{[\mu}\nabla_\nu \chi_{\sigma]} = 0$,

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}\left(\nabla_\mu \chi_\nu\right)\left(\nabla^\mu \chi^\nu\right)$$

Conserved quantities from Killing vectors (!?!??!)

$$E = -K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

$$L = R_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} \qquad \text{typically } = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}$$

$$\epsilon = -g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}$$

then we can replace $\frac{dt}{d\lambda}$ and $\frac{d\phi}{d\lambda}$ with E and L. We get (??)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V(r) = \mathcal{E}$$

with some special for this metric potential.

(it can be also modified if we have a geod eq with a rhs (!?? write, how))

On other symmetries

(обзор особых симметрий в модификациях теории поля с гравитаций на страницу, пока нет потребности в этом.)

1.2.4 Riemannian Geometry for gravity

О типичных римановых пространствах (?!?!?)

(мб добавлю разные модельные метрики, пока только 1, пока другие не нужны были. будут нужны - добавлю.)

О плоскости в разных координатах

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2,$$
$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r, \quad \Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r}.$$

The Riemann tensor, Ricci tensor, and Ricci scalar are all zero.

О сфере

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2, \qquad r = 1$$

$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot\theta, \qquad \text{others} = 0.$$
$$R_{\theta\phi\theta\phi} = R_{\phi\theta\phi\theta} = -R_{\theta\phi\phi\theta} = -R_{\phi\theta\theta\phi} = R_0^2\sin^2\theta,$$
$$R_{\theta\theta} = 1, R_{\phi\phi} = \sin^2\theta,$$
$$R = \frac{2}{R_0^2}.$$

The Killing vectors are:

$$R = \partial_\phi$$
$$S = \cos\phi\partial_\theta - \cot\theta\sin\phi\partial_\phi$$
$$T = -\sin\phi\partial_\theta - \cot\theta\cos\phi\partial_\phi.$$

They satisfy the $SO(3)$ algebra - rotations in 3D; the three generators of the group are rotations in the $x-y$ plane, the $y-z$ plane, and the $x-z$ plane. (??? не вижу пока, что это генераторы, потом додумаю.)

О модельной сферической метрике

$$ds^2 = -e^{2\alpha(t,r)}\mathrm{d}t^2 + e^{2\beta(t,r)}\mathrm{d}r^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Nonvanishing are only:

$$\begin{array}{lll}
\Gamma^t_{tt} = \partial_t\alpha & \Gamma^t_{tr} = \partial_r\alpha & \Gamma^t_{rr} = e^{2(\beta-\alpha)}\partial_t\beta \\
\Gamma^r_{tt} = e^{2(\alpha-\beta)}\partial_r\alpha & \Gamma^r_{tr} = \partial_t\beta & \Gamma^r_{rr} = \partial_r\beta \\
\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r} & \Gamma^r_{\theta\theta} = -re^{-2\beta} & \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r} \\
\Gamma^r_{\phi\phi} = -re^{-2\beta}\sin^2\theta & \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta & \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta},
\end{array}$$

$$R^t_{rtr} = e^{2(\beta-\alpha)}\left[\partial_t^2\beta + (\partial_t\beta)^2 - \partial_t\alpha\partial_t\beta\right] + \left[\partial_r\alpha\partial_r\beta - \partial_r^2\alpha - (\partial_r\alpha)^2\right]$$
$$\begin{array}{lll}
R^t_{\theta t\theta} = -re^{-2\beta}\partial_r\alpha & R^t_{\phi t\phi} = -re^{-2\beta}\sin^2\theta\partial_r\alpha & R^t_{\theta r\theta} = -re^{-2\alpha}\partial_t\beta \\
R^t_{\phi r\phi} = -re^{-2\alpha}\sin^2\theta\partial_t\beta & R^r_{\theta r\theta} = re^{-2\beta}\partial_r\beta & R^r_{\phi r\phi} = re^{-2\beta}\sin^2\theta\partial_r\beta \\
R^\theta_{\phi\theta\phi} = \left(1 - e^{-2\beta}\right)\sin^2\theta &&
\end{array}$$

$$R_{tt} = \left[\partial_t^2\beta + (\partial_t\beta)^2 - \partial_t\alpha\partial_t\beta\right] + e^{2(\alpha-\beta)}\left[\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{2}{r}\partial_r\alpha\right]$$

$$R_{rr} = -\left[\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta - \frac{2}{r}\partial_r\beta\right] + e^{2(\beta-\alpha)}\left[\partial_t^2\beta + (\partial_t\beta)^2 - \partial_t\alpha\partial_t\beta\right]$$

$$R_{tr} = \frac{2}{r}\partial_t\beta \qquad R_{\theta\theta} = e^{-2\beta}\left[r\left(\partial_r\beta - \partial_r\alpha\right) - 1\right] + 1 \qquad R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta}\sin^2\theta$$

2.1 The Metric

• The metric tensor $g_{\mu\nu}$ is a nondegenerate symmetric $(0,2)$ tensor. Since the metric is nondegenerate, $g = |g_{\mu\nu}| \neq 0$. Then there exists an inverse metric, a (2,0) tensor satisfying

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = g_{\sigma\lambda}g^{\lambda\mu} = \delta^\mu_\sigma$$

For example, the trace of g is $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \delta^\mu_\mu = 4$, in any signature.

• Unlike in special relativity, index placement now matters (it cannot be restored at the end of the calculation) because the metric has a nontrivial derivative. For example, since

$$\partial_\lambda\left(g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma}\right) = \left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right)g_{\nu\sigma} + g^{\mu\nu}\left(\partial_\lambda g_{\nu\sigma}\right) = 0$$

we conclude that

$$\partial_\lambda g^{\mu\nu} = -g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}\partial_\lambda g_{\sigma\rho}$$

The minus sign is the same one as in $(1/f)' = -f'/f^2$.

• The metric is extremely useful: we use it to raise and lower indices, and compute path lengths and proper times, giving geodesics. It determines causality and locally inertial frames. It is the generalization of both the Newtonian dot product and the Newtonian gravitational potential.

• The metric is in canonical form if it is diagonal, with p and q elements equal to 1 and -1 respectively. Sylvester's theorem states that this can always be done at any given point, with p and q unique. By continuity, the signature (p,q) is the same throughout the manifold.

• If $q = 0$, the metric is called Euclidean/Riemannian, and if $q = 1$ (as in relativity) the metric is called Lorentzian/pseudo-Riemannian; the canonical form is the Minkowski metric.

• The metric takes two vectors and gives a number, so it may be written as

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

Here, ds^2 is the metric tensor in component-free form, and $dx^\mu dx^\nu$ is a tensor product. Since the metric is symmetric, we use symmetrized tensor products so that $dxdy = dydx$.

• The length of a spacelike curve is

$$s = \int \sqrt{g(V,V)}dt$$

where $V^\mu(t) = dx^\mu(t)/dt$. Similarly, the proper time along a timelike curve is

$$\tau = \int \sqrt{-g(V,V)}dt$$

Note that t is not time, but just an arbitrary parameter. If we parametrize by proper time, then $V^\mu = dx^\mu/d\tau$ is the four-velocity, giving $g(V,V) = -1$ just as in special relativity.

Note. Parameter counting for coordinate transformations. Let $x^\mu(p) = x^{\hat{\mu}}(p) = 0$, and expand

$$g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\hat{\mu}}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\hat{\nu}}} g_{\mu\nu}$$

in a Taylor series in $x^{\hat{\mu}}$ about p. Expanding both sides to second order in the $x^{\hat{\mu}}$, dropping constants and indices and evaluating all derivatives at p, we have

$$(\hat{g}) + (\hat{\partial}\hat{g})\hat{x} + (\hat{\partial}\hat{\partial}\hat{g})\hat{x}\hat{x} = \left(\frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} g\right) + \left(\frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 x}{\partial \hat{x} \partial \hat{x}} g + \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \hat{\partial} g\right) \hat{x}$$
$$\left(\frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^3 x}{\partial \hat{x} \partial \hat{x} \partial \hat{x}} g + \frac{\partial^2 x}{\partial \hat{x} \partial \hat{x}} \frac{\partial^2 x}{\partial \hat{x} \partial \hat{x}} g + \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 x}{\partial \hat{x} \partial \hat{x}} \hat{\partial} g + \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \hat{\partial}\hat{\partial} g\right) \hat{x}\hat{x}$$

Now let's consider this expression order-by-order in $\hat{x}$.

• At zeroth order, we get the transformation law at p. There are 16 parameters in the matrix $\partial x^\mu / \partial x^{\hat{\mu}}$, but the metric only has 10, since it's symmetric. Therefore we can always bring the metric into canonical (i.e. Minkowski) form at a point, and the extra 6 degrees of freedom are the Lorentz transformations.

• At first order, we have 40 numbers on the left-hand side, from 4 derivatives of 10 metric components. On the right-hand side, the $(\partial x / \partial \hat{x})^2$ term gives nothing since it was used up at zeroth order, but $\partial^2 x^\mu / \left(\partial x^{\hat{\mu}_1} \partial x^{\hat{\mu}_2}\right)$ has 40 parameters, since the second derivative is symmetric. Then we have just enough freedom to set $\hat{\partial}\hat{g}$ to zero.

• At second order, we have 100 numbers on the left-hand side, since $\hat{\partial}\hat{\partial}$ is symmetric. On the right-hand side, we can only set $\partial^3 x / \partial \hat{x} \partial \hat{x} \partial \hat{x}$, which has 4 choices in the numerator and 20 in the denominator, so we're short by 20 degrees of freedom. These tell us about the curvature of the manifold; we will see later the Riemann tensor has 20 independent components.

Note. As motivated above, at any point p, there should exist a coordinate system x^μ with

$$g_{\mu\nu}(p) = \eta_{\mu\nu}, \quad \partial_\sigma g_{\mu\nu}(p) = 0$$

Such coordinates are called locally inertial coordinates, or Riemann normal coordinates, and the associated basis vectors constitute a local Lorentz frame. These frames are associated with freely falling observers, as they see no effects of gravity besides tidal effects, which only appear to second order. Later, we will construct such coordinates using geodesics.

Locally inertial coordinates are useful for extracting general expressions. While a calculation in curved spacetime may be difficult, we can always go into locally inertial coordinates at a point and simplify using $g \sim \eta$ and $\partial g = 0$. As long as we phrase our final answers in terms of tensorial quantities, they must hold in all coordinate systems.

Note. We can always choose a basis at every point so that the metric is in canonical form at every point. However, such a set of bases generally does not mesh together to form a coordinate system.

Example. In a more elementary treatment, we think of dx^μ as an infinitesimal displacement and ds as an infinitesimal length. For example, consider the metric

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2q} dx^2$$

We want to find the null paths $x^\mu(\lambda)$ followed by light. The tangent vector is

$$V = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu$$

Then the null paths must satisfy

$$ds^2(V, V) = -dt^2(V, V) + t^{2q} dx^2(V, V) = 0$$

Now, working very explicitly, we have

$$dt^2(V,V) = [dt(V)]^2 = \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2, \quad 0 = -\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + t^{2q}\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2$$

We now have an ordinary differential equation, which simplifies to

$$\frac{dx}{dt} = \pm t^{-q}, \quad t = (1-q)^{1/(1-q)}\left(\pm x - x_0\right)^{1/(1-q)}$$

In the more elementary view, we could have "set $ds = 0$ " and then "divided by dt^2 " and "taken the square root". This more casual procedure always gives the same result.

2.2 Geodesics

In this section, we derive the geodesic equation.

• In general relativity, we postulate that free massive particles follow paths of maximum proper time, called geodesics. This corresponds to the Lagrangian

$$L = \sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}, \quad S = \int L d\lambda$$

for paths $x^\mu(\lambda)$, where the dot indicates differentiation with respect to λ.

• Physically, this postulate makes sense because such paths are locally straight through spacetime, just like segments of minimum length are straight lines in Euclidean space.

• By the chain rule, the action above is invariant under reparametrization. Given a path, a useful choice is the proper time τ along the curve, since $L = 1$. Now, given a variation $\delta x^\mu(\tau)$ about this path, the Lagrangian varies by

$$\delta(\sqrt{1+\epsilon}) = \epsilon/2$$

If we instead used the Lagrangian $-L^2$, the variation would be $-\epsilon$. Since these are proportional, the two actions have the same stationary points.

• The new action $-\int L^2 d\tau$ is not reparametrization invariant. If we switch to a new parameter λ, the integrand is multiplied by $d\lambda/d\tau$. To maintain the same stationary points, this must be a constant, so our results will only be valid for parameters affinely related to τ, i.e. $\lambda = a\tau + b$.

• We can find geodesics with the Euler-Lagrange equations, but in this case it's easier to directly plug in the variation,

$$x^\mu \to x^\mu + \delta x^\mu, \quad g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + (\partial_\sigma g_{\mu\nu})\,\delta x^\sigma$$

We then work to first order and integrate by parts as usual, taking care to include derivatives of the metric (i.e. $dg_{\mu\nu}/d\tau = (\partial_\sigma g_{\mu\nu})\,dx^\sigma/d\tau$), to bring out a factor of δx^μ.

• Finally, solving for the acceleration gives the geodesic equation,

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0$$

where the Christoffel symbols are

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}\left(\partial_\nu g_{\rho\sigma} + \partial_\rho g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\nu\rho}\right)$$

This only holds for affine parameters; otherwise an extra term appears. We have symmetrized the Christoffel symbols in the lower two indices, as $\dot{x}^\nu \dot{x}^\rho$ is symmetric.

• We will also use the comma notation for partial derivatives,

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left(g_{\rho\sigma,\nu} + g_{\sigma\nu,\rho} - g_{\nu\rho,\sigma} \right)$$

If there are multiple indices after the comma, they indicate higher derivatives.

We now make some remarks about this result.

• Sometimes, it's easiest to compute the Christoffel symbols by using the geodesic equation in reverse, explicitly varying the proper time integral to compute $\ddot{x}^{\mu}$. Another shortcut method when many metric components are zero is to just read them off from the four Euler-Lagrange equations, which will each be simple.

• We never used the fact that the metric was Lorentzian, so the geodesic equation also can be used to find, e.g., shortest paths in space. It can also be used to find shortest spacelike paths in relativity; in this case we have $L = \sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}}$ and parametrize by the proper length s so that $L = 1$, and the rest of the derivation goes through as before.

• To see that the path is a maximum of proper time and not a minimum, note that we can always approximate a timelike path with many lightlike paths, which have zero proper time.

• If we add forces, they will appear on the right-hand side of the geodesic equation; for example, the electromagnetic force would appear as $qF^{\mu\nu}u_{\nu}$.

• As we'll see later, geodesics are paths that parallel transport their own tangent vector $dx^{\mu}/d\lambda$, which implies that its norm remains fixed. Thus a geodesic timelike at one point is timelike everywhere, and so on. This can also be shown directly from the squared Lagrangian; the norm of the four-velocity is the conserved quantity associated with τ-translation invariance.

• Null geodesics are paths obeying the geodesic equation that are everywhere null. Our derivation above doesn't work for massless particles, but we can show using the einbein action (as introduced in the notes on String Theory) that massless particles follow null geodesics.

• As for timelike geodesics, null geodesics have affine freedom in their parametrizations, but there is no canonical choice like the proper time. One typical choice is

$$p^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\lambda}$$

so that the velocity is the momentum. For a timelike geodesic, the velocity is the momentum per unit mass, so the null geodesic parameter λ is essentially τ/m in the limit $m \to 0$.

• Finally, there are spacelike geodesics, which we parametrize by proper length. These would appear, for example, as the paths of taut strings.

2.3 Covariant Derivatives

The partial derivative ∂_{μ} does not map tensors to tensors, so equations involving it are typically not valid in general in curved spacetime. We fix this problem by replacing the partial derivative with the covariant derivative.

• We define the covariant derivative with the following postulates.

• ∇ is a map from (k, l) tensor fields to $(k, l+1)$ tensor fields.

• Linearity: $\nabla(T + S) = \nabla T + \nabla S$.

• Leibniz (product) rule: $\nabla(T \otimes S) = (\nabla T) \otimes S + T \otimes (\nabla S)$.

• Reduces to partial derivative for scalars: $(\nabla f)_{\mu} = \partial_{\mu} f$.

• Compatible with contractions: $\nabla \left(\delta^{\mu}_{\nu} \right) = 0$.

Such a structure is independent of a metric.

• The third postulate is reasonable since ∇ should act like a derivative. The fourth follows because there's no issue with differentiation of scalars, as their values don't depend on local basis choices. The fifth is sensible because the identity map shouldn't change. Combining it with the Leibniz rule gives, for example, $\nabla_{\nu} \left(A^{\mu} B_{\mu} \right) = \nabla_{\nu} \left(A^{\mu} \right) B_{\mu} + A^{\mu} \nabla_{\nu} \left(B_{\mu} \right)$.

• We can also define directional covariant derivatives, i.e. $W^\mu \nabla_\mu V^\nu$ is the rate of change of V along W. We write $W^\mu \nabla_\mu = \nabla_W$, so that ∇_W is a map from (k,l) tensor fields to (k,l) tensor fields. This is a more general starting point, as we may replace the fourth postulate with $\nabla_W f = W(f)$, which works without a coordinate basis.

• There are several notations for covariant derivatives,

$$(\nabla_\nu V)^\mu = \nabla_\nu V^\mu = V^\mu_{;\nu} = (\nabla V)^\mu{}_\nu$$

The second notation is ambiguous because it can also be thought of as the covariant derivative of the component function V^μ, which would simply be $\partial_\nu V^\mu$. The correct meaning must be inferred from context. Generally, V^μ stands for the component function alone when there is a corresponding vector ∂_μ somewhere else in the equation, as in $(\nabla V^\mu)\,\partial_\mu$. Alternatively, one can use abstract index notation, where $\nabla_a V^b$ is unambiguously equal to $V^a{}_{;b}$.

• When there are multiple indices after the semicolon, the derivative immediately after the semicolon is taken first, e.g. $V^\mu_{;\rho\sigma} = \nabla_\sigma \nabla_\rho V^\mu$.

We now construct the covariant derivative of a tensor field explicitly.

• Given a basis $\{e_\mu\}$ at every point, not necessarily a coordinate basis, we define

$$\nabla_\nu e_\mu = \Gamma^\rho_{\mu\nu} e_\rho$$

where the Γ 's are the connection coefficients; these are simply a set of numbers that depends on the basis.

• Therefore the covariant derivative of a general vector is

$$\nabla_\nu W = \nabla_\nu \left(W^\mu e_\mu\right) = \left(\nabla_\nu W^\mu\right) e_\mu + W^\mu \left(\nabla_\nu e_\mu\right) = \left(\partial_\nu W^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\nu} W^\mu\right) e_\rho$$

Thus, relapsing into our sloppy notation,

$$\nabla_\nu W^\rho = \partial_\nu W^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\nu} W^\mu$$

• We can compute the transformation of the connection coefficients using our first definition. Denoting the new basis with a prime and the Jacobian as J,

$$\Gamma^{\rho'}_{\mu'\nu'} e_{\rho'} = \nabla_{\nu'} e_{\mu'} = J^\nu_{\nu'} \nabla_\nu \left(J^\mu_{\mu'} e_\mu\right) = J^\nu_{\nu'} \nabla_\nu \left(J^\mu_{\mu'}\right) e_\mu + J^\nu_{\nu'} J^\mu_{\mu'} \nabla_\nu e_\mu$$

Recognizing the unprimed connection coefficients on the right, and rearranging gives

$$\Gamma^{\rho'}_{\mu'\nu'} = J^{\rho'}_\rho J^\nu_{\nu'} J^\mu_{\mu'} \Gamma^\rho_{\mu\nu} + J^{\rho'}_\rho \partial_{\nu'} J^\rho_{\mu'}$$

We get the expected tensorial term, plus an extra term that is independent of Γ.

• This shows that the connection coefficients are not a tensor, but the difference of connection coefficients is, so we define the torsion tensor

$$T^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu}$$

We say a connection is torsion free if the torsion vanishes.

• Another way to see this result is to consider the map $\nabla : X, Y \mapsto \nabla_X Y$. This is not a $(1,2)$ tensor because it is not linear in Y,

$$\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + Y \nabla_X f$$

However, the difference of two covariant derivatives $\nabla - \nabla'$ is a $(1,2)$ tensor because the extra term $Y \nabla_X f = Y \nabla'_X f = YX(f)$ cancels out.

• Above, the Jacobian is defined as

$$J^{\mu'}_{\nu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}}, \quad J^{\mu}_{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu'}}$$

Then the chain rule says that

$$J^{\mu'}_{\nu} J^{\nu}_{\rho'} = \delta^{\mu'}_{\rho'}$$

and differentiating both sides gives

$$\left(\partial_{\sigma'} J^{\mu'}_{\nu}\right) J^{\nu}_{\rho'} + J^{\mu'}_{\nu} \left(\partial_{\sigma'} J^{\nu}_{\rho'}\right) = 0$$

• The extra transformation term for Γ makes $\nabla_\nu W^\rho$ into a tensor. Note that

$$\partial_{\nu'} W^{\rho'} = J^{\nu}_{\nu'} J^{\rho'}_{\rho} \partial_\nu W^\rho + W^\rho \partial_{\nu'} \left(J^{\rho'}_{\rho}\right)$$

Applying our Jacobian identity above shows that the extra nontensorial pieces cancel.

• Applying the Leibniz rule gives the covariant derivative for covectors,

$$\nabla_\rho \eta_\mu = \partial_\rho \eta_\mu - \Gamma^\nu_{\mu\rho} \eta_\nu$$

The covariant derivative for a rank (r, s) tensor T is similar. Besides the partial derivative term, we get $r + s$ terms, each of which have a factor of Γ contracted to one index, where downstairs indices T get terms with minus signs. In general, one of the left two indices in each Γ is contracted with T, while the bottom right index is the index on ∇.

Next, we consider some properties of torsion-free connections.

• A general, coordinate-free definition of a torsion-free connection is one which satisfies

$$\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f$$

in any basis. In general we would have

$$\nabla_a \nabla_b f - \nabla_b \nabla_a f = -T^c_{ab} \nabla_c f$$

• It's straightforward to show that in any basis,

$$f_{;\mu\nu} = f_{,\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} f_{,\rho}$$

Antisymmetrizing both sides and restricting to a coordinate basis, $f_{[\mu\nu]} = 0$, which gives $\Gamma^\rho_{[\mu\nu]} = 0$, our earlier definition of a torsion-free connection.

• Geometrically, this tells us that in the absence of torsion, parallel transporting in a square of side a gives a closed curve, up to $O\left(a^3\right)$ terms due to the curvature.

• As another example, note that

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = X^\nu \nabla_\nu Y^\mu - Y^\nu \nabla_\nu X^\mu = X^\nu \partial_\nu Y^\mu - Y^\nu \partial_\nu X^\mu + 2\Gamma^\mu_{[\rho\nu]} X^\nu Y^\rho$$

Therefore, for any torsion-free connection, and any vector fields X and Y,

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

This is a nice result, since we now can compute $[X, Y]$ without intermediate nontensorial quantities. More generally, we can compute the Lie derivative and exterior derivative, for a torsion-free connection, by replacing all partial derivatives by covariant ones.

We now define the Levi-Civita connection used in general relativity.

• A connection is metric compatible if $\nabla g = 0$. We claim that there exists a unique torsionfree metric compatible connection, called the Levi-Civita connection, where the connection coefficients are the Christoffel symbols.

• The metric compatibility condition is

$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = \Gamma^\rho_{\beta\alpha} g_{\rho\gamma} + \Gamma^\rho_{\gamma\alpha} g_{\beta\rho}$$

To show that the Christoffel symbols obey it, we simply plug them in. To show they are the only things that obey it, note that we can add this equation to itself to get Christoffel symbols on the left-hand side, and simplifying the right-hand side gives the connection coefficients.

• Metric compatibility allows us to raise and lower indices through the covariant derivative,

$$g_{\mu\lambda} \nabla_\rho V^\lambda = \nabla_\rho V_\mu$$

We may also define an upper covariant derivative $\nabla^\mu = g^{\mu\nu}\nabla_\nu$. Without metric compatibility, this would be different from $\nabla_\nu g^{\mu\nu}$, but with metric compatibility they are perfectly equivalent.

Note. Philosophically, the torsion-free criterion is so natural that, when considering theories with torsion, we prefer to think of the connection as remaining torsion-free but with the torsion tensor acting as a new matter field.

Note. We repeat the derivation of the Levi-Civita connection without indices. Note that

$$X(g(Y,Z)) = \nabla_X(g(Y,Z)) = g\left(\nabla_X Y, Z\right) + g\left(Y, \nabla_X Z\right)$$

Adding copies of this equation to itself with the indices permuted gives

$$\begin{aligned} X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) \\ = g\left(\nabla_X Y + \nabla_Y X, Z\right) - g\left(\nabla_Z X - \nabla_X Z, Y\right) + g\left(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X\right) \end{aligned}$$

Since the connection is torsion-free, we use our expression for the commutator to isolate the covariant derivative, resulting in the Koszul formula

$2g\left(\nabla_X Y, Z\right) = X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) + g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) - g([Y,Z],X)$.

Since the metric is nondegenerate, this determines $\nabla_X Y$ and hence the connection. To recover our usual expression, we specialize to a coordinate basis; the commutator terms vanish and we read off the Christoffel symbols. For completeness, we should check that $\nabla_X Y$ defined above really does obey the properties of a connection, such as $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$. This check is long but straightforward.

2.4 Parallel Transport and Geodesics

Next, we define parallel transport and connect it to geodesics.

• Consider a parametrized curve with tangent vector $d/d\lambda$. Then a tensor T is parallel transported, or parallel propagated along the path if

$$\nabla_{d/d\lambda} T = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu T = 0$$

Intuitively, this means the tensor is kept constant along the curve. Concretely, expanding the definition gives an ordinary differential equation for the components of T.

• Technically, we have only defined the covariant derivative with respect to a vector field, not a parametrized curve. However, one can show that one can extend $d/d\lambda$ to a vector field in a small neighborhood, and the result is independent of the extension.

• Now recall the geodesic equation reads

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0$$

The velocity is $U^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$, and writing in terms of it gives

$$0 = \frac{dU^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = U^\nu\left(\partial_\nu U^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}U^\mu\right) = \nabla_U U^\alpha$$

Therefore, a geodesic is a path that parallel transports its own tangent vector; these are the generalizations of straight lines. As we saw earlier, not every parametrization works; the vector $dx^\alpha/d\kappa$ is only parallel transported if κ and λ are affinely related; otherwise we get artificial "acceleration".

• Parallel transport preserves inner products, because $(D/D\lambda)\left(g_{\mu\nu}V^\mu W^\nu\right)$ splits into three terms by the Leibniz rule, all of which are zero. In particular, the norm of the velocity of a geodesic is preserved.

We give some simple examples of connections and parallel transport.

• In flat space and Cartesian coordinates, the Christoffel symbols are zero; parallel transport is done by keeping vector components constant.

• However, we must have nonzero connection coefficients in polar coordinates because "sliding a vector around" doesn't keep its polar components constant. This shows that the connection coefficients are not tensorial.

• In a curved space, we can always make the Christoffel symbols vanish at a point by using locally inertial coordinates, since they only depend on metric derivatives.

• In a manifold embedded in $\mathbb{R}^n$, parallel transport under the Levi-Civita connection simply means shifting a vector over in $\mathbb{R}^n$, then projecting it back down to the tangent plane.

• Given velocities at two distinct points in spacetime, the natural way to compute a relative velocity is to parallel transport one velocity to the other and subtract. This is possible exactly when the space is flat, in which case this reduces to the usual vector subtraction in Cartesian coordinates. When the space is curved, the parallel transport is path-dependent.

Note. Intuition for the torsion tensor T. There are several ways of visualizing torsion as an extra twist. For example, when the torsion vanishes, we have

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0$$

The Lie bracket tells us how much the vector fields X and Y twist as they flow along each other. Thus when there is no torsion, the covariant derivative part has no extra twist.

Another intuition comes from geodesics. If we imagine making a geodesic on a surface by pulling a string taut, torsion corresponds to twisting the string. With torsion, a rigid body in $\mathbb{R}^3$ whose center of mass follows a geodesic rotates about the center of mass.

To formalize this, we demand the displacement vectors from the center of mass to points on the body are parallel transported. Then we define the body to not be rotating if those other points also follow geodesics. This makes sense dynamically, since rotating rigid bodies have internal stresses so that points in them experience external forces. (clarify)

Next, we explicitly construct locally inertial coordinates using geodesics.

• At every point p, there is a unique geodesic through p with tangent vector $dx/d\lambda = X_p$, by the existence and uniqueness theorems applied to the geodesic equation.

• Define the exponential map exp: $T_p \to M$ as the map that takes X_p to the point of this geodesic at $\lambda = 1$. It can be shown that this map is bijective for X_p in a neighborhood of the origin of T_p, and hence defines a system of coordinates by $\exp(X) \mapsto X^\mu$.

• Note that geodesics in normal coordinates are simply linear in the coordinates, $X^\mu(t) = tX^\mu_p$. Therefore the geodesic equation reduces to $\Gamma^\mu_{\nu\rho}(X(t))X^\nu_p X^\rho_p = 0$. In particular, at $t = 0$

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}(p)X^{\nu}_{p}X^{\rho}_{p} = 0, \quad \Gamma^{\mu}_{(\nu\rho)}(p) = 0$$

because X_p is arbitrary. If the connection is torsion-free, then $\Gamma^{\mu}_{[\nu\rho]} = 0$, so the connection coefficients vanish at p. (This doesn't work with torsion, because the torsion is a tensor, and hence is nonzero independent of coordinates.)

• Furthermore, in the case of the Levi-Civita connection, we can solve for ∂g in terms of Γ, which shows that $\partial g = 0$ at p.

• If we defined normal coordinates using a basis $\{e_\mu\}$ of T_p, then the $\{e_\mu\}$ are the coordinate basis vectors $\{\partial_\mu\}$ of the normal coordinates at p. Thus the metric in normal coordinates is determined by the inner products of the $\{e_\mu\}$.

• A locally inertial frame at p is a set of normal coordinates at p with $g = \eta$. Such frames physically correspond to observers in special relativity: the time and space coordinates are laid down by spatial and timelike geodesics, which correspond physically to rigid straight rods and unaccelerated clocks.

2.5 The Riemann Curvature Tensor

We have seen that second covariant derivatives commute for scalars. The extend to which they don't commute for vectors defines the Riemann curvature tensor.

• We define the Riemann curvature tensor $R^{a}{}_{bcd}$ of a connection ∇ by $R^{a}{}_{bcd}Z^{b}X^{c}Y^{d} = (R(X,Y)Z)^{a}$ where, for any vector fields X, Y, and Z,

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

To verify this is a tensor, we must check linearity in X, Y, and Z. For linearity in X, we have

$$\begin{aligned} R(fX,Y)Z &= \nabla_{fX}\nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{fX} Z - \nabla_{[fX,Y]} Z \\ &= f\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y f\nabla_X Z - \nabla_{f[X,Y]-Y(f)X} Z \\ &= f\nabla_X \nabla_Y Z - Y(f)\nabla_X Z - f\nabla_Y \nabla_X Z - f\nabla_{[X,Y]} Z - Y(f)\nabla_X Z \end{aligned}$$

where we use $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$ repeatedly, and the extra terms cancel as desired.

• We may also specialize to a coordinate basis. Let $e_\mu = \partial/\partial x^\mu$ and $\nabla_\mu = \nabla_{e_\mu}$. Then

$$R\left(e_\rho, e_\sigma\right) e_\nu = \nabla_\rho \nabla_\sigma e_\nu - \nabla_\sigma \nabla_\rho e_\nu = \nabla_\rho \left(\Gamma^{\tau}_{\nu\sigma} e_\mu\right) - \nabla_\sigma \left(\Gamma^{\tau}_{\nu\rho} e_\tau\right)$$

since the commutator term is zero, and carrying out the covariant derivatives gives

$$R^{\gamma}{}_{\rho\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^{\gamma}_{\rho\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\gamma}_{\rho\alpha} + \Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha}\Gamma^{\mu}_{\rho\beta} - \Gamma^{\gamma}_{\mu\beta}\Gamma^{\mu}_{\rho\alpha}.$$

• If we further specialize to torsion-free connections, we have the Ricci identity

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta V^\gamma - \nabla_\beta \nabla_\alpha V^\gamma = R^{\gamma}{}_{\rho\alpha\beta} V^\rho$$

This is intuitive: the Riemann tensor takes in a vector (index ρ) and two directions (α and β), and returns the difference between parallel transporting along α and then β, and parallel transporting in the reverse order (index γ). Thus the Riemann tensor tells us about the path-dependence of parallel transport. The extra twist of torsion would add another term.

• To prove the Ricci identity in a coordinate basis, we may simply expand

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta V^\gamma = \partial_\alpha \left(\nabla_\beta V^\gamma\right) - \Gamma^{\rho}_{\beta\alpha} \nabla_\rho V^\gamma + \Gamma^{\gamma}_{\rho\alpha} \nabla_\beta V^\rho$$

We expand the outer covariant derivative first; we do it in the opposite order, we have to take care to avoid writing covariant derivatives of connection coefficients, which are not tensors.

• Since the torsion vanishes, the second term vanishes upon antisymmetrizing α and β, as does the $\partial_\alpha \partial_\beta$ term. All terms involving derivatives acting on V cancel between the first and third term, recovering our coordinate basis expression for the Riemann tensor.

• The Ricci identity also holds outside of a coordinate basis,

$$\nabla_c \nabla_d Z^a - \nabla_d \nabla_c Z^a = R^a_{bcd} Z^b$$

To show this, we start from our original definition. The torsion-free condition gives

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - (\nabla_{\nabla_X Y} Z - \nabla_{\nabla_Y X} Z)$$

On the other hand, we have

$$\nabla_X \nabla_Y Z = \nabla_X Y^d \nabla_d Z = (\nabla_X Y)^d \nabla_d Z + Y^d \nabla_X \nabla_d Z = \nabla_{\nabla_X Y} Z + X^c Y^d \nabla_c \nabla_d Z$$

so we conclude that

$$X^c Y^d \left(\nabla_c \nabla_d Z - \nabla_d \nabla_c Z^a\right) = R^a{}_{bcd} Z^b X^c Y^d$$

and since X and Y are arbitrary, this proves the Ricci identity.

• There is also a Ricci identity for covectors,

$$\nabla_c \nabla_d \eta_a - \nabla_d \nabla_c \eta_a = -R^b_{acd} \eta_b$$

where again the only requirement is that the connection be torsion-free. Similarly, we have a Ricci identity for rank n tensors with n terms.

Example. Explicitly relating the Riemann tensor to parallel transport. Take two commuting vector fields X and Y. Then they define part of a coordinate system, $X = \partial/\partial s$ and $Y = \partial/\partial t$, which we will use to parametrize geodesics. Take a point p and work in normal coordinates so that the connection coefficients vanish at p.

Now consider a vector $Z_p \in T_p(M)$, and parallel transport it by δs along X to point q. The geodesic equation reads

$$\nabla_X Z = 0, \quad \frac{dZ^\mu}{ds} = -\Gamma^\mu_{\nu\rho} Z^\nu X^\rho, \quad \frac{d^2 Z^\mu}{ds^2} = -\left(\Gamma^\mu_{\nu\rho} Z^\nu X^\rho\right)_{,\sigma} X^\sigma$$

Then expanding to second order gives

$$Z^\mu_q = Z^\mu_p - \frac{1}{2}\left(\Gamma^\mu_{\nu\rho,\sigma} Z^\nu X^\rho X^\sigma\right)\Big|_p \delta s^2$$

where only the term involving a derivative of Γ survives, since we used normal coordinates. Next, we parallel transport by δt along Y to point r. Expanding to second order again,

$$Z^\mu_r = Z^\mu_q + \left(\frac{dZ^\mu}{dt}\right)_q \delta t + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 Z^\mu}{dt^2}\right)_q \delta t^2$$

This expression can be simplified by Taylor expanding the connection coefficients at q, as

$$\Gamma|_q = \Gamma|_p + \left(X^\sigma \partial_\sigma \Gamma\right)|_p \delta s + O\left(\delta s^2\right)$$

By expanding to second order in δs and δt we find

$$Z^\mu_r = Z^\mu_p - \frac{1}{2}\Gamma^\mu_{\nu\rho,\sigma} Z^\nu \left(X^\rho X^\sigma \delta s^2 + Y^\rho Y^\sigma \delta t^2 + 2 Y^\rho X^\sigma\right)\Big|_p \delta s \delta t$$

We may also compute Z^r_μ by parallel transporting in the opposite order. The difference is $\Delta Z^\mu_r = Z^\mu_r - Z^\mu_r = \Gamma^\mu_{\nu\rho,\sigma} Z^\nu \left(Y^\rho X^\sigma - X^\rho Y^\sigma\right) \delta s \delta t = \left(\Gamma^\mu_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^\mu_{\nu\rho,\sigma}\right) Z^\nu X^\rho Y^\sigma \delta s \delta t = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} Z^\nu X^\rho Y^\sigma \delta s \delta t$

where we used our coordinate expression for the Riemann tensor at p. Now we're almost done, but the left-hand side contains a tensor at r and the right-hand side contains a tensor at p. If we evaluate the Riemann tensor at r instead, the error terms will be higher order in δs and δt and hence can be ignored. Therefore we have the tensorial expression

$$R^a_{bcd} Z^b X^c Y^d\big|_r = \lim_{\delta s, \delta t \to 0} \frac{\Delta Z^a_r}{\delta s \delta t}$$

This justifies our intuitive interpretation. Here, we implicitly assumed that there was no torsion. If torsion were present, then parallel transporting along δs and then δt would land us at a different point (at order $\delta s \delta$) than parallel transporting along δt and then δs, specifically differing by the torsion tensor $\delta p^\rho = T_{\mu\nu}{}^\rho X^\mu Y^\nu \delta s \delta t$.

The Riemann tensor has some important symmetries. Note that its definition makes no mention of the metric. Thus we begin with statements that only require a connection.

• Ignoring the matrix indices, the Riemann tensor has the simple form

$$R_{.\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu + [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu]$$

which is similar to the field strength tensor in Yang-Mills. The analogy is

$$A_\mu \leftrightarrow \Gamma_\mu, \quad F_{\mu\nu} \leftrightarrow R_{\mu\nu}$$

That is, both A and Γ are connections on a fibre bundle and F and R are their curvatures. The analogy is not perfect; in general relativity Γ is a derivative of the fundamental field g, but in Yang-Mills A is itself the fundamental field.

• By definition, we have antisymmetry in the last two indices,

$$R^a_{b(cd)} = 0$$

This holds even for connections with torsion.

• For a torsion-free connection, we have

$$R^a_{[bcd]} = 0$$

To see this, work in normal coordinates at p, so that

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho}$$

at p. Since the torsion is zero, $\Gamma^\mu_{[\nu\rho]} = 0$ everywhere. Then antisymmetrizing over ν, ρ, and σ gives $R^\mu_{[\nu\rho\sigma]} = 0$. Since this is a tensorial equation, it holds in all coordinate systems.

• For a torsion-free connection, we have the Bianchi identity

$$R^a_{b[cd;e]} = 0$$

We work in normal coordinates, so the covariant derivative reduces to the partial derivative. We have $\partial R \sim \partial(\partial\Gamma + \Gamma\Gamma) = \partial\partial\Gamma + \Gamma\partial\Gamma = \partial\partial\Gamma$ by normal coordinates, so

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma;\tau} = \partial_\tau \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \partial_\tau \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho}$$

and antisymmetrizing gives the result, by the symmetry of mixed partials. Equivalently,

$$R^a_{bcd;e} + R^a_{bde;c} + R^a_{bec;d} = 0$$

where we used antisymmetry in the last two indices. The Bianchi identity looks quite similar to the Jacobi identity and can be proven using it.

Next, we derive the geodesic deviation equation.

• Physically, we expect the Riemann tensor to be related to the relative acceleration of nearby geodesics, because the Riemann tensor describes the curvature of spacetime, which physically appears as a gravitational tidal force.

• Mathematically, suppose we have two initially parallel nearby geodesics, where "parallel" is defined by parallel transporting the velocity of one to the other. We propagate both geodesics for a small time, by parallel transporting them along their velocity vectors. Then their relative acceleration is proportional to their new relative velocity, which is again determined by parallel transport. We've essentially just described the commutator of two parallel transports, which is exactly what the Riemann tensor is.

• To formalize this, define a one-parameter family of geodesics to be a diffeomorphism

$$\gamma : I \times I' \to M, \quad (s,t) \mapsto \gamma(s,t)$$

where I and I' are intervals, so that for fixed $s, \gamma(s,t)$ is a geodesic with affine parameter t.

• This defines a surface on M with coordinates (s,t), which we extend to coordinates for an open set containing the surface, and we define $S^\mu = \partial x^\mu/\partial s$ and $T^\mu = \partial x^\mu/\partial t$. Note that S and T are commuting vector fields since they are derived from coordinates.

• When evaluated on the surface, S^μ points from one geodesic to its neighbor, while T^μ gives the local geodesic velocity. Therefore the relative velocity of geodesics is $\nabla_T S$, and the relative acceleration of geodesics is $\nabla_T \nabla_T S$.

• Since the torsion vanishes,

$$\nabla_T S - \nabla_S T = [T,S] = 0$$

Therefore we have

$$\nabla_T \nabla_T S = \nabla_T \nabla_S T = \nabla_S \nabla_T T + R(T,S)T = R(T,S)T$$

where we used the definition of the Riemann tensor and $\nabla_T T = 0$. This is the geodesic equation, relating the relative acceleration to the Riemann tensor.

• In abstract index notation, the geodesic deviation equation reads

$$T^c \nabla_c \left(T^b \nabla_b S^a\right) = R^a{}_{bcd} T^b T^c S^d$$

It is useful because it gives us a direct way to measure the Riemann tensor. Since

$$R^a_{bcd} = \frac{2}{3}\left(R^a_{(bc)d} - R^a_{(bd)c}\right)$$

we may use geodesic deviation to measure all of the components of the Riemann tensor.

2.6 Curvature of the Levi-Civita Connection

In this section, we consider additional properties of the Riemann tensor when it is derived from the Levi-Civita connection on a manifold with a metric.

Prop. On a simply-connected manifold, the Riemann tensor associated with the Levi-Civita connection vanishes if and only if there is a coordinate system where the metric components are constant.

Proof. The backwards direction is easy: if $\partial g = 0$ everywhere, the connection vanishes, so the Riemann tensor vanishes as well. To go forwards, take a basis of one-forms $\hat{\theta}^{(a)}$ at a point p, so

$$ds^2(p) = \eta_{ab}\hat{\theta}^{(a)} \otimes \hat{\theta}^{(b)}$$

where η_{ab} is arbitrary. Now extend the one-forms to one-form fields by parallel transport, which is unique because the Riemann tensor vanishes. Then by metric-compatibility, we have

$$ds^2 = \eta_{ab}\hat{\theta}^{(a)} \otimes \hat{\theta}^{(b)}$$

at every point, where η_{ab} is constant in this field of frames. We now must show that the $\hat{\theta}^{(a)}$ are derived from a coordinate system. Note that if a one-form ω is parallel transported,

$$\nabla_\mu \omega_\nu = 0$$

and antisymmetrizing both sides gives

$$\nabla_{[\mu}\omega_{\nu]} = \partial_{[\mu}\omega_{\nu]} \propto d\omega = 0$$

where we used torsion-freeness. On a simply-connected manifold, the first cohomology group is trivial, so all closed one-forms are exact, $\hat{\theta}^{(a)} = dy^a$, giving the desired coordinates.

Next, we consider additional symmetry properties of the Riemann tensor.

• Since we now have a metric, we work with the lowered form R_{abcd}. We claim that

$$R_{abcd} = R_{cdab}$$

To show this, work in normal coordinates at p, so $\partial g = 0$. Then $\partial g^{-1} = 0$ as well, as can be shown formally by considering $\partial\delta = \partial\left(gg^{-1}\right)$. Then

$$\partial_\rho \Gamma^\tau_{\nu\sigma} = \frac{1}{2} g^{\tau\mu}\left(g_{\mu\nu,\sigma\rho} + g_{\mu\sigma,\nu\rho} - g_{\nu\sigma,\mu\rho}\right)$$

and plugging this into our expression for the Riemann tensor gives

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\sigma,\nu\rho} + g_{\nu\rho,\mu\sigma} - g_{\nu\sigma,\nu\rho} - g_{\mu\rho,\nu\sigma}\right)$$

where we lower the index only after the connection coefficients are substituted away. The conclusion follows using the symmetry of the metric and mixed partials.

• This result can be combined with our earlier results for the corollaries

$$R_{(ab)cd} = 0, \quad \nabla_{[e}R_{ab]cd}$$

By combining some of these results, we further have

$$R_{[abcd]} = 0, \quad \nabla_e R_{abcd} + \nabla_a R_{\text{becd}} + \nabla_b R_{\text{eacd}} = 0$$

Next, we define special contractions of the Riemann tensor and write down the Einstein equation.

• In terms of group theory, tensors with the symmetry properties of the Riemann tensor form a representation of the Lorentz group, and we would like to decompose it into irreps. When this is done to a general rank 2 tensor, for example, we get the trace, the antisymmetric part, and the traceless symmetric part.

• We define the Ricci tensor by

$$R_{ab} = R^c_{acb}$$

The Ricci tensor is symmetric, and its trace is called the Ricci scalar,

$$R = g^{ab}R_{ab}$$

The Ricci tensor is the only independent contraction of the Riemann tensor; all others are either proportional to zero.

• We define the Einstein tensor by

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}$$

By contracting the Bianchi identity twice, we have

$$\nabla^b R_{ab} = \frac{1}{2}\nabla_a R$$

which implies that

$$\nabla^a G_{ab} = 0$$

We say the Einstein tensor is covariantly conserved.

• In general relativity, we postulate the Einstein field equation

$$G_{ab} = 8\pi G T_{ab}$$

where the constant is fixed by Newtonian gravity. Taking the trace gives $R = -8\pi GT$, so

$$R_{ab} = 8\pi G\left(T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab}\right)$$

Hence R_{ab} is completely determined by T_{ab}. In vacuum, $R_{ab} = 0$.

• The alternate equation $R_{ab} \propto T_{ab}$ is unacceptable because covariant conservation of R implies $\nabla^a R_{ab} = 0$, which implies $\nabla_a R = 0$ by the Bianchi identity. Then R is constant which implies T is constant, but $T = 0$ in vacuum and $T \neq 0$ in matter.

• The remaining degrees of freedom are in the Weyl tensor, which is completely traceless, i.e. all of its contractions vanish. It is defined by

$$R_{abcd} = C_{abcd} + \frac{2}{n-2}\left(g_{a[c}R_{d]b} - g_{b[c}R_{d]a}\right) - \frac{2}{(n-1)(n-2)}Rg_{a[c}g_{d]b}$$

so that the Weyl tensor is essentially the Riemann tensor with all contractions subtracted off.

• The Weyl tensor has the same symmetries as the Riemann tensor, and vanishes in dimension $n < 4$. It represents gravitational degrees of freedom, i.e. the components of the Riemann tensor which are not determined by the Einstein field equations, which are exemplified by gravitational waves. Analogously, Maxwell's equations with sources don't uniquely specify the fields; we can always add on electromagnetic radiation.

• The Weyl tensor is invariant under conformal transformations $g \to \Omega^2(x)g$, while the Riemann tensor is not. We say a metric is conformally flat if it related to a flat metric by a conformal transformation; one can show that conformal flatness is equivalent to vanishing Weyl tensor.

Note. Counting the degrees of freedom of the Riemann tensor. Since the first two indices are antisymmetric, they have $n(n-1)/2$ degrees of freedom, as do the last two indices. The fact that the Riemann tensor is symmetric under their interchange means that we are left with the same number of degrees of freedom as an $m \times m$ symmetric matrix, $m(m+1)/2$, with $m = n(n-1)/2$.

The final constraint is $R_{[abcd]} = 0$. To understand what this constraint means, consider writing

$$R_{abcd} = A_{abcd} + R_{[abcd]}$$

which implies $A_{[abcd]} = 0$. Then every tensor can be written as the sum of a totally antisymmetric tensor $R_{[abcd]}$ plus a tensor whose totally antisymmetric part vanishes. None of the identities we used above place any constraints on $R_{[abcd]}$, so $R_{[abcd]} = 0$ contains $n(n-1)(n-2)(n-3)/4$! new independent constraints. The final count is

$$D(n) = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right) - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \frac{n^2\left(n^2-1\right)}{12}$$

degrees of freedom in the Riemann tensor. We have

$$D(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ 1 & n = 2 \\ 6 & n = 3 \\ 20 & n = 4 \end{cases}$$

Then the Riemann tensor is always trivial in $n = 1$, determined by the Ricci scalar in $n = 2$, and determined by the Ricci tensor in $n = 3$. In $n = 4$, there are 10 extra degrees of freedom, captured in the Weyl tensor.

Note. Intrinsic versus extrinsic curvature. Intrinsic curvature is measured by the Riemann tensor; it can be detected by observers living on the manifold through parallel transport loops. Extrinsic curvature is defined by surfaces embedded in a higher-dimensional space, and measures the deviation of the embedding from a flat plane.

• The intrinsic curvature of a 1D manifold is always zero, since there are no nontrivial parallel transport loops. However, as a curve embedded in a larger space, it can have extrinsic curvature, measured by its radius of curvature.

• In 2D, the intrinsic curvature is determined by the Ricci scalar. For example, the torus, thought of as $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, has zero intrinsic curvature. However, the standard embedding of the torus in $\mathbb{R}^3$ as a donut has both nonzero intrinsic and extrinsic curvature.

• The intrinsic curvature is linked to topology by

$$\chi(M) = \frac{1}{4\pi}\int_M R\sqrt{|g|}d^n x, \quad \chi(M) = 2(1-g)$$

Here, $\chi(M)$ is the Euler characteristic, a topological invariant of the space, and g is the genus, which is one for the torus.

• A piece of paper rolled up into a cylinder, viewed as a surface in $\mathbb{R}^3$, has extrinsic curvature but no intrinsic curvature. The reason is that rolling up the paper without stretching it preserves lengths between points along the paper, so the intrinsic curvature stays the same.

• A two-sphere with metric

$$ds^2 = a^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

has constant intrinsic curvature; the Ricci scalar is $R = 2/a^2$. If it is embedded in $\mathbb{R}^3$ in the standard way, it also has constant extrinsic curvature.

In general relativity, we will almost always be concerned with intrinsic curvature.

Note. Intuition for the pieces of the Riemann tensor. Consider a small ball of free particles, in a coordinate system where all of them are initially at rest. Then the Ricci tensor tells us

how the volume of this ball changes over time. To see this, work in normal coordinates and recall the geodesic deviation equation says

$$a^\mu = -R^\mu{}_{00\nu} S^\nu$$

where S is the separation between geodesics and a is the acceleration. Since $R_{\mu 00\nu} = R_{\nu 00\mu}$, we can choose a coordinate system aligned with the principle axes of the ellipsoid that the ball will deform into by the spectral theorem. Then

$$\text{second derivative of principle axis } i \propto -R^i_{00i}$$

with no summation, and since $R^0{}_{000} = 0$, we have

$$\text{second derivative of volume } \propto -R^\mu{}_{00\mu} = -R_{00}.$$

This is Raychaudhuri's equation. Thus, the Ricci tensor tells us about how small volumes changes over time. Einstein's equations say that

$$R_{00} = 4\pi G \left(\rho + p_x + p_y + p_z\right)$$

so contraction is caused by both energy density and pressure. (The idea that pressure is repulsive is a red herring, since a uniform pressure isn't repulsive even nonrelativistically.)

For ordinary, nonrelativistic matter, the pressure is negligible, so we recover Newtonian gravity. A photon gas has $p = \rho/3$, which implies that its gravitational effect is twice as large as one would guess from its energy density alone. Dark energy has $p = -\rho$, implying that positive dark energy has a repulsive gravitational effect. Finally, there's no expansion or contraction effect when $p = -\rho/3$. In cosmology, this kind of contribution roughly corresponds to spatial curvature.

More generally, for a ball with velocity v^μ, the result above becomes

$$\text{second derivative of volume } \propto -R_{\mu\nu} v^\mu v^\nu$$

so we can recover all components of the Ricci tensor by volume change. The Weyl tensor, on the other hand, represents degrees of freedom which don't change the volume. For example, a gravitational wave can stretch a ball in one direction and contract in another.

2.7 Non-Riemannian Geometries

We give a tour of some exotic, non-Riemannian geometries.

Example. Newton-Cartan geometries. Consider the Newtonian equation of motion $\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla\phi(\mathbf{x})$. We can interpret these as the geodesic equation

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0$$

with an appropriate connection. We parametrize the geodesics by t, so the dot indicates differentiation with respect to t, and set

$$\Gamma^i_{00} = \delta^{ij} \partial_j \phi$$

with others zero. Parametrizing by t is legal since, in the nonrelativistic limit, $t = \tau$. Then

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{00} \ddot{t} \dot{t} = 0$$

which gives the result since $\dot{t} = 1$. However, this connection is not a Levi-Civita connection with respect to any metric!

More generally, we would like to formulate Newtonian gravity in a geometrical way. We define a Newton-Cartan structure as a triple (h, θ, ∇) so that

• h is a degenerate symmetric rank 2 tensor $h = h^{\mu\nu}\partial_\mu \otimes \partial_\nu$ so that $h^{\mu\nu}$ has rank $n-1$. We call h the spatial metric.

• θ is a one-form in the kernel of h, $h^{ab}\theta_b = 0$, called the clock.

• ∇ is a torsion-free connection which preserves both h and θ, i.e. $\nabla h = \nabla\theta = 0$.

Since ∇ is torsion-free, we have $\nabla_{[a}\theta_{b]} = 0$, which implies $d\theta = 0$, so $\theta = dt$ locally. This gives a time for every point in the spacetime, and h restricted to a surface of fixed t is nondegenerate.

For example, if $h^{ij} = \delta^{ij}$ with all other elements zero, then $\theta = dt$, and ∇ with $\Gamma^i_{00} \neq 0$, recovering Newtonian geodesics $\mathbf{x}(t)$. A Newton-Cartan structure has absolute time, since we can always say if two points have the same t, but not absolute space.

Example. Projective structures. Two torsion-free connections $\nabla, \hat{\nabla}$ are projectively equivalent if they share the same unparametrized geodesics. For a general parameter, the geodesic equation reads

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho = f\dot{x}^\mu$$

In particular, we can get unparametrized geodesics by using one of the coordinates x^n as the parameter. One can show that ∇ and $\hat{\nabla}$ are projectively equivalent if there is a one-form ω so

$$\hat{\Gamma}^\mu_{\nu\rho} = \Gamma^\mu_{\nu\rho} + \delta^\mu_\nu\omega_\rho + \delta^\mu_\rho\omega_\nu$$

Projective equivalence defines an equivalence relation on connections, and a projective structure is one of these equivalence classes. One can also define curvatures of projective structures.

As an example, consider a hemispherical bowl sitting on a plane. Projecting from the center of the sphere defines a map between the half-sphere and $\mathbb{R}^2$, where great circles map to lines. Hence the Levi-Civita connections of the standard metric on the half-sphere yields a connection on $\mathbb{R}^n$ that is projectively equivalent to the standard one.

Example. Magnetic geometries and Kaluza-Klein reduction. Consider a three-dimensional Riemannian manifold with coordinates (x, y, z) and metric $g = dx^2 + dy^2 + (dz - xdy)^2$. The geodesic Lagrangian is

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}(\dot{z} - x\dot{y})^2$$

The Euler-Lagrange equations read

$$\ddot{x} = -\dot{y}(\dot{z} - x\dot{y}), \quad \frac{d}{dt}(\dot{y} - x(\dot{z} - x\dot{y})) = 0, \quad \dot{z} - x\dot{y} = c$$

Plugging in the final equation, we find

$$\ddot{x} = -c\dot{y}, \quad \ddot{y} = c\dot{x}$$

which, if we project away the z direction, describes a particle in two dimensions in a magnetic field! More generally, magnetism in two dimensions is described by

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = F^i{}_j\dot{x}^j, \quad F_{ij} = -c\epsilon_{ij}$$

The Kaluza-Klein model does the same for electromagnetism in four dimensions. In general, given a manifold Σ with metric h and F with $F = dA$, we look at a manifold with one higher dimension with metric $g = h + (dz + A)^2$.

1.2.5 Diffeomorphisms, Lie Derivative, Forms, Integration

4.1 Diffeomorphisms

We quickly review pushforward and pullback and how they relate to our operations.

• Given a smooth map $\phi : M \to N$ we define the pullback of a function

$$\phi^*(f) = f \circ \phi$$

and the pushforward of a vector X and one-form η as

$$(\phi_* X)(f) = X(\phi^* f), \quad (\phi^* \eta)(X) = \eta(\phi_* X)$$

where $f(p) = q$, and everything in M is evaluated at p and everything in N is evaluated at q. More generally, we can always pullback one-form fields but can't pushforward vector fields. This is due to an asymmetry in the definition of a function; for every input, there is exactly one output, but not vice versa.

• In components, we have

$$(\phi_* X)^\alpha|_q = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} X^\mu \Big|_p, \quad (\phi^* \eta)_\mu \Big|_p = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \eta_\alpha \Big|_q$$

One can remember these expressions by the chain rule. Schematically, we have $\eta^T(JX) = \left(J^T \eta\right)^T X$ so the factors are related by transpose.

• The pullback and pushforward of arbitrary tensors of type $(r, 0)$ or $(0, r)$ is defined by pushforward and pullback of their arguments, giving a Jacobian factor for every tensor index.

• As an example, suppose ϕ embeds M in N. Then we can define a metric on M by pulling back the metric on N.

• Pullback and pushforward are linear and commute with the tensor product and with contraction. Pullback commutes with the exterior derivative for functions,

$$\phi^* df = d(\phi^* f)$$

Since the pullback is linear and commutes with tensor products (which include multiplying by an arbitrary scalar), it commutes with the exterior derivative and wedge product.

• Finally, we have $\phi^*[X, Y] = [\phi^* X, \phi^* Y]$. If we are willing to extend the definition of pushforward to an arbitrary differential operator, this follows from $\phi_*(XY) = (\phi_* X)(\phi_* Y)$.

Next, we specialize to the case where ϕ is a diffeomorphism.

• If ϕ is a diffeomorphism, we can define the pushforward and pullback of arbitrary tensor fields by applying $(\phi^{-1})_*$ and $(\phi^{-1})^*$ when needed. For example,

$$(\phi_* T)^\mu{}_\nu = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\nu} T^\rho_\sigma$$

These formulas contain a mix of Jacobians and inverse Jacobians. While we typically think of diffeomorphisms as active, in the passive view they are simply coordinate changes, explaining why the formulas look similar.

• Given a covariant derivative ∇ on M, we can define its pushforward $\tilde{\nabla}$ as

$$\tilde{\nabla}_X T = \phi_* \left(\nabla_{\phi^* X} (\phi^* T) \right)$$

That is, we pullback X and T, evaluate the covariant derivative on M, then pushforward the result. One can show this respects our previous results: the Riemann tensor of $\tilde{\nabla}$ is the pushforward of the Riemann tensor of ∇, and if ∇ is the Levi-Civita connection of a metric g on M, then $\tilde{\nabla}$ is the Levi-Civita connection of the metric $\phi_*(g)$ on N.

• We say a diffeomorphism $\phi : M \to M$ is a symmetry transformation of a tensor field T if $\phi_* T = T$. A symmetry transformation of the metric is called an isometry.

Example. We have to be careful with coordinates when $M = N$. Consider $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, where both copies of $\mathbb{R}$ are described by the coordinate x, so we are considering an active transformation. Let ϕ map the point p with coordinate x to the point q with coordinate $f(x)$. Then if $\eta(x) = g(x)dx$,

$$(\phi^*\eta)|_p = f'g|_q \, dx, \quad (\phi^*\eta)(x) = f'(f(x))g(f(x))dx$$

by our earlier formulas. As a simple example, if $f(x) = 2x$, then we have

$$(\phi^*\eta)(x) = 2g(2x)dx$$

Note that the argument of g does not match with that of $\phi^*\eta$. Since everything here is active, there is no notion of a coordinate change.

On the other hand, suppose we used different coordinates for the two copies of $\mathbb{R}$, i.e. we could let ϕ map x to $f(y)$, where $y = h(x)$. In order to compute the pullback of $\eta(x) = g(x)dx$, the first step would be to change coordinates to y,

$$\eta(x) = g(x)dx = g(x)\frac{dx}{dy}dy = g\left(h^{-1}(y)\right)\left.\frac{dh^{-1}}{dy}\right|_{y=h(x)} dy$$

Then we proceed with the formula above. While this is a bit conceptually clearer, it's technically messier, so we usually prefer to use a single coordinate system.

Diffeomorphisms are the gauge symmetries of general relativity.

• A physical situation is specified by a set of tensor fields on a manifold; if two of these sets are related by a diffeomorphism, they are physically equivalent. That is, if we have $\phi : M \to N$ with tensor fields Φ on M, including the metric, then (M, Φ) is physically the same as $(N, \phi_*\Phi)$.

• For example, the statement that two geodesics intersect at a point p in a manifold is not gaugeinvariant, because we can map p to any other point. However, the proper time experienced by a geodesic between two collisions is gauge-invariant.

• Thus, diffeomorphism invariance tells us that individual points on a manifold have no physical meaning. Once we have accepted this, the only additional thing diffeomorphism invariance says is that the theory should be coordinate-independent, which we already know.

• It is possible to derive general relativity by starting with a massless spin 2 field on flat spacetime with a gauge symmetry derived from diffeomorphism invariance.

• The vacuum Einstein equation appears to be ten equations for ten components of the metric. However, four degrees of freedom of the metric are redundant due to diffeomorphism invariance (i.e. coordinate transformations). The resolution is that four of the Einstein equations are redundant by the contracted Bianchi identity.

4.2 The Lie Derivative

Given a vector field X, let $\phi_t : M \to M$ be the diffeomorphism resulting from following integral curves for parameter t. This gives a one-parameter group of diffeomorphisms.

• We define the Lie derivative of a tensor field T as

$$(\mathcal{L}_X T)_p = \lim_{t\to 0} \frac{((\phi_{-t})_* T)_p - T_p}{t}$$

We could also write this with a pullback, $(\phi_t)^*$, but we'll use pushforward by the inverse because we want to consider vectors explicitly first. The Lie derivative is clearly linear and maps (r, s) tensors to (r, s) tensors.

• To guess an expression for the Lie derivative, we pick a hypersurface with coordinates x^i so that X is nowhere tangent to the hypersurface. We then define the coordinate t so that $t = 0$ on the hypersurface and (x^i, t) is the point reached by flowing from $(x^i, 0)$ for parameter t. Then in these coordinates, $X = \partial/\partial t$ and we can explicitly compute $\mathcal{L}_X T = \partial T/\partial t$.

• Therefore, in this coordinate system, the Lie derivative commutes with contraction and obeys the Leibniz rule

$$\mathcal{L}_X(S \otimes T) = (\mathcal{L}_X S) \otimes T + S \otimes \mathcal{L}_X T$$

It also clearly obeys

$$\mathcal{L}_X(f) = X(f), \quad \mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

Since these results are tensorial, they hold in all coordinates.

• Applying the Leibniz rule gives the Lie derivative of a one-form,

$$(\mathcal{L}_X \omega)_\mu = X^\nu \partial_\nu \omega_\mu + \omega_\nu \partial_\mu X^\nu$$

Note the sign of the second term. Intuitively, a flow that slows down into a "traffic jam" makes vectors smaller, but one-forms bigger. The expression for a general tensor is similar,

$$\mathcal{L}_X T^{\mu_1 \cdots}{}_{\nu_1 \cdots} = X^\sigma \partial_\sigma T^{\mu_1 \cdots}{}_\nu \cdots - (\partial_\lambda X^{\mu_1}) T^{\lambda \cdots}_{\nu_1 \cdots} - \ldots + \left(\partial_{\nu_1} X^\lambda\right) T^{\mu_1 \cdots}_{\lambda \cdots} + \ldots$$

That is, we have the intuitive $(X \cdot \partial)T$ term, along with a $(\partial X) \cdot T$ for each index on T.

• The Lie derivative obeys the identity

$$\mathcal{L}_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$$

For scalars, it follows by the definition of the commutator; for vectors, it follows from the Jacobi identity. Using the same method as above, we can show it holds for one-forms, and since both sides obey the Leibniz rule it holds for all tensors.

Now we see how the Lie derivative interacts with our other operations.

• For a torsion-free connection, we may replace all partial derivatives in the equations above with covariant derivatives, as all the extra terms produced cancel. This gives a totally coordinate-free definition of the Lie derivative.

• The Lie derivative of the metric is

$$(\mathcal{L}_X g)_{\mu\nu} = X^\rho \nabla_\rho g_{\mu\nu} + g_{\mu\rho} \nabla_\nu X^\rho + g_{\rho\nu} \nabla_\mu X^\rho = \nabla_\mu X_\nu + \nabla_\nu X_\mu$$

If ϕ_t is a one-parameter group of isometries of g, then $\mathcal{L}_X g = 0$ and we say X is a Killing vector field. Then Killing vectors obey the Killing equation

$$\nabla_a X_b + \nabla_b X_a = 0$$

Given a Killing vector X, we may choose coordinates so that $X = \partial/\partial t$ as above, which implies the metric components are independent of t.

• Let X^a be a Killing vector and let V^a be the tangent vector for an affinely-parametrized geodesic. Then

$$\frac{d}{d\tau}(X_a V^a) = V(X_a V^a) = \nabla_V (X_a V^a) = V^a V^b \nabla_b X_a + X_a V^b \nabla_b V^a$$

The first term vanishes by Killing's equation and the second vanishes by the geodesic equation. Therefore, Killing vectors yield conserved quantities.

• Finally, given a symmetric conserved energy-momentum tensor T_{ab} and a Killing vector X_a, we have a conserved current

$$J^a = T^a{}_b X^b, \quad \nabla_a J^a = 0$$

That is, given a Killing vector, covariantly conserved tensors yield conserved currents. Furthermore, given a conserved current and a timelike Killing vector, we can identify a conserved charge, i.e. a quantity that is constant on a family of spacelike hypersurfaces.

• It can also be shown that

$$\nabla_\mu \nabla_\sigma K^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu} K^\nu$$

and contracting this identity gives

$$\nabla_\mu \nabla_\sigma K^\mu = R_{\sigma\nu} K^\nu$$

Applying the Bianchi identity and Killing's equation, we have

$$K^\lambda \nabla_\lambda R = 0$$

That is, the Ricci scalar does not change along a Killing vector field. This is another reflection of the fact that geometry is invariant along a Killing vector field.

4.3 Maximally Symmetric Spaces

Next, we investigate spacetimes that are as symmetric as possible.

• Clearly, $\mathbb{R}^n$ is maximally symmetric. It has n translational symmetries and $n(n-1)/2$ rotational symmetries, for a total of $n(n+1)/2$ independent Killing vectors.

• Since one can check if a vector field is Killing at a point using only local information, this should remain the maximum possible number of Killing vectors for curved spacetimes. We say a spacetime is maximally symmetric if it has this number.

• For example, Minkowski space is maximally symmetric, though some of the rotations become boosts. The sphere S^n is also maximally symmetric; embedding it in $\mathbb{R}^{n+1}$, the symmetries are the $n(n+1)/2$ rotations in $n+1$ dimensions. Note that for a fixed point p on the sphere, all but n of these rotations fix p, so these n rotations of $\mathbb{R}^{n+1}$ act like translations locally.

• Intuitively, the curvature in a maximally symmetric spacetime must be homogeneous and isotropic. This implies that, if we go to locally inertial coordinates, the Riemann tensor must be invariant under Lorentz transformations, and hence must be built out of the Minkowski metric and the Levi-Civita tensor.

• The only possibility that has the appropriate symmetries is

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} \propto g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}$$

since $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ in this frame. Since the expression is tensorial,

$$R_{abcd} = \frac{R}{n(n-1)} \left(g_{ac} g_{bd} - g_{ad} g_{bc} \right)$$

Conversely, if the Riemann tensor has this form, the space is maximally symmetric.

• We see a maximally symmetric space is specified by its dimension, signature, R, and possibly discrete global topological information.

Example. Consider two-dimensional maximally symmetric spaces in Euclidean signature; since the Riemann tensor has only one component the only condition is that the Ricci scalar be constant. For positive and zero R, we get S^2 and $\mathbb{R}^2$ respectively.

For negative R, we get a hyperboloid, which cannot be embedded isometrically into $\mathbb{R}^3$. It can be embedded as a hyperboloid in three-dimensional Minkowski space, with signature

$(-++)$. Alternatively, it can be represented by the Poincare half plane, the set of points (x, y) with $y > 0$ and metric

$$ds^2 = \frac{a^2}{y^2}\left(dx^2 + dy^2\right)$$

Direct computation shows that $R = -2/a^2$, and geodesics are semicircles centered on the x-axis. Also note that the space does not have a boundary, which would contradict homogeneity, as the x-axis is an infinite distance away.

Note. We've been a little hasty above, because there is a distinction between requiring local or global existence of $n(n+1)/2$ Killing vectors. We only need the former for our formula for the Riemann tensor to hold, but then there is a larger variety of maximally symmetric spaces, obtained by quotienting the sphere, plane, or hyperboloid by finite groups. For example, we can quotient $\mathbb{R}^2$ by $\mathbb{Z}^2$ to get the torus, but then the rotation Killing vector is not globally defined.

The quotienting is not completely arbitrary, as the Gauss-Bonnet theorem relates local geometry with global topology. It states that for a two-dimensional compact boundaryless orientable manifold,

$$\chi(M) = \frac{1}{4\pi}\int_M R\sqrt{|g|}d^n x$$

where χ is the Euler characteristic, which in two dimensions satisfies

$$\chi(M) = 2(1-g)$$

where g is the genus of the surface. For example, we can't quotient the sphere to get a torus.

We now consider maximally symmetric spacetimes, in Lorentzian signature.

• The maximally symmetric spacetime with $R = 0$ is simply Minkowski space, at least locally. The spacetimes with $R > 0$ and $R < 0$ are de Sitter space and anti-de Sitter (AdS) space respectively.

• We construct de Sitter space by embedding it as a hyperboloid in five-dimensional Minkowski space,

$$ds_5^2 = -du^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2, \quad -u^2 + x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = \alpha^2$$

We define coordinates $\{t, \chi, \theta, \phi\}$ by an analogue of hyperspherical coordinates,

$$u = \alpha\sinh(t/\alpha), \quad w = \alpha\cosh(t/\alpha)\cos\chi, \quad x = \alpha\cosh(t/\alpha)\sin\chi\cos\theta$$
$$y = \alpha\cosh(t/\alpha)\sin\chi\sin\theta\cos\phi, \quad z = \alpha\cosh(t/\alpha)\sin\chi\sin\theta\sin\phi$$

Then the metric on the hyperboloid is

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha^2\cosh^2(t/\alpha)\left(d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega^2\right), \quad d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$$

Therefore, in these coordinates, de Sitter space describes a spatial sphere S^3 that initially shrinks, hitting a minimum size at $t = 0$, then expands again.

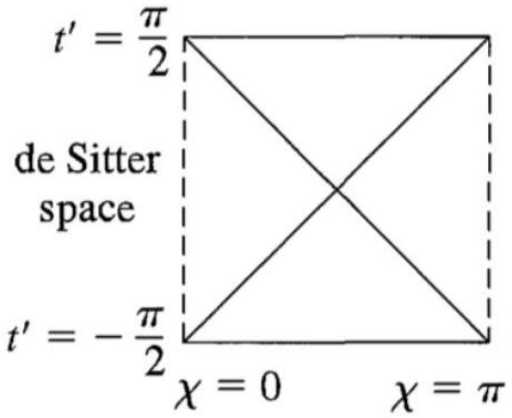
• One can check that these coordinates cover the entire manifold, since geodesics never terminate in finite affine parameter. The topology of de Sitter space is thus $\mathbb{R} \times S^3$.

• It is simple to find the conformal diagram; by substituting $\cosh(t/\alpha) = 1/\cos(t')$, we have

$$ds^2 = \frac{\alpha^2}{\cos^2(t')}d\bar{s}^2, \quad d\bar{s}^2 = -dt'^2 + d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega^2$$

Hence de Sitter space is conformally related to the Einstein static universe with conformal factor $\alpha/\cos(t')$. Now, the range of the new time coordinate is $t \in (-\pi/2, \pi/2)$, while $\chi \in [0, \pi]$, as is true for all hyperspherical coordinates except for the final one, $\phi \in [0, 2\pi]$.

• Thus the conformal diagram of de Sitter space is a square, shown below.



Note that the left and right edge of the square do not represent spatial infinity; they are simply the North and South poles of the S^3, and lie a finite distance away in de Sitter space. All other points on the diagram are copies of S^2.

• AdS space can be constructed similarly. We let

$$ds_5^2 = -du^2 - dv^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad -u^2 - v^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -\alpha^2$$

and again take the analogue of hyperspherical coordinates $\{t', \rho, \theta, \phi\}$ by

$$u = \alpha \sin t' \cosh \rho, \quad v = \alpha \cos t' \cosh \rho, \quad x = \alpha \sinh \rho \cos \theta$$
$$y = \alpha \sinh \rho \sin \theta \cos \phi, \quad z = \alpha \sinh \rho \sin \theta \sin \phi$$

Then the metric on the hyperboloid is

$$ds^2 = \alpha^2 \left(-\cosh^2 \rho dt'^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega^2 \right)$$

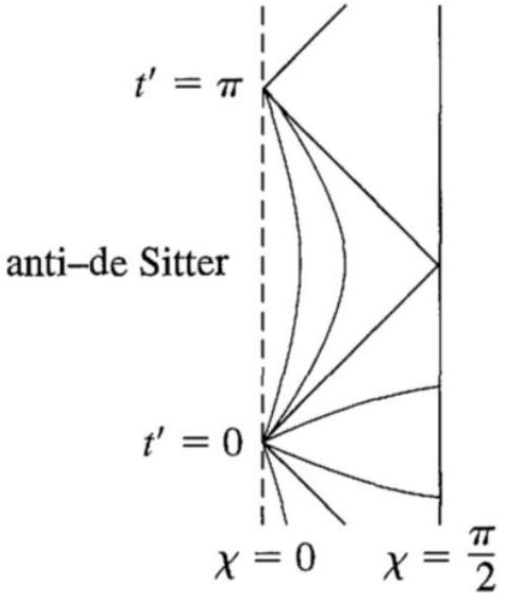
• Note that t' is a timelike coordinate, but it is also periodic, indicating the existence of closed timelike curves. To fix this, we recall that we've only constructed AdS space locally; we define the true AdS space by passing to the universal cover, allowing t' to range from $-\infty$ to ∞, so that our current embedding is merely a quotient.

• Another way to picture the quotiented AdS space in $1+1$ dimensions is as a hyperboloid, where the direction wrapping radially around the hyperboloid is the timelike direction.

• To get the conformal diagram, we define $\cosh \rho = 1/\cos \chi$ to find

$$ds^2 = \frac{\alpha^2}{\cos^2 \chi} d\bar{s}^2$$

The axes on the conformal diagram are $\chi \in [0, \pi/2)$ and $t' \in (-\infty, \infty)$, as shown.



Since χ only goes up to $\pi/2$, AdS space is mapped onto only half of the Einstein static universe; the spatial slices are hemispheres. Spatial infinity at $\chi = \pi/2$ has the topology of S^2 and indicates the initial value problem is not well-defined, as information can come from spatial infinity.

Finally, we relate these spaces to cosmology.

• By isotropy, the Einstein tensor is proportional to $g_{\mu\nu}$, and the Einstein field equation is

$$T_{\mu\nu} = -\frac{3}{8\pi G}\frac{R}{n(n-1)}g_{\mu\nu}$$

This corresponds to an FRW spacetime dominated by vacuum energy.

• In particular, it can be shown that de Sitter space corresponds to an FRW universe with $k = 0$ and exponential scale factor; the apparent discrepancy in the behavior of the scale factor is because the FRW coordinates only cover half of de Sitter space. Locally, it is a good model for our universe during the era of inflation and the far future.

• By contrast, AdS space corresponds to an open universe with $R > 0$. It is unrealistic, but interesting for theoretical reasons.

Note. These spaces may also be understood as coset spaces. As review, let a Lie group G act transitively on a set $\mathcal{M}$. Then if H is the stabilizer of a point in $\mathcal{M}$, then $\mathcal{M} \cong G/H$ by the orbit-stabilizer theorem. Now let $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}$. If $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{h}$, then $\mathcal{M}$ is a symmetric space.

This idea may also be used in reverse. For example, a person living on the surface of the Earth observes the symmetry group $SO(2)$. If the entire Earth is assumed to be symmetric, then $\mathcal{M} \cong G/SO(2)$ for some Lie group G, which must be three-dimensional to make $\mathcal{M}$ two-dimensional. The two possibilities $G = E(2)$ and $G = SO(3)$ lead to a flat Earth and a sphere respectively.

Similarly, we observe that space locally has symmetry group $SO(3)$, so assuming spatial homogeneity, $\mathcal{M} = G/SO(3)$ where G is six-dimensional. The three possibilities are $G = E(3)$, $G = SO(4)$, and $SO(3,1)$, which correspond to Euclidean, spherical, and hyperbolic space. Note that the appearance of the Lorentz group here has nothing to do with relativity.

Finally, in the cosmological context, space locally has symmetry group $SO(3,1)$. If we assume spacetime homogeneity, then we need to find a ten-dimensional group G. The three possibilities are

$$E(3,1), \quad SO(4,1), \quad SO(3,2)$$

where $E(3,1)$ is just the Poincare group. These correspond to Minkowski, de Sitter, and anti de Sitter spacetime, respectively. However, the ordinary cosmological principle only assumes homogeneity in space, leading to the more general FLRW spacetimes. Here we have additionally assumed homogeneity in time (the perfect cosmological principle), which is why the result is not realistic.

4.4 Differential Forms

We quickly review the basics of differential forms and set conventions (distinct from those in the notes on Geometry and Topology), before moving on to new structures built from differential forms that require a metric or connection.

• The wedge product of a p-form X and a q-form Y is the $(p+q)$-form

$$(X \wedge Y)_{a_1 \dots a_p b_1 \dots b_q} = \frac{(p+q)!}{p!q!} X_{[a_1 \dots a_p} Y_{b_1 \dots b_q]}$$

Then we have $X \wedge Y = (-1)^{pq} Y \wedge X$ and the wedge product is associative. While the coefficients here look a bit nasty, they ensure calculations in terms of wedge products are nice.

• Given a basis of one-forms $\{f^\mu\}$, a p-form X may be expanded in components as

$$X = \frac{1}{p!} X_{\mu_1 \dots \mu_p} f^{\mu_1} \wedge \dots \wedge f^{\mu_p}$$

• The exterior derivative of a p-form X is

$$(dX)_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} = (p+1) \partial_{[\mu_1} X_{\mu_2 \dots \mu_{p+1}]}$$

where the components are taken in the dual basis of the coordinate basis $\{\partial_\mu\}$. This definition is tensorial; the antisymmetrization cancels the extra terms by the symmetry of mixed partials.

• In terms of wedge products, d is " $dx^\mu \wedge \partial_\mu$ " where ∂_μ acts on coefficients, with no additional constants. For example, $d(ydx) = dy \wedge dx$.

• For a torsion-free connection, we may replace the partial derivatives by covariant derivatives,

$$(dX)_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} = (p+1) \nabla_{[\mu_1} X_{\mu_2 \dots \mu_{p+1}]}$$

where the extra terms cancel by antisymmetry. Alternatively, when the connection is torsionfree, the covariant derivative reduces to the partial derivative in normal coordinates. Then this equation holds in normal coordinates, so it holds in all coordinates.

• The exterior derivative obeys the properties

$$d(dX) = 0, \quad d(X \wedge Y) = (dX) \wedge Y + (-1)^p X \wedge dY, \quad d(\phi^* X) = \phi^* (dX)$$

for a p-form X, where the first is by the symmetry of mixed partials and the second is by anticommuting the derivative through p indices. The last fact can be proven by induction.

• The results above imply

$$\mathcal{L}_V (dX) = d(\mathcal{L}_V X)$$

Also note that since $\mathcal{L}$ commutes with tensor products, and the wedge product is just a tensor product, $\mathcal{L}$ satisfies the Leibniz rule

$$\mathcal{L}_V (X \wedge Y) = \mathcal{L}_V X \wedge Y + X \wedge \mathcal{L}_V Y$$

• We say a form X is closed if $dX = 0$, and exact if $X = dY$. All exact forms are closed, and the Poincare lemma shows all closed forms are locally exact.

• We define $i_V X$ to be the result of contracting V with the first index of X,

$$(i_V X)_{\mu_2 \dots \mu_p} = V^{\mu_1} X_{\mu_1 \dots \mu_p}$$

which implies that, like the exterior derivative, it satisfies a graded Leibniz rule

$$i_V(X \wedge Y) = (i_V X) \wedge Y + (-1)^p X \wedge i_V Y$$

This can be used to compute in terms of wedge products. For example, letting $V = \partial_y$,

$$i_V(dx \wedge dy) = i_V(dx) \wedge dy - dx \wedge i_V(dy) = V(dx)dy - V(dy)dx = -dx$$

• Cartan's formula states that

$$\mathcal{L}_V X = (di_V + i_V d)\, X$$

It can be proven by induction, by noting that both sides are linear and obey the ungraded Leibniz rule.

4.5 Tetrads

Next, we introduce tetrads, a useful computational tool.

• An orthonormal basis of vector fields $\left\{e^a_\mu\right\}$, also called a tetrad or vielbein, obeys

$$g_{ab} e^a_\mu e^b_\nu = \eta_{\mu\nu}$$

There are two types of indices here: the Latin indices are abstract indices which are raised and lowered by the metric g_{ab}, while the Greek indices merely label which vector field we are talking about. Note that the vielbein need not form a coordinate basis; it may vary from point to point in any way.

• The dual basis $\{e^\mu_a\}$ is the set of one-forms satisfying

$$e^\mu_a e^a_\nu = \delta^\mu_\nu$$

This equation is satisfied if we define

$$e^\mu_a = \eta^{\mu\nu} \left(e_\nu\right)_a$$

Hence Greek indices are raised and lowered by the Minkowski metric.

• The dual basis vectors satisfy

$$\eta_{\mu\nu} e^\mu_a e^\nu_b = g_{ab}, \quad e^\mu_a e^b_\mu = \delta^b_a$$

To show the first result, contract both sides by e^b_ρ. The second follows as a corollary of the first. The upshot is that the two types of indices behave exactly as we would naively expect.

• We can write tensor components in the coordinate basis in the tetrad basis by raising and lowering with the vielbein, e.g.

$$V^a = e^a_\mu V^\mu, \quad V = V^a \partial_a = V^\mu e_\mu$$

Our first identity above is just a special case of this for the metric. We can also have tensors in mixed Latin and Greek indices.

• Note that it may be impossible to define a tetrad globally, given some desired conditions. Thus, just like for coordinates, we may need multiple tetrads each defined in a patch of the manifold.

• In special relativity, we work with only orthonormal bases, and transfer between them by Lorentz transformations. In the tetrad formalism, we have an orthonormal basis at every point, and different tetrads are related by position-dependent Lorentz transformations. Hence Lorentz symmetry is made into a local symmetry. Note that this is completely independent of coordinate transformations, which act on the Latin indices.

(finish)

4.6 Integration

First, we define orientability and the volume form.

• An n-dimensional manifold is orientable if it admits an orientation, a nowhere-vanishing n-form $\epsilon_{a_1...a_n}$. Two orientations ϵ and ϵ' are equivalent if $\epsilon' = f\epsilon$ where f is positive.

• A coordinate chart x^μ on an oriented manifold is right-handed with respect to ϵ if $\epsilon = f(x)dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$ with $f(x) > 0$. Equivalently, it is right-handed if $\epsilon(\partial_1, ..., \partial_n) > 0$.

• On an oriented manifold with a metric, the volume form or Levi-Civita tensor is defined by

$$\epsilon_{12...n} = \sqrt{|g|}$$

in any right-handed coordinate chart. This is a coordinate-independent definition, because $\sqrt{|g|}$ picks up a factor of the Jacobian on a coordinate transformation.

• In a right-handed coordinate chart, we have

$$\epsilon^{12...n} = \pm\frac{1}{\sqrt{|g|}}$$

where the lower sign applies in Lorentzian signature. To show this, note that $\epsilon_{a_1...a_n}\epsilon^{a_1...a_n} = \pm 1$ in an orthonormal basis, and this result is independent of basis.

• For the Levi-Civita connection, we have

$$\nabla_a \epsilon_{b_1...b_n} = 0$$

To show this, work in normal coordinates in p. Then the covariant derivative becomes the partial derivative, and the partial derivative vanishes because $\partial g_{\mu\nu} = 0$ so $\partial g = 0$.

• We also have the identity

$$\epsilon^{a_1...a_p c_{p+1}...c_n}\epsilon_{b_1...b_p c_{p+1}...c_n} = \pm p!(n-p)!\delta^{a_1}_{[b_1}...\delta^{a_p}_{b_p]}$$

To prove this identity, note that the left-hand side is nonzero when the a_i and b_i are all distinct, and permutations of each other. The antisymmetrized delta function accounts for this. The factor of $(n-p)$! is the number of c_i values that contribute.

• We define the Hodge dual of a p-form X as

$$(\star X)_{a_1...a_{n-p}} = \frac{1}{p!}\epsilon_{a_1...a_{n-p}b_1...b_p}X^{b_1...b_p}$$

Directly using the above identity, we have

$$\star(\star X) = \pm(-1)^{p(n-p)}X, \quad (\star d \star X)_{a_1...a_{p-1}} = \pm(-1)^{p(n-p)}\nabla^b X_{a_1...a_{p-1}b}$$

That is, preceding d with a Hodge star turns off the antisymmetrization.

• Another useful result is that for two p-forms X and Y, we have

$$(X \wedge \star Y)_{a_1 \ldots a_{2p}} = \frac{(-1)^{p(n-p)}}{p!} \epsilon_{a_1 \ldots a_{2p}} X_{b_1 \ldots b_p} Y^{b_1 \ldots b_p}$$

A useful corollary is that $X \wedge \star Y = Y \wedge \star X$.

Next, we define integration on a manifold.

• Let M be an oriented manifold of dimension n, let $\psi : \mathcal{O} \to \mathcal{U}$ be a right-handed coordinate chart with coordinate x^μ, and let X be an n-form. Then the integral of X over $\mathcal{O}$ is

$$\int_{\mathcal{O}} X = \int_{\mathcal{U}} dx^1 \ldots dx^n X_{1 \ldots n}$$

This definition is chart-independent, as the two terms pick up canceling Jacobian factors.

• More generally, we can extend this definition to all of M by breaking it into coordinate patches. Specifically, for charts $\phi_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \to \mathcal{U}_\alpha$, define a partition of unity to be a set of functions $h_\alpha : M \to [0, 1]$ so that

$$h_\alpha(p) = 0 \text{ if } p \notin \mathcal{O}_\alpha, \quad \sum_\alpha h_\alpha(p) = 1$$

Then we define

$$\int_M X = \sum_\alpha \int_{\mathcal{O}_\alpha} h_\alpha X$$

It can be shown this definition is independent of the partition of unity.

• A diffeomorphism $\phi : M \to M$ is orientation preserving if $\phi^*(\epsilon)$ is equivalent to ϵ for any orientation ϵ. Then the integral is preserved,

$$\int_M \phi^*(X) = \int_M X$$

This is easiest to see in the passive view of diffeomorphisms as coordinate transformations, in which case it's just an extension of chart-independence.

• If M has a metric g and hence a metric volume form ϵ, we define the volume of M as

$$V = \int_M \epsilon$$

Moreover, we can define the integral of a function on M by

$$\int_M f \equiv \int_M f\epsilon = \int_M d^n x \sqrt{|g|} f$$

The latter is the physicist's preferred notation, since it is more explicit, but is technically incorrect since the manifold generally can't be covered by a single chart.

• Delta functions must also be normalized to be tensorial. In coordinates, we have

$$\int_{\mathcal{U}} dx^1 \ldots dx^n f(x)\delta(x) = f(0)$$

and the right-hand side is a scalar. To write the left-hand side in terms of tensorial quantities, the function must be multiplied by $\sqrt{|g|}$, so the delta function must be divided by $\sqrt{|g|}$.

Next, we define submanifolds and state Stokes' theorem.

• Let S and M be oriented manifolds of dimensions $m < n$. A smooth map $\phi : S \to M$ is an embedding if it is injective, and for any $p \in S$ there is a neighborhood $\mathcal{O}$ so that $\phi^{-1} : \phi[\mathcal{O}] \to S$ is smooth. Then we say $\phi[S]$ is an embedded submanifold of M.

• We will refer to embedded submanifolds as simply submanifolds. Then a hypersurface is a submanifold of dimension $n - 1$.

• If $\phi[S]$ is an m-dimensional submanifold of M and X is an m-form on M, then the integral of X over $\phi[S]$ is defined as

$$\int_{\phi[S]} X = \int_S \phi^*(X)$$

• A manifold with boundary M is like a manifold, but the charts are maps $\phi_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \to \mathcal{U}_\alpha$ where

$$\mathcal{U}_\alpha \text{ is an open set of } \{(x_1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n | x_1 \leq 0\}$$

The boundary ∂M is the set of points for which $x^1 = 0$. Then ∂M is a submanifold of M. If M is oriented, the orientation of ∂M is fixed by saying that $(x^2, ..., x^n)$ is a right-handed chart on ∂M when $(x^1, ..., x^n)$ is a right-handed chart on M.

• Stokes' theorem states that

$$\int_N dX = \int_{\partial N} X$$

where ∂N is regarded as a submanifold of N. Most commonly, this theorem is used when N is a region of a larger manifold M, so that ∂N is a hypersurface in M.

• If we are dealing with fields on spacetime that fall off at infinity, then the right-hand side in Stokes' theorem vanishes. In particular, if X can be written in terms of wedge products, this gives an integration by parts formula for differential forms, which has extra signs.

Finally, we specialize to hypersurfaces.

• We say $X \in T_p(M)$ is tangent to $\phi[S]$ at p if X is the tangent vector at p of a curve that lies in $\phi[S]$. We say a one-form n is normal to $\phi[S]$ if $n(X) = 0$ for any vector X tangent to $\phi[S]$. Note that this definition does not require a metric.

• In the case of a hypersurface, the tangent space has dimension $n - 1$, so the vector space of normals has dimension 1.

• If the manifold has a metric, we can calculate the norm of the normal one-forms using the inverse metric. We say a hypersurface on a Lorentzian manifold is

$$\begin{cases} \text{timelike} \\ \text{spacelike if the normal vectors are everywhere} \\ \text{null} \end{cases} \begin{cases} \text{spacelike} \\ \text{timelike} \\ \text{null.} \end{cases}$$

• Explicitly, if M is a manifold with boundary, then its boundary ∂M has the normal one-form dx^1 by definition. We can normalize the normals by

$$n_a = \frac{(dx^1)_a}{\sqrt{\pm g^{bc} (dx^1)_b (dx^1)_c}}, \quad g^{ab} n_a n_b = \pm 1$$

whenever n_a is not null.

• Note that the above definition of n_a is still ambiguous up to an overall sign. For a spacelike hypersurface, we choose the sign so that n^a points into M. However, we need n^a to point out of M when ∂M is timelike. (This can be done smoothly, because at the crossover, when ∂M is null, n^a is tangent to ∂M.)

• With the above sign prescription, we have the divergence theorem,

$$\int_M d^n x \sqrt{|g|} \nabla_a X^a = \int_{\partial M} d^{n-1} x \sqrt{|h|} n_a X^a$$

where X^a is a vector field on M, ∇ is the Levi-Civita connection, and h_{ab} is the pullback of the metric g_{ab} to ∂M by inclusion. The integrand $n_a X^a$ makes sense because it is a scalar on M and hence can be pulled back to ∂M.

• In particular, a covariantly conserved vector $\nabla_a X^a = 0$ yields a conserved quantity. If M is bounded by hypersurfaces Σ and Σ', then

$$0 = \int_{\partial M} d^{n-1} x \sqrt{|h|} n_a X^a = \int_{\Sigma} d^{n-1} x \sqrt{|h|} n_a X^a - \int_{\Sigma'} d^{n-1} x \sqrt{|h|} n_a X^a.$$

In the context of classical field theory, this means conserved charges can be equivalently computed using any hypersurface with the same boundary. For instance, one special case of this is the Lorentz invariance of electric charge.

Note. The above results can be used to neatly rewrite electromagnetism. The action is

$$S = \int d^4 x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} F^{ab} F_{ab} + J^a A_a \right)$$

which, in terms of differential forms, is

$$S = \int -\frac{1}{2} F \wedge \star F + A \wedge \star J$$

where $F = dA$. (There is also a "theta term" $F \wedge F$, which is manifestly metric-independent, but usually discarded since it's a total derivative. As explained in the notes on Quantum Field Theory, it picks out certain topological properties of the field.) Gauge transformations take the form $A \to A + d\alpha$, where F is gauge invariant because $d^2 = 0$. The action is gauge invariant if

$$\int d\alpha \wedge \star J = \int \alpha \wedge (d \star J) = 0$$

where we "integrated by parts", which means we require the current be conserved,

$$\nabla_a J^a = 0, \quad d \star J = 0$$

The equation of motion is

$$\nabla^a F_{ab} = -J_b, \quad d \star F = \star J$$

Applying d to both sides recovers current conservation. The other two Maxwell's equations correspond to the Bianchi identity,

$$\nabla_{[a} F_{bc]} = 0, \quad dF = 0$$

which follow automatically from $F = dA$. To translate these equations to integral form, let Σ be a hypersurface in a spacetime M. Then we have

$$\int_{\partial \Sigma} \star F = \int_{\Sigma} d \star F = \int_{\Sigma} \star J = Q$$

This is a generalization of Gauss's law. The left-hand side measures the flux through $\partial \Sigma$, and the right-hand side measures the charge inside Σ. One can also define the magnetic flux through a closed surface, but this seems to vanish automatically,

$$Q_m = \int_{\partial\Sigma} F = \int_{\Sigma} dF = 0$$

However, this can be evaded with topologically nontrivial solutions.

Note. A taste of Hodge theory. In Euclidean space, let X be a one-form with corresponding vector field $\mathbf{X}$. Then the familiar vector calculus operations are

$$\nabla f = df, \quad \nabla \cdot \mathbf{X} = \star d \star X, \quad \nabla \times \mathbf{X} = \star dX. \quad \nabla^2 f = \star d \star df$$

Thus, for differential forms, d is an operation that generalizes the gradient and curl, while $\star d\star$ generalizes the divergence. We are thus motivated to define the adjoint operator to d,

$$d^\dagger = \pm(-1)^{np+n-1} \star d\star$$

where the sign is chosen to make the results below look simple. This is the adjoint in the sense that if we define an inner product on p-forms,

$$\langle \eta, \omega \rangle = \int_M \eta \wedge \star\omega$$

then "integration by parts" tells us that

$$\langle d\alpha, \omega \rangle = \left\langle \alpha, d^\dagger \omega \right\rangle$$

We can thus define a Laplacian on p-forms,

$$\triangle = \left(d + d^\dagger\right)^2 = dd^\dagger + d^\dagger d$$

where we used $d^2 = d^{\dagger 2} = 0$. Acting on functions)0 -forms), this matches with our above expression for $\nabla^2 f$. In analogy with harmonic functions, we say a harmonic form $\gamma \in \mathrm{Harm}^p(M)$ obeys

$$\Delta\gamma = 0$$

Since we have

$$\langle \gamma, \triangle\gamma \rangle = \langle d\gamma, d\gamma \rangle + \left\langle d^\dagger\gamma, d^\dagger\gamma \right\rangle = 0$$

and the inner product is positive definite, a harmonic form is both closed and co-closed, $d\gamma = 0$ and $d^\dagger\gamma = 0$. (Technically, this is stricter than the usual vector calculus notion of a harmonic function, as this would imply $df = 0$ and hence f must be constant on $\mathbb{R}^3$. The issue is that we integrated by parts above, which requires functions to fall off at infinity. Indeed, there are no harmonic functions on $\mathbb{R}^3$ that fall off at infinity.)

Now, the Hodge decomposition theorem states that any form can be uniquely decomposed as

$$\omega = d\alpha + d^\dagger\beta + \gamma$$

which generalizes Helmholtz's theorem, which states that on $\mathbb{R}^3$, a vector field that falls off at infinity can be written in terms of a divergence-free plus a curl-free part, or equivalently as a curl plus a gradient. The Hodge decomposition theorem also implies that harmonic forms (which are closed) cannot be written in the form $d\alpha$ (so they are not exact), which gives Hodge's theorem,

$$\mathrm{Harm}^p(M) \equiv H^p(M)$$

where $H^p(M)$ is a de Rham cohomology group.

4.7 Lagrangian Formulation

We now introduce Lagrangian mechanics on a Lorentzian manifold.

• For a minimally coupled real scalar field $\Phi : M \to \mathbb{R}$, the action is

$$S[\Phi] = \int_M d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}, \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{2}g^{ab}\nabla_a\Phi\nabla_b\Phi - V(\Phi)$$

In general, we allow the Lagrangian to depend on the fields and their first covariant derivatives; it must be a scalar. Note that one could also introduce non-minimal couplings such as $R\phi^2$.

• The derivation of the Euler-Lagrange equations goes as before. The divergence theorem is used to integrate by parts, and as usual we throw away surface terms, which live at spatial infinity.

• In general, the Euler-Lagrange equations read

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi} - \nabla_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\nabla_\mu\Phi\right)}\right) = 0$$

and in the case of the real scalar field we have

$$\nabla^a\nabla_a\Phi - V'(\Phi) = 0$$

as guessed before by minimal coupling.

• Alternatively, in differential form notation, the kinetic term can be written as

$$\frac{1}{2}\int d\Phi \wedge \star d\Phi$$

which leads to the differential form version of the wave operator,

$$\star d \star d\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_a\left(\sqrt{-g}g^{ab}\partial_b\Phi\right) = \nabla_a\nabla^a\Phi$$

as shown earlier.

• The Einstein-Hilbert action for general relativity is

$$S[g] = \int_M d^4x\sqrt{-g}R = \int_M R\epsilon$$

This is a reasonable guess, since R is the simplest scalar we know constructed from the Riemann tensor, and it turns out it is unique given some mild assumptions.

• We cannot use the Euler-Lagrange equations because R cannot be written in terms of the metric and its covariant derivative, which vanishes. Instead, we must vary the integral directly.

We now vary the Einstein-Hilbert action.

• Writing the integrand as $\sqrt{-g}R_{ab}g^{ab}$, there are three separate terms. By the identity

$$\delta g^{ab} = -g^{ac}g^{bd}\delta g_{cd}$$

which is familiar from linearized theory, the third term is $-\sqrt{-g}R^{ab}\delta g_{ab}$.

• We would like to write the first two terms as something multiplied by δg_{ab}. We begin with the metric determinant. Varying the identity

$$\log\det M = \operatorname{tr}\log M$$

by expanding $\log M$ in a Taylor series and using cyclic permutation under a trace, we have

$$\frac{\delta(\det M)}{\det M} = \operatorname{tr}\left(M^{-1}\delta M\right)$$

which implies that

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{ab}\delta g_{ab}$$

This is promising, as this gives a term like $g^{ab}R\delta g_{ab}$ in the variation, which combines with the third term to yield the Einstein tensor.

• Finally, we need to compute the variation of the Ricci tensor. We begin by varying the Christoffel symbols. Since the difference of two connections is a tensor, $\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$ are the components of a tensor $\delta\Gamma^{a}_{bc}$ and hence can be computed in normal coordinates. At first order,

$$\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}\left(\delta g_{\sigma\nu,\rho} + \delta g_{\sigma\rho,\nu} - \delta g_{\nu\rho,\sigma}\right) = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}\left(\delta g_{\sigma\nu;\rho} + \delta g_{\sigma\rho;\nu} - \delta g_{\nu\rho;\sigma}\right)$$

This is a tensorial expression and hence holds in all coordinate systems.

• Again working in normal components, and to first order in $\delta\Gamma$,

$$\delta R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_{\rho}\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma}\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = \nabla_{\rho}\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} - \nabla_{\sigma}\delta\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$$

which again is a tensorial expression that holds in all coordinate systems. Contracting indices, we see δR_{ab} is a total covariant derivative, so the variation of the action reduces to a surface term involving $\delta\Gamma^{a}_{bc}$. Since we assume δg_{ab} has compact support, $\delta\Gamma^{a}_{bc}$ does as well, so the contribution is zero.

• Combining our above results gives $G^{ab} = 0$, the vacuum Einstein equation. We can also reach this conclusion by the Palatini procedure, where we vary the metric and the connection independently, only requiring the connection be torsion-free. Then the variation of the metric gives $G^{ab} = 0$ for an arbitrary connection, while the variation of the connection forces it to be the Levi-Civita connection.

• The metric is symmetric, so δg_{ab} must also be symmetric; its components are not all independent. The price of treating δg_{ab} as arbitrary is that the change of the metric must actually be $\delta g_{(ab)}$. This leads to some unintuitive formal identities, as

$$\frac{\delta g_{\mu\nu}}{\delta g_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2}\left(\delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{\nu} + \delta^{\alpha}_{\nu}\delta^{\beta}_{\mu}\right), \quad \frac{\delta g_{12}}{\delta g_{12}} = \frac{1}{2}$$

In practice, we can ignore this issue, and account for it by always symmetrizing in a and b when we vary with respect to g_{ab}.

Next, we add in matter fields.

• The action for general relativity with a cosmological constant and matter fields is

$$S = \frac{1}{16\pi}\int_{M} d^4x\sqrt{-g}(R - 2\Lambda) + \int_{M} d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\text{matter}}$$

To recover the Einstein field equation, we define the energy-momentum tensor to be

$$T^{ab} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{\text{matter}}}{\delta g_{ab}}$$

which is automatically symmetric, as discussed above.

• What the above notation means is that under a variation of g_{ab},

$$\delta S_{\text{matter}} = \frac{1}{2}\int_M d^4x\sqrt{-g}T^{ab}\delta g_{ab}$$

That is, as usual, the functional derivative above refers to the total variation (which includes changes due to $\delta(\partial g)$), and we may have to integrate by parts to write it in terms of δg alone.

• In general, applying Noether's theorem to spacetime translations gives a different energymomentum tensor, which may not even be symmetric, and is ambiguous up to the addition of total derivatives to the Lagrangian. The energy-momentum tensor we have defined above is automatically symmetric and is not affected by total derivative terms, since it depends directly on the action. Thus our definition above can be viewed as a statement of which Noether energy-momentum tensor is physical in general relativity.

• Applying this definition to the real scalar field, we have

$$\delta S_{\text{matter}} = \int_M d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\nabla^a\Phi\nabla^b\Phi + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}g^{cd}\nabla_c\Phi\nabla_d\Phi - V(\Phi)\right)g^{ab}\right)\delta g_{ab}$$

where there is a sign flip from the inverse metric variation. Then we read off

$$T^{ab} = \nabla^a\Phi\nabla^b\Phi - \left(\frac{1}{2}g^{cd}\nabla_c\Phi\nabla_d\Phi + V(\Phi)\right)g^{ab}$$

4.8 Diffeomorphism and Conformal Invariance

Below we will explore some of the consequences of diffeomorphism invariance.

• The total action should be diffeomorphism invariant, $S[g,\Phi] = S\left[\phi_*(g),\phi_*(\Phi)\right]$. Moreover, the Einstein-Hilbert action is diffeomorphism invariant by itself, so the matter action S_{m} must also be diffeomorphism invariant. This is true by construction, since we have taken it to be the integral of a scalar Lagrangian.

• Next, consider the effect of an infinitesimal diffeomorphism. We have

$$\delta g_{ab} = \mathcal{L}_\xi g_{ab} = \nabla_a\xi_b + \nabla_b\xi_a, \quad \delta\Phi = \mathcal{L}_\xi\Phi$$

where, in the case of a scalar field, $\mathcal{L}_\xi\Phi = \xi^a\nabla_a\Phi$. Now suppose S_{m} is the integral of a scalar Lagrangian constructed from g, Φ, and arbitrarily many of their derivatives. Then

$$\delta S_{\text{m}} = \int_M d^4x\left(\frac{\delta S_{\text{m}}}{\delta\Phi}\delta\Phi + \frac{\delta S_{\text{m}}}{\delta g_{ab}}\delta g_{ab}\right) = 0$$

The first term vanishes on-shell; note that there is no factor of $\sqrt{-g}$ here.

• To handle the second term, we expand the definitions to find

$$\frac{\delta S_{\text{m}}}{\delta g_{ab}}\delta g_{ab} = \frac{\sqrt{-g}}{2}T^{ab}\left(\nabla_a\xi_b + \nabla_b\xi_a\right)$$

The two terms in parentheses are equal by the symmetry of T^{ab}. Moreover, the appearance of the $\sqrt{-g}$ allows us to integrate by parts, moving the covariant derivative onto T^{ab}. Since ξ_a is arbitrary, we conclude $\nabla_a T^{ab} = 0$. An identical procedure applied to the Einstein-Hilbert action gives the contracted Bianchi identity $\nabla_a G^{ab} = 0$.

Now consider conformal transformations, as introduced in the notes on String Theory.

• Conformal transformations are equivalent to a special kind of diffeomorphism, composed with a Weyl transformation. The variation of the matter action under a conformal transformation is

$$\delta S_{\mathrm{m}} = \int\limits_M d^4x \left(\frac{\delta S_{\mathrm{m}}}{\delta \Phi} \left(\delta^d \Phi + \delta^w \Phi \right) + \frac{\delta S_{\mathrm{m}}}{\delta g_{ab}} \left(\delta^d g_{ab} + \delta^w g_{ab} \right) \right)$$

We treat these four terms very explicitly, as many books do not display them all.

• We name the terms δS_1 through δS_4. Then the following set of facts hold.

• By the definition of a Weyl transformation, $\delta^w g_{ab} = \omega(x) g_{ab}$.

• We always have $\delta S_1 + \delta S_3 = 0$ by diffeomorphism invariance, which should hold in any reasonable theory.

• If the theory is conformally invariant, then $\delta S_{\mathrm{m}} = 0$ off shell.

• If the theory is Weyl invariant, then we have $\delta S_2 + \delta S_4 = 0$ off shell. Weyl invariance implies conformal invariance but not vice versa, because $\omega(x)$ is arbitrary for a Weyl transformation but not for a conformal transformation. However, the two usually coincide.

• If the matter is on shell, then $\delta S_1 = \delta S_2 = 0$.

• If all matter fields have vanishing conformal dimension, then $\delta S_2 = 0$.

• For a Weyl invariant or conformally invariant theory, combining these results shows $\delta S_4 = 0$ on shell. For a Weyl invariant theory, this implies the trace of the stress-energy tensor vanishes on shell.

• Note that the composite of the two transformations yields the final metric $g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x)$. Hence if the metric is Minkowski, it is unchanged, and $\delta S_3 + \delta S_4 = 0$.

Note. A more direct motivation of the definition of T_{ab}. Consider a field theory on a fixed, flat spacetime background with invariance under translations ϵ^a. We may quickly derive the associated conserved quantity by the "Noether trick": we promote ϵ^a so that it has spacetime dependence. Using the notation introduced above, the variation of the action has the form

$$\delta S_{\mathrm{m}}^{\mathrm{fixed}} = \delta S_1 \propto \int d^4x T^{ab} \partial_a \epsilon_b$$

Integrating by parts and using the fact that $\epsilon(x)$ is arbitrary shows that $\partial_a T^{ab} = 0$ on shell, so it is the conserved tensor associated with translational invariance.

In this derivation, the metric is treated as a fixed background. Now we consider coupling the theory to a dynamical metric. The theory is diffeomorphism invariant, so as above,

$$\delta S_{\mathrm{m}}^{\mathrm{dynamical}} = \delta S_1 + \delta S_3 = 0$$

But this implies that

$$\int d^4x T^{ab} \partial_a \epsilon_b \propto \int d^4x \frac{\delta S_{\mathrm{m}}}{\delta g_{ab}} \delta g_{ab} \propto \int d^4x \frac{\delta S_{\mathrm{m}}}{\delta g_{ab}} \partial_a \epsilon_b$$

Hence Noether's theorem directly tells us to take $T^{ab} \propto \delta S_{\mathrm{m}} / \delta g_{ab}$.

We now turn to a closer investigation of stress-energy tensors and their special properties. For simplicity, we restrict to flat spacetime described by the Minkowski metric.

• We let $T_C^{\mu\nu}$ be the canonical stress-energy tensor, derived by translational symmetry by Noether's theorem. Then under an infinitesimal diffeomorphism,

$$\int\limits_M d^4x \frac{\delta S_{\mathrm{m}}}{\delta \Phi} \delta \Phi = \int\limits_M d^4x \left(\partial_\mu T_C^{\mu\nu} \right) \xi_\nu$$

Noting that we always have $\delta S_{\mathrm{m}} = 0$, this implies that

$$\int_M d^4x \partial_\mu \left(T_C^{\mu\nu} - T^{\mu\nu}\right) \xi_\nu = 0$$

and since ξ is arbitrary, the two definitions of the stress-energy tensor have the same divergence; hence one is conserved if and only the other is.

• However, the tensor $T_C^{\mu\nu}$ may not be symmetric. It turns out that it is possible in theories with Lorentz symmetry (or rotational symmetry in Euclidean signature) to modify it to a symmetric tensor $T_B^{\mu\nu}$ called the Belinfante tensor, where $\partial_\mu T_B^{\mu\nu} = \partial_\mu T_C^{\mu\nu}$ always.

• Next, consider a theory with dilation symmetry. Taking a single scalar field for simplicity, the corresponding conserved current is

$$j_D^\mu = T_C^{\mu\nu} x^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \Phi\right)} \Delta\Phi$$

where Δ is the scaling dimension of Φ. In this case, one can show it is possible in some theories with $d > 2$ to define yet another tensor so that

$$j_D^\mu = T_D^{\mu\nu} x^\nu, \quad \eta_{\mu\nu} T_D^{\mu\nu} = \partial_\mu j_D^\mu$$

so that $T_D^{\mu\nu}$ has the same divergence as the other stress-energy tensors, is symmetric like $T_B^{\mu\nu}$, and is traceless on-shell. If all this holds, it can be shown that the theory is conformally invariant.

• We have hence shown that in some theories, dilation symmetry is sufficient to show both conformal invariance and tracelessness of an improved stress-energy tensor on-shell. However, it is not sufficient for all theories; electromagnetism in $d = 3$ is a counterexample, as shown here. But it holds for all theories in $d = 2$ under mild technical assumptions, as shown here.

• If all matter fields have vanishing conformal dimension, then conformal invariance is equivalent to tracelessness of the energy-momentum tensor off-shell. Considering a Weyl transformation, we have $\delta S_2 + \delta S_4 = 0$ and $\delta S_2 = 0$, so $\delta S_4 = 0$. However, δS_4 is simply the integral of $\omega(x) T^a{}_a$, and hence the trace vanishes. Furthermore, it can be shown that if the energy-momentum tensor is traceless off-shell, then all matter fields can be chosen to have vanishing conformal dimension. (how?)

2 Important Details and Models in a Nutshell

2.1 Typical Gravitational Fields and Models

(подробнее - в разделе 2, про гравитацию)

2.1.1 Overview of Black Holes

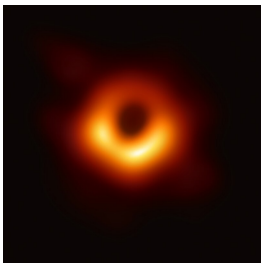
О том, что вообще происходит в модели Шварцшильда?

(абзац про качественное объяснение динамики!!!)

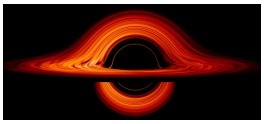
Удаленный наблюдатель будет замечать, как замедляется течение времени на падающих часах. На самом деле, это время будет замедляться так быстро, что падающая частица достигнет радиуса Шварцшильда (и окажется в абсолютном будущем для удаленного наблюдателя!) за конечное собственное время.

(про то, что это вообще такое, 2д объект в 4д мире????)

(абзац про иллюстрацию от Диалекта, это же в теории)



(сгруппирую их горизонтально)



Два вида черных дыр, потому что смотрим с разных сторон, можно представить/загуглить поворот черной дыры, так что одна картинка переходит в другую

Что мы увидим, почувствуем, и что с нами будет, если упадем в черную дыру?

(?? почему-то будем закручиваться еще.)

Об излучении Хоккинга и энтропии черных дыр

The Hawking temperature of a black hole is defined as

$$T = \frac{\hbar c}{k_B} \frac{\kappa}{2\pi}.$$

$$S = \frac{k_B c^3 A}{4G\hbar}$$

2.1.2 Typical BH Coordinates, Diagrams, Rotation, Charge

(там много важных утверждений)

Main general properties of black holes

How black holes are formed (????)

(тут идейный ответ про это. пока не знаю условия для этого?)
(абзац про то, если взять 1000 Солнц, поместить их на расстояние 1 км между друг другом, они сколлапсируют ли в черную дыру? не знаю, отдельно подумать нужно.)

О том, что внутри черной дыры

(просто комментарий, что такие-то догадки пока что. ничего там нет, да, что ли?)

Как происходит попадание в черную дыру?

(типичная тема, напишу потом там)

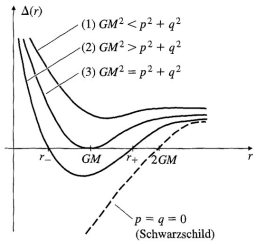
What next happens with a black hole?

(не знаю пока что, может, испаряется с излучением Хоккинга?)

On Basics of Reissner-Nordstrom's Black Holes

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \qquad r_Q^2 := \frac{GQ^2}{4\pi}.$$

Качественно функция $\Delta(r) = 1 - 2GM/r + G\left(Q^2 + P^2\right)/r^2$ в метрике:



Берется она из

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{16\pi G}R - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right),$$

where $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$. The equations of motion are:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G\left(F_{\mu\rho}F_\nu{}^\rho - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right),$$
$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0.$$

В данной оторванной от реальности модели мы считаем электромагнитное статическое вокруг звезды, что полный бред, но такая модель, другие - еще будут сложнее.

(тут абзац про разные случаи решения, качественное указание, что делать)

6.2.2 Super-Extremal Black Holes

6.2.3 Sub-Extremal Black Holes

6.2.4 Cauchy Horizons: Strong Cosmic Censorship

6.2.5 Extremal Black Holes

On Spinning Black Holes

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2}\left(dt - a\sin^2\vartheta d\varphi\right)^2 - \frac{\sin^2\vartheta}{\rho^2}\left(adt - \left(r^2 + a^2\right)d\varphi\right)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2 d\vartheta^2$$
$$\Delta = r^2 - r_g r + r_Q^2 + a^2, \quad \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\vartheta$$

Тут параметр a: $J = aM$. Это метрика Керра. Никто ее не запоминает и не выводит, потому что это как-то сложно и почти не нужно. (мб когда-то укажу вывод и в теории это выведу, пока не на таком я уровне и не актуально это.)

$$Q = -\int\limits_{\partial\Sigma} d^2x\sqrt{\gamma^{(2)}}n_\mu\sigma_\nu F^{\mu\nu}$$

$$J_T^\mu = K_\nu T^{\mu\nu},$$

$$E_T = \int\limits_\Sigma d^3x\sqrt{\gamma}n_\mu J_T^\mu$$

$$E_R = \frac{1}{4\pi G}\int\limits_{\partial\Sigma} d^2x\sqrt{\gamma^{(2)}}n_\mu\sigma_\nu\nabla^\mu K^\nu$$

This expression is the Komar integral associated with the timelike Killing vector K^μ; it can be interpreted as the total energy of a stationary spacetime.

Putting it all together, the energy of a Schwarzschild black hole is

$$E_R = \frac{1}{4\pi G}\int d\theta d\phi r^2\sin\theta\left(\frac{GM}{r^2}\right) = M$$

The ADM energy can then be written as an integral over a two-sphere at spatial infinity, as

$$E_{\text{ADM}} = \frac{1}{16\pi G}\int\limits_{\partial\Sigma} d^2x\sqrt{\gamma^{(2)}}\sigma^i\left(\partial_j h^j{}_i - \partial_i h^j{}_j\right),$$

$$J = -\frac{1}{8\pi G}\int\limits_{\partial\Sigma} d^2x\sqrt{\gamma^{(2)}}n_\mu\sigma_\nu\nabla^\mu R^\nu$$

On Basics of Kerr's model of rotating and charged black hole

Гравитационное же поле вращающегося коллапсара дается следующей аксиально-симметричной стационарной метрикой Керра [1)]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g r}{\rho^2}\right)dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \\ - \left(r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2}{\rho^2}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta d\varphi^2 + \frac{2r_g r a}{\rho^2}\sin^2\theta d\varphi dt,$$

где введены обозначения

$$\Delta = r^2 - r_g r + a^2, \quad \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta,$$

а r_g есть по-прежнему $r_g = 2mk$. Эта метрика зависит от двух постоянных параметров, m и a, смысл которых ясен из предельного вида метрики на больших расстояниях r. С точностью до членов $\sim 1/r$ имеем:

$$g_{00} \approx 1 - \frac{r_g}{r}, \quad g_{03} \approx \frac{r_g a}{r}\sin^2\theta$$

сравнение первого выражения с (100.18), а второго с (104.1) показывает, что m есть масса тела, а параметр a связан с моментом M соотношением

$$M = ma$$

(очень коротко укажу основные свойства, еще раз продумать это нужно!)

6.3.1 The Kerr Solution

6.3.2 The Global Structure

6.3.3 The Ergoregion

6.3.4 The No Hair Theorem

Об энтропии и информации в черных дырах (????)

(тут мб 1 страница будет важных идейно соображений)

О проверке теорий гравитаций по физике черных дыр (???)

(страница потом будет умных утверждений)

О диаграммах Пенроуза (????)

(по идее 1 страница будет сути про это.)

О другом типичном про черные дыры

О радиусах круговых орбит

(задача ЛЛ2)
(??? додумывать теорию нужно, чтобы понять, откуда это????!!!)

$$\frac{1}{1-r_g/r}\frac{dr}{cdt} = \frac{1}{\mathscr{E}_0}\left[\mathscr{E}_0^2 - U^2(r)\right]^{1/2},$$

где

$$U(r) := mc^2\left[\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(1+\frac{M^2}{m^2c^2r^2}\right)\right]^{1/2}$$

(еще графики какие-то, которые мало кто вообще понимает, подумаю когда-то, но это не актуально вообще сейчас.)

О сечениях захвата (???)

Для движения в том же поле определить сечение гравитационного захвата падающих на бесконечности: а) нерелятивистских, б) ультрарелятивистских частиц(Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, 1964).

а)

$$\sigma = 4\pi r_g^2\left(\frac{c}{v_\infty}\right)^2$$

б) (словами тут укажу суть, пока не понял, не думал об этом, задача ЛЛ2)

$$\sigma = \frac{27}{4}\pi r_g^2$$

9.1 The Reissner-Nordstrom Solution

$$S = \frac{1}{16\pi}\int dx\sqrt{-g}\left(R - F^{ab}F_{ab}\right), \quad F = dA$$

where the normalization of F differs from particle physics. The Einstein equation is

$$R_{ab} = \frac{1}{2}Rg_{ab} = 2\left(F_a{}^c F_{bc} - \frac{1}{4}g_{ab}F^{cd}F_{cd}\right)$$

and the Maxwell equations are the same as usual,

$$\nabla^b F_{ab} = 0, \quad dF = 0$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

with the potential

$$A = -\frac{Q}{r}dt - P\cos\theta d\phi, \quad e = \sqrt{Q^2 + P^2}$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + e^2 = (r - r_+)(r - r_-), \quad r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - e^2}$$

so that

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2}dt^2 + \frac{r^2}{\Delta}dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$$dr_* = \frac{r^2}{\Delta}dr, \quad r_* = r + \frac{1}{2\kappa_+}\log\left|\frac{r - r_+}{r_+}\right| + \frac{1}{2\kappa_-}\log\left|\frac{r - r_-}{r_-}\right| + \text{const}, \quad \kappa_\pm = \frac{r_\pm - r_\mp}{2r_\pm^2}$$

Switching to null coordinates, we have

$$u = t - r_*, \quad v = t + r_*, \quad ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2}dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2$$

• In this case, the metric is

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{M}{r}\right)^{-2}dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$$ds^2 = -H^{-2}dt^2 + H^2\left(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2\right), \quad H = 1 + \frac{M}{\rho}$$

In fact, in general we have the Majumdar-Papapetrou solution

$$ds^2 = -H(\mathbf{x})^{-2}dt^2 + H(\mathbf{x})^2\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right), \quad A = H^{-1}dt$$

where H is any function obeying $\nabla^2 H = 0$.
• Choosing

$$H = 1 + \sum_{i=1}^{N}\frac{M_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}$$

9.2 The Kerr Solution

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{2Mar\sin^2\theta}{\rho^2}(dtd\phi + d\phi dt) + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left(\left(r^2+a^2\right)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta\right) d\phi^2$$

where

$$\Delta(r) = r^2 - 2Mr + a^2, \quad \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta, \quad a = J/M$$

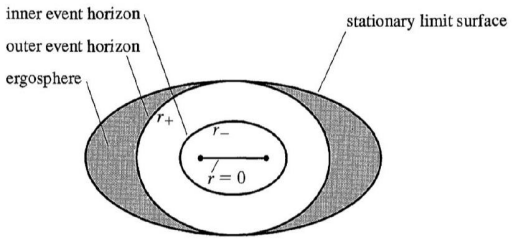
$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\left(r^2 + a^2\cos^2\theta\right)^2}{r^2+a^2}dr^2 + \left(r^2 + a^2\cos^2\theta\right) d\theta^2 + \left(r^2+a^2\right)\sin^2\theta d\phi^2$$

which is flat spacetime in ellipsoidal coordinates, related to Cartesian coordinates by

$$x = \sqrt{r^2+a^2}\sin\theta\cos\phi, \quad y = \sqrt{r^2+a^2}\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta$$

• Similarly to the RN solution, we have

$$\Delta = (r - r_+)(r - r_-), \quad r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$$



Instead, inside the ergosphere, an observer must move with the rotation of the black hole; this is an extreme example of frame dragging.

• The inner and outer event horizons are Killing horizons for

$$k + \Omega_\pm m, \quad \Omega_\pm = \frac{a}{2Mr_\pm} = \frac{a}{r_\pm^2 + a^2}$$

More generally, every point inside the ergosphere is on some Killing horizon; the Killing horizon for $k + \Omega m$ marks the boundary where it is impossible to rotate with angular velocity less than Ω. We interpret $\Omega_+ = \Omega_H$ as the angular velocity of the black hole. More explicitly, it is the angular velocity of a photon at $r = r_+$moving directly against the rotation of the black hole.

9.3 Mass, Charge, and Spin

$$Q = \frac{1}{4\pi}\lim_{r\to\infty}\int_{S_r^2} \star F, \quad P = \frac{1}{4\pi}\lim_{r\to\infty}\int_{S_r^2} F$$

where S_r^2 is a sphere of radius r. This is in agreement with our earlier definition of electric charge.

Example. The Coulomb potential is $A = -(q/r)dt$, so

$$F = -\frac{q}{r^2}dt \wedge dr$$

Taking the Hodge dual gives

$$(\star F)_{\theta\phi} = r^2 \sin\theta F^{tr} = q \sin\theta$$

where we used $g = r^2 \sin\theta$, and the charge is

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int d\theta d\phi q \sin\theta = q$$

$$J_a = -T_{ab} k^b, \quad d \star J = 0$$

$$E[\Sigma] = -\int_\Sigma \star J$$

This is conserved, i.e. if Σ and Σ' bound a spacetime region R then

$$E\left[\Sigma'\right] - E[\Sigma] = -\int_{\partial R} \star J = -\int_R d \star J = 0$$

$$(\star d \star k)_a = -\nabla^b (dk)_{ab} = -\nabla^b \nabla_a k_b + \nabla^b \nabla_b k_a = 2\nabla^b \nabla_b k_a = -2R_{ab} k^b = 8\pi J'_a$$

where we used Killing's equation and $\nabla_a \nabla_b k^c = R^c{}_{bad} k^d$, and by Einstein's equation

$$J'_a = -2\left(T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab}\right) k^b$$

• The current J' is similar to J, but we now have

$$d \star dk = 8\pi \star J'$$

so $\star J'$ is exact; also note this implies J' is conserved. We thus define the Komar mass

$$M_{\text{Komar}} = -\frac{1}{8\pi} \lim_{r\to\infty} \int_{S_r^2} \star dk$$

$$J_{\text{Komar}} = \frac{1}{16\pi} \lim_{r\to\infty} \int_{S_r^2} \star dm$$

so

$$k = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt, \quad dk = \frac{2M}{r^2} dt \wedge dr, \quad \star dk = -2M \sin\theta d\theta \wedge d\phi$$

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ij}\left(dx^i + N^i dt\right)\left(dx^j + N^j dt\right)$$

In terms of these variables, the Einstein-Hilbert action is

$$S = \int dt d^3x \sqrt{h} N \left(R^{(3)} + K_{ij} K^{ij} - K^2\right)$$

where $R^{(3)}$ is the Ricci scalar of h_{ij} and K^{ij} is the extrinsic curvature of a constant t surface,

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}\left(\dot{h}_{ij} - D_i N_j - D_j N_i\right)$$

and the dot denotes a t-derivative.

$$\pi^{ij} = \frac{\delta S}{\delta \dot{h}_{ij}} = \sqrt{h}\left(K^{ij} - K h^{ij}\right)$$

The Hamiltonian is defined as

$$H = \int d^3x \pi^{ij} \dot{h}_{ij} - \mathcal{L}$$

If we naively integrate by parts, we find that the Hamiltonian vanishes identically on-shell.

$$E_{\text{ADM}} = \frac{1}{16\pi} \lim_{r\to\infty} \int_{S_r^2} dA n_i \left(\partial_j h_{ij} - \partial_i h_{jj}\right)$$

where n^i is the unit outward normal and we restored $G = 1$.

$$P_i = \frac{1}{8\pi} \lim_{r\to\infty} \int_{S_r^2} dA \left(K_{ij} n_j - K n_i\right)$$

$$M_{\text{ADM}} = \sqrt{E_{\text{ADM}}^2 - P_i P_i}$$

9.4 Black Hole Mechanics

$$E \geq \Omega_H L$$

That is, the energy of a particle can't be too negative, or else it can't fall in.

• Next, define the irreducible mass of the black hole,

$$M_{\text{irr}}^2 = \frac{1}{2}\left(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2}\right)$$

Then it is straightforward to check that

$$\delta M_{\text{irr}} \propto \Omega_H^{-1} \delta M - \delta J \geq 0$$

Therefore, we can use the Penrose process to reduce a black hole's mass to M_{irr}, reducing its angular momentum to zero in the process. Here we are assuming that the black hole settles back down to a Kerr solution.

$$\gamma_{ij} dx^i dx^j = \left(r_+^2 + a^2 \cos^2\theta\right) d\theta^2 + \frac{\left(r_+^2 + a^2\right)^2 \sin^2\theta}{r_+^2 + a^2\cos^2\theta} d\phi^2$$

and the area is

$$A = \int \sqrt{|\gamma|} d\theta d\phi = \int \left(r_+^2 + a^2\right) \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi\left(r_+^2 + a^2\right) = 16\pi M_{\text{irr}}^2 = 8\pi\left(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2}\right)$$

Therefore, we have shown that $\delta A \geq 0$.

$$K^\mu = \partial_t, \quad u^\mu = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2}, \quad V = \sqrt{1 - 2M/r}$$

so the redshift factor indeed diverges at the horizon. The four-acceleration is

$$a_\mu = \frac{M}{r^2(1-2M/r)}\nabla_\mu r, \quad a = \frac{M}{r^2\sqrt{1-2M/r}}$$

The surface gravity is thus

$$\kappa = Va|_{r=2M} = \frac{1}{4M}$$

• By a similar computation to above, the Kerr black hole has surface gravity

$$\kappa = \frac{\sqrt{M^2-a^2}}{2M\left(M+\sqrt{M^2-a^2}\right)}$$

so the change in the mass is simply

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi}\delta A + \Omega_H \delta J$$

$$dE = TdS + \mu dJ$$

$$E \leftrightarrow M, \quad T \leftrightarrow \kappa/2\pi, \quad S \leftrightarrow A/4, \quad \mu \leftrightarrow \Omega_H.$$

$$M \geq \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$$

$$A_{\text{app}} \leq A_i \leq 8\pi\left(M_f^2 + \sqrt{M_f^4 - J_f^2}\right) \leq 16\pi M_f^2$$

2.1.3 Collapsars, dust spheres

(скоро выпишу, важная заготовка для моделей)

Что в итоге с коллапсами?

О сферически симметричных темах по Ландау (????)

(так как следует и не подумал про это еще)

Рассмотрим распространение радиальных световых сигналов. Уравнение $ds^2 = 0$ (при $\theta, \varphi = \text{const}$) дает для производной $d\tau/dR$ вдоль луча:

$$c\frac{d\tau}{dR} = \pm\left[\frac{3}{2r_g}(R - c\tau)\right]^{-1/3} = \pm\sqrt{\frac{r_g}{r}},$$

два знака отвечают двум границам светового «конуса» с вершиной в заданной мировой точке. При $r > r_g$ (точка a на рис. 20) наклон этих границ $|cd\tau/dR| < 1$, так что прямая $r = \text{const}$ (вдоль которой $cd\tau/dR = 1$) попадает внутрь конуса. В области же $r < r_g$ (точка a') имеем $|cd\tau/dR| > 1$, так что прямая $r = \text{const}$ - мировая линия неподвижной (относительно центра поля) частицы - лежит вне конуса. Обе границы конуса на конечном расстоянии пересекают линию $r = 0$, подходя к ней вертикально. Поскольку никакие причинно связанные события не могут лежать на мировой линии вне светового конуса, отсюда следует, что в области $r < r_g$ никакие частицы не могут быть неподвижными. Все вообще взаимодействия и сигналы распространяются здесь по направлению к центру, достигая его за конечный промежуток времени τ.

Об описании коллапса (???)

(лл2, подумаю потом. качественную динамику выделю!)

Этот интеграл расходится при $r \to r_g$ как $-r_g \ln(r - r_g)$. Отсюда асимптотический закон приближения r к r_g:

$$r - r_g = \text{ const } e^{-ct/r_g}.$$

Таким образом, конечная стадия приближения коллапсирующего тела к гравитационному радиусу происходит по экспоненциальному закону с очень малым характерным временем $\sim r_g/c$.

Хотя скорость наблюдаемого извне сжатия асимптотически стремится к нулю, скорость v падающих частиц, измеренная в их собственном времени, напротив, возрастает, стремясь к скорости света. Действительно, согласно определению (88.10):

$$v^2 = \left(\frac{\sqrt{-g_{11}}dr}{\sqrt{g_{00}}dt} \right)^2.$$

Взяв g_{11} и g_{00} из (100.14), а dr/dt из (102.5), найдем:

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1 - r_g/r}{1 - r_g/r_0}$$

Взяв dr/dt из (102.5), находим для собственного времени падения из точки r_0 в r:

$$\tau - \tau_0 = \frac{1}{c} \int_r^{r_0} \left(\frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r_0} \right)^{-1/2} dr.$$

Этот интеграл сходится при $r \to r_q$.

Достигнув (по собственному времени) гравитационного радиуса, тело будет продолжать сжиматься, причем все его частицы достигнут центра за конечное собственное время; момент падения каждой порции вещества в центр представляет собой истинную особенность пространственно-временной метрики. Весь процесс сжатия тела под шварцшильдовой сферой, однако, не наблюдаем из внешней системы отсчета. Моменту прохождения поверхностью тела этой сферы отвечает время $t = \infty$; можно сказать, что весь процесс коллапса под шварцшильдовой сферой происходит как бы «за временной бесконечностью» удаленного наблюдателя - крайний пример относительности хода времени. Никаких логических противоречий в этой картине, разумеется, нет. В полном соответствии с ней находится указанное выше свойство сжимающейся системы отсчета: в этой системе из-под шварцшильдовой сферы не выходят никакие сигналы. Частицы или лучи света могут пересекать эту сферу (в сопутствующей системе отсчета) лишь в одном направлении - внутрь и, раз пройдя туда, уже никогда обратно выйти не могут. Такую поверхность «одностороннего клапана» называют горизонтом событий.

(вообще, в ЛЛ2 это как-то с описанием Шварцшильда пересекается, мб это и не о коллапсах? подумаю потом)

Когда радиус шара уже близок к r_g (так что скорость падения уже близка к скорости света), этот эффект уменьшает частоту в

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} / \left(1 + \frac{v}{c}\right) \approx \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

раз. Под влиянием обоих эффектов наблюдаемая частота обращается, следовательно, в нуль при $r \to r_g$ по закону

$$\omega = \text{const} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right).$$

Таким образом, с точки зрения удаленного наблюдателя гравитационный коллапс приводит к возникновению «застывшего» тела, которое не посылает в окружающее пространство никаких сигналов и взаимодействует с внешним миром только своим статическим гравитационным полем. Такое образование называют черной дырой или коллапсаром.

О коллапсе пылевидной сферы

(сама модель в разделе с моделями решена, тут - основные формулы и идеи)
(огромнейший параграф 103 от Ландау)

Рассмотрим падение тонкого сферического слоя пылевидной материи малой массы m с полной энергией ΔE на черную дыру массы $M \gg \Delta E$.

(???(лашкевич). пока не знаю, зачем она нужна, ну есть модель, но не до неё.)

Формулы коллапсирующей поли

(тут формулы будут)
итоговая метрика:
уравнения Эйнштейна:

$$ds^2 = d\tau^2 - e^{\lambda(\tau,R)}dR^2 - r^2(\tau,R)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

$$\tau = \pm\int \frac{dr}{\sqrt{f + \frac{F}{r}}}$$

Получающуюся в результате интегрирования зависимость $r(\tau, R)$ можно представить в параметрическом виде:

$$r = \frac{F}{2f}(\operatorname{ch}\eta - 1), \quad \tau_0(R) - \tau = \frac{F}{2f^{3/2}}(\operatorname{sh}\eta - \eta) \text{ при } f > 0,$$
$$r = \frac{F}{-2f}(1 - \cos\eta), \quad \tau_0(R) - \tau = \frac{F}{2(-f)^{3/2}}(\eta - \sin\eta) \text{ при } f < 0,$$

$$r = \left(\frac{9F}{4}\right)^{1/3}[\tau_0(R) - \tau]^{2/3} \text{ при } f = 0.$$

$$8\pi k\varepsilon = \frac{F'}{r'r^2}$$

Поскольку система отсчета сопутствует материи, то каждой частице вещества отвечает определенное значение R; функция же $r(\tau, R)$ при этом значении R определяет закон движения данной частицы, а производная $\dot{r}$ есть ее радиальная скорость. Важное свойство полученного решения состоит в том, что задание входящих в него произвольных функций в интервале от 0 до некоторого R_0 полностью определяет поведение сферы этого радиуса; оно не зависит от того, каким образом заданы эти функции при $R > R_0$. Тем самым автоматически получается решение внутренней задачи для любой конечной сферы. Полная масса шара дается, согласно (100.23), интегралом

$$m = 4\pi\int_0^{r(\tau,R_0)} \varepsilon r^2 dr = 4\pi\int_0^{R_0} \varepsilon r^2 r' dR.$$

(дальше то, что я и близко не усвоил, 2 дня только на эту тему нужно)

Предельный характер метрики внутри шара при $\tau \to \tau_0(R)$ одинаков во всех трех случаях (103.8)-(103.10):

$$r \approx \left(\frac{9F}{4}\right)^{1/3} (\tau_0 - \tau)^{2/3}, \quad e^{\lambda/2} \approx \left(\frac{2F}{3}\right)^{1/3} \frac{\tau_0'}{\sqrt{1+f}} (\tau_0 - \tau)^{-1/3}$$

Мировая линия частицы, покоящейся относительно данной системы отсчета, - вертикальная прямая ($R = \text{const}$). Она начинается от $r = 0$ (точка a), пересекает сферу Шварцшильда в точке b, достигает в момент $\tau = 0$ наибольшего удаления $\left(r = r_g\left(R^2/r_g^2 + 1\right)\right)$, затем частица снова начинает падать к сфере Шварцшильда, пересекает ее в точке c и вновь достигает $r = 0$ (точка d) в момент

$$\tau = r_g \frac{\pi}{2} \left(\frac{R^2}{r_g^2} + 1\right)^{3/2}$$

О внутренней задачи для гравитационного коллапса пылевидной однородной сферы, вещество которой в начальный момент покоится.

(Задача ЛЛ2, мб напишу ее суть, такое пока что совсем не решаю.)

поставленному начальному условию можно удовлетворить решением (1) с определенным выбором постоянных a_0, τ_0. Изменив здесь для удобства определение параметра ($\eta \to \pi - \eta$), представим решение в виде

$$r = \frac{r_0}{2} \frac{\sin R}{\sin R_0}(1 + \cos\eta), \quad \tau = \frac{R_0}{2\sin R_0}(\eta + \sin\eta)$$

причем (согласно (103.12)) гравитационный радиус шара $r_g = r_0 \sin^2 R_0$. В начальный момент ($\tau = 0, \eta = 0$) вещество покоится ($\dot{r} = 0$), а $2\pi r_0 = 2\pi r\,(0, R_0)$ - начальная длина окружности шара. Падение всего вещества в центр происходит в момент $\tau = \pi r_0/2 \sin R_0$.

Время t в системе отсчета удаленного наблюдателя (шварцшильдова система) связано с собственным временем на шаре τ уравнением

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}}$$

Качественное объяснение падающей пыли

(тут описание)

масса черной дыры увеличивается ровно на энергию падающей пылевидной сферы, а скорость течения времени испытывает скачок δk на поверхности разрыва.

О падении пыли

(тут словами пишу, в чем общая идея)

(тут словами пишу, в чем выводы)

(мб еще формулы добавлю. пока их удалил отсюда, потому что это отдельная модель, пусть и очень крутая, но не типичная. Так что пока об этом в теории подумаю, тут нужно отдельно посидеть, чтобы разобрать ее. Вот дойду - тогда снова и добавлю ключевые формулы.)

О вращающейся сфере

(лашкевич предлагает решить, напишу указания, сперва посидеть в этих моделях нужно.)

2.1.4 Particles and rays in gravity

Об основных уравнениях

(!! тут как раз от Вайнберга метод, по идее одного раздела на указание хватит.)

$$\frac{A(r)}{B^2(r)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{J^2}{r^2}-\frac{1}{B(r)}=-E.$$

Поскольку мы имеем дело со световыми лучами, то $E=0$. Более того, $(dr/dt)^2$ должно обращаться в нуль в точке максимального сближения с Солнцем $r=r_0$, поэтому $J^2=\frac{r_0^2}{B(r_0)}$. Тогда уравнение движения фотона имеет вид

$$\frac{A(r)}{B^2(r)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 B^{-1}\left(r_0\right)-B^{-1}(r)=0.$$

Это хорошее начало для успешного решения задачи. Дальше (словами указание, что делать???)

Для вывода делаем так:

(напишу вот это тоже коротко.)

$$d\tau^2=B(r)dt^2-A(r)dr^2-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\varphi^2.$$

$$\frac{d^2x^\mu}{dp^2}+\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{dp}\frac{dx^\lambda}{dp}=0$$

$$r^2\frac{d\varphi}{dp}=J(\text{ const }).$$

Подставляя (?!?!?? идейно напишу) (8.4.7), (8.4.10) и (8.4.11) в (8.4.3), переписываем это последнее оставшееся уравнение движения в виде

$$0=\frac{d^2r}{dp^2}+\frac{A'(r)}{2A(r)}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2-\frac{J^2}{r^3A(r)}+\frac{B'(r)}{2A(r)B^2(r)}.$$

Угол отклонения частицы вокруг притягивающего центра

Разлагая S_r по степеням малой поправки в коэффициент при $1/r^2$, получим:

$$\Delta S_r=\Delta S_r^{(0)}-\frac{3m^2c^2r_g^2}{4M}\frac{\partial\Delta S_r^{(0)}}{\partial M}$$

где $\Delta S_r^{(0)}$ соответствует движению по несмещающемуся замкнутому эллипсу.

Пример: движение в Шварцшильде

(напишу лучше, пока из Карола)

$$-\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2+\left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+r^2\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2=-\epsilon$$

If we multiply this by $(1-2GM/r)$ and use our expressions for E and L, we obtain

$$-E^2+\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\left(\frac{L^2}{r^2}+\epsilon\right)=0.$$

This is certainly progress, since we have taken a messy system of coupled equations and obtained a single equation for $r(\lambda)$. It looks even nicer if we rewrite it as

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2+V(r)=\mathcal{E}$$

Basic set of equations (????)

$$\begin{aligned}
\frac{d^2t}{d\lambda^2}+\frac{2GM}{r(r-2GM)}\frac{dr}{d\lambda}\frac{dt}{d\lambda}&=0,\\
\frac{d^2r}{d\lambda^2}+\frac{GM}{r^3}(r-2GM)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2-\frac{GM}{r(r-2GM)}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2&\\
-(r-2GM)\left[\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2+\sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2\right]&=0,\\
\frac{d^2\theta}{d\lambda^2}+\frac{2}{r}\frac{d\theta}{d\lambda}\frac{dr}{d\lambda}-\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2&=0,\\
\frac{d^2\phi}{d\lambda^2}+\frac{2}{r}\frac{d\phi}{d\lambda}\frac{dr}{d\lambda}+2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d\theta}{d\lambda}\frac{d\phi}{d\lambda}&=0.
\end{aligned}$$

$$K^\mu=(\partial_t)^\mu=(1,0,0,0).$$

The Killing vector whose conserved quantity is the magnitude of the angular momentum is

$$R^\mu=(\partial_\phi)^\mu=(0,0,0,1).$$

In both cases it is convenient to lower the index to obtain

$$K_\mu=\left(-\left(1-\frac{2GM}{r}\right),0,0,0\right)$$

and

$$R_\mu=\left(0,0,0,r^2\sin^2\theta\right).$$

Since (5.56) implies that $\sin\theta=1$ along the geodesics of interest to us, the two conserved quantities are

$$E=-K_\mu\frac{dx^\mu}{d\lambda}=\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda}$$

О другом про движение частиц в гравитации

Об угле отклонения методом Гамильтону-Якоби

Можно решать и через Гамильтона-Якоби, но лучше не стоит, потому что там получаются интегралы, которые сложно взять даже приближенно. Из $g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2c^2 = 0$, где m - маса частицы в Шварцшильде:

$$\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\partial S}{c\partial t}\right)^2 - \left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - m^2c^2 = 0,$$

По общим правилам решения уравнения Гамильтона-Якоби ищем S в виде $S = -\mathscr{E}_0 t + M\varphi + S_r(r)$ с постоянными энергией $\mathscr{E}_0$ и моментом импульса M. Подставив, найдем производную dS_r/dr и затем:

$$S_r = \int \left[\frac{\mathscr{E}_0^2}{c^2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-2} - \left(m^2c^2+\frac{M^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\right]^{1/2} dr$$

Зависимость $r = r(t)$ дается, как известно (см. I \$47), уравнением $\partial S/\partial \mathscr{E}_0 = \text{const}$, откуда

$$ct = \frac{\mathscr{E}_0}{mc^2}\int \frac{dr}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left[\left(\frac{\mathscr{E}_0}{mc^2}\right)^2 - \left(1+\frac{M^2}{m^2c^2r^2}\right)\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\right]^{1/2}}.$$

Траектория же определяется уравнением $\partial S/\partial M = \text{const}$, откуда

$$\varphi = \int \frac{M}{r^2}\left[\frac{\mathscr{E}_0^2}{c^2} - \left(m^2c^2+\frac{M^2}{r^2}\right)\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\right]^{-1/2} dr$$

Этот интеграл приводится к эллиптическому

(а дальше неприятные выражения, так что лучше так не делать.)

Поскольку траектория определяется уравнением $\varphi + \frac{\partial S_r}{\partial M} = \text{const}$, то изменение угла φ за время одного оборота планеты по орбите есть

$$\Delta\varphi = -\frac{\partial}{\partial M}\Delta S_r$$

где ΔS_r - соответствующее изменение S_r. Разлагая S_r по степеням малой поправки в коэффициент при $1/r^2$, получим:

$$\Delta S_r = \Delta S_r^{(0)} - \frac{3m^2c^2r_g^2}{4M}\frac{\partial \Delta S_r^{(0)}}{\partial M},$$

где $\Delta S_r^{(0)}$ соответствует движению по несмещающемуся замкнутому эллипсу. Дифференцируя это соотношение по M и учитывая, что

$$-\frac{\partial}{\partial M}\Delta S_r^{(0)} = \Delta\varphi^{(0)} = 2\pi$$

найдем:

$$\Delta\varphi = 2\pi + \frac{3\pi m^2c^2r_g^2}{2M^2} = 2\pi + \frac{6\pi k^2m^2m'^2}{c^2M^2}.$$

Второй член и представляет собой искомое угловое перемещение $\delta\varphi$ ньютоновского эллипса за время одного оборота, т. е. смещение перигелия орбиты. Выражая его через длину большой полуоси a и эксцентриситет эллипса e с помощью известной формулы $M^2/\text{km}'\text{m}^2 = a\,(1-e^2)$, получим [1)]:

$$\delta\varphi = \frac{6\pi km'}{c^2 a\,(1-e^2)}$$

On Lense-Thirring Effect (????)

Определить систематическое (вековое) смещение орбиты частицы, движущейся в поле центрального тела, связанное с вращением последнего (J. Lense, H. Thirring, 1918)

(крч, задача ЛЛ2, не готов к ней пока что)

Функция Лагранжа частицы, движущейся в поле (105.19):

$$L = -mc\frac{ds}{dt} = L_0 + \delta L, \quad \delta L = mcg\mathbf{v} = \frac{2km}{c^2r^3}\left(\mathbf{M}'[\mathbf{vr}]\right)$$

(момент центрального тела обозначаем здесь посредством $\mathbf{M}'$ в отличие от момента частицы M). Отсюда функция Гамильтона (ср. I (40.7))

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + \delta\mathscr{H}, \quad \delta\mathscr{H} = \frac{2k}{c^2r^3}\left(\mathbf{M}'[\mathbf{rp}]\right).$$

Вычисляя производную $\dot{\mathbf{M}} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{p}] + [\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}]$ с помощью уравнений Гамильтона $\dot{\mathbf{r}} = \partial\mathscr{H}/\partial\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}} = -\partial\mathscr{H}/\partial\mathbf{r}$, получим:

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{2k}{c^2r^3}\left[\mathbf{M}'\mathbf{M}\right]$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{2k\left[\mathbf{M}'\mathbf{M}\right]}{c^2a^3\left(1-e^2\right)^{3/2}},$$

т.е. вектор $\mathbf{M}$ вращается вокруг оси вращения центрального тела, оставаясь неизменным по величине. Аналогичное вычисление для вектора A дает:

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{2k}{c^2r^3}\left[\mathbf{M}'\mathbf{A}\right] + \frac{6k}{c^2mr^5}\left(\mathbf{M}\mathbf{M}'\right)\left[\mathbf{r}\mathbf{M}\right].$$

Усреднение этого выражения производится аналогично тому, как это было сделано выше; при этом из соображений симметрии заранее очевидно, что усредненный вектор $\overline{\mathbf{r}/r^5}$ направлен вдоль большой полуоси эллипса, т. е. вдоль направления вектора A. Вычисление приводит к следующему выражению для векового изменения вектора $\mathbf{A}$:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = [\mathbf{\Omega}\mathbf{A}], \quad \mathbf{\Omega} = \frac{2k\mathbf{M}'}{c^2a^3\left(1-e^2\right)^{3/2}}\left\{\mathbf{n}' - 3\mathbf{n}\left(\mathbf{n}\mathbf{n}'\right)\right\}$$

О частицах в нерелятивистском пределе ОТО (???)

$$S = \int dt\left(-m + \frac{mv^2}{2} - m\phi(t,\boldsymbol{r})\right)$$

сравнивая с $S[x] = -m\int\limits_A^B ds = -m\int\limits_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau\sqrt{g_{\mu\nu}(x)\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}}$,

$$ds = \left(1 - \frac{v^2}{2} + \phi\right)dt$$

то есть

$$ds^2 = (1+2\phi)dt^2 - d\boldsymbol{r}^2,$$

то есть компоненты метрики равны $g_{00} = 1+2\phi, \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ij} = -\delta_{ij}$.

On light rays in gravity

(ну у Ванберга спишу, что еще?)

Об уравнении эйконала

В гравитационном поле это уравнение переходит в $Dk^i = 0$, или

$$\frac{dk^i}{d\lambda} + \Gamma^i_{kl} k^k k^l = 0$$

(из этих же уравнений определится и параметр λ).

(??? зачем вообще оно нужно??)

Из $k_i k^i = 0$, подставляя k через эйконал ψ как $k = \partial\psi/\partial x^i$ ψ, получаем уравнение эйконала в гравитационном поле:

$$g^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} = 0$$

(??? зачем вообще оно нужно?? оптикой так и не занимался. неужели отклонение света именно этой формулой мы считаем?)

Направление распространения луча света в геометрической оптике определяется волновым вектором, касательным к лучу. Мы можем поэтому написать четырехмерный волновой вектор в виде $k^i = dx^i/d\lambda$, где λ есть некоторый параметр, меняющийся вдоль луча. В специальной теории относительности при распространении света в пустоте волновой вектор не меняется вдоль луча, т. е. $dk^i = 0$.

Заметим, что уравнение геодезической линии $du^i + \Gamma^i_{kl} u^k dx^l = 0$ неприменимо, так как вдоль мировой линии распространения светового луча интервал $ds = 0$. (??????)

О свете методом Гамильтона-Якоби

$$g^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} = 0$$

отличающимся от уравнения Гамильтона-Якоби только тем, что в последнем надо положить $m = 0$. Поэтому траекторию луча можно получить непосредственно из формулы (101.5), положив в ней $m = 0$; при этом вместо энергии частицы $\mathscr{E}_0 = -\partial S/\partial t$ надо писать частоту света $\omega_0 = -\partial\psi/\partial t$. Введя также вместо постоянной M постоянную ρ согласно $\rho = cM/\omega_0$, получим:

$$\varphi = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}.$$

При пренебрежении релятивистскими поправками ($r_g \to 0$) это уравнение дает $r = \rho/\cos\varphi$, т.е. прямую, проходящую на расстоянии ρ от начала координат. Для исследования же релятивистских поправок поступим аналогично тому, как было сделано в предыдущем случае. Для радиальной части эйконала имеем (ср. (101.3)):

$$\psi_r(r) = \frac{\omega_0}{c} \int \sqrt{\frac{r^2}{(r - r_g)^2} - \frac{\rho^2}{r\,(r - r_g)}}\, dr.$$

$$\psi_r(r) = \frac{\omega_0}{c} \int \sqrt{1 + \frac{2r_g}{r} - \frac{\rho^2}{r^2}}\, dr.$$

$$\psi_r \approx \psi_r^{(0)} + \frac{r_g\omega_0}{c}\int \frac{dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}} = \psi_r^{(0)} + \frac{r_g\omega_0}{c}\,\mathrm{Arch}\,\frac{r}{\rho},$$

где $\psi_r^{(0)}$ отвечает классическому прямолинейному лучу. Полное изменение ψ_r при распространении луча от некоторого очень большого расстояния R до ближайшей к центру точки $r = \rho$ и затем снова на расстояние R есть

$$\Delta\psi_r = \Delta\psi_r^{(0)} + 2\frac{r_g\omega_0}{c}\,\mathrm{Arch}\,\frac{R}{\rho}.$$

Изменение полярного угла φ вдоль луча получается дифференцированием по $M = \rho\omega_0/c$:

$$\Delta\varphi = -\frac{\partial\Delta\psi_r}{\partial M} = -\frac{\partial\Delta\psi_r^{(0)}}{\partial M} + \frac{2r_gR}{\rho\sqrt{R^2-\rho^2}}$$

Наконец, переходя к пределу $R \to \infty$ и замечая, что прямолинейному лучу соответствует $\Delta\varphi = \pi$, получим:

$$\Delta\varphi = \pi + \frac{2r_g}{\rho}.$$

Это значит, что под влиянием поля тяготения световой луч искривляется: его траектория представляет собой кривую, обращенную вогнутостью к центру (луч «притягивается» к центру)!, так что угол между ее двумя асимптотами отличается от π на

$$\delta\varphi = \frac{2r_g}{\rho} = \frac{4km'}{c^2\rho};$$

другими словами, луч света, проходящий на расстоянии ρ от центра поля, отклоняется на угол $\delta\varphi$ ').

2.1.5 Stars

(2-6 pages about astrophysics)

2.2 Gravitational waves: Typical models and properties

(мб пока в отдельной записи буду писать про них, потом сюда перенесу суть. очень большая тема)

Главные формулы и характеристики волн

Уравнение движения волн в 1-м порядке

$$\Box h_i^k = 0$$

$$\psi_{\alpha\beta} = -\frac{2k}{c^4R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \mu x^\alpha x^\beta dV.$$

(??? важный абзац про гр волны в материальных средах. Лашкевич писал формулы, что скорость меньше, Хертог сказал, что скорость такая же, у меня пока нет времени разбираться.)

плотности и потоки энергии и импульса в гравитационной волне — величины второго порядка по $h_{\mu\nu}$

(важный факт. пока не умею обосновывать, доучу лшк лекции сперва)

Поляризация волн

Очень важно разобраться с поляризацией, потому что это одина из самых типичных свойств волн.

Функция Грина гравитационной волны

Тонг знает.

Уравнение движения волн в 2-м порядке

(выпишу потом у Лашкевича)

Физика гравитационных волн

(абзац, что мы почувствуем, если прямо очень сильная гр волна пройдет через человека? ну, растянется частично он и все. но еще додумать нужно это)

5.2 Gravitational Waves

We now characterize the gravitational wave solutions.

• We work in vacuum and look for plane wave solutions,

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = \mathrm{Re}\, H_{\mu\nu} e^{ik_\rho x^\rho}$$

The linearized Einstein equation gives $k_\mu k^\mu = 0$, confirming that gravitational waves move at the speed of light. Here, $H_{\mu\nu}$ is a constant complex symmetric matrix describing the polarization of the wave.

• The harmonic gauge condition yields

$$k^\nu H_{\mu\nu} = 0$$

which tells us the waves are transverse. Now note that there is additional gauge freedom by choosing any ξ_μ with $\partial^\nu \partial_\nu \xi_\mu = 0$. Taking $\xi_\mu = X_\mu e^{ik_\rho x^\rho}$ and using the transformation of $\bar{h}_{\mu\nu}$,

$$H_{\mu\nu} \to H_{\mu\nu} + i\left(k_\mu X_\nu + k_\nu X_\mu - \eta_{\mu\nu} k^\rho X_\rho\right)$$

One can show this is enough to impose the longitudinal and trace-free conditions

$$H_{0\mu} = 0, \quad H^\mu_\mu = 0$$

In this gauge, $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu}$. The combination of all the conditions above is called transverse traceless gauge.

• Now consider a wave traveling in the z-direction, so $k^\mu = \omega(1, 0, 0, 1)$ and the transverse condition gives $H_{\mu 0} + H_{\mu 3} = 0$. Combining all of our constraints gives two degrees of freedom,

$$H_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_+ & H_\times & 0 \\ 0 & H_\times & -H_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

The $H_+$and $H_\times$solutions cause stretching and shrinking in a "plus" and "cross" configuration. More conceptually, the metric perturbation has 10 degrees of freedom, of which 4 are removed by diffeomorphism invariance, and 4 are nondynamical by the Bianchi identity, leaving 2 propagating degrees of freedom.

• To show the gravitational wave has a physical effect, consider a particle at rest in Minkowski space. Then the geodesic equation is

$$\dot{u}^\alpha + \Gamma^\alpha_{00} = 0$$

Now suppose a gravitational wave passes through, so the metric becomes $g = \eta + h$ and our frame is almost inertial. The transverse traceless condition imposes $\Gamma^\alpha_{00} = 0$, so the particle has no coordinate acceleration. Indeed, one can think of this as the definition of transverse traceless gauge: its coordinates are defined by the positions of freely falling test particles.

• However, the metric is perturbed as

$$ds^2 = -dt^2 + (1 + h_+)\, dx^2 + (1 - h_+)\, dy^2 + 2h_\times dxdy + dz^2$$

which means that the proper distance between different particles changes. The change in proper distance can be measured via interferometry, as done in LIGO.

We can also justify this result within an inertial frame.

• We begin by constructing a physical inertial frame. Consider an observer moving along a geodesic. At a point p, they hold three orthogonal measuring rods. This defines an orthonormal basis $\{e_\alpha\}$ at p where

$$e^a_0 = u^a, \quad u_a e^a_i = 0, \quad g_{ab} e^a_i e^b_j = \delta_{ij}$$

where u^a is the observer's four-velocity.

• As the rulers fall, their directions are parallel transported,

$$u^b \nabla_b e^a_i = 0$$

which defines an inertial frame at every point along the geodesic. Moreover, by metric compatibility, the orthonormality of the rulers is preserved. Therefore, a change in the coordinate separation of particles in this family of frames corresponds to an increase in proper distance between them.

• Now suppose the observer releases a family of freely-falling test particles. The geodesic deviation equation is

$$u^b \nabla_b u^c \nabla_c S_a = R_{abcd} u^b u^c S^d$$

Contracting with e^a_α and using the fact that the basis is parallel transported,

$$u^b \nabla_b u^c \nabla_c \left(e^a_\alpha S_a\right) = R_{abcd} e^a_\alpha u^b u^c S^d$$

The quantity $e^a_\alpha S_a = S_\alpha$ is a scalar, giving the coordinate separation along the α direction, so the covariant derivative simplifies to

$$\frac{d^2 S_\alpha}{d\tau^2} = R_{abcd} e^a_\alpha u^b u^c e^d_\beta S^\beta$$

• Now, while S_α is a property of the observer's frame, we can evaluate the right-hand side in any frame. Thus we revert to almost inertial coordinates, working in the linearized approximation. Since the Riemann tensor is already $O(h)$, everything else on the right-hand side can be evaluated in flat spacetime. We assume the observer is at rest, $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$, so

$$\frac{d^2 S_\alpha}{d\tau^2} \approx R_{\mu 00 \nu} e^\mu_\alpha e^\nu_\beta S^\beta \approx \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial t^2} e^\mu_\alpha e^\nu_\beta S^\beta$$

• To leading order, we have $e^\mu_1 = (0,1,0,0), e^\mu_2 = (0,0,1,0)$ and $e^\mu_3 = (0,0,0,1)$, and the position of the observer is $x^\mu \approx (\tau, 0, 0, 0)$. Then since $h_{0\mu} = h_{3\mu} = 0$,

$$\frac{d^2 S_0}{d\tau^2} = \frac{d^2 S_3}{d\tau^2} = 0$$

so there is no relative acceleration of the test particles in the z-direction.

• For a purely + polarized wave, we have

$$\frac{d^2 S_1}{d\tau^2} = -\frac{1}{2}\omega^2 |H_+| \cos(\omega t - \alpha) S_1, \quad \frac{d^2 S_2}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\omega^2 |H_+| \cos(\omega \tau - \alpha) S_2, \quad \alpha = \arg H_+$$

These differential equations can be solved perturbatively. Choosing the test particles to be initially at rest, at leading order S_1 and S_2 are constant. Then the next-order correction is an oscillation, just as we found heuristically earlier.

• Taking linear combinations in analogy with circularly polarized electromagnetic waves gives gravitational waves which distort a circle of particles into a rotating ellipse. Note that the particles don't rotate around, only the wave does; the individual particles barely move at all.

Note. In Newtonian physics, gravitational waves can be described as oscillating forces that act on matter, and stretch and shrink light. LIGO has widely separated freely suspended mirrors, whose separation oscillates when a gravitational wave passes through. This leads to a common question: how can LIGO use light as a ruler, when the light is stretched too?

For simplicity, consider a "step function" gravitational wave. The point is that the moment the step function turns on, only the light currently inside the detector is stretched. After a time $2L/c$, all the light in the detector has the same wavelength as before, but the detector size remains changed, so the effect is observable. Switching back to a sinusoidal gravitational wave with wavelength λ, the phase lag effect here is negligible as long as $L \ll \lambda$.

5.3 Far-Field Limit

Next, we investigate the far-field limit for a source of gravitational waves.

• The linearized Einstein equation can be solved with the retarded Green's function, giving

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = 4 \int d\mathbf{x}' \frac{T_{\mu\nu}\left(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}'\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

where $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ is calculated with the Euclidean metric. As usual, $\mathbf{x}$ indicates the field point and x′ indicates the source point.

• Now suppose the matter is confined to a region near the origin of size d. Then for $r = |\mathbf{x}| \gg d$,

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 \approx r^2 \left(1 - (2/r)\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}'\right), \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \approx r - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}'$$

to first order in d/r, which implies

$$T_{\mu\nu}\left(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}'\right) \approx T_{\mu\nu}\left(t', \mathbf{x}'\right) + \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}' \left(\partial_0 T_{\mu\nu}\left(t', \mathbf{x}'\right)\right), \quad t' = t - r$$

• Next, let τ be the timescale on which $T_{\mu\nu}$ varies. Assuming the matter is moving nonrelativistically, we have $d \ll \tau$ and $\partial_0 T_{\mu\nu} \sim T_{\mu\nu}/\tau$, so the second term above is negligible,

$$\bar{h}_{ij}(t,\mathbf{x}) \approx \frac{4}{r}\int d\mathbf{x}' T_{ij}\left(t',\mathbf{x}'\right), \quad t' = t - r$$

We only consider the spatial components of $\bar{h}$ here, but the gauge conditions can be used to recover the others.

• Next, we evaluate the integral above. We suppress the t' since it does not depend on the integration variable $\mathbf{x}'$. We drop primes on the coordinates; since the matter is compactly supported we can ignore surface terms. We use energy-momentum conservation, which at this order is $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$. Finally, we use the trick $\delta^i_j = \partial_j x^i$ to introduce powers of x, because we want two powers of x to get a quadrupole moment.

• Applying these tricks, we have

$$\int d\mathbf{x} T^{ij} = \int d\mathbf{x} T^{ik}\partial_k x^j = -\int d\mathbf{x}\left(\partial_k T^{ik}\right)x^j = \int d\mathbf{x}\partial_0\left(T^{i0}\right)x^j$$

Next, symmetrizing on i and j and introducing another power of x gives

$$\int d\mathbf{x} T^{ij} = \frac{1}{2}\partial_0\partial_0\int d\mathbf{x} T_{00}x^i x^j$$

where we used $T^{00} = T_{00}$ to leading order.

• Finally, defining the quadrupole moment of energy as

$$I_{ij}(t) = \int d\mathbf{x} T_{00}(t,\mathbf{x})x^i x^j$$

we have

$$\bar{h}_{ij}(t,\mathbf{x}) \approx \frac{2}{r}\ddot{I}_{ij}(t-r)$$

This result is very similar to the expression for electric dipole radiation.

• To recover the other components, note that

$$\partial_0\bar{h}_{0i} = \partial_j\bar{h}_{ji}, \quad \partial_0\bar{h}_{00} = \partial_i\bar{h}_{0i}.$$

Taking the time integral is straightforward; taking the spatial derivative gives two terms, and we use the fact that we in the radiation zone, $r \gg \tau$, to pick the larger term. Then

$$\bar{h}_{0i} \approx -\frac{2\hat{x}_j}{r}\ddot{I}_{ij}(t-r), \quad \bar{h}_{00} \approx \frac{2\hat{x}_i\hat{x}_j}{r}\ddot{I}_{ij}(t-r)$$

• On the other hand, we can also calculate these terms by naively expanding our original equation, giving

$$\bar{h}_{00} \approx \frac{4E}{r}, \quad \bar{h}_{0i} \approx -\frac{4P_i}{r}$$

where E and P_i are the first and second moments of energy,

$$E = \int d\mathbf{x}' T_{00}\left(t',\mathbf{x}'\right), \quad P_i = -\int d\mathbf{x}' T_{0i}\left(t',\mathbf{x}'\right)$$

These look completely different from our expressions above. This is because they represent the lowest order contributions, while our previous expressions for $\bar{h}_{0i}$ and $\bar{h}_{00}$ are higher order in d/τ. We didn't see these terms in our higher order expressions because there we dropped integration constants.

• Using energy-momentum conservation to lowest order shows that E is constant, even though we expect gravitational waves to carry away energy. This is because the loss of energy is a higher-order effect; the term in $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ we have neglected is second order in h. Thus to treat the energy loss consistently we have to expand everything to second order.

• In the center of momentum frame where $P_i = 0$, the two leading terms together give

$$\bar{h}_{00}(t, \mathbf{x}) \approx \frac{4M}{r} + \frac{2\hat{x}_i \hat{x}_j}{r} \ddot{I}_{ij}(t - r), \quad \bar{h}_{0i}(t, \mathbf{x}) \approx -\frac{2\hat{x}_j}{r} \ddot{I}_{ij}(t - r)$$

In summary, we are working to first order in h, and assuming $r \gg \tau \gg d$ and expanding up to the lowest-order time-dependent term.

Note. Comparison with electromagnetic radiation. Radiation can be sourced by the multipole moments of electric charge. Since the monopole moment (the total charge) is conserved, the lowestorder effect is dipole radiation. Analogously, gravitational waves can be sourced by T^{00}. The monopole term is constant by conservation of energy. For the dipole term, boost symmetry yields $\mathbf{P}/E = \dot{\mathbf{X}}$ where $\mathbf{X}$ is the dipole moment of energy, so $\ddot{\mathbf{X}}$ is zero by conservation of momentum. Hence the lowest-order effect is quadrupole radiation.

Radiation can also be sourced by currents. For electromagnetism, the lowest-order term is from a changing magnetic dipole moment, but this radiation is much weaker than electric dipole radiation if the charges are moving nonrelativistically. For gravitational waves, the analogous radiation is sourced by T^{0i}, and there is no dipole term because of conservation of angular momentum. Then the lowest-order term is the analogue of magnetic quadrupole, which is much weaker than the electric quadrupole radiation we considered above.

Note. Above, we started with the linearized theory and took the far field limit. Alternatively, if we work in a frame where all the matter is moving slowly, with speed u, we could instead perform an expansion in u. The elements of the stress tensor have magnitude $T_{00} \sim u^0, T_{0i} \sim u$, and $T_{ij} \sim u^2$. At zeroth order in u, we simply recover the Newtonian limit. At first order, we get the theory of gravitoelectromagnetism. Incorporating the effect of T_{0i} gives the metric

$$ds^2 = -(1 - 2\Phi)dt^2 + 2(\mathbf{A} \cdot d\mathbf{x})dt + (1 + 2\Phi)\delta_{ij}dx^i dx^j$$

where the elements of the "gravitoelectromagnetic four-potential" are

$$\Phi = \int d\mathbf{x}' \frac{T_{00}\left(t_{\text{ret}}, \mathbf{x}'\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad A_i = \int d\mathbf{x}' \frac{T_{0i}\left(t_{\text{ret}}, \mathbf{x}'\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

Gravitoelectromagnetism is similar to actual electromagnetism, with energy and momentum corresponding to charge and current, but it isn't Lorentz invariant since it requires working in a frame where u is small. (Essentially, it is treating $T_{0\mu}$ as if it were a four-vector current J_μ.) However, it is useful for analyzing the results of precision laboratory tests of gravity, such as Gravity Probe B. (Every once in a while, a paper claims that gravitomagnetic effects remove the need for dark matter in galaxies. However, stars in galaxies rotate with tangential veloctiy $u \sim 10^{-3}$, so that gravitomagnetic effects on galactic rotation curves are of order $u^2 \sim 10^{-6}$ and thus negligible. These papers get larger estimates due to algebra and calculus errors.)

5.4 Energy of Gravitational Waves

To define the energy in gravitational waves, we need to work to second order in the metric perturbation. Setting up the perturbation theory is a bit subtle.

• We expand the metric to second order as

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + h^{(2)}_{\mu\nu}$$

At second order, the Einstein tensor is

$$G_{\mu\nu}[g] = G^{(1)}_{\mu\nu}[h] + G^{(1)}_{\mu\nu}\left[h^{(2)}\right] + G^{(2)}_{\mu\nu}[h]$$

Here, $G^{(n)}_{\mu\nu}[h']$ refers to the part of the expansion of G for $g = \eta + h'$ that is n^{th} order in h'. Then the first term is the first-order term we calculated earlier, and there are two second order terms: $G^{(1)}_{\mu\nu}\left[h^{(2)}\right]$, which is linear in the second order term, or $G^{(2)}_{\mu\nu}[h]$, which is quadratic in the first order term.

• The quadratic part can be written as

$$G^{(2)}_{\mu\nu}[h] = R^{(2)}_{\mu\nu}[h] - \frac{1}{2}R^{(1)}[h]h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R^{(2)}[h]\eta_{\mu\nu}$$

where we introduce a similar notation for the Ricci tensor and scalar; we get two terms from the Ricci scalar $g_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ because both the metric and Ricci tensor can be perturbed.

• Similarly, the quadratic part of the Ricci scalar can be expanded as

$$R^{(2)}[h] = \eta^{\mu\nu}R^{(2)}_{\mu\nu}[h] - h^{\mu\nu}R^{(1)}_{\mu\nu}[h].$$

The quadratic part of the Ricci tensor is a long expression with eight terms.

• Now suppose that no matter is present. Then at first order, the linearized Einstein equation is $G^{(1)}_{\mu\nu}[h] = 0$, or equivalently $R^{(1)}_{\mu\nu}[h] = 0$. At second order, we have

$$G^{(1)}_{\mu\nu}\left[h^{(2)}\right] = 8\pi t_{\mu\nu}[h], \quad t_{\mu\nu}[h] \equiv -\frac{1}{8\pi}G^{(2)}_{\mu\nu}[h]$$

That is, the first order term h acts as a source for the second order term $h^{(2)}$, and we can solve for $h^{(2)}$ using Green's function methods similar to before.

• Finally, assuming that the linearized Einstein equation holds, we have

$$t_{\mu\nu}[h] = -\frac{1}{8\pi}\left(R^{(2)}_{\mu\nu}[h] - \frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma}R^{(2)}_{\rho\sigma}[h]\eta_{\mu\nu}\right)$$

We would like to interpret $t_{\mu\nu}[h]$ as an energy momentum tensor for the gravitational field.

• First, we check conservation. At first order, the contracted Bianchi identity $g^{\mu\rho}\nabla_\rho G_{\mu\nu} = 0$ is

$$\partial^\mu G^{(1)}_{\mu\nu}[h] = 0$$

for arbitrary h. At second order, we have

$$\partial^\mu\left(G^{(1)}_{\mu\nu}\left[h^{(2)}\right] + G^{(2)}_{\mu\nu}[h]\right) + \text{"}hG^{(1)}[h]\text{"} = 0$$

where the third term stands for the first order changes in $g^{\mu\rho}\nabla_\rho$. The first term vanishes by the first-order contracted Bianchi identity with $h = h^{(2)}$, and the third term vanishes by the linearized Einstein equation. The remaining term is simply $\partial^\mu t_{\mu\nu}[h]$, giving the result.

• Therefore, $t_{\mu\nu}$ is a symmetric tensor that is quadratic in h, conserved if h obeys the equations of motion, and appears on the right-hand side of the second-order Einstein equation, all of which are good properties for a stress-energy tensor.

• The problem with $t_{\mu\nu}$ is that it is not gauge-invariant; this is expected, as we do not expect to have a local expression for the gravitational field energy. However, one can show that the integral of t_{00} over a surface of constant time is gauge invariant, as long as $h_{\mu\nu}$ is restricted to decay at infinity, giving a definition for the total energy of the gravitational field.

• One can use the second order Einstein equation to convert the spatial integral, which is quadratic in $h_{\mu\nu}$, into a surface integral at infinity which is linear in $h^{(2)}_{\mu\nu}$. Indeed, this works for any asymptotically flat spacetime, outside the weak-field approximation, and the result is called the ADM energy.

• The ADM energy is conserved, while a related quantity, the Bondi energy, is non-increasing in time. Its rate of change can be interpreted as the rate of energy loss in gravitational waves.

• We will instead follow a less rigorous but more intuitive procedure. For any point p, we consider a region containing it of typical coordinate radius a, and define the average of a tensor $X_{\mu\nu}$ at p by

$$\langle X_{\mu\nu}\rangle = \int_R X_{\mu\nu}(x)W(x)d^4x$$

where $W(x)$ is positive, integrates to one on R, and is zero at ∂R. We imagine this integration as taking place in Minkowski space, since corrections to this are higher-order, so it makes sense to add the integrand $X_{\mu\nu}(x)$ at different points.

• Now, by integrating by parts we have

$$\langle \partial_\mu X_{\nu\rho}\rangle = -\int_R X_{\nu\rho}\partial_\mu W(x)d^4x$$

If the components $X_{\mu\nu}$ change on the scale λ, we would naively expect the left-hand side to be $O(X/\lambda)$, but instead it is $O(X/a)$. Hence if we choose $a \gg \lambda$, the average of a total derivative is negligible, and hence we can integrate by parts,

$$\langle A\partial B\rangle = \langle \partial(AB)\rangle - \langle(\partial A)B\rangle \approx -\langle(\partial A)B\rangle$$

• Using this identity, it can be shown using the linearized Einstein field equation that

$$\left\langle \eta^{\mu\nu}R^{(2)}_{\mu\nu}[h]\right\rangle = 0$$

Then our expression for $\langle t_{\mu\nu}\rangle$ reduces to

$$\langle t_{\mu\nu}\rangle = \frac{1}{32\pi}\left\langle \partial_\mu\bar{h}_{\rho\sigma}\partial_\nu\bar{h}^{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\partial_\mu\bar{h}\partial_\nu\bar{h} - 2\partial_\sigma\bar{h}^{\rho\sigma}\partial_{(\mu}\bar{h}_{\nu)\rho}\right\rangle$$

and we can explicitly check it is gauge invariant.

• Note that the averaging region can be quite large. For example, LIGO is sensitive to waves with $\lambda \sim 3000$ km, so the averaging region is larger than the Earth.

Example. For the plane gravitational wave considered earlier, we have

$$\langle t_{\mu\nu}\rangle = \frac{1}{32\pi}\left(|H_+|^2 + |H_\times|^2\right)k_\mu k_\nu$$

where the last two terms in $\langle t_{\mu\nu}\rangle$ drop out by the gauge condition, we pick up a factor of $1/2$ from averaging a squared sinusoid, and we pick up a factor of 2 from $H^{\mu\nu}H_{\mu\nu}$.

In particular, the magnitude of the energy flux is

$$\mathcal{F} \sim \frac{\omega^2 c}{32\pi G}h^2 \sim 0.01\ \mathrm{W/m^2}$$

where we reinstated factors of c and G and used the typical parameters $h \sim 10^{-21}$ and $\omega \sim 100$ Hz. This is a large result: the difficulty of detecting gravitational waves comes not from the size of the energy flux but from the weakness of its interaction with matter. Intuitively, one can think of spacetime as being very stiff.

5.5 The Quadrupole Formula

In this section, we derive the famous quadrupole formula for the rate of energy loss due to gravitational radiation.

Note. Isotropic integrals. Consider the three-dimensional Cartesian integral

$$I_{ij} = \int d\Omega \hat{x}_i \hat{x}_j$$

By rotational symmetry, the answer must be proportional to some combination of the Levi-Civita symbol ϵ^{ijk} and Kronecker delta. Then the only possibility is $I_{ij} \propto \delta_{ij}$, and taking the trace gives

$$I_{ij} = \frac{4\pi}{3}\delta_{ij}$$

Next, consider the integral

$$I_{ijk\ell} = \int d\Omega \hat{x}_i \hat{x}_j \hat{x}_k \hat{x}_\ell$$

The Levi-Civita does not appear as it has three indices; we could use two Levi-Civitas and contract them together, but this just reduces to Kronecker deltas. Then the most general possibility is

$$I_{ijk\ell} = \alpha\delta_{ij}\delta_{k\ell} + \beta\delta_{ik}\delta_{j\ell} + \gamma\delta_{i\ell}\delta_{jk}$$

and total symmetry fixes $\alpha = \beta = \gamma$. Tracing $i = j$ and $k = \ell$ gives $\alpha = 4\pi/15$.

Next, we derive the quadrupole formula.

• The averaged energy flux across a large sphere of radius r is

$$\langle P \rangle = -\int d\Omega r^2 \langle t_{0i} \rangle \hat{x}_i$$

where we picked up a minus sign from lowering indices on t.

• Plugging in our expression for $\langle t_{\mu\nu} \rangle$ in harmonic gauge and explicitly separating spatial and temporal components,

$$\begin{aligned}\langle t_{0i} \rangle &= \frac{1}{32\pi}\left\langle \partial_0 \bar{h}_{\rho\sigma}\partial_i \bar{h}^{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\partial_0 \bar{h}\partial_i \bar{h} \right\rangle \\ &= \frac{1}{32\pi}\left\langle \partial_0 \bar{h}_{jk}\partial_i \bar{h}_{jk} - 2\partial_0 \bar{h}_{0j}\partial_i \bar{h}_{0j} + \partial_0 \bar{h}_{00}\partial_i \bar{h}_{00} - \frac{1}{2}\partial_0 \bar{h}\partial_i \bar{h} \right\rangle\end{aligned}$$

where a sign flip occurs due to the metric; we work exclusively with lowered indices from this point. The rest of the derivation is simply a matter of plugging in our earlier results.

• First, since $\bar{h}_{jk}(t, \mathbf{x}) = (2/r)\ddot{I}_{jk}(t - r)$, we have

$$\partial_0 \bar{h}_{jk} = \frac{2}{r}\dddot{I}_{jk}(t - r), \quad \partial_i \bar{h}_{jk} = \left(-\frac{2}{r}\dddot{I}_{jk}(t - r) - \frac{2}{r^2}\ddot{I}_{jk}(t - r)\right)\hat{x}_i.$$

The second term in brackets is negligible since $\tau/r \ll 1$. Then these terms contribute

$$-\frac{1}{32\pi}\int d\Omega r^2 \left\langle \partial_0 \bar{h}_{jk}\partial_i \bar{h}_{jk} \right\rangle \hat{x}_i = \frac{1}{2}\left\langle \dddot{I}_{ij}\, \dddot{I}_{ij} \right\rangle_{t-r}$$

to the power, where the average is taken over a time much larger than τ, a distance much greater than λ, and centered on the retarded time $t - r$.

• Next, we have $\bar{h}_{0j} = (-2\hat{x}_k/r)\,\ddot{I}_{jk}(t - r)$, which implies

$$\partial_0 \bar{h}_{0j} = -\frac{2\hat{x}_k}{r} \dddot{I}_{jk}(t-r), \quad \partial_i \bar{h}_{0j} \approx \frac{2\hat{x}_k}{r} \dddot{I}_{jk}(t-r)\hat{x}_i.$$

The resulting contribution is $(-1/3)\left\langle \dddot{I}_{ij} \dddot{I}_{ij} \right\rangle_{t-r}$ where we performed an isotropic integral.

• For the third term, we have $\bar{h}_{00} = 4M/r + (2\hat{x}_j\hat{x}_k/r)\,\ddot{I}_{jk}(t-r)$, so

$$\partial_0 \bar{h}_{00} = \frac{2\hat{x}_j\hat{x}_k}{r} \dddot{I}_{jk}(t-r), \quad \partial_i \bar{h}_{00} \approx -\left(\frac{4M}{r^2} - \frac{2\hat{x}_j\hat{x}_k}{r} \dddot{I}_{jk}(t-r)\right)\hat{x}_i.$$

We can ignore the $4M/r^2$ term, since it leads to a term proportional to $\left\langle \dddot{I}_{jk} \right\rangle$, which is small since it is the average of a derivative. Then the remaining term can be evaluated using the isotropic integral above.

• Similarly, for the final term we use $\bar{h} = \bar{h}_{jj} - \bar{h}_{00}$. We find four terms that contribute, though they're all of the same form as previous terms. Combining all terms together gives

$$\langle P \rangle = \frac{1}{5}\left\langle \dddot{I}_{ij} \dddot{I}_{ij} - \frac{1}{3} \dddot{I}_{ii} \ddot{I}_{jj} \right\rangle_{t-r}$$

Defining the energy quadrupole tensor as the traceless part of I_{ij},

$$Q_{ij} = I_{ij} - \frac{1}{3} I_{kk}\delta_{ij}, \quad \langle P \rangle = \frac{1}{5}\left\langle \dddot{Q}_{ij} \dddot{Q}_{ij} \right\rangle_{t-r}$$

This is the famous quadrupole formula, valid in the radiation zone of a nonrelativistic source, $r \gg \tau \gg d$.

• As an example, a spherically symmetric body has $Q_{ij} = 0$ and hence radiates no power. This is in agreement with Birkhoff's theorem.

We now estimate the energy emitted by a realistic binary system.

• Consider two stars with mass M and separation d in the nonrelativistic regime $d \gg M$. By Newtonian mechanics, we have $\omega \sim M^{1/2} d^{-3/2}$. The quadrupole tensor has components of typical size Md^2, so the third derivative is of order $Md^2\omega^3$. Applying the quadrupole formula,

$$P \sim (M/d)^5$$

This is a strong dependence; it's much easier to see gravitational waves from compact binaries.

• Usually $d \gg M$, but this is compensated by the units of c and G,

$$P \sim (M/d)^5 L_{\text{planck}}, \quad L_{\text{planck}} = \frac{c^5}{G} \approx 4 \times 10^{52}\ \text{W}$$

The luminosity of all stars in the universe is about $10^{-5} L_{\text{planck}}$, so a binary system with $M/d \sim 0.1$ would equal their power output.

• A typical star has $M/R \sim 10^{-6}$ and a typical binary star system has $d \gg R$, so they are far from detectable. On the other hand, a Schwarzschild black hole has $M/R \sim 1$, so we expect to able to see the moments before black holes merge, where $d \sim R$. Neutron stars are also very compact, so we can see NS/NS and NS/BH mergers. Of course, our Newtonian result above breaks down close to merger; in this case we must turn to numerical simulation.

• Note that since neutron stars obey the stringent TOV limit, almost all NS/NS mergers will result in black holes.

• The power lost to gravitational waves causes orbits to decay. In 1974, Hulse and Taylor detected a binary pulse, an NS/NS binary where one of the stars is a pulsar. Pulsars emit a beam of radio waves, which align with the Earth periodically; thus the change of the orbital period could be measured, agreeing with the quadrupole formula.

• For direct detection, we refer back to our expression for $\bar{h}_{ij}$, giving

$$\bar{h}_{ij} \sim \frac{Md^2\omega^2}{r} \sim \frac{M^2}{dr}$$

A signal with $M = 10M_\odot$ and d about ten times the Schwarzschild radius gives $h \sim 10^{-21}$ and $\omega \sim 100$ Hz, the general type of signal LIGO is made to detect.

• One can show that, if the frequency and rate of change of frequency of the gravitational waves can be measured, one can infer the chirp mass

$$M_{\text{chirp}} = \frac{(M_1 M_2)^{3/5}}{(M_1 + M_2)^{1/5}}$$

The amplitude of the waves can be used to deduce the distance to the source. Finally, the "ringdown" after merger only depends on the final black hole mass. In practice, a complex best-fit protocol is used to estimate these parameters.

• In 2015, LIGO made the first detection of a BH/BH merger, about a billion light years away. In 2017, LIGO detected an NS/NS merger, which was accompanied by the detection of electromagnetic radiation. These dual detections have a variety of applications, such as determining the Hubble constant.

• Sometimes people say that LIGO works because it detects $\bar{h}_{ij} \propto 1/r$, while telescopes detect intensities $I \propto 1/r^2$, so it can see further. That doesn't really make sense: the amplitudes of both gravitational and electromagnetic waves both fall as $1/r$, and the intensities both fall as $1/r^2$. LIGO's data analysis is indeed phrased in terms of amplitudes and not intensities, but that just produces an order-one improvement, not a parametric one.

Note. An estimate of LIGO's sensitivity. The fractional changes in length are of order $h \sim 10^{-21}$. We hence need to measure phase differences

$$\Delta\phi \sim k\Delta L \sim \frac{hL}{\lambda} \sim 4 \times 10^{-12}$$

As a mild oversimplification, each photon has a probability $|\Delta\phi|^2$ of being detected in the other interferometer output, so we need $N \sim 10^{25}$ photons in the apparatus to see this reliably. This corresponds to a laser power $P \sim 100$ kW. LIGO makes this easier by using a cavity where the photons bounce back and forth about 100 times, requiring only about 1/100 as much input power.

LIGO also uses a frequency modulation scheme that significantly improves on the naive interferometer scheme we described here, though we still get within a few orders of magnitude because of the amplitude-phase uncertainty principle. There is an upper bound on power because otherwise the radiation pressure, and hence fluctuations in pressure, on the mirrors would wash out the signal.

Note. The history of the theory and detection of gravitational waves is also notable. Little progress was made in the 1920s and 1930s, as most physicists turned to quantum mechanics. Because of the conceptual difficulties of general relativity, the fact that gravitational waves exit and can carry energy was not well-established until the late 1950s, and probably not accepted by Einstein himself. Attempts to detect gravitational waves began with Weber in the 1960s, with a false detection in 1969. LIGO's detection of gravitational waves in 2015 marked the culmination of a half-century of work. For more details, see Gravitational Waves and the Long Relativity Revolution and Sufficiently Advanced Technology for Gravitational Wave Detection.

Note. These days, stochastic gravitational wave backgrounds are a hot topic. These are gravitational waves with a broad spectrum, which can come from, e.g. an average over many unresolvable binaries (either galactic or cosmological), or bubble wall collisions and turbulence during first order phase transitions in the early universe. As concrete benchmarks, the

electroweak phase transition could produce gravitational waves with characteristic frequency 10^{-5} Hz, while the QCD phase transition corresponds to 10^{-7} Hz. (understand how to estimate)

Usually, these backgrounds are stationary, approximately Gaussian, isotropic, and unpolarized. As such, they are simply described by a power spectral density $S_h(f)$, which itself is often parametrized by an overall scale and a piecewise power-law frequency dependence. Of course, the hardest part of detecting such backgrounds is distinguishing them from a mismodeled noise source.

Об излучении гравитационных волн

Самые важные формулы про излучение грав волн

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{k}{45c^5}\dddot{D}^2_{\alpha\beta},$$

Тут (?????)

Это потому что

$$t^{ik} = \frac{c^4}{32\pi k} h^{n,i}_q h^{q,k}_n.$$

Эта формула следует из общей формулы псевдотензора, но не зная ее - очень проблемно дойти до нее, так что ее не получают, а просто в лучшем случае зная ответ, подгоняют вычисления, чтобы получить. Наверное, лучшие физики ее проверили много раз. (мб когда-то добавлю вывод)

The Green's Function for the Wave Equation

(скорее всего Тонг годноту написал, посмотрим)

5.3.2 An Example: Binary Systems

5.3.3 Comparison to Electromagnetism

5.3.4 Power Radiated: The Quadrupole Formula

5.3.5 Gravitational Wave Sources on the Q

Об иллюстрациях излучения волн

(слава богу такое есть, так что укажу тоже.)

Количественная оценка волн

Пример типичной гравитационной волны (?!!!)

рассмотрим два тела, которые вращаются
ее характеристики:(??)

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{32G^4 m_1^2 m_2^2 (m_1+m_2)}{5c^5 r^5}$$
$$-\frac{dr}{dt} = \frac{64G^3 m_1 m_2 (m_1+m_2)}{5c^5 r^3}$$

(??? укажу потом!)

О детектировании гравитационных волн

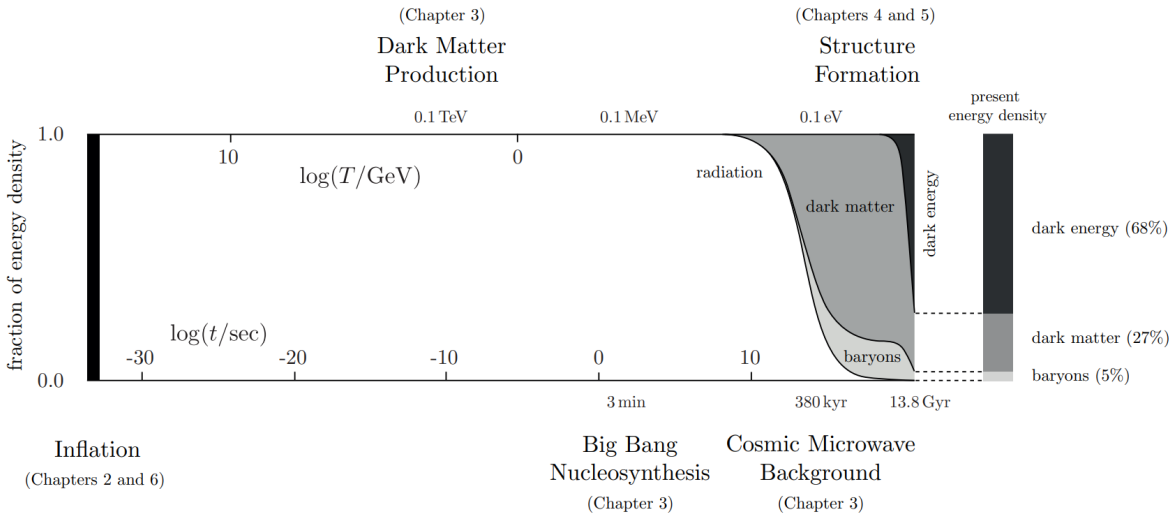
(напишу суть этого, пока в отдельной записи. типичные тоже методы есть про это)

О сильных волнах

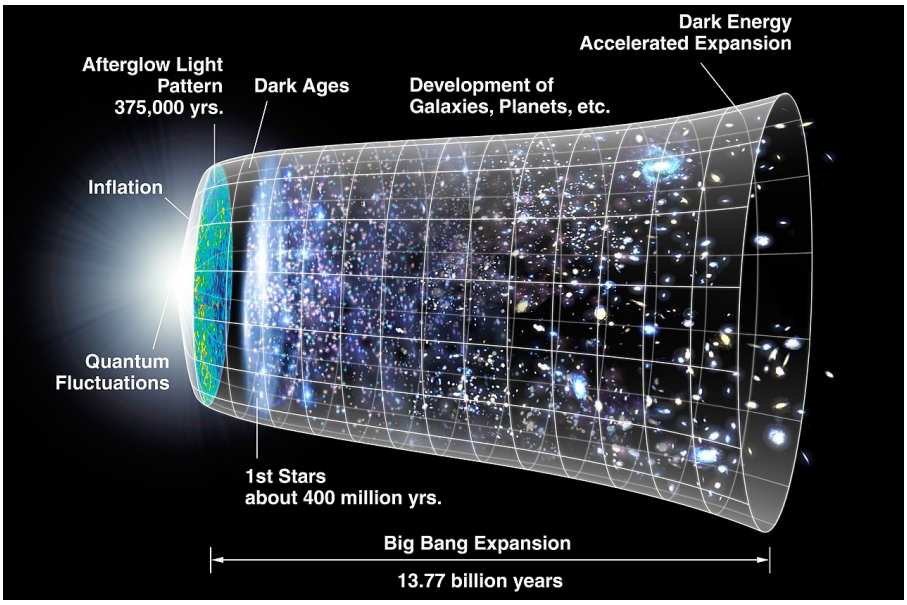
2.3 Cosmology: Typical models and important questions

2.3.1 Overview of evolution of the Universe

общая хронология



t	$\rho^{1/4}$	Event
10^{-42} s	10^{18} GeV	Inflation begins?
$10^{-32\pm6}$ s	$10^{13\pm3}$ GeV	Inflation ends, Cold Big Bang begins?
$10^{-18\pm6}$ s	$10^{6\pm3}$ GeV	Hot Big Bang begins?
10^{-10} s	100 GeV	Electroweak phase transition?
10^{-4} s	100 MeV	Quark-hadron phase transition?
10^{-2} s	10 MeV	γ, ν, e, $\bar{e}$, n, and p in thermal equilibrium
1 s	1 MeV	ν decoupling, $e\bar{e}$ annihilation.
100 s	0.1 MeV	Nucleosynthesis (BBN)
10^4 yr	1 eV	Matter-radiation equality
10^5 yr	0.1 eV	Atom formation, photon decoupling (CMB)
$\sim 10^9$ yr	10^{-3} eV	First bound structures form
Now	10^{-4} eV (2.73 K)	The present.



(??? я не уверен, насколько эта картинка хорошо описывает Вселенную, потому что вряд ли была точка одна, где все было. или была точка?)

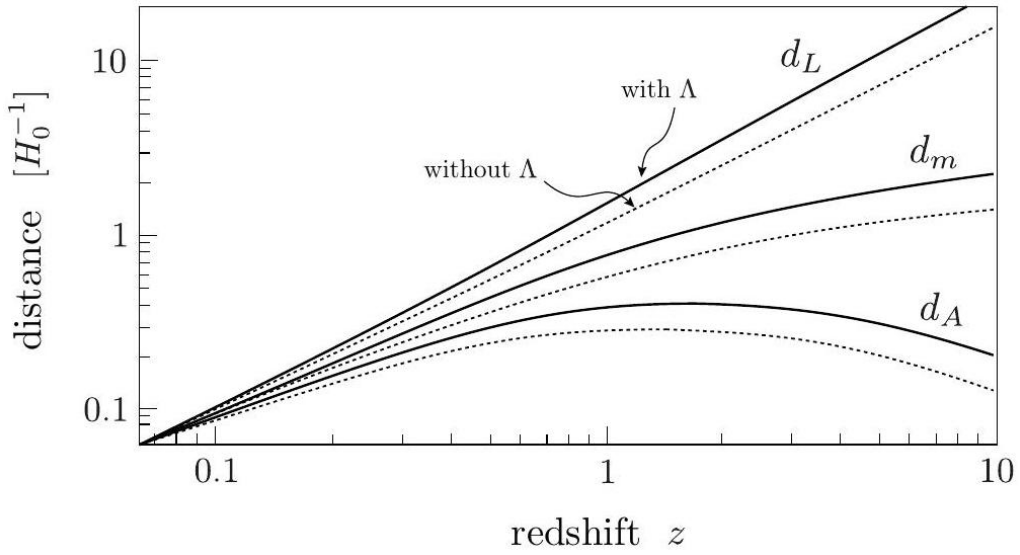
Типичные вопросы

Так почему Вселенная еще не сколлапсировала?

(пока думаю, что это науке неизвестно, но еще подумаю.)

О расстояниях и временах в космологии

О расстояниях



О метриках в космологии

Negatively (-) and positively (+) curved space:

$$\mathrm{d}\ell^2 = a^2 \left[\mathrm{d}\boldsymbol{x}^2 + k\frac{(\boldsymbol{x}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x})^2}{1-k\boldsymbol{x}^2}\right] := a^2\gamma_{ij}\ \mathrm{d}x^i\ \mathrm{d}x^j$$

$$\gamma_{ij} := \delta_{ij} + k\frac{x_i x_j}{1-k\cdot x_k x^k}, \quad \text{for} \quad k := \begin{cases} 0 & \text{Euclidean} \\ +1 & \text{spherical} \\ -1 & \text{hyperbolic} \end{cases}$$

this is from $\mathrm{d}\ell^2 = a^2\left[\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}^2 \pm \mathrm{d}u^2\right], \quad \boldsymbol{x}^2 \pm u^2 = \pm 1.$

Or in polar coordinates:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\left(\ \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right),$$

$$\mathrm{d}\ell^2 = a^2\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2\ \mathrm{d}\Omega^2\right],$$

where $\mathrm{d}\Omega^2 := \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2$.

Or by $\mathrm{d}\chi := \mathrm{d}r/\sqrt{1-kr^2}$:

$$\mathrm{d}\ell^2 = a^2\left[\ \mathrm{d}\chi^2 + S_k^2(\chi)\mathrm{d}\Omega^2\right], \qquad S_k(\chi) := \begin{cases} \mathrm{sh}\,\chi & k=-1 \\ \chi & k=0 \\ \sin\chi & k=+1 \end{cases}.$$

On metric distance $d_m = S_k(\chi)$

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\left[\mathrm{d}\chi^2 + S_k^2(\chi)\mathrm{d}\Omega^2\right],$$

$$S_k(\chi) := \begin{cases} R_0\,\mathrm{sh}\,(\chi/R_0) & k=-1 \\ \chi & k=0 \\ R_0\sin(\chi/R_0) & k=+1 \end{cases}.$$

$$\chi(z) = \int\limits_{t_1}^{t_0}\frac{\mathrm{d}t}{a(t)} = \int\limits_0^z \frac{\mathrm{d}z}{H(z)}$$

On luminosity distance d_L (??????)

$$d_L = d_m(1+z)$$

$$F = \frac{L}{4\pi\chi^2}.$$

$$F = \frac{L}{4\pi d_m^2(1+z)^2} := \frac{L}{4\pi d_L^2},$$

On angular diameter distance

$$d_A = \frac{D}{\delta\theta} = \frac{d_L}{(1+z)^2}$$

$$d_A = \frac{d_m}{1+z}.$$

because $D = a(t_1)\, S_k(\chi)\delta\theta = \frac{d_m}{1+z}\delta\theta$

(вставлю мб картинку потом)

О красном смещении z и законе Хабла $z \simeq H_0 d$ (!??!)

(пока об этом тут, а там посмотрим)

Красное смещение в астрофизике — явление, при котором длина волны электромагнитного излучения для наблюдателя увеличивается относительно длины волны излучения, испущенного источником.

Красное смещение может быть доплеровским, гравитационным и космологическим,

Обратное явление — уменьшение наблюдаемой длины волны, имеющее ту же природу, — называется синим смещением.

Redshifting of photons.

$$\lambda_0 = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}\lambda_1.$$

Since $a(t_0) > a(t_1)$, $\lambda_0 > \lambda_1$.

For classical waves

$$\Delta t_1 = a(\tau_1)\,\Delta\tau \quad \text{and} \quad \Delta t_0 = a(\tau_0)\,\Delta\tau$$

If Δt is the period of the light wave, the light is emitted with wavelength $\lambda_1 = \Delta t_1$ (in units where $c = 1$), but is observed with wavelength $\lambda_0 = \Delta t_0$, so that

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{a(\tau_0)}{a(\tau_1)}$$

Redshift parameter:

$$z := \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1}$$

λ_0 - wavelenght today, λ_1 - wavelenght at some t_1,

$$1 + z = \frac{1}{a(t_1)}.$$

$$a(t_1) = a(t_0)\left[1 + (t_1 - t_0)\, H_0 + \cdots\right] \qquad H_0 := \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}.$$

parameter h is defined such that

$$H_0 := 100h\mathrm{kms}^{-1}\mathrm{Mpc}^{-1},$$

it is used to keep track of how uncertainties in H_0 propagate into other cosmological parameters. Today, measurements of H_0 have become much more precise [12]

$$h \approx 0.67 \pm 0.01.$$

О времени (????)

О конформном времени (?!)

$$\eta := \int dt/a = \int \frac{da}{a}\frac{1}{H}\frac{a_0}{a}.$$

Note that in these $c = 1$ units, the conformal time doubles as the comoving size of the horizon. In an open universe, it is also related to the development angle by

$$\chi = \sqrt{-K}\eta$$

Asymptotic relations are often useful for converting values. Before curvature or Λ domination, the conformal time

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{2\sqrt{2}}{k_{eq}}\left(\sqrt{1+a/a_{eq}}-1\right)\\ &= 2\left(\Omega_0 H_0^2\right)^{-1/2}\left(a_{eq}/a_0\right)^{1/2}\left(\sqrt{1+a/a_{eq}}-1\right)\end{aligned}$$

Back, the coordinate time (????? this might be wrong)

$$t = \int \frac{da}{a}\frac{1}{H}.$$

It also takes on simple asymptotic forms, e.g.

$$t = \frac{2}{3}\left(\Omega_0 H_0^2\right)^{-1/2} a_0^{-3/2}\left[(a+a_{eq})^{1/2}(a-2a_{eq})+2a_{eq}^{3/2}\right]. \quad \text{RD/MD}$$

2.3.2 Friedman Universe

Robertson-Walker Metric

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\gamma_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$$

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2\,\mathrm{d}\Omega^2\right]$$

or

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\left[\mathrm{d}\chi^2 + S_k^2(\chi)\mathrm{d}\Omega^2\right]$$

or with conformal time $\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}t}{a(t)}$

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\tau)\left[\mathrm{d}\tau^2 - \left(\mathrm{d}\chi^2 + S_k^2(\chi)\mathrm{d}\Omega^2\right)\right]$$

Symmetry

$$a \to \lambda a, \quad r \to r/\lambda, \quad k \to \lambda^2 k.$$

$x^i := \{x^1, x^2, x^3\}$ - comoving coordinates
$x^i_{\text{phys}} = a(t)x^i$ - physical coordinates
The physical velocity of an object is

$$v^i_{\text{phys}} := \frac{dx^i_{\text{phys}}}{dt} = a(t)\frac{dx^i}{dt} + \frac{da}{dt}x^i := v^i_{\text{pec}} + Hx^i_{\text{phys}}$$

Where peculiar velocity is $v^i_{\text{pec}} := a(t)\dot{x}^i$ and the Hubble flow is Hx^i_{phys} ,

$$H := \frac{\dot{a}}{a}$$

Geodesics in FRW

$$\frac{dU^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta = 0,$$

where $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} := \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\partial_\alpha g_{\beta\lambda} + \partial_\beta g_{\alpha\lambda} - \partial_\lambda g_{\alpha\beta} \right)$.

Or after $\frac{d}{ds} U^\mu \left(X^\alpha(s) \right) = \frac{dX^\alpha}{ds} \frac{\partial U^\mu}{\partial X^\alpha} = U^\alpha \frac{\partial U^\mu}{\partial X^\alpha}$,

$$U^\alpha \left(\frac{\partial U^\mu}{\partial X^\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} U^\beta \right) = 0.$$

or with $P^\mu = m U^\mu$,

$$P^\alpha \frac{\partial P^\mu}{\partial X^\alpha} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta.$$

So for $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t) \gamma_{ij} \, \mathrm{d}x^i \, \mathrm{d}x^j$

$$\Gamma^\mu_{00} = \Gamma^0_{0\beta} = 0$$

$$\Gamma^0_{ij} = a \dot{a} \gamma_{ij}, \quad \Gamma^i_{0j} = \frac{\dot{a}}{a} \delta^i_j, \quad \Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} \gamma^{il} \left(\partial_j \gamma_{kl} + \partial_k \gamma_{jl} - \partial_l \gamma_{jk} \right)$$

The homogeneity of the FRW background implies $\partial_i P^\mu = 0$, so

$$P^0 \frac{dP^\mu}{dt} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta, = - \left(2 \Gamma^\mu_{0j} P^0 + \Gamma^\mu_{ij} P^i \right) P^j,$$

so

$$P^j = 0 \Rightarrow \frac{dP^i}{dt} = 0.$$

for $\mu = 0$ because of $\Gamma^0_{0j} = 0$, we have $E \frac{dE}{dt} = -\Gamma^0_{ij} P^i P^j = -\frac{\dot{a}}{a} p^2$, so

$$\frac{\dot{p}}{p} = -\frac{\dot{a}}{a} \quad \Rightarrow \quad p \propto \frac{1}{a}.$$

$$p = E \propto \frac{1}{a} \quad \text{(massless particles)} \ ,$$

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2}} \propto \frac{1}{a} \quad \text{(massive particles)}$$

Уравнения Фридмана

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2},$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3P).$$

where ρ and P - the sum of all contributions to the energy density and pressure in the universe.

Они получаются из $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$, если подставить $R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, R_{ij} = -\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 2\frac{k}{a^2} \right] g_{ij}$. и $R = -6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]$.

(??? выведу потом как-то это сам еще!)

Аналогичные формы: with $H := \dot{a}/a$,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2}.$$

in flat space

$$H^2 = \rho / \left(3M_{\rm pl}^2\right)$$

$$\begin{aligned}\rho_{\rm crit\ ,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} &= 1.9 \cdot 10^{-29} h^2 \text{ grams cm }^{-3} \\ &= 2.8 \cdot 10^{11} h^2 M_\odot \text{Mpc}^{-3} \\ &= 1.1 \cdot 10^{-5} h^2 \text{ protons cm}^{-3}.\end{aligned}$$

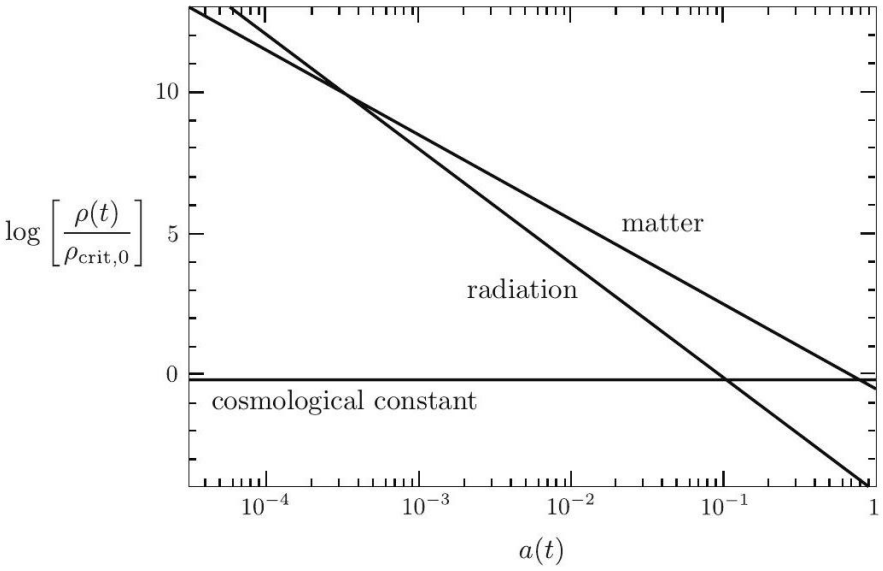
After defining $\Omega_{I,0} := \frac{\rho_{I,0}}{\rho_{\rm crit\ ,0}}$, $\Omega_{k,0} := -k/\left(a_0 H_0\right)^2$ we will have

$$H^2(a) = H_0^2 \left[\Omega_{r,0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_{m,0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{k,0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^2 + \Omega_{\Lambda,0}\right],$$

or with normalization

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_\Lambda.$$

$$|\Omega_k| \leq 0.01, \quad \Omega_r = 9.4 \cdot 10^{-5}, \quad \Omega_m = 0.32, \quad \Omega_\Lambda = 0.68$$



Другие свойства и уравнения

Continuity equation

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0.$$

Оно получается из $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$, взяв компоненту $\nu = 0$, putting $T^i{}_0 = 0$ from isotropy, а $\Gamma_{\rm frw} = \frac{\dot{a}}{a}$ (??????).

(про приложения мб укажу)

Perfect fluid

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P) U_\mu U_\nu - P g_{\mu\nu},$$

where ρ and P are the energy density and the pressure of the fluid and U^μ is its four-velocity (relative to the observer).

Number Density:

$$\frac{\dot{n}}{n} = -3\frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow n(t) \propto a^{-3}.$$

because of (????)

$$N^0 = n(t), \quad N^i = 0$$

$$\nabla_\mu N^\mu = \partial_\mu N^\mu + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} N^\lambda = 0$$

$$\frac{dn}{dt} + \Gamma^i_{i0} n = 0$$

Energy-Momentum Tensor

$$T^\mu{}_\nu = g^{\mu\lambda} T_{\lambda\nu} = \begin{pmatrix} \rho & & 0 & \\ & -P & & \\ & & -P & \\ 0 & & & -P \end{pmatrix}$$

or

$$T^\mu_\nu = (\rho + P) U^\mu U_\nu - P\delta^\mu_\nu,$$

О Вселенной Фридмана с доминацией одной из компонент (???)

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0 \sqrt{\Omega_I} a^{-\frac{3}{2}(1+w_I)}.$$

so

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{2/3(1+w_I)} & w_I \neq -1 \quad t^{2/3} \quad \text{MD} \\ & \qquad\qquad t^{1/2} \quad \text{RD} \\ e^{Ht} & w_I = -1 \qquad \Lambda\text{D} \end{cases}$$

or, in conformal time,

$$a(\tau) \propto \begin{cases} \tau^{2/(1+3w_I)} & w_I \neq -1 \quad \tau^2 \quad \text{MD} \\ & \qquad\qquad \tau \quad \text{RD} \\ (-\tau)^{-1} & w_I = -1 \end{cases}$$

(потом допишу, тут есть опыт изучения этого уже.)

О Вселенной Фридмана с доминацией двух компонент (???)

(тут точно много тренировок нужно еще!)

$$(a')^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^4$$

$$a'' = \frac{4\pi G}{3}(\rho - 3P)a^3$$

primes denote derivatives with respect to conformal time.

$$\rho := \rho_m + \rho_r = \frac{\rho_{\text{eq}}}{2}\left[\left(\frac{a_{\text{eq}}}{a}\right)^3 + \left(\frac{a_{\text{eq}}}{a}\right)^4\right].$$

$$C = \left(\frac{4\pi G}{3}\rho_{\text{eq}} a_{\text{eq}}^4\right)^{1/2}$$

$$a(\tau) = a_{\rm eq}\left[\left(\frac{\tau}{\tau_\star}\right)^2 + 2\left(\frac{\tau}{\tau_\star}\right)\right]$$
$$\tau_\star := \left(\frac{\pi G}{3}\rho_{\rm eq}a_{\rm eq}^2\right)^{-1/2} = \frac{\tau_{\rm eq}}{\sqrt{2}-1}.$$

On Cosmic Inventory

Обзор свойств параметров (???)

FRW solutions for a flat single-component universe:

	$w := P/\rho$	$\rho(a) \sim a^{-3(1+w)}$	$a(t)$	$a(\tau)$
RD	$\frac{1}{3}$	a^{-4}	$t^{1/2}$	τ
MD	0	a^{-3}	$t^{2/3}$	τ^2
ΛD	-1	a^0	e^{Ht}	$-\tau^{-1}$

Matter (including dark matter)

$$|P| \ll \rho.$$

From $\dot\rho + 3\frac{\dot a}{a}(\rho + P) = 0$

$$\rho \propto a^{-3}$$

Most of the matter in the universe is in the form of invisible dark matter. This is usually thought to be a new heavy particle species, but what it really is, we don't know.

Baryons

Radiation

$$P = \frac{\rho}{3}$$

$$\rho \propto a^{-4} \qquad \text{or} \qquad E \propto a^{-1}$$

Photons.

Neutrinos.

Gravitons

Dark energy (Λ)

$$P = -\rho$$

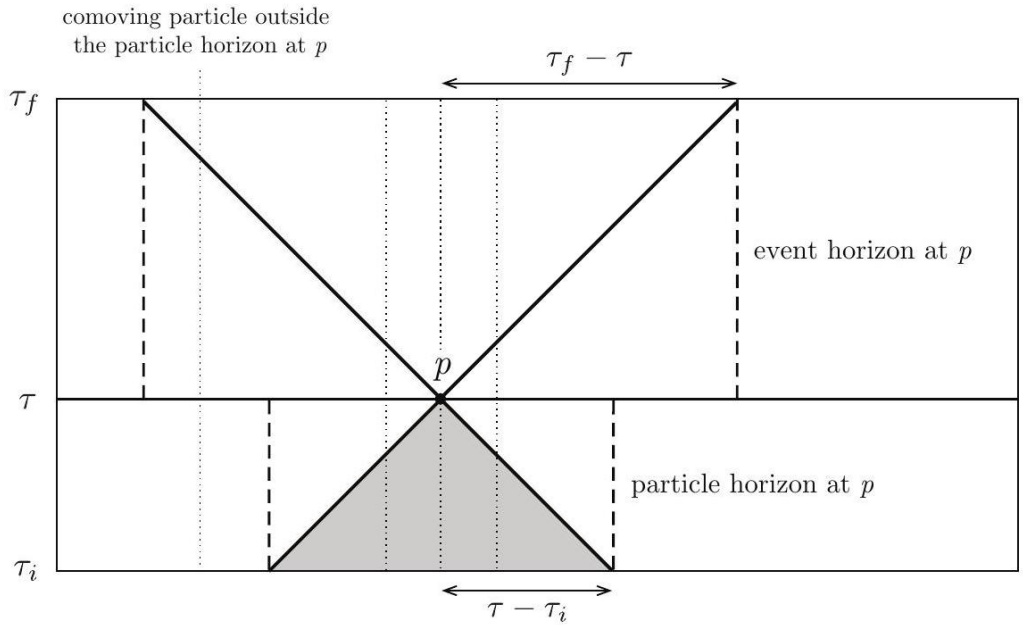
$$\rho \propto a^0$$

Vacuum energy.

(?? we don't know, what is it?)

On The Horizon Problem (?????)

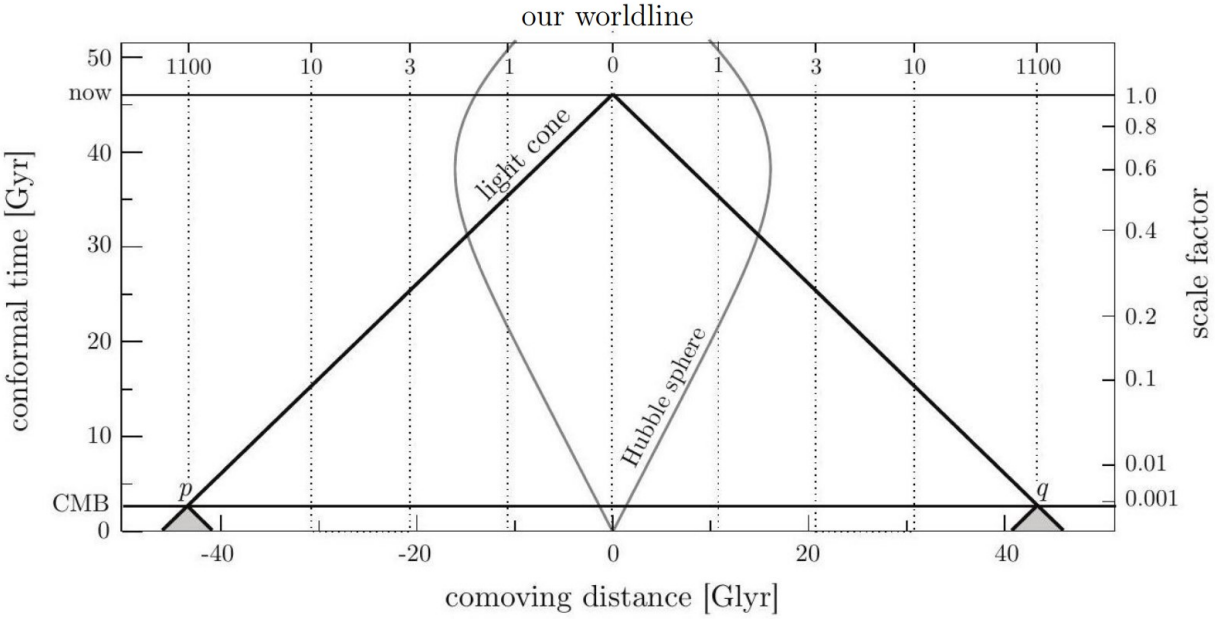
Light and Horizons



The comoving horizon is finite,

$$\chi_{\rm ph}(t) = \frac{2H_0^{-1}}{(1+3w)} a(t)^{\frac{1}{2}(1+3w)} = \frac{2}{(1+3w)}(aH)^{-1}.$$

$$\chi_{\rm eh}(\tau) = \tau_f - \tau = \int_t^{t_f} \frac{{\rm d}t}{a(t)}.$$



Particle horizon.-Eq. (2.1.2) tells us that the maximal comoving distance that light can travel between two times τ_1 and $\tau_2 > \tau_1$ is simply $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$ (recall that $c := 1$). Hence, if the Big Bang 'started' with the singularity at $t_i := 0$, [2] then the greatest comoving distance

from which an observer at time t will be able to receive signals travelling at the speed of light is given by

$$\chi_{\rm ph}(\tau) = \tau - \tau_i = \int_{t_i}^{t} \frac{{\rm d}t}{a(t)}$$

- Event horizon.-Just as there are past events that we cannot see now, there may be future events that we will never be able to see (and distant regions that we will never be able to influence). In comoving coordinates, the greatest distance from which an observer at time t_f will receive signals emitted at any time later than t is given by

$$\chi_{\rm eh}(\tau) = \tau_f - \tau = \int_{t}^{t_f} \frac{{\rm d}t}{a(t)}$$

Growing Hubble Sphere

comoving Hubble radius $(aH)^{-1}$.
(?????????????????? откуда это??????)

$$(aH)^{-1} = H_0^{-1} a^{\frac{1}{2}(1+3w)}$$

$$\chi_{\rm ph}(a) = \frac{2H_0^{-1}}{(1+3w)} \left[a^{\frac{1}{2}(1+3w)} - a_i^{\frac{1}{2}(1+3w)} \right] := \tau - \tau_i$$

$$\chi_{\rm ph}(\tau) = \int_{t_i}^{t} \frac{{\rm d}t}{a} = \int_{a_i}^{a} \frac{{\rm d}a}{a\dot{a}} = \int_{\ln a_i}^{\ln a} (aH)^{-1} \, {\rm d}\ln a$$

Why is the CMB so uniform?

(??????????????????)
If there wasn't enough time for these regions to communicate, why do they look so similar? This is the horizon problem

On A Shrinking Hubble Sphere

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} < 0.$$

Solution of the Horizon Problem

$$\tau_i = \frac{2H_0^{-1}}{(1+3w)} a_i^{\frac{1}{2}(1+3w)} \overset{a_i \to 0, w < -\frac{1}{3}}{\longrightarrow} -\infty$$

Hubble Radius vs. Particle Horizon

2.3.3 The Physics of Inflation

(see cosmology for now)

Conditions for Inflation

- Accelerated expansion.-From the relation

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{d}{dt}(\dot{a})^{-1} = -\frac{\ddot{a}}{(\dot{a})^2},$$

we see that a shrinking comoving Hubble radius implies accelerated expansion

$$\ddot{a} > 0$$

This explains why inflation is often defined as a period of acceleration.

- Slowly-varying Hubble parameter.-Alternatively, we may write

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = -\frac{\dot{a}H + a\dot{H}}{(aH)^2} = -\frac{1}{a}(1-\varepsilon), \quad \text{where} \quad \varepsilon := -\frac{\dot{H}}{H^2}.$$

The shrinking Hubble sphere therefore also corresponds to

$$\varepsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} < 1$$

- Quasi-de Sitter expansion.-For perfect inflation, $\varepsilon = 0$, the spacetime becomes de Sitter space

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - e^{2Ht}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}^2$$

where $H = \partial_t \ln a = \text{const.}$

- Negative pressure.-What forms of stress-energy source accelerated expansion? Let us consider a perfect fluid with pressure P and density ρ. The Friedmann equation, $H^2 = \rho/\left(3M_{\rm pl}^2\right)$, and the continuity equation, $\dot{\rho} = -3H(\rho + P)$, together imply

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{1}{6M_{\rm pl}^2}(\rho + 3P) = -\frac{H^2}{2}\left(1 + \frac{3P}{\rho}\right).$$

We rearrange this to find that

$$\varepsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{P}{\rho}\right) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad w := \frac{P}{\rho} < -\frac{1}{3},$$

- Constant density.-Combining the continuitiy equation, $\dot{\rho} = -3H(\rho + P)$, with eq. (2.2.21), we find

$$\left|\frac{d\ln\rho}{d\ln a}\right| = 2\varepsilon < 1.$$

Parameters for inflation

$$M_{\rm pl} := \sqrt{\frac{\hbar c}{8\pi G}} = 2.4 \cdot 10^{18}\mathrm{GeV}$$

$$\varepsilon := -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{d\ln H}{dN} < 1$$

$$\eta := \frac{d\ln\varepsilon}{dN} = \frac{\dot{\varepsilon}}{H\varepsilon}$$

$$\epsilon_{\rm v} := \frac{M_{\rm pl}^2}{2}\left(\frac{V'}{V}\right)^2, \qquad |\eta_{\rm v}| := M_{\rm pl}^2\frac{|V''|}{V}$$

Scalar Field Dynamics

Время ниже конформное!! (?? да?) Тут всегда следим, по чему именно берем производные, по ϕ, τ или t, не забываем, что часто именно нужно сложные производные брать! Пусть есть скалярное поле, которое задает инфляцию, тогда:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi).$$

$$P_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$$

$$H^2 = \frac{1}{3M_{\rm pl}^2}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V\right]$$

then derivative $2H\dot{H} = \frac{1}{3M_{\rm pl}^2}\left[\dot{\phi}\ddot{\phi} + V'\dot{\phi}\right]$, where $V' := dV/d\phi$. So $\dot{H} = -\frac{1}{2}\frac{\dot{\phi}^2}{M_{\rm pl}^2}$, and here is equation of motion:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0.$$

Typical scalar field parameters

$$\delta := -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}.$$

$$\varepsilon := \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2}{M_{\rm pl}^2 H^2}$$

$$\eta := \frac{\dot{\varepsilon}}{H\varepsilon} = 2\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} - 2\frac{\dot{H}}{H^2} = 2(\varepsilon - \delta).$$

so derivative $\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\phi}\ddot{\phi}}{M_{\rm pl}^2 H^2} - \frac{\dot{\phi}^2\dot{H}}{M_{\rm pl}^2 H^3}$.

Slow-Roll Inflation: $\varepsilon \ll 1$ or $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V$ and hence

$$H^2 \overset{\text{sl r}}{\approx} \frac{V}{3M_{\rm pl}^2}.$$

and from $|\delta| \ll 1$

$$3H\dot{\phi} \overset{\text{sl r}}{\approx} -V'.$$

$$\delta + \varepsilon = -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} - \frac{\dot{H}}{H^2} \approx M_{\rm pl}^2\frac{V''}{V}.$$

Potential slow-roll parameters:

$$\epsilon_{\rm v} := \frac{M_{\rm pl}^2}{2}\left(\frac{V'}{V}\right)^2,$$

$$|\eta_{\rm v}| := M_{\rm pl}^2\frac{|V''|}{V}.$$

$$\{\epsilon_{\rm v}, |\eta_{\rm v}|\} \ll 1.$$

Amount of inflation - The total number of ' e-folds' of accelerated expansion are

$$N_{\rm tot} := \int_{a_I}^{a_E} {\rm d}\ln a = \int_{t_I}^{t_E} H(t){\rm d}t,$$

(пока мне не до того, как получилось то, что ниже)

$$N_{\rm tot} = \int\limits_{\phi_I}^{\phi_E} \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_{\rm v}}} \frac{|{\rm d}\phi|}{M_{\rm pl}},$$

$$N_{\rm cmb} = \int\limits_{\phi_{\rm cmb}}^{\phi_E} \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_{\rm v}}} \frac{|{\rm d}\phi|}{M_{\rm pl}} \approx 60$$

Почему и что тут может быть не верно?

(типа там ранее чем 10^{-42}с у нас что-то было кроме большого взрыва? хз, не до этого вопроса.)

Причина расширения (???)

(??? так что-то пока и не понял. инфлянтонное поле вроде как и делает это, но как конкретно - еще не вижу)

Reheating (??????)

During inflation most of the energy density in the universe is in the form of the inflaton potential $V(\phi)$. Inflation ends when the potential steepens and the inflaton field picks up kinetic energy. The energy in the inflaton sector then has to be transferred to the particles of the Standard Model. This process is called reheating and starts the Hot Big Bang.

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -m^2\phi.$$

$$\dot{\rho}_\phi + 3H\rho_\phi = -3HP_\phi = -\frac{3}{2}H\left(m^2\phi^2 - \dot{\phi}^2\right)$$

(не важно это пока)

2.3.4 Other generally important questions about cosmology

(??? что еще важное - сюда и напишу.)

Об экспериментальных проверках

(самую суть укажу)

О квантовой космологии

(самую суть укажу)

О других моделях инфляции

(видел целую статью с их обзором.)

2.4 Penrose Singularity, initial values, Raychaudhuri's Equation, causality (!!)

(from K. Zhou, I need to think about it again!)

2.4.1 7.1 The Initial Value Problem

In this section, we outline the proof of the Penrose singularity theorem, which states that singularities are 'generic' in general relativity. To begin, we describe the initial value problem in general relativity.

• Let (M, g) be a time-orientable spacetime. A partial Cauchy surface Σ is a hypersurface for which no two points are connected by a causal curve. The future domain of dependence of Σ, denoted $D^+(\Sigma)$, is the set of points so that every past-inextendible causal curve through p intersects Σ, and the past domain of dependence $D^-(\Sigma)$ is defined similarly. Their union is the domain of dependence $D(\Sigma)$. The boundaries of $D^\pm(\Sigma)$, if they exist, are called future/past Cauchy horizons.

• The domain of dependence is the region of spacetime where one can determine what happens from data specified on Σ. For example, any causal geodesic in $D(\Sigma)$ must intersect Σ at a unique point; then the geodesic is specified by its velocity at that point.

• More generally, a hyperbolic PDE is one of the form

$$g^{ef}\nabla_e\nabla_f T^{(i)ab\ldots}{}_{cd\ldots} = \text{ linear in } T^{(i)} \text{ and its first derivatives}$$

for a set of tensor fields $T^{(i)}$, and the right-hand side can depend on the metric and its derivatives in an arbitrary way. The Klein-Gordan/wave equation takes this form, as well as the Maxwell equations in Lorenz gauge. Then one can show that specifying initial data $T^{(i)}, \partial_t T^{(i)}$ on Σ specifies the $T^{(i)}$ on all of $D(\Sigma)$.

• A spacetime (M, g) is globally hyperbolic if it admits a Cauchy surface, i.e. a partial Cauchy surface Σ so that $M = D(\Sigma)$. Then a globally hyperbolic spacetime is one where one can predict what happens everywhere from data on Σ.

• Theorem. (Geroch) If (M, g) is globally hyperbolic, then there exists a global time function, a map $t : M \to \mathbb{R}$ so that $-(dt)^a$ is future-directed, timelike surfaces of constant t are Cauchy surfaces with the same topology Σ, and the topology of M is $\mathbb{R} \times \Sigma$. This rules out pathologies such as closed timelike curves.

• As a result, in a globally hyperbolic spacetime we can perform an 'ADM decomposition' of spacetime. Let t be the time function and choose coordinates x^i on the Cauchy surface $t = 0$. Then we can define the x^i globally by following the integral curves of ∂_t, giving coordinates (t, x^i). It is conventional to write the metric as

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ij}\left(dx^i + N^i dt\right)\left(dx^j + N^j dt\right)$$

where $N(t, x)$ is called the lapse function and $N^i(t, x)$ is called the shift vector. We used a similar construction in the Schwarzschild spacetime.

Example. We give some basic examples of these definitions.

• Let Σ be the positive x-axis in two-dimensional Minkowski space M. Then the boundary of $D(\Sigma)$ is bounded by the null rays $t = \pm x$. If Σ' is the entire x-axis then $D(\Sigma') = M$, so M is globally hyperbolic.

• If we delete the origin from M, the resulting spacetime is not globally hyperbolic because geodesics can end at the origin.

• The Kruskal spacetime is globally hyperbolic, with global time function $\hat{t} = U + V$. The surface $U + V = 0$ is a Cauchy surface, and it is an Einstein-Rosen bridge with topology $\mathbb{R} \times S^2$. Then the spacetime has topology $\mathbb{R}^2 \times S^2$.

Next, we describe the initial value problem for general relativity.

• The initial data for Einstein's equation is a triple (Σ, h_{ab}, K_{ab}) where (Σ, h_{ab}) is a Riemannian 3-manifold and K_{ab} is a symmetric tensor. Intuitively, Σ is a spacelike hypersurface in spacetime, h_{ab} is the pullback of the metric, and K_{ab} is the extrinsic curvature tensor of Σ.

• Let n^a denote the unit vector normal to Σ. Then the Einstein equation imposes constraints on the initial data. Contracting it with $n^a n^b$ gives the Hamiltonian constraint

$$R' - K^{ab}K_{ab} + K^2 = 16\pi\rho$$

where R' is the Ricci tensor of h_{ab} and all indices are raised and lowered with h^{ab}, and $\rho = T_{ab}n^a n^b$ is the energy density measured by an observer with velocity n^a.

• Contracting the Einstein equation with n^a and projecting orthogonally to it gives the momentum constraint

$$D_b K^b{}_a - D_a K = 8\pi h^b_a T_{bc} n^c$$

where D_a uses the Levi-Civita connection of h_{ab}, and the right-hand side is the momentum density measured by an observer with velocity n^a.

• Theorem. Consider initial data as defined above satisfying the constraints in vacuum. Then there exists a unique spacetime (M, g_{ab}), up to diffeomorphism, called the maximal Cauchy development of the initial data, so that

• (M, g_{ab}) satisfies the vacuum Einstein equation,

• (M, g_{ab}) is globally hyperbolic with Cauchy surface Σ,

• the induced metric and extrinsic curvature of Σ are h_{ab} and K_{ab},

• any other spacetime satisfying these conditions is isometric to a subset of (M, g_{ab}).

Analogous theorems also exist for suitable matter obeying hyperbolic PDEs.

• Note that the maximal Cauchy development could be extendible to (M', g'_{ab}), but then Σ would necessarily not be a Cauchy surface for (M', g'_{ab}). Then we cannot predict the metric in all of M' using only data on Σ, i.e. the extension can't be unique.

Example. Now we give some examples of this result.

• Consider initial data on a surface $\Sigma = \{(x, y, z) : x > 0\}$ with flat metric and vanishing extrinsic curvature. The maximal development is the region $|t| < x$ of Minkowski spacetime, which can be extended. However, the extension is far from unique: it could be the entirety of Minkowski spacetime or it could be curved.

• Consider the Schwarzschild solution with $M < 0$,

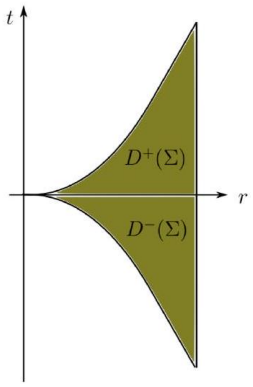
$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2|M|}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2|M|}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

There is a curvature singularity at $r = 0$ but no event horizon. We take initial data on the surface Σ given by $t = 0$, with pullback metric h_{ab}. As a Riemannian manifold, (Σ, h_{ab}) is inextendible, but it is not geodesically complete since some geodesics hit $r = 0$ in finite affine parameter. We say the initial data is singular.

• The resulting maximal development is not the entire Schwarzschild spacetime. Consider an outgoing radial null geodesic; it obeys

$$\frac{dt}{dr} \approx \frac{r}{2|M|}$$

at small r. Then the domain of dependence of Σ is shown below.



Points outside of $D(\Sigma)$ have causal geodesics that do not pass through Σ because they instead end at $r = 0$. The boundary of $D(\Sigma)$ is given by the null geodesics that emerge from $r = 0$ at time $t = 0$.

• Therefore, the initial data do not predict the metric outside of $D(\Sigma)$. There could be other extensions besides the $M < 0$ Schwarzschild solution. By Birkhoff's theorem, they are necessarily not spherically symmetric.

• So far we've seen examples where the initial data is extendible, in which case it's clear we should be 'missing information', and cases where the initial data is singular, in which case one 'can't predict what comes out of a singularity'. Thus we restrict to initial data which is geodesically complete and hence also inextendible.

• Let Σ be the hyperboloid $t^2 - \mathbf{x}^2 = -1$ in Minkowski space for $t < 0$, with h_{ab} and K_{ab} defined as in Minkowski space. This initial data is geodesically complete, but its maximal Cauchy development is the past light cone of the origin, and hence is extendible. The intuitive reason is that Σ is 'asymptotically null' which allows information to 'arrive from infinity'.

Now that we've seen the possible problems, we can define new restrictions to avoid them.

• An initial data set (Σ, h_{ab}, K_{ab}) is an asymptotically flat end if

• Σ is diffeomorphic to $\mathbb{R}^3/B$ where B is a closed ball centered on the origin,

• if we pullback the $\mathbb{R}^3$ coordinates to define coordinates x^i on Σ then

$$h_{ij} = \delta_{ij} + O(1/r), \quad K_{ij} = O\left(1/r^2\right)$$

for large $r = \sqrt{x^i x^i}$,

• derivatives of the latter expressions also hold, e.g. $h_{ij,k} = O\left(1/r^2\right)$.

An initial data set is asymptotically flat with N ends if it is the union of a compact set with N asymptotically flat ends. If matter fields are also present, they should also decay appropriately. We sometimes say Σ itself is asymptotically flat.

• Intuitively, in an asymptotically flat end, Σ looks like a surface of constant t in Minkowski spacetime for large r. If Σ is asymptotically flat with N ends, it looks like the union of N such surfaces.

• For example, in the $M > 0$ Schwarzschild spacetime, one can show that the initial data on the surface $\Sigma = \{t = \text{const}, r > 2M\}$ is an asymptotically flat end. However, it is not geodesically complete, since it stops at $r = 2M$. Now, in the Kruskal spacetime Σ is part of an EinsteinRosen bridge, which is asymptotically flat with two ends, because it is the union of the compact sphere $U = V = 0$ with two copies of the asymptotically flat end defined above.

• Penrose's strong cosmic censorship conjecture states that generically, a geodesically complete, asymptotically flat initial data set has an inextendible maximal Cauchy development. It is related to the weak cosmic censorship conjecture, which informally states that 'every singularity is hidden behind an event horizon', because both are about the predictability of GR.

• For small perturbations of Minkowski spacetime, it is known that the spacetime 'settles down to Minkowski spacetime at late time', which implies strong cosmic censorship holds.

• As we'll see, strong cosmic censorship fails for charged and rotating black holes, which exhibit Cauchy horizons. However, the conjecture does hold for any small perturbation of these initial conditions, i.e. it fails only on a set of 'measure zero'.

• A maximal Cauchy development cannot contain a region with closed timelike curves, since by definition such a region contains causal curves that don't intersect Σ. This represents another counterexample, but it is again not generic.

• The conjecture can be extended to include matter, but we must impose the dominant energy condition, which essentially requires matter with positive energy density that doesn't travel faster than light. We'll discuss these energy conditions in more detail later.

2.4.2 7.2 Geodesic Congruences

Next, we need to establish some basic definitions.

• A null hypersurface $\mathcal{N}$ is a hypersurface whose normal N_a is everywhere null. That is, $N_a X^a = 0$ for any X^a tangent to $\mathcal{N}$, so X^a is spacelike or parallel to N^a. In particular, N^a itself is tangent to $\mathcal{N}$, so its integral curves, called the generators of $\mathcal{N}$, lie within $\mathcal{N}$.

• We claim that the generators of $\mathcal{N}$ are null geodesics.

The generators are null by definition. Now let $\mathcal{N}$ be defined by $f = \text{const}$ where $df \neq 0$ on $\mathcal{N}$. Then we have $N = h df$ for some function h, and we can rescale so that $N = df$, since this just reparametrizes the geodesics. Since $N^a N_a = 0$, its gradient is normal to $\mathcal{N}$, so

$$\nabla_a \left(N^b N_b\right)\big|_{\mathcal{N}} = 2\alpha N_a$$

for some function α. We also have $\nabla_a N_b = \nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f = \nabla_b N_a$, giving

$$N^b \nabla_b N_a\big|_{\mathcal{N}} = \alpha N_a$$

which is simply the geodesic equation for a non-affine parameter.

Example. In the Kruskal spacetime, let $N = dU$. Since $g^{UU} = 0, N$ is null everywhere and hence normal to a family of null hypersurfaces, each with constant U. In particular, we have $\nabla_a \left(N^b N_b\right) = 0$, so the right-hand side of the above equations is zero. Then the generators are affinely parametrized null geodesics. Raising an index gives

$$N^a = -\frac{r}{16M^3} e^{r/2M} \left(\frac{\partial}{\partial V}\right)^a$$

For $U = 0$, we have $r = 2M$, so N^a is just a constant multiple of $\partial/\partial V$. Then V is an affine parameter for the generators of the surface $U = 0$.

Next, we review geodesic deviation and introduce geodesic congruences.

• We recall that a one-parameter family of geodesics gives a surface with coordinates (s, λ) where $U = \partial/\partial\lambda$ is the geodesic velocity and $S = \partial/\partial s$ is the deviation vector, and $[U, S] = 0$. The geodesic equation is $\nabla_U U = 0$ and the geodesic deviation equation is

$$\nabla_U \nabla_U S^a = R^a{}_{bcd} U^b U^c S^d$$

and given an affinely parametrized geodesic γ with tangent U^a, a solution S^a of this equation along γ is called a Jacobi field.

• A geodesic congruence in an open set $\mathcal{U} \subset M$ is a family of geodesics so that exactly one geodesic passes through each point in $\mathcal{U}$. We will consider the case where all the geodesics in a congruence are null/spacelike/timelike, normalizing the tangent vector U^a to $U^2 = 0/1/-1$.

• Consider a one-parameter family of geodesics belonging to a congruence, so that

$$\nabla_U S^a = B^a{}_b S^b, \quad B^a{}_b = \nabla_b U^a$$

Then we have the identities

$$B^a{}_b U^b = 0, \quad U_a B^a{}_b = \frac{1}{2}\nabla_b \left(U^2\right) = 0$$

by the geodesic equation, so

$$\nabla_U (U \cdot S) = \left(\nabla_U U^a\right) S_a + U^a \nabla_U S_a = 0$$

where we again used the geodesic equation. Therefore, $U^a S_a$ is constant along geodesics.

• Now, a one-parameter family of geodesics has plenty of freedom in the coordinates, since we may redefine the parameter on each geodesic, $\lambda' = \lambda - a(s)$, inducing the change

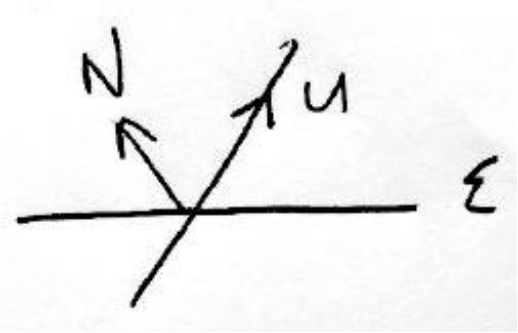
$$S'^a = S^a + \frac{da}{ds} U^a$$

Intuitively, it's nice to make the separation normal to the velocity, and

$$U \cdot S' = U \cdot S + \frac{da}{ds} U^2$$

Then in the spacelike and timelike case, we can straightforwardly set $U^a S'_a = 0$ everywhere.

• In the null case, U^2 vanishes and we have to work more carefully.



We choose a spacelike hypersurface Σ which intersects each geodesic once. Let N^a be a vector field on Σ so that $N^2 = 0$ and $N^a U_a = -1$. We extend N^a off Σ by parallel transport along the geodesics, $\nabla_U N^a = 0$. Then

$$N^2 = 0, \quad N \cdot U = -1, \quad \nabla_U N^a = 0$$

everywhere.

• Therefore, we can decompose any deviation vector uniquely as

$$S^a = \alpha U^a + \beta N^a + \hat{S}^a, \quad U \cdot \hat{S} = N \cdot \hat{S} = 0$$

where $\hat{S}^a$ points 'into the page' in the above diagram. Note that $U \cdot S = -\beta$, so β is constant along each geodesic. In the case where we consider a subset of the generators of a null hypersurface, we automatically have $\beta = 0$ by definition.

• We can project onto $\hat{S}^a$ by

$$\hat{S}^a = P^a_b S^b, \quad P^a_b = \delta^a_b + N^a U_b + U^a N_b$$

where P^a_b is a projection operator, $P^a_b P^b_c = P^a_c$, onto the subset $T_\perp$ of the tangent space at p containing vectors orthogonal to U^a and N^a. We also have

$$\nabla_U P^a_b = 0$$

because it is built out of N^a and U^b, which are both parallel transported.

• We claim that if $U \cdot S = 0$, then

$$\nabla_U \hat{S}^a = \hat{B}^a{}_b \hat{S}^b, \quad \hat{B}^a{}_b = P^a_c B^c{}_d P^d_b$$

This is intuitively reasonable, as it's just one of our earlier results with projectors applied everywhere. Explicitly, we have

$$\nabla_U \hat{S}^a = \nabla_U \left(P^a_c S^c\right) = P^a_c \nabla_U S^c = P^a_c B^c{}_d S^d = P^a_c B^c{}_d P^d_e S^e$$

where the final step works because $U \cdot S = 0$ and $B^c{}_d U^d = 0$. Finally, using $P^2 = P$ gives the desired result.

We now examine $\hat{B}^a{}_b$ in more detail.

• We can think of $\hat{B}^a{}_b$ as a matrix that acts on the two-dimensional space $T_\perp$. To understand it geometrically, we divide it into the expansion, shear, and rotation defined as

$$\theta = \hat{B}^a_a, \quad \hat{\sigma}_{ab} = \hat{B}_{(ab)} - \frac{1}{2} P_{ab}\theta, \quad \hat{\omega}_{ab} = \hat{B}_{[ab]}.$$

Then we have

$$\hat{B}^a{}_b = \frac{1}{2}\theta P^a_b + \hat{\sigma}^a{}_b + \hat{\omega}^a{}_b$$

• By plugging in the definitions, we have

$$\hat{B}^b{}_c = B^b{}_c + U^b N_d B^d{}_c + U_c B^d{}_b N^d + U^b U_c N_d B^d{}_e N^e$$

which implies that

$$\theta = g^{ab} B_{ab} = \nabla_a U^a$$

so it can be interpreted as the divergence of the geodesics; this shows that θ is independent of the choice of N^a. Similarly, scalar invariants of the rotation and shear are independent of N^a.

• If the congruence contains the generators of a null hypersurface $\mathcal{N}$, then $\hat{\omega}_{ab} = 0$ on $\mathcal{N}$. Conversely, if $\hat{\omega}_{ab} = 0$ everywhere, then U^a is orthogonal to a family of null hypersurfaces.

To see this, start with our expression for $\hat{B}^b{}_c$ and note that

$$U_{[a}\hat{\omega}_{bc]} = U_{[a}\hat{B}_{bc]} = U_{[a}B_{bc]}$$

where the extra terms drop out of the antisymmetrization. Using the definition of B_{ab},

$$U_{[a}\hat{\omega}_{bc]} = U_{[a}\nabla_c U_{b]} = -\frac{1}{6}(U \wedge dU)_{abc}$$

As we've shown earlier, this vanishes if U is normal to $\mathcal{N}$, so on $\mathcal{N}$,

$$0 = U_{[a}\hat{\omega}_{bc]} = \frac{1}{3}\left(U_a\hat{\omega}_{bc} + U_b\hat{\omega}_{ca} + U_c\hat{\omega}_{ab}\right).$$

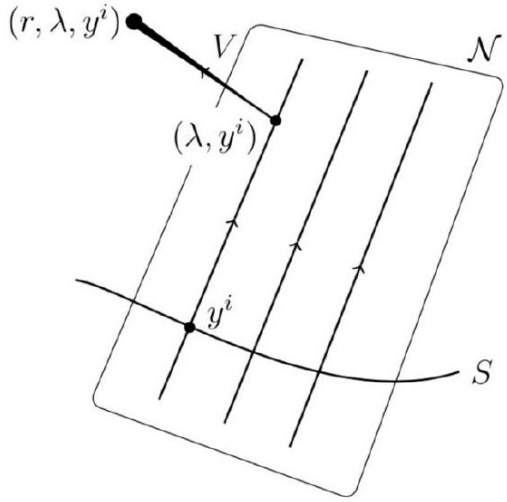
Contracting this with N^a and using $\hat{\omega} \cdot N = 0$ gives the result. The reasoning can be run backwards by Frobenius' theorem.

• Therefore, in the case of a null hypersurface we only have to deal with expansion and shear. Intuitively, expansion increases the cross-sectional area of a family of geodesics, while shear compresses in one direction and stretches in the other, keeping the area constant.

To understand the expansion more quantitatively, we use Gaussian null coordinates.

• We pick a two-dimensional spacelike surface S within $\mathcal{N}$ and let y^i be coordinates on this surface; we then define coordinates (λ, y^i) on $\mathcal{N}$ by following the point with coordinates y^i for parameter distance λ along the generator through it, so $U = \partial/\partial\lambda$.

• Next, let V^a be a null vector field on $\mathcal{N}$ so that $V \cdot \partial/\partial y^i = 0$ and $V \cdot U$, similarly to how we defined N^a, and define the r coordinate by following its geodesics so $V = \partial/\partial r$ and $\mathcal{N}$ is the surface $r = 0$. The coordinates (r, λ, y^i) are Gaussian null coordinates, shown below.



• Now we consider the form of the metric. Since V^a is null, $g_{rr} = 0$, and the geodesic equation for V^a gives $\partial_r g_{r\mu} = 0$. On the surface, we have $g_{r\lambda} = 1$ and $g_{ri} = 0$, which then hold for all r. We also know that $g_{\lambda\lambda} = g_{\lambda i} = 0$ at $r = 0$, so

$$ds^2 = 2drd\lambda + rFd\lambda^2 + 2rh_i d\lambda dy^i + h_{ij}dy^i dy^j$$

where F and h_i are smooth functions.

• The metric restricted to $\mathcal{N}$ is

$$g|_{\mathcal{N}} = 2drd\lambda + h_{ij}dy^i dy^j$$

so since $U^\mu = (0, 1, 0, 0)$ on $\mathcal{N}$, we have $U_\mu = (1, 0, 0, 0)$ on $\mathcal{N}$. Then since $U \cdot B = B \cdot U = 0$, we have $B^r{}_\mu = B^\mu{}_\lambda = 0$. Therefore on $\mathcal{N}$ we have

$$\theta = B^\mu{}_\mu = B^i{}_i = \nabla_i U^i = \partial_i U^i + \Gamma^i_{i\mu}U^\mu = \Gamma^i_{i\lambda} = \frac{1}{2}g^{i\mu}\left(g_{\mu i,\lambda} + g_{\mu\lambda,i} - g_{i\lambda,\mu}\right).$$

Using the form of the metric, we have

$$\theta = \frac{1}{2}h^{ij}\left(g_{ji,\lambda} + g_{j\lambda,i} - g_{i\lambda,j}\right) = \frac{1}{2}h^{ij}h_{ij,\lambda} = \frac{\partial_\lambda\sqrt{h}}{\sqrt{h}}$$

where $h = \det h_{ij}, h^{ij}$ is the matrix inverse, and we used the identity $\delta(\det A) = (\det A)\,\mathrm{tr}\,(A^{-1}\delta A)$.

• Therefore, we have

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\sqrt{h} = \theta\sqrt{h}$$

and $\sqrt{h}$ is the area element on a surface of constant λ within $\mathcal{N}$, so θ indeed measures the rate of increase of this area with respect to the affine parameter λ.

2.4.3 7.3 Raychaudhuri's Equation

Next, we define trapped surfaces.

• Let S be a two-dimensional spacelike surface. Then for any point $p \in S$ there are two futuredirected null vectors U_1 and U_2 orthogonal to S, up to scaling. If S is orientable, then U_1 and U_2 can be desired continuously over S. This defines two families of null geodesics which start on S and are orthogonal to S, forming the null hypersurfaces $\mathcal{N}_1$ and $\mathcal{N}_2$.

• For example, in Minkowski space, the two-sphere $r = \text{const}$, $t = \text{const}$ has U_1 and U_2 pointing radially inward and outward. This is a bit tricky to visualize or draw, since it requires all four spacetime dimensions.

• In the Kruskal spacetime, let S be the two-sphere $U = U_0, V = V_0$. Then the generators of the $\mathcal{N}_i$ are radial null geodesics as in Minkowski space. We know that dU and dV correspond to affine parametrization, so raising an index gives

$$U_1 = re^{r/2M}\frac{\partial}{\partial V}, \quad U_2 = re^{r/2M}\frac{\partial}{\partial U}$$

where the signs are chosen so that U_1 and U_2 are future-directed.

• Using the divergence formula we can compute the expansion

$$\theta_1 = \nabla_a U_1^a = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}U_a^\mu\right) = r^{-1}e^{r/2M}\partial_V\left(re^{-r/2M}re^{r/2M}\right) = -\frac{8M^2}{r}U$$

and similarly

$$\theta_2 = -\frac{8M^2}{r}V$$

Then in region I, the outgoing null geodesics on S are expanding and the ingoing null geodesics are converging, as expected under normal conditions.

• A compact, orientable, spacelike two-dimensional surface is trapped if both families of null geodesics orthogonal to S have negative expansion everywhere on S, and marginally trapped if both families have non-positive expansion. Then two-spheres in region II are trapped, and two-spheres on the event horizon are marginally trapped.

Next, we derive Raychaudhuri's equation, which describes the evolution of the expansion along the geodesics of a null geodesic congruence. Applying it will requires discussing energy conditions.

• Raychaudhuri's equation states that

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \hat{\sigma}^{ab}\hat{\sigma}_{ab} + \hat{\omega}^{ab}\hat{\omega}_{ab} - R_{ab}U^aU^b$$

To see this, note that by definition we have

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \nabla_U\left(B^a{}_bP_a^b\right) = P_a^b\nabla_U B^a{}_b = P_a^bU^c\nabla_c\nabla_bU^a$$

Next, we commute the covariant derivatives to get a factor of the Riemann tensor,

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = P_a^bU^c\left(\nabla_b\nabla_cU^a + R^a_{dcb}U^d\right) = -P_a^b\left(\nabla_bU^c\right)\left(\nabla_cU^a\right) + \delta_a^bR^a_{dcb}U^cU^b$$

where we used the geodesic equation and the antisymmetry of the Riemann tensor. The first term is $-B^c{}_bP_a^bB^a{}_c$, and inserting projectors and identities turns it into $-\hat{B}^c{}_a\hat{B}^a{}_c$, which expands to give the first three terms.

• To control the last term in Raychaudhuri's equation, we impose energy conditions. The most important condition is the dominant energy condition (DEC), which requires $-T^a{}_bV^b$ to be a future-directed causal vector, or zero, for all future-directed timelike vectors V^a.

• The motivation for the DEC is that the energy momentum current measured by an observer with four-velocity u^a is $j^a = -T^a{}_b u^b$. Heuristically, the dominant energy condition restricts matter to not move faster than light. For instance, one can show that if T_{ab} is zero in a closed region S of some spacelike hypersurface Σ and obeys the DEC, then T_{ab} is zero within $D^+(S)$.

• The weak energy condition (WEC) only requires $T_{ab}V^aV^b \geq 0$ for any causal vector V^a, which corresponds to all observers measuring nonnegative energy density.

• The null energy condition (NEC) is even weaker, specializing to null V^a. It implies $|w| \leq 1$ for perfect fluids obeying $p = w\rho$.

• The strong energy condition (SEC) is stronger than the NEC but independent of the WEC and DEC. It requires

$$\left(T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T^c_c\right)V^aV^b \geq 0$$

for all causal vectors V^a. By the Einstein equation, this is equivalent to $R_{ab}V^aV^b \geq 0$, which implies that gravity is attractive. However, while the DEC appears to be satisfied in our universe, the SEC is not, since the cosmological constant is positive.

• If the NEC applies, then the generators of a null hypersurface satisfy

$$\frac{d\theta}{d\lambda} \leq -\frac{1}{2}\theta^2$$

To see this, note that $\hat{\omega}$ is zero in Raychaudhuri's equation. The metric restricted to $T_\perp$ is positive-definite, so $\hat{\sigma}^{ab}\hat{\sigma}_{ab}$ is positive. Since U^a is null, Einstein's equation gives $R_{ab}U^aU^b = 8\pi T_{ab}U^aU^b$, so $R_{ab}U^aU^b$ is positive.

• Therefore, if $\theta = \theta_0 < 0$ at a point p on a generator γ of a null hypersurface, then $\theta \to -\infty$ along γ within an affine parameter distance $2/|\theta_0|$, provided γ extends this far.

Example. Consider a massless scalar field, with

$$T_{ab} = \partial_a\Phi\partial_b\Phi - \frac{1}{2}g_{ab}(\partial\Phi)^2$$

Then we have

$$j^a = -T^a{}_bV^b = -\left(V^b\partial_b\Phi\right)\partial^a\Phi + \frac{1}{2}V^a(\partial\Phi)^2, \quad j^2 = \frac{1}{4}V^2\left((\partial\Phi)^2\right)^2.$$

For timelike V^a, this implies j^a is causal or zero. To check its orientation, note that

$$V^aj_a = (-V\cdot\partial\Phi)^2 + \frac{1}{2}V^2(\partial\Phi)^2 = -\frac{1}{2}\left(V^a\partial_a\Phi\right)^2 + \frac{1}{2}V^2\left(\partial^a\Phi - \frac{V^b\partial_b\Phi}{V^2}V^a\right)^2$$

The final expression in brackets is orthogonal to V^a, so its norm is non-negative. Therefore, $V\cdot j \leq 0$ so j^a is future-directed or zero, establishing the DEC.

Finally, we define conjugate points.

• Two points p and q are conjugate along a geodesic γ if γ passes through p and q, and there exists a Jacobi field along γ that vanishes at p and q but is not identically zero. Intuitively, this means that a group of geodesics infinitesimally close to γ converge at both p and q.

• Theorem. Consider a null geodesic congruence including all of the null geodesics through p. If $\theta \to -\infty$ at a point q on a null geodesic γ through p, then p is conjugate to q along γ.

• Theorem. Let γ be a causal curve containing p and q. Then there does not exist a smooth, one-parameter family of causal curves γ_s connecting p and q with $\gamma_0 = \gamma$ and γ_s timelike for $s > 0$ (i.e. γ cannot be deformed smoothly to a timelike surface) if and only if γ is a null geodesic with no point conjugate to p along γ between p and q.

• Now suppose we have a two-dimensional spacelike surface S, and consider one of the geodesics γ that generate $\mathcal{N}_1$ or $\mathcal{N}_2$. We say a point p along γ is conjugate to S if there exists a Jacobi field along γ that vanishes at p, and is tangent to S on S. That is, null geodesics emitted from S converge at p. The analogue of the above theorem is that p is conjugate to S if $\theta \to -\infty$ at p.

Example. Consider geodesics on $\mathbb{R} \times S^2$ with metric $ds^2 = -dt^2 + d\Omega^2$. The geodesics travel on great circles of S^2. Then the North and South poles are conjugate points. Now consider a null geodesic from the North pole to the equator, which passes through the South pole; such a path wraps around the sphere 3/4 of the way. Then it's possible to deform the path to be shorter, making it timelike.

2.4.4 7.4 Causal Structure

We now make some formal definitions regarding causal structure.

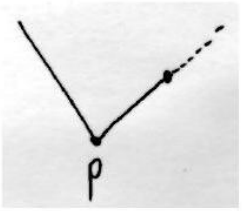
• Let (M, g) be a time-orientable manifold with $U \subset M$. The chronological future $I^+(U)$ of U is the set of points of M which can be reached by a future-directed timelike curve starting on U. The causal future $J^+(U)$ of U is the union of U with the set of points of M that can be reached by a future-directed causal curve starting on U. We define the chronological past $I^-(U)$ and the causal past $J^-(U)$ similarly.

• For a point p in Minkowski space, $J^+(p)$ is the set of points on or inside the future light cone including p itself, while $I^+(p)$ is the interior of $J^+(p)$.

• It can be shown that in general, we have

$$I^+(U) = \text{int}\left(J^+(U)\right), \quad J^+(U) \subset \overline{I^+(U)}$$

In Minkowski space, the latter is an equality. However, consider two-dimensional Minkowski space with the origin deleted, as shown below.



Then the dotted line is in $\overline{I^+(p)}$ but not in $J^+(p)$, since a light ray would have to pass through the origin to reach it.

• We write the boundary of $U \subset M$ as $\dot{U} = \bar{U}/\,\text{int}(U)$. Then we have

$$\overline{J^+(U)} = \overline{I^+(U)}, \quad \dot{J}^+(U) = \dot{I}^+(U)$$

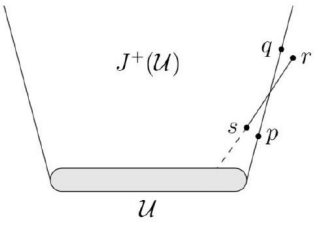
In Minkowski space, $\dot{I}^+(p)$ is the set of points along future-directed null geodesics starting from p. In general, this statement holds locally, as shown by the following theorem.

• Theorem. Given $p \in M$ there exists a convex normal neighborhood U of p, where for any $q, r \in U$ there exists a unique geodesic connecting q and r that stays in U. Then $\dot{I}^+(p)$ in the spacetime (U, g) is the set of all points in U along future-directed null geodesics in U that start at p.

• Corollary. If $q \in J^+(p) \backslash I^+(p)$, there exists a null geodesic from p to q.

Proof: given a causal curve connecting p and q with parameter in $[0, 1]$, we can cover it with finitely many convex normal neighborhoods since $[0, 1]$ is compact. Then we use the above theorem in each neighborhood.

• Theorem. A set $S \subset M$ is achronal if no two points in S are connected by a timelike curve. Then $\dot{J}^+(U)$ is an achronal three-dimensional submanifold of M.



Proof: consider $p, q \in \dot{J}^+(U)$ and suppose $q \in I^+(p)$. Since $I^+(p)$ is open, there exists r near q in $I^+(p)$ but not $J^+(U)$. Similarly, since $I^-(r)$ is open, there exists s near p in $I^-(r)$ and $J^+(U)$. Then there exists a causal curve from U to s to r, so $r \in J^+(U)$, a contradiction.

• As an example, consider $M = \mathbb{R} \times S^1$ with the flat metric

$$ds^2 = -dt^2 + d\phi^2$$

which is a two-dimensional Einstein static universe. Then $\dot{J}^+(p)$ is a pair of null geodesic segments that start at p and end where they meet at q. The geodesics have future endpoint q and past endpoint p. In our example above, if p is on the dotted line then the geodesic is past-inextendible as it hits the origin. This is general, as shown by the following theorem.

• Theorem. Let $U \subset M$ be closed. Then every $p \in \dot{J}^+(U)$ with $p \notin U$ lies on a null geodesic λ lying entirely in $\dot{J}^+(U)$ so that λ is either past-inextendible or has a past endpoint on U.

• In a globally hyperbolic spacetime, the above theorem can be strengthened to rule out the former case, as shown by the following theorem.

• Theorem. Let S be a two-dimensional orientable compact spacelike submanifold of a globally hyperbolic spacetime. Then every $p \in \dot{J}^+(S)$ lies on a future-directed null geodesic starting from S, which is orthogonal to S and has no point conjugate to S between S and p.

• Finally, we formally define the future Cauchy horizon of a partial Cauchy surface Σ as $H^+(\Sigma) = \overline{D^+(\Sigma)}/I^-\left(D^+(\Sigma)\right)$.

Note that we don't define $H^+(\Sigma)$ as $\dot{D}^+(\Sigma)$ because this includes Σ itself. However, one can show that $\dot{D}(\Sigma) = H^+(\Sigma) \cup H^-(\Sigma)$ and that the $H^\pm$are null hypersurfaces.

Finally, we're ready to state the Penrose singularity theorem.

• Theorem. Let (M, g) be globally hyperbolic with a noncompact Cauchy surface Σ. Assume the Einstein equation and the NEC are satisfied and M contains a trapped surface T. Let $\theta_0 < 0$ be the maximum value of θ on T for both sets of null geodesics orthogonal to T. Then at least one of these geodesics is future-inextendible and has affine length no greater than $2/|\theta_0|$.

• We give a very basic proof sketch. Assume the opposite for the sake of contradiction. Then by our previous results, any future-inextendible null geodesic orthogonal to T contains a point conjugate to T within affine parameter $2/|\theta_0|$.

• Next, let $p \in \dot{J}^+(T)$ with $p \notin T$. Then by our previous theorem, p lies on a future-directed null geodesic γ starting from T which is orthogonal to T and has no point conjugate to T between T and p. Then p cannot lie beyond the point conjugate to T.

• Therefore, $\dot{J}^+(T)$ is a subset of the compact set consisting of the set of points along the null geodesics orthogonal to T with affine parameter less than or equal to $2/|\theta_0|$. Since $\dot{J}^+(T)$ is closed, $\dot{J}^+(T)$ is thus compact. On the other hand, $\dot{J}^+(T)$ is a manifold, and hence can't have a boundary.

2.5 8 Asymptotic Flatness

2.5.1 8.1 Conformal Compactification

In this section, we rigorously define a black hole. We begin by studying conformal compactification, a useful tool for visualizing spacetimes.

• Given a spacetime (M, g), we can define a new, 'unphysical' metric $\bar{g} = \Omega^2 g$ where Ω is smooth and positive. We say $\bar{g}$ is obtained from g by a conformal transformation. (Note that in conformal field theory, such an operation is instead called a Weyl transformation.)

• Conformal transformations preserve timelike, spacelike, and null directions; in particular they preserve light cones, and hence the causal structure.

• In conformal compactification, we choose Ω so that the 'points at infinity' with respect to g are at finite distance with respect to $\bar{g}$, which requires $\Omega \to 0$ at infinity.

• The resulting spacetime $(M, \bar{g})$ is extendible to a larger spacetime $(\bar{M}, \bar{g})$, and we identify M as a subset of $\bar{M}$ where $\Omega = 0$ on ∂M.

Example. Minkowski spacetime. The metric is

$$g = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\omega^2$$

where we changed the angular measure to avoid confusion with the conformal factor Ω. We then define the null coordinates

$$u = t - r, \quad v = t - r, \quad -\infty < r \leq v < \infty, \quad g = -dudv + \frac{1}{4}(u - v)^2 d\omega^2$$

Next, we define the coordinates (p, q) by

$$u = \tan p, \quad v = \tan q, \quad -\pi/2 < p \leq q < \pi/2, \quad g = (2 \cos p \cos q)^{-2} \left(-4dpdq + \sin^2(q - p) d\omega^2\right)$$

The original 'infinity' corresponds to $|t| \to \infty$ or $r \to \infty$, and now corresponds to $|p| \to \pi/2$ or $|q| \to \pi/2$. To perform conformal compactification, we define

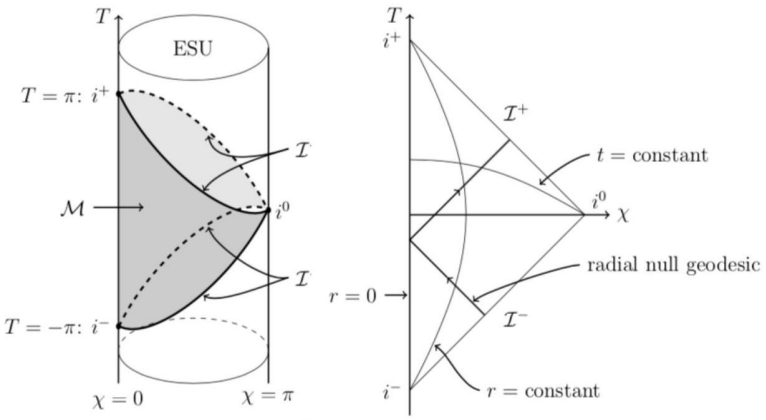
$$\Omega = 2 \cos p \cos q, \quad \bar{G} = -4dpdq + \sin^2(p - q) d\omega^2$$

Finally, we switch back to timelike and spacelike coordinates by

$$T = q + p \in (-\pi, \pi), \quad \chi = q - p \in [0, \pi), \quad \bar{g} = -dT^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi d\omega^2$$

By extending the range of T to $(-\infty, \infty)$ and the range of χ to $[0, \pi]$, we arrive at the Einstein static universe $\mathbb{R} \times S^3$. To visualize our spacetime, we show only T and χ. Then Minkowski space can be depicted as a slice of the Einstein static universe. Alternatively, we can project the slice to get a Penrose diagram. Formally, a Penrose diagram is a bounded subset of $\mathbb{R}^2$ endowed with a flat Lorentzian metric; every point on the internet corresponds to a sphere S^2. Points on the boundary can represent either points at infinity, or points of symmetry, such as $r = 0$.

There are several regions of interest on the boundary. Radial null geodesics come from the null hypersurface $\mathcal{I}^-$, called past null infinity, and end at $\mathcal{I}^+$, called future null infinity. Similarly, radial
timelike geodesics start at past timelike infinity $i^-$and end at future timelike infinity i^+, while radial spacelike geodesics start and end at spatial infinity i^0.



$$\psi(t,r) = \frac{1}{r}(f(t-r) + g(t+r))$$

This is singular unless $g(x) = -f(x)$, giving

$$\psi(t,r) = \frac{1}{r}(f(u) - f(v)) = \frac{1}{r}(F(p) - F(q))$$

Now, on $\mathcal{I}^-$, we have $p = -\pi/2$, and the solution is

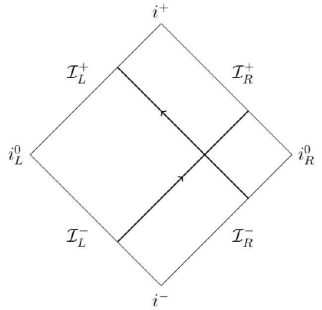
$$\frac{1}{r}F_0(q) = \frac{1}{r}(F(-\pi/2) - F(q))$$

Then the solution everywhere can be written in terms of $F_0(q)$,

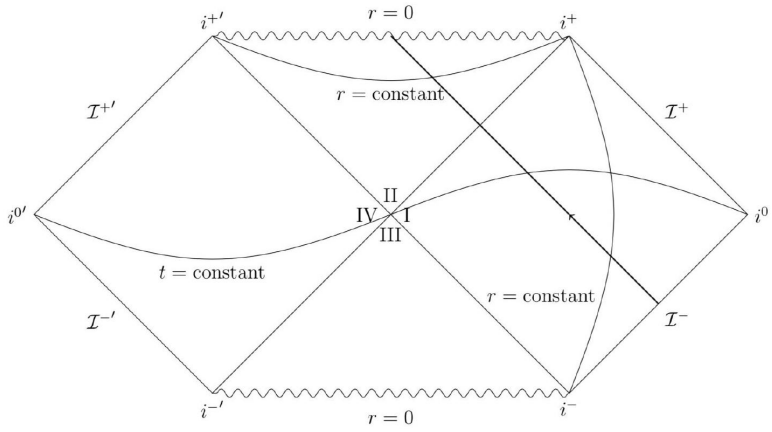
$$\psi(t,r) = \frac{1}{r}\left(F_0(q) - F_0(p)\right)$$

so it is determined by the solution on $\mathcal{I}^-$. Similarly, it is determined by the solution on $\mathcal{I}^+$.

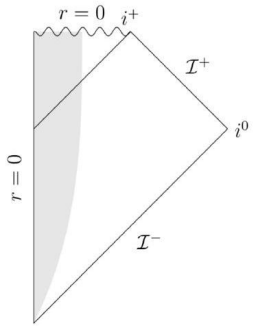
Example. Two-dimensional Minkowski spacetime, $g = -dt^2 + dr^2$. Everything proceeds as before, except that now $r \in (-\infty, \infty)$. Then the Penrose diagram has two disconnected spatial infinities and null infinities. In the three dimensional case, spatial infinity is instead a sphere S^2 and is hence connected.



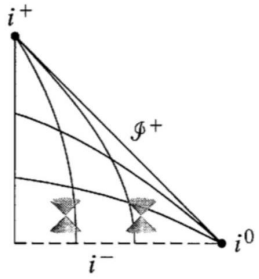
Example. The Kruskal spacetime. We know the spacetime has two asymptotically flat regions, so the 'infinity' in each of these regions should be like that of four-dimensional Minkowski spacetime. The coordinates U and V are already null, so to construct the Penrose diagram, we would have to define coordinates $P = P(U)$ and $Q = Q(V)$ so that the range of P and Q is finite, and the unphysical metric $\bar{g}$ has a smooth extension.



Example. Consider spherically symmetric gravitational collapse.



Example. The Penrose diagram for a Robertson-Walker universe with $a(t) \propto t^q$ and $q \in (0, 1)$. There is a singularity at $T = 0$.



• We denote the Levi-Civita connection of the unphysical metric $\bar{g}$ by $\bar{\nabla}$, and define

$$\bar{\nabla}_b Y^a = \nabla_b Y^a + C^a{}_{bc} Y^c$$

The difference of two connections is tensorial, so we have a tensor

$$C(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$$

whose components are $C^a{}_{bc}$, and T is symmetric since the torsion vanishes.
• Using the formula for the Christoffel symbols, we can compute

$$C^a{}_{bc} = \frac{1}{\Omega} \left(\delta^a_b \nabla_c \Omega + \delta^a_c \nabla_b \Omega - g_{bc} g^{ad} \nabla_d \Omega \right)$$

Plugging this into the Ricci identity, we get the transformation of the Ricci tensor,

$$R_{ab} = \bar{R}_{ab} + 2\Omega^{-1} \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b \Omega + \bar{g}_{ab} \bar{g}^{cd} \left(\Omega^{-1} \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}_d \Omega - 3\Omega^{-2} \partial_c \Omega \partial_d \Omega \right)$$

• As we've already seen, Weyl transformations preserve null curves. They also preserve null geodesics; consider a null geodesic with affine parameter V such that $\nabla_V V = 0$. When we compute $\bar{\nabla}_V V$, we get extra terms from $V^b V^c C^a{}_{bc}$ which are simply proportional to V, so we have a geodesic with a non-affine parameter.

• In two dimensions, every metric is conformally equivalent to a flat metric. To see this, note that we can always switch to coordinates u and v which are everywhere null, so the metric is proportional to $dudv$. By a Weyl transformation, we can set $\bar{g} = 2dudv$, which is flat.

• The simplest action for a non-minimally coupled scalar field is

$$S = \int dx\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) - \frac{\xi}{2}R\phi^2\right)$$

and in four dimensions, a lengthy calculation shows that it is Weyl invariant when $V = 0$ and $\xi = 1/6$. More generally, for $d \neq 2$ we require $V = 0$ and $\xi = (d-2)/4(d-1)$, while for $d = 2$, ξ can be arbitrary.

• The Maxwell action is also Weyl invariant,

$$S = -\frac{1}{16\pi}\int dx\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}F_{\alpha\mu}F_{\beta\nu}$$

The easiest way to show this is to write

$$S \propto \int (dA)\wedge\star(dA)$$

where it's manifest that only the Hodge star is affected by the conformal transformation; its rescaling factor precisely cancels that of A. Alternatively one can see that the theory is scale invariant and the stress-energy tensor is traceless. As an application, we can find how the electromagnetic field behaves in a Friedmann universe by conformal mapping to a flat universe, then mapping back.

• Scale invariance is the case of constant Ω. We see that under a scale transformation,

$$R_{ab} = \bar{R}_{ab}, \quad R = \Omega^2\bar{R}, \quad G_{ab} = \bar{G}_{ab}$$

As a result, the vacuum Einstein equation is scale invariant if the cosmological constant is zero.

2.5.2 8.2 Asymptotic Flatness

In this section, we formally define asymptotic flatness.

• Intuitively, an asymptotically flat spacetime is one that looks like Minkowski spacetime at infinity. We would like to regard the Kruskal spacetime as flat, but $i^\pm$and i^0 are singular. Instead, we base our definition around $\mathcal{I}^\pm$.

• A time-orientable spacetime (M, g) is asymptotically flat at null infinity if there exists a spacetime $(\bar{M}, \bar{g})$ so that

• There exists a positive function Ω on M so that $(\bar{M}, \bar{g})$ is an extension of $(M, \Omega^2 g)$.

• Within $\bar{M}, M$ can be extended to obtain a manifold with boundary, $M \cup \partial M$.

• Ω can be extended to a function on $\bar{M}$ so that $\Omega = 0$ and $d\Omega \neq 0$ on ∂M.

• ∂M is the disjoint union of two components $\mathcal{I}^+$and $\mathcal{I}^-$, each diffeomorphic to $\mathbb{R}\times S^2$.

• No past/future directed causal curve starting in M intersects $\mathcal{I}^+/\mathcal{I}^-$.

• The $\mathcal{I}^\pm$are 'complete', as defined below.

The first three conditions just require the existence of an appropriate conformal compactification. The requirement $d\Omega \neq 0$ ensures that the spacetime metric approaches the Minkowski

metric at an appropriate rate near $\mathcal{I}^{\pm}$, and the last three conditions ensure that the infinity has the same structure as in Minkowski spacetime.

• For example, consider the Schwarzschild solution in outgoing EF coordinates (u, r, θ, ϕ), and define $r = 1/x$. Then

$$g = -(1 - 2Mx)du^2 + 2\frac{dudx}{x^2} + \frac{1}{x^2}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

so choosing a conformal factor $\Omega = x$ gives the unphysical metric

$$\bar{g} = -x^2(1 - 2Mx)du^2 + 2dudx + d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$$

which can be smoothly extended across $x = 0$.

• In this case, $\mathcal{I}^+$corresponds to $r \to \infty$ with finite u, so here it is the surface $x = 0$. It is parametrized by (u, θ, ϕ) and hence diffeomorphic to $\mathbb{R} \times S^2$. Similarly one can do the same for $\mathcal{I}^-$with the same conformal factor, but in incoming EF coordinates. Thus the Schwarzschild solution is asymptotically flat at null infinity.

• We have not required that $\mathcal{I}^{\pm}$be null hypersurfaces; instead we can derive it. We multiply our transformation for R_{ab} by Ω for

$$0 = \Omega R_{ab} = \Omega\bar{R}_{ab} + 2\bar{\nabla}_a\bar{\nabla}_b\Omega + \bar{g}_{ab}\bar{g}^{cd}\left(\bar{\nabla}_c\bar{\nabla}_d\Omega - 3\Omega^{-1}\partial_c\Omega\partial_d\Omega\right)$$

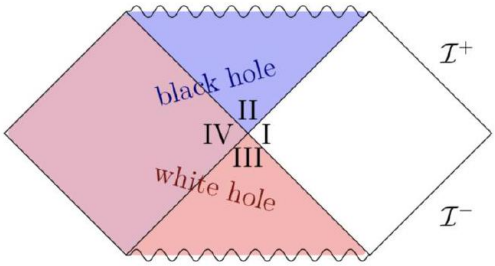
where we assume a vacuum solution for simplicity. The first three terms are regular, so the last one must be as well. Then $\bar{g}^{cd}\partial_c\Omega\partial_d\Omega$ vanishes on $\mathcal{I}^{\pm}$so $d\Omega$ is null on $\mathcal{I}^{\pm}$and normal to it. Then the $\mathcal{I}^{\pm}$are null hypersurfaces.

• There is substantial freedom in choosing the coordinates (u, θ, ϕ). One can show by some lengthy arguments that we can write

$$\bar{g}|_{\Omega=0} = 2dud\Omega + d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2$$

2.5.3 8.3 Event Horizons and Killing Horizons

• Let (M, g) be a spacetime that is asymptotically flat at null infinity. The black hole region is $\mathcal{B} = M\backslash\left(M \cap J^-\left(\mathcal{I}^+\right)\right)$where $J^-\left(\mathcal{I}^+\right)$is defined using the unphysical spacetime $(\bar{M}, \bar{g})$. The future event horizon is the boundary, $\mathcal{H}^+ = \dot{\mathcal{B}} = M \cap \dot{J}^-\left(\mathcal{I}^+\right)$. Similarly we define the white hole region as $\mathcal{W} = M\backslash\left(M \cap J^+\left(\mathcal{I}^-\right)\right)$and the past event horizon as $\mathcal{H}^- = \dot{W} = M \cap \dot{J}^+\left(\mathcal{I}^-\right)$.



• Since $\xi^a\xi_a = 0$ on $\mathcal{N}$, its gradient is normal to $\mathcal{N}$ and hence proportional to ξ_a, so

$$\nabla_a\left(\xi^b\xi_b\right)\big|_{\mathcal{N}} = -2\kappa\xi_a$$

as we've shown earlier. Then, as earlier, we have

$$\xi^b\nabla_b\xi^a\big|_{\mathcal{N}} = \kappa\xi^a$$

$$\kappa = \xi^a \partial_a \log |f|$$

Another nice formula that can be shown is

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2} \left(\nabla_a \xi_b\right) \left(\nabla^a \xi^b\right)$$

where we use $\xi_{[a} \nabla_b \xi_{c]} = 0$ since ξ is normal to Σ.

$$\xi^a = V u^a$$

where u^a is the four-velocity of a static observer, so $V = \sqrt{-\xi_a \xi^a}$. The four-acceleration is

$$a^a = u^b \nabla_b u^a = \nabla^a \log V$$

where we use $u^a \nabla_b u_a = 0$ since $u^a u_a = -1$, and $\nabla_\xi \left(\xi^2\right) = 0$ by Killing's equation.

- Therefore, the magnitude of the acceleration is

$$a = \sqrt{a_a a^a} = V^{-1} \sqrt{\nabla_a V \nabla^a V}$$

- Therefore, an observer at infinity pulls with a force per mass

$$Va = \sqrt{\nabla_a V \nabla^a V}$$

Part II
Fundamentals of Gravity

Обсудим подробно искривленное пространство-время и физику в нем.

3 Nature of Gravity

3.1 Philosophy of Space, Time, Gravity: Basics

(now it is written below by Vladimirov and Arifov, I'll add it here later. now, here, there is only my week theory)

3.1.1 Where Does Gravity Come From?

Обсудим подробно, откуда берется гравитация?

Причина гравитации

Примеры, почему есть гравитация?

Почему яблоко с дерева падает на Землю?

Рассмотрим падение яблока на поверхность Земли, пренебрегая всеми другими аспектами этого падения, кроме гравитационного ускорения.

Потому что мы как наблюдатель ускоряемся с ускорением 9.8 м/с.

И по сути все точки Земли ускоряются от ее поверхности. А Земля не разлетается, потому что пространство-время само сужается так, чтобы полностью компенсировать расширение тела.

(??? можно ли это формулой показать???)

(?? тут ведь речь идет о именно пространство, а не про пространство-время?)

А яблоко находится в покое все время, пока падает.

Вывод формулы схлопывания метрики на поверхности Земли (???)

Земля не разлетается, потому что пространство-время само сужается так, чтобы полностью компенсировать расширение тела.

(??? можно ли это формулой показать???)

(?? тут ведь речь идет о именно пространство, а не про пространство-время?)

А яблоко находится в покое все время, пока падает.

Почему планеты вращаются вокруг Солнца?

Какая связь гравитации с замедлением времени?

Почему гравитация тензорная? (!?!?!?)

(так и не понял, а ведь есть и скалярные теории.)

Гравитация и гравитационное притяжение это не одно и то же

В рамках ньютоновской механики это было одним и тем же.

В рамках ОТО это разные вещи, потому что может быть гравитационное притяжение, даже если нет гравитации. Например, такое может быть, если мы становимся в неинерциальную систему отсчета.

Гравитация это не сила (!?!???!?!?!)

(тут доказательство этого, я вообще хз, как доказать из уравнений Эйнштейна.)

3.1.2 Illustration of Gravity and Basic Thought Experiments

Примеры с подбросом мяча

(важные иллюстративные примеры)

Подброс мяча как пример перехода в ОТО (!?)

Подброс мяча как пример перехода из ОТО в Ньютоновскую физику (!?!?)

Иллюстрация искривленного пространства (!???)

(там много можно еще добавить примеры)

Обсудим самые важные мысленные эксперименты, которые в первую очередь я представляю, когда задумываюсь, почему ОТО такое, какое есть.

(подробно о них если нужно будет, то в частых ниже.)

Мысленный эксперимент о лифте и Земле

Мысленный эксперимент о реке

3.1.3 The Concept of Time in GR

Подробно обсудим всевозможные вопросы о времени с позиции ОТО.

(если места будет мало, расширю этот раздел. в 1й части только самая суть, сюда многое перенесу!)

Определение времени

Обсудим, как и почему определяется время.

(профессиональный вопрос, Мизнера потом почитаю)

Время в ОТО течет в разных точках пространства по-разному

В ОТО истинное время течет различным образом и в разных точках пространства в одной и той же системе отсчета.

(??? почему???)

Поэтому и когда мы смотрим вверх, то если бы на небе были бы часы, то мы видели бы, что они шли бы медленнее.

Из относительности времени ничего не следует (??)

Ну относительное время и что с того? Если мы не задаемся вопросами переходов к другим системам отсчета, то относительность и не важна становится.

(пока так это вижу, потом мб подумаю еще.)

Если мы находимся в ускоряющейся системе отсчета, то часы на расстоянии впереди будут тикать с большой частотой, чем часы в начале координат (????)

(?? пока не понял, почему это так????)

В одной же системе отсчета часы тикают с одинаковой частотой.

Поэтому и когда мы смотрим вверх, то если бы на небе были бы часы, то мы видели бы, что они шли бы медленнее.

В инерциальной системе отсчета падающего объекта время течет одинаково

Если этот объект ускоряется, то это относительно других объектов, сама же система отсчета инерциальная.

Синхронизация часов по ОТО

я хз

Как так, что время в разных точках одной системы отсчета течет иначе?

Это явление имеется в системах, где есть гравитация. Если нет гравитации, то там время течет одинаково.

Что делать с тем, что невозможна синхронизация (????)

(?? типа как-то это максимально странно, и как с этим жить?)

О неэквивалентности направления течения времени

В общем случае зависимости метрики от x^0 направления не эквивалентны.

А как конкретно - потом подумаю, пока хз.

Об экспериментах про проверку свойств времени

Мизер и др. в первом томе что-то привели, нужно будет - пропишу.

Указания на философские смыслы

в философию тоже можно начать рыть, так что укажем хотя бы что-то про это.

(скорее всего в отдельной записи про это соображения)

О типичных неверных понимания времени

(с опытом пойму некоторые ошибки, пока хз)

3.1.4 Equality of Inertial and Gravitational Mass

Обсудим подробно равенство инерционной и гравитационной массы.

(??? there are books about it, I'll write just main ideas here)

Можно придумать такое пространство, где нет замедления времени (???)

Это называется физика Ньютона-Картана

(потом создам про это раздел мб.)

Newton-Cartan theory (or geometrized Newtonian gravitation) is a geometrical re-formulation, as well as a generalization, of Newtonian gravity first introduced by Élie Cartan [1][2] and Kurt Friedrichs [3] and later developed by Dautcourt, [4] Dixon, [5] Dombrowski and Horneffer, Ehlers, Havas, [6] Künzle, [7] Lottermoser, Trautman, [8] and others. In this re-formulation, the structural similarities between Newton's theory and Albert Einstein's general theory of relativity are readily seen, and it has been used by Cartan and Friedrichs to give a rigorous formulation of the way in which Newtonian gravity can be seen as a specific limit of general relativity, and by Jürgen Ehlers to extend this correspondence to specific solutions of general relativity.

Classical spacetimes

In Newton-Cartan theory, one starts with a smooth four-dimensional manifold M and defines two (degenerate) metrics. A temporal metric t_{ab} with signature $(1, 0, 0, 0)$, used to assign temporal lengths to vectors on M and a spatial metric h^{ab} with signature $(0, 1, 1, 1)$. One also requires that these two metrics satisfy a transversality (or "orthogonality") condition, $h^{ab}t_{bc} = 0$. Thus, one defines a classical spacetime as an ordered quadruple $\left(M, t_{ab}, h^{ab}, \nabla\right)$, where t_{ab} and h^{ab} are as described, ∇ is a metrics-compatible covariant derivative operator; and the metrics satisfy the orthogonality condition. One might say that a classical spacetime is the analog of a relativistic spacetime (M, g_{ab}), where g_{ab} is a smooth Lorentzian metric on the manifold M.

3.1.5 On Mach's Principle

(see also my note on mechanics)

Обзор формулировок

2 Versions of Mach's Principle Recent discussions of Mach's Principle, including this one, have greatly benefitted from the 1993 Conference organised by J. Barbour and H. Pfister and the excellent book [7] resulting from it. A glance at the book (note especially J. Barbour's list on page 530) will show that there have been numerous interpretations of Mach's writings. For an authoritative account of the history of Machian ideas, the reader is referred to [7]. We now list a few versions of Mach's principle which appear in the lit3 erature. Each statement of Mach's principle, will be accompanied by a declaration of the theoretical framework in which it is intended to apply. Two levels of compatibility will be considered: Does the particular statement of Mach's Principle make sense in the theory, and secondly, is it satisfied by it? We use the letters N and E to refer to Newtonian and Einsteinian space time. Even within Einstein's theory there is a further dichotomy– is one discussing cosmology (the whole universe) or an isolated system embedded in an asymptotically flat space time? This distinction is made by the notation EA for asyptotically flat spacetimes and EC for relativistic Cosmologies. Our purpose in compiling this list is to draw attention to the diversity of ideas that pass under the guise of "Mach's principle". (Page numbers refer to [7] unless otherwise indicated.)

• Mach1: Newton's gravitational constant G is a dynamical field. (Makes sense in N, EA, EC.) Mach1 is not true in N or E. This version applied to Einstein's theory has led to Brans–Dicke Theory[8, 9].

• Mach2: An isolated body in otherwise empty space has no inertia (pp 11,39,181, 185). (Makes sense in N, EA, EC.) Neither Newtonian nor Einsteinian gravity satisfy this version. In both theories the motion of an isolated body is determined and not arbitrary.

• Mach3: local inertial frames are affected by the cosmic motion and distribution of matter (p92). (Makes sense in N, EA, EC [10].) This version is closest to the bucket experiment. In this form, Newton's theory is in clear conflict with Mach3. Einstein's theory is not (see section 4 below).

• Mach4: The universe is spatially Closed (p 79). (Makes sense only in 4 EC.) We do not know if Mach4 is true.

• Mach5: the total energy, angular and linear momentum of the universe are zero (p237).(Makes sense in N, EA, EC.) It is not true in N and EA. In EC it is claimed [11] that the total angular momentum of a closed universe must vanish.

• Mach6: Inertial mass is affected by the global distribution of matter (pp 91,249). Makes sense in (N, EA, EC). Is not true in any of them. Hoyle and Narlikar [12] proposed a theory in which implements Mach6.

• Mach7: If you take away all matter, there is no more space [13]. Makes sense in (N,EA,EC). Not true in any of them.

• Mach8: omega = 4 pi rho GT2 is a definite number of order unity (p475). (Here, rho is the mean density matter in the universe and T is the Hubble time. Makes sense in EC only.) Ω does seem to be of order unity in our present universe, but note that of all EC models, only the Einstein–DeSitter makes this number a constant, if Ω is not exactly one. Making a theory in which this approximate equality appears natural is a worthwhile and ongoing effort (eg inflationary cosmologies).

• Mach9: The theory contains no absolute elements ([14]. (Makes sense in N, EA and EC) This version is clearly explained by J¨urgen Ehlers in [7] p 458. The elements (fields, for example) appearing in the theory can be divided into dynamical (those that are varied in an Action principle) and absolute (those that are not). The Action principle leads to equations for the dynamical fields to satisfy. The absolute elements are predetermined and unaffected by the dynamics. 5 Newton's theory does not satisfy Mach9 (space and time are absolute) and neither does EA (asymptotic flatness introduces an absolute element–the flat metric at infinity). EC does satisfy Mach9 [15]. From the point of view of invariance groups (J.L Anderson, A. Trautmann, quoted on p 468 [7]) Mach9 is the requirement that the invariance group of the theory is the entire diffeomorphism group of spacetime. Viewed in this light Mach9 is just the principle of general covariance.

• Mach10: Overall rigid rotations and translations of a system are unobservable. (This version makes sense only in N; In Einsteinian spacetime one has no idea what a rigid rotation is anymore than one knows what a rigid body is.) This is not satisfied in Newtonian theory. If one insists on the principle and constructs a theory which satisfies it, one is led [16] to a class of models (called "relational" by Barbour and Bertotti [16]). There is considerable literature on these models [7, 17]. We spend a few words on these models and their connection with Newonian theory. Relational Models: Let x i a , i = 1, 2, 3, a = 1...N be the positions of N particles in Newtonian spacetime and pia their conjugate momenta. The Hamiltonian H(x, p) determines the time evolution of (x i a , pia) via Hamilton's equations. The transformation x i a (t) → R i j (t)x j a (t) pia(t) → R j i (t)pja(t), (1) where Ri j (t) is an arbitrary time dependent rotation matrix maintains the distance relations between the N particles. If a model is relational [16], such a transformation is unobservable, like a "gauge transformation" in electrodynamics. From Dirac's theory of constrained systems 6 [18, 19], it follows that the transformations (1) must be generated by first class constraints. The generator of overall rotations of the system is the total angular momentum:

Thus the system is subject to the constraints

where C i are constants. The requirement that the constraints be first class in the sense of Dirac [18] forces the constants C i to vanish. The extended Hamiltonian in the sense of Dirac is HE(x, p) = H(x, p) + om iJ

where om i are arbitrary functions. While we have only dealt with overall rotations in (1), one can similarly deal with arbitrary translations and arbitrary time reparametrizations. Relational models can be thus derived from Newtonian Hamiltonian mechanics by imposing constraints on the phase space so that the total angular momentum, momentum and Energy vanish. These relational models are clearly distinct from Newtonian theory. For instance, Newtonian theory admits solutions with nonzero angular momentum (like the solar system in an otherwise empty universe) while relational models do not permit such solutions.

3.1.6 The Gravitational Constant G

С чем связана гравитационная постоянная?

О точке зрения, что она вообще ни с чем не связана (?)

(ну так многие думают и ничего не поделать.)

Постоянная ли она?

3.1.7 The Idea of a Metric

Локально метрика всегда плоская, а вот вдали идут искривления

(тут темы от Диалекта, потом впишу, отличные темы!)

Сравнение с картами глобуса (????)

(важное сравнение)

Другое о метрике

Каждое событие имеет свои 10 цифр, которые его описывают

Независимые компоненты метрики.
(раскрою с этой стороны это)

Преобразование системы метрики при изменении ее скорости (?????)

(?? пока не знаю, как-то боюсь ошибиться, утверждая, что никак.)

Бытовые аналогии метрики (!?!??!!??)

(так и не могу это привести)

ОТО как обобщение СТО на случай, когда еще могут быть неинерциальные системы отсчета

3.1.8 The Idea of Curvature

Как понять, что наше пространство искривлено? (!??!)

(У Мизнера ответ есть, мб посмотрю потом.)

Откуда появляется кривизна?

Оттого, что две геодезические или сходятся, или расходятся.

(?? там где подробно его обсуждаю есть раздел со следствиями его?? должен быть, там полно следствий)

3.1.9 Is Statistical Physics Applicable for Models with Gravitational Field?

(general question, people assume that yes, but it is a very important question)

3.1.10 The Equivalence Principle

Обсудим принцип эквивалентности, с которым можно понимать ОТО.

(подробнее о нем в этой части, но дальше.)

Формулировка принципа эквивалентности

Формулировка

свойства движения в неинерциальной системе отсчета такие же, как в инерциальной системе при наличии гравитационного поля.

Другими словами, неинерциальная система отсчета эквивалентна некоторому гравитационному полю.

Говорят, что принцип эквивалентности именно локальный, а не глобальный, то есть работает для участков, где гравитационные силы постоянные.

И что с того, что системы эквивалентны?

вот я сижу и не взлетаю, ну эквивалентна неинерциальная система гравитационному полю, ну и в какую мне систему перейти, чтобы ушло гравитационное поле, которое меня притягивает?

в падающую вниз что ли?

хз

Вообще никакого нет способа отличить ускоряющуюся систему и нахождение в гравитационном поле? (???)

(мб и есть, пока не знаю.)

принцип эквивалентности для вращающихся систем отсчета

а вот тут уже интересно, силы кориолиса, что с ними?

Примеры исключения гравитационного поля переходом в другую СО (???)

наберу потом конкретные.

Явный пример общей ковариантности уравнений Эйнштейна (??)

(я так и не прочувствовал, что за любые замены координат. хочу явно формулами выписать это, чтобы убедиться, что по факту они ковариантны!)

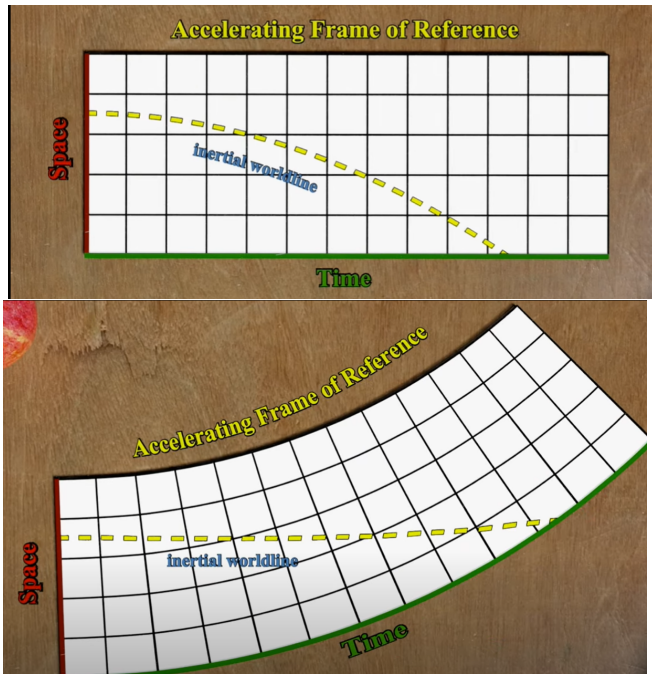
Если мы стоим на Земле, на нас действует гравитация, то куда эквивалентно мы ускоряемся?

(напишу, важный вопрос)

3.1.11 Illustration of the Equivalence Principle

Поворот системы координат как причина притяжения

(тут та самая красивая иллюстрация, напишу потом)



3.1.12 Applications of the Equivalence Principle

самое важное, знаю

Простейшие примеры

очевидно, потом напишу.

Невозможно отличить, ты находишься на Земле или в ускоряющемся лифте

(по идее тут пример приведу)

Suppose, for example, that you one day wake up to find yourself trapped inside a box that looks like an elevator. The equivalence principle says that there's no way tell whether you are indeed inside an elevator on Earth, or have been captured by aliens and are now in the far flung reaches of the cosmos in a spaceship, disguised as an elevator, and undergoing constant acceleration. (Actually there are two ways to distinguish between these possibilities. One is common sense. The other is known as tidal forces and will be described below.)

На поверхности Земли нет гравитации

Тут мы считаем, что ускорение свободного падения постоянное. Вообще никакой гравитации нет. Это мы находимся в системе отсчета, и ускоряемся постоянно.

И именно это и есть кажущееся гравитационное притяжение - когда мы находимся в ускоряющейся системе отсчета, хотя считаем, что мы в покое.

Постоянное гравитационное поле имеет нулевую кривизну

Потому что оно создает лишь кажущееся гравитационное взаимодействие, которое полностью эквивалентно ускоряющейся системе отсчета.

Факт излучения частицы и принцип эквивалентности

Применение ПЭ к электродинамике породило, однако, некоторый парадокс, касающийся излучения заряда в системах K_g и K_a.

Вопрос: на первый взгляд кажется, что заряд в системе K_g излучать, конечно, будет, но в системе K_a излучать не должен, ибо он не ускорен относительно инерциальной системы K. Системы K_g и K_a представляются, таким образом, неэквивалентными, т.е. ПЭ кажется нарушенным. Разрешению этого парадокса, выяснению того факта, что здесь "все в порядке" и ПЭ удовлетворяется, был посвящен целый ряд статей [12-14]. В [4] соответствующие аргументы были повторены, а в связи с непониманием вопроса, отразившемся в статье [8], мы в работе [10] стремились еще раз, причем более подробно, доказать справедливость ПЭ в электродинамике.

(??? а какой ответ???)

3.2 Philosophy of Space, Time, Gravity: Physical, Experimental Facts

3.2.1 Measurements of the Gravitational Constant

(????? a big question)

3.2.2 What is Exactly Time?

(discuss, what do we mean by time travel? not obvious)

3.2.3 Time Travel: GR View Point

(there are articles exactly about it)

Closed timelike curve

(discuss, what is it?)

3.2.4 Time Travel: Other Statements

(??? what is else known?)

3.3 Philosophy of Space, Time, Gravity: Extra Discussion of Basics

(this also written now at the last part of my note, I'll write it here later)

3.3.1 What Else Can be Gravity?

(intro to many theories of modified gravities)

Может ли гравитация быть скалярной? (??)

(??? как доказать, что нет??? хз, давно очень про это думал.)
(см. Мизнер Торн Уиллер, но я не врубаюсь в это так или иначе.)

Может ли гравитация быть векторной? (??)

(??? как доказать, что нет??? хз, давно очень про это думал.)

Может ли гравитация быть гамильтоновой теорией? (??)

(??? почему вообще лагранжев формализм используем??? чет так и не понял..)

3.3.2 On Misconceptions about the Nature of Gravity

Обсудим подробно заблуждения о природе гравитации.
(????)

О других неверных пониманиях

Заблуждение, что временная задержка является причиной гравитации

Постановка задачи:
Утверждается следующее: в природе если время течет иначе в разных точках пространства-времени, то оно и вызывает гравитацию. Мол масса и энергия вызывают изменение градиента времени, а градиент времени заставляет траектории движения объектов искривляться.
(четко потом напишу)
Как понять, что что-то не то:
У нас как бы есть связь будущего с прошлым через какие-то сдвиги кривизны, что??? (???)
Выход из проблемы:
(тут подробный ответ, почему это не так)

3.3.3 Equivalence of Gravitational and Inertial Masses

(why is it so and what is meant with it??)

3.3.4 What is a Force?

(same discussion is in the note on mechanics, but here the perspective is different)

3.4 Newtonian Gravity

(тут пишу также с позиций ОТО. там много деталей, которые подчеркну, потом их припоминать буду, когда сравнивать буду ОТО и ньютонову теорию.)

3.4.1 Gravitational Field in Nonrelativistic Mechanics

(!!! точно выкидываю это потом в часть про суть ото!!!)
Гравитационные поля обладают следущим основным свойством: все тела вне зависимости от их массы движутся в них (при заданных начальных условиях) одинаковым образом.

Например, законы свободного падения в поле тяготения Земли одинаковы для всех тел, какой бы массой они ни обладали, — все они приобретают одно и то же ускорение.

аналогия с неинерциальными системами отсчета - суть

(тут вкратце итог всего)

Это свойство гравитационных полей дает возможность установить существенную аналогию между движением тел в гравитационном поле и движением тел, не находящихся в каком-либо внешнем поле, но рассматриваемых с точки зрения неинерциальной системы отсчета.

(???? не хрень ли это?) Действительно, в инерциальной системе отсчета свободное движение всех тел происходит прямолинейно и равномерно и если, скажем, в начальный момент времени их скорости были одинаковыми, то они будут одинаковыми все время.

Очевидно, поэтому, что если рассматривать это движение в заданной неинерциальной системе, то и относительно нее все тела будут двигаться одинаковым образом.

Таким образом, свойства движения в неинерциальной системе отсчета такие же, как в инерциальной системе при наличии гравитационного поля.

(вообще нихрена не понятно, перепишу потом нормально)

Другими словами, неинерциальная система отсчета эквивалентна некоторому гравитационному полю.

Это обстоятельство называют принципом эквивалентности.

например, равноускоренная система отсчета эквивалентна постоянному гравитационному полю

Рассмотрим, например, движение в равномерно ускоренной системе отсчета.

Свободно движущиеся в ней тела любой массы будут, обладать относительно этой системы одинаковым постоянным ускорением, равным и противоположным ускорению самой системы отсчета.

Таким же является движение в однородном постоянном гравитационном поле, например в поле тяготения земли (в небольших участках его, где поле можно рассматривать как однородное).

Таким образом, равномерно ускоренная система отсчета эквивалентна постоянному однородному внешнему полю.

(вроде всё понятно, мб численно добавлю что-то)

например, неравноускоренная поступалтельная система отсчета эквивалентна однородному переменному гравитационному полю

В таком же смысле неравномерно ускоренная, поступательно движущаяся система отсчета эквивалентна однородному переменному гравитационному полю.

(численно добавлю эту аналогию)

не всегда эквивалентность есть

(закину в первый пар. потом)

Однако поля, которым эквивалентны неинерциальные системы отсчета, все же не вполне тождественны с «истинными» гравитационными полями, существующими и в инерциальных системах.

Между ними имеется существенное отличие в отношении их свойств на бесконечности.

На бесконечном расстоянии от создающих поле тел «истинное» гравитационное поле всегда стремится к нулю.

Поля же, которым эквивалентны неинерциальные системы отсчета, на бесконечности, напротив, неограниченно возрастают, или, в крайнем случае, остаются конечными по величине.

Так, возникающие во вращающейся системе отсчета центробежные силы неограниченно растут при удалении от оси вращения; поле, которому эквивалентна ускоренно прямолинейно движущаяся система отсчета, одинаково во всем пространстве, в том числе и на бесконечности.

Поля, которым эквивалентны неинерциальные системы отсчета, исчезают, как только мы перейдем к инерциальной системе.

В противоположность этому «истинные» гравитационные поля (существующие и в инерциальной системе отсчета) невозможно исключить никаким выбором системы отсчета.

Это видно уже из указанного выше различия между условиями на бесконечности в «истинных» гравитационных полях и в полях, которым эквивалентны неинерциальные системы; поскольку последние на бесконечности к нулю не стремятся, то ясно, что никаким выбором системы отсчета нельзя исключить «истинные» поля, обращающиеся на бесконечности в нуль.

Единственное, чего можно достичь надлежащим выбором системы отсчета, это — исключения гравитационного поля в данном участке пространства, достаточно малом для того, чтобы в нем можно было считать поле однородным.

Это можно сделать путем выбора ускоренно движущейся системы, ускорение которой было бы равно тому ускорению, которое приобретает частица, помещенная в рассматриваемом участке поля.

Движение частицы в гравитационном поле определяется в нерелятивистской механике функцией Лагранжа, имеющей (в инерциальной системе отсчета) вид

$$L = \frac{mv^2}{2} - m\varphi$$

где φ - некоторая функция координат и времени, характеризующая поле и называемая гравитационным потенциалом.

Соответственно уравнения движения частицы имеют вид

$$\dot{\mathbf{v}} = -\operatorname{grad}\varphi$$

Они не содержат массы или какой-либо другой постоянной, характеризующей свойства частицы, что является выражением основного свойства гравитационных полей.

Типичный вывод закона Ньютона

Произведем в уравнениях Эйнштейна предельный переход к нерелятивистской механике. Предположение малости скоростей всех частиц требует одновременно, чтобы само гравитационное поле было слабым. Выражение для компоненты g_{00} метрического тензора (единственной, которая нам понадобится) в рассматриваемом предельном случае было найдено в §87 (??? перевывиду и тут это!!!):

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$$

Далее, для компонент тензора энергии-импульса мы можем воспользоваться выражением (35.4) $T_i^k = \mu c^2 u_i u^k$, где μ - плотность массы тела (сумма масс покоя частиц в единице объема; индекс 0 у μ для краткости опускаем).

Что касается 4-скорости u^i, то поскольку макроскопическое движение тоже, конечно, считается медленным, то мы должны пренебречь всеми ее пространственными компонентами, оставив только временную, т.е. должны положить $u^\alpha = 0, u^0 = u_0 = 1$.

Из всех компонент T_i^k остается, таким образом, только

$$T_0^0 = \mu c^2$$

Скаляр $T = T_i^i$ будет равен той же величине μc^2.

Уравнения Эйнштейна напишем в форме $R_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T\right)$:

$$R_i^k = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k T\right)$$
$$\text{при } i = k = 0$$
$$R_0^0 = \frac{4\pi k}{c^2}\mu$$

При вычислении R_0^0 по общей формуле (92.7) замечаем, что члены, содержащие произведения величин Γ_{kl}^i, во всяком случае являются величинами второго порядка малости.

Члены же, содержащие производные по $x^0 = ct$, являются малыми (по сравнению с членами с производными по координатам x^α), как содержащие лишние степени от $1/c$.

В результате остается $R_0^0 = R_{00} = \partial\Gamma_{00}^\alpha/\partial x^\alpha$.

Подставляя

$$\Gamma_{00}^\alpha \approx -\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\beta} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}$$

находим:

$$R_0^0 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^{\alpha 2}} \equiv \frac{1}{c^2}\Delta\varphi$$

Таким образом, уравнения Эйнштейна дают:

$$\Delta\varphi = 4\pi k\mu$$

Это и есть уравнение гравитационного поля в нерелятивистской механике.

По своей форме оно полностью аналогично уравнению Пуассона (36.4) для электрического потенциала, в котором теперь вместо плотности заряда стоит плотность массы, умноженная на $-k$.

Поэтому мы можем сразу написать общее решение уравнения (99.2) по аналогии с (36.8) в виде Эта формула определяет в нерелятивистском приближении потенциал гравитационного поля любого распределения масс.

В частности, для потенциала поля одной частицы с массой m имеем:

$$\varphi = -\frac{km}{R}$$

и, следовательно, сила $F = -m'\frac{\partial\varphi}{\partial R}$, действующая в этом поле на другую частицу (массы m'), равна

$$F = -\frac{kmm'}{R^2}$$

Это - известный закон тяготения Ньютона.

Потенциальная энергия

Потенциальная энергия частицы в гравитационном поле равна ее массе, умноженной на потенциал поля, аналогично тому, что потенциальная энергия в электрическом поле равна произведению заряда на потенциал этого поля.

Поэтому мы можем написать по аналогии с (37.1) для потенциальной энергии любого распределения масс выражение

$$U = \frac{1}{2}\int \mu\varphi dV$$

Для ньютоновского потенциала постоянного гравитационного поля вдали от создающих его масс можно написать разложение, аналогичное тому, которое было получено в §\$40 – \$41 для электростатического поля.

Выберем начало координат в центре инерции масс.

Тогда интеграл $\int \mu\mathbf{r}dV$, аналогичный дипольному моменту системы зарядов, тождественно обратится в нуль.

Таким образом, в отличие от электрического поля, в гравитационном поле всегда можно исключить дипольный член. (?!!!! подумаю еще про это)

Разложение потенциала φ имеет, следовательно, вид

$$\varphi = -k\left(\frac{M}{R_0} + \frac{1}{6}D_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\frac{1}{R_0} + \ldots\right)$$

где $M = \int \mu dV$ - полная масса системы, а величины

$$D_{\alpha\beta} = \int \mu\left(3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta}\right)dV$$

можно назвать тензором квадрупольного момента масс. Он связан с обычным тензором моментов инерции $J_{\alpha\beta} = \int \mu\left(r^2\delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta\right)dV$ очевидными соотношениями

$$D_{\alpha\beta} = J_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} - 3J_{\alpha\beta}$$

Определение ньютоновского потенциала по заданному распределению масс составляет предмет одного из разделов математической физики.

(которой я пока не занимался)

Догадка до нерелятивистского предела, не зная о ней (?????)

(пока не настолько глубоко понимаю ОТО, чтобы с этой стороны написать это.)

Гравитационное поле эллипсоида

(хотя бы пару еще таких задач когда-то нужно бы порешать)

Формулы для потенциала гравитационного поля, создаваемого однородным эллипсоидальным телом получаются следующим образом.

Пусть поверхность эллипсоида задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > b > c$$

Тогда потенциал поля в произвольной точке x, y, z вне тела дается следующей формулой:

$$\varphi = -\pi\mu abck\int_\xi^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{R_s},$$

где $R_s = \sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}$, а $\xi > 0$ есть корень уравнения $\frac{x^2}{a^2+\xi} + \frac{y^2}{b^2+\xi} + \frac{z^2}{c^2+\xi} = 1$.

Потенциал поля внутри эллипсоида определяется формулой

$$\varphi = -\pi\mu abck \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right) \frac{ds}{R_s},$$

отличающейся от (99.11) заменой нижнего предела нулем; отметим, что это выражение является квадратичной функцией координат x, y, z.

Гравитационная энергия тела получается, согласно (99.6), интегрированием выражения (99.13) по объему эллипсоида.

Оно производится элементарно [1] и дает:

$$U = \frac{3km^2}{8} \int_0^\infty \left[\frac{1}{5}\left(\frac{a^2}{a^2+s} + \frac{b^2}{b^2+s} + \frac{c^2}{c^2+s}\right) - 1\right] \frac{ds}{R_s} =$$
$$= \frac{3km^2}{8} \int_0^\infty \left[\frac{2}{5} sd\left(\frac{1}{R_s}\right) - \frac{2}{5}\frac{ds}{R_s}\right]$$

$\left(m = \frac{4\pi}{3} abc\mu -\right.$ полная масса тела); интегрируя первый член по частям, окончательно получим:

$$U = -\frac{3km^2}{10} \int_0^\infty \frac{ds}{R_s}$$

Все интегралы, входящие в формулы (99.11) – (99.14), приводятся к эллиптическим интегралам первого и второго рода.

Для эллипсоидов вращения эти интегралы выражаются через элементарные функции.

В частности, гравитационная энергия сплюснутого эллипсоида вращения ($a = b > c$)

$$U = -\frac{3km^2}{5\sqrt{a^2-c^2}} \arccos\frac{c}{a},$$

а для вытянутого эллипсоида вращения ($a > b = c$):

$$U = -\frac{3km^2}{5\sqrt{a^2-c^2}} \operatorname{Arch}\frac{a}{c}$$

Для шара ($a = c$) обе формулы дают значение $U = -3\ \mathbf{km}^2/5a$, которое разумеется, можно получить и элементарным путем.

Равновесная форма равномерно вращающейся жидкости (?!)

(вроде крутая задача очень!!)

Обсудим, какая равновесная форма равномерно вращающейся как целое однородной гравитирующей массы жидкости.

Условие равновесия заключается в условии постоянства вдоль поверхности тела суммы гравитационного потенциала и потенциала центробежных сил:

$$\varphi - \frac{\Omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) = \text{ const}$$

(Ω - угловая скорость вращения; ось вращения - ось z).

Искомая форма представляет собой сплюснутый эллипсоид врашения.

Для определения его параметров подставляем (99.13) в условие равновесия и исключаем z^2 с помощью уравнения (99.10); это дает:

$$\left(x^2+y^2\right)\left[\int_0^\infty \frac{ds}{\left(a^2+s\right)^2\sqrt{c^2+s}} - \frac{\Omega^2}{2\pi\mu k a^2 c} - \frac{c^2}{a^2}\int_0^\infty \frac{ds}{\left(a^2+s\right)\left(c^2+s\right)^{3/2}}\right] = \text{const}$$

откуда следует, что выражение в квадратных скобках должно обращаться в нуль.

Произведя интегрирование, получим в результате уравнение:

$$\frac{\left(a^2+2c^2\right)}{\left(a^2-c^2\right)^{3/2}}\arccos\frac{c}{a} - \frac{3c^2}{a^2-c^2} = \frac{\Omega^2}{2\pi k\mu} = \frac{25}{6}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\frac{M^2\mu^{1/3}}{m^{10/3}k}\left(\frac{c}{a}\right)^{4/3}$$

$\left(M=\frac{2}{5}ma^2\Omega-\right.$ момент импульса тела относительно оси z), определяющее отношение полуосей c/a по заданному Ω или M.

Зависимость отношения c/a от M - однозначная; c/a монотонно убывает с увеличением M.

Оказывается, однако, что найденная симметричная форма устойчива (по отношению к малым возмущениям) лишь при не слишком больших значениях M.

Именно, она теряет устойчивость при $M=0,24k^{1/2}\ \mathbf{m}^{5/3}\mu^{-1/6}$ (причем $c/a=0,58$).

При дальнейшем увеличении M равновесной становится форма трехосного эллипсоида с постепенно убывающими (соответственно от 1 и от 0,58) значениями b/a и c/a.

Эта форма, в свою очередь, становится неустойчивой при $M=0,31k^{1/2}m^{5/3}\mu^{-1/6}$ (причем $a:b:c=1:0,43:0,34$)[1]).

3.4.2 Typical Models in Scope of Newtonian Gravity

(???? add later)

3.4.3 Gravitational Field in Relativistic Mechanics

(!!! точно выкидываю это потом в часть про суть ото!!!)

суть гравитационных полей в релятивистской механике

(???) системы отсчета в ОТО всегда криволинейные

Основное свойство гравитационных полей, что все тела движутся в них одинаковым образом, остается в силе и в релятивистской механике.

Остается, следовательно, и аналогия между гравитационными полями и неинерциальными системами отсчета.

Поэтому естественно при изучении свойств гравитационных полей в релятивистской механике тоже исходить из этой аналогии.

В инерциальной системе отсчета в декартовой системе координат интервал ds определяется формулой

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

При переходе к любой другой инерциальной системе отсчета - при преобразовании Лоренца - интервал, сохраняет тот же самый вид.

Однако, если мы перейдем к неинерциальной системе отсчета, то ds^2 уже не будет суммой квадратов дифференциалов четырех координат.

Так, при переходе к равномерно вращающейся системе координат

$$\begin{aligned} x =& x' \cos \Omega t - y' \sin \Omega t, \\ y =& x' \sin \Omega t + y' \cos \Omega t, \\ z =& z' \end{aligned}$$

где Ω - угловая скорость вращения, направленная вдоль оси z.

И интервал приобретает вид

$$ds^2 = \left[c^2 - \Omega^2 \left(x'^2 + y'^2\right)\right] dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2\Omega y' dx' dt - 2\Omega x' dy' dt$$

По какому бы закону ни преобразовывалось время, это выражение не может быть приведено к сумме квадратов дифференциалов четырех координат. (? чет не очевидно...)

Таким образом, в неинерциальной системе отсчета квадрат интервала является некоторой квадратичной формой общего вида от дифференциалов координат, т.е. имеет вид

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

где g_{ik} - некоторые функции пространственных координат x^1, x^2, x^3 и временной координаты x^0.

Четырехмерная система координат $x^0, x^1,\ x^2, x^3$ является, таким образом, при пользовании неинерциальными системами отсчета криволинейной.

Величины g_{ik}, определяя все свойства геометрии в каждой данной криволинейной системе координат, устанавливают, как говорят, метрику пространства-времени.

Величины g_{ik} можно,

всегда считать симметричными по индексам i и $k\,(g_{ik} = g_{ki})$, поскольку они определяются из симметричной формы (82.1), куда g_{ik} и g_{ki} входят помноженными на одно и то же произведение $dx^i dx^k$.

В общем случае имеется, следовательно, всего 10 различных величин g_{ik} - четыре с одинаковыми и $4 \cdot 3/2 = 6$ с различными индексами.

В инерциальной системе отсчета при пользовании декартовыми пространственными координатами $x^{1,2,3} = x, y, z$ и временем $x^0 = ct$ величины g_{ik} равны

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{ik} = 0 \quad \text{при } i \neq k.$$

Систему координат с этими значениями g_{ik} мы будем называть галилеевской.

В предыдущем параграфе было показано, что неинерциальные системы отсчета эквивалентны некоторым силовым полям.

Мы видим теперь, что в релятивистской механике эти поля определяются величинами g_{ik}

То же самое относится и к «истинным» гравитационным полям.

Всякое гравитационное поле является не чем иным, как изменением метрики пространства-времени, соответственно чему оно определяется величинами g_{ik}.

Это важнейшее обстоятельство означает, что геометрические свойства пространства-времени (его метрика) определяются физическими явлениями, а не являются неизменными свойствами пространства и времени.

Теория гравитационных полей, построенная на основе теории относительности, носит название общей теории относительности.

Она была создана Эйнштейном (и окончательно сформулирована им в 1915 г.) и является, пожалуй, самой красивой из существующих физических теорий.

Замечательно, что она была построена Эйнштейном чисто дедуктивным путем и лишь в дальнейшем была подтверждена астрономическими наблюдениями.

Как и в нерелятивистской механике, между «истинными» гравитационными полями и полями, которым эквивалентны неинерциальные системы отсчета, имеется коренное отличие.

При переходе к неинерциальной системе отсчета квадратичная форма имеет вид (82.1), т.е.

величины g_{ik} получаются из их галилеевых значений (82.2) преобразованием координат, а потому обратным преобразованием могут быть снова приведены во всем пространстве к галилеевым значениям.

То, что такой вид g_{ik} является лишь весьма специальным, видно уже из того, что преобразованием всего лишь четырех координат нельзя, в общем случае, привести десять величин g_{ik} к наперед заданному виду.

Истинное гравитационное поле не может быть исключено никаким преобразованием координат.

Другими словами, при наличии гравитационного поля пространство-время таково, что определяющие его метрику величины g_{ik} никаким преобразованием координат не могут быть приведены во всем пространстве к их галилееву виду.

Такое пространство-время называют кривым в отличие от плоского, в котором указанное приведение возможно.

Надлежащим преобразованием координат можно, однако, привести g_{ik} к галилееву виду в любой отдельной точке негалилеева пространства-времени: это сводится к приведению к диагональному виду квадратичной формы с постоянными коэффициентами (значения g_{ik} в данной точке).

Такую систему координат мы будем называть галилеевой для данной точки 1).

Заметим, что, будучи приведенной в данной точке к диагональному виду, матрица величин g_{ik} имеет одно положительное и три отрицательных главных значения (совокупность этих знаков называют сигнатурой матрицы).

Отсюда следует, в частности, что определитель g, составленный из величин g_{ik}, в реальном пространстве-времени всегда отрицателен:

$$g < 0$$

Изменение метрики пространства-времени означает также и изменение чисто пространственной метрики.

Галилеевым g_{ik} в плоском пространстве-времени соответствует евклидова геометрия пространства.

В гравитационном же поле геометрия пространства становится неевклидовой.

Это относится как к «истинным» гравитационным полям, в которых пространство-время «искривлено», так и к полям, возникающим лишь от неинерциальности системы отсчета и сохраняющим пространство-время плоским.

Вопрос о пространственной геометрии в гравитационном поле будет рассмотрен более подробно в §84.

Здесь же полезно привести простое рассуждение, наглядно иллюстрирующее неизбежность возникновения неевклидовости пространства при переходе к неинерциальной системе отсчета.

Рассмотрим две системы отсчета, из которых одна (K) инерциальна, а другая (K') равномерно вращается относительно K вокруг общей оси z.

Окружность в плоскости xy системы K(**c** центром в начале координат) может рассматриваться и как окружность в плоскости $x'y'$ системы K'.

Измеряя длину окружности и ее диаметр масштабной линейкой в системе K, мы получим значения, отношение которых равно π, в соответствии с евклидовостью геометрии в инерциальной системе отсчета.

Пусть теперь измерение производится неподвижным относительно K' масштабом.

Наблюдая за этим процессом из системы K, мы найдем, что масштаб, приложенный вдоль окружности, претерпевает лоренцево сокращение, а радиально приложенный масштаб не меняется.

Ясно поэтому, что отношение длины окружности к ее диаметру, полученное в результате такого измерения, окажется больше π.

В общем случае произвольного переменного гравитационного поля метрика пространства не только неевклидова, но еще и меняется со временем.

Это значит, что меняются со временем соотношения между различными геометрическими расстояниями.

В результате взаимное расположение внесенных в поле «пробных частиц» ни в какой системе координат не может оставаться неизменным.

Так, если частицы расположены вдоль какой-либо окружности и вдоль ее диаметра, то поскольку отношение длины окружности к длине диаметра не равно π и меняется со временем, ясно, что если расстояния частиц вдоль диаметра остаются неизменными, то должны изменяться расстояния вдоль окружности, и наоборот.

Таким образом, в общей теории относительности, вообще говоря, невозможна взаимная неподвижность системы тел.

Это обстоятельство существенно меняет само понятие системы отсчета в общей теории относительности по сравнению с тем смыслом, который оно имело в специальной теории.

В последней под системой отсчета понималась совокупность покоящихся друг относительно друга, неизменным образом взаимно расположенных тел.

При наличии переменного гравитационного поля таких систем тел не существует и для точного определения положения частицы в пространстве необходимо, строго говоря, иметь совокупность бесконечного числа тел, заполняющих все пространство, наподобие некоторой «среды».

Такая система тел вместе со связанными с каждым из них произвольным образом идущими часами и является системой отсчета в общей теории относительности.

В связи с произвольностью выбора системы отсчета законы природы должны записываться в общей теории относительности в виде, формально пригодном в любой четырехмерной системе координат (или, как говорят, в ковариантном виде).

Это обстоятельство, однако, разумеется, не означает, физической эквивалентности всех этих систем отсчета (подобной физической эквивалентности всех инерциальных систем отсчета в специальной теории).

Напротив, конкретный вид физических явлений, в том числе свойства движения тел, во всех системах отсчета становится различным.

3.4.4 Newtonian Mechanics as a Particular Case of GR

Покажем, что все в ньютоновской механике можно также решить, умея работать с уравнениями Эйнштейна в нерелятивистском пределе. (!??!?!??!! пока так и не понял это.)

Derivation of Newtonian mechanics

Сравнение движения в рамках ОТО с движением в рамках теории гравитации Ньютона (??)

Сравнение орбит

(у Тонга написано, я тоже себе напишу тут потом.)

Пример систем, в которых есть влияние плотности импульса и энергии на гравитацию

(типично, говорят, что в ньютоновской теории такого влияния вообще нет, а в ОТО - есть. вот и пример когда-то напишу тут.)

3.5 Basic topics in gravity by Zhou

3.5.1 Riemannian Geometry for gravity

2.1 The Metric

• The metric tensor $g_{\mu\nu}$ is a nondegenerate symmetric $(0, 2)$ tensor. Since the metric is nondegenerate, $g = |g_{\mu\nu}| \neq 0$. Then there exists an inverse metric, a (2,0) tensor satisfying

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = g_{\sigma\lambda}g^{\lambda\mu} = \delta^{\mu}_{\sigma}$$

For example, the trace of g is $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \delta^{\mu}_{\mu} = 4$, in any signature.

• Unlike in special relativity, index placement now matters (it cannot be restored at the end of the calculation) because the metric has a nontrivial derivative. For example, since

$$\partial_\lambda \left(g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma}\right) = \left(\partial_\lambda g^{\mu\nu}\right) g_{\nu\sigma} + g^{\mu\nu}\left(\partial_\lambda g_{\nu\sigma}\right) = 0$$

we conclude that

$$\partial_\lambda g^{\mu\nu} = -g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}\partial_\lambda g_{\sigma\rho}$$

The minus sign is the same one as in $(1/f)' = -f'/f^2$.

• The metric is extremely useful: we use it to raise and lower indices, and compute path lengths and proper times, giving geodesics. It determines causality and locally inertial frames. It is the generalization of both the Newtonian dot product and the Newtonian gravitational potential.

• The metric is in canonical form if it is diagonal, with p and q elements equal to 1 and -1 respectively. Sylvester's theorem states that this can always be done at any given point, with p and q unique. By continuity, the signature (p, q) is the same throughout the manifold.

• If $q = 0$, the metric is called Euclidean/Riemannian, and if $q = 1$ (as in relativity) the metric is called Lorentzian/pseudo-Riemannian; the canonical form is the Minkowski metric.

• The metric takes two vectors and gives a number, so it may be written as

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

Here, ds^2 is the metric tensor in component-free form, and $dx^\mu dx^\nu$ is a tensor product. Since the metric is symmetric, we use symmetrized tensor products so that $dxdy = dydx$.

• The length of a spacelike curve is

$$s = \int \sqrt{g(V, V)}dt$$

where $V^\mu(t) = dx^\mu(t)/dt$. Similarly, the proper time along a timelike curve is

$$\tau = \int \sqrt{-g(V, V)}dt$$

Note that t is not time, but just an arbitrary parameter. If we parametrize by proper time, then $V^\mu = dx^\mu/d\tau$ is the four-velocity, giving $g(V, V) = -1$ just as in special relativity.

Note. Parameter counting for coordinate transformations. Let $x^\mu(p) = x^{\hat{\mu}}(p) = 0$, and expand

$$g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\hat{\mu}}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\hat{\nu}}} g_{\mu\nu}$$

in a Taylor series in $x^{\hat{\mu}}$ about p. Expanding both sides to second order in the $x^{\hat{\mu}}$, dropping constants and indices and evaluating all derivatives at p, we have

$$(\hat{g}) + (\hat{\partial}\hat{g})\hat{x} + (\hat{\partial}\hat{\partial}\hat{g})\hat{x}\hat{x} = \left(\frac{\partial x}{\partial \hat{x}}\frac{\partial x}{\partial \hat{x}} g\right) + \left(\frac{\partial x}{\partial \hat{x}}\frac{\partial^2 x}{\partial \hat{x}\partial \hat{x}} g + \frac{\partial x}{\partial \hat{x}}\frac{\partial x}{\partial \hat{x}}\hat{\partial} g\right)\hat{x}$$
$$\left(\frac{\partial x}{\partial \hat{x}}\frac{\partial^3 x}{\partial \hat{x}\partial \hat{x}\partial \hat{x}} g + \frac{\partial^2 x}{\partial \hat{x}\partial \hat{x}}\frac{\partial^2 x}{\partial \hat{x}\partial \hat{x}} g + \frac{\partial x}{\partial \hat{x}}\frac{\partial^2 x}{\partial \hat{x}\partial \hat{x}}\hat{\partial} g + \frac{\partial x}{\partial \hat{x}}\frac{\partial x}{\partial \hat{x}}\hat{\partial}\hat{\partial} g\right)\hat{x}\hat{x}$$

Now let's consider this expression order-by-order in $\hat{x}$.

• At zeroth order, we get the transformation law at p. There are 16 parameters in the matrix $\partial x^\mu / \partial x^{\hat{\mu}}$, but the metric only has 10, since it's symmetric. Therefore we can always bring the metric into canonical (i.e. Minkowski) form at a point, and the extra 6 degrees of freedom are the Lorentz transformations.

• At first order, we have 40 numbers on the left-hand side, from 4 derivatives of 10 metric components. On the right-hand side, the $(\partial x/\partial \hat{x})^2$ term gives nothing since it was used up at zeroth order, but $\partial^2 x^\mu / \left(\partial x^{\hat{\mu}_1} \partial x^{\hat{\mu}_2}\right)$ has 40 parameters, since the second derivative is symmetric. Then we have just enough freedom to set $\hat{\partial}\hat{g}$ to zero.

• At second order, we have 100 numbers on the left-hand side, since $\hat{\partial}\hat{\partial}$ is symmetric. On the right-hand side, we can only set $\partial^3 x/\partial\hat{x}\partial\hat{x}\partial\hat{x}$, which has 4 choices in the numerator and 20 in the denominator, so we're short by 20 degrees of freedom. These tell us about the curvature of the manifold; we will see later the Riemann tensor has 20 independent components.

Note. As motivated above, at any point p, there should exist a coordinate system x^μ with

$$g_{\mu\nu}(p) = \eta_{\mu\nu}, \quad \partial_\sigma g_{\mu\nu}(p) = 0$$

Such coordinates are called locally inertial coordinates, or Riemann normal coordinates, and the associated basis vectors constitute a local Lorentz frame. These frames are associated with freely falling observers, as they see no effects of gravity besides tidal effects, which only appear to second order. Later, we will construct such coordinates using geodesics.

Locally inertial coordinates are useful for extracting general expressions. While a calculation in curved spacetime may be difficult, we can always go into locally inertial coordinates at a point and simplify using $g \sim \eta$ and $\partial g = 0$. As long as we phrase our final answers in terms of tensorial quantities, they must hold in all coordinate systems.

Note. We can always choose a basis at every point so that the metric is in canonical form at every point. However, such a set of bases generally does not mesh together to form a coordinate system.

Example. In a more elementary treatment, we think of dx^μ as an infinitesimal displacement and ds as an infinitesimal length. For example, consider the metric

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2q} dx^2$$

We want to find the null paths $x^\mu(\lambda)$ followed by light. The tangent vector is

$$V = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\partial_\mu$$

Then the null paths must satisfy

$$ds^2(V,V) = -dt^2(V,V) + t^{2q}dx^2(V,V) = 0$$

Now, working very explicitly, we have

$$dt^2(V,V) = [dt(V)]^2 = \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2, \quad 0 = -\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + t^{2q}\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2$$

We now have an ordinary differential equation, which simplifies to

$$\frac{dx}{dt} = \pm t^{-q}, \quad t = (1-q)^{1/(1-q)}\left(\pm x - x_0\right)^{1/(1-q)}$$

In the more elementary view, we could have "set $ds = 0$ " and then "divided by dt^2 " and "taken the square root". This more casual procedure always gives the same result.

2.2 Geodesics

In this section, we derive the geodesic equation.

• In general relativity, we postulate that free massive particles follow paths of maximum proper time, called geodesics. This corresponds to the Lagrangian

$$L = \sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}, \quad S = \int L d\lambda$$

for paths $x^\mu(\lambda)$, where the dot indicates differentiation with respect to λ.

• Physically, this postulate makes sense because such paths are locally straight through spacetime, just like segments of minimum length are straight lines in Euclidean space.

• By the chain rule, the action above is invariant under reparametrization. Given a path, a useful choice is the proper time τ along the curve, since $L = 1$. Now, given a variation $\delta x^\mu(\tau)$ about this path, the Lagrangian varies by

$$\delta(\sqrt{1+\epsilon}) = \epsilon/2$$

If we instead used the Lagrangian $-L^2$, the variation would be $-\epsilon$. Since these are proportional, the two actions have the same stationary points.

• The new action $-\int L^2 d\tau$ is not reparametrization invariant. If we switch to a new parameter λ, the integrand is multiplied by $d\lambda/d\tau$. To maintain the same stationary points, this must be a constant, so our results will only be valid for parameters affinely related to τ, i.e. $\lambda = a\tau + b$.

• We can find geodesics with the Euler-Lagrange equations, but in this case it's easier to directly plug in the variation,

$$x^\mu \to x^\mu + \delta x^\mu, \quad g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + (\partial_\sigma g_{\mu\nu})\,\delta x^\sigma$$

We then work to first order and integrate by parts as usual, taking care to include derivatives of the metric (i.e. $dg_{\mu\nu}/d\tau = (\partial_\sigma g_{\mu\nu})\,dx^\sigma/d\tau$), to bring out a factor of δx^μ.

• Finally, solving for the acceleration gives the geodesic equation,

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho = 0$$

where the Christoffel symbols are

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}\left(\partial_\nu g_{\rho\sigma} + \partial_\rho g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\nu\rho}\right)$$

This only holds for affine parameters; otherwise an extra term appears. We have symmetrized the Christoffel symbols in the lower two indices, as $\dot{x}^\nu \dot{x}^\rho$ is symmetric.

• We will also use the comma notation for partial derivatives,

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left(g_{\rho\sigma,\nu} + g_{\sigma\nu,\rho} - g_{\nu\rho,\sigma} \right)$$

If there are multiple indices after the comma, they indicate higher derivatives.

We now make some remarks about this result.

• Sometimes, it's easiest to compute the Christoffel symbols by using the geodesic equation in reverse, explicitly varying the proper time integral to compute $\ddot{x}^\mu$. Another shortcut method when many metric components are zero is to just read them off from the four Euler-Lagrange equations, which will each be simple.

• We never used the fact that the metric was Lorentzian, so the geodesic equation also can be used to find, e.g., shortest paths in space. It can also be used to find shortest spacelike paths in relativity; in this case we have $L = \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$ and parametrize by the proper length s so that $L = 1$, and the rest of the derivation goes through as before.

• To see that the path is a maximum of proper time and not a minimum, note that we can always approximate a timelike path with many lightlike paths, which have zero proper time.

• If we add forces, they will appear on the right-hand side of the geodesic equation; for example, the electromagnetic force would appear as $qF^{\mu\nu} u_\nu$.

• As we'll see later, geodesics are paths that parallel transport their own tangent vector $dx^\mu/d\lambda$, which implies that its norm remains fixed. Thus a geodesic timelike at one point is timelike everywhere, and so on. This can also be shown directly from the squared Lagrangian; the norm of the four-velocity is the conserved quantity associated with τ-translation invariance.

• Null geodesics are paths obeying the geodesic equation that are everywhere null. Our derivation above doesn't work for massless particles, but we can show using the einbein action (as introduced in the notes on String Theory) that massless particles follow null geodesics.

• As for timelike geodesics, null geodesics have affine freedom in their parametrizations, but there is no canonical choice like the proper time. One typical choice is

$$p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

so that the velocity is the momentum. For a timelike geodesic, the velocity is the momentum per unit mass, so the null geodesic parameter λ is essentially τ/m in the limit $m \to 0$.

• Finally, there are spacelike geodesics, which we parametrize by proper length. These would appear, for example, as the paths of taut strings.

2.3 Covariant Derivatives

The partial derivative ∂_μ does not map tensors to tensors, so equations involving it are typically not valid in general in curved spacetime. We fix this problem by replacing the partial derivative with the covariant derivative.

• We define the covariant derivative with the following postulates.

• ∇ is a map from (k, l) tensor fields to $(k, l+1)$ tensor fields.

• Linearity: $\nabla(T + S) = \nabla T + \nabla S$.

• Leibniz (product) rule: $\nabla(T \otimes S) = (\nabla T) \otimes S + T \otimes (\nabla S)$.

• Reduces to partial derivative for scalars: $(\nabla f)_\mu = \partial_\mu f$.

• Compatible with contractions: $\nabla \left(\delta^\mu_\nu \right) = 0$.

Such a structure is independent of a metric.

• The third postulate is reasonable since ∇ should act like a derivative. The fourth follows because there's no issue with differentiation of scalars, as their values don't depend on local

basis choices. The fifth is sensible because the identity map shouldn't change. Combining it with the Leibniz rule gives, for example, $\nabla_\nu \left(A^\mu B_\mu\right) = \nabla_\nu \left(A^\mu\right) B_\mu + A^\mu \nabla_\nu \left(B_\mu\right)$.

• We can also define directional covariant derivatives, i.e. $W^\mu \nabla_\mu V^\nu$ is the rate of change of V along W. We write $W^\mu \nabla_\mu = \nabla_W$, so that ∇_W is a map from (k,l) tensor fields to (k,l) tensor fields. This is a more general starting point, as we may replace the fourth postulate with $\nabla_W f = W(f)$, which works without a coordinate basis.

• There are several notations for covariant derivatives,

$$\left(\nabla_\nu V\right)^\mu = \nabla_\nu V^\mu = V^\mu_{;\nu} = \left(\nabla V\right)^\mu{}_\nu$$

The second notation is ambiguous because it can also be thought of as the covariant derivative of the component function V^μ, which would simply be $\partial_\nu V^\mu$. The correct meaning must be inferred from context. Generally, V^μ stands for the component function alone when there is a corresponding vector ∂_μ somewhere else in the equation, as in $\left(\nabla V^\mu\right)\partial_\mu$. Alternatively, one can use abstract index notation, where $\nabla_a V^b$ is unambiguously equal to $V^a{}_{;b}$.

• When there are multiple indices after the semicolon, the derivative immediately after the semicolon is taken first, e.g. $V^\mu_{;\rho\sigma} = \nabla_\sigma \nabla_\rho V^\mu$.

We now construct the covariant derivative of a tensor field explicitly.

• Given a basis $\{e_\mu\}$ at every point, not necessarily a coordinate basis, we define

$$\nabla_\nu e_\mu = \Gamma^\rho_{\mu\nu} e_\rho$$

where the Γ 's are the connection coefficients; these are simply a set of numbers that depends on the basis.

• Therefore the covariant derivative of a general vector is

$$\nabla_\nu W = \nabla_\nu \left(W^\mu e_\mu\right) = \left(\nabla_\nu W^\mu\right) e_\mu + W^\mu \left(\nabla_\nu e_\mu\right) = \left(\partial_\nu W^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\nu} W^\mu\right) e_\rho$$

Thus, relapsing into our sloppy notation,

$$\nabla_\nu W^\rho = \partial_\nu W^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\nu} W^\mu$$

• We can compute the transformation of the connection coefficients using our first definition. Denoting the new basis with a prime and the Jacobian as J,

$$\Gamma^{\rho'}_{\mu'\nu'} e_{\rho'} = \nabla_{\nu'} e_{\mu'} = J^\nu_{\nu'} \nabla_\nu \left(J^\mu_{\mu'} e_\mu\right) = J^\nu_{\nu'} \nabla_\nu \left(J^\mu_{\mu'}\right) e_\mu + J^\nu_{\nu'} J^\mu_{\mu'} \nabla_\nu e_\mu$$

Recognizing the unprimed connection coefficients on the right, and rearranging gives

$$\Gamma^{\rho'}_{\mu'\nu'} = J^{\rho'}_\rho J^\nu_{\nu'} J^\mu_{\mu'} \Gamma^\rho_{\mu\nu} + J^{\rho'}_\rho \partial_{\nu'} J^\rho_{\mu'}$$

We get the expected tensorial term, plus an extra term that is independent of Γ.

• This shows that the connection coefficients are not a tensor, but the difference of connection coefficients is, so we define the torsion tensor

$$T^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu}$$

We say a connection is torsion free if the torsion vanishes.

• Another way to see this result is to consider the map $\nabla : X, Y \mapsto \nabla_X Y$. This is not a $(1,2)$ tensor because it is not linear in Y,

$$\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + Y \nabla_X f$$

However, the difference of two covariant derivatives $\nabla - \nabla'$ is a $(1,2)$ tensor because the extra term $Y \nabla_X f = Y \nabla'_X f = YX(f)$ cancels out.

• Above, the Jacobian is defined as

$$J^{\mu'}_{\nu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}}, \quad J^{\mu}_{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu'}}$$

Then the chain rule says that

$$J^{\mu'}_{\nu} J^{\nu}_{\rho'} = \delta^{\mu'}_{\rho'}$$

and differentiating both sides gives

$$\left(\partial_{\sigma'} J^{\mu'}_{\nu}\right) J^{\nu}_{\rho'} + J^{\mu'}_{\nu} \left(\partial_{\sigma'} J^{\nu}_{\rho'}\right) = 0$$

• The extra transformation term for Γ makes $\nabla_\nu W^\rho$ into a tensor. Note that

$$\partial_{\nu'} W^{\rho'} = J^{\nu}_{\nu'} J^{\rho'}_{\rho} \partial_\nu W^\rho + W^\rho \partial_{\nu'} \left(J^{\rho'}_{\rho}\right)$$

Applying our Jacobian identity above shows that the extra nontensorial pieces cancel.

• Applying the Leibniz rule gives the covariant derivative for covectors,

$$\nabla_\rho \eta_\mu = \partial_\rho \eta_\mu - \Gamma^{\nu}_{\mu\rho} \eta_\nu$$

The covariant derivative for a rank (r, s) tensor T is similar. Besides the partial derivative term, we get $r + s$ terms, each of which have a factor of Γ contracted to one index, where downstairs indices T get terms with minus signs. In general, one of the left two indices in each Γ is contracted with T, while the bottom right index is the index on ∇.

Next, we consider some properties of torsion-free connections.

• A general, coordinate-free definition of a torsion-free connection is one which satisfies

$$\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f$$

in any basis. In general we would have

$$\nabla_a \nabla_b f - \nabla_b \nabla_a f = -T^{c}_{ab} \nabla_c f$$

• It's straightforward to show that in any basis,

$$f_{;\mu\nu} = f_{,\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} f_{,\rho}$$

Antisymmetrizing both sides and restricting to a coordinate basis, $f_{[\mu\nu]} = 0$, which gives $\Gamma^{\rho}_{[\mu\nu]} = 0$, our earlier definition of a torsion-free connection.

• Geometrically, this tells us that in the absence of torsion, parallel transporting in a square of side a gives a closed curve, up to $O\left(a^3\right)$ terms due to the curvature.

• As another example, note that

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = X^\nu \nabla_\nu Y^\mu - Y^\nu \nabla_\nu X^\mu = X^\nu \partial_\nu Y^\mu - Y^\nu \partial_\nu X^\mu + 2\Gamma^{\mu}_{[\rho\nu]} X^\nu Y^\rho$$

Therefore, for any torsion-free connection, and any vector fields X and Y,

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

This is a nice result, since we now can compute $[X, Y]$ without intermediate nontensorial quantities. More generally, we can compute the Lie derivative and exterior derivative, for a torsion-free connection, by replacing all partial derivatives by covariant ones.

We now define the Levi-Civita connection used in general relativity.

• A connection is metric compatible if $\nabla g = 0$. We claim that there exists a unique torsionfree metric compatible connection, called the Levi-Civita connection, where the connection coefficients are the Christoffel symbols.

• The metric compatibility condition is

$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = \Gamma^\rho_{\beta\alpha} g_{\rho\gamma} + \Gamma^\rho_{\gamma\alpha} g_{\beta\rho}$$

To show that the Christoffel symbols obey it, we simply plug them in. To show they are the only things that obey it, note that we can add this equation to itself to get Christoffel symbols on the left-hand side, and simplifying the right-hand side gives the connection coefficients.

• Metric compatibility allows us to raise and lower indices through the covariant derivative,

$$g_{\mu\lambda} \nabla_\rho V^\lambda = \nabla_\rho V_\mu$$

We may also define an upper covariant derivative $\nabla^\mu = g^{\mu\nu}\nabla_\nu$. Without metric compatibility, this would be different from $\nabla_\nu g^{\mu\nu}$, but with metric compatibility they are perfectly equivalent.

Note. Philosophically, the torsion-free criterion is so natural that, when considering theories with torsion, we prefer to think of the connection as remaining torsion-free but with the torsion tensor acting as a new matter field.

Note. We repeat the derivation of the Levi-Civita connection without indices. Note that

$$X(g(Y,Z)) = \nabla_X(g(Y,Z)) = g\left(\nabla_X Y, Z\right) + g\left(Y, \nabla_X Z\right)$$

Adding copies of this equation to itself with the indices permuted gives

$$\begin{aligned} X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) \\ = g\left(\nabla_X Y + \nabla_Y X, Z\right) - g\left(\nabla_Z X - \nabla_X Z, Y\right) + g\left(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X\right) \end{aligned}$$

Since the connection is torsion-free, we use our expression for the commutator to isolate the covariant derivative, resulting in the Koszul formula

$2g\left(\nabla_X Y, Z\right) = X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) + g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) - g([Y,Z],X)$.

Since the metric is nondegenerate, this determines $\nabla_X Y$ and hence the connection. To recover our usual expression, we specialize to a coordinate basis; the commutator terms vanish and we read off the Christoffel symbols. For completeness, we should check that $\nabla_X Y$ defined above really does obey the properties of a connection, such as $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$. This check is long but straightforward.

2.4 Parallel Transport and Geodesics

Next, we define parallel transport and connect it to geodesics.

• Consider a parametrized curve with tangent vector $d/d\lambda$. Then a tensor T is parallel transported, or parallel propagated along the path if

$$\nabla_{d/d\lambda} T = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu T = 0$$

Intuitively, this means the tensor is kept constant along the curve. Concretely, expanding the definition gives an ordinary differential equation for the components of T.

• Technically, we have only defined the covariant derivative with respect to a vector field, not a parametrized curve. However, one can show that one can extend $d/d\lambda$ to a vector field in a small neighborhood, and the result is independent of the extension.

• Now recall the geodesic equation reads

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0$$

The velocity is $U^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$, and writing in terms of it gives

$$0 = \frac{dU^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = U^\nu\left(\partial_\nu U^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}U^\mu\right) = \nabla_U U^\alpha$$

Therefore, a geodesic is a path that parallel transports its own tangent vector; these are the generalizations of straight lines. As we saw earlier, not every parametrization works; the vector $dx^\alpha/d\kappa$ is only parallel transported if κ and λ are affinely related; otherwise we get artificial "acceleration".

• Parallel transport preserves inner products, because $(D/D\lambda)\left(g_{\mu\nu}V^\mu W^\nu\right)$ splits into three terms by the Leibniz rule, all of which are zero. In particular, the norm of the velocity of a geodesic is preserved.

We give some simple examples of connections and parallel transport.

• In flat space and Cartesian coordinates, the Christoffel symbols are zero; parallel transport is done by keeping vector components constant.

• However, we must have nonzero connection coefficients in polar coordinates because "sliding a vector around" doesn't keep its polar components constant. This shows that the connection coefficients are not tensorial.

• In a curved space, we can always make the Christoffel symbols vanish at a point by using locally inertial coordinates, since they only depend on metric derivatives.

• In a manifold embedded in $\mathbb{R}^n$, parallel transport under the Levi-Civita connection simply means shifting a vector over in $\mathbb{R}^n$, then projecting it back down to the tangent plane.

• Given velocities at two distinct points in spacetime, the natural way to compute a relative velocity is to parallel transport one velocity to the other and subtract. This is possible exactly when the space is flat, in which case this reduces to the usual vector subtraction in Cartesian coordinates. When the space is curved, the parallel transport is path-dependent.

Note. Intuition for the torsion tensor T. There are several ways of visualizing torsion as an extra twist. For example, when the torsion vanishes, we have

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0$$

The Lie bracket tells us how much the vector fields X and Y twist as they flow along each other. Thus when there is no torsion, the covariant derivative part has no extra twist.

Another intuition comes from geodesics. If we imagine making a geodesic on a surface by pulling a string taut, torsion corresponds to twisting the string. With torsion, a rigid body in $\mathbb{R}^3$ whose center of mass follows a geodesic rotates about the center of mass.

To formalize this, we demand the displacement vectors from the center of mass to points on the body are parallel transported. Then we define the body to not be rotating if those other points also follow geodesics. This makes sense dynamically, since rotating rigid bodies have internal stresses so that points in them experience external forces. (clarify)

Next, we explicitly construct locally inertial coordinates using geodesics.

• At every point p, there is a unique geodesic through p with tangent vector $dx/d\lambda = X_p$, by the existence and uniqueness theorems applied to the geodesic equation.

• Define the exponential map exp: $T_p \to M$ as the map that takes X_p to the point of this geodesic at $\lambda = 1$. It can be shown that this map is bijective for X_p in a neighborhood of the origin of T_p, and hence defines a system of coordinates by $\exp(X) \mapsto X^\mu$.

• Note that geodesics in normal coordinates are simply linear in the coordinates, $X^\mu(t) = tX^\mu_p$. Therefore the geodesic equation reduces to $\Gamma^\mu_{\nu\rho}(X(t))X^\nu_p X^\rho_p = 0$. In particular, at $t = 0$

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}(p)X^{\nu}_{p}X^{\rho}_{p} = 0, \quad \Gamma^{\mu}_{(\nu\rho)}(p) = 0$$

because X_p is arbitrary. If the connection is torsion-free, then $\Gamma^{\mu}_{[\nu\rho]} = 0$, so the connection coefficients vanish at p. (This doesn't work with torsion, because the torsion is a tensor, and hence is nonzero independent of coordinates.)

• Furthermore, in the case of the Levi-Civita connection, we can solve for ∂g in terms of Γ, which shows that $\partial g = 0$ at p.

• If we defined normal coordinates using a basis $\{e_\mu\}$ of T_p, then the $\{e_\mu\}$ are the coordinate basis vectors $\{\partial_\mu\}$ of the normal coordinates at p. Thus the metric in normal coordinates is determined by the inner products of the $\{e_\mu\}$.

• A locally inertial frame at p is a set of normal coordinates at p with $g = \eta$. Such frames physically correspond to observers in special relativity: the time and space coordinates are laid down by spatial and timelike geodesics, which correspond physically to rigid straight rods and unaccelerated clocks.

2.5 The Riemann Curvature Tensor

We have seen that second covariant derivatives commute for scalars. The extend to which they don't commute for vectors defines the Riemann curvature tensor.

• We define the Riemann curvature tensor $R^{a}{}_{bcd}$ of a connection ∇ by $R^{a}{}_{bcd}Z^{b}X^{c}Y^{d} = (R(X,Y)Z)^{a}$ where, for any vector fields X, Y, and Z,

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

To verify this is a tensor, we must check linearity in X, Y, and Z. For linearity in X, we have

$$\begin{aligned} R(fX,Y)Z &= \nabla_{fX}\nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{fX} Z - \nabla_{[fX,Y]} Z \\ &= f\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y f\nabla_X Z - \nabla_{f[X,Y]-Y(f)X} Z \\ &= f\nabla_X \nabla_Y Z - Y(f)\nabla_X Z - f\nabla_Y \nabla_X Z - f\nabla_{[X,Y]} Z - Y(f)\nabla_X Z \end{aligned}$$

where we use $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$ repeatedly, and the extra terms cancel as desired.

• We may also specialize to a coordinate basis. Let $e_\mu = \partial/\partial x^\mu$ and $\nabla_\mu = \nabla_{e_\mu}$. Then

$$R\left(e_\rho, e_\sigma\right) e_\nu = \nabla_\rho \nabla_\sigma e_\nu - \nabla_\sigma \nabla_\rho e_\nu = \nabla_\rho \left(\Gamma^{\tau}_{\nu\sigma} e_\mu\right) - \nabla_\sigma \left(\Gamma^{\tau}_{\nu\rho} e_\tau\right)$$

since the commutator term is zero, and carrying out the covariant derivatives gives

$$R^{\gamma}{}_{\rho\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^{\gamma}_{\rho\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\gamma}_{\rho\alpha} + \Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha}\Gamma^{\mu}_{\rho\beta} - \Gamma^{\gamma}_{\mu\beta}\Gamma^{\mu}_{\rho\alpha}.$$

• If we further specialize to torsion-free connections, we have the Ricci identity

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta V^\gamma - \nabla_\beta \nabla_\alpha V^\gamma = R^{\gamma}{}_{\rho\alpha\beta} V^\rho$$

This is intuitive: the Riemann tensor takes in a vector (index ρ) and two directions (α and β), and returns the difference between parallel transporting along α and then β, and parallel transporting in the reverse order (index γ). Thus the Riemann tensor tells us about the path-dependence of parallel transport. The extra twist of torsion would add another term.

• To prove the Ricci identity in a coordinate basis, we may simply expand

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta V^\gamma = \partial_\alpha \left(\nabla_\beta V^\gamma\right) - \Gamma^{\rho}_{\beta\alpha} \nabla_\rho V^\gamma + \Gamma^{\gamma}_{\rho\alpha} \nabla_\beta V^\rho$$

We expand the outer covariant derivative first; we do it in the opposite order, we have to take care to avoid writing covariant derivatives of connection coefficients, which are not tensors.

• Since the torsion vanishes, the second term vanishes upon antisymmetrizing α and β, as does the $\partial_\alpha\partial_\beta$ term. All terms involving derivatives acting on V cancel between the first and third term, recovering our coordinate basis expression for the Riemann tensor.

• The Ricci identity also holds outside of a coordinate basis,

$$\nabla_c\nabla_d Z^a - \nabla_d\nabla_c Z^a = R^a_{bcd}Z^b$$

To show this, we start from our original definition. The torsion-free condition gives

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - (\nabla_{\nabla_X Y}Z - \nabla_{\nabla_Y X}Z)$$

On the other hand, we have

$$\nabla_X\nabla_Y Z = \nabla_X Y^d\nabla_d Z = (\nabla_X Y)^d\nabla_d Z + Y^d\nabla_X\nabla_d Z = \nabla_{\nabla_X Y}Z + X^cY^d\nabla_c\nabla_d Z$$

so we conclude that

$$X^cY^d\left(\nabla_c\nabla_d Z - \nabla_d\nabla_c Z^a\right) = R^a{}_{bcd}Z^bX^cY^d$$

and since X and Y are arbitrary, this proves the Ricci identity.

• There is also a Ricci identity for covectors,

$$\nabla_c\nabla_d\eta_a - \nabla_d\nabla_c\eta_a = -R^b_{acd}\eta_b$$

where again the only requirement is that the connection be torsion-free. Similarly, we have a Ricci identity for rank n tensors with n terms.

Example. Explicitly relating the Riemann tensor to parallel transport. Take two commuting vector fields X and Y. Then they define part of a coordinate system, $X = \partial/\partial s$ and $Y = \partial/\partial t$, which we will use to parametrize geodesics. Take a point p and work in normal coordinates so that the connection coefficients vanish at p.

Now consider a vector $Z_p \in T_p(M)$, and parallel transport it by δs along X to point q. The geodesic equation reads

$$\nabla_X Z = 0, \quad \frac{dZ^\mu}{ds} = -\Gamma^\mu_{\nu\rho}Z^\nu X^\rho, \quad \frac{d^2Z^\mu}{ds^2} = -\left(\Gamma^\mu_{\nu\rho}Z^\nu X^\rho\right)_{,\sigma}X^\sigma$$

Then expanding to second order gives

$$Z^\mu_q = Z^\mu_p - \frac{1}{2}\left(\Gamma^\mu_{\nu\rho,\sigma}Z^\nu X^\rho X^\sigma\right)\Big|_p \delta s^2$$

where only the term involving a derivative of Γ survives, since we used normal coordinates. Next, we parallel transport by δt along Y to point r. Expanding to second order again,

$$Z^\mu_r = Z^\mu_q + \left(\frac{dZ^\mu}{dt}\right)_q\delta t + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2Z^\mu}{dt^2}\right)_q\delta t^2$$

This expression can be simplified by Taylor expanding the connection coefficients at q, as

$$\Gamma|_q = \Gamma|_p + \left(X^\sigma\partial_\sigma\Gamma\right)|_p\,\delta s + O\left(\delta s^2\right)$$

By expanding to second order in δs and δt we find

$$Z^\mu_r = Z^\mu_p - \frac{1}{2}\Gamma^\mu_{\nu\rho,\sigma}Z^\nu\left(X^\rho X^\sigma\delta s^2 + Y^\rho Y^\sigma\delta t^2 + 2Y^\rho X^\sigma\right)\Big|_p \delta s\delta t$$

We may also compute Z^r_μ by parallel transporting in the opposite order. The difference is $\Delta Z^\mu_r = Z^\mu_r - Z^\mu_r = \Gamma^\mu_{\nu\rho,\sigma} Z^\nu \left(Y^\rho X^\sigma - X^\rho Y^\sigma\right) \delta s \delta t = \left(\Gamma^\mu_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^\mu_{\nu\rho,\sigma}\right) Z^\nu X^\rho Y^\sigma \delta s \delta t = R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} Z^\nu X^\rho Y^\sigma \delta s \delta t$

where we used our coordinate expression for the Riemann tensor at p. Now we're almost done, but the left-hand side contains a tensor at r and the right-hand side contains a tensor at p. If we evaluate the Riemann tensor at r instead, the error terms will be higher order in δs and δt and hence can be ignored. Therefore we have the tensorial expression

$$R^a_{bcd} Z^b X^c Y^d\big|_r = \lim_{\delta s, \delta t \to 0} \frac{\Delta Z^a_r}{\delta s \delta t}$$

This justifies our intuitive interpretation. Here, we implicitly assumed that there was no torsion. If torsion were present, then parallel transporting along δs and then δt would land us at a different point (at order $\delta s \delta$) than parallel transporting along δt and then δs, specifically differing by the torsion tensor $\delta p^\rho = T_{\mu\nu}{}^\rho X^\mu Y^\nu \delta s \delta t$.

The Riemann tensor has some important symmetries. Note that its definition makes no mention of the metric. Thus we begin with statements that only require a connection.

• Ignoring the matrix indices, the Riemann tensor has the simple form

$$R_{.\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu + [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu]$$

which is similar to the field strength tensor in Yang-Mills. The analogy is

$$A_\mu \leftrightarrow \Gamma_\mu, \quad F_{\mu\nu} \leftrightarrow R_{\mu\nu}$$

That is, both A and Γ are connections on a fibre bundle and F and R are their curvatures. The analogy is not perfect; in general relativity Γ is a derivative of the fundamental field g, but in Yang-Mills A is itself the fundamental field.

• By definition, we have antisymmetry in the last two indices,

$$R^a_{b(cd)} = 0$$

This holds even for connections with torsion.

• For a torsion-free connection, we have

$$R^a_{[bcd]} = 0$$

To see this, work in normal coordinates at p, so that

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho}$$

at p. Since the torsion is zero, $\Gamma^\mu_{[\nu\rho]} = 0$ everywhere. Then antisymmetrizing over ν, ρ, and σ gives $R^\mu_{[\nu\rho\sigma]} = 0$. Since this is a tensorial equation, it holds in all coordinate systems.

• For a torsion-free connection, we have the Bianchi identity

$$R^a_{b[cd;e]} = 0$$

We work in normal coordinates, so the covariant derivative reduces to the partial derivative. We have $\partial R \sim \partial(\partial\Gamma + \Gamma\Gamma) = \partial\partial\Gamma + \Gamma\partial\Gamma = \partial\partial\Gamma$ by normal coordinates, so

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma;\tau} = \partial_\tau \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \partial_\tau \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho}$$

and antisymmetrizing gives the result, by the symmetry of mixed partials. Equivalently,

$$R^a_{bcd;e} + R^a_{bde;c} + R^a_{bec;d} = 0$$

where we used antisymmetry in the last two indices. The Bianchi identity looks quite similar to the Jacobi identity and can be proven using it.

Next, we derive the geodesic deviation equation.

• Physically, we expect the Riemann tensor to be related to the relative acceleration of nearby geodesics, because the Riemann tensor describes the curvature of spacetime, which physically appears as a gravitational tidal force.

• Mathematically, suppose we have two initially parallel nearby geodesics, where "parallel" is defined by parallel transporting the velocity of one to the other. We propagate both geodesics for a small time, by parallel transporting them along their velocity vectors. Then their relative acceleration is proportional to their new relative velocity, which is again determined by parallel transport. We've essentially just described the commutator of two parallel transports, which is exactly what the Riemann tensor is.

• To formalize this, define a one-parameter family of geodesics to be a diffeomorphism

$$\gamma : I \times I' \to M, \quad (s,t) \mapsto \gamma(s,t)$$

where I and I' are intervals, so that for fixed $s, \gamma(s,t)$ is a geodesic with affine parameter t.

• This defines a surface on M with coordinates (s,t), which we extend to coordinates for an open set containing the surface, and we define $S^\mu = \partial x^\mu/\partial s$ and $T^\mu = \partial x^\mu/\partial t$. Note that S and T are commuting vector fields since they are derived from coordinates.

• When evaluated on the surface, S^μ points from one geodesic to its neighbor, while T^μ gives the local geodesic velocity. Therefore the relative velocity of geodesics is $\nabla_T S$, and the relative acceleration of geodesics is $\nabla_T \nabla_T S$.

• Since the torsion vanishes,

$$\nabla_T S - \nabla_S T = [T,S] = 0$$

Therefore we have

$$\nabla_T \nabla_T S = \nabla_T \nabla_S T = \nabla_S \nabla_T T + R(T,S)T = R(T,S)T$$

where we used the definition of the Riemann tensor and $\nabla_T T = 0$. This is the geodesic equation, relating the relative acceleration to the Riemann tensor.

• In abstract index notation, the geodesic deviation equation reads

$$T^c \nabla_c \left(T^b \nabla_b S^a\right) = R^a{}_{bcd} T^b T^c S^d$$

It is useful because it gives us a direct way to measure the Riemann tensor. Since

$$R^a_{bcd} = \frac{2}{3}\left(R^a_{(bc)d} - R^a_{(bd)c}\right)$$

we may use geodesic deviation to measure all of the components of the Riemann tensor.

2.6 Curvature of the Levi-Civita Connection

In this section, we consider additional properties of the Riemann tensor when it is derived from the Levi-Civita connection on a manifold with a metric.

Prop. On a simply-connected manifold, the Riemann tensor associated with the Levi-Civita connection vanishes if and only if there is a coordinate system where the metric components are constant.

Proof. The backwards direction is easy: if $\partial g = 0$ everywhere, the connection vanishes, so the Riemann tensor vanishes as well. To go forwards, take a basis of one-forms $\hat{\theta}^{(a)}$ at a point p, so

$$ds^2(p) = \eta_{ab}\hat{\theta}^{(a)} \otimes \hat{\theta}^{(b)}$$

where η_{ab} is arbitrary. Now extend the one-forms to one-form fields by parallel transport, which is unique because the Riemann tensor vanishes. Then by metric-compatibility, we have

$$ds^2 = \eta_{ab}\hat{\theta}^{(a)} \otimes \hat{\theta}^{(b)}$$

at every point, where η_{ab} is constant in this field of frames. We now must show that the $\hat{\theta}^{(a)}$ are derived from a coordinate system. Note that if a one-form ω is parallel transported,

$$\nabla_\mu \omega_\nu = 0$$

and antisymmetrizing both sides gives

$$\nabla_{[\mu}\omega_{\nu]} = \partial_{[\mu}\omega_{\nu]} \propto d\omega = 0$$

where we used torsion-freeness. On a simply-connected manifold, the first cohomology group is trivial, so all closed one-forms are exact, $\hat{\theta}^{(a)} = dy^a$, giving the desired coordinates.

Next, we consider additional symmetry properties of the Riemann tensor.

• Since we now have a metric, we work with the lowered form R_{abcd}. We claim that

$$R_{abcd} = R_{cdab}$$

To show this, work in normal coordinates at p, so $\partial g = 0$. Then $\partial g^{-1} = 0$ as well, as can be shown formally by considering $\partial\delta = \partial\left(gg^{-1}\right)$. Then

$$\partial_\rho \Gamma^\tau_{\nu\sigma} = \frac{1}{2} g^{\tau\mu}\left(g_{\mu\nu,\sigma\rho} + g_{\mu\sigma,\nu\rho} - g_{\nu\sigma,\mu\rho}\right)$$

and plugging this into our expression for the Riemann tensor gives

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\sigma,\nu\rho} + g_{\nu\rho,\mu\sigma} - g_{\nu\sigma,\nu\rho} - g_{\mu\rho,\nu\sigma}\right)$$

where we lower the index only after the connection coefficients are substituted away. The conclusion follows using the symmetry of the metric and mixed partials.

• This result can be combined with our earlier results for the corollaries

$$R_{(ab)cd} = 0, \quad \nabla_{[e}R_{ab]cd}$$

By combining some of these results, we further have

$$R_{[abcd]} = 0, \quad \nabla_e R_{abcd} + \nabla_a R_{\text{becd}} + \nabla_b R_{\text{eacd}} = 0$$

Next, we define special contractions of the Riemann tensor and write down the Einstein equation.

• In terms of group theory, tensors with the symmetry properties of the Riemann tensor form a representation of the Lorentz group, and we would like to decompose it into irreps. When this is done to a general rank 2 tensor, for example, we get the trace, the antisymmetric part, and the traceless symmetric part.

• We define the Ricci tensor by

$$R_{ab} = R^c_{acb}$$

The Ricci tensor is symmetric, and its trace is called the Ricci scalar,

$$R = g^{ab}R_{ab}$$

The Ricci tensor is the only independent contraction of the Riemann tensor; all others are either proportional to zero.

• We define the Einstein tensor by

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}$$

By contracting the Bianchi identity twice, we have

$$\nabla^b R_{ab} = \frac{1}{2}\nabla_a R$$

which implies that

$$\nabla^a G_{ab} = 0$$

We say the Einstein tensor is covariantly conserved.

• In general relativity, we postulate the Einstein field equation

$$G_{ab} = 8\pi G T_{ab}$$

where the constant is fixed by Newtonian gravity. Taking the trace gives $R = -8\pi GT$, so

$$R_{ab} = 8\pi G\left(T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab}\right)$$

Hence R_{ab} is completely determined by T_{ab}. In vacuum, $R_{ab} = 0$.

• The alternate equation $R_{ab} \propto T_{ab}$ is unacceptable because covariant conservation of R implies $\nabla^a R_{ab} = 0$, which implies $\nabla_a R = 0$ by the Bianchi identity. Then R is constant which implies T is constant, but $T = 0$ in vacuum and $T \neq 0$ in matter.

• The remaining degrees of freedom are in the Weyl tensor, which is completely traceless, i.e. all of its contractions vanish. It is defined by

$$R_{abcd} = C_{abcd} + \frac{2}{n-2}\left(g_{a[c}R_{d]b} - g_{b[c}R_{d]a}\right) - \frac{2}{(n-1)(n-2)}Rg_{a[c}g_{d]b}$$

so that the Weyl tensor is essentially the Riemann tensor with all contractions subtracted off.

• The Weyl tensor has the same symmetries as the Riemann tensor, and vanishes in dimension $n < 4$. It represents gravitational degrees of freedom, i.e. the components of the Riemann tensor which are not determined by the Einstein field equations, which are exemplified by gravitational waves. Analogously, Maxwell's equations with sources don't uniquely specify the fields; we can always add on electromagnetic radiation.

• The Weyl tensor is invariant under conformal transformations $g \to \Omega^2(x)g$, while the Riemann tensor is not. We say a metric is conformally flat if it related to a flat metric by a conformal transformation; one can show that conformal flatness is equivalent to vanishing Weyl tensor.

Note. Counting the degrees of freedom of the Riemann tensor. Since the first two indices are antisymmetric, they have $n(n-1)/2$ degrees of freedom, as do the last two indices. The fact that the Riemann tensor is symmetric under their interchange means that we are left with the same number of degrees of freedom as an $m \times m$ symmetric matrix, $m(m+1)/2$, with $m = n(n-1)/2$.

The final constraint is $R_{[abcd]} = 0$. To understand what this constraint means, consider writing

$$R_{abcd} = A_{abcd} + R_{[abcd]}$$

which implies $A_{[abcd]} = 0$. Then every tensor can be written as the sum of a totally antisymmetric tensor $R_{[abcd]}$ plus a tensor whose totally antisymmetric part vanishes. None of the identities we used above place any constraints on $R_{[abcd]}$, so $R_{[abcd]} = 0$ contains $n(n-1)(n-2)(n-3)/4$! new independent constraints. The final count is

$$D(n) = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right) - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \frac{n^2\left(n^2-1\right)}{12}$$

degrees of freedom in the Riemann tensor. We have

$$D(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ 1 & n = 2 \\ 6 & n = 3 \\ 20 & n = 4 \end{cases}$$

Then the Riemann tensor is always trivial in $n = 1$, determined by the Ricci scalar in $n = 2$, and determined by the Ricci tensor in $n = 3$. In $n = 4$, there are 10 extra degrees of freedom, captured in the Weyl tensor.

Note. Intrinsic versus extrinsic curvature. Intrinsic curvature is measured by the Riemann tensor; it can be detected by observers living on the manifold through parallel transport loops. Extrinsic curvature is defined by surfaces embedded in a higher-dimensional space, and measures the deviation of the embedding from a flat plane.

• The intrinsic curvature of a 1D manifold is always zero, since there are no nontrivial parallel transport loops. However, as a curve embedded in a larger space, it can have extrinsic curvature, measured by its radius of curvature.

• In 2D, the intrinsic curvature is determined by the Ricci scalar. For example, the torus, thought of as $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, has zero intrinsic curvature. However, the standard embedding of the torus in $\mathbb{R}^3$ as a donut has both nonzero intrinsic and extrinsic curvature.

• The intrinsic curvature is linked to topology by

$$\chi(M) = \frac{1}{4\pi}\int_M R\sqrt{|g|}d^n x, \quad \chi(M) = 2(1-g)$$

Here, $\chi(M)$ is the Euler characteristic, a topological invariant of the space, and g is the genus, which is one for the torus.

• A piece of paper rolled up into a cylinder, viewed as a surface in $\mathbb{R}^3$, has extrinsic curvature but no intrinsic curvature. The reason is that rolling up the paper without stretching it preserves lengths between points along the paper, so the intrinsic curvature stays the same.

• A two-sphere with metric

$$ds^2 = a^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

has constant intrinsic curvature; the Ricci scalar is $R = 2/a^2$. If it is embedded in $\mathbb{R}^3$ in the standard way, it also has constant extrinsic curvature.

In general relativity, we will almost always be concerned with intrinsic curvature.

Note. Intuition for the pieces of the Riemann tensor. Consider a small ball of free particles, in a coordinate system where all of them are initially at rest. Then the Ricci tensor tells us

how the volume of this ball changes over time. To see this, work in normal coordinates and recall the geodesic deviation equation says

$$a^\mu = -R^\mu{}_{00\nu} S^\nu$$

where S is the separation between geodesics and a is the acceleration. Since $R_{\mu 00\nu} = R_{\nu 00\mu}$, we can choose a coordinate system aligned with the principle axes of the ellipsoid that the ball will deform into by the spectral theorem. Then

$$\text{second derivative of principle axis } i \propto -R^i_{00i}$$

with no summation, and since $R^0{}_{000} = 0$, we have

$$\text{second derivative of volume } \propto -R^\mu{}_{00\mu} = -R_{00}.$$

This is Raychaudhuri's equation. Thus, the Ricci tensor tells us about how small volumes changes over time. Einstein's equations say that

$$R_{00} = 4\pi G \left(\rho + p_x + p_y + p_z\right)$$

so contraction is caused by both energy density and pressure. (The idea that pressure is repulsive is a red herring, since a uniform pressure isn't repulsive even nonrelativistically.)

For ordinary, nonrelativistic matter, the pressure is negligible, so we recover Newtonian gravity. A photon gas has $p = \rho/3$, which implies that its gravitational effect is twice as large as one would guess from its energy density alone. Dark energy has $p = -\rho$, implying that positive dark energy has a repulsive gravitational effect. Finally, there's no expansion or contraction effect when $p = -\rho/3$. In cosmology, this kind of contribution roughly corresponds to spatial curvature.

More generally, for a ball with velocity v^μ, the result above becomes

$$\text{second derivative of volume } \propto -R_{\mu\nu} v^\mu v^\nu$$

so we can recover all components of the Ricci tensor by volume change. The Weyl tensor, on the other hand, represents degrees of freedom which don't change the volume. For example, a gravitational wave can stretch a ball in one direction and contract in another.

2.7 Non-Riemannian Geometries

We give a tour of some exotic, non-Riemannian geometries.

Example. Newton-Cartan geometries. Consider the Newtonian equation of motion $\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla\phi(\mathbf{x})$. We can interpret these as the geodesic equation

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0$$

with an appropriate connection. We parametrize the geodesics by t, so the dot indicates differentiation with respect to t, and set

$$\Gamma^i_{00} = \delta^{ij} \partial_j \phi$$

with others zero. Parametrizing by t is legal since, in the nonrelativistic limit, $t = \tau$. Then

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{00} \ddot{t} \dot{t} = 0$$

which gives the result since $\dot{t} = 1$. However, this connection is not a Levi-Civita connection with respect to any metric!

More generally, we would like to formulate Newtonian gravity in a geometrical way. We define a Newton-Cartan structure as a triple (h, θ, ∇) so that

• h is a degenerate symmetric rank 2 tensor $h = h^{\mu\nu}\partial_\mu \otimes \partial_\nu$ so that $h^{\mu\nu}$ has rank $n-1$. We call h the spatial metric.

• θ is a one-form in the kernel of h, $h^{ab}\theta_b = 0$, called the clock.

• ∇ is a torsion-free connection which preserves both h and θ, i.e. $\nabla h = \nabla\theta = 0$.

Since ∇ is torsion-free, we have $\nabla_{[a}\theta_{b]} = 0$, which implies $d\theta = 0$, so $\theta = dt$ locally. This gives a time for every point in the spacetime, and h restricted to a surface of fixed t is nondegenerate.

For example, if $h^{ij} = \delta^{ij}$ with all other elements zero, then $\theta = dt$, and ∇ with $\Gamma^i_{00} \neq 0$, recovering Newtonian geodesics $\mathbf{x}(t)$. A Newton-Cartan structure has absolute time, since we can always say if two points have the same t, but not absolute space.

Example. Projective structures. Two torsion-free connections $\nabla, \hat{\nabla}$ are projectively equivalent if they share the same unparametrized geodesics. For a general parameter, the geodesic equation reads

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho = f\dot{x}^\mu$$

In particular, we can get unparametrized geodesics by using one of the coordinates x^n as the parameter. One can show that ∇ and $\hat{\nabla}$ are projectively equivalent if there is a one-form ω so

$$\hat{\Gamma}^\mu_{\nu\rho} = \Gamma^\mu_{\nu\rho} + \delta^\mu_\nu\omega_\rho + \delta^\mu_\rho\omega_\nu$$

Projective equivalence defines an equivalence relation on connections, and a projective structure is one of these equivalence classes. One can also define curvatures of projective structures.

As an example, consider a hemispherical bowl sitting on a plane. Projecting from the center of the sphere defines a map between the half-sphere and $\mathbb{R}^2$, where great circles map to lines. Hence the Levi-Civita connections of the standard metric on the half-sphere yields a connection on $\mathbb{R}^n$ that is projectively equivalent to the standard one.

Example. Magnetic geometries and Kaluza-Klein reduction. Consider a three-dimensional Riemannian manifold with coordinates (x, y, z) and metric $g = dx^2 + dy^2 + (dz - xdy)^2$. The geodesic Lagrangian is

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}(\dot{z} - x\dot{y})^2$$

The Euler-Lagrange equations read

$$\ddot{x} = -\dot{y}(\dot{z} - x\dot{y}), \quad \frac{d}{dt}(\dot{y} - x(\dot{z} - x\dot{y})) = 0, \quad \dot{z} - x\dot{y} = c$$

Plugging in the final equation, we find

$$\ddot{x} = -c\dot{y}, \quad \ddot{y} = c\dot{x}$$

which, if we project away the z direction, describes a particle in two dimensions in a magnetic field! More generally, magnetism in two dimensions is described by

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = F^i{}_j\dot{x}^j, \quad F_{ij} = -c\epsilon_{ij}$$

The Kaluza-Klein model does the same for electromagnetism in four dimensions. In general, given a manifold Σ with metric h and F with $F = dA$, we look at a manifold with one higher dimension with metric $g = h + (dz + A)^2$.

3.5.2 7.1 The Initial Value Problem

In this section, we outline the proof of the Penrose singularity theorem, which states that singularities are 'generic' in general relativity. To begin, we describe the initial value problem in general relativity.

• Let (M, g) be a time-orientable spacetime. A partial Cauchy surface Σ is a hypersurface for which no two points are connected by a causal curve. The future domain of dependence of Σ, denoted $D^+(\Sigma)$, is the set of points so that every past-inextendible causal curve through p intersects Σ, and the past domain of dependence $D^-(\Sigma)$ is defined similarly. Their union is the domain of dependence $D(\Sigma)$. The boundaries of $D^\pm(\Sigma)$, if they exist, are called future/past Cauchy horizons.

• The domain of dependence is the region of spacetime where one can determine what happens from data specified on Σ. For example, any causal geodesic in $D(\Sigma)$ must intersect Σ at a unique point; then the geodesic is specified by its velocity at that point.

• More generally, a hyperbolic PDE is one of the form

$$g^{ef}\nabla_e\nabla_f T^{(i)ab\ldots}{}_{cd\ldots} = \text{ linear in } T^{(i)} \text{ and its first derivatives}$$

for a set of tensor fields $T^{(i)}$, and the right-hand side can depend on the metric and its derivatives in an arbitrary way. The Klein-Gordan/wave equation takes this form, as well as the Maxwell equations in Lorenz gauge. Then one can show that specifying initial data $T^{(i)}, \partial_t T^{(i)}$ on Σ specifies the $T^{(i)}$ on all of $D(\Sigma)$.

• A spacetime (M, g) is globally hyperbolic if it admits a Cauchy surface, i.e. a partial Cauchy surface Σ so that $M = D(\Sigma)$. Then a globally hyperbolic spacetime is one where one can predict what happens everywhere from data on Σ.

• Theorem. (Geroch) If (M, g) is globally hyperbolic, then there exists a global time function, a map $t : M \to \mathbb{R}$ so that $-(dt)^a$ is future-directed, timelike surfaces of constant t are Cauchy surfaces with the same topology Σ, and the topology of M is $\mathbb{R} \times \Sigma$. This rules out pathologies such as closed timelike curves.

• As a result, in a globally hyperbolic spacetime we can perform an 'ADM decomposition' of spacetime. Let t be the time function and choose coordinates x^i on the Cauchy surface $t = 0$. Then we can define the x^i globally by following the integral curves of ∂_t, giving coordinates (t, x^i). It is conventional to write the metric as

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ij}\left(dx^i + N^i dt\right)\left(dx^j + N^j dt\right)$$

where $N(t, x)$ is called the lapse function and $N^i(t, x)$ is called the shift vector. We used a similar construction in the Schwarzschild spacetime.

Example. We give some basic examples of these definitions.

• Let Σ be the positive x-axis in two-dimensional Minkowski space M. Then the boundary of $D(\Sigma)$ is bounded by the null rays $t = \pm x$. If Σ' is the entire x-axis then $D(\Sigma') = M$, so M is globally hyperbolic.

• If we delete the origin from M, the resulting spacetime is not globally hyperbolic because geodesics can end at the origin.

• The Kruskal spacetime is globally hyperbolic, with global time function $\hat{t} = U + V$. The surface $U + V = 0$ is a Cauchy surface, and it is an Einstein-Rosen bridge with topology $\mathbb{R} \times S^2$. Then the spacetime has topology $\mathbb{R}^2 \times S^2$.

Next, we describe the initial value problem for general relativity.

• The initial data for Einstein's equation is a triple (Σ, h_{ab}, K_{ab}) where (Σ, h_{ab}) is a Riemannian 3-manifold and K_{ab} is a symmetric tensor. Intuitively, Σ is a spacelike hypersurface in spacetime, h_{ab} is the pullback of the metric, and K_{ab} is the extrinsic curvature tensor of Σ.

• Let n^a denote the unit vector normal to Σ. Then the Einstein equation imposes constraints on the initial data. Contracting it with $n^a n^b$ gives the Hamiltonian constraint

$$R' - K^{ab}K_{ab} + K^2 = 16\pi\rho$$

where R' is the Ricci tensor of h_{ab} and all indices are raised and lowered with h^{ab}, and $\rho = T_{ab}n^a n^b$ is the energy density measured by an observer with velocity n^a.

• Contracting the Einstein equation with n^a and projecting orthogonally to it gives the momentum constraint

$$D_b K^b{}_a - D_a K = 8\pi h^b_a T_{bc} n^c$$

where D_a uses the Levi-Civita connection of h_{ab}, and the right-hand side is the momentum density measured by an observer with velocity n^a.

• Theorem. Consider initial data as defined above satisfying the constraints in vacuum. Then there exists a unique spacetime (M, g_{ab}), up to diffeomorphism, called the maximal Cauchy development of the initial data, so that

• (M, g_{ab}) satisfies the vacuum Einstein equation,

• (M, g_{ab}) is globally hyperbolic with Cauchy surface Σ,

• the induced metric and extrinsic curvature of Σ are h_{ab} and K_{ab},

• any other spacetime satisfying these conditions is isometric to a subset of (M, g_{ab}).

Analogous theorems also exist for suitable matter obeying hyperbolic PDEs.

• Note that the maximal Cauchy development could be extendible to (M', g'_{ab}), but then Σ would necessarily not be a Cauchy surface for (M', g'_{ab}). Then we cannot predict the metric in all of M' using only data on Σ, i.e. the extension can't be unique.

Example. Now we give some examples of this result.

• Consider initial data on a surface $\Sigma = \{(x, y, z) : x > 0\}$ with flat metric and vanishing extrinsic curvature. The maximal development is the region $|t| < x$ of Minkowski spacetime, which can be extended. However, the extension is far from unique: it could be the entirety of Minkowski spacetime or it could be curved.

• Consider the Schwarzschild solution with $M < 0$,

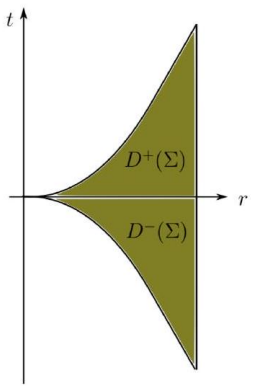
$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2|M|}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2|M|}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

There is a curvature singularity at $r = 0$ but no event horizon. We take initial data on the surface Σ given by $t = 0$, with pullback metric h_{ab}. As a Riemannian manifold, (Σ, h_{ab}) is inextendible, but it is not geodesically complete since some geodesics hit $r = 0$ in finite affine parameter. We say the initial data is singular.

• The resulting maximal development is not the entire Schwarzschild spacetime. Consider an outgoing radial null geodesic; it obeys

$$\frac{dt}{dr} \approx \frac{r}{2|M|}$$

at small r. Then the domain of dependence of Σ is shown below.



Points outside of $D(\Sigma)$ have causal geodesics that do not pass through Σ because they instead end at $r = 0$. The boundary of $D(\Sigma)$ is given by the null geodesics that emerge from $r = 0$ at time $t = 0$.

• Therefore, the initial data do not predict the metric outside of $D(\Sigma)$. There could be other extensions besides the $M < 0$ Schwarzschild solution. By Birkhoff's theorem, they are necessarily not spherically symmetric.

• So far we've seen examples where the initial data is extendible, in which case it's clear we should be 'missing information', and cases where the initial data is singular, in which case one 'can't predict what comes out of a singularity'. Thus we restrict to initial data which is geodesically complete and hence also inextendible.

• Let Σ be the hyperboloid $t^2 - \mathbf{x}^2 = -1$ in Minkowski space for $t < 0$, with h_{ab} and K_{ab} defined as in Minkowski space. This initial data is geodesically complete, but its maximal Cauchy development is the past light cone of the origin, and hence is extendible. The intuitive reason is that Σ is 'asymptotically null' which allows information to 'arrive from infinity'.

Now that we've seen the possible problems, we can define new restrictions to avoid them.

• An initial data set (Σ, h_{ab}, K_{ab}) is an asymptotically flat end if

• Σ is diffeomorphic to $\mathbb{R}^3/B$ where B is a closed ball centered on the origin,

• if we pullback the $\mathbb{R}^3$ coordinates to define coordinates x^i on Σ then

$$h_{ij} = \delta_{ij} + O(1/r), \quad K_{ij} = O\left(1/r^2\right)$$

for large $r = \sqrt{x^i x^i}$,

• derivatives of the latter expressions also hold, e.g. $h_{ij,k} = O\left(1/r^2\right)$.

An initial data set is asymptotically flat with N ends if it is the union of a compact set with N asymptotically flat ends. If matter fields are also present, they should also decay appropriately. We sometimes say Σ itself is asymptotically flat.

• Intuitively, in an asymptotically flat end, Σ looks like a surface of constant t in Minkowski spacetime for large r. If Σ is asymptotically flat with N ends, it looks like the union of N such surfaces.

• For example, in the $M > 0$ Schwarzschild spacetime, one can show that the initial data on the surface $\Sigma = \{t = \text{const}, r > 2M\}$ is an asymptotically flat end. However, it is not geodesically complete, since it stops at $r = 2M$. Now, in the Kruskal spacetime Σ is part of an EinsteinRosen bridge, which is asymptotically flat with two ends, because it is the union of the compact sphere $U = V = 0$ with two copies of the asymptotically flat end defined above.

• Penrose's strong cosmic censorship conjecture states that generically, a geodesically complete, asymptotically flat initial data set has an inextendible maximal Cauchy development. It is related to the weak cosmic censorship conjecture, which informally states that 'every singularity is hidden behind an event horizon', because both are about the predictability of GR.

• For small perturbations of Minkowski spacetime, it is known that the spacetime 'settles down to Minkowski spacetime at late time', which implies strong cosmic censorship holds.

• As we'll see, strong cosmic censorship fails for charged and rotating black holes, which exhibit Cauchy horizons. However, the conjecture does hold for any small perturbation of these initial conditions, i.e. it fails only on a set of 'measure zero'.

• A maximal Cauchy development cannot contain a region with closed timelike curves, since by definition such a region contains causal curves that don't intersect Σ. This represents another counterexample, but it is again not generic.

• The conjecture can be extended to include matter, but we must impose the dominant energy condition, which essentially requires matter with positive energy density that doesn't travel faster than light. We'll discuss these energy conditions in more detail later.

3.5.3 7.2 Geodesic Congruences

Next, we need to establish some basic definitions.

• A null hypersurface $\mathcal{N}$ is a hypersurface whose normal N_a is everywhere null. That is, $N_a X^a = 0$ for any X^a tangent to $\mathcal{N}$, so X^a is spacelike or parallel to N^a. In particular, N^a itself is tangent to $\mathcal{N}$, so its integral curves, called the generators of $\mathcal{N}$, lie within $\mathcal{N}$.

• We claim that the generators of $\mathcal{N}$ are null geodesics.

The generators are null by definition. Now let $\mathcal{N}$ be defined by $f = \text{const}$ where $df \neq 0$ on $\mathcal{N}$. Then we have $N = h df$ for some function h, and we can rescale so that $N = df$, since this just reparametrizes the geodesics. Since $N^a N_a = 0$, its gradient is normal to $\mathcal{N}$, so

$$\nabla_a \left(N^b N_b\right)\big|_{\mathcal{N}} = 2\alpha N_a$$

for some function α. We also have $\nabla_a N_b = \nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f = \nabla_b N_a$, giving

$$N^b \nabla_b N_a\big|_{\mathcal{N}} = \alpha N_a$$

which is simply the geodesic equation for a non-affine parameter.

Example. In the Kruskal spacetime, let $N = dU$. Since $g^{UU} = 0, N$ is null everywhere and hence normal to a family of null hypersurfaces, each with constant U. In particular, we have $\nabla_a \left(N^b N_b\right) = 0$, so the right-hand side of the above equations is zero. Then the generators are affinely parametrized null geodesics. Raising an index gives

$$N^a = -\frac{r}{16M^3} e^{r/2M} \left(\frac{\partial}{\partial V}\right)^a$$

For $U = 0$, we have $r = 2M$, so N^a is just a constant multiple of $\partial/\partial V$. Then V is an affine parameter for the generators of the surface $U = 0$.

Next, we review geodesic deviation and introduce geodesic congruences.

• We recall that a one-parameter family of geodesics gives a surface with coordinates (s, λ) where $U = \partial/\partial\lambda$ is the geodesic velocity and $S = \partial/\partial s$ is the deviation vector, and $[U, S] = 0$. The geodesic equation is $\nabla_U U = 0$ and the geodesic deviation equation is

$$\nabla_U \nabla_U S^a = R^a{}_{bcd} U^b U^c S^d$$

and given an affinely parametrized geodesic γ with tangent U^a, a solution S^a of this equation along γ is called a Jacobi field.

• A geodesic congruence in an open set $\mathcal{U} \subset M$ is a family of geodesics so that exactly one geodesic passes through each point in $\mathcal{U}$. We will consider the case where all the geodesics in a congruence are null/spacelike/timelike, normalizing the tangent vector U^a to $U^2 = 0/1/-1$.

• Consider a one-parameter family of geodesics belonging to a congruence, so that

$$\nabla_U S^a = B^a{}_b S^b, \quad B^a{}_b = \nabla_b U^a$$

Then we have the identities

$$B^a{}_b U^b = 0, \quad U_a B^a{}_b = \frac{1}{2}\nabla_b \left(U^2\right) = 0$$

by the geodesic equation, so

$$\nabla_U (U \cdot S) = \left(\nabla_U U^a\right) S_a + U^a \nabla_U S_a = 0$$

where we again used the geodesic equation. Therefore, $U^a S_a$ is constant along geodesics.

• Now, a one-parameter family of geodesics has plenty of freedom in the coordinates, since we may redefine the parameter on each geodesic, $\lambda' = \lambda - a(s)$, inducing the change

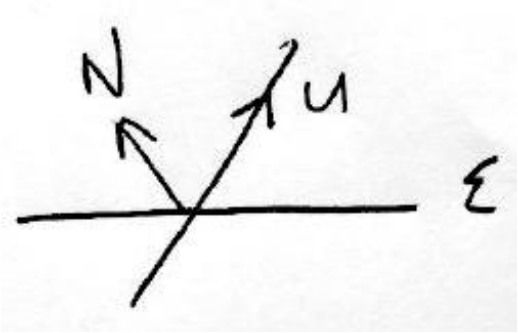
$$S'^a = S^a + \frac{da}{ds} U^a$$

Intuitively, it's nice to make the separation normal to the velocity, and

$$U \cdot S' = U \cdot S + \frac{da}{ds} U^2$$

Then in the spacelike and timelike case, we can straightforwardly set $U^a S'_a = 0$ everywhere.

• In the null case, U^2 vanishes and we have to work more carefully.



We choose a spacelike hypersurface Σ which intersects each geodesic once. Let N^a be a vector field on Σ so that $N^2 = 0$ and $N^a U_a = -1$. We extend N^a off Σ by parallel transport along the geodesics, $\nabla_U N^a = 0$. Then

$$N^2 = 0, \quad N \cdot U = -1, \quad \nabla_U N^a = 0$$

everywhere.

• Therefore, we can decompose any deviation vector uniquely as

$$S^a = \alpha U^a + \beta N^a + \hat{S}^a, \quad U \cdot \hat{S} = N \cdot \hat{S} = 0$$

where $\hat{S}^a$ points 'into the page' in the above diagram. Note that $U \cdot S = -\beta$, so β is constant along each geodesic. In the case where we consider a subset of the generators of a null hypersurface, we automatically have $\beta = 0$ by definition.

• We can project onto $\hat{S}^a$ by

$$\hat{S}^a = P^a_b S^b, \quad P^a_b = \delta^a_b + N^a U_b + U^a N_b$$

where P^a_b is a projection operator, $P^a_b P^b_c = P^a_c$, onto the subset $T_\perp$ of the tangent space at p containing vectors orthogonal to U^a and N^a. We also have

$$\nabla_U P^a_b = 0$$

because it is built out of N^a and U^b, which are both parallel transported.

• We claim that if $U \cdot S = 0$, then

$$\nabla_U \hat{S}^a = \hat{B}^a{}_b \hat{S}^b, \quad \hat{B}^a{}_b = P^a_c B^c{}_d P^d_b$$

This is intuitively reasonable, as it's just one of our earlier results with projectors applied everywhere. Explicitly, we have

$$\nabla_U \hat{S}^a = \nabla_U \left(P^a_c S^c\right) = P^a_c \nabla_U S^c = P^a_c B^c{}_d S^d = P^a_c B^c{}_d P^d_e S^e$$

where the final step works because $U \cdot S = 0$ and $B^c{}_d U^d = 0$. Finally, using $P^2 = P$ gives the desired result.

We now examine $\hat{B}^a{}_b$ in more detail.

• We can think of $\hat{B}^a{}_b$ as a matrix that acts on the two-dimensional space $T_\perp$. To understand it geometrically, we divide it into the expansion, shear, and rotation defined as

$$\theta = \hat{B}^a_a, \quad \hat{\sigma}_{ab} = \hat{B}_{(ab)} - \frac{1}{2} P_{ab}\theta, \quad \hat{\omega}_{ab} = \hat{B}_{[ab]}.$$

Then we have

$$\hat{B}^a{}_b = \frac{1}{2}\theta P^a_b + \hat{\sigma}^a{}_b + \hat{\omega}^a{}_b$$

• By plugging in the definitions, we have

$$\hat{B}^b{}_c = B^b{}_c + U^b N_d B^d{}_c + U_c B^d{}_b N^d + U^b U_c N_d B^d{}_e N^e$$

which implies that

$$\theta = g^{ab} B_{ab} = \nabla_a U^a$$

so it can be interpreted as the divergence of the geodesics; this shows that θ is independent of the choice of N^a. Similarly, scalar invariants of the rotation and shear are independent of N^a.

• If the congruence contains the generators of a null hypersurface $\mathcal{N}$, then $\hat{\omega}_{ab} = 0$ on $\mathcal{N}$. Conversely, if $\hat{\omega}_{ab} = 0$ everywhere, then U^a is orthogonal to a family of null hypersurfaces.

To see this, start with our expression for $\hat{B}^b{}_c$ and note that

$$U_{[a}\hat{\omega}_{bc]} = U_{[a}\hat{B}_{bc]} = U_{[a}B_{bc]}$$

where the extra terms drop out of the antisymmetrization. Using the definition of B_{ab},

$$U_{[a}\hat{\omega}_{bc]} = U_{[a}\nabla_c U_{b]} = -\frac{1}{6}(U \wedge dU)_{abc}$$

As we've shown earlier, this vanishes if U is normal to $\mathcal{N}$, so on $\mathcal{N}$,

$$0 = U_{[a}\hat{\omega}_{bc]} = \frac{1}{3}\left(U_a\hat{\omega}_{bc} + U_b\hat{\omega}_{ca} + U_c\hat{\omega}_{ab}\right).$$

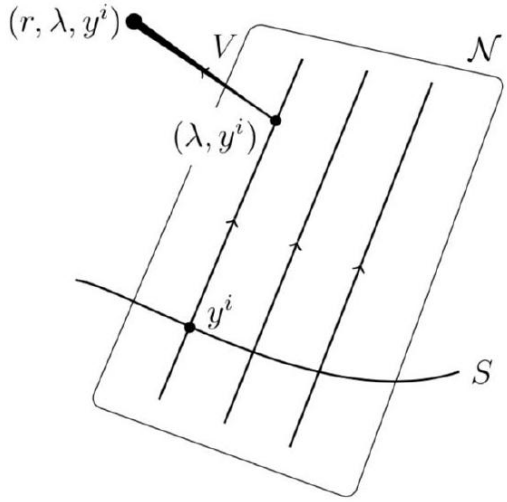
Contracting this with N^a and using $\hat{\omega} \cdot N = 0$ gives the result. The reasoning can be run backwards by Frobenius' theorem.

• Therefore, in the case of a null hypersurface we only have to deal with expansion and shear. Intuitively, expansion increases the cross-sectional area of a family of geodesics, while shear compresses in one direction and stretches in the other, keeping the area constant.

To understand the expansion more quantitatively, we use Gaussian null coordinates.

• We pick a two-dimensional spacelike surface S within $\mathcal{N}$ and let y^i be coordinates on this surface; we then define coordinates (λ, y^i) on $\mathcal{N}$ by following the point with coordinates y^i for parameter distance λ along the generator through it, so $U = \partial/\partial\lambda$.

• Next, let V^a be a null vector field on $\mathcal{N}$ so that $V \cdot \partial/\partial y^i = 0$ and $V \cdot U$, similarly to how we defined N^a, and define the r coordinate by following its geodesics so $V = \partial/\partial r$ and $\mathcal{N}$ is the surface $r = 0$. The coordinates (r, λ, y^i) are Gaussian null coordinates, shown below.



• Now we consider the form of the metric. Since V^a is null, $g_{rr} = 0$, and the geodesic equation for V^a gives $\partial_r g_{r\mu} = 0$. On the surface, we have $g_{r\lambda} = 1$ and $g_{ri} = 0$, which then hold for all r. We also know that $g_{\lambda\lambda} = g_{\lambda i} = 0$ at $r = 0$, so

$$ds^2 = 2drd\lambda + rFd\lambda^2 + 2rh_i d\lambda dy^i + h_{ij}dy^i dy^j$$

where F and h_i are smooth functions.

• The metric restricted to $\mathcal{N}$ is

$$g|_{\mathcal{N}} = 2drd\lambda + h_{ij}dy^i dy^j$$

so since $U^\mu = (0, 1, 0, 0)$ on $\mathcal{N}$, we have $U_\mu = (1, 0, 0, 0)$ on $\mathcal{N}$. Then since $U \cdot B = B \cdot U = 0$, we have $B^r{}_\mu = B^\mu{}_\lambda = 0$. Therefore on $\mathcal{N}$ we have

$$\theta = B^\mu{}_\mu = B^i{}_i = \nabla_i U^i = \partial_i U^i + \Gamma^i_{i\mu}U^\mu = \Gamma^i_{i\lambda} = \frac{1}{2}g^{i\mu}\left(g_{\mu i,\lambda} + g_{\mu\lambda,i} - g_{i\lambda,\mu}\right).$$

Using the form of the metric, we have

$$\theta = \frac{1}{2}h^{ij}\left(g_{ji,\lambda} + g_{j\lambda,i} - g_{i\lambda,j}\right) = \frac{1}{2}h^{ij}h_{ij,\lambda} = \frac{\partial_\lambda\sqrt{h}}{\sqrt{h}}$$

where $h = \det h_{ij}, h^{ij}$ is the matrix inverse, and we used the identity $\delta(\det A) = (\det A)\,\mathrm{tr}\,(A^{-1}\delta A)$.

• Therefore, we have

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\sqrt{h} = \theta\sqrt{h}$$

and $\sqrt{h}$ is the area element on a surface of constant λ within $\mathcal{N}$, so θ indeed measures the rate of increase of this area with respect to the affine parameter λ.

3.5.4 7.3 Raychaudhuri's Equation

Next, we define trapped surfaces.

• Let S be a two-dimensional spacelike surface. Then for any point $p \in S$ there are two futuredirected null vectors U_1 and U_2 orthogonal to S, up to scaling. If S is orientable, then U_1 and U_2 can be desired continuously over S. This defines two families of null geodesics which start on S and are orthogonal to S, forming the null hypersurfaces $\mathcal{N}_1$ and $\mathcal{N}_2$.

• For example, in Minkowski space, the two-sphere $r = \text{const}$, $t = \text{const}$ has U_1 and U_2 pointing radially inward and outward. This is a bit tricky to visualize or draw, since it requires all four spacetime dimensions.

• In the Kruskal spacetime, let S be the two-sphere $U = U_0, V = V_0$. Then the generators of the $\mathcal{N}_i$ are radial null geodesics as in Minkowski space. We know that dU and dV correspond to affine parametrization, so raising an index gives

$$U_1 = re^{r/2M}\frac{\partial}{\partial V}, \quad U_2 = re^{r/2M}\frac{\partial}{\partial U}$$

where the signs are chosen so that U_1 and U_2 are future-directed.

• Using the divergence formula we can compute the expansion

$$\theta_1 = \nabla_a U_1^a = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}U_a^\mu\right) = r^{-1}e^{r/2M}\partial_V\left(re^{-r/2M}re^{r/2M}\right) = -\frac{8M^2}{r}U$$

and similarly

$$\theta_2 = -\frac{8M^2}{r}V$$

Then in region I, the outgoing null geodesics on S are expanding and the ingoing null geodesics are converging, as expected under normal conditions.

• A compact, orientable, spacelike two-dimensional surface is trapped if both families of null geodesics orthogonal to S have negative expansion everywhere on S, and marginally trapped if both families have non-positive expansion. Then two-spheres in region II are trapped, and two-spheres on the event horizon are marginally trapped.

Next, we derive Raychaudhuri's equation, which describes the evolution of the expansion along the geodesics of a null geodesic congruence. Applying it will requires discussing energy conditions.

• Raychaudhuri's equation states that

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \hat{\sigma}^{ab}\hat{\sigma}_{ab} + \hat{\omega}^{ab}\hat{\omega}_{ab} - R_{ab}U^aU^b$$

To see this, note that by definition we have

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \nabla_U\left(B^a{}_bP_a^b\right) = P_a^b\nabla_U B^a{}_b = P_a^bU^c\nabla_c\nabla_bU^a$$

Next, we commute the covariant derivatives to get a factor of the Riemann tensor,

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = P_a^bU^c\left(\nabla_b\nabla_cU^a + R^a_{dcb}U^d\right) = -P_a^b\left(\nabla_bU^c\right)\left(\nabla_cU^a\right) + \delta_a^bR^a_{dcb}U^cU^b$$

where we used the geodesic equation and the antisymmetry of the Riemann tensor. The first term is $-B^c{}_bP_a^bB^a{}_c$, and inserting projectors and identities turns it into $-\hat{B}^c{}_a\hat{B}^a{}_c$, which expands to give the first three terms.

• To control the last term in Raychaudhuri's equation, we impose energy conditions. The most important condition is the dominant energy condition (DEC), which requires $-T^a{}_bV^b$ to be a future-directed causal vector, or zero, for all future-directed timelike vectors V^a.

• The motivation for the DEC is that the energy momentum current measured by an observer with four-velocity u^a is $j^a = -T^a{}_b u^b$. Heuristically, the dominant energy condition restricts matter to not move faster than light. For instance, one can show that if T_{ab} is zero in a closed region S of some spacelike hypersurface Σ and obeys the DEC, then T_{ab} is zero within $D^+(S)$.

• The weak energy condition (WEC) only requires $T_{ab}V^aV^b \geq 0$ for any causal vector V^a, which corresponds to all observers measuring nonnegative energy density.

• The null energy condition (NEC) is even weaker, specializing to null V^a. It implies $|w| \leq 1$ for perfect fluids obeying $p = w\rho$.

• The strong energy condition (SEC) is stronger than the NEC but independent of the WEC and DEC. It requires

$$\left(T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T^c_c\right)V^aV^b \geq 0$$

for all causal vectors V^a. By the Einstein equation, this is equivalent to $R_{ab}V^aV^b \geq 0$, which implies that gravity is attractive. However, while the DEC appears to be satisfied in our universe, the SEC is not, since the cosmological constant is positive.

• If the NEC applies, then the generators of a null hypersurface satisfy

$$\frac{d\theta}{d\lambda} \leq -\frac{1}{2}\theta^2$$

To see this, note that $\hat{\omega}$ is zero in Raychaudhuri's equation. The metric restricted to $T_\perp$ is positive-definite, so $\hat{\sigma}^{ab}\hat{\sigma}_{ab}$ is positive. Since U^a is null, Einstein's equation gives $R_{ab}U^aU^b = 8\pi T_{ab}U^aU^b$, so $R_{ab}U^aU^b$ is positive.

• Therefore, if $\theta = \theta_0 < 0$ at a point p on a generator γ of a null hypersurface, then $\theta \to -\infty$ along γ within an affine parameter distance $2/|\theta_0|$, provided γ extends this far.

Example. Consider a massless scalar field, with

$$T_{ab} = \partial_a\Phi\partial_b\Phi - \frac{1}{2}g_{ab}(\partial\Phi)^2$$

Then we have

$$j^a = -T^a{}_bV^b = -\left(V^b\partial_b\Phi\right)\partial^a\Phi + \frac{1}{2}V^a(\partial\Phi)^2, \quad j^2 = \frac{1}{4}V^2\left((\partial\Phi)^2\right)^2.$$

For timelike V^a, this implies j^a is causal or zero. To check its orientation, note that

$$V^aj_a = (-V\cdot\partial\Phi)^2 + \frac{1}{2}V^2(\partial\Phi)^2 = -\frac{1}{2}\left(V^a\partial_a\Phi\right)^2 + \frac{1}{2}V^2\left(\partial^a\Phi - \frac{V^b\partial_b\Phi}{V^2}V^a\right)^2$$

The final expression in brackets is orthogonal to V^a, so its norm is non-negative. Therefore, $V\cdot j \leq 0$ so j^a is future-directed or zero, establishing the DEC.

Finally, we define conjugate points.

• Two points p and q are conjugate along a geodesic γ if γ passes through p and q, and there exists a Jacobi field along γ that vanishes at p and q but is not identically zero. Intuitively, this means that a group of geodesics infinitesimally close to γ converge at both p and q.

• Theorem. Consider a null geodesic congruence including all of the null geodesics through p. If $\theta \to -\infty$ at a point q on a null geodesic γ through p, then p is conjugate to q along γ.

• Theorem. Let γ be a causal curve containing p and q. Then there does not exist a smooth, one-parameter family of causal curves γ_s connecting p and q with $\gamma_0 = \gamma$ and γ_s timelike for $s > 0$ (i.e. γ cannot be deformed smoothly to a timelike surface) if and only if γ is a null geodesic with no point conjugate to p along γ between p and q.

• Now suppose we have a two-dimensional spacelike surface S, and consider one of the geodesics γ that generate $\mathcal{N}_1$ or $\mathcal{N}_2$. We say a point p along γ is conjugate to S if there exists a Jacobi field along γ that vanishes at p, and is tangent to S on S. That is, null geodesics emitted from S converge at p. The analogue of the above theorem is that p is conjugate to S if $\theta \to -\infty$ at p.

Example. Consider geodesics on $\mathbb{R} \times S^2$ with metric $ds^2 = -dt^2 + d\Omega^2$. The geodesics travel on great circles of S^2. Then the North and South poles are conjugate points. Now consider a null geodesic from the North pole to the equator, which passes through the South pole; such a path wraps around the sphere 3/4 of the way. Then it's possible to deform the path to be shorter, making it timelike.

3.5.5 7.4 Causal Structure

We now make some formal definitions regarding causal structure.

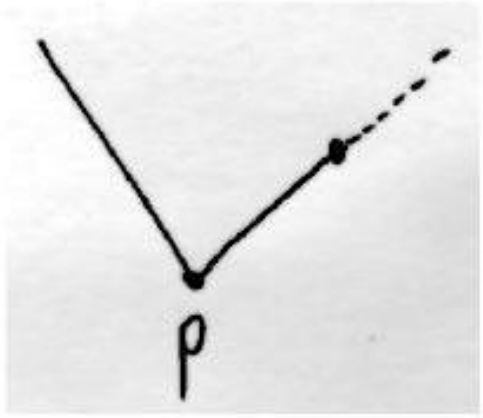
• Let (M, g) be a time-orientable manifold with $U \subset M$. The chronological future $I^+(U)$ of U is the set of points of M which can be reached by a future-directed timelike curve starting on U. The causal future $J^+(U)$ of U is the union of U with the set of points of M that can be reached by a future-directed causal curve starting on U. We define the chronological past $I^-(U)$ and the causal past $J^-(U)$ similarly.

• For a point p in Minkowski space, $J^+(p)$ is the set of points on or inside the future light cone including p itself, while $I^+(p)$ is the interior of $J^+(p)$.

• It can be shown that in general, we have

$$I^+(U) = \text{int}\left(J^+(U)\right), \quad J^+(U) \subset \overline{I^+(U)}$$

In Minkowski space, the latter is an equality. However, consider two-dimensional Minkowski space with the origin deleted, as shown below.



Then the dotted line is in $\overline{I^+(p)}$ but not in $J^+(p)$, since a light ray would have to pass through the origin to reach it.

• We write the boundary of $U \subset M$ as $\dot{U} = \bar{U} / \text{int}(U)$. Then we have

$$\overline{J^+(U)} = \overline{I^+(U)}, \quad \dot{J}^+(U) = \dot{I}^+(U)$$

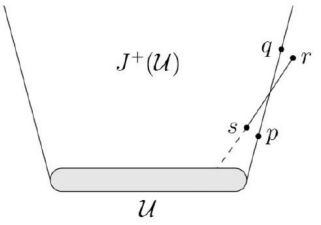
In Minkowski space, $\dot{I}^+(p)$ is the set of points along future-directed null geodesics starting from p. In general, this statement holds locally, as shown by the following theorem.

• Theorem. Given $p \in M$ there exists a convex normal neighborhood U of p, where for any $q, r \in U$ there exists a unique geodesic connecting q and r that stays in U. Then $\dot{I}^+(p)$ in the spacetime (U, g) is the set of all points in U along future-directed null geodesics in U that start at p.

• Corollary. If $q \in J^+(p) \backslash I^+(p)$, there exists a null geodesic from p to q.

Proof: given a causal curve connecting p and q with parameter in $[0,1]$, we can cover it with finitely many convex normal neighborhoods since $[0,1]$ is compact. Then we use the above theorem in each neighborhood.

• Theorem. A set $S \subset M$ is achronal if no two points in S are connected by a timelike curve. Then $\dot{J}^+(U)$ is an achronal three-dimensional submanifold of M.



Proof: consider $p, q \in \dot{J}^+(U)$ and suppose $q \in I^+(p)$. Since $I^+(p)$ is open, there exists r near q in $I^+(p)$ but not $J^+(U)$. Similarly, since $I^-(r)$ is open, there exists s near p in $I^-(r)$ and $J^+(U)$. Then there exists a causal curve from U to s to r, so $r \in J^+(U)$, a contradiction.

• As an example, consider $M = \mathbb{R} \times S^1$ with the flat metric

$$ds^2 = -dt^2 + d\phi^2$$

which is a two-dimensional Einstein static universe. Then $\dot{J}^+(p)$ is a pair of null geodesic segments that start at p and end where they meet at q. The geodesics have future endpoint q and past endpoint p. In our example above, if p is on the dotted line then the geodesic is past-inextendible as it hits the origin. This is general, as shown by the following theorem.

• Theorem. Let $U \subset M$ be closed. Then every $p \in \dot{J}^+(U)$ with $p \notin U$ lies on a null geodesic λ lying entirely in $\dot{J}^+(U)$ so that λ is either past-inextendible or has a past endpoint on U.

• In a globally hyperbolic spacetime, the above theorem can be strengthened to rule out the former case, as shown by the following theorem.

• Theorem. Let S be a two-dimensional orientable compact spacelike submanifold of a globally hyperbolic spacetime. Then every $p \in \dot{J}^+(S)$ lies on a future-directed null geodesic starting from S, which is orthogonal to S and has no point conjugate to S between S and p.

• Finally, we formally define the future Cauchy horizon of a partial Cauchy surface Σ as $H^+(\Sigma) = \overline{D^+(\Sigma)} / I^-\left(D^+(\Sigma)\right)$.

Note that we don't define $H^+(\Sigma)$ as $\dot{D}^+(\Sigma)$ because this includes Σ itself. However, one can show that $\dot{D}(\Sigma) = H^+(\Sigma) \cup H^-(\Sigma)$ and that the $H^\pm$are null hypersurfaces.

Finally, we're ready to state the Penrose singularity theorem.

• Theorem. Let (M, g) be globally hyperbolic with a noncompact Cauchy surface Σ. Assume the Einstein equation and the NEC are satisfied and M contains a trapped surface T. Let $\theta_0 < 0$ be the maximum value of θ on T for both sets of null geodesics orthogonal to T. Then at least one of these geodesics is future-inextendible and has affine length no greater than $2/|\theta_0|$.

• We give a very basic proof sketch. Assume the opposite for the sake of contradiction. Then by our previous results, any future-inextendible null geodesic orthogonal to T contains a point conjugate to T within affine parameter $2/|\theta_0|$.

• Next, let $p \in \dot{J}^+(T)$ with $p \notin T$. Then by our previous theorem, p lies on a future-directed null geodesic γ starting from T which is orthogonal to T and has no point conjugate to T between T and p. Then p cannot lie beyond the point conjugate to T.

• Therefore, $\dot{J}^+(T)$ is a subset of the compact set consisting of the set of points along the null geodesics orthogonal to T with affine parameter less than or equal to $2/|\theta_0|$. Since $\dot{J}^+(T)$ is closed, $\dot{J}^+(T)$ is thus compact. On the other hand, $\dot{J}^+(T)$ is a manifold, and hence can't have a boundary.

• This is a contradiction, unless Σ is compact, because the 'ingoing' and 'outgoing' congruences orthogonal to T can 'join up', as we saw in the Einstein static universe. Assuming Σ is noncompact gives the desired contradiction.

• The Penrose singularity theorem assumes the existence of a trapped surface, and it can be shown that trapped surface are generic. There is plenty of numerical evidence for this, as well as some mathematical evidence.

• For example, the Einstein equations possess the property of Cauchy stability, which implies that the solution in a compact region of spacetime depends continuously on the initial data. Now consider a sphere in region II of the Kruskal diagram, which contains a trapped surface. Then by Cauchy stability we would also have a trapped surface if the initial data were perturbed, so trapped surfaces occur generically in gravitational collapse.

• A theorem due to Schoen and Yau shows that asymptotically flat initial data will contain a trapped surface if the energy density of matter is sufficiently large. Christodoulou has shown that trapped surfaces can be formed even in the absence of matter, by gravitational waves.

• The Penrose singularity theorem states that if the maximal development of asymptotically flat initial data contains a trapped surface, then the maximal development is not geodesically complete. This could be because the maximal development is extendible, but this is not generic if the strong cosmic censorship conjecture holds. Then generically the result is a singularity.

• A different singularity theorem due to Hawking and Penrose relaxes the assumption that spacetime is globally hyperbolic and adds the SEC and a mild genericity assumption, and arrives at the same result.

• Thus, we have very good reasons to believe that gravitational collapse leads to the formation of a singularity. Note that this need not be a curvature singularity.

3.6 8 Asymptotic Flatness

3.6.1 8.1 Conformal Compactification

In this section, we rigorously define a black hole. We begin by studying conformal compactification, a useful tool for visualizing spacetimes.

• Given a spacetime (M, g), we can define a new, 'unphysical' metric $\bar{g} = \Omega^2 g$ where Ω is smooth and positive. We say $\bar{g}$ is obtained from g by a conformal transformation. (Note that in conformal field theory, such an operation is instead called a Weyl transformation.)

• Conformal transformations preserve timelike, spacelike, and null directions; in particular they preserve light cones, and hence the causal structure.

• In conformal compactification, we choose Ω so that the 'points at infinity' with respect to g are at finite distance with respect to $\bar{g}$, which requires $\Omega \to 0$ at infinity.

• The resulting spacetime $(M, \bar{g})$ is extendible to a larger spacetime $(\bar{M}, \bar{g})$, and we identify M as a subset of $\bar{M}$ where $\Omega = 0$ on ∂M.

Example. Minkowski spacetime. The metric is

$$g = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\omega^2$$

where we changed the angular measure to avoid confusion with the conformal factor Ω. We then define the null coordinates

$$u = t - r, \quad v = t - r, \quad -\infty < r \leq v < \infty, \quad g = -dudv + \frac{1}{4}(u - v)^2 d\omega^2$$

Next, we define the coordinates (p, q) by

$$u = \tan p, \quad v = \tan q, \quad -\pi/2 < p \leq q < \pi/2, \quad g = (2 \cos p \cos q)^{-2} \left(-4dpdq + \sin^2(q - p) d\omega^2\right)$$

The original 'infinity' corresponds to $|t| \to \infty$ or $r \to \infty$, and now corresponds to $|p| \to \pi/2$ or $|q| \to \pi/2$. To perform conformal compactification, we define

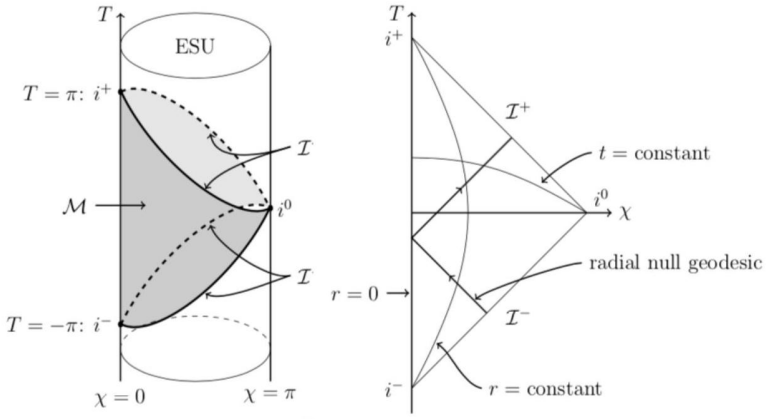
$$\Omega = 2\cos p \cos q, \quad \bar{G} = -4dpdq + \sin^2(p-q)d\omega^2$$

Finally, we switch back to timelike and spacelike coordinates by

$$T = q + p \in (-\pi, \pi), \quad \chi = q - p \in [0, \pi), \quad \bar{g} = -dT^2 + d\chi^2 + \sin^2\chi d\omega^2$$

By extending the range of T to $(-\infty, \infty)$ and the range of χ to $[0, \pi]$, we arrive at the Einstein static universe $\mathbb{R} \times S^3$. To visualize our spacetime, we show only T and χ. Then Minkowski space can be depicted as a slice of the Einstein static universe. Alternatively, we can project the slice to get a Penrose diagram. Formally, a Penrose diagram is a bounded subset of $\mathbb{R}^2$ endowed with a flat Lorentzian metric; every point on the internet corresponds to a sphere S^2. Points on the boundary can represent either points at infinity, or points of symmetry, such as $r = 0$.

There are several regions of interest on the boundary. Radial null geodesics come from the null hypersurface $\mathcal{I}^-$, called past null infinity, and end at $\mathcal{I}^+$, called future null infinity. Similarly, radial
timelike geodesics start at past timelike infinity $i^-$and end at future timelike infinity i^+, while radial spacelike geodesics start and end at spatial infinity i^0.



We can also consider non-radial geodesics. From the point of view of this diagram, non-radial motion is simply a reduction in spatial velocity, so a non-radial null geodesic looks like a radial timelike geodesic. Also note that a timelike curve that is not a geodesic can end up at $\mathcal{I}^+$, provided it is 'asymptotically null'.

Note. The fact that i^0 and $i^\pm$are single points is a bit misleading. Timelike geodesics do not actually converge; they merely approach regions that are increasingly shrunk by the conformal transformation. The real lesson here is that the past light cones of any two events will intersect.

Note. The behavior of geodesics has an analogue for fields. Consider a massless scalar field ψ in Minkowski spacetime, which satisfies the wave equation $\nabla^a\nabla_a\psi = 0$. Spherically symmetric solutions take the form

$$\psi(t, r) = \frac{1}{r}(f(t-r) + g(t+r))$$

This is singular unless $g(x) = -f(x)$, giving

$$\psi(t, r) = \frac{1}{r}(f(u) - f(v)) = \frac{1}{r}(F(p) - F(q))$$

Now, on $\mathcal{I}^-$, we have $p = -\pi/2$, and the solution is

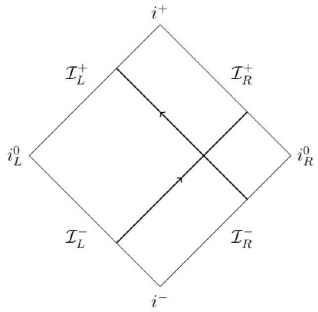
$$\frac{1}{r}F_0(q) = \frac{1}{r}(F(-\pi/2) - F(q))$$

Then the solution everywhere can be written in terms of $F_0(q)$,

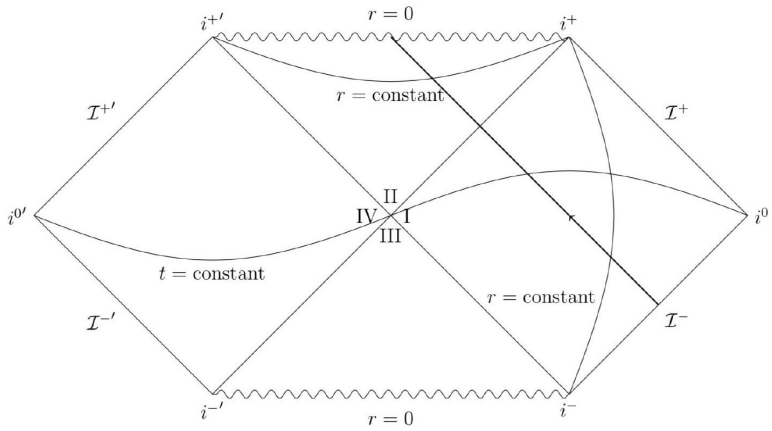
$$\psi(t,r) = \frac{1}{r}\left(F_0(q) - F_0(p)\right)$$

so it is determined by the solution on $\mathcal{I}^-$. Similarly, it is determined by the solution on $\mathcal{I}^+$.

Example. Two-dimensional Minkowski spacetime, $g = -dt^2 + dr^2$. Everything proceeds as before, except that now $r \in (-\infty, \infty)$. Then the Penrose diagram has two disconnected spatial infinities and null infinities. In the three dimensional case, spatial infinity is instead a sphere S^2 and is hence connected.

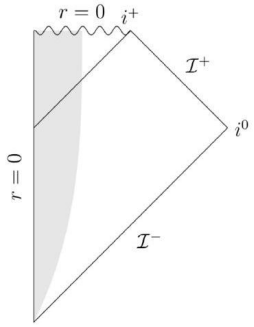


Example. The Kruskal spacetime. We know the spacetime has two asymptotically flat regions, so the 'infinity' in each of these regions should be like that of four-dimensional Minkowski spacetime. The coordinates U and V are already null, so to construct the Penrose diagram, we would have to define coordinates $P = P(U)$ and $Q = Q(V)$ so that the range of P and Q is finite, and the unphysical metric $\bar{g}$ has a smooth extension.

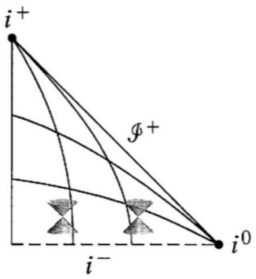


Performing this explicitly takes a lot of work, but we can guess the answer using the Kruskal diagram. We leave everything unchanged, except we use the conformal freedom to turn the curvature singularity at $r = 0$ into a horizontal line. Note that timelike infinity is singular, since lines of constant r meet there, including the curvature singularity $r = 0$. The timelike infinities are single points, but as in the Minkowski case, this doesn't mean that every timelike geodesic converges; there are plenty of such geodesics that don't hit the singularity.

Example. Consider spherically symmetric gravitational collapse. Since the region outside the star is asymptotically flat, we simply have part of the Minkowski space diagram. The metric everywhere outside of the shaded region is Schwarzschild, so the upper part is taken from the Kruskal diagram. Again, past spatial infinity $i^-$is a single point, from which the matter arrives.



Example. The Penrose diagram for a Robertson-Walker universe with $a(t) \propto t^q$ and $q \in (0, 1)$. There is a singularity at $T = 0$.



Here, the singularity forms the past spatial infinity, which is no longer a single point. Accordingly, there are causally disconnected regions in the early universe.

Next, we give some more facts about conformal transformations. To avoid confusion, we will switch here to calling such a transformation a Weyl transformation, in agreement with conventions outside of relativity.

• We denote the Levi-Civita connection of the unphysical metric $\bar{g}$ by $\bar{\nabla}$, and define

$$\bar{\nabla}_b Y^a = \nabla_b Y^a + C^a{}_{bc} Y^c$$

The difference of two connections is tensorial, so we have a tensor

$$C(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$$

whose components are $C^a{}_{bc}$, and T is symmetric since the torsion vanishes.

• Using the formula for the Christoffel symbols, we can compute

$$C^a{}_{bc} = \frac{1}{\Omega} \left(\delta^a_b \nabla_c \Omega + \delta^a_c \nabla_b \Omega - g_{bc} g^{ad} \nabla_d \Omega \right)$$

Plugging this into the Ricci identity, we get the transformation of the Ricci tensor,

$$R_{ab} = \bar{R}_{ab} + 2\Omega^{-1} \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b \Omega + \bar{g}_{ab} \bar{g}^{cd} \left(\Omega^{-1} \bar{\nabla}_c \bar{\nabla}_d \Omega - 3\Omega^{-2} \partial_c \Omega \partial_d \Omega \right)$$

• As we've already seen, Weyl transformations preserve null curves. They also preserve null geodesics; consider a null geodesic with affine parameter V such that $\nabla_V V = 0$. When we compute $\bar{\nabla}_V V$, we get extra terms from $V^b V^c C^a{}_{bc}$ which are simply proportional to V, so we have a geodesic with a non-affine parameter.

• In two dimensions, every metric is conformally equivalent to a flat metric. To see this, note that we can always switch to coordinates u and v which are everywhere null, so the metric is proportional to $dudv$. By a Weyl transformation, we can set $\bar{g} = 2dudv$, which is flat.

• The simplest action for a non-minimally coupled scalar field is

$$S = \int dx\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) - \frac{\xi}{2}R\phi^2\right)$$

and in four dimensions, a lengthy calculation shows that it is Weyl invariant when $V = 0$ and $\xi = 1/6$. More generally, for $d \neq 2$ we require $V = 0$ and $\xi = (d-2)/4(d-1)$, while for $d = 2$, ξ can be arbitrary.

• The Maxwell action is also Weyl invariant,

$$S = -\frac{1}{16\pi}\int dx\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}F_{\alpha\mu}F_{\beta\nu}$$

The easiest way to show this is to write

$$S \propto \int (dA)\wedge\star(dA)$$

where it's manifest that only the Hodge star is affected by the conformal transformation; its rescaling factor precisely cancels that of A. Alternatively one can see that the theory is scale invariant and the stress-energy tensor is traceless. As an application, we can find how the electromagnetic field behaves in a Friedmann universe by conformal mapping to a flat universe, then mapping back.

• Scale invariance is the case of constant Ω. We see that under a scale transformation,

$$R_{ab} = \bar{R}_{ab}, \quad R = \Omega^2\bar{R}, \quad G_{ab} = \bar{G}_{ab}$$

As a result, the vacuum Einstein equation is scale invariant if the cosmological constant is zero.

3.6.2 8.2 Asymptotic Flatness

In this section, we formally define asymptotic flatness.

• Intuitively, an asymptotically flat spacetime is one that looks like Minkowski spacetime at infinity. We would like to regard the Kruskal spacetime as flat, but $i^\pm$and i^0 are singular. Instead, we base our definition around $\mathcal{I}^\pm$.

• A time-orientable spacetime (M, g) is asymptotically flat at null infinity if there exists a spacetime $(\bar{M}, \bar{g})$ so that

• There exists a positive function Ω on M so that $(\bar{M}, \bar{g})$ is an extension of $(M, \Omega^2 g)$.

• Within $\bar{M}, M$ can be extended to obtain a manifold with boundary, $M \cup \partial M$.

• Ω can be extended to a function on $\bar{M}$ so that $\Omega = 0$ and $d\Omega \neq 0$ on ∂M.

• ∂M is the disjoint union of two components $\mathcal{I}^+$and $\mathcal{I}^-$, each diffeomorphic to $\mathbb{R}\times S^2$.

• No past/future directed causal curve starting in M intersects $\mathcal{I}^+/\mathcal{I}^-$.

• The $\mathcal{I}^\pm$are 'complete', as defined below.

The first three conditions just require the existence of an appropriate conformal compactification. The requirement $d\Omega \neq 0$ ensures that the spacetime metric approaches the Minkowski metric at an appropriate rate near $\mathcal{I}^\pm$, and the last three conditions ensure that the infinity has the same structure as in Minkowski spacetime.

• For example, consider the Schwarzschild solution in outgoing EF coordinates (u, r, θ, ϕ), and define $r = 1/x$. Then

$$g = -(1-2Mx)du^2 + 2\frac{dudx}{x^2} + \frac{1}{x^2}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

so choosing a conformal factor $\Omega = x$ gives the unphysical metric

$$\bar{g} = -x^2(1-2Mx)du^2 + 2dudx + d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$$

which can be smoothly extended across $x = 0$.

• In this case, $\mathcal{I}^+$corresponds to $r \to \infty$ with finite u, so here it is the surface $x = 0$. It is parametrized by (u, θ, ϕ) and hence diffeomorphic to $\mathbb{R} \times S^2$. Similarly one can do the same for $\mathcal{I}^-$with the same conformal factor, but in incoming EF coordinates. Thus the Schwarzschild solution is asymptotically flat at null infinity.

• We have not required that $\mathcal{I}^\pm$be null hypersurfaces; instead we can derive it. We multiply our transformation for R_{ab} by Ω for

$$0 = \Omega R_{ab} = \Omega\bar{R}_{ab} + 2\bar{\nabla}_a\bar{\nabla}_b\Omega + \bar{g}_{ab}\bar{g}^{cd}\left(\bar{\nabla}_c\bar{\nabla}_d\Omega - 3\Omega^{-1}\partial_c\Omega\partial_d\Omega\right)$$

where we assume a vacuum solution for simplicity. The first three terms are regular, so the last one must be as well. Then $\bar{g}^{cd}\partial_c\Omega\partial_d\Omega$ vanishes on $\mathcal{I}^\pm$so $d\Omega$ is null on $\mathcal{I}^\pm$and normal to it. Then the $\mathcal{I}^\pm$are null hypersurfaces.

• There is substantial freedom in choosing the coordinates (u, θ, ϕ). One can show by some lengthy arguments that we can write

$$\bar{g}|_{\Omega=0} = 2dud\Omega + d\theta^2 + \sin^2 d\phi^2$$

on $\mathcal{I}^+$, with the same for $\mathcal{I}^-$. Finally, one can convert this to inertial frame coordinates (t, x, y, z) so the leading order metric is the Minkowski metric, and corrections are $O(1/r)$. The 'completeness' condition above is that the range of u is $(-\infty, \infty)$.

3.6.3 8.3 Event Horizons and Killing Horizons

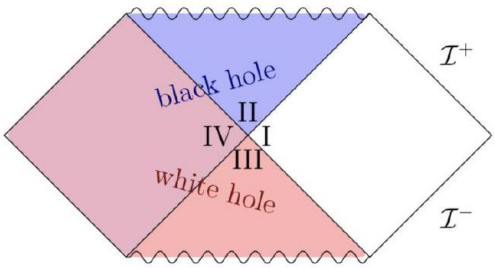
Next, we formally define a black hole.

• Let (M, g) be a spacetime that is asymptotically flat at null infinity. The black hole region is $\mathcal{B} = M\backslash\left(M \cap J^-\left(\mathcal{I}^+\right)\right)$where $J^-\left(\mathcal{I}^+\right)$is defined using the unphysical spacetime $(\bar{M}, \bar{g})$. The future event horizon is the boundary, $\mathcal{H}^+ = \dot{\mathcal{B}} = M \cap \dot{J}^-\left(\mathcal{I}^+\right)$. Similarly we define the white hole region as $\mathcal{W} = M\backslash\left(M \cap J^+\left(\mathcal{I}^-\right)\right)$and the past event horizon as $\mathcal{H}^- = \dot{W} = M \cap \dot{J}^+\left(\mathcal{I}^-\right)$.

• Intuitively, the black hole region is the region that cannot send signals to $\mathcal{I}^+$, while the white hole region cannot receive signals from $\mathcal{I}^-$.

• One can easily construct spacetimes with nonempty black hole and white hole regions by deleting points from Minkowski spacetime. To rule out such cases, we focus on spacetimes that are the maximal development of geodesically complete, asymptotically flat initial data.

• The Kruskal spacetime is not asymptotically flat according to our definition, but if we ignore the other null infinities $\mathcal{I}'^\pm$, then the spacetime contains a black hole and white hole region.



• It can be shown using our earlier theorems that the event horizons $\mathcal{H}^\pm$are null hypersurfaces. The generators of $\mathcal{H}^+$cannot have future endpoints, but they can have past endpoints, as seen in spherically symmetric gravitational collapse. The same goes for $\mathcal{H}^-$in reverse.

Next, we consider some general properties of black holes.

• Unlike bodies in Newtonian gravity, black holes are typically described by a small number of parameters, as stated by no-hair theorems. For example, for gravity and electromagnetism, all stationary, asymptotically flat black hole solutions are fully characterized by mass, electric and magnetic charge, and spin.

• The precise statement of a no-hair theorem depends on the matter content; the theorem above also holds for the Standard Model since electromagnetism is the only long-range field.

• The weak cosmic censorship conjecture roughly states that all singularities are hidden behind event horizons, given suitable generic initial conditions and some energy conditions. Combining this with the singularity theorems implies that event horizons are generic. Note that weak cosmic censorship is not weaker than strong cosmic censorship; the two are logically independent.

• From a field theorist's point of view, general relativity is just an effective field theory. Then cosmic censorship just means we should trust the effective field theory only in its domain of validity: if we had a naked singularity we shouldn't be using general relativity in the first place, as the singularity can produce very heavy particles.

• Our definition of an event horizon is nonlocal, which makes it difficult to use numerically. Alternatively, one can show that trapped surfaces are in $\mathcal{B}$, given suitable assumptions; then $\mathcal{H}^+$is approximated by taking the boundary of the region where trapped surfaces exist.

• Hawking's area theorem states that, assuming the WEC, weak cosmic censorship, and asymptotic flatness, the area of $\mathcal{H}^+$is non-decreasing. This is trivial for the Schwarzschild black hole but gives a useful constraint for a rotating black hole, where the area depends on both the mass and the spin. It is violated by Hawking radiation because quantum fields violate the WEC.

Next, we turn to Killing horizons.

• Consider the time translation Killing vector field k^a. We interpret an observer to be 'stationary' if it moves along orbits of k^a, or at least 'stationary according to an observer at infinity'.

• Therefore, the set of points where k^a is null, called the stationary limit surface, bounds regions where it is impossible for an observer to be stationary.

• A related useful concept is a Killing horizon, i.e. a null hypersurface $\mathcal{N}$ where a Killing vector ξ^a is normal to $\mathcal{N}$, which implies that ξ^a is null on $\mathcal{N}$.

• It can be shown under suitable conditions that all event horizons are Killing horizons. For a static spacetime $\xi^a = k^a$, while for a stationary spacetime ξ^a is a combination of k^a and m^a where m^a generates axial rotations.

• Note that the converse is far from true. For example, in Minkowski space the boost generator $x\partial_t + t\partial_x$ is a Killing vector, yielding the Killing horizons $x = \pm t$, even though nothing special happens at these points. By taking linear combinations with translations, every point lies on a Killing horizon.

• The above is an example of a bifurcate Killing horizon, i.e. the intersection of two Killing horizons. At their intersection, the Killing vector must vanish. A bifurcate Killing horizon also appears in the Kruskal spacetime with interaction $U = V = 0$.

• Since $\xi^a\xi_a = 0$ on $\mathcal{N}$, its gradient is normal to $\mathcal{N}$ and hence proportional to ξ_a, so

$$\nabla_a \left(\xi^b \xi_b\right)\big|_{\mathcal{N}} = -2\kappa\xi_a$$

as we've shown earlier. Then, as earlier, we have

$$\xi^b \nabla_b \xi^a\big|_{\mathcal{N}} = \kappa\xi^a$$

where the proof in this case is shorter since we can use Killing's equation. To fix the normalization, we set $k^a k_a = -1$ at spatial infinity.

• The function κ is called the surface gravity, and it measures the failure of integral curves of ξ^a to be affinely parametrized geodesics. Alternatively, letting $\xi^a = fn^a$ where n^a generates affinely parametrized geodesics, we have

$$\kappa = \xi^a \partial_a \log |f|$$

Another nice formula that can be shown is

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2} \left(\nabla_a \xi_b\right) \left(\nabla^a \xi^b\right)$$

where we use $\xi_{[a} \nabla_b \xi_{c]} = 0$ since ξ is normal to Σ.

• In the case of a static spacetime, we can physically interpret the surface gravity as the acceleration needed to keep an observer static as measured by a static observer at infinity.

• To see this, we define

$$\xi^a = V u^a$$

where u^a is the four-velocity of a static observer, so $V = \sqrt{-\xi_a \xi^a}$. The four-acceleration is

$$a^a = u^b \nabla_b u^a = \nabla^a \log V$$

where we use $u^a \nabla_b u_a = 0$ since $u^a u_a = -1$, and $\nabla_\xi \left(\xi^2\right) = 0$ by Killing's equation.

• Therefore, the magnitude of the acceleration is

$$a = \sqrt{a_a a^a} = V^{-1} \sqrt{\nabla_a V \nabla^a V}$$

and this measures the force felt by the static observer; it diverges as the observer approaches the horizon. This also suggests why Killing horizons and event horizons are related.

• Consider an observer at infinity holding the static observer in place by a long straight rope. The conserved energy of a photon is $E = -p_a \xi^a$, but the measured energy is $E = -p_a u^a$. Thus if the static observer emits a photon, it arrives at infinity redshifted by a factor of V. Now suppose the static observer pulls in the rope by one meter with a force of F. The observer at infinity also sees the rope pulled in by one meter, since both are measuring proper rope length, so by energy conservation the force at infinity must also be redshifted by V.

• Therefore, an observer at infinity pulls with a force per mass

$$Va = \sqrt{\nabla_a V \nabla^a V}$$

and one can show this is equal to κ. The computation is delicate, since we are dealing with products of vanishing and infinite quantities.

3.7 Foundations of the GR Formalism

(тут много может быть вопросов, еще много это буду переписывать.)

3.7.1 Independence on coordinates

суть

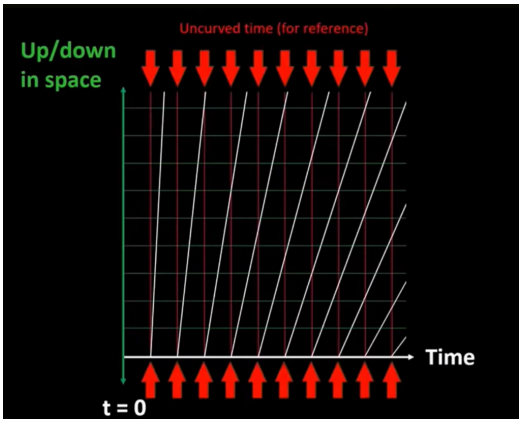
(потом напишу. также явный пример приведу.)

Действительно ли есть общековариантность в ОТО

(Некрасов сказал, что был спор Эйнштейна и Фока об этом, пока хз)

Иллюстрация замены координат (!?!?!??!!??!)

(пока тут большая проблема с иллюстрацией того, что происходит!!!!)



Примеры инвариантности при любых преобразований координат (???)

(хз)

Преобразования лоренца как частный случай общековариантных преобразований

(в ОТО мы меняем метрику при смене координат. Как преобразования Лоренца будут выглядеть через смену метрики?? какая будет новая система координат??? пока не уверен. такая же что ли?)

общекоординатная инвариантность

что это за принцип и как им пользоваться - так пока и не понял.

Мы уже говорили, что в общей теории относительности выбор системы отсчета ничем не ограничен;

тремя пространственными координатами x^1, x^2, x^3 могут являться любые величины, определяющие расположение тел в пространстве, а временная координата x^0 может определяться произвольно идущими часами.

Явный пример изменения координат, меняющий поле и пример, лишь меняющий систему отсчета

(хочу явно на контрасте увидеть эту разницу!!! как выглядит например новая метрика в случае перехода к гравитационному полю и как в новой системе отсчета? в чем сходство? это к утверждению, что не всякое изменение g_{ik} соответствует изменению метрики пространства-времени, т.е. реальному изменению гравитационного поля.)

Аксиомы теории Эйнштейна

(maybe I'll write later)

Пространство-время без координат (?)

пока что для меня это не актуальный и открытый вопрос.

Мизнер и др. про это что-то писали вначале.

Суть принципа эквивалентности

Принцип эквивалентсности - один из важнейших принципов ОТО.
(тонг знает)

Формулировка принципа эквивалентности

свойства движения в неинерциальной системе отсчета такие же, как в инерциальной системе при наличии гравитационного поля.

Другими словами, неинерциальная система отсчета эквивалентна некоторому гравитационному полю.

Обзор применений принципа эквивалентности

Применений принципа эквивалентности много, хотя и казалось бы, это очевидная вещь, на которую можно забить, ниже вкратце обсудим самые актуальные.

Принцип общековариантности

важный принцип, из которого многое получается (Хрипович знает)

нпр можно что-то с уравнениями второго порядка сделать, мб получить, что масса поля это ноль.

Следствия принципа эквивалентности

Принцип эквивалентности полезен именно своими следствиями, главные из которых ниже и обсудим.
(хз, какое тут главное)

Частица ничего не почувствует, если через нее пройдет волна

Тонг говорит, что как-то это следует, я хз, как.

3.7.2 Why Are We Attracted to the Earth?

Это не мы притягиваемся к Земле, а Земля ускоряется

Небо взлетает (!?!?)

Как выглядит ускорение Земли?

3.7.3 General Properties of General Relativity

Общие свойства гравитационных полей

Обсудим, какие должны быть у поля свойства, чтобы мы однозначно поняли, что это поле именно гравитационное.
(пока хз)

Движение любых тел в гравитационном поле не должно зависеть от их массы

что ж, электромагнитное поле тоже подходит, казалось бы.
(подробно обсудим это тут)

выделим ключевые детали и особенности.

начальные данные гравитационного поля описываются $V-C-G = d(d-1)-d-d = d(d-3)$ функциями координат

(л6 и я не очень въехал)

Итак, временные производные величин ξ_μ полностью определяются их значениями и пространственными производными. Таким образом, «остаточная» калибровочная свобода на начальной поверхности S_0 описывается $G = d$ функциями пространственных координат. Значит, начальные данные гравитационного поля описываются

$$V - C - G = d(d-1) - d - d = d(d-3)$$

функциями координат.

Немного вольно можно сказать, что число собственных степеней свободы (половина размерности фазового пространства) гравитационного поля составляет $\frac{d(d-3)}{2}$ в каждой точке.

Мы это установим более строго, когда будем изучать гравитационные волны.

хз

вдали от области, где есть материя поле неотличимо от суммы статического решения и гравитационной волны.

Важный факт состоит в том, что если материя сосредоточена в конечной области (то есть тензор энергии-импульса отличен от нуля в конечной области) пространства, то вдали от этой области решение неотличимо от суммы статического решения и гравитационной волны.

(? хз, почему, Лашкевич это якобы в л9 вывел, потом напишу)

хз почему это важно, но вроде да, важно.

далеко от гравитирующей материи гравитационная волна в небольшой области пространства неотличима от плоской волны

Более того, достаточно далеко от гравитирующей материи гравитационная волна в небольшой области пространства неотличима от плоской волны. То есть мы можем говорить об излучении гравитационных волн материей.

э... почему это так - тоже типа немного хз.

вроде очевидно, а почему бы там не появился какой-то фрактал?

хз, короче.

созрею - пропишу.

Таким образом, роль источника гравитационного поля в ОТО играет тензор энергии-импульса материи

почему - потом пропишу

нелинейность уравнений гравитационного поля

(потом явно напишу, уже почти понимаю)

Гравитационное поле - не поле

так Суслов сказал, типа это связано с ТЭИ ЛЛ.

пока самому сказать нечего про это.

силы инерции отличны от сил гравитации тем, что при переходе в неподвижную систему отсчета первые исчезают в отличие от вторых

отвечу позже, почему это так

3.7.4 Influence of Gravitation on Matter

(см Мизнер 2, там сполна раскрто, я мало что сказать могу)

3.7.5 Experimentally Verified Properties of the Gravitational Field

(идея в том, чтобы четко указать, какое свойство как было проверенно, чтобы от этого отталкиваться)

Дальнодействие

потом напишу, что это, пока слабо понимаю, что это и зачем нужно?
как применять это?

3.7.6 Variational Principle

использовался для вывода уравнений эйнштейна

3.7.7 Distances in Curved Spacetime

Обсудим подробно уравнение геодезических в ОТО.
(пока не усвоил)

Отсутствие понятия расстояния в ОТО

Если g_{ik} зависят от x^0, что вообще говоря может быть, то и пространственная метрика $\gamma_{\alpha\beta}$ меняется со временем.

По этой причине не имеет смысла интегрировать dl - такой интеграл зависел бы от того, по какой мировой линии между двумя заданными пространственными точками он брался.

Таким образом, в общей теории относительности теряет, вообще говоря, смысл понятие об определенном расстоянии между телами, остающееся в силе лишь в бесконечно малом.

Единственным случаем, когда расстояние может быть определено и в конечных областях пространства, являются такие системы отсчета, в которых g_{ik} не зависят от времени, и потому интеграл $\int dl$ вдоль пространственной кривой имеет определенный смысл.

(потом мб конкретику добавлю, а то явно это не так уж понятно)

ds Интервал и l расстояния

Обсудим, что есть интервалы и расстояния.
(подробности в 2ю часть скину)

Основные формулы

формула перехода к дельта функции:

$$\int ds = \int d^4x\sqrt{-g}\frac{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}(t))}{\sqrt{-g}u^0}, \quad u^0 = \frac{dt}{ds}$$

(?? и что с того??)

Определение

Обзор типичных ошибок при работе с интервалом

подробно это в соответствующей части изложено, а здесь приведем суть, ибо это тоже полезно.

пока мало опыта, так что я хз.

Приведем методы вычисления расстояний в ОТО и понимание, что оно из себя представляет.

Расстояния

Истинные расстояния и промежутки времени по значениям величин x^0, x^1, x^2, x^3 определяются как:

(?)

Расстояние dl в произвольной метрике

Элемент dl пространственного расстояния определяется как

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta,$$

то есть через $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}$, трехмерный метрический тензор, определяющий геометрические свойства пространства.

(пока не четко уверен, почему именно такая конструкция)

Действительно, рассмотрим бесконечно близкие точки в пространстве B и A, с координатами соответственно $x^\alpha + dx^\alpha$ и x^α. Пусть из B отправляется световой сигнал в A, а затем сразу обратно по тому же пути.

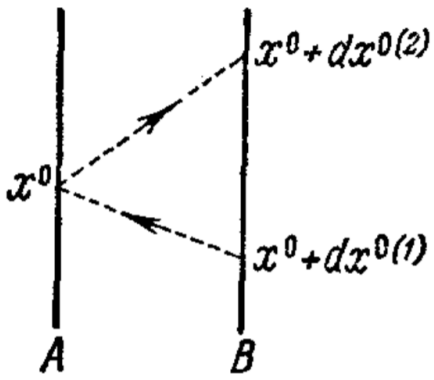


Figure 3.1: сплошные прямые - мировые линии, соответствующие x^α и $x^\alpha + dx^\alpha$, а штриховые - мировые линии сигналов.

Расстояние между точками можно найти, зная собственное время движения, а его найти легко, зная время, отсчитываемое в одной и той же точке B.

Для времени, отсчитываемом в точке B, напишем интервал, выделив пространственные и временную координаты:

$$ds^2 = g_{00}\left(dx^0\right)^2 + 2g_{0\alpha}dx^0dx^\alpha + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta.$$

Интервал между событиями, являющимися уходом и приходом сигнала из одной точки в другую, всегда равен нулю: $ds^2 = 0$, так что решая это квадратное уравнение относительно dx^0, найдем два корня:

$$dx^{0(1)} = \frac{1}{g_{00}}\left(-g_{0\alpha}dx^\alpha - \sqrt{\left(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00}\right)dx^\alpha dx^\beta}\right)$$
$$dx^{0(2)} = \frac{1}{g_{00}}\left(-g_{0\alpha}dx^\alpha + \sqrt{\left(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00}\right)dx^\alpha dx^\beta}\right),$$

отвечающих распространению сигнала в двух направлениях между A и B.

(????) Если x^0 есть момент прибытия сигнала в A, то моменты его отправления из B и обратного возвращения в B будут соответственно $x^0 + dx^{0(1)}$ и $x^0 + dx^{0(2)}$. Полный промежуток «времени» между отправлением и возвращением сигнала в ту же точку равен

$$dx^{0(2)} - dx^{0(1)} = \frac{2}{g_{00}}\sqrt{\left(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00}\right)dx^\alpha dx^\beta}$$

Соответствующий промежуток истинного времени получается отсюда умножением на $\sqrt{g_{00}}/c$, а расстояние dl между обеими точками - еще умножением на $c/2$. В результате находим:

$$dl^2 = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}\right)dx^\alpha dx^\beta$$

Перепишем его в виде

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$$

где $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}$ есть трехмерный метрический тензор, определяющий метрику, т.е. геометрические свойства пространства.

Его мы не интегрируем, потому что это вообще говоря не имеет смысла. (в другом месте это будет хорошо раскрыто)

Так просто не избавиться от нулевых компонент метрики (!??!?!)

(?? пока не могу четко объяснить, почему бы просто не взять пространственную часть и всё???)

Почему не придумать более простую конструкцию (!?!??!?)

(хз, не знаю.)

Примеры расстояний

(выпишу из разных мест про них итоговый их вид)

3.8 Einstein's Equations

Большинство задач ОТО сводятся к уравнениям Эйнштейна, которые и обсудим подробно в этом разделе.

(по идее абсолютно любая задача ОТО сведется к уравнению из этой части)

3.8.1 Einstein–Hilbert Action

Обсудим подробно действие Эйнштейна-Гильберта и вывод уравнений Эйнштейна.

(наверное, по Тонгу просто напишу и все.)

О том, почему мы берем именно скалярную кривизну

(кст, для ЭД нужно аналогичное проделать)

(не совсем полезные рассуждения Ландау, но тут пояснения, почему именно скалярная кривизна у нас. мб потом мне объяснят, почему они важны, пока вроде ничего такого важного тут нет, всё понятно.)

Для нахождения уравнений, определяющих гравитационное поле, необходимо предварительно определить действие S_g этого поля, чтобы далее его и действие материальных частиц варьировать.

Действие S_g должно быть выражено в виде некоторого скалярного интеграла $\int G\sqrt{-g}d\Omega$, взятого по всему пространству и по временной координате x^0 между двумя заданными ее значениями.

Чтобы уравнения гравитационного поля содержали производные от «потенциалов» поля не выше второго порядка, так как они получаются путем варьирования действия, то необходимо, чтобы подынтегральное выражение G содержало производные от g_{ik} не выше первого порядка; таким образом, G должно содержать только тензор g_{ik} и величины Γ^i_{kl}.

Однако из одних только величин g_{ik} и Γ^i_{kl} невозможно построить скаляр, потому что посредством соответствующего выбора системы координат можно всегда обратить все величины Γ^i_{kl} в данной точке в нуль.

Существует, однако, скаляр R -кривизна 4-пространства, - который хотя и содержит наряду с тензором g_{ik} и его первыми производными еще и вторые производные от g_{ik}, но последние входят только линейно.

????? Благодаря этой линейности инвариантный интеграл $\int R\sqrt{-g}d\Omega$ можно преобразовать с помощью теоремы Гаусса в интеграл от выражения, не содержащего вторых производных.

Именно, можно представить его в виде

$$\int R\sqrt{-g}d\Omega = \int G\sqrt{-g}d\Omega + \int \frac{\partial\left(\sqrt{-g}w^i\right)}{\partial x^i}d\Omega,$$

где G содержит только тензор g_{ik} и его первые производные, а подынтегральное выражение во втором интеграле имеет вид дивергенции некоторой величины w^i

(подробное вычисление произведено в конце настоящего параграфа (???)).

Согласно теореме Гаусса этот второй интеграл можно преобразовать в интеграл по гиперповерхности, охватывающей 4-объем, по которому производится интегрирование в двух других интегралах.

При варьировании действия вариация второго члена справа, следовательно, исчезает, так как по смыслу принципа наименьшего действия на границах области интегрирования вариация поля равна нулю.

Следовательно, мы можем написать:

$$\delta \int R\sqrt{-g}d\Omega = \delta \int G\sqrt{-g}d\Omega$$

Слева стоит скаляр; поэтому скаляром является и стоящее справа выражение (сама же величина G скаляром, конечно, не является).

Величина G удовлетворяет поставленному выше требованию, так как содержит только g_{ik} и его первые производные.

Таким образом, мы можем написать:

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\delta \int G\sqrt{-g}d\Omega = -\frac{c^3}{16\pi k}\delta \int R\sqrt{-g}d\Omega$$

где k -новая универсальная постоянная.

Положительность гравитационной постоянной (?)

(потом досмотрю)

Аналогично тому, как это было сделано в §27 для действия электромагнитного поля, можно видеть, что постоянная k должна быть положительна (см. конец этого параграфа).

Постоянная k называется гравитационной постоянной.

Размерность гравитационной постоянной

Размерность k следует непосредственно из

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\delta \int G\sqrt{-g}d\Omega = -\frac{c^3}{16\pi k}\delta \int R\sqrt{-g}d\Omega.$$

Действие имеет размерность (г ^{2}см ^{2}с$^{-1}$); все координаты можно считать имеющими размерность см, а g_{ik} -безразмерными, и следовательно, R имеет размерность.

В результате находим, что k имеет размерность (см$^3 \cdot$ г$^{-1}$с$^{-2}$).

Ее численное значение равно

$$k = 6,67 \cdot 10^{-8}\text{см}^3 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$$

(откуда кст это?)

Заметим, что мы могли бы положить k равной единице или другому произвольному безразмерному числу, однако, при этом определился бы выбор единицы для измерения массы.

(подумаю про это позже)

Вычисление G

Вычислим, наконец, величину $\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\delta \int R\sqrt{-g}d\Omega$.

(?? кст, откуда минус перед всем выражением?)

Из выражения $R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l{}_l}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}$ имеем:

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}g^{ik}R_{ik} = \sqrt{-g}\left\{g^{ik}\frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - g^{ik}\frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + g^{ik}\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - g^{ik}\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}\right\}.$$

Здесь два первые справа члены можно записать как:

$$\sqrt{-g}g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}g^{ik}\Gamma^l_{ik}\right) - \Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}g^{ik}\right),$$
$$\sqrt{-g}g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}g^{ik}\Gamma^l_{il}\right) - \Gamma^l_{il}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}g^{ik}\right)$$

Опуская полные производные, находим:

$$\sqrt{-g}R = \Gamma^m_{im}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}g^{ik}\right) - \Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}g^{ik}\right) - \left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right)g^{ik}\sqrt{-g}$$

С помощью формул $\Gamma^i_{ki} = \frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^k}$, $g^{kl}\Gamma^i_{kl} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}g^{ik}\right)}{\partial x^k}$, $\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = -\Gamma^i_{ml}g^{mk} - \Gamma^k_{ml}g^{im}$ находим, что первые два члена справа равны $\sqrt{-g}$, помноженному на

$$2\Gamma^l_{ik}\Gamma^i_{lm}g^{mk} - \Gamma^m_{im}\Gamma^i_{kl}g^{kl} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}g^{ik} = g^{ik}\left(2\Gamma^l_{mk}\Gamma^m_{li} - \Gamma^m_{lm}\Gamma^l_{ik} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right) = 2g^{ik}\left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right)$$

Окончательно имеем:

$$G = g^{ik}\left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right)$$

(?? возможно, этой формулой удобно пользоваться чуть что будет, а не считать с нуля тензор Риччи?? пока хз, зачем она??)

Величинами, определяющими гравитационное поле, являются g_{ik}, поэтому в принципе наименьшего действия для гравитационного поля варьированию подлежат именно они.

(?? а не кристоффеля кст варьируются? чет не так понял, что же варьируется???)

Действие гравитационного поля имеет минимум только при наложении определенных условий на метрику (??)

Мы не можем теперь утверждать, что в реальном поле интеграл действия имеет минимум (а не просто экстремум) по отношению ко всем возможным вариациям g_{ik}.

Это связано с тем, что не всякое изменение g_{ik} соответствует изменению метрики пространства-времени, т.е. реальному изменению гравитационного поля. Компоненты g_{ik} меняются уже и при простом преобразовании координат, связанном лишь с переходом от одной системы к другой в одном и том же пространстве-времени. Каждое такое преобразование координат представляет собой, вообще говоря, совокупность четырех (по числу координат) независимых преобразований. (????? про это в др. разделе подумаю)

Для того чтобы исключить такие не связанные с изменением метрики изменения g_{ik}, можно наложить на них четыре дополнительных условия и потребовать выполнения этих условий при варьирования. (?? какие??)

Таким образом, в применении к гравитационному полю принцип наименьшего действия утверждает лишь, что можно наложить на g_{ik} такие дополнительные условия, при соблюдении которых действие имеет минимум по отношению к варьированию g_{ik}.

Положительность гравитационной постоянной необходима для минимума действия (?)

(потом еще подумаю про это, проделаю сам, но позже. суть пока не совсем понял)

Покажем, что гравитационная постоянная должна быть положительной.

В качестве четырех дополнительных условий для минимума действия потребуем обращения в нуль трех компонент $g_{0\alpha}$ и постоянства определителя $|g_{\alpha\beta}|$:

$$g_{0\alpha} = 0, \quad |g_{\alpha\beta}| = \text{ const.}$$

(почему именно такие?)

В силу последнего из этих условий будем иметь: (??)

$$g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial x^0}\left|g_{\alpha\beta}\right| = 0$$

(??) Нас интересуют здесь те члены в подынтегральном выражении в действии, которые содержат производные от g_{ik} по x^0. Вычисление по $G = g^{ik}\left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right)$ показывает, что такими членами в G являются

$$-\frac{1}{4}g^{00}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^0}\frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^0}$$

(??? проверю потом??)

Легко видеть, что эта величина строго отрицательна. Действительно, выбирая пространственную систему координат, которая была бы декартовой в данной точке пространства в данный момент времени (так что $g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$), получим:

$$-\frac{1}{4}g^{00}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0}\right)^2$$

и поскольку $g^{00} = 1/g_{00} > 0$, то выражение отрицательно.

Достаточно быстрым изменением компонент $g_{\alpha\beta}$ со временем x^0 (в промежутке между двумя пределами интегрирования по dx^0) можно, следовательно, сделать величину $-G$ сколь угодно большой.

Если бы в $\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\delta\int R\sqrt{-g}d\Omega$ постоянная k была отрицательной, то δS_g при этом неограниченно уменьшалось бы, т.е. не имела бы минимума.

О множителе перед ТЭИ в уравнениях Эйнштейна

Обсудим, почему перед ТЭИ множитель именно $\frac{8\pi G}{c^4}$.

(пока не готов ответить)

3.8.2 Properties of Einstein's Equations

Обсудим подробно все свойства уравнений Эйнштейна.

Вид δS_g

(потренируюсь кст в этом всем потом!!!)

Уравнения гравитационного поля получаются из $\delta\left(S_m + S_g\right) = 0$, где S_g и S_m - действия соответственно для гравитационного поля и материи.

Покажем, что вариация δS_g равна:

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\int\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}d\Omega$$

Варьированию подвергается теперь гравитационное поле, т.е. величины g_{ik}. Вычислим вариацию δS_g:

$$\begin{aligned}\delta S_g &= \delta\int R\sqrt{-g}d\Omega \\ &= \delta\int g^{ik}R_{ik}\sqrt{-g}d\Omega = \\ &= \int\left(R_{ik}\sqrt{-g}\delta g^{ik} + R_{ik}g^{ik}\delta\sqrt{-g} + g^{ik}\sqrt{-g}\delta R_{ik}\right)d\Omega\end{aligned}$$

Используя $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ik}\delta g^{ik}$, имеем:

$$\delta S_g = \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega + \int g^{ik} \delta R_{ik} \sqrt{-g} d\Omega$$

(!!! тут очень крутая идея перейти в лок.геод СК, а потом в произвольную. пропишу эту идею потом где-то отдельно! пока для этого слабоватая структура.)

Теперь осталось доказать, что вариация второго члена-интеграла действия исчезает. Воспользуемся локально-геодезической системой координат, в данной точке все $\Gamma^i_{kl} = 0$, то есть первые производные от g^{ik} равны теперь нулю. С помощью $R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}$ имеем:

$$g^{ik}\delta R_{ik} = g^{ik}\left\{ \frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^l_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k}\delta\Gamma^l_{il} \right\} = g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^l_{ik} - g^{il}\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^k_{ik} = \frac{\partial w^l}{\partial x^l}$$

где $w^l = g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik} - g^{il}\delta\Gamma^k_{lk}$.

Поскольку w^l это вектор, мы можем написать полученное соотношение в произвольной системе координат в виде

$$g^{ik}\delta R_{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}w^l\right)$$

Следовательно, второй член в δS_g равен

$$\int g^{ik}\delta R_{ik}\sqrt{-g}d\Omega = \int \frac{\partial\sqrt{-g}w^l}{\partial x^l}d\Omega$$

и, по теореме Гаусса может быть преобразован в интеграл от w^l по гиперповерхности, охватывающей весь 4-объем. Поскольку на пределах интегрирования вариация поля равна нулю, то этот член исчезает.

Таким образом, вариация δS_g равна:

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\int \left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R \right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}d\Omega$$

замечание о связи G и R (?)

(и зачем оно?)

Заметим, что если бы мы исходили из выражения для действия поля вида:

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\int G\sqrt{-g}d\Omega,$$

то мы получили бы (???)

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\int \left\{ \frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} \right\}\delta g^{ik}d\Omega$$

Приравняв к выражению выше, получим:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left\{ \frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} \right\}.$$

(?? и что???)

Вариация действия материи

Для вариации действия материи δS_m можно написать согласно

$$\delta S_m = \frac{1}{2c}\int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}d\Omega$$

где T_{ik} - тензор энергии-импульса материи (включая электромагнитное поле).

(проработаю раздел про ТЭИ, пока слабоват он!!)

При исследовании гравитационного поля нам приходится обычно иметь дело с макроскопическими телами, потому что только для них гравитационное взаимодействие существенно (благодаря малости гравитационной постоянной). Поэтому чаще всего

$$T_{ik} = (p+\varepsilon)u_i u_k - p g_{ik}$$

Таким образом, из принципа наименьшего действия $\delta S_m + \delta S_g = 0$ находим:

$$-\frac{c^3}{16\pi k}\int\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R - \frac{8\pi k}{c^4}T_{ik}\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}d\Omega = 0$$

откуда ввиду произвольности δg^{ik} получаем уравнения Эйнштейна гравитационного поля - основные уравнения общей теории относительности:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi k}{c^4}T_{ik}$$

или в смешанных компонентах

$$R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R = \frac{8\pi k}{c^4}T_i^k$$

Упрощая уравнения Эйнштейна в смешанных компонентах по индексам i и k, находим:

$$R = -\frac{8\pi k}{c^4}T$$

где $T = T_i^i$. Поэтому уравнения поля можно написать также в виде

$$R_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T\right)$$

Нелинейность уравнений Эйнштейна

Покажем явно, что уравнения Эйнштейна нелинейны.

(??!! также какой-то конкретный пример добавлю)

Отсутствие принципа суперпозиции для гравитационных полей

Покажем явно, что в общем случае ввиду нелинейности уравнений Эйнштейна отсутствует принцип суперпозиции.

(??? пример???)

3.8.3 Illustration of Einstein's Equations (????)

Приведем примеры и опишем, что происходит, потому что без этого можно и не понять, с чем конкретно мы имеем дело.

(пока не глубоко понимаю это, потом буду доучивать многое.)

Описание падения шарика на землю с помощью уравнений Эйнштейна (???)

Описание притяжения двух точечных масс с помощью уравнений Эйнштейна (???)

Объяснение ускорения свободного падения на Земле с помощью уравнений Эйнштейна (???)

3.8.4 Einstein's Path to General Relativity

(интересно очень, но пока не актуально, потом изучу, если будет время)
Thibault Damour - Einstein's Path to General Relativity
https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=Hp05QzrdE9E

3.8.5 Einstein's Equations in the Tetrad Formalism (??)

(раздел будет висеть до тех пор, пока не возникнет в нем потребность. пока я не разбираюсь в этом.)

Суть тетрадного формализма

(узнаю - напишу)

обзор применений тетрадного формализма

хз

Объяснение существования тетрадного формализма (??!!)

(тоже не пойму, вот теория там ОТО себе была, ничего даже не намекает, что еще может быть какой-то формализм. пока хз.)

Theory

Определение компонент тензора Риччи (и тем самым составление уравнений Эйнштейна) для метрики того или иного специального вида связано, вообще говоря, с довольно громоздкими вычислениями.

Поэтому приобретают значение различные формулы, позволяющие в некоторых случаях упростить эти вычисления и представить результат в более обозримом виде.

К числу таких формул относится выражение тензора кривизны в так называемом тетрадном виде.

Введем совокупность четырех линейно-независимых реперных 4-векторов $e^i_{(a)}$ (нумеруемых индексом a), подчиненных лишь требованию

$$e^i_{(a)} e_{(b)i} = \eta_{ab}$$

где η_{ab} - заданная постоянная симметричная матрица с сигнатурой + - −; матрицу, обратную матрице η_{ab}, обозначим посредством η^{ab} $\left(\eta^{ac}\eta_{cb} = \delta^a_b\right)^1$.

Наряду с четверкой (тетрадой) векторов $e^i_{(a)}$, введем также четверку взаимных с ними векторов $e^{(a)i}$ (нумеруемых верхними реперными индексами), определенных условиями

$$e^{(a)}_i e^i_{(b)} = \delta^a_b$$

т.е.
каждый из векторов $e^{(a)}_i$ ортогонален трем векторам $e^i_{(b)}$ с $b \neq \neq$ у.

Умножив равенство (98.2) на $e^k_{(a)}$, получим $\left(e^k_{(a)}e^{(a)}_i\right)e^i_{(b)} = e^k_{(b)}$ откуда видно, что наряду с (98.2) автоматически выполняются также и равенства

$$e^{(a)}_i e^k_{(a)} = \delta^k_i$$

Умножив равенство $e^i_{(a)}e_{(c)i} = \eta_{ac}$ с обеих сторон на η^{bc}, получим:

$$e^i_{(a)}\left(\eta^{bc}e_{(c)i}\right) = \delta^b_a$$

сравнив с (98.2), находим, что

$$e^{(b)}_i = \eta^{bc}e_{(c)i}, \quad e_{(b)i} = \eta_{bc}e^{(c)}_i$$

Таким образом, поднимание и опускание реперных индексов осуществляется матрицами η^{bc} и η_{bc}

Значение введенных таким образом реперных векторов состоит в том, что через них может быть выражен метрический тензор.

Действительно, согласно определению связи между ко- и контравариант- ными компонентами 4-вектора имеем $e^{(a)}_i = g_{il}e^{(a)l}$; умножив это равенство на $e_{(a)k}$ и использовав (98.3) в (98.4), найдем:

$$g_{ik} = e_{(a)i}e^{(a)}_k = \eta_{ab}e^{(a)}_i e^{(b)}_k$$

Квадрат элемента интервала с метрическим тензором (98.5) принимает вид

$$ds^2 = \eta_{ab}\left(e^{(a)}_i dx^i\right)\left(e^{(b)}_k dx^k\right)$$

Что касается произвольно задаваемой матрицы η_{ab}, то наиболее естественный ее выбор - в вгалилеевой» форме (т.е.

диагональная матрица с элементами $1, -1, -1, -1$); при этом реперные векторы, согласно (98.1), взаимно ортогональны, причем один из них времениподобен, а три других - пространственноподобны 1).

Подчеркнем, однако, что такой выбор отнюдь не обязателен и возможны ситуации, когда по тем или иным причинам (например, по свойствам симметрии метрики) целесообразен выбор неортогональной тетрады.

Тетрадные компоненты 4-вектора A^i (и аналогично для 4-тензоров любого ранга) определяются как его впроекции» на реперные 4-векторы:

$$A_{(a)} = e^i_{(a)}A_i, \quad A^{(a)} = e^{(a)}_i A^i = \eta^{ab}A_{(b)}$$

Обратно:

$$A_i = e^{(a)}_i A_{(a)}, \quad A^i = e^i_{(a)}A^{(a)}$$

Таким же образом определим операцию дифференцирования ввдоль направления a:

$$\varphi_{\cdot(a)} = e^i_{(a)}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$$

Коэффициенты вращения Риччи γ_{acb}

Введем нужные для дальнейшего величины

$$\gamma_{acb} = e_{(a)i;k}e^i_{(b)}e^k_{(c)}$$

и их линейные комбинации

$$\lambda_{abc} = \gamma_{abc} - \gamma_{acb} = \left(e_{(a)i;k} - e_{(a)k;i}\right) e^i_{(b)} e^k_{(c)} = \left(e_{(a)i,k} - e_{(a)k,i}\right) e^i_{(b)} e^k_{(c)}$$

Последнее равенство в (98.10) следует из (86.12).

Величины λ_{abc} вычисляются простым дифференцированием реперных векторов.

Обратное выражение γ_{abc} через λ_{abc}

$$\gamma_{abc} = \frac{1}{2}\left(\lambda_{abc} + \lambda_{bca} - \lambda_{cab}\right)$$

Свойства

Эти величины обладают свойствами симметрии:

$$\gamma_{abc} = -\gamma_{bac}$$
$$\lambda_{abc} = -\lambda_{acb}$$

Тензор кривизны в тетрадных компонентах

Наша цель состоит в определении тетрадных компонент тензора кривизны.

Для этого надо исходить из определения (91.6), примененного к ковариантным производным реперных векторов:

$$e_{(a)i;k;l} - e_{(a)i:l;k} = e^m_{(a)} R_{mikl}$$

или

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = \left(e_{(a)i;k;l} - e_{(a)i;l;k}\right) e^i_{(b)} e^k_{(c)} e^l_{(d)}$$

Это выражение легко выразить через величины γ_{abc}.

Пишем

$$e_{(a)i;k} = \gamma_{abc} e^{(b)}_i e^{(c)}_k$$

а после следующего ковариантного дифференцирования производные от реперных векторов снова выражаются таким же образом; при этом ковариантная производная от скалярной величины γ_{abc} совпадает с ее простой производной.

В результате получается:

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = \gamma_{a,c,d} - \gamma_{abd,c} + \gamma_{abf}\left(\gamma^f{}_{cd} - \gamma^f{}_{dc}\right) + \gamma_{afc}\gamma^f{}_{bd} - \gamma_{afd}\gamma^f{}_{bc}$$

где в соответствии с общим правилом $\gamma^a{}_{bc} = \eta^{ad}\gamma_{dbc}$ и т. п.

Упрощение этого тензора по паре индексов a, c дает искомые тетрадные компоненты тензора Риччи; приведем их выраженными уже через величины λ_{abc}:

$$R_{(a)(b)} = -\frac{1}{2}\left(\lambda_{ab^c,c} + \lambda_{ba^c,c} + \lambda^c_{ca,b} + \lambda^c_{cb,a} + \lambda^{cd}_b \lambda_{cda} + \lambda^{cd}_b \lambda_{dca} - \frac{1}{2}\lambda^{cd}_b \lambda_{acd} + \lambda^c_{cd}\lambda^d_{ab} + \lambda^c_{cd}\lambda^d_{ba}\right)$$

Пример применений (???)

(ни разу не использовал еще эту формулу, вопрос остается.)

Тетрадный формализм в 3-мерном пространстве

Заметим, что изложенные построения по существу никак не связаны с четырехмерностью метрики. Поэтому полученные результаты могут быть применены и к вычислению трехмерных тензоров Римана и Риччи по трехмерной метрике. При этом, естественно, вместо тетрады реперных 4 -векторов мы будем иметь дело с триадой трехмерных векторов, а матрица η_{ab} должна иметь сигнатуру $+++$ (мы встретимся с таким применением в §116).

(?? мб тут формулы приведу)

О калибровках в ОТО при тетрадном формализме (???)

Ходят слухи, что с ним можно сделать уравнения Эйнштейна калибровочными.
не знаю.

Примеры применения тетрадного формализма

(не знаю. не актуально)

3.8.6 Einstein's Equations in the Second Order

(примеры из этого раздела перенесу в часть про модели. тут лишь укажу, что там эта теория нужна.)

Суть уравнений во втором приближении

Система гравитирующих тел может быть описана с помощью функции Лагранжа с точностью до членов порядка $1/c^4$ в отличие от электромагнитного поля, где функция Лагранжа существует, в общем случае, только с точностью до членов второго порядка.

(пропишу там это четче!)

сами уравнения имеют вид:

???

для получения искомых уравнений движения достаточно знать пространственные компоненты $h_{\alpha\beta}$ с точностью ($\sim 1/c^2$); смешанные же компоненты (отсутствующие в приближении $1/c^2$) необходимо иметь с точностью до членов $1/c^3$, а временную h_{00} - с точностью до членов $1/c^4$.

Обзор применений уравнений Эйнштейна во втором приближении (??)

Уравнения Эйнштейна во втором приближении применяются в:

- Излучении гравитационных волн. Теряя при этом энергию в пятом приближении по $1/c$, в первых же четырех приближениях энергия системы остается постоянной.
- (?? где еще?)

Вывод функции Лагранжа системы тел с точностью до членов второго порядка

Приведем вывод функции Лагранжа системы тел с точностью до членов второго порядка.

Постановка задачи (??)

Будем пренебрегать размерами и внутренней структурой тел, рассматривая их как «точечные»; другими словами, мы ограничиваемся нулевыми членами разложения по степеням отношений размеров тел a к их взаимным расстояниям l.

Для решения поставленной задачи мы должны начать с определения в соответствующем приближении слабого гравитационного поля, создаваемого телами на расстояниях, больших по сравнению с их размерами, но в то же время малых по сравнению с длиной излучаемых системой гравитационных волн λ, то есть $(a \ll r \ll \lambda \sim lc/v)$.

С точностью до величин порядка $1/c^2$ поле вдали от тела дается полученными в предыдущем параграфе выражениями, обозначенными там как $h_{ik}^{(1)}$; воспользуемся здесь этими выражениями в форме (105.6a).

В теории слабого поля подразумевалось, что поле создается всего одним находящимся в начале координат телом. Но поскольку поле $h_{ik}^{(1)}$ представляет собой решение линеаризованных уравнений Эйнштейна, то для него справедлив принцип суперпозиции. Поэтому поле вдали от системы тел получится просто суммированием полей каждого из них. Напишем его в виде

$$\begin{aligned} h_0^0 =& \frac{2}{c^2}\varphi, \\ h_0^\alpha =& 0 \\ h_\alpha^\beta =& -\frac{2}{c^2}\varphi\delta_\alpha^\beta \end{aligned}$$

где $\varphi(\mathbf{r}) = -\mathbf{r}\sum\limits_a \frac{m_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|}$ есть ньютонов гравитационный потенциал системы точечных тел ($\mathbf{r}_a-$ радиус-вектор тела с массой m_a). В данном случае интервал имеет вид:

$$ds^2 = \left(1+\frac{2}{c^2}\varphi\right)c^2dt^2 - \left(1-\frac{2}{c^2}\varphi\right)\left(dx^2+dy^2+dz^2\right)$$

Отметим, что члены первого порядка по φ имеются не только в g_{00}, но и в $g_{\alpha\beta}$; в §87 было уже указано, что в уравнениях движения частицы поправочные члены в $g_{\alpha\beta}$ приводят к величинам более высоких порядков малости, чем члены, происходящие от g_{00}; в связи с этим путем сравнения с ньютоновыми уравнениями движения можно было определить только g_{00}.

(?? там еще раз посмотрю, почему это так)

Обратимся к общим уравнениям тяготения. Пренебрегая размерами тел, мы должны писать тензор энергии-импульса вещества в форме $T^{ik} = \mu c u^i u^k \frac{ds}{dt}$. В криволинейных координатах это выражение переписывается как

$$T^{ik} = \sum_a \frac{m_a c}{\sqrt{-g}}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{dt}\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a\right),$$

где суммирование производится по всем телам в системе.

Компонента

$$T_{00} = \sum_a \frac{m_a c^3}{\sqrt{-g}} g_{00}^2 \frac{dt}{ds}\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a\right)$$

а в первом приближении равна $\sum\limits_a m_a c^2 \delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a\right)$; в следующем приближении подставляем g_{ik} нашего случая, после простого вычисления получаем:

$$T_{00} = \sum_a m_a c^2 \left(1+\frac{5\varphi_a}{c^2}+\frac{v_\alpha^2}{2c^2}\right)\Delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a\right)$$

где $\mathbf{v}$ - обычная трехмерная скорость ($v^\alpha = dx^\alpha/dt$), а φ_α - потенциал поля в точке $\mathbf{r}_a$ (на наличие в φ_a бесконечной части - потенциала собственного поля частицы m_a - пока не обращаем внимания, это где-то потом будет обсуждено (??)).

(проделаю потом разок еще)

Что касается компонент $T_{\alpha\beta}, T_{0\alpha}$ тензора энергии-импульса, то для них, в том же приближении, достаточно оставить лишь первые члены разложения выражений (106.4):

$$T_{\alpha\beta} = \sum_a m_a v_{a\alpha} v_{a\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad T_{0\alpha} = -\sum_a m_a c v_{a\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$$

Далее переходим к вычислению компонент тензора R_{ik}. Вычисление удобно производить по формуле $R_{ik} = g^{lm} R_{limk}$ с R_{limk} через кристоффеля. При этом надо помнить, что величины $h_{\alpha\beta}, h_{00}$ содержат члены порядок не ниже $1/c^2$, а $h_{0\alpha}$ - не ниже $1/c^3$; дифференцирования по $x^0 = ct$, в свою очередь, повышают порядок малости на 1.

Главные члены в R_{00} порядка $1/c^2$; наряду с ними, мы должны сохранить также и члены следующего неисчезающего порядка $-1/c^4$.

Простое вычисление приводит к результату:

$$R_{00} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial h_0^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2c}\frac{\partial h_\alpha^\alpha}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\Delta h_{00} + \frac{1}{2}h^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\alpha}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\beta}\left(2\frac{\partial h_\beta^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial h_\alpha^\alpha}{\partial x^\beta}\right)$$

(?? потом проделаю, пока не до этого)

В этом вычислении не было еще использовано никакого дополнительного условия для величин h_{ik}. Пользуясь этой свободой, наложим теперь на них условие калибровки

$$\frac{\partial h_0^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2c}\frac{\partial h_\alpha^\alpha}{\partial t}, = 0$$

в результате которого из R_{00} полностью выгадают члены, содержащие компоненты $h_{0\alpha}$. В остальных членах подставляем

$$h_\alpha^\beta = -\frac{2}{c^2}\varphi\delta_\alpha^\beta, \quad h_{00} = \frac{2}{c^2}\varphi + O\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

и получаем, с требуемой точностью:

$$R_{00} = \frac{1}{2}\Delta h_{00} + \frac{2}{c^4}\varphi\Delta\varphi - \frac{2}{c^4}(\nabla\varphi)^2$$

где мы перешли к трехмерным обозначениям.

При вычислении компонент $R_{0\alpha}$ достаточно сохранить лишь члены первого неисчезающего порядка $-1/c^3$. Аналогичным образом получим: $R_{0\alpha} = \frac{1}{2c}\frac{\partial^2 h_\alpha^\beta}{\partial t \partial x^\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_0^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \frac{1}{2c}\frac{\partial^2 h_\beta^\beta}{\partial t \partial x^\alpha} + \frac{1}{2}\Delta h_{0\alpha}$ и затем, с учетом нашей калибровки:

$$R_{0\alpha} = \frac{1}{2}\Delta h_{0\alpha} + \frac{1}{2c^3}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t \partial x^\alpha}$$

уравнения Эйнштейна

Теперь составим уравнения Эйнштейна $R_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T\right)$. Временная компонента дает:

$$\Delta h_{00} + \frac{4}{c^4}\varphi\Delta\varphi - \frac{4}{c^4}(\nabla\varphi)^2 = \frac{8\pi k}{c^4}\sum_a m_a c^2\left(1 + \frac{5\varphi_a}{c^2} + \frac{3v_a^2}{2c^2}\right)\Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$$

с помощью тождества $4(\nabla\varphi)^2 = 2\Delta(\varphi^2) - 4\varphi\Delta\varphi$ и уравнения ньютоновского потенциала

$$\Delta\varphi = 4\pi k \sum_a m_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$$

переписываем это уравнение в виде

$$\Delta\left(h_{00} - \frac{2}{c^4}\varphi^2\right) = \frac{8\pi k}{c^2}\sum_a m_a\left(1 + \frac{\varphi'_a}{c^2} + \frac{3v_a^2}{2c^2}\right)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$$

(?? проделаю это потом, пока тождество выше это не усвоено)

После проведения всех вычислений мы заменили в правой стороне уравнения выше φ_a на

$$\varphi'_a = -k\sum_b{}' \frac{m_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|}$$

т.е. на потенциал в точке $\mathbf{r}_a$ поля, создаваемого всеми телами, за исключением тела m_a;

Исключение бесконечного собственного потенциала тел (в используемом нами методе, рассматривающем тела как точечные) соответствует «перенормировке» их масс, в результате которой они принимают свои истинные значения, учитывающие создаваемые самими телами поля.

Решение уравнения Эйнштейна на R_{00} может быть написано сразу, учитывая известное соотношение $\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\Delta(\mathbf{r})$. Таким образом, найдем:

$$h_{00} = \frac{2\varphi}{c^2} + \frac{2\varphi^2}{c^4} - \frac{2k}{c^4}\sum_a \frac{m_a\varphi'_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} - \frac{3k}{c^4}\sum_a \frac{m_a v_a^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}$$

Смешанная компонента уравнения Эйнштейна есть:

$$\Delta h_{0\alpha} = -\frac{16\pi k}{c^3}\sum_a m_a v_{a\alpha}\Delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) - \frac{1}{c^3}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x^\alpha}$$

Решение этого линейного уравнения есть

$$h_{0\alpha} = \frac{4k}{c^3}\sum_a \frac{m_a v_{a\alpha}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} - -\frac{1}{c^3}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^\alpha}$$

где f - решение вспомогательного уравнения $\Delta f = \varphi = -\sum\frac{km_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|}$.

(?? ниже непонятно, откуда оно???)

Учитывая соотношение $\Delta r = 2/r$, находим:

$$f = -\frac{k}{2}\sum_a m_a|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|$$

и затем, после простого вычисления, окончательно получаем:

$$h_{0\alpha} = \frac{k}{2c^3}\sum_a \frac{m_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}\left[7v_{a\alpha} + (\mathbf{v}_a\mathbf{n}_a)\,n_{a\alpha}\right]$$

где $\mathbf{n}_a$ - единичный вектор в направлении вектора $\mathbf{r} - \mathbf{r}_a$.

Вывод функции Лагранжа с точностью до членов второго порядка

Найденные поправки к метрике достаточны для вычисления искомой функции Лагранжа с точностью до членов второго порядка.

(??!! это вот проделаю потом еще раз!!)

Функция Лагранжа одного тела в гравитационном поле, создаваемом другими телами и рассматриваемом как заданное:

$$L_a = -m_a c \frac{ds}{dt} = -m_a c^2 \left(1 + h_{00} + 2h_{0\alpha}\frac{v_a^\alpha}{c} - \frac{v_a^2}{c^2} + h_{\alpha\beta}\frac{v_a^\alpha v_a^\beta}{c^2}\right)^{1/2}$$

Разлагая радикал и опустив несущественную постоянную $-m_a c^2$, переписываем это выражение с требуемой точностью как

$$L_a = \frac{m_a v_a^2}{2} + \frac{m_a v_a^4}{8c^2} - m_a c^2 \left(\frac{h_{00}}{2} + h_{0\alpha}\frac{v_a^\alpha}{c} + \frac{1}{2c^2}h_{\alpha\beta}v_a^\alpha v_a^\beta - \frac{h_{00}^2}{8} + \frac{h_{00}}{4c^2}v_a^2\right)$$

Значения всех h_{ik} здесь берутся в точке $\mathbf{r}_a$; при этом снова должны быть опущены обращающиеся в бесконечность члены, что сводится к «перенормировке» массы m_a, стоящей в виде коэффициента в L_a.

Дальнейший ход вычислений состоит в следующем.

(?!! эту идею в 1ю часть добавлю потом тоже!! кст, не усвоил эту идею)

Полная функция Лагранжа L системы, разумеется, не равна сумме функций L_a для отдельных тел, но она должна быть составлена так, чтобы приводить к правильным значениям сил $\mathbf{f}_a$, действующих на каждое из тел при заданном движении остальных.

Для этого вычисляем силы $\mathbf{f}_a$ путем дифференцирования функции Лагранжа L_a:

$$\mathbf{f}_a = \left(\frac{\partial L_a}{\partial \mathbf{r}}\right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_a}$$

где дифференцирование производится по бегущим координатам $\mathbf{r}$ точки наблюдения в выражениях для h_{ik}.

После этого легко составить такую общую функцию L, из которой все те же силы $\mathbf{f}_a$ получаются взятием частных производных $\partial L/\partial \mathbf{r}_a$.

Не останавливаясь на простых промежуточных вычислениях, приведем сразу окончательный результат для функции Лагранжа:

$$\begin{aligned} L = &\sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + \sum_a \sum_b \frac{3k m_a m_b v_a^2}{2c^2 r_{ab}} + \sum_a \frac{m_a v_a^4}{8c^2} + \sum_a \sum_b \frac{^2 k m_a m_b}{2r_{ab}} - \\ &- \sum_a \sum_b \frac{k m_a m_b}{4c^2 r_{ab}} \left[7\left(\mathbf{v}_a \mathbf{v}_b\right) + \left(\mathbf{v}_a \mathbf{n}_{ab}\right)\left(\mathbf{v}_b \mathbf{n}_{ab}\right)\right] - \\ &- \sum_a {\sum_b}' \sum_c \frac{k^2 m_a m_b m_c}{2c^2 r_{ab} r_{ac}} \end{aligned}$$

где $r_{ab} = |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|$, $\mathbf{n}_{ab}$ - единичный вектор в направлении $\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b$, а штрих у знака суммы означает, что должен быть опущен член с $b = a$ или $c = a$.

Действие и энергия гравитационного поля в ньютоновском приближении (!!)

(потом в место про ньютоновскую теорию!)

Определим действие для гравитационного поля в ньютоновском приближении.

С помощью g_{ik} из $ds^2 = \left(1 + \frac{2}{c^2}\varphi\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2}{c^2}\varphi\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ по формуле $G = g^{ik}\left(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}\right)$ находим $G = 2(\nabla\varphi)^2/c^4$, так что действие для поля

$$S_g = -\frac{1}{8\pi k}\iint (\nabla\varphi)^2 dV dt$$

(проделаю это потом)

Полное действие для поля вместе с массами, распределенными в пространстве с плотностью μ:

$$S = \iint \left[\frac{\mu v^2}{2} - \mu\varphi - \frac{1}{8\pi k}(\nabla\varphi)^2\right] dV dt$$

Легко убедиться в том, что варьирование S по φ приводит, как и следовало, к уравнению Пуассона $\Delta\varphi = 4\pi k\mu$.

Плотность энергии находится из плотности функции Лагранжа Λ по общей формуле $T^k_i = \sum\limits_l q^{(l)}_{,i}\frac{\partial\Lambda}{\partial q^{(l)}_{,k}} - \delta^k_i\Lambda$, что сводится к изменению знака второго и третьего членов.

Интегрируя плотность энергии по пространству, подставив при этом во втором члене $\mu\varphi = \varphi\Delta\varphi/4\pi k$ и интегрируя его по частям, получим окончательно полную энергию поля и материи в виде

$$W = \int \left[\frac{\mu v^2}{2} - \frac{(\nabla\varphi)^2}{8\pi k}\right] dV$$

Следовательно, плотность энергии гравитационного поля в ньютоновской теории есть

$$W = -(\nabla\varphi)^2/8\pi k^2.$$

3.8.7 Einstein's Equations in the Second Order: Applications and Importance

Центр инерции во втором приближении

Определим координаты центра инерции системы гравитирующих тел во втором приближении.

Ввиду полной формальной аналогии между законом Ньютона для гравитационного взаимодействия и законом Кулона для электростатического взаимодействия, координаты центра инерции даются формулой

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\mathscr{E}}\sum_a \mathbf{r}_a\left(m_a c^2 + \frac{p_a^2}{2m_a} - \frac{km_a}{2}\sum_b{}' \frac{m_b}{r_{ab}}\right),$$

где $\mathscr{E} = \sum\limits_a \left(m_a c^2 + \frac{p_a^2}{2m_a} - \frac{km_a}{2}\sum\limits_b{}' \frac{m_b}{r_{ab}}\right)$.

(тут комментарий про то, что в электродинамике эта задача должна быть решена, укажу смысл того решения. пока её не прорешал.)

Вековое смещение перигелия орбиты двух гравитирующих тел сравнимой массы (???)

(?? поч именно во 2 приближении нужно ур-я писать для этого? прорешаю её еще раз ручками)

Вековое смещение перигелия орбиты двух гравитирующих тел сравнимой массы имеет вид:

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi k^2 m_1^2 m_2^2}{c^2 M^2} = \frac{6\pi k\,(m_1 + m_2)}{c^2 a\,(1 - e^2)}$$

Выведем её. Известно, что функция Лагранжа системы двух тел есть

$$L = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{k m_1 m_2}{r} + \frac{1}{8c^2}\left(m_1 v_1^4 + m_2 v_2^4\right) + \\ + \frac{k m_1 m_2}{2c^2 r}\left[3\left(v_1^2 + v_2^2\right) - 7\left(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\right) - \left(\mathbf{v}_1\mathbf{n}\right)\left(\mathbf{v}_2\mathbf{n}\right)\right] - \frac{k^2 m_1 m_2 \left(m_1 + m_2\right)}{2c^2 r^2}$$

Переходя к функции Гамильтона н исключая из нее движение центра инерции, получим:

$$\mathscr{H} = \frac{p^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) - \frac{k m_1 m_2}{r} - \frac{p^4}{8c^2}\left(\frac{1}{m_1^3} + \frac{1}{m_2^3}\right) - \\ - \frac{k}{2c^2 r}\left[3p^2\left(\frac{m_2}{m_1} + \frac{m_1}{m_2}\right) + 7p^2 + (\mathbf{pn})^2\right] + \frac{k^2 m_1 m_2 \left(m_1 + m_2\right)}{2c^2 r^2},$$

где $\mathbf{p}$ - импульс относительного движения.

(тут опять отсылка на электродинамику, которую потом прорешаю!)

Определим радиальную составляющую импульса p_r как функцию переменной r, момента импульса M и энергии $\mathscr{E}$. Эта функция определяется из уравнения $\mathscr{H} = \mathscr{E}$ (при этом в членах второго порядка надо заменить p^2 его выражением из нулевого приближения):

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\left(p_r^2 + \frac{M^2}{r^2}\right) - \frac{k m_1 m_2}{r} - \\ - \frac{1}{8c^2}\left(\frac{1}{m_1^3} + \frac{1}{m_2^3}\right)\left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)^2\left(\mathscr{E} + \frac{k m_1 m_2}{r}\right)^2 - \\ - \frac{k}{2c^2 r}\left[3\left(\frac{m_2}{m_1} + \frac{m_1}{m_2}\right) + 7\right]\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\mathscr{E} + \frac{k m_1 m_2}{r}\right) - \frac{k}{2c^2 r}p_r^2 + \frac{k^2 m_1 m_2 \left(m_1 + m_2\right)}{2c^2 r^2}$$

(??? проделаю это потом!!!)

Дальнейший ход вычислений аналогичен произведенным вычислениям в случае поиска смещения перигелия в метрике Шварцшильда. Определим из написанного алгебраического уравнения p_r, далее произведем в интеграле $S_r = \int p_r dr$ преобразование переменной r так, чтобы привести член, содержащий M^2, к виду M^2/r^2. Произведя затем в подкоренном выражении разложение по малым релятивистским поправкам, получим:

$$S_r = \int \sqrt{A + \frac{B}{r} - \left(M^2 - \frac{6k^2 m_1^2 m_2^2}{c^2}\right)\frac{1}{r^2}}\,dr$$

где A, B - постоянные коэффициенты, в явном вычислении которых нет необходимости.

В результате для смещения перигелия орбиты относительного движения получим:

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi k^2 m_1^2 m_2^2}{c^2 M^2} = \frac{6\pi k\left(m_1 + m_2\right)}{c^2 a\left(1 - e^2\right)}$$

Видим, что формула в точности такая же, как и было в случае движения в метрике Шварцшильда.

(? кстати, а почему?)

Частота прецессии шарового волчка

(?? поч именно во 2 приближении нужно ур-я писать для этого?)

Частота прецессии шарового волчка, совершающего орбитальное движение в гравитационном поле вращающегося вокруг своей оси центрального тела есть:

$$\Omega = \frac{3km'}{2c^2R_0^2}\left[\mathbf{n}\mathbf{v}_0\right] + \frac{k}{c^2R_0^3}\left\{3\mathbf{n}\left(\mathbf{n}\mathbf{M}'\right) - \mathbf{M}'\right\}$$

Выведем это. В первом приближении искомый эффект представляется суммой двух независимых частей, одна из которых связана с неньютоновостью центрально-симметричного поля, а другая - с вращением центрального тела.

Первая часть описывается дополнительным членом в функции Лагранжа волчка, соответствующим члену $\sum_a \sum_b \frac{3km_am_bv_a^2}{2c^2r_{ab}}$. Представим скорость отдельных элементов волчка (с массами dm) в виде $\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$, где $\mathbf{V}$ - скорость его орбитального движения, ω - угловая скорость, $\mathbf{r}$ - радиус-вектор элемента dm относительно центра инерции волчка (так что интеграл по объему волчка $\int \mathbf{r}dm = 0$). Опустив члены, не зависящие от ω, а также пренебрегая квадратичными по ω членами, имеем:

$$\Delta^{(1)}L = \frac{3km'}{2c^2}\int \frac{2(\mathbf{V}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}])}{R}dm$$

где m' - масса центрального тела, $R = |\mathbf{R}_0 + \mathbf{r}|$ - расстояние от центра поля до элемента $dm, \mathbf{R}_0$ - радиус-вектор центра инерции волчка.

При разложении $1/R \approx 1/R_0 - \mathbf{n}\mathbf{r}/R_0^2$ (где $\mathbf{n} = \mathbf{R}_0/R_0$) интеграл от первого члена обращается в нуль, а во втором интегрирование производится с помощью формулы

$$\int x_\alpha x_\beta dm = \frac{1}{2}I\Delta_{\alpha\beta}$$

где I - момент инерции волчка. В результате получим:

$$\Delta^{(1)}L = \frac{3km'}{2c^2R_0^2}\left(\mathbf{M}\left[\mathbf{v}_0\mathbf{n}\right]\right)$$

где $\mathbf{M} = I\omega$ - вращательный момент волчка.

Дополнительный член в функции Лагранжа, обязанный вращению центрального тела. Вычислить его с помощью формулы (1) из задачи 2 к §105:

$$\Delta^{(2)}L = \frac{2k}{c^2}\int \frac{\mathbf{M}'[[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]\mathbf{R}]}{R^3}dm$$

где $\mathbf{M}'$ - момент центрального тела. Разложив

$$\frac{\mathbf{R}}{R^3} \approx \frac{\mathbf{n}}{R_0^2} + \frac{1}{R_0^3}(\mathbf{r} - 3\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{r}))$$

и произведя интегрирование, получим:

$$\Delta^{(2)}L = \frac{k}{c^2R_0^3}\left\{\mathbf{M}\mathbf{M}' - 3(\mathbf{n}\mathbf{M})\left(\mathbf{n}\mathbf{M}'\right)\right\}$$

Таким образом, полная добавка к функции Лагранжа

$$\Delta L = -\mathbf{M}\Omega, \quad \Omega = \frac{3km'}{2c^2R_0^2}\left[\mathbf{n}\mathbf{v}_0\right] + \frac{k}{c^2R_0^3}\left\{3\mathbf{n}\left(\mathbf{n}\mathbf{M}'\right) - \mathbf{M}'\right\}$$

Этой функции отвечает уравнение движения

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{M}]$$

(ср. уравнение (2) из задачи 2 к \$105).

Это значит, что момент волчка $\mathbf{M}$ прецессирует с угловой скоростью Ω, оставаясь постоянным по своей величине.

(?!!!!!)

Пример, что если пренебречь порядком малости, то можно прийти к неверным результатам (????)

(see that relatively interesting discussion)

3.8.8 Overview of Various Solutions of Einstein's Equations

(там в части ниже подробно каждую пройду, просто тут не про это часть.)

3.8.9 Palatini Formalism (??)

(пока не совсем разобрался)

Суть (???)

О применениях формализма Палатини (??)

(пока открытый вопрос, где нужен он?)

Вергелес писал, что что формализм Палатини позволяет перейти к дискретной теории гравитации на нерегулярной решетке (симплициальном комплексе).

(???)

Возможно, в продвинутых теориях гравитации тоже он используется.

Формализм Палатини как вариация формы по Вергелесу

(не уверен, что в этом что-то годное, по другому источнику буду переучивать, если будет нужно)

Вергелес предлагает, чтобы мы рассмотрели форму $\Xi = \frac{1}{4}\varepsilon_{abcd}R^{ab} \wedge \omega^c \wedge \omega^d$, нашли её вариацию, а дальше ничего не знали, что с ней сделать. Приведем эти рассуждения.

Далее работаем в ортонормированном базисе. Так как используется антисимметричная форма связности $\left(\omega^{ab} = -\omega^{ba}\right)$, то это автоматически означает, что связность согласована с метрикой. Кручение будем считать ненулевым.

Рассмотрим 4-форму

$$\Xi = \frac{1}{4}\varepsilon_{abcd}R^{ab} \wedge \omega^c \wedge \omega^d,$$

где как всегда: ε_{abcd} - тензор Леви-Чивита, $\varepsilon_{0123} = 1$, 2-форма кривизны Римана $R^{ab} = R^{ab}_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu$ выражается через 1-форму связности $\omega^{ab}_\mu\,\mathrm{d}x^\mu$ согласно $\mathrm{d}\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B = \frac{1}{2}R^A_{BCD}\omega^C \wedge \omega^D$ и $\omega^a = e^a_\mu\,\mathrm{d}x^\mu$.

(дальше какие-то преобразования, которые не особо смотрел, потому что не понимаю, зачем он)

Имеем:

$$\varepsilon_{abcd}e^c_\lambda e^d_\rho = (\det e^c_\sigma)\,\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}e^\mu_a e^\nu_b$$

Из соотношения $g_{\mu\nu} = \eta_{ab}e^a_\mu e^b_\nu$ получаем $g = (\det \eta_{ab})\left(\det e^a_\mu\right)^2 = -\left(\det e^a_\mu\right)^2$.

Пусть $\det e^a_\mu > 0$. Тогда $\det e^a_\mu = \sqrt{-g}$ и

$$\varepsilon_{abcd}e^c_\lambda e^d_\rho = E_{\mu\nu\lambda\rho}e^\mu_a e^\nu_b$$

Тензор $E_{\mu\nu\lambda\rho}$ определен в $E_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}(x) = \sqrt{|g(x)|}\varepsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}$.

Форма Ξ переписывается при помощи $E_{\mu\nu\lambda\rho}$ в виде

$$\Xi = \frac{1}{4}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\lambda \wedge \mathrm{d}x^\rho E_{\sigma\tau\lambda\rho}e^\sigma_a e^\tau_b R^{ab}_{\mu\nu}$$

Теперь учтем, что

$$e^\sigma_a e^\tau_b R^{ab}_{\mu\nu} = R^{\sigma\tau}_{\mu\nu}$$

$$\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\lambda \wedge \mathrm{d}x^\rho = \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \cdot \varepsilon_{\mu\nu\lambda\mu}$$

Поэтому

$$\Xi = \frac{1}{4}\sqrt{-g}\ \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \cdot \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{\sigma\tau\lambda\rho}R^{\sigma\tau}_{\mu\nu}$$

Но

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{\sigma\tau\lambda\rho} = 2\left(\delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\tau - \delta^\mu_\tau\delta^\nu_\sigma\right)$$

и окончательно

$$\Xi = \mathrm{d}V \cdot R, \quad R = R^{\mu\nu}_{\mu\nu}, \quad dV = \sqrt{-g}\ \mathrm{d}^{(4)}x$$

Мы видим, что интеграл от формы Ξ пропорционален действию Гильберта.

Вычислим вариацию $\delta\Xi$ предполагая ω^{ab} и ω^a независимыми. Тензор кривизны задаётся согласно $\mathrm{d}\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B = \frac{1}{2}R^A_{BCD}\omega^C \wedge \omega^D$. Имеем:

$$\delta\Xi = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}\omega^c \wedge \omega^d \wedge \delta\omega^{ab}\right) - \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}T^c \wedge \omega^d \wedge \delta\omega^{ab} + \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}R^{ab} \wedge \omega^c \wedge \delta\omega^d$$

Здесь T^c обозначает левую часть $\mathrm{d}\omega^A + \omega^A_B \wedge \omega^B = \frac{1}{2}T^A_{BC}\omega^B \wedge \omega^C$.

Формула для $\delta\Xi$ без труда выводится в точке пространства, в которой $\omega^{ab} = 0$. В такой точке имеем:

$$\mathrm{d}\delta\omega^{ab} = \frac{1}{2}\delta R^{ab}, \qquad \mathrm{d}\omega^c = \frac{1}{2}T^c$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\varepsilon_{abcd}\delta R^{ab} \wedge \omega^c \wedge \omega^d =& \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}\omega^c \wedge \omega^d \wedge \mathrm{d}\delta\omega^{ab} = \\ =& \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}\omega^c \wedge \omega^d \wedge \delta\omega^{ab}\right) - \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}T^c \wedge \omega^d \wedge \delta\omega^{ab}\end{aligned}$$

Таким образом, первые два слагаемых в $\delta\Xi$ возникают вследствие вариации связности, последнее слагаемое тривиально получается вследствие вариации тетрады. Формула $\delta\Xi$ проверена в точке, в которой $\omega^{ab} = 0$. Теперь из факта независимости обоих частей в $\delta\Xi$ от базиса следует, в $\delta\Xi$ справедливо в любой точке.

Приведенное вычисление, использующее возможность обращения связности в нуль в любой точке пространства, характерно для дифференциальной геометрии и теории гравитации. Таким путем можно резко сократить вычисления.

(??????)

Считая переменные ω^{ab} и ω^d независимыми, приравняем отдельно нулю коэффициенты при вариациях $\delta\omega^{ab}$ и $\delta\omega^d$ в интеграле от величины $\delta\Xi$. При этом первое слагаемое в $\delta\Xi$ можно отбросить, поскольку оно является полной производной. Имеем условие экстремальности относительно ω^{ab}:

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\varepsilon_{abcd}e^c_\nu T^d_{\lambda\rho} = 0$$

или

$$e^a_{[\mu}T^b_{\nu\lambda]} - e^b_{[\mu}T^a_{\nu\lambda]} = 0$$

После умножения на e^λ_a, получаем

$$T^a_{\mu\nu} = \left(e^a_\mu T^b_{\nu\lambda} - e^a_\nu T^b_{\mu\lambda}\right)e^\lambda_b$$

Последнее равенство умножим на e^ν_a, что дает $T^a_{\mu\nu}e^\nu_a = 0$. Вместе с (3.94) это означает отсутствие кручения. Таким образом, вариация интеграла величины $\delta\Xi$ относительно связности дает уравнения

$$\partial_\mu e^a_\nu - \partial_\nu e^a_\mu + \omega^{ab}_\mu e_{b\nu} - \omega^{ab}_\nu e_{b\mu} = 0$$

которые имеют единственное решение (2.89) для формы связности (или (2.87) в базисе $\partial/\partial x^\mu$). Если подставить это решение в 4-форму Ξ, мы возвращаемся к подынтегральному выражению в действии Гильберта, которое полностью выражается через метрический тензор.

Приведём также коэффициент в $\delta\Xi$ при вариации δe^a_μ:

$$\delta\Xi = \cdots - 2\left(\det e^c_\lambda\right)\left(R^b_a e^\mu_b - \frac{1}{2}Re^\mu_a\right)\delta e^a_\mu$$

Здесь была использована формула $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}e^d_\rho = \left(\det e^a_\mu\right)\varepsilon^{abcd}e^\mu_a e^\nu_b e^\lambda_c$

(??????)

Вычисления в этом Разделе приводят к следующему выводу: если связность согласована с метрикой, то действие Гильберта (или интеграл от формы Ξ) тогда и только тогда экстремально относительно вариации коэффициентов связности, когда кручение отсутствует.

(????)

Таким образом, для получения уравнения Эйнштейна остаётся проварьировать действие Гильберта относительно метрического тензора или тетрады, не затрагивая коэффициентов связности, и вариацию приравнять нулю.

Аналог формализма Палатини в механике

(у Мизнера спишу, если будет потребность)

Ответ стак эксченджа про это

I) In [Palatini](http://en.wikipedia.org/wiki/F(R)_gravity) $f(R)$ [gravity](http://www.scholarpedia.org/article/F%28R%29_theories_of_gravitation), the Lagrangian density is[1]

$$\mathcal{L}(g,\Gamma) \;=\; \frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}f(R) + \mathcal{L}_{\mathrm{m}}; \qquad 1$$

with matter Lagrangian density $\mathcal{L}_{\mathrm{m}}$; with [scalar curvature](http://en.wikipedia.org/wiki/Scalar_curvature)

$$R \;:=\; g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}(\Gamma); \qquad 2$$

with [Ricci curvature](http://en.wikipedia.org/wiki/Ricci_curvature) $R_{\mu\nu}(\Gamma)$; and where

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \;=\; \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \qquad 3$$

is an arbitrary torsionfree[2] connection.

II) As OP mentions, the word "Palatini" refers to that the metric $g_{\mu\nu}$ and the connection $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ are "independent" variables[3]. We therefore get two types of [EL equations](http://en.wikipedia.org/wiki/Euler%E2%80%93Lagrange_equation):

1. The EL equations

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} \stackrel{(1)+(5)}{\approx} \kappa T_{\mu\nu} \qquad 4$$

for the metric $g_{\mu\nu}$ are the generalization of [EFE](http://en.wikipedia.org/wiki/Einstein_field_equations), where

$$T^{\mu\nu} := \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_{\rm m}}{\delta g_{\mu\nu}} \qquad 5$$

is the matter Hilbert [stress-energy-momentum (SEM) tensor](https://en.wikipedia.org/wiki/Stress%E2%80%93energy_tensor). [In eq. (4) the $\approx$ symbol means equality modulo equations of motion. In this answer, we use $(-,+,...,+)$ Minkowski sign convention in d space-time dimensions.]

2. If the matter action $S_{\rm m}$ doesn't depend on the connection $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, then the EL equations

$$\nabla_{\lambda}\hat{\mathfrak{g}}^{\mu\nu} \stackrel{(1)}{\approx} 0, \qquad \hat{\mathfrak{g}}^{\mu\nu} := \sqrt{-g}f'(R)g^{\mu\nu} \stackrel{(8)}{=} \sqrt{-\hat{g}}\hat{g}^{\mu\nu}, \qquad 6$$

for the connection $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ turn out to be the metric compatibility condition

$$\nabla_{\lambda}\hat{g}_{\mu\nu} \stackrel{(6)+(8)}{\approx} 0 \qquad 7$$

for a [conformally equivalent](http://en.wikipedia.org/wiki/Conformal_geometry) metric

$$\hat{g}_{\mu\nu} := f'(R)^{\frac{2}{d-2}}g_{\mu\nu}, \qquad 8$$

known as the [Einstein frame metric](http://en.wikipedia.org/wiki/Jordan_and_Einstein_frames). In other words, the classical solution for $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ is the [Levi-Civita connection](http://en.wikipedia.org/wiki/Levi-Civita_connection) for the Einstein frame metric $\hat{g}_{\mu\nu}$.

III) So Einstein gravity (GR) with a possible cosmological constant

$$f(R) = R - 2\Lambda, \qquad 9$$

or equivalently

$$f'(R) = 1, \qquad 10$$

corresponds to the special case where the two metrics $g_{\mu\nu}$ and $\hat{g}_{\mu\nu}$ coincide, and hence $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ becomes the Levi-Civita connection for $g_{\mu\nu}$.

–

[1] It is natural to replace the Lagrangian density (1) with the extended Lagrangian density

$$\tilde{\mathcal{L}}(g,\Gamma,\Phi) = \frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}\{\Phi R - V(\Phi)\} + \mathcal{L}_{\rm m}; \qquad 11$$

with auxiliary scalar [dilaton](http://en.wikipedia.org/wiki/Dilaton) field Φ; and where the potential

$$V(\Phi) := \sup_r(\Phi r - f(r)) \qquad 12$$

is the [Legendre transform](http://en.wikipedia.org/wiki/Legendre_transformation) of the function f. If we integrate out the auxiliary scalar field Φ, we then return to the $f(R)$ Lagrangian density (1) which we started from! The EL equations

$$\nabla_\lambda \hat{\mathfrak{g}}^{\mu\nu} \overset{(1)}{\approx} 0, \qquad \hat{\mathfrak{g}}^{\mu\nu} := \sqrt{-g}\Phi g^{\mu\nu} \overset{(14)}{=} \sqrt{-\hat{g}}\hat{g}^{\mu\nu}, \qquad 13$$

for the connection $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ become the metric compatibility condition (7) for the Einstein frame metric

$$\hat{g}_{\mu\nu} := \Phi^{\frac{2}{d-2}} g_{\mu\nu}. \qquad 14$$

After the connection $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ has been integrated out, the Lagrangian density (11) becomes

$$\tilde{\mathcal{L}}(g,\Phi) = \frac{1}{2\kappa}\sqrt{-\hat{g}}\{R(\hat{g}) - \Phi^{\frac{d}{2-d}}V(\Phi)\} + \mathcal{L}_{\rm m}, \qquad 15$$

where eq. (14) is implicitly assumed.

However, unfortunately the Legendre transform V does not exist for Einstein gravity (9), so we will not consider the extended Lagrangian density (11) further in this answer.

[2] One could allow a non-dynamical torsion piece, but we will not pursue this here for simplicity. For more on [torsion](http://en.wikipedia.org/wiki/Torsion_tensor), see e.g. also [this](https://physics.stackexchange.com/q/137738/2451) Phys.SE post.

[3] Normally in non-Palatini formulations, we integrate out the connection $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ and keep the metric $g_{\mu\nu}$. Eddington & Schrödinger proposed the [opposite](http://en.wikipedia.org/wiki/Classical_unified_field_theories)! Let us analyze this possibility here. Define for later convenience a double-index notation $M = \mu\mu'$ and the following shorthand notation

$$\frac{f(R)}{2f'(R)} =: \hat{f}(R) \equiv \hat{f}_0 + \hat{f}_1 R + \hat{f}_2(R). \qquad 16$$

Let us only consider the vacuum

$$T_{\mu\nu} = 0. \qquad 17$$

from now on. We then have

$$g^M \overset{(4)+(16)+(17)}{\approx} \hat{f}(R)R^M, \qquad 18$$

where R^M is the inverse Ricci tensor. Equivalently, we have

$$\left(\delta^M_N - \hat{f}_1 R^M R_N\right) g^N \overset{(16)+(18)}{\approx} \left(\hat{f}_0 + f_2(R)\right) R^M. \qquad 19$$

So we get a fixed-point equation for the inverse metric

$$\begin{aligned} g^N &\overset{(19)}{\approx} \left(\delta^N_M + \frac{\hat{f}_1}{1-d\hat{f}_1} R^N R_M\right)\left(\hat{f}_0 + \hat{f}_2(R)\right) R^M \\ &= \frac{1}{1-d\hat{f}_1}\left(\hat{f}_0 + \hat{f}_2\left(g^M R_M\right)\right) R^N. \qquad 20 \end{aligned}$$

Let us specialize to Einstein gravity (9). Then

$$\hat{f}_0 = -\Lambda; \qquad \hat{f}_1 = \frac{1}{2}; \qquad \hat{f}_2(R) = 0. \qquad 21$$

The inverse metric becomes

$$g^N \overset{(20)+(21)}{\approx} \frac{2\Lambda}{d-2} R^N. \qquad 22$$

And hence

$$R \overset{(22)}{\approx} \frac{2d}{d-2}\Lambda, \qquad 23$$

and

$$g_{\mu\nu} \overset{(2)+(22)}{\approx} \frac{d-2}{2\Lambda}R_{\mu\nu}(\Gamma). \qquad 24$$

So the [EH Lagrangian density](http://en.wikipedia.org/wiki/Einstein%E2%80%93Hilbert_action) becomes [Born-Infeld](http://en.wikipedia.org/wiki/Born%E2%80%93Infeld_model)-like:

$$\mathcal{L}(\Gamma) \overset{(1)+(17)+(23)+(24)}{\approx} \frac{1}{\kappa}\left(\frac{d-2}{2\Lambda}\right)^{\frac{d}{2}-1}\sqrt{-\det(R_{\mu\nu}(\Gamma))}. \qquad 25$$

Note that the Eddington-Schrödinger action (25) only works for a non-zero [cosmological constant](http://en.wikipedia.org/wiki/Cosmological_constant) $\Lambda \neq 0$.

Другое о формализме Палатини

(еще много теории есть о нем, у того же Мизнера. нужно будет - допишу)

3.8.10 The Cauchy Problem (???)

(свяжу с УМФ что ли потом в дополнениях... по вергелесу)

Суть (??)

(очень важно понять, что есть задача Коши в ОТО, спрошу у кого-то потом.)

В теории гравитации имеет смысл задача Коши.

Однако задача Коши содержит произвол: 4 функции e^a_0 и 6 функций ω^{ab}_0, которые выбираются исходя из соображений удобства.

(тут подробнее суть распишу, спрошу у кого-то мб лучше)

Задача Коши в терминах форм смещения и тетрад

(такое пока не тяну, потренироваться нужно и почитать Вергелеса ещё)

В этом параграфе в качестве независимых переменных берутся тетрада $e^a_\mu(x)$ и связность $\omega^{ab}_\mu(x)$. Эти переменные подчиняются уравнениям Эйнштейна, в которых тензор кривизны выражен через связность согласно $\mathrm{d}\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B = \frac{1}{2}R^A_{BCD}\omega^C \wedge \omega^D$, и уравнениям $\partial_\mu e^a_\nu - \partial_\nu e^a_\mu + \omega^{ab}_\mu e_{b\nu} - \omega^{ab}_\nu e_{b\mu} = 0$.

Мы хотим изучить следующую задачу, называемую задачей Коши: пусть на "гиперповерхности" $x^0 = \text{const}$ заданы поля тетрады и связности, можно ли найти эти поля на "гиперповерхности" $x^0 + \delta x^0$, используя уравнения Эйнштейна и $\partial_\mu e^a_\nu - \partial_\nu e^a_\mu + \omega^{ab}_\mu e_{b\nu} - \omega^{ab}_\nu e_{b\mu} = 0$ и заданные начальные условия при $x^0 = \text{const}$?

Заметим, что тождество Бианки (3.73) вытекает непосредственно из определения тензора кривизны $\mathrm{d}\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B = \frac{1}{2}R^A_{BCD}\omega^C \wedge \omega^D$.

Поэтому тождество (3.70) для тензора (3.74) имеет место всегда независимо от выполнения уравнений Эйнштейна и $\partial_\mu e^a_\nu - \partial_\nu e^a_\mu + \omega^{ab}_\mu e_{b\nu} - \omega^{ab}_\nu e_{b\mu} = 0$. Распишем тождество (3.70):

$$\dot{G}^{\mu 0} = -\frac{\partial}{\partial x^i}G^{\mu i} - \Gamma^\mu_{\sigma\nu}G^{\sigma\nu} - \Gamma^\nu_{\sigma\nu}G^{\mu\sigma}.$$

где точка сверху означает производную $\partial/\partial x^0$. Согласно общим формулам пересчета связности (2.13) и с учетом (2.4) имеем

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = e^{\mu}_{a} e^{b}_{\nu} \omega^{a}_{b\lambda} + e^{\mu}_{a} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} e^{a}_{\nu}$$

Так как тензор $G^{\mu\nu}$ содержит величину $\dot{\omega}^{ab}_{\mu}$ в степени не выше первой, то с учетом (3.100) можно утверждать, что правая часть равенства (3.99) содержит $\dot{\omega}^{ab}_{\mu}$ в степени не выше первой. Следовательно, величина $G^{\mu 0}$ вовсе не зависит от $\dot{\omega}^{ab}_{\mu}$.

В уравнениях Эйнштейна и $\partial_\mu e^a_\nu - \partial_\nu e^a_\mu + \omega^{ab}_\mu e_{b\nu} - \omega^{ab}_\nu e_{b\mu} = 0$ не содержатся величины $\dot{e}^a_0$ и $\dot{\omega}^{ab}_0$. Поэтому поля $e^a_0(x)$ и $\omega^{ab}_0(x)$ не являются динамическими переменными, они являются произвольными функциями, смысл которых выяснится ниже. Таким образом, динамическими переменными являются поля $e^a_i(x)$ и $\omega^{ab}_i(x), i = 1, 2, 3$.

(????) Выше было показано, что компоненты $G^{\mu 0}$ не зависят от $\dot{\omega}^{ab}_i$. Из определения тензора $G^{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R$ видно, что он не зависит от $\dot{e}^a_i$. Поскольку компоненты $G^{\mu 0}$ не зависят от производных $\partial/\partial x^0$ от каких-либо полей, то эти компоненты не могут зависеть также и от полей $\omega^{ab}_0(x)$. В противном случае была бы нарушена общая ковариантность теории.

Далее видно, что действие S_g зависит от e^a_0 линейно, и потому вариация S_g относительно e^a_0 не зависит от e^a_0.

С другой стороны, вследствие (3.87), симметрии тензора $G_{\mu\nu}$ и формулы

$$\delta g_{\mu\nu} = \eta_{ab} \left(e^a_\mu \delta e^b_\nu + e^b_\nu \delta e^a_\mu \right)$$

мы можем сделать вывод, что $G^{\mu 0}$ не зависит от e^a_0.

Поэтому часть уравнений Эйнштейна

$$R^{\mu 0} - \frac{1}{2} g^{\mu 0} R - \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu 0} = 0$$

не содержат полей $e^a_0, \omega^{ab}_0, \dot{e}^a_i, \dot{\omega}^{ab}_i$.

Четыре этих уравнения являются связями между переменными e^a_i и ω^{ab}_i на гиперповерхности $x^0 = \text{Const}$.

(?? почему??)

Очевидно, что 12 из 24 -х уравнений $\partial_\mu e^a_\nu - \partial_\nu e^a_\mu + \omega^{ab}_\mu e_{b\nu} - \omega^{ab}_\nu e_{b\mu} = 0$ также являются связями:

$$\partial_i e^a_j + \omega^{ab}_i e_{bj} - \partial_j e^a_i - \omega^{ab}_j e_{bi} = 0$$

Уравнениями движения являются уравнения

$$\dot{e}^a_i = -\omega^{ab}_0 e_{bi} + \partial_i e^a_0 + \omega^{ab}_i e_{b0}$$

$$R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R - \frac{8\pi G}{c^4} T^{ij} = 0$$

Пусть на гиперповерхности $x^0 = \text{Const}$ заданы переменные e^a_i и ω^{ab}_i, удовлетворяющие условиям (3.101) и (3.102). Такие переменные будем называть допустимыми.

Тогда при помощи ур на $\dot{e}^a_i$ можно найти переменные e^a_i в момент времени $x^0 + \delta x^0$.

Смысл полей ω^{ab}_0 и e^a_0

Из уравнения (выше) виден смысл полей ω^{ab}_0 и e^a_0, которые произвольны.

Поля ω^{ab}_0 генерируют локальные преобразования Лоренца ОНБ $\{e^a\}$, а поля e^a_0 производят общее преобразование локальных координат.

Действительно, изменение метрики $g_{ij} = e_i^a e_{aj}$ за бесконечно малый промежуток времени δx^0 согласно ур. на $\dot{e}_i^a$ равно

$$\begin{aligned}\delta g_{ij} =&\delta x^0 \left\{\partial_i e_0^a \cdot e_{aj} + e_{ai} \cdot \partial_j e_0^a + \omega_i^{ab} e_{b0} e_{aj} + \omega_j^{ab} e_{b0} e_{ai}\right\} = \\ =&\partial_i \xi_j + \partial_j \xi_i - \delta x^0 e_{a0} \left\{\left(\partial_i e_j^a + \omega_i^{ab} e_{bj}\right) + \left(\partial_j e_i^a + \omega_j^{ab} e_{bi}\right)\right\} = \\ =&\nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i\end{aligned}$$

Здесь $\xi_i = e_0^a e_{ai} \delta x^0$. При переходе к последнему равенству мы учли тетрадный постулат (2.47).

Для нахождения 18 полей ω_i^{ab} в момент времени $x^0 + \delta x^0$ не достаточно шести уравнений Эйнштейна. (???)

Мы потребуем, чтобы 12 связей (3.102) сохранялись во времени. Это даст нам недостающие 12 уравнений. Для этого вычислим производную $\partial/\partial x^0$ от уравнений (3.102) и воспользуемся уравнениями ур. на $\dot{e}_i^a$ и еще раз уравнениями (3.102). В результате простого вычисления получаем:

$$R_{0i}^{ab} e_{bj} - R_{0j}^{ab} e_{bi} + R_{ij}^{ab} e_{b0} = 0$$

Двенадцать уравнений (3.106) и шесть уравнений (3.104) относительно величин $\dot{\omega}_i^{ab}$ (все эти уравнения линейны) дают возможность найти все величины $\dot{\omega}_i^{ab}$ и тем самым найти поля ω_i^{ab} в момент времени $x^0 + \delta x^0$.

Остается установить, что найденные переменные e_i^a и ω_i^{ab} на гиперплоскости $x^0 + \delta x^0$ допустимы т.е. что связи (3.101) и (3.102) остаются в силе. Сохранение связей (3.102) заложено в саму процедуру решения, поскольку сох ранение этих связей дает возможность найти $\dot{\omega}_i^{ab}$. Сохранение связей (3.101) вытекает из тождества Бианки

$$\nabla_\nu \left(G^{\mu\nu} - \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}\right) = 0,$$

которое с учетом уравнений связей (3.101) и движения (3.104) дает

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \left(R^{\mu 0} - \frac{1}{2} g^{\mu 0} R - \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu 0}\right) = 0$$

О добавлении уравнения движения полей материи

(обсудим четко, как это делать)

К обсужденным здесь уравнениям гравитационных полей следует добавить уравнения движения для полей материи.

Аналогия недостаточности уравнений Эйнштейна с электродинамикой

(распишу тут с формулами, как выглядит эта аналогия.)

Недостаточность эйнштейновских уравнений для определения $g_{\mu\nu}$ единственным образом аналогична недостаточности уравнений Максвелла для однозначного определения векторпотенциала A_μ. Эта неоднозначность используется в каждой конкретной задаче наложением калибровочного условия так, чтобы это облегчало решение задачи.

О степенях свободы в уравнениях Эйнштейна

Симметричный тензор в 4-мерном пространстве-времени имеет 10 независимых компонент. Поэтому, на первый взгляд, может показаться, что уравнений Эйнштейна при заданных граничных условиях может быть достаточно, чтобы определить $g_{\mu\nu}$ единственным образом.

Вспомним, однако, что тензор, стоящий в левой части Ур. Эйнштейна, удовлетворяет тождеству (3.70), которое состоит из 4-х дифференциальных уравнений. Из этого тождества следует, что число независимых дифференциальных уравнений среди уравнений Эйнштейна равно $10 - 4 = 6$. Отсюда, в свою очередь следует, что ур Эйнштейна оставляют неопределенными 4 степени свободы в 10 неизвестных компонентах $g_{\mu\nu}$. Эти степени свободы соответствуют тому, что если $g_{\mu\nu}$ - решение уравнений Эйнштейна, то решением его будет также и $g'_{\mu\nu}$, которое получается из $g_{\mu\nu}$ с помощью произвольного преобразования координат $x \to x'$. Такое преобразование координат вводит четыре произвольные функции $x'(x)$, соответствующие как раз четырем степеням свободы в решении уравнений Эйнштейна.

3.8.11 Harmonic Coordinates

Поскольку уравнения Эйнштейна имеют свободу, мы накладываем дополнительные условия на наши координаты. Обсудим подробно одни из используемых - гармонические координаты. Для этого будем рассматривать уравнения Эйнштейна как дифференциальные уравнения второго порядка относительно компонент метрического тензора.

Суть

(просто координаты с условием на метрику, да?)

Условие гармоничности не является тензорным, т.к. координаты не являются скалярными величинами.

Теория

Гармонические координаты имеют вид

$$g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$$

Определим для удобства $\Gamma^{\lambda} \equiv g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$.

Условие гармоничности всегда возможно. Действительно, условия гармоничности преобразуются как

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\lambda'} = g^{\mu'\nu'}\Gamma^{\lambda'}_{\mu'\nu'} =& \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} g^{\mu'\nu'} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} g^{\mu'\nu'} = \\
=& \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma^{\lambda} + \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\rho}} g^{\sigma\rho} = \\
=& \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma^{\lambda} - \left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} \left(\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} \right) \right] \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\sigma}} \left(\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\rho}} \right) g^{\sigma\rho} = \\
=& \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma^{\lambda} - \frac{\partial^2 x^{\lambda'}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} g^{\sigma\rho}
\end{aligned}$$

(?? ниже чуть хз)

Если Γ^λ не исчезает, то мы вводим новую систему координат, решив следующие дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных:

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 x^{\lambda'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda}\Gamma^\lambda = 0$$

Тогда согласно (3.125) $\Gamma^{\lambda'} = 0$ в координатах x'.

Чтобы выяснить математический смысл Ур. (3.126), используем представление символов Кристоффеля через метрический тензор (2.87), при помощи которого находим:

$$\Gamma^\lambda = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{-g}g^{\nu\lambda}\right)$$

При помощи (3.127) и (2.94) уравнения (3.126) переписываются в виде

$$-\Box x^{\lambda'} = g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 x^{\lambda'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right) = 0$$

Последние уравнения совпадают с (2.94), где вместо поля ϕ подставлены координаты $x^{\lambda'}$.

Теперь проясняется смысл термина "гармонические координаты": гармонические координаты x' удовлетворяют уравнению д'Аламбера (2.94).

Пусть x^μ - гармонические координаты, т.е. условие гармоничности выполнено. Согласно (3.127) это означает выполнение условий

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right) = 0$$

Если x' - другие гармонические координаты, то согласно (3.126) они удовлетворяют уравнениям

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial^2 x^{\lambda'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = 0$$

Очевидно, что в пространстве Минковского обычные ортогональные координаты являются гармоническими, поскольку $g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ и $g = -1$. Тем самым условия (3.129) выполняются тривиально.

Схожесть гармонических координат с ортогональными (???)

(не понял, насколько они схожи)

В неком смысле гармонические координаты в кривом пространстве максимально близки (в конечном участке пространства, в отличие от бесконечно малого участка. пространства. вбл изи центра нормальных координат Римана) к ортогональным координатам в пространстве Минковского.

Однако, хотя условия гармоничности накладывают некоторые ограничения на координаты, эти условия не фиксируют координаты однозначно.

Это видно уже на примере пространства Минковского. Действительно, если добавить к гармоническим координатам любые решения уравнения д'Аламбера, то новые координаты останутся гармоническими.

(проверю потом)

Известно, что уравнение д'Аламбера имеет бесконечно много решений, которые легко описываются в пространстве Минковского. Ситуация опять аналогична ситуации в электродинамике. Фиксация калибровки условием $\partial_\mu A^\mu = 0$ неоднозначна, поскольку потенциал $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f, \Box f = 0$, также удовлетворяет условию $\partial_\mu A^{\mu\mu} = 0$

Применения гармонических координат

(тут все их укажу потом)

3.8.12 Features of Einstein Equations for Real Applications

(когда реальные задачи начну решать то новое, что увижу - сюда буду добавлять)

3.9 Conservation Laws in General Relativity

Обсудим подробно законы сохранения в ОТО.

3.9.1 Energy–Momentum Tensor

Суть тензора энергии-импульса

(уже почти готов написать, но еще нет)

воспоминания прошлых конструкций

(потом удалю и раскидаю этот пар-ф)

В \$32 было получено обшее правило для вычисления тензора энергии-импульса любой физической системы, действие которой представлено в виде интеграла (32.1) по 4-пространству.

В криволинейных координатах этот интеграл должен быть написан в виде

$$S = \frac{1}{c}\int \Lambda\sqrt{-g}d\Omega$$

(в галилеевых координатах $g=-1$ и S переходит в $\frac{1}{c}\int \Lambda dVdt$).

Интегрирование производится по всему (трехмерному) пространству и по времени между двумя заданными моментами, т.е. по бесконечной области 4-пространства, заключенной между двумя гиперповерхностями.

Как уже было указано в §32, тензор энергии-импульса, определенный по формуле (32.5), не является, вообще говоря, симметричным, каким он должен быть.

Для того чтобы сделать его симметричным, необходимо было прибавить к выражению (32.5) надлежащим образом подобранный член вида $\frac{\partial}{\partial x^l}\psi_{ikl}$, причем $\psi_{ikl}=-\psi_{ilk}$.

Мы дадим теперь другой способ вычисления тензора энергии-импульса, обладающий тем преимуществом, что он сразу приводит к симметричному выражению.

Преобразования метрики

(в др. месте это будет)

При преобразовании координат x^i к координатам $x'^i = x^i + \xi^i$, где ξ^i -малые величины, есть известное выражение для изменение метрики: $\delta g_{ik} = -\xi_{i;k} - \xi_{k;i}$, которое и получим в этом разделе.

При этом преобразовании компоненты g^{ik} преобразуются согласно формулам

$$\begin{aligned} g'^{ik}\left(x^{ll}\right) =& g^{lm}\left(x^l\right)\frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x'^k}{\partial x^m} \\ =& g^{lm}\left(\delta^i_l + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}\right)\left(\delta^k_m + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m}\right) \approx \\ \approx& g^{ik}\left(x^l\right) + g^{im}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{kl}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} \end{aligned}$$

Тензор g'^{ik} является здесь функцией от x'^l, а тензор g^{ik} -функцией прежних координат x^l.

Для того чтобы представить все члены в виде функций от одних и тех же переменных, разложим $g'^{ik}\left(x^l+\xi^l\right)$ по степеням ξ^l.

Далее, пренебрегая членами высшего порядка по ξ^i, мы можем в членах, содержащих ξ^l, написать g^{ik} вместо g'^{ik}.

Таким образом, находим:

$$g'^{ik}\left(x^l\right)=g^{ik}\left(x^l\right)-\xi^l\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}+g^{il}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^l}+g^{kl}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^l}$$

Легко убедиться путем непосредственной проверки, что последние три члена справа могут быть написаны в виде суммы $\xi^{i;k}+\xi^{k;i}$ контравариантных производных от ξ^i.

Таким образом, находим окончательно преобразование g^{ik} в виде

$$g^{ik}=g^{ik}+\delta g^{ik},\quad \delta g^{ik}=\xi^{i;k}+\xi^{k;i}$$

Для ковариантных компонент имеем при этом:

$$g'_{ik}=g_{ik}+\delta g_{ik},\quad \delta g_{ik}=-\xi_{i;k}-\xi_{k;i}$$

(так, чтобы с точностью до величин первого порядка малости соблюдалось условие $g'_{il}g'^{kl}=\delta^k_i$).

Получение ТЭИ с помощью варьирования действия по метрике (??)

T_{ik} должен быть отождествлен с тензором энергии-импульса

Поскольку действие S есть скаляр, то при преобразовании координат оно не меняется.

С другой стороны, изменение δS действия при преобразовании координат можно написать в следующем виде.

Пусть, как и в §32, q обозначают величины, определяющие ту физическую систему, к которой относится действие S.

При преобразовании координат величины q меняются на δq.

При вычислении δS можно, однако, не писать членов, связанных с изменениями q.

Все эти члены все равно взаимно сокращаются в силу «уравнений движения» физической системы, поскольку эти уравнения как раз и получаются путем приравнивания нулю вариации S по величинам q.

Поэтому достаточно писать только члены, связанные с изменением g_{ik}.

Воспользовавшись, как обычно, теоремой Гаусса и полагая на границах интегрирования $\delta g^{ik}=0$, находим δS в виде

$$\begin{aligned}\delta S=&\frac{1}{c}\int\left\{\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}}\delta g^{ik}+\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\delta\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right\}d\Omega=\\ =&\frac{1}{c}\int\left\{\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right\}\delta g^{ik}d\Omega\end{aligned}$$

Введем теперь обозначение

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{ik}=\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}$$

тогда δS примет вид

$$\delta S = \frac{1}{2c}\int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}d\Omega = -\frac{1}{2c}\int T^{ik}\delta g_{ik}\sqrt{-g}d\Omega$$

где использовано, что $g^{ik}\delta g_{lk} = -g_{lk}\delta g^{ik}$ и потому $T^{ik}\delta g_{ik} = -T_{ik}\delta g^{ik}$.

Подставляя сюда для δg^{ik} выражение (94.2), имеем, воспользовавшись симметрией тензора T_{ik}:

$$\delta S = \frac{1}{2c}\int T_{ik}\left(\xi^{i;k} + \xi^{k;i}\right)\sqrt{-g}d\Omega = \frac{1}{c}\int T_{ik}\xi^{i;k}\sqrt{-g}d\Omega$$

Далее преобразуем это выражение следующим образом:

$$\delta S = \frac{1}{c}\int \left(T_i^k\xi^i\right)_{;k}\sqrt{-g}d\Omega = \int \frac{1}{c}T^k_{i,k}\xi^i\sqrt{-g}d\Omega$$

Первый интеграл с помощью $A^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}A^i\right)}{\partial x^i}$ запишем как $\int \frac{\partial}{c\partial x^k}\left(\sqrt{-g}T_i^k\xi^i\right)d\Omega$ и преобразован в интеграл по гиперповерхности. Поскольку на границах интегрирования ξ^i обращаются в нуль, то этот интеграл исчезает.

Таким образом, приравнивая δS нулю, находим:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int T^k_{i;k}\xi^i\sqrt{-g}d\Omega = 0$$

Ввиду произвольности ξ^i отсюда следует, что

$$T^k_{i;k} = 0$$

Сравнивая это уравнение с уравнением $\partial T_{ik}/\partial x^k = 0$, имевшим место в галилеевых координатах, мы видим, что тензор T_{ik}, определяемый формулой $(94,4)$, должен быть отождествлен с тензором энергии-импульса по крайней мере с точностью до постоянного множителя.

Множитель равен единице

(?? ниже - поверил, лень проверять)

Что этот множитель равен единице, легко проверить, производя, например, вычисление по формуле (94.4) для случая электромагнитного поля, когда

$$\Lambda = -\frac{1}{16\pi}F_{ik}F^{ik} = -\frac{1}{16\pi}F_{ik}F_{lm}g^{il}g^{km}$$

Таким образом, формула (94.4) дает возможность вычислить тензор энергии-импульса путем дифференцирования Λ по компонентам метрического тензора (и их производным).

При этом тензор T_{ik} получается сразу в явно симметричном виде.

Формула (94.4) удобна для вычисления тензора энергии-импульса не только в случае наличия гравитационного поля, но и при его отсутствии, когда метрический тензор не имеет самостоятельного смысла и переход к криволинейным

координатам производится формально как промежуточный этап при вычислении T_{ik}.

Другие ТЭИ в криволинейных координатах

(нерел случай пропишу потом лучше в другом месте!!)

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля должно быть написано в криволинейных координатах в виде

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(-F_{il}F_k^l + \frac{1}{4}F_{lm}F^{lm}g_{ik}\right)$$

Для макроскопических же тел тензор энергии-импульса есть

$$T_{ik} = (p+\varepsilon)u_i u_k - pg_{ik}$$

T_{00} нулевая компонента

(про неё подробно. в 1й части скорее всего про неё будет!!)

Отметим, что компонента T_{00} всегда положительна:

$$T_{00} \geqslant 0$$

(смешанная же компонента T_0^0 не имеет, вообще говоря, определенного знака).

Связь метрического тензора с каноническим

(хз, всё еще путаюсь в этом.)

3.9.2 Energy–Momentum Pseudotensor of the Gravitational Field

(в 1й части суть его, тут - полная теория.)

Основные формулы ТЭИ Ландау-Лифшица

(то же, что в 1 части)

О случаях применений псевдотензора ЛЛ

(четко потом укажу)

Недостатки обычного ковариантного ЗС ТЭИ (?!?!)

(оч важно четко это увидеть, пока хз.)

При отсутствии гравитационного поля закон сохранения энергии и импульса материи (вместе с электромагнитным полем) выражается уравнением

$$\partial T^{ik}/\partial x^k = 0$$

Обобщением этого уравнения на случай наличия гравитационного поля является уравнение $T^k_{i;k} = 0$, то есть

$$T^k_{i;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\left(T_i^k\sqrt{-g}\right)}{\partial x^k} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}T^{kl} = 0$$

В таком виде, однако, это уравнение, вообще говоря, не выражает закона сохранения чего бы то ни было.

Это обстоятельство связано с тем, что в гравитационном поле должен сохраняться 4-импульс материи вместе с гравитационным полем, а не 4-импульс одной лишь материи. последний же не учтен в выражении для T_i^k.

(?!!!! тут важные пояснения, почему это так, пока что не зашло.)

Определение ТЭИ ЛЛ через обобщение ТЭИ из локально геодезической системы координат

Для определения сохраняющегося полного 4-импульса гравитационного поля вместе с находящейся в нем материей мы поступим следующим образом.

Выберем систему координат так, чтобы в некоторой заданной точке пространства-времени все первые производные от g_{ik} по координатам обратились в нуль (сами же g_{ik} при этом не должны обязательно иметь галилеевы значения).

Тогда в этой точке второй член в уравнении $T^k_{i;k} = 0$ обратится в нуль, а в первом можно вынести $\sqrt{-g}$ из-под знака производной, так что остается

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T^k_i = 0$$

или в контравариантных компонентах (??)

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T^{ik} = 0$$

Величины T^{ik}, тождественно удовлетворяющие этому уравнению, могут быть написаны в виде

$$T^{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l} \eta^{ikl}$$

где η^{ikl} - величины, антисимметричные по индексам k, l:

$$\eta^{ikl} = -\eta^{ilk}$$

Нетрудно фактически привести T^{ik} к такому виду. Для этого исходим из уравнений поля:

$$T^{ik} = \frac{c^4}{8\pi k} \left(R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R \right)$$

где $R^{ik} = \frac{1}{2} g^{im} g^{kp} g^{\ln} \left\{ \frac{\partial^2 g_{lp}}{\partial x^m \partial x^n} + \frac{\partial^2 g_{mn}}{\partial x^l \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{\ln}}{\partial x^m \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{mp}}{\partial x^l \partial x^n} \right\}$, ибо в рассматриваемой точке все $\Gamma^i_{lk} = 0$.

(потом проверю, очевидна ли мне эта формула)

После простых преобразований имеем:

$$T^{ik} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{c^4}{16\pi k} \frac{1}{(-g)} \frac{\partial}{\partial x^m} \left[(-g) \left(g^{ik} g^{lm} - g^{il} g^{km} \right) \right] \right\}$$

Стоящее в фигурных скобках выражение антисимметрично по индексам k, l и есть η^{ikl}.

Поскольку первые производные от g_{ik} в рассматриваемой точке равны нулю, то множитель $1/(-g)$ можно вынести из-под знака производной $\partial/\partial x^l$.

Введем обозначения

$$h^{ikl} = \frac{\partial}{\partial x^m} \lambda^{iklm}$$

$$\lambda^{iklm} = \frac{c^4}{16\pi k} (-g) \left(g^{ik} g^{lm} - g^{il} g^{km} \right)$$

величины h^{ikl} антисимметричны по индексам k, l:

$$h^{ikl} = -h^{ilk}$$

Тогда можно написать

$$\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l} = (-g) T^{ik}$$

Теперь перейдем в криволинейную систему отсчета. В общем случае $\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l} - (-g)T^{ik} \neq 0$; обозначим ее посредством $(-g)t^{ik}$. Совокупность величин t^{ik} называют псевдотензором энергии-импульса гравитационного поля. Тогда будем иметь по определению:

$$(-g)\left(T^{ik} + t^{ik}\right) = \frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}$$

Величины t^{ik} симметричны по индексам i, k:

$$t^{ik} = t^{kl}$$

Это видно непосредственно из их определения, поскольку как тензор T^{ik}, так и производные $\partial h^{ikl}/\partial x^l$ являются симметричными величинами.

Выражая T^{ik} через R^{ik} согласно уравнениям Эйнштейна, получим соотношение

$$(-g)\left\{\frac{c^4}{8\pi k}\left(R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R\right) + t^{ik}\right\} = \frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}$$

из которого можно найти после довольно длинного вычисления (???????) следующее выражение для t^{ik}:

$$\begin{aligned} t^{ik} = \frac{c^4}{16\pi k}\{ & \left(2\Gamma^n_{lm}\Gamma^p_{np} - \Gamma^n_{lp}\Gamma^p_{mn} - \Gamma^n_{ln}\Gamma^p_{mp}\right)\left(g^{il}g^{km} - g^{ik}g^{lm}\right) + \\ & + g^{il}g^{mn}\left(\Gamma^k_{lp}\Gamma^p_{mn} + \Gamma^k_{mn}\Gamma^p_{lp} - \Gamma^k_{np}\Gamma^p_{lm} - \Gamma^k_{lm}\Gamma^p_{np}\right) + \\ & + \{g^{kl}g^{mn}\left(\Gamma^i_{lp}\Gamma^p_{mn} + \Gamma^i_{mn}\Gamma^p_{lp} - \Gamma^i_{np}\Gamma^p_{lm} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^p_{np}\right) + \\ & + g^{lm}g^{np}\left(\Gamma^i_{ln}\Gamma^k_{mp} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^k_{np}\right)\} \end{aligned}$$

или, непосредственно через производные от компонент метрического тензора:

$$\begin{aligned} (-g)t^{ik} = \frac{c^4}{16\pi k}\Bigg\{ & \mathfrak{g}^{ik}_{,l}\mathfrak{g}^{lm}_{,m} - g^{il}_{,l}\mathfrak{g}^{km}, m + \frac{1}{2}g^{ik}g_{lm}\mathfrak{g}^{ln}_{,p}\mathfrak{g}^{pm}, n - \\ & - \left(g^{il}g_{mn}\mathfrak{g}^{kn}, p^{mp}_{,l} + g^{kl}g_{mn}\mathfrak{g}^{in}, p^{mp}_{,l}\right) + g_{lm}g^{np}\mathfrak{g}^{il}_{,n}\mathfrak{g}^{km}, p + \\ & + \frac{1}{8}\left(2g^{il}g^{km} - g^{ik}g^{lm}\right)\left(2g_{np}g_{qr} - g_{pq}g_{nr}\right)\mathfrak{g}^{nr}_{,l}\mathfrak{g}^{pq}{}_{,m}\Bigg\}, \end{aligned}$$

где $\mathfrak{g}^{ik} = \sqrt{-g}g^{ik}$, а индекс e, i означает простое дифференцирование по x^i

Вывод формулы для $(-g)t^{ik}$ (????)

(?? кто знает, может, когда-то и выведу ее, но вряд ли.)

Пример использования явной формулы для $(-g)t^{ik}$ (????)

(?? мб когда-то что-то по ней посчитаю, это было бы полезно.)

Псевдотензорность тензора энергии-импульса гравитационного поля (???)

Величины t^{ik} не составляют тензора; это видно уже из того, что в $\partial h^{ikl}/\partial x^l$ стоят простые, а не ковариантные производные.

(тут более явно их укажу)

Однако t^{ik} выражаются через величины Γ^i_{kl}, а последние ведут себя как тензор по отношению к линейным преобразованиям координат; то же самое относится, следовательно, и к t^{ik}

(потом четкое напишу док-во.)

Явный пример необходимости пользоваться ТЭИ Л-Л

(дополенительно укажу, для еще большей четкости)

О тензоре Беленфанта

(гуглится. слышал про него. что и зачем - пока не знаю, кто-то объяснит - впишу сюда.)

3.9.3 The Law of Energy Conservation in GR

Обсудим подробно закон сохранения энергии в ОТО.

3.9.4 4-Momentum and 4-Moment of Momentum of the Gravitational Field

(в 1ю часть суть занесу. пока хз.)

полный 4-импульс (?????)

Из определения (96.5) следует, что для суммы $T^{ik} + t^{ik}$ тождественно выполняются уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(-g)\left(T^{ik} + t^{ik}\right) = 0$$

Это значит, что имеет место закон сохранения величин

$$P^i = \frac{1}{c}\int (-g)\left(T^{ik} + t^{ik}\right) dS_k$$

При отсутствии гравитационного поля в галилеевых координатах $t^{ik} = 0$ и написанный интеграл переходит в $\frac{1}{c}\int T^{ik} dS_k$, т.е. в 4 -импульс материи.

Поэтому величины P^i должны быть отождествлены с полным 4-импульсом материи вместе с гравитационным полем.

Интегрирование в P^i может производиться по любой бесконечной гиперповерхности, включающей в себя все трехмерное пространство.

Если выбрать в качестве нее гиперповерхность $x^0 = \mathbf{const}$, то P^i можно написать в виде трехмерного пространственного интеграла:

$$P^i = \frac{1}{c}\int (-g)\left(T^{i0} + t^{i0}\right) dV$$

Тот факт, что полный 4-импульс материи и поля выражается в виде интегралов от симметричных по индексам i, k величин $(-g)\left(T^{ik} + t^{ik}\right)$, весьма существен.

Он означает, что сохраняется 4-момент импульса, определяемый как

$$M^{ik} = \int \left(x^i dP^k - x^k dP^i\right) = \frac{1}{c}\int \left[x^i\left(T^{kl} + t^{kl}\right) - x^k\left(T^{il} + t^{il}\right)\right](-g) dS_l$$

(до этого плохо прописано, что именно за счет этого есть момент импульса. в теории поля это пропишу четко потом!!)

Таким образом, и в общей теории относительности у замкнутой системы гравитирующих тел сохраняется полный момент импульса.

4-импульса материи

(???? вроде тут еще другой поход, задача ЛЛ2. пока хз.)

Получить выражение для полного 4-импульса материи и гравитационного поля, воспользовавшись формулой $T_i^k = \sum\limits_l q_{,i}^{(l)} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}^{(l)}} - \delta_i^k \Lambda$.

В криволинейных координатах действие имеет вид

$$S = \int \Lambda \sqrt{-g} dV dt$$

вместо $S = \int \Lambda \left(q, \frac{\partial q}{\partial x^i}\right) dV dt$, и потому для получения сохраняющейся величины надо писать в (32.5) $\Lambda\sqrt{-g}$ вместо Λ, так что 4-импульс имеет вид (??????)

$$P_i = \frac{1}{c} \int \left[-\Lambda \sqrt{-g} \delta_i^k + \sum \frac{\partial q^{(l)}}{\partial x^i} \frac{\partial (\sqrt{-g}\Lambda)}{\partial \frac{\partial q^{(l)}}{\partial x^k}} \right] dS_k.$$

При применении этой формулы к материи, для которой величины $q^{(l)}$ отличны от g_{ik}, можно вынести $\sqrt{-g}$ из-под знака производной, и подынтегральное выражение оказывается равным $\sqrt{-g}T_i^k$, где T_i^k - тензор энергии-импульса материи.

При применении же написанной формулы к гравитационному полю надо положить $\Lambda = -\frac{c^4}{16\pi k} G$, а величинами $q^{(l)}$ являются компоненты g_{ik} метрического тензора.

Полный 4-импульс поля и материи

Полный 4-импульс поля и материи равен, следовательно,

$$P_i = \frac{1}{c} \int T_i^k \sqrt{-g} dS_k + \frac{c^3}{16\pi k} \int \left[G\sqrt{-g}\delta_i^k - \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} \frac{\partial (G\sqrt{-g})}{\partial \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^k}} \right] dS_k$$

Воспользовавшись выражением (93.3) для G, можно преобразовать эту формулу к виду

$$P_i = \frac{1}{c} \int \left\{ T_i^k \sqrt{-g} + \frac{c^4}{16\pi k} \left[G\sqrt{-g}\delta_i^k + \Gamma_{lm}^k \frac{\partial \left(g^{lm}\sqrt{-g}\right)}{\partial x^i} - \Gamma_{ml}^l \frac{\partial \left(g^{mk}\sqrt{-g}\right)}{\partial x^i} \right] \right\} dS_k$$

Второй член в фигурных скобках определяет 4-импульс гравитационного поля при отсутствии материи.

Подынтегральное выражение не симметрично по индексам i, k и потому не дает возможности сформулировать закон сохранения момента импульса.

Центр инерции в ОТО (?)

(про центр инерции в теории поля тоже создам нормальный раздел потом!!!)

В ОТО может быть дано определение центра инерции, совершающего равномерное движение. Последнее связано с сохранением компонент $M^{0\alpha}$, выражающимся уравнением

$$x^0 \int \left(T^{\alpha 0} + t^{\alpha 0}\right)(-g) dV - \int x^\alpha \left(T^{00} + t^{00}\right)(-g) dV = \textbf{const}$$

так что координаты центра инерции даются формулой

$$X^\alpha = \frac{\int x^\alpha \left(T^{00} + t^{00}\right)(-g) dV}{\int \left(T^{00} + t^{00}\right)(-g) dV}$$

Выбирая систему координат, инерциальную в данном элементе объема, можно обратить все t^{ik} в любой точке пространства-времени в нуль (так как при этом обращаются в нуль все Γ_{kl}^i).

О сложностях определения центра инерции в ОТО

(пока не совсем понимаю, почему с этим могут быть сложности. потом пропишу, что так-то просто его не определить. пока хз.)

(???) дальше теория

(тут пока забил разбирать, еще пара страниц ЛЛ2, пока не до них)

С другой стороны, можно получить отличные от нуля t^{ik} в плоском пространстве, т.е. при отсутствии гравитационного поля, если просто воспользоваться криволинейными координатами вместо декартовых.

Таким образом, во всяком случае не имеет смысла говорить об определенной локализации энергии гравитационного поля в пространстве.

Если тензор $T_{ik} = 0$ в некоторой мировой точке, то это имеет место в любой системе отсчета, так что мы можем сказать, что в этой точке нет материи или электромагнитного поля.

не имеет смысла говорить о том, имеется ли или нет гравитационная энергия в данном месте (???)

(??? почему???)

Напротив, из равенства нулю псевдотензора же самого для другой системы отсчета, и поэтому не имеет смысла говорить о том, имеется ли или нет гравитационная энергия в данном месте.

Это вполне соответствует тому, что подходящим выбором координат можно «уничтожить гравитационное поле в данном элементе объема, причем согласно сказанному выше одновременно исчезает и псевдотензор t^{ik} в этом элементе.

Величины же $P^i - 4$ -импульс поля и материи - имеют вполне определенный смысл, оказываясь не зависящими от выбора системы отсчета как раз в такой степени, как это необходимо на основании физических соображений.

Выделим область пространства, включающую в себя все рассматриваемые массы.

В четырехмерном пространстве-времени эта область с течением времени прорезывает “канал”.

Вне этого «канала» поле убывает, так что 4-пространство асимптотически приближается к плоскому.

В связи с этим при вычислении энергии и импульса поля надо выбрать четырехмерную систему координат таким образом, чтобы по мере удаления от вканала» она переходила в галилееву систему и все t^{ik} исчезали.

Этим требованием система отсчета, конечно, отнюдь не определяется однозначно, - внутри канала она может быть выбрана произвольно.

В полном согласии с физическим смыслом величин P^i они оказывают- ся, однако, совершенно не зависящими от выбора системы координат внутри «каналай.

Действительно, рассмотрим две системы координат, различные внутри «канала», но переходящие вдали от него в одну и ту же галилееву систему, и сравним значения 4-импульса P^i и P'^i в этих двух системах в определенные моменты «времени» x^0 и x'^0.

Введем третью систему координат, совпадающую внутри єканала» в момент x^0 с первой системой, в момент x'^0 - со второй, а вдали от вканала» - с той же галилеевой.

В силу закона сохранения энергии и импульса величины P^i постоянны ($dP^i/dx^0 = 0$).

Это имеет место в третьей системе координат, как и в первых двух.

Отсюда следует $P^i = P'^i$, что и требовалось доказать.

Выше было отмечено, что величины t^{ik} являются тензором по отношению к линейным преобразованиям координат.

Поэтому величины P^i образуют 4-вектор по отношению к таким преобразованиям, в частности по отношению к преобразованиям Лоренца, переводящим на бесконечности одну галилееву систему отсчета в другую.

4-импульс через интеграл

Суть

Вывод формулы

4 -импульс P^i может быть выражен также в виде интеграла по удаленной трехмерной поверхности, охватывающей ввсе пространство».

Подставив (96.5) в P^i, находим

$$P^i = \frac{1}{c}\int \frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l} dS_k$$

Этот интеграл можно преобразовать в интеграл по обычной поверхности с помощью (6.17):

$$P^i = \frac{1}{2c}\oint h^{ikl} df^*_{kl}$$

Если в качестве области интегрирования в P^i выбирается гиперповерхность $x^0 = \mathbf{const}$, то в (96.15) поверхность интегрирования оказывается чисто пространственной поверхностью:

$$P^i = \frac{1}{c}\oint h^{i0\alpha} df_\alpha$$

Заметим, что, как будет показано в §105, величины $h^{i0\alpha}$ убывают в стационарном случае на больших расстояниях от тел по закону $1/r^2$, так что интеграл (96.16) остается конечным при удалении поверхности интегрирования на бесконечность.

Пример применения этой формулы (???)

Момент импульса через интеграл

Суть

Вывод формулы

Для вывода аналогичной формулы для момента импульса подставим (96.5) в (96.13) и представим h^{ikl} в виде (96.2).

Проинтегрировав затем «по частям», найдем:

$$\begin{aligned} M^{ik} =& \frac{1}{c}\int \left(x^i \frac{\partial^2 \lambda^{klmn}}{\partial x^m \partial x^n} - x^k \frac{\partial^2 \lambda^{ilmn}}{\partial x^m \partial x^n} \right) dS_l = \\ =& \frac{1}{2c}\oint \left(x^i \frac{\partial \lambda^{klmn}}{\partial x^n} - x^k \frac{\partial \lambda^{ilmn}}{\partial x^n} \right) df^*_{lm} - \frac{1}{c}\int \left(\delta^i_m \frac{\partial \lambda^{klmn}}{\partial x^n} - \delta^k_m \frac{\partial \lambda^{ilmn}}{\partial x^n} \right) dS_l = \\ =& \frac{1}{2c}\oint \left(x^i h^{klm} - x^k h^{ilm} \right) df^*_{lm} - \frac{1}{c}\int \frac{\partial}{\partial x^n} \left(\lambda^{klin} - \lambda^{ilkn} \right) dS_l \end{aligned}$$

Из определения величин λ^{iklm} легко видеть, что

$$\lambda^{ilkn} - \lambda^{klin} = \lambda^{ilnk}.$$

Поэтому оставшийся интеграл по dS_l равен

$$\frac{1}{c}\int \frac{\partial \lambda^{unk}}{\partial x^n} dS_l = \frac{1}{2c}\oint \lambda^{ilnk} df^*_{ln}$$

Наконец, снова выбирая чисто пространственную поверхность интегрирования, получим окончательно:

$$M^{ik} = \frac{1}{c}\oint \left(x^i h^{k0\alpha} - x^k h^{i0\alpha} + \lambda^{i0\alpha k}\right) df_\alpha$$

Пример применения этой формулы (???)

3.9.5 Examples of Energy Calculations in Curved Spacetime (!!!!)

(очень важный раздел, придумаю их потом)

3.10 Other Fundamentals of GR

(все играющие хотя бы какую-то роль уравнения тут будут)

3.10.1 Concept of Feynman Integral in Gravity (??)

(Мизнер и др. про это рассуждают, потом доработаю. пока вообще хз.)

3.10.2 Feynman Integral in Gravity: Overview of Applications (??)

(grav lensing and others (?))

4 Other Physics in the Presence of Gravitation

Обсудим с точки зрения ОТО уравнения других разделов физики.
(Мизнер 2, Глава 22. шикарные, в точности нужные темы!!! дойти бы!)

4.1 Other Equations of GR

(все играющие хотя бы какую-то роль уравнения тут будут)

4.1.1 Geodesic Deviation Equation

Относительное ускорение частиц, движущихся по геодезическим

Определим относительное 4-ускорение двух частиц, движущихся по бесконечно близким геодезическим мировым линиям.

Рассмотрим семейство геодезических линий, отличаемых значениями некоторого параметра v (это не скорость. мб переобозначу параметр); другими словами, координаты мировой точки выражаются в виде функций $x^i = x^i(s, v)$, таких, что при каждом $v =$ const это есть уравнение геодезической (причем s - длина интервала, отсчитываемого вдоль линии от ее точки пересечения с некоторой заданной гиперповерхностью).

Введем 4-вектор

$$\eta^i = \frac{\partial x^i}{\partial v}\Delta v \equiv v^i \Delta v,$$

соединяющий на бесконечно близких геодезических (отвечающих значениям параметра v и $v + \Delta v$) точки с одинаковыми значениями s.

Из определения ковариантной производной и равенства $\partial u^i/\partial v = \partial v^i/\partial s$ (где $u^i = \partial x^i/\partial s$) следует, что

$$u^i_{;k} v^k = v^i_{;k} u^k$$

(???? хз, почему это следует)

Рассмотрим вторую производную:

$$\frac{D^2 v^i}{ds^2} \equiv \left(v^i_{;k} u^k\right)_{;l} u^l = \left(u^i_{;k} v^k\right)_{;l} u^l = u^i_{;k;l} v^k u^l + u^i_{;k} v^k_{;l} u^l$$

Во втором члене снова используем (1), а в первом меняем порядок ковариантных дифференцирований с помощью (91.7) и находим:

$$\frac{D^2 v^i}{ds^2} = \left(u^i_{;l} u^l\right)_{;k} v^{k|} + u^m R^i_{mkl} u^k v^l$$

Первый член равен нулю, поскольку вдоль геодезических линий $u^i_{;l} u^l = 0$. Введя постоянный множитель Δv, находим окончательно уравнение:

$$\frac{D^2 \eta^i}{ds^2} = R^i_{klm} u^k u^l \eta^m$$

(его называют уравнением геодезического отклонения).

(??? собственно, а чему равно-то ускорение относительное???? вообще не въехал.)

О применениях уравнения девиации геодезической (??)

(пока не могу внятно про это ответить.)

О применениях в случае гравитационных волн (???)

примеры применения (??)

(мб явные примеры, где оно нужно, найду)

4.1.2 Geodesic Deviation Equation: Applications

(discuss what can be obtained from it)

4.1.3 Light Cone (???)

Суть светового конуса

(позже разберу, пока не зашла идея эта)

$$x^{\pm} = x^0 \pm x^1$$

О случаях применения светового конуса (??)

(хз)

4.2 Electrodynamics in a Gravitational Field

(из теорпола скопирую, там уже прописывается заготовка эта)

Обсудим уравнения электродинамики в присутствии гравитации.

4.2.1 Typical Maxwell Equations in Curved Space

Вид уравнений

(в теории поля уже писал ведь это)

$$F\alpha\beta_{i\beta} = 4\pi J^{\alpha}$$
$$F_{\alpha\beta;\gamma} + F_{\beta\nu;\alpha} + F_{\nu\alpha;\beta} = 0,$$
$$ma^{\alpha} = F^{\alpha\beta} q u_{\beta}.$$

Уравнения Максвелла в пустоте для 4-потенциала в лоренцевой калибровке

Ковариантное обобщение условия (46.9) имеет вид:

$$A^{i}_{;i} = 0$$

Уравнения Максвелла можно, используя формулу (91.7), записать как

$$F_{ik}; k = A_{k;i}; k - A_{i;k}; k = A_k; k_{;i} + A^m R_{im} - A^{;k}_{i;k} = 0$$

с R_{ik} из (92.6). Тогда в силу (1):

$$A_{i;k}{}^{;k} - R_{ik} A^k = 0$$

!! впишу потом в запись про максвелла

4.2.2 Examples of Maxwell Equations in GR

Электродинамика в Шварцшильдовой метрике

есть статья, где это описывается.

Электродинамика в присутствии гравитационной волны

4.2.3 Einstein–Maxwell Equations

Обсудим подробно, что есть уравнения, которые описывают одновременно динамику гравитации и ЭМ поля.

(пока тупой для этого)

4.3 Optics

4.3.1 Optical Phenomena

Оптические явления - не такое редкое дело в ОТО, так что очень полезно собрать минимальную теорию для неё.

(потом мб сделаю большой раздел про них)

(удивительно, но у Лашкевича скорее всего семинар про это)

4.3.2 Fundamentals of Geometric Gravitational Lensing

(это вообще не актуально, но если займусь, то тут буду прописывать их.)

и тут основы своей научки

принцип Ферма для распространения лучей в постоянном гравитационном поле

Вывести принцип Ферма для распространения лучей в постоянном гравитационном поле.

Принцип Ферма гласит:

$$\delta \int k_\alpha dx^\alpha = 0$$

где интеграл берется вдоль луча, а подынтегральное выражение должно быть выражено через постоянную вдоль луча частоту ω_0 и дифференциалы координат. Замечая, что $k_0 = -\partial\psi/\partial x^0 = \omega_0/c$, пишем:

$$\frac{\omega_0}{c} = k_0 = g_{0i}k^i = g_{00}k^0 + g_{0\alpha}k^\alpha = h\left(k^0 - g_\alpha k^\alpha\right)$$

Подставляя это в соотношение $k_i k^i = g_{ik}k^i k^k = 0$, написанное в виде

$$h\left(k^0 - g_\alpha k^\alpha\right)^2 - \gamma_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta = 0$$

получим:

$$\frac{1}{h}\left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 - \gamma_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta = 0$$

4.3.3 Geometric Gravitational Lensing: Other Useful Concepts

Свойства изотропных гиперповерхностей

(????)

инвариантность изображений

фокусирование

оптические скаляры

4.3.4 Other about Gravitational Lensing

(there are many other topics)

4.4 Thermodynamics

4.4.1 Thermodynamic Equations in GR (?)

(??? Haven't studied them)

4.5 Hydrodynamics

4.5.1 Hydrodynamic Equations (?)

Уравнения движения релятивистской жидкости по Вергелесу

Многие физические системы, включая, вероятно, саму Вселенную, можно рассматривать приближенно как идеальную жидкость. Движение идеальной жидкости может быть описано при помощи Ур.(3.52), где $T^{\mu\nu}$ - ее тензор энергии-импульса. Обозначим чер ез U^μ4-скорость релятивистской жидкости в данной точке пространства-времени, нормированную обычным образом:

$$U^\mu U_\mu = 1, \quad U^i = v^i U^0.$$

Вследствие (3.53) имеется единственная возможность для построения симметричного тензора второго ранга при помощи 4скорост и U^μ: тензор const $U^\mu U^\nu$. Поэтому для построения симметричного тензора энергии-импульса жидкости в нашем распоряжении имеется всего два симметричных тензора: $U^\mu U^\nu$ и $g^{\mu\nu}$.

Следоват ельно, тензор энергии-импульса имеет вид:

$$T^{\mu\nu} = (\varepsilon + p)U^\mu U^\nu - pg^{\mu\nu}.$$

Здесь ε и p - скалярные поля, смысл которых выясняется при переходе в локальную систему нормальных координат Римана $\tilde{K}_0$, в которой в близи рассматриваемой точки $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$(см. Раздел 8.3) и жидкость покоится, т.е. $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$. В системе $\tilde{K}_0$ (которая называется собственной) имеем:

$$\tilde{T}^{00} = \varepsilon, \quad \tilde{T}^{ij} = p\delta^{ij}, \quad \tilde{T}^{0i} = 0.$$

Отсюда видно, что ε является плотностью энергии жидкости, а p - её давление в системе $\tilde{K}_0$.

Подставляя тензор (3.54) в Ур. (3.52), можно получить уравнение движения релятивистской жидкости. Для этого необходимо ввести в рассмотрение сохраняющийся 4-вектор тока частиц n^μ:

$$\nabla_\mu n^\mu = 0.$$

Из условия (3.56) следует, что полное число частиц $N = \int n^0\sqrt{-g}\ \mathrm{d}x^1\ \mathrm{d}x^2\ \mathrm{d}x^3$ сохраняет ся (см. (2.105)). Очевидно, что 4-вектор n^μ должен быть пропорционален 4-скорости U^μ, т.е. иметь вид

$$n^\mu = nU^\mu.$$

Здесь $n(x)$ - скалярное поле, из определения которого ясно, что $n(x)$ есть плотность числа частиц в точке x в собственной системе от счета. Рассмотрим далее энтальпию $W = E + pV$, кот орая есть термодинамическая величина, характеризующая состояние некой подсистемы, заключающей в себе определенное количество вещества. Здесь E - полная энергия подсистемы, p - давление, а V - ее объем в собств енной системе отсчета. Если к этой подсистеме не подводится тепло, то $dE = -p\ \mathrm{d}V$. Отсюда

$$\mathrm{d}W = V\ \mathrm{d}p.$$

Соотношение (3.58) справедливо в случае отсутст вия теплообмена или в случае сохранения энтропии. 97 В фор муле (3.54) величина $w = (\varepsilon + p)$ явля ет ся энтальпией единицы объема в собственной системе от счета. Поскольку объем, приходящийся на одну частицу, есть $1/n$, то энтальпия, приходящаяся на одну частицу, равна w/n. Согласно (3.58) в случае изэнтропического движения

$$\mathrm{d}\left(\frac{w}{n}\right) = \frac{1}{n}\ \mathrm{d}p.$$

Теперь подставим (3.54) в (3.52):

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = U^\mu\nabla_\nu\left[\left(\frac{w}{n}\right)(nU^\nu)\right] + wU^\nu\nabla_\nu U^\mu - g^{\mu\nu}\partial_\nu p = 0.$$

С учётом равенств (3.56) и (3.57) последнее равенство перепиcы-

вает ся как

$$\left(\frac{w}{n}\right)_{,\nu} U^\mu nU^\nu + wU^\nu\nabla_\nu U^\mu - p_{,\nu}g^{\mu\nu} = 0$$

Спроектируем $\mathrm{Y_{p.}}$ (3.60) на U_μ и учтем, что вследствие (3.53) $U_\mu \nabla_\nu U^\mu = 0$:

$$U^\nu \left[\left(\frac{w}{n} \right)_{,\nu} - \frac{p_{,\nu}}{n} \right] = 0.$$

Согласно (3.59) Ур. (3.61) означает, что при движении релятивистской жидкости теплообмен отсутствует, т.е. её движение является изэнтропическим.

При помощи равенства (3.61) Ур. (3.60) несколько упрощается:

$$w U^\nu \nabla_\nu U_\mu = \partial_\mu p - U_\mu U^\nu \partial_\nu p$$

Уравнение (3.62) является релятивистским обобщением уравнения Эйлера. Проведенный анализ показывает, что не только Ур. (3.52) является следствием общей ковариантности и уравнений движения, но и сами уравнения движения содержатся в (3.52).

В случас элсктромагнитпого взаимодсйствия из (3.36) и (3.37) получаем (след тензора (3.37) равен нулю):

$$T_\mu^\mu = (-g)^{-1/2} \sum_n m_n c^2 \int \mathrm{d}s_n \delta^{(4)} \left(x - x_n \right).$$

Но (в системе $\tilde{K}_0$) $\mathrm{d}s_n = c\, \mathrm{d}t_n \sqrt{1 - \beta_n^2}$. Поэтому в ультрарелятивистском пределе $(\beta_n \to 1)\, \mathrm{d}s_n \to 0$, и мы имеем

$$T_\mu^\mu = 0.$$

Предположим, что макроскопические силы являются результатом усреднения микроскопических электромагнитных сил. Тогда равенство (3.63) сохраняет свою силу в ультрарелятивистском пределе для макроскопического тензора энергии-импульса (3.54), что дает в этом предельном случае уравнение состояния

$$p = \frac{1}{3} \varepsilon.$$

Хотя уравнение состояния (3.64) выведено для чисто электромагнитных сил на макроскопическом уровне, пр едстав ляется разумным считать его спр аведливым в ультрареля тивистском пределе также и для микроскопических сил любой другой природы.

5 Other Details of Fundamentals of Gravity

(now many these ideas are written in the last part of this note, I'll put them later here, when I understand them)

5.1 Theory and Experiment in Gravitational Physics by Will

(I'll add it here later, a very good book!)

5.2 Does GR Has a Meaning in Particular Cases?

5.2.1 Is the Sky is Stable in GR?

(??? check??)

5.2.2 Is the principle of equivalence violated when a charged particle moves?

(пока тут, пока не знаю, куда это ставить. мб отвечу потом на этот вопрос)

The old and much-debated question, whether s charge in uniform acceleration radiates, is discussed in detail and its implications are pointed out. Many contradietory statements in the literature are analyzed and those answers which can be given on the basis of the standard classical Maxwell-Lorentz equations are presented. Although the questions that remain open are difficult and fundamental, some simple results ean be proved: Contrary to elaims in some standard sources (Pauli, von Laue), a charge in uniform acceleration does radiate. The radiation rate is finite, invariant, and constant in time in the instantaneous rest system. There is no contradiction of this fact with either the prineiple of conservation of energy or the prineiple of equivalence. Finally, the group of conformal transformations is found to be not physically meaningful.

1. WHAT IS THE PROBLEM by Thomas Fulton and Fritz Rohrlich Classical Radiation from a Uniformly Accelerated Charge

Just fifty years ago, in 1909, Born published a paper (1) on the relativistic motion of a uniformly accelerated charge [1] (hyperbolic motion). In particular, he derived the electromagnetic fields associated with this motion. On the basis of these solutions of the Maxwell-Lorentz equations, Pauli then gave a simple argument (2), according to which such a charge does not produce a wave field and correspondingly cannot radiate. Von Laue too mentions that there is no radiation (3). This conclusion seems to have been confirmed by the discovery that the Maxwell equations are invariant under the group of conformal transformations (4), of which the Lorentz transformations are a subgroup. Since the conformal group contains in particular the transformation from rest to uniformly accelerated motion, it is concluded that such a motion cannot be associated with the (irreversible) emission of radiation. The defining equation for a conformal transformation yields the immediate result that the conventional form of the radiation reaction vanishes identically, and since it vanishes, it seems that the radiation must vanish as well.

Apparently, quite independent of Born's work, Schott also derived the fields * Supported in part by the National Science Foundation and the U. S. Air Force through the OSR. + Visiting professor 1958-59 from the State University of Iowa, Iowa City, Iowa. The precise definition of this term is given at the beginning of Section 2.

of a charge in hyperbolic motion (5) and concluded from his solutions that there is radiation (6). His work was discussed in further detail by Milner (γ). Neither Schott nor Milner ever refers to Born's paper. Nor does Pauli mention Schott's conclusion that there is radiation.

More recently, Drukey (8) published a short note, presenting arguments in favor of radiation and apparently disproving previous arguments to the contrary. Finally, Bondi and Gold (9) have asserted that the Born solution did not treat the singularity of the potentials on the light cone correctly. They eliminated this difficulty by adding a δ-function to Born's solution, and they claimed that this δ-function provides proof for the radiation from a uniformly accelerated charge. They also point out that the fact that there is radiation leads to a contradiction with the principle of equivalence, because the emission of radiation would permit an observer to distinguish between the free fall of a charge in a gravitational field and its motion in field free surroundings. They resolve this contradiction by arguing that hyperbolic motion requires an infinite homogeneous gravitational field and that such a field does not exist in nature.

As the above brief sketch indicates, the problem of radiation from a uniformly accelerated charge is a very controversial one. Clearly, the difficulties do not lie in the computations involved, which are elementary, but rather in the understanding of the physical meaning implied

in the equations, their solutions, and the conditions imposed on these solutions. Nor have many of the basic questions been satisfactorily answered, since the literature of the subject contains many discursive and qualitative, rather than rigorous and detailed arguments. Some of the unsettled questions are: Is Pauli's proof in error? If it is correct and if therefore uniformly accelerated charges do not radiate, where does the proof of the well-known radiation formula, found in the standard textbooks, break down? The standard formula implies that a charge will radiate whenever its acceleration does not vanish. On the other hand, if Pauli's proof is incorrect, where do the arguments based on conformal invariance break down? Can radiation be emitted when the radiation reaction vanishes? How can energy be conserved if the radiation reaction is zero, and the work done by the external field equals the change of the kinetic energy of the particle? In connection with gravitation such questions arise as: "Do charged and neutral particles fall equally fast in a uniform gravitational field?" "Is there a contradiction between classical electromagnetic theory and the principle of equivalence in this case?"

We see that this problem involves basic concepts and principles both of classical relativistie electrodynamies and of general relativity.

The purpose of the present paper is to answer the questions raised above within the framework of generally accepted theory. Thus, we plan to prove such statements as the following:

If the Maxwell-Lorentz equations are taken to be valid, and we consider re tarded potentials only, and if radiation is defined in the usual Lorentz invariant manner, a uniformly accelerated charge radiates at a constant nonvanishing rate."

Or: "If one accepts the equations of motion based on the Abraham four-vector or on Dirac's classical electrodynamics, the radiation reaction vanishes, but energy is still conserved."

We furthermore point out the theoretical framework necessary in order to answer the various questions raised in the literature, and we show that within one of the possible known theories a consistent treatment of the problem can always be given and all apparent contradictions can be removed. Thereby we do not necessarily mean to advocate any single one of the theories of the classical electron. At the same time we do not of course question the validity of Maxwell's equations in the classical domain.

Our emphasis will be on rigorous calculations based on standard classical electrodynamies and Lorentz invariance, rather than on discursive arguments. In the following sections we consider first the consequences of the MaxwellLorentz equations (Sections 2 and 3), then the relativistic equations of motion for a charge (Section 4), and finally the problems raised by the theory of gravitation (Section 5). In the last section we summarize our conclusions and suggest directions for future work.

2. POTENTIALS AND FIELD STRENGTHS

A particle is said to be in uniformly accelerated motion when it experiences constant acceleration $[a'^{\mu} = (0, \mathbf{a}'), \mathbf{a}' = \text{const.}]$ in its instantaneous rest system S' $[v'^{\mu} = (1, 0, 0, 0)]$[2] Such motion can be produced by a constant, homogeneous gravitational field or, when the particle is charged, by a constant, homogeneous electric field. (See Eq. (4.4) below.)

The assumption that such a motion is possible for a finite period of time implies that the field equations (i. e., the Maxwell-Lorentz equations) and the equation of motion of the charged particle, when solved simultaneously, have this motion as a solution. Since the simultaneous solution of these equations is difficult, we assume the motion in question to be a possible solution and verify thisassumption by studying the field equations and the equations of motion separately.

Let S be an inertial system in which the motion of a particle is described by $\mathbf{r}(t)$ and $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}/dt = \dot{\mathbf{r}}$. If this particle is to be uniformly accelerated according to the above definition, then

$$\left(1 - v^2\right) \ddot{\mathbf{v}} + 3\dot{\mathbf{v}}(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}) = 0$$

[2] We use the metric $g^{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$ for $\mu = \nu = 0, 1, 2, 3$; and $g^{\mu\nu} = 0$ for $\mu \neq \nu$. We put $c = 1$ but otherwise use Gaussian units, since we shall be concerned primarily with fields, not with field equations.

is equivalent to this definition (4). As was shown by Hill, the solution of this equation is exactly the four-dimensional group of conformal transformations in space-time. Let a' be in the direction of the z-axis, $\hat{z}$, and choose S such that $+v$ or $-v$ will always be in the direction $\hat{\mathbf{z}}$. Then the only nontrivial case of uniform acceleration ($a' \neq 0$) is that of hyperbolic motion. Without loss of generality we can assume that at $t = 0$ the particle is at $z = \alpha > 0$. Then

$$z = \sqrt{\alpha^2 + t^2}, \quad \mathbf{v} = \frac{t}{\sqrt{\alpha^2 + t^2}}\hat{\mathbf{z}},$$

and one easily verifies that $|\mathrm{a}'| = 1/\alpha$. (See Eq. (4.4) below.) Given the motion (2.2) of a charge e, the electromagnetic fields produced by it are determined by the Maxwell-Lorentz equations. Their formal solutions are the Liénard-Wiechert potentials

$$A_\mu{}^P = e\frac{v_\mu^Q}{R^v v_\nu{}^Q}; \quad R^\mu = (t - t_Q, \mathrm{r} - \mathrm{r}_Q),$$

where $P : (t, \mathbf{r})$ refers to the observation event (field point), $Q : (t_Q, \mathrm{r}_q)$ to the emission event (source point), and $v_\mu{}^\circ$ is the "retarded" four velocity. The observation time is related to the emission time by the causality condition

$$t - t_Q = R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q| > 0$$

which is implied in (2.3) and which assures that (2.3) refers to the retarded potentials.

Because of the equation of motion for the particle, r_Q is a function of t_Q, and because of the causality condition (2.4), t_Q is an implicit function of P. One can therefore express $A_\mu{}^P$ explicitly as a funetion of r and t only. (In the following we shall omit the superscript P.) The motion (2.2) then gives

$$\phi^B(\rho, z, t) = e\frac{z\left(\rho^2 + z^2 + \alpha^2 - t^2\right) - \xi t}{\xi\left(z^2 - t^2\right)},$$

$$A_\rho{}^B = A_\phi{}^B = 0; \quad A_z{}^B(\rho, z, t) = e\frac{t\left(\rho^2 + z^2 + \alpha^2 - t^2\right) - \xi z}{\xi\left(z^2 - t^2\right)},$$

$$\xi = +\left[\left(\alpha^2 + t^2 - \rho^2 - z^2\right)^2 + 4\alpha^2\rho^2\right]^{1/2},$$

where we have used cylindrical coordinates ρ, ϕ, z. The field strengths follow by differentiation:

$$\begin{aligned}
&E_\phi{}^B = 0,\\
&E_z{}^B = -e \cdot 4\alpha^2\left(\alpha^2 + t^2 + \rho^2 - z^2\right)/\xi^3,\\
&E_p{}^B = e \cdot 8\alpha^2\rho z/\xi^3,\\
&H_p{}^B = H_z{}^B = 0,\\
&H_\phi{}^B = e \cdot 8\alpha^2\rho t/\xi^3.
\end{aligned}$$

The causality condition (2.4) is always appended to the Liénard-Wiechert potentials (2.3). However, it is lost in the Eqs. (2.5). The reason for this is that R has the form:

$$R = 1/2\left[z\xi - t\left(\alpha^2 + t^2 + \rho^2 - z^2\right)\right] / \left(z^2 - t^2\right)$$

and there is no restriction on z, ρ, t which would prevent R from becoming negative. Since $R > 0 (R < 0)$ is equivalent to $z + t > 0 (z + t < 0)$, we must add to the solutions (2.5) and

(2.6) the causality condition that these solutions are restricted to $z+t>0$. That the causality condition is equivalent to the statement $z+t>0$ can be seen from Fig. 1. We have plotted the geodesic of the particle in this diagram. The intersection of a typical future light cone with the $z-t$ plane is also illustrated. It is clear from Fig. 1 that the family of all future light cones must lie in the region $z+t>0$.

This restriction to $z+t>0$ was apparently overlooked by Born, or at least was explicitly stated first by Schott. The results (2.5) and (2.6) without the restriction are thus referred to as the Born solution and have been labeled accordingly. The Schott solution is identical with the Born solution except for the restriction to the space-time region $z+t>0$.

The Born solution therefore does not describe the fields of our problem. Rather, it describes the retarded fields of a particle of charge e performing the motion $z=\sqrt{\alpha^2+t^2}$ (as in our problem) for $z+t>0$, together with the advanced fields of a particle of charge $-e$ performing the motion $z=-\sqrt{\alpha^2+t^2}$ for $z+t<0$. This point was discussed by Milner (γ).

It should be noted that the causality condition restricts our solutions to the open region $z+t>0$ rather than the closed region $z+t\geqq 0$. (Note that fields on $z+t=0$ would have to have been emitted at a time $t=-\infty$ when the charge was moving on the light cone at $z=+\infty$. A particle of finite mass can only approach the light cone but cannot reach it. Another way of seeing this exclusion of $z+t=0$ is to note that, although the Maxwell-Lorentz equations for $F^{\mu v}$ as given by (2.6) are satisfied in the open region $z+t>0$, they are not satisfied for $z+t=0$ if (2.6) is assumed to be valid in the closed region $z+t\geq 0$ (with $F^{\mu\nu}=0$ in $z+t<0$).

Bondi and Gold (9) required that the field equations be satisfied everywhere, and modified the Born solutions by using a limiting process. Their results can be obtained much more easily by adding an undetermined function to the Born solution such that (2.6) holds for $z+t>0; F^{\mu\nu}=0$ for $z+t<0$, and the modified solution satisfies Maxwell's equations also for $z+t=0$. One then finds that such a modification is unique and yields

$$
\begin{gathered}
E_\phi=0, \quad H_\rho=H_z=0, \\
E_p=E_\rho{}^B\theta(z+t)+\frac{2e\rho}{\rho^2+\alpha^2}\delta(z+t), \\
E_z=E_z{}^B\theta(z+t), \\
H_\phi=H_\phi{}^B\theta(z+t)-\frac{2e\rho}{\rho^2+\alpha^2}\delta(z+t).
\end{gathered}
$$

The function $\theta(x)$ is defined by

$$
\theta(x)=\begin{array}{c} 1 \text{ for } x^0>0 \\ 1/2 \text{ for } x^0=0 \\ 0 \text{ for } x^0<0 \end{array}
$$

and δ is the Dirac delta-function. The result (2.7) agrees with that of Bondi and Gold, except for a sign in E_p (which seems to be a misprint) and the absence of the θ-funetion in their work (which modifies the fields at $z+t=0$.) The fields (2.7) satisfy the Maxwell-Lorentz equations everywhere and contain the causality condition (2.4) implicitly.

The Bondi-Gold field strengths (2.7) can be derived from potentials which are suitable modifications of (2.5), viz.,

$$
\begin{gathered}
\phi=\phi^B\theta(z+t)-e\ln\left(\frac{r^2+\alpha^2}{\alpha^2}\right)\delta(z+t), \\
A_\rho=A_\phi=0, A_z=A_z^B\theta(z+t)+e\ln\left(\frac{r^2+\alpha^2}{\alpha^2}\right)\delta(z+t),
\end{gathered}
$$

and which differ from the Liénard-Wiechert potentials. The Liénard-Wiechert potentials are not valid in our case at $z+t=0$, because their derivation assumes that the source is not

at infinity. On the other hand, as mentioned above, the fields (2.7) and potentials (2.8) for $z+t=0$ arise from the time $t=-\infty$ when the charge was at $z=+\infty$ (see Fig. 1).

Actually, a hyperbolic motion should be regarded as asymptotic in the sense that the times $t_Q=\pm\infty$ can only be approached but never reached. This corresponds to restricting the domain of validity of the fields (2.6) to the region $z+t>0$. In this way, one avoids the unphysical event, $z_Q=+\infty, t_Q=-\infty$, where a particle of finite mass has exactly the velocity of light, and is being decelerated. Admittedly, this is possible within the framework of Maxwell's equations, but in view of the fact that eventually the motion is also to satisfy certain relativistic equations of motion, this event must be excluded. In any case, we shall see that the question of whether there is radiation during the hyperbolic motion has nothing to do with whether (2.6) or (2.7) is adopted. For these reasons we feel that the modification suggested by Bondi and Gold is not physically meaningful, and any conclusions drawn from it do not necessarily apply to emission times $t\neq-\infty$.

What are the fields seen by an observer in the inertial frame which is the instantaneous rest frame of the charge? We note that at time $t=0, \mathbf{v}=0$ in S so that S is the rest system of the charge at a particular instant. The fields present at that instant, however, are the fields produced before the charge reached the position $z=\alpha$ and are therefore much more complicated than a pure Coulomb field. Let S' be another inertial system which moves along the z-axis with velocity $\nabla(v<1)$ relative to S. Since hyperbolic motion involves all velocities $\nabla(v<1)$, there will be an instant t in S for which S' is the rest system. A Lorentz transformation to that system shows that this instant occurs at $t'=0$ and that then the charge is at $z'=\alpha$. One easily verifies that the complete hyperbolic motion remains invariant. In particular, the fields in the frame S' satisfy the relation

$$F'_{\mu\nu}(\rho'\phi'z't') = F_{\mu\nu}(\rho'\phi'z't')$$

i.e., they are form invariant in any inertial frame. Now the Born solution is obtained from the Maxwell-Lorentz equations with out the restriction of the causality condition. Therefore, since these equations are invariant under conformal transformations, the Born solution must also be so invariant. The form invariance of $F^{\mu v}$ could therefore have been anticipated. However, the Born solution is a sum of retarded (for $z+t>0$) and advanced (for $z+t<0$) solutions for two charges, as explained above, and only this particular combination remains invariant under conformal transformations. The retarded fields alone (Schott solution) remain invariant only under Lorentz transformations. The causality condition therefore restricts the symmetry of the fields to this proper subgroup of the conformal transformations. This fact seems to indicate that-at least within the framework of special relativity-conformal transformations do not play a fundamental role in physics. (A more detailed discussion of this point is given in the Appendix.)

3. DOES A UNIFORMLY ACCELERATED CHARGE RADIATE?

In order to answer this question it is necessary first to define what we mean by radiation. If one thinks in terms of quantum mechanics, a photon, when emitted, can be registered by a counter which is located at a large distance from the source. Clearly, such an effect can be seen by every observer. For this reason it is natural to try to define radiation in classical mechanies in a way that is invariant at least for all inertial observers. Furthermore, this definition must be such that it reduces to the conventional definition in terms of the Poynting vector in the rest system of the source. Let

$$4\pi T^{\mu\nu} = -F^{\mu\lambda}F^{\nu}_{\lambda} + 1/4 g^{\mu\nu}F^{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma}$$

be the energy-momentum tensor of the radiation field, such that $T^{k0}=-S_k$ where S $=(S_1,S_2,S_3)$ is the Poynting vector. [3] Let ${v_0}^{\mu}$ as before be the velocity four-vector of the source

of radiation at the instant when radiation is emitted (retarded velocity). Let n^μ be a space-like unit vector (orthogonal to ${v_Q}^\mu$). Then we adopt the following definition (10) for the energy flux density emitted at the event Q in a direction determined by n^m:

$$I = T^{\mu\nu} v_\mu^Q n_v$$

In the inertial system S_0 where $n^\mu = (0, \hat{\mathbf{n}})$ and ${v_0}^\mu = (1, 0, 0, 0)$ (i.e., S_0 is the rest system at the instant of emission),

$$I = \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

At each instant, the space part of the light cone is a light-sphere whose radius R will be large for large times and on whose two-dimensional surface element $d^2\sigma$ (with normal f) I is given by (3.2). ' Poynting's theorem, i. e., the fourth component of the conservation law $\partial_\mu T^{\mu v} = 0$ holds not only for the Sehott solution, but-at least formally - also for the Bondi-Gold modification (2.7), although its verification involves squares of s-funetions. Poynting's theorem therefore does not provide an argument against the Bondi-Gold fields.

The total rate of radiation energy emitted at time t_Q is found by integrating invariantly over the surface of the light sphere in the limit of infinite $R = t - t_Q$ for a fixed emission time t_Q

$$R = \int T^{\mu\nu} v_\mu^Q n_\nu d^2\sigma \quad (\text{ limit } R \to \infty, \text{ fixed } t_Q \text{ }).$$

From (3.2), we have in the inertial frame S_Q

$$R = \int \mathrm{S} \cdot \hat{\mathbf{n}} R^2 d\Omega \quad (\text{ limit } R \to \infty, \text{ fixed } t_0)$$

If this limit is finite we say that there is radiation. Otherwise, i. e., when $R \to 0$ as $R \to \infty$, no radiation is emitted.

Two remarks should be made in connection with (3.4). One remark refers to the interesting fact that (3.4) is valid also in any other inertial system, provided that a factor dt/dt_Q is inserted in the integral. This factor is to be computed from the causality condition (2.4) and has the physical meaning of making R an energy rate, dW/dt_Q, relative to the source time t_Q. It is not obvious that dW/dt_Q is a constant equal to Q for hyperbolic motion, since dW is the timecomponent of a four-vector. However, the calculation below will prove this fact. The other remark concerns the important point that R is defined as a limit for fixed t_Q, i. e., both R and t must approach ∞ so that the causality condition (2.4) continues to hold. With this end in mind, t is first eliminated by the use of (2.4) and then the limit $R \to \infty$ is taken.

It is worth emphasizing that Q in (3.3) is an invariant despite the fact that the integration extends over a two-dimensional spherical surface. The reason is that this spherical surface is the light sphere, which is an invariant. Note, however, that Q is not necessarily a constant, but a function of the source point Q, i.e., of the proper time, τ_Q. As we shall see presently, in hyperbolic motion R actually is a constant.

The radiation rate Ω can be computed quite generally for any given source point Q of given $v^\mu(\tau)$, using the corresponding Liénard-Wiechert potentials. One finds (10)

$$Q = 2/3 e^2 a_\mu a^\mu$$

where ${a_Q}^\mu = d{v_Q}^\mu/d\tau$ is the (retarded) acceleration four-vector of the source. Equation (3.5) is clearly an invariant.

In our particular case it is of some interest to carry out this calculation explicitly. The fields (2.6) yield

$$\mathrm{S} = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \frac{1}{4\pi} H_\phi \left(E_\rho \hat{\mathbf{z}} - E_z \hat{\hat{g}} \right)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{\bar{R}}; \quad \mathbf{R} = \rho\hat{\mathbf{Q}} + \left(z - \sqrt{\alpha^2 + t_Q^2}\right)\hat{\mathbf{z}};$$

$$\frac{dt}{dt_Q} = 1 + \frac{dR}{dt_Q} = 1 - \mathbf{v}_Q \cdot \hat{\mathbf{z}} \cos\theta = 1 - \mathbf{v}_Q \cdot \hat{\mathbf{n}}; \quad \cos\theta = \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

After substitution, one finds

$$I = \frac{e^2\alpha^4}{4\pi} \cdot \frac{\sin^2\theta/R^2}{\left(\sqrt{\alpha^2 + t_Q^2 - t_Q\cos\theta}\right)^6}$$

Integration gives

$$R = \frac{2}{3}e^2\dot{\mathbf{v}}_Q^2 \frac{1}{\left[1 - (\mathbf{v}_Q \cdot \hat{\mathbf{z}})^2\right]^3}$$

Equations (3.6) and (3.7) are just the formulas which appear in standard textbooks on electrodynamics (11). Using (2.2),

$$\dot{v}_Q = \frac{\alpha^2}{\left(\alpha^2 + t_Q^2\right)^{3/2}}, \quad v_Q \cdot \hat{\mathbf{z}} = \frac{t_Q}{\sqrt{\alpha^2 + t_Q^2}},$$

one finds

$$U = \frac{2}{3}\frac{e^2}{\alpha^2}$$

which, of course, is (3.5) for our special case. Thus, R is independent of Q and always has the same value as in the rest system.

We learn from this discussion that a charge in uniformly accelerated motion emits radiation at a constant rate (3.8) (in terms of retarded time) and with a radiation pattern given by (3.6).

Several questions can now be answered. First, it is clear that, according to our definition of radiation, every inertial observer will see exactly the same radiation intensity and same radiation rate. Radiation cannot be transformed away by a Lorentz transformation.

Secondly, it is clear that the radiation rate Q can be computed for any arbitrary event on the hyperbolic world line. Consequently, the fields on $z + t = 0$ never enter this consideration. This means, in particular, that the result (3.8), $\ldots \neq 0$ follows from the Born solution in the region $z + t > 0$ irrespective of the value of this solution in the region $z + t \leq 0$. According to Bondi and Gold ((9), radiation is emitted at $t = -\infty$ (producing the fields on $z + t = 0$); but nothing is proven concerning radiation emission at any other time. Our results prove that radiation fields are produced at every instant throughout the motion. Further, as we have already discussed, there is no physical meaning in the fields on $z + t = 0$ or in hyperbolic motion at $t = -\infty$.

Thirdly, it has now been shown by explicit calculation that Pauli's argument cannot be valid. Indeed, Pauli argues that since $\mathbf{H} = 0$ at $t = 0$, "hyperbolic motion constitutes a special case, for which there is no formation of a wave zone nor any corresponding radiation)2).." We note, however, that in this statement a limit to large distances ($R \to \infty$) is implied at a fixed time ($t = 0$). This limit is not in accordance with the definition of radiation. Following this definition, Eq. (3.3), the limit $R \to \infty$ is to be taken for a fixed source point (t_0 fixed), implying a limit $t \to \infty$ as well. It can easily be seen that the two limiting procedures do not give the same result. Pauli's limit of SR^2 vanishes for any fixed time t; for the time $t = 0$, where $S = 0$, it is simply a special case where this limit vanishes trivially. On the other hand, the limit of SR^2 does not vanish when t_0 is held fixed. We conclude that the fact, that $\mathbf{H} = 0$ at $t = 0$, is unusual for accelerated motion and of some interest, but it has nothing to do with the presence or absence of radiation.

4. HOW CAN ENERGY BE CONSERVED?

The question of energy conservation involves the kinetic energy of the radiating charge. It is therefore linked in an essential way to the equation of motion of this charge. Everything said so far was independent of the particular equation of motion which an accelerated relativistic charged particle satisfies.

At this point, however, we are looking in vain for a generally accepted equation which, like Maxwell's equations, has been confirmed over and over again. In fact, only two different approaches to the problem have been studied in detail, both of which lead to the same equation of motion. Neither approach is very satisfactory. One is the expansion method of a finite sized electron in which the first two terms lead to the electromagnetic self-energy and the Abraham radiation reaction four vector. The other follows from Dirac's classical electrodynamics (12). Both lead to the equation of motion:

$$m\frac{dv^\mu}{d\tau} = F^\mu_{\text{ext}} + \Gamma^\mu$$
$$\Gamma^\mu = \frac{2}{3}e^2\left(\frac{d^2v^\mu}{d\tau^2} - v^\mu\frac{dv\lambda}{d\tau}\frac{dv^\lambda}{d\tau}\right)$$

If the externally applied force is electromagnetic, then

$$F^{\mu^\mu}_{\text{ext}} = eF^{\mu\nu}v_\nu$$

is the Lorentz force. The important point about Eq. (4.1) is that we do not need to accept it. But if we do not accept it we cannot answer any question concerning energy conservation. On the other hand, if we do accept it, we are also forced to accept all the immediate consequences of this equation.

Let us therefore assume for the moment that (4.1) describes correctly the motion of a moving charge. Then we notice first that for uniformly accelerated motion $\Gamma^\mu = 0$. [Proof: The four-vector $v^\mu = dx^\mu/d\tau = (\gamma, 0, 0, \gamma v_z) = \left[\left(\sqrt{\alpha^2 + t^2}/\alpha\right), 0, 0, t/\alpha\right)\right]$ upon differentiation leads to $a^\mu = dv''/d\tau = \gamma dv^\mu/dt = \left[t/\alpha^2, 0, 0, \left(\sqrt{\alpha^2 + t^2}/\alpha^2\right)\right]$. Thus,

$$a_\mu a^\mu = \frac{1}{\alpha^2}.$$

One more differentiation yields $d^2v^\mu/d\tau^2 = v''/\alpha^2 = v^\mu a_\lambda a^\lambda$, which establishes $\Gamma^\mu = 0$ in the inertial system S. Therefore $\Gamma^\mu = 0$ in any system.]

The physical meaning of $\Gamma^\mu = 0$ is that the force of radiation reaction vanishes. Thus, the equation of motion (4.1) simply becomes

$$m\frac{dv^\omega}{d\tau} = F^\mu_{\text{ext}}$$

The covariant force F^ψ is related to the (Newtonian) three vector force $\mathbf{F}$ by

$$F^\mu = \gamma(\mathbf{F}\cdot\nabla, \mathbf{F})$$

since $F^\mu v_\mu = 0$. Therefore (4.1)′ yields

$$m\frac{d(\gamma v)}{dt} = \mathrm{F}_{\text{ext}}$$

and with (2.2)

$$\mathrm{F}_{\text{uxt}} = m\frac{1}{\alpha}\hat{\mathbf{z}}$$

which proves that the (Newtonian) force which produces uniform acceleration is a constant force. The acceleration it produces is

$$\mathbf{a} = \frac{d(\gamma \boldsymbol{v})}{dt} = \frac{1}{\alpha}\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{a}'$$

Thus, the three-vector acceleration in S is constant and equal to the space-part of the acceleration four-vector in the instantaneous rest system S', since $a'^{\mu} = (0, \mathbf{a}')$

This result permits us to define uniform acceleration in the inertial system S as that motion which is characterized by a constant Newtonian force $\mathbf{F}_{\text{ext}} = md(\gamma v)/dt$. This definition is completely equivalent to the previously given definition (see the beginning of Section 2) only for one-dimensional motion.

We now turn to the discussion of energy conservation which is based on the zero-component of Eq. $(4.1)'$ and which will establish that a vanishing radiation reaction does not necessarily imply "no radiation."

Let $T = m(\gamma - 1)$ be the kinetic energy of the particle. Then the zero-component of $(4.1)'$ is

$$\frac{dT}{dr} = F^0_{\text{ext}} = \frac{dW_{\text{ext}}}{d\tau}$$

Therefore, the rate of work done by the external force is exactly equal to the increase in kinetic energy of the particle, as we know it to be the case, for example, for a neutral particle in a static gravitational field.

This conclusion seems to make the original question even more demanding: What supplies the energy which the particle radiates? Does (4.5) not prove that there cannot be radiation and that the usual notion is valid, viz., that no radiation reaction means no radiation? Γ^0 is the rate of work done by the radiation reaction. Consider Γ^0 in detail. In general (i.e., when one does not assume that the acceleration is uniform),

$$\Gamma^0 = \frac{2}{3}e^2\left(\frac{da^0}{d\tau} - \gamma a_\mu a^\mu\right)$$

$$\Gamma^0 = \frac{2}{3}e^2\frac{da^0}{d\tau} - \gamma\Theta.$$

Q is the radiation rate (3.5) and is positive since a^μ is a space-like vector. We divide (4.1) by γ (note that $dt = \gamma d\tau$) and find

$$\frac{dT}{dt} - \left(\frac{dQ}{dt} - \Omega\right) = \frac{dW_{\text{ext}}}{dt}$$

where

$$Q = 3/3e^2a^0$$

Thus, the equation of motion (4.1) leads to the energy conservation equation (4.7) for any motion. This equation has the following physical meaning: The rate of work done by the external force equals the rate of increase in kinetic energy minus the rate of work done by the radiation reaction. The latter consists of two parts, a reversible rate dQ/dt which can be positive or negative, and an irreversible rate $-Q$ which is never positive. The sum $dQ/dt - Q$ in general does not vanish. Since Q is exactly the radiation rate, one sees that the energy lost in the form of radiation is entirely accounted for by part of the work done by the radiation reaction. On the other hand, the remaining part of this work also supplies an additional energy Q which may be positive or negative. Apparently, Q is to be interpreted as part of the internal energy of the charged particle. Like its kinetic energy it can be increased or decreased. Q has

been named acceleration energy by Schott (5), since Q increases (decreases) when the velocity increases (decreases).

When the motion is periodic or bounded and one averages over sufficiently large times, the term dQ/dt vanishes. Thus, under these conditions, Q represents a fluctuating term and over long time intervals all the work of the radiation reaction goes into radiation. The same is true if one considers the energy balance between an initial and a final state of motion which are equal. It is from these cases that the idea: "no radiation reaction means no radiation" arose. Most problems of interest are of this type, like classical charged harmonic oscillators or betatron orbits. Hyperbolic motion is not of this type. In general, however, there is always an instantaneous acceleration energy as a consequence of the equations of motion (4.1).

In the case of uniform acceleration, Γ^0 is zero, i.e., the total work done by the radiation reaction force vanishes. Therefore

$$R = \frac{dQ}{dt} > 0.$$

Eq. (4.9) can easily be verified directly. The internal energy of the electron, $m - Q$, therefore decreases while energy is being radiated.

This result seems to lead to a very unphysical picture: The accelerated electron decreases its "internal energy," transforming it into radiation. Does this mean that the rest mass of the electron decreases? An observer for whom the electron is momentarily at rest ($\mathbf{v} = 0$) will also find $a^0 = \gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0$ and therefore $Q = 0$. Thus we obtain the comforting result that the change in internal energy of the particle does not affect its rest mass. Rather, the radiation energy is compensated by a decrease of that part of the field surrounding the charge, which does not escape to infinity (in the form of radiation) and which does not contribute to the (electromagnetic) mass of the particle (1s).

No matter how one interprets the conclusions from (4.9), there is no contradiction with the principle of conservation of energy. If the emerging physical picture seems unsatisfactory, one can reject the equations of motion (4.1). This is a possible alternative, but then the question of energy conservation simply cannot be answered, because the equations of motion are unknown. It would be entirely inconsistent to accept the vanishing radiation reaction, but to reject the concept of acceleration energy, as long as both concepts derive from the same equation.

A third alternative, in view of the generality of (4.7), is to exclude all cases where the average $\langle dQ/dt \rangle_{\text{av}} \neq 0$. This means that a motion which leads to $\langle dQ/dt \rangle_{\text{av}} \neq 0$ is then a priori excluded as unphysical. In that case hyperbolic motion of a charged particle is not possible. Such a restriction seems rather artificial and *adhoc*, and one may prefer to discard Eq. (4.1).

5. DOES RADIATION IN HYPERBOLIC MOTION CONTRADICT THE PRINCIPLE OF EQUIVALENCE?

From the last section we saw that if one accepts the equations of motion (4.1), one concludes that there is no radiation reaction, i.e., $\Gamma^\mu = 0$. The equation of motion for a charged particle in hyperbolic motion therefore differs in no way from that for a neutral particle, when both are accelerated by nonelectromagnetic forces. We conclude therefore that in a homogeneous constant gravitational field a neutral and a charged particle will follow the same trajectory with the same time dependence. In less precise but more picturesque language we could say, "If Galileo had dropped a neutron and a proton from the leaning tower of Pisa they would have fallen equally fast." According to (4.1), a charged and a neutral particle in a homogeneous gravitational field behave exactly alike, except for the emission of radiation from the charged particle.

This, however, is just the point where the principle of equivalence enters. A particle which is falling freely in a homogeneous gravitational field should appear to an observer who is falling with it, like a particle at rest in an inertial frame (field free surroundings). If we consider a

neutral particle falling in a homogeneous gravitational field, this is indeed what happens. But when the particle is charged, the observer can establish the presence of a gravitational field by looking for radiation. If he observes radiation from the charge, he knows that he and the charge are falling in a gravitational field; if he observes no radiation, he knows that he and the particle are in a force free region of space.

The solution to this apparent difficulty is to be found by considering an actual measurement of radiation, using our definition in Section 3. Radiation is defined by the behavior of the fields in the limit of large distance from the source. Correspondingly, an observer who wants to detect radiation cannot do so in the neighborhood of the particle's geodesic. Rather, he must be at a large distance from it, where gravitational fields have different values. The principle of equivalence, however, is a locally valid principle, referring to the geodesic of the particle, whereas the discussion above shows that any observation of radiation is not a local observation. This point is implied in the related argument given by Bondi and Gold (9) who first discussed this difficulty.

Since all our considerations here refer to the framework of the special theory of relativity and, in particular, require the existence of inertial coordinate systems, we are forced to consider the principle of equivalence from a similar point of view. Whatever gravitational field we introduce for the purpose of comparing it with an inertial field, we must be sure to have a distribution of distant stars which define our inertial systems. This means in particular that any homogeneous gravitational field is necessarily of finite extent, imbedded as is were, in an inertial coordinate system. We remark parenthetically that an infinite homogeneous gravitational field does not exist within the framework of general relativity either. The nonexistence of infinite homogeneous gravitational fields assures that the observation of radiation (observer at large distance from the source) takes place outside the homogeneous part of the gravitational field.

To clarify the point concerning the principle of equivalence further, consider a particle in a gravitational field. Whether or not it will radiate depends solely on its acceleration relative to an inertial system S. If the gravitational field is at rest in S, and if the particle is at rest in the gravitational field, there will be no radiation, because we have not only $\Gamma^\mu = 0$ but also $a^\mu = 0$, so that $Q = 0$ and $Q = 0$. On the other hand, if the particle falls freely in the gravitational field (which is at rest relative to S) then there will be radiation. Such a consideration shows that these two cases are physically not equivalent. However, since radiation cannot be observed locally, they are equivalent locally. For gravitation theory only local equivalence is important. Once again, we could paraphrase the above discussion in less precise language by saying: "An electron which falls freely in a uniform gravitational field embedded in an inertial frame will radiate, and one which sits at rest on a table in the same field will not radiate; and these two statements do not contradict the principle of equivalence." 6. WHAT REMAINS TO BE DONE? We can briefly summarize our conciusions as follows: First, within the framework of the Maxwell-Lorentz equations, a charge in uniformly accelerated motion radiates at a constant and finite rate. Secondly, this radiation (like any radiation according to our definition) is Lorentz invariant but not conformally invariant. Thirdly, there is no radiation reaction, but there is energy conservation, provided one accepts some equation of motion (Abraham-Dirac); one is then also forced to accept the physical picture emerging from this equation. Otherwise, i.e., without accepting an equation of motion no answer concerning energy conservation or radiation reaction can be given. Finally, there is no contradiction with the principle of equivalence.

An experimental check of the validity of the equation of motion, or rather its consequences for the conservation of energy, is not feasible, since the ratio of radiated power to rate of gain of kinetic energy by a uniformly accelerated particle is negligible unless energy increments of the order of the rest energy of the particle are imparted to it in distances of the order of its classical radius (14). The question of direct detection of the radiation from a uniformly accelerated beam of charged particles (say, by looking with a detector at the part of a bounded trajectory

where uniform acceleration takes place) is a more difficult one to discuss and lies beyond the scope of this paper.

The interesting questions at this point are the open questions. If one accepts the equation of motion (4.1) as correct, what is the physical meaning of the acceleration energy and the apparently arbitrarily large depletion of the charge's internal energy by radiation in the course of its motion? If one does not accept this equation of motion, what is the correct equation and the correct radiation reaction of a classical charged particle?

The above questions are restricted to classical physics and to the framework of the special theory of relativity. One can extend the scope of the problem in two directions, toward quantum electrodynamics and toward general relativity.

The coupled electromagnetic field and charged particle equations, though they lead by no means to a consistent theory in quantum electrodynamics, at least give correct answers in perturbation theory. It would therefore be interesting to study the problem of uniform acceleration in quantum electrodynamics, to see how the energy balance comes about.

The extension to general relativity involves the diffieult questions of the relationship of metric and electrodynamics. What does radiation mean within this framework? Does a finite curvature of space modify the above problems in an essential way? In particular, could it lead to an exclusion of all motions with $dQ/dt \neq 0$ in a natural way? What does energy conservation mean in this framework?

Thus, we see that the questions that were answered all seem to have been very simple, but the questions that remain all seem very difficult.

We gratefully acknowledge stimulating discussions with our colleagues at Johns Hopkins and elsewhere. APPENDIX The conformal transformation of interest is

$$x^{\mu'} = \lambda^2 \left(x^\mu - s^2 a^\mu\right),$$
$$\lambda^2 = \left[1 - 2a^\mu x_\mu + s^2 a^\mu a_\mu\right]^{-1},$$

where $s^2 = x_\mu x^n$. This transformation satisfies $s'^2 m\lambda^2 s^2$ and has the nonrelativistic limit $(c \to \infty, \beta \to 0, \beta c^2 \to g/2)$

$$t' = t; \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} + 1/2\mathbf{g}t^2$$

where we defined $a'' = (0, \beta), |\beta| = \beta, |\mathrm{g}| = g$. Thus, the space-part of a'' corresponds to one-half the nonrelativistic acceleration.

Assume $a^\mu = (0, 0, 0, 1/\alpha)$ and consider a point in the $z - t$ plane. Its transformation will be given by

' The following eonsiderations originated in a discussion by one of the authors (F.R.) with Dr. F. Gürsey. It is a pleasure to thank Dr. Gürsey for his valuable comments.

$$z' = \frac{\alpha\left[t^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(z - \frac{\alpha}{2}\right)^2\right]}{(z-\alpha)^2 - t^2},$$
$$t' = \frac{\alpha^2 t}{(z-\alpha)^2 - t^2}.$$

This transformation obviously breaks down for $t^2 = (z-\alpha)^2$. Furthermore, t and t' will have the same signs for $t^2 < (z-\alpha)^2$ and opposite signs for $t^2 > (z-\alpha)^2$. A particle trajectory in S between $t = -|z-\alpha|$ and $t = +|z-\alpha|$ will be mapped into an infinite trajectory in S', between $t' = -\infty$ and $t' = +\infty$. As an example, consider a particle at rest in S at a position

$z = \alpha/2$. Its worldline is shown in Fig. 2(a). The transformation (A3) yields

$$z' = \alpha \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + t^2}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - t^2},$$
$$t' = \frac{\alpha^2 t}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - t^2},$$

so that $z'^2 - t^2 = \alpha^2$. The world-line in S' is therefore a hyperbola (Fig. 2b).

Closer inspection shows that the world-line a-b-c-d-e in S is transformed into both branches of the hyperbola with jumps at b and d as indicated. In particular the whole right-hand branch b-c-d in S' comes from the finite time interval b-c-d in S.

One concludes that the transformation (A1) cannot be regarded as a physically meaningful transformation of the world-line a-e into uniformly accelerated motion. Note, however, that in the nonrelativistic limit $\alpha \to \infty$, and the singular lines $t^2 = (z - \alpha)^2$ disappear.

The example also explains why a conformal transformation always leads to fields of both branches of the hyperbolic motion. Received: November 9, 1959.

REFERENCES

В.Л. Гинзбург, Ю.Н. Ерошенко Еще раз о принципе эквивалентности
очень хорошая статья, где вроде и ответ на этот вопрос.
Thomas Fulton and Fritz Rohrlich Classical Radiation from a Uniformly Accelerated Charge
тут выгрузки отсюда, когда-то потом посмотрю.

1. M. BoRn, Ann. Physik 30,1 (1909). 2. W. PAULI, in "Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften," Vol. 5, p. 539, esp. p. 647 f. Teubner, Leipzig, 1918. Translated as W. Pauli, "Theory of Relativity," p. 93. Pergamon Press, New York, 1958. 3. M. v. LaUE, "Relativitätstheorie," 3rd ed. Vol. 1. Vieweg, Braunschweig, 1919. 4. E. Cunningham, Proc. London Math. Soc. 8, 77 (1910) ; H. Bateman, Proc. London Math. Soc. 8, 223 (1910); E. L. Hill, Phys. Rev. 67, 358 (1945) and 72, 143 (1947); F. Gursey, Rev. fac. sci. Univ. Istanbul 21, 129 (1956). 5. G. A. Schotr, "Electromagnetic Radiation," p. 63 ff. Cambridge Univ. Press, London and New York, 1912. 6. G. A. Schott, Phil. Mag. 29, 49 (1915). 7. S. M. Milner, Phil. Mag. 41, 405 (1921). 8. D. L. DrUkey, Phys. Rev. 76, 543 (1949). 9. M. Bondi AND T. GoLd, Proc. Roy. Soc. A229, 416 (1955). 10. See for example J. L. Synge, "Relativity." North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1956. 11. See, for example, W. K. H. PANOFSE A AND M. Phillips, "Classical Electrieity and Magnetism," Eqs. (19-22) and (19-37). Addison-Wesley, Cambridge, 1955. 12. P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A167, 148 (1938). 13. See, for example, W. E. Teirring, "Principles of Quantum Electrodynamics," esp. p. 24. Academic Press, New York and London, 1958. 14. See, for example, J. Schwinger, Phys. Rev. 76, 1912 (1949).

5.3 Vacuum in GR: Fundamentals

(there will be later a section about different models and so on, which are not that fundamental)

5.3.1 Vacuum in a homogeneous gravitational field and excitation of a uniformly accelerated detector

(I'll add Ginzburg's article later, maybe soon)

Важность

(тут многое про измерения сказано!!!)

Введение

В классической физике использовалось понятие о пустом пространств — физически говоря, о некоторой пространственной области, в которой отсутствуют частицы и поля. Такое пустое пространство можно считать синонимом вакуума классической нерелятивистской физики. Введенное Ньютоном «абсолютное пространство», которое «по самой своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным» играло роль идеальной инерциальной системы отсчета и вместе с тем могло считаться реализацией классического вакуума. Говоря словами Эйнштейна, «идея независимого существования пространства и времени может быть выражена следующим образом: если бы материя исчезла, то остались бы только пространство и время (своего рода сцена, на которой разыгрываются физические явления)» Однако совершенно не зависящая от материи сцена — абсолютное пространство - является метафизической категорией, поскольку неизвестно, как ему сопоставить физическую реальность. Поэтому в механике абсолютное пространство было фактически заменено практически реализуемыми инерциальными системами, в первую очередь астрономической системой отсчета (начало координат в такой системе помещено в центр масс Солнечной системы, а оси направлены на «неподвижные звезды;; по этому вопросу см., например, [2] и указанную там литературу). С развитием оптики, электродинамики и понятия о поле на авансцену вышли вводившиеся и ранее представления об эфире - заполняющей все пространство своеобразной субстанции, по которой распространяются электромагнитные возбуждения. При этом в конце концов Лоренцу пришлось предположить, что єчасти эфира вообще не перемещаются относительно друг друга. Таким образом, эфир выступил как бы воплощением абсолютного покоящегося пространства:. Судьба такого неподвижного эфира оказалась, однако, такой же, как и ньютоновского абсолютного пространства, - эфиру нельзя придать какоелибо физическое содержание, если не говорить о возможности считать эфир инерциальной системой отсчета. Специальная теория относительности (СТО) как раз и узаконила такую точку зрения - в рамках СТО можно считать, что кэфира вообще не существует. Электромагнитные поля представляют собой не состояния некоторой среды, а самостоятельно существующие реальности, которые нельзя свести к чему-либо другому и которые, подобно атомам весомой материи, не связаны ни с какими носителями ". Поэтому принято считать, что СТО изгнала эфир из физики, а сам термин «эфир в современной литературе не используется. Против последнего возражать не приходится, поскольку старое понятие об эфире оказалось, можно сказать, дискредитированным. Но с созданием СТО отнюдь не исчезло, конечно, представление о пустом пространстве и об инерциальных системах отсчета, отличающихся от неинерциальных систем. Эйнштейн даже пытался реабилитировать или скорее реанимировать термин жфир», уточнив его. Так, в уже цитированной речи &Ффир и теория относительности» [3], произнесенной в 1920 г., он говорил: Между тем ближайшее рассмотрение показывает, что специальная теория относительности не требует безусловного отрицания эфира. Можно принять существование эфира; не следует только заботиться о том, чтобы приписывать ему определенное состояние движения; иначе говоря, абстрагируясь, нужно отнять у него последний механический признак, который ему оставил Лоренц». Эта мысль поясняется в той же речи: *Что касается механической природы лоренцова эфира, то в шутку можно сказать, что Г.-А. Лоренц оставил ему лишь одно механическое свойство неподвижность. К этому можно добавить,

что все изменение, которое внесла специальная теория относительности в концепцию эфира, состояло в лишении эфира и последнего его механического свойстваэ.

Дело, конечно, не в названии. Термин «эфир был просто заменен термином «вакуум» или «физический вакуум». Без этого понятия, как уже подчеркивалось, нельзя обойтись уже в классической физике, особенно с учетом роли гравитационного поля. Именно поэтому, трудно в этом сомневаться, после создания общей теории относительности (ОТО) Эйнштейн и вернулся к обсуждению понятия об эфире [3]. Вместо того чтобы излагать ситуацию своими словами, мы вновь обратимся здесь к той же речи Эйнштейна, ибо сказанное в ней вполне точно и сегодня; одновременно достигается историческая достоверность. Итак, согласно ОТО, жметрические свойства пространственно-временнОго континуума в окрестности отдельных пространственновременнЫх точек различны и зависят от распределения материи вне рассматриваемой области. Представление о физически пустом пространстве окончательно устраняется такой пространственно-временнОй изменяемостью масштабов и часов. Соответственно, признание того факта, что апустое пространствож в физическом отношении не является однородным и изотропным, вынуждает нас описывать его состояние с помощью десяти функций - гравитационных потенциалов $x_{\mu\nu}$. Но, таким образом, и понятие эфира снова приобретает определенное содержание, которое совершенно отлично от содержания понятия эфира механической теории света. Эфир общей теории относительности есть среда, сама по себе лишенная всех механических и кинематических свойств, но в то же время определяющая механические (и электромагнитные) процессы». Общий вывод таков: «Резюмируя, можно сказать, что общая теория относительности наделяет пространство физическими свой ствами; таким образом, в этом смысле эфир существует. Согласно общей теории относительности, пространство немыслимо без эфира; действительно, в таком пространстве не только было бы невозможно распространение света, но и не могли бы существовать масштабы и часы и не было бы никаких пространственно-временнЫх расстояний в физическом смысле слова».

Таким образом, хотя термин «эфир» не сохранился, заменившее его понятие о физическом вакууме необходимо уже в доквантовой физике. Как мы полагаем, подчеркнуть это обстоятельство уместно не только в связи с содержанием данной статьи, но с распространенным в настоящее время отождествлением физического вакуума с физическим вакуумом квантовой теории поля *). Вместе с тем глубокие изменения, внесенные в понятие о физическом вакууме, с созданием квантовой теории поля совершенно несомненны [4]. Главное, они касаются уже физического вакуума в инерциальных системах отсчета или, иными словами, в пространстве-времени Минковского, когда $g_{00} = -1$, $g_{ij} = \delta_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ и, по распространенной терминологии, гравитационные поля отсутствуют (смысл последнего утверждения хорошо известен речь идет о постоянстве $g_{\mu v}$, т.е. однородности и изотропности пространстваремени). Уже в пространстве-времени Минковского (или М-пространстве) квантовый вакуум, по образному выражению И. Я. Померанчука, представ- ляет собой «кипящую операторную жидкость». Действительно, определяя вакуум как наинизшее энергетическое состояние, в котором отсутствуют все реальные частицы (фотоны, электронно-позитронные пары $e^- e^+$и т. д.), мы знаем, что в этом состоянии поля отнюдь не равны нулю, а флуктуируют около равных нулю средних значений - речь идет о нулевых колебаниях свободных полей. Для взаимодействующих полей можно говорить о виртуальных фотонах, виртуальных $e^- e^+$-парах и т. Д.

Представление о нулевых колебаниях квантовых полей, которому уже примерно 60 лет, сейчас общеизвестно. Тем не менее, учитывая характер и цели настоящей статьи, в основном рассчитанной не на специалистов, представляется уместным напомнить

несколько элементарных фактов и оценок. Энергия нулевого колебания электромагнитного поля, отвечающего «моде» (нормальному колебанию) с частотой ω равна **) $\hbar\omega/2$, а спектр этих колебаний, приходящихся на интервал $\mathrm{d}\omega$, пропорционален $\hbar\omega^3\ \mathrm{d}\omega$. Переход к другим инерциальным системам, т. е. лоренцево преобразование, не изменяет спектр нулевых колебаний (см., например [6]), как это и должно быть. Нулевые колебания вполне реальны - приводят к появлению сил между телами, к изменению энергии их взаимодействия. Речь здесь идет о силах Ван-дер-Ваальса (см. и иказанную там литературу), причем наиболее известно рассмотренное впервые в 1948 г. притяжение между разделенными пустой щелью двумя идеально проводящими пластинами [8]. Существование нулевых колебаний, безусловно, является исключительно важной, фундаментальной чертой квантовой теории. Правда, это обстоятельство в сочетании с тем, что в классической и квантовой теориях часто используются различные подходы и методы, приводит иногда и к недоразумениям. Так, довольно распро-

Вакуум в пространстве-времени Минковского, рассматриваемый в инерциальной и в равномерно ускоренной системах отсчета. Вакуум в статическом однородном гравитационном поле

Квантовая теория поля в инерциальной системе отсчета.

2.2. Равномерно ускоренная система отсчета и система отсчета, покоящаяся в однородном гравитационном поле.

2.3. Квантовая теория поля в равномерно ускоренной системе отсчета.

2.4. Вакуум в статическом однородном гравитационном поле.

3. Детекторы, покоящиеся в равномерно ускоренной системе отсчета и в статическом однородном гравитационном поле

3.1. Модельное описание детектора.

3.2. Взаимодействие ускоренного детектора с вакуумом.

Описание в равномерно ускоренной системе отсчета.

3.3. Поведение детектора, покоящегося в статическом однородном гравитационном поле. 3.4.

Элементарные частицы в роли детекторов.

4. Возбуждение и излучение равномерно ускоренного детектора. Описание в инерциальной системе отсчета

5. Возбуждение и излучение ускоренного детектора и аномальный эффект Допплера.

(??? я и не знаю такого эффекта)

Несколько дополнительных замечаний

6. Принцип эквивалентности в квантовой области и «тепловой характер» вакуума в равномерно ускоренной системе отсчета

Заключительные замечания

5.4 Other Fundamental Details of the Theory of Gravitation

5.4.1 Other Theoretical Properties of Gravity

(there will be a lot of them, since there were a lot of questions about them)

Жесткость пространства-времени

(чему равен модуль Юнга пространства-времени? порассуждаю про то, что оно очень жестко. посчитаю..)

Гравитационное поле - именно нелинейная теория

(??? как бы это показать явно..???)

Есть большой соблазн думать, что слабое гравитационное поле описывается линейной теорией, подобной электродинамике, однако это не так.

Получаемая таким способом теория не является математически замкнутой.

Это выражается, прежде всего, в том, что возмущение метрики $h_{\mu\nu}$ влияет на измерение расстояний и времени, таким образом, не допускает масштабирования: если мы увеличим масштабы так, чтобы $h_{\mu\nu}$ было бы сравнимо с $\eta_{\mu\nu}$, мы получим абсурдные результаты для движения частиц в поле.

Поэтому нам с необходимостью надо рассмотреть сильное поле и понять, к каким эффектам приводит сильная нелинейность.

Как мы увидим, неизбежным следствием уравнений поля оказываются особенности пространственновременного многообразия.

В этой лекции мы построим сферически-симметричное решение уравнений Эйнштейна-решение мально это решение будет стационарным, то есть компоненты метрики не будут зависеть от времени.

Важный вывод будет состоять в том, что стационарность этого решения фиктивна и связана с неполнотой выбранной системы координат: она определена только в одной карте и не описывает многообразие целиком.

Что могли бы означать слова «сферически-симметричное решение» в применении к искривленному пространству-времени? Чтобы это понять, разберем, что мы понимаем под сферически-симметричным решением теории поля в пространстве-времени Минковского.

5.4.2 Everyday Analogies of GR

Для более красочного понимания ОТО иногда полезно знать аналогии, чему посвящен этот раздел.

(см Мизнера и др., когда сделаю основы, могу заняться этим)

Видение искривленности пространства, смотря в окно (???)

(я вижу плоское пространство, какая там кривизна???? как ответить на этот вопрос нормально???)

Движение муравьев по (?) яблоку

такое Мизнер и др. в самом начале писали, если будет интересно - почитаю.

Аргумент липкой бусинки (???)

(потом посмотрю, см. нпр. Вики)

Аргумент липкой бусинки в общей теории относительности — простой мысленный эксперимент, призванный показать, что гравитационное излучение действительно предсказывается общей теорией относительностью и может иметь физические проявления. Эти требования не были широко приняты до середины 1950-х годов, но после введения аргумента липкой бусинки, любые оставшиеся сомнения вскоре исчезли из исследовательской литературы.

Аргумент часто приписывается Герману Бонди, который популяризировал его,[1] но первоначально он был предложен анонимно Ричардом Фейнманом.

5.4.3 Relativistic Mechanics as a Particular Case of GR

(??? so, I'll derive the Relativistic Newton gravitational equation and discuss it. Also, I'll show how relativistic mechanics exactly comes from Einstein's equation. Maybe it is a very useless section, but still, for completeness it is a good section)

(basically, derive SR from GR)

Преобразования Лоренца на языке ОТО

(обсудим тут их. пока я не понимаю, как СТО записать чисто как частный случай ОТО??? так что это вопрос, как переходить в другую систему отсчета??)

Пример: переход в движущуюся с $c/2$ систему отсчета отчета

(конкретно - как в таком случае происходит переход?)

Part III
Basic Models of Gravity

Обсудим подробно типичные методы и модели гравитации.

6 Typical Models of GR

6.1 General Properties of a Black Hole

Почему «черная дыра»?

(answer this in detail)

6.2 Schwarzschild Solution

Обсудим подробно решение Шварцшильда и укажем его следствия.

6.2.1 Derivation of the Schwarzschild Solution

обзор способов вывода

как-то разными способами можно вывести, я пока хз.

достаем сферическую симметрию из алгебры

Плоское пространство-время обладает группой симметрии $SO(3)$ вращений трехмерного пространства.

Эта группа порождается тремя генераторами

$$J_x = z\partial_y - y\partial_z, \quad J_y = x\partial_z - z\partial_x, \quad J_z = y\partial_x - x\partial_y$$

образующими алгебру Ли $so(3) \simeq su(2)$ относительно коммутатора:

$$[J_i, J_j] = \sum_{k=x}^{z} \epsilon^{ijk} J_k, \quad \epsilon^{xyz} = 1, \quad \epsilon^{ijk} = -\epsilon^{jik} = -\epsilon^{ikj}$$

Генераторы J_i являются векторными полями Киллинга для плоской метрики. (почему???)

Под сферически-симметричными решениями мы понимаем решения, инвариантные относительно группы вращений $SO(3)$.

В терминах векторных полей Киллинга это выражается так

$$\Delta_{J_i} A = 0$$

где $A(x)$ - некоторое тензорное поле (сечение тензорного расслоения), а Δ_ξ - уже знакомая нам производная Ли.

Суть вывода Лашкевича через поля Киллинга

?????

Вывод через поля Киллинга

(лл 10 лашкевич, влом смотреть всё ещё.)

Для записи сферически-симметричных решений удобно выбрать сферические координаты t, r, ϑ, φ,

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta$$

причем метрика будет даваться формулой

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

где $d\Omega^2$ - метрика на единичной сфере:

$$d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2$$

В этих координатах векторы Киллинга J_i имеют вид

$$J_x = \sin\varphi\partial_\vartheta + \operatorname{ctg}\vartheta\cos\varphi\partial_\varphi, \quad J_y = -\cos\varphi\partial_\vartheta + \operatorname{ctg}\vartheta\sin\varphi\partial_\varphi, \quad J_z = -\partial_\varphi$$

Видно, что векторные поля J_i действуют на сферах $r, t = \text{const}$, причем группа $SO(3)$ действует на сфере транзитивно.

Поэтому скалярные поля для сферически-симметричного решения должны были бы быть функциями только от r и t.

В искривленном пространстве-времени будем действовать точно так же.

Мы назовем метрику сферически-симметричной, если в ней имеются три пространственноподобных векторных поля Киллинга J_i, удовлетворяющих коммутационным соотношениям (10.2) алгебры.Ли $so(3)$. Условие (10.3) для метрики выполняется в силу того, что J_i являются векторами Киллинга.

В более сложных случаях, когда кроме гравитационного поля есть еще какие-то поля, на них нужно наложить условие (10.3).

Самый простой способ построить сферически-симметричную метрику состоит в том, чтобы «расслоить» пространство-время на двумерные сферы со сферическими координатами на каждой.

На двумерных сферах мы выберем координаты ϑ, φ таким образом, чтобы векторы (10.7) были векторами Киллинга.

Две остальные координаты мы обозначим через t и r по аналогии с плоским пространством.

Немного ниже мы уточним их определение.

Потребуем, прежде всего, чтобы индуцированная метрика на сферах совпадала, с точностью до постоянного множителя, с метрикой на сфере в плоском пространстве:

$$ds^2\big|_{t,r=\mathbf{const}} = g_{\vartheta\vartheta}(t,r)d\Omega^2$$

Этого еще, однако, недостаточно, чтобы векторы (10.7) были векторами Киллинга.

Дело в том, что условие (3.34) накладывается на соответствующие ковекторы $\bar{g}(J_i) = g_{\mu\nu}J_i^\nu dx^\mu$, так что необходимо, чтобы эти ковекторы оставались внутри сферы.

Иными словами, векторы ∂_t, ∂_r должны быть ортогональны векторам $\partial_\vartheta, \partial_\varphi$: $g_{t\vartheta} = g_{r\vartheta} = g_{t\varphi} = g_{r\varphi} = 0$. Это же условие достаточно для того, чтобы двумерные символы Кристоффеля на сферах совпадали с соответствующими четырехмерными.

Полу- чаем

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{tr}dtdr + g_{rr}dr^2 + g_{\vartheta\vartheta}d\Omega^2$$

Для такой метрики удовлетворяются соотношения

$$J_{i\mu;\nu} + J_{i\nu;\mu} = 0, \quad \mu, \nu = \vartheta, \varphi$$

Чтобы удовлетворить остальным условиям, надо потребовать, чтобы все четыре функции $g_{tt}, g_{tr}, g_{rr}, g_{\vartheta\vartheta}$ зависели бы только от t и r. Иными словами

$$\partial_\vartheta g_{\mu\nu} = \partial_\varphi g_{\mu\nu} = 0, \quad \mu, \nu = t, r, \vartheta, \varphi$$

Действительно, например, из условия $J_{zr;r} = 0$ находим

$$0 = J_{zr;r} = -\Gamma^\varphi_{rr} J_{z\varphi} = \Gamma^\varphi_{rr} g_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2} g_{rr,\varphi}$$

Аналогично проверяется независимость остальных компонент от ϑ и φ. Заметим теперь, что метрика в факторпространстве $M/SO(3)$, где $SO(3)$ - группа врашений, порожденная векторами Киллинга, есть метрика общего вида.

Поэтому преобразованиями координат t, r мы можем зафиксировать две функции.

Во-первых, потребуем, чтобы направления ∂_t и ∂_r были ортогональны, а во-вторых, определим r условием, чтобы длина окружности на любой из сфер $t, r = \text{const}$ равнялась $2\pi r$. Это значит, что

$$g_{tr} = 0, \quad g_{\vartheta\vartheta} = -r^2$$

Оставшиеся компоненты метрики g_{tt}, g_{rr} удобно записать в экспоненциальном виде e^{2k}, e^{2h}. Окончательно, запишем сферически-симметричную метрику в виде

$$ds^2 = e^{2k(t,r)} dt^2 - e^{2h(t,r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

Метрика в таких координатах имеет диагональный вид, так что обратную метрику легко найти:

$$g^{\bullet\bullet} = e^{-2k(t,r)} \partial_t \otimes \partial_t - e^{-2h(t,r)} \partial_r \otimes \partial_r - r^{-2} \left(\partial_\vartheta \otimes \partial_\vartheta + \sin^{-2}\vartheta \partial_\varphi \otimes \partial_\varphi \right)$$

Чтобы удовлетворить остальным условиям, надо потребовать, чтобы все четыре функции $g_{tt}, g_{tr}, g_{rr}, g_{\vartheta\vartheta}$ зависели бы только от t и r. Иными словами

$$\partial_\vartheta g_{\mu\nu} = \partial_\varphi g_{\mu\nu} = 0, \quad \mu, \nu = t, r, \vartheta, \varphi$$

Действительно, например, из условия $J_{zr;r} = 0$ находим

$$0 = J_{zr;r} = -\Gamma^\varphi_{rr} J_{z\varphi} = \Gamma^\varphi_{rr} g_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2} g_{rr,\varphi}$$

Аналогично проверяется независимость остальных компонент от ϑ и φ. Заметим теперь, что метрика в факторпространстве $M/SO(3)$, где $SO(3)$ - группа врашений, порожденная векторами Киллинга, есть метрика общего вида.

Поэтому преобразованиями координат t, r мы можем зафиксировать две функции.

Во-первых, потребуем, чтобы направления ∂_t и ∂_r были ортогональны, а во-вторых, определим r условием, чтобы длина окружности на любой из сфер $t, r = \text{const}$ равнялась $2\pi r$. Это значит, что

$$g_{tr} = 0, \quad g_{\vartheta\vartheta} = -r^2$$

Оставшиеся компоненты метрики g_{tt}, g_{rr} удобно записать в экспоненциальном виде e^{2k}, e^{2h}. Окончательно, запишем сферически-симметричную метрику в виде

$$ds^2 = e^{2k(t,r)} dt^2 - e^{2h(t,r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

Метрика в таких координатах имеет диагональный вид, так что обратную метрику легко найти:

$$g^{\bullet\bullet} = e^{-2k(t,r)}\partial_t \otimes \partial_t - e^{-2h(t,r)}\partial_r \otimes \partial_r - r^{-2}\left(\partial_\vartheta \otimes \partial_\vartheta + \sin^{-2}\vartheta \partial_\varphi \otimes \partial_\varphi\right)$$

одим ненулевые компоненты тензора Риччи:

$$\begin{aligned}
R_t^t &= \left(-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2\right) e^{-2k} + \left(k'' + k'^2 - k'h' + 2r^{-1}k'\right) e^{-2h} \\
R_r^r &= \left(-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2\right) e^{-2k} + \left(k'' + k'^2 - k'h' - 2r^{-1}h'\right) e^{-2h} \\
R_r^t &= 2r^{-1}e^{-2k}\dot{h} \\
R_\vartheta^\vartheta &= R_\varphi^\varphi = -r^{-2}\left(1 + \left(rh' - rk' - 1\right) e^{-2h}\right)
\end{aligned}$$

Решим уравнения Эйнштейна в вакууме $R_\nu^\mu = 0$. Из третьего уравнения немедленно имеем $\dot{h} = 0$, то есть $h = h(r)$. В первом и втором уравнениях выпадают все члены с производными по времени, и мы имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной r. Используя комбинации $R_t^t \mp R_r^r$, получаем

$$\begin{gathered}
k' + h' = 0 \\
k'' + k'^2 - k'h' + r^{-1}\left(k' - h'\right) = 0 \\
r\left(k' - h'\right) = e^{2h} - 1
\end{gathered}$$

Из первого уравнения немедленно имеем

$$k(t,r) = F(t) - h(r)$$

Функцию $F(t)$ можно устранить преобразованием координат $t' = \int dt e^{F(t)}$, поэтому без ограничения общности положим ее равной нулю.

Имеем

$$h = -k, \quad k'' + 2k'^2 + \frac{2k'}{r} = 0, \quad \frac{2dk}{e^{-2k} - 1} = \frac{dr}{r}$$

Третье уравнение легко решается

$$e^{2k} = 1 - \frac{r_g}{r}$$

где константа r_g должна быть положительной, чтобы решение имело смысл на больших расстояниях.

Подставляя во второе уравнение, убеждаемся, что оно тоже выполнено.

Итак, окончательно имеем

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 d\Omega^2$$

(???)

Вид гравитационного радиуса

Величину r_g легко выразить через полную энергию (массу) системы.

Действительно, рассмотрим асимптотику решения Шварцшильда при $r \to \infty$:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

Эта асимптотика не соответствует виду (7.23), так как для нее $h = 0$ и, следовательно, $\psi_{rr} \neq 0$. Но ее можно привести к нужному виду малым калибровочным преобразованием $r \to r + \frac{r_g}{2}$. Тогда в первом порядке по r_g/r имеем

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) \left(dr^2 + r^2 d\Omega^2\right)$$

Теперь $h = 2r_g/r$, откуда находим $\psi_{rr} = \psi_{\vartheta\vartheta} = \psi_{\varphi\varphi} = 0, \psi_{tt} = h_{tt} - \frac{1}{2}h = -2r_g/r$. Это согласуется с асимптотическим решением (7.23) при $A = -2r_g$. Сравнивая с (7.27), получаем

$$r_g = 2GM$$

Из сферической симметрии решения физически ясно, что момент импульса системы, создающей гравитационное поле, равен нулю.

Это также строго следует из того, что в асимптотике $\psi_{0i} = 0$.

6.2.2 Derivation of the Schwarzschild Solution by Landau

Обсудим подробно центрально-симметричное поле.
(тут у Ландау мб кое-что и новое, так что догружу лучше)

Theory

Центральная симметрия поля означает, что метрика пространствавремени, т.е. выражение для интервала ds, должна быть одинакова во всех точках, находящихся на одинаковом расстоянии от центра. В евклидовом пространстве это расстояние равно радиус-вектору; в неевклидовом же пространстве, каким оно является при наличии гравитационного поля, нет величины, которая обладала бы всеми свойствами евклидова радиус-вектора (одновременно равного расстоянию до центра и деленной на 2π длине окружности). Поэтому выбор "радиус-вектора» теперь произволен.

Если пользоваться "сферическими» пространственными координатами r, θ, φ, то наиболее общим центрально-симметричным выражением для ds^2 является

$$ds^2 = h(r,t)dr^2 + k(r,t)\left(\sin^2\theta \cdot d\varphi^2 + d\theta^2\right) + l(r,t)dt^2 + a(r,t)drdt$$

(100.1)

где a, h, k, l - некоторые функции от «радиус-вектора» r и «времени» t. Но, ввиду произвольности в выборе системы отсчета в общей теории относительности, мы можем еще подвергнуть координаты любому преобразованию, не нарушающему центральной симметрии ds^2; это значит, что мы можем преобразовать координаты r и t посредством формул

$$r = f_1(r', t'), \quad t = f_2(r', t')$$

где f_1, f_2 - любые функции от новых координат r', t'. Воспользовавшись этой возможностью, выберем координату r и время t таким образом, чтобы, во-первых, коэффициент $a(r,t)$ при $drdt$ в выражении для ds^2 обратился в нуль и, во-вторых, коэффициент $k(r,t)$ был равен просто - r^2 1). Последнее означает, что радиус-вектор r определен таким образом, чтобы длина окружности с центром в начале координат была равна $2\pi r$ (элемент дуги окружности в плоскости $\theta = \pi/2$ равен $dl = rd\varphi$). Величины h и l нам будет удобно писать в экспоненциальном виде соответственно как - e^λ и c^2e^ν, где λ и ν - некоторые функции от r и t. Таким образом, получим для ds^2 следующее выражение:

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2\right) - e^\lambda dr^2$$

Подразумевая под x^0, x^1, x^2, x^3 соответственно ct, r, θ, φ, мы имеем, следовательно, для отличных от нуля компонент метрического тензора выражения

$$g_{00} = e^\nu, \quad g_{11} = -e^\lambda, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2\sin^2\theta.$$

Очевидно, что

$$g^{00} = e^{-\nu}, \quad g^{11} = -e^{-\lambda}, \quad g^{22} = -r^{-2}, \quad g^{33} = -r^{-2}\sin^{-2}\theta.$$

С помощью этих значений легко вычислить по формуле (86.3) величины Γ^i_{kl}. Вычисление приводит к следующим выражениям (штрих означает дифференцирование по r, а точка над буквой - дифференцирование по ct):

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} =& \frac{\lambda'}{2}, \quad \Gamma^0_{10} = \frac{\nu'}{2}, \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta \\
\Gamma^0_{11} =& \frac{\dot\lambda}{2}e^{\lambda-\nu}, \quad \Gamma^1_{22} = -re^{-\lambda}, \quad \Gamma^1_{00} = \frac{\nu'}{2}e^{\nu-\lambda} \\
\Gamma^2_{12} =& \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^3_{23} = \operatorname{ctg}\theta, \quad \Gamma^0_{00} = \frac{\dot\nu}{2} \\
\Gamma^1_{10} =& \frac{\dot\lambda}{2}, \quad \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Все остальные компоненты Γ^i_{kl} (кроме тех, которые отличаются от написанных перестановкой индексов k и l) равны нулю.

Для составления уравнений надо вычислить по формуле (92.7) компоненты тензора R^i_k. Простые вычисления приводят в результате к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}
\frac{8\pi k}{c^4}T^1_1 =& -e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}, \\
\frac{8\pi k}{c^4}T^2_2 =& \frac{8\pi k}{c^4}T^3_3 = -\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\nu''+\frac{\nu'^2}{2}+\frac{\nu'-\lambda'}{r}-\frac{\nu'\lambda'}{2}\right)+\frac{1}{2}e^{-\nu}\left(\ddot\lambda+\frac{\dot\lambda^2}{2}-\frac{\dot\lambda\dot\nu}{2}\right), \\
\frac{8\pi k}{c^4}T^0_0 =& -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\lambda'}{r}\right)+\frac{1}{r^2} \\
\frac{8\pi k}{c^4}T^1_0 =& -e^{-\lambda}\frac{\dot\lambda}{r}
\end{aligned}$$

(остальные компоненты уравнения ур Эйнштейна тождественно обращаются в нуль).

Компоненты тензора энергии-импульса могут быть выражены с помощью формулы (94.9) через плотность энергии материк ε, ее давление p и радиальную скорость v.

Уравнения (100.4)-(100.7) могут быть проинтегрированы до конца т.е.

вне создающих его масс.

Полагая тензор энергии-импульса равным нулю, получим следующие уравнения:

$$\begin{gathered}
e^{-\lambda}\left(\tfrac{\nu'}{r}+\tfrac{1}{r^2}\right)-\tfrac{1}{r^2}=0 \\
e^{-\lambda}\left(\tfrac{\lambda'}{r}-\tfrac{1}{r^2}\right)+\tfrac{1}{r^2}=0 \\
\dot\lambda = 0
\end{gathered}$$

(четвертое уравнение, т.е.

уравнение (100.5), можно не выписывать, так как оно является следствием трех остальных уравнений).

Из (100.10) мы видим, что λ не зависит от времени.

Далее, складывая уравнения (100.8) − (100.9), находим $\lambda' + \nu' = 0$, т.е.

$$\lambda + \nu = f(t)$$

где $f(t)$ - функция только от времени.

Но, выбрав интервал ds^2 В виде (100.2), мы оставили за собой еще возможность произвольного преобразования времени вида $t = f(t')$. Такое преобразование эквивалентно прибавлению к ν произвольной функции времени, и с его помощью можно всегда обратить $f(t)$ в (100.11) в нуль.

Итак, не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda + \nu = 0$. Отметим, что центрально-симметричное гравитационное поле в пустоте автоматически оказывается статическим.

Уравнение (100.9) легко интегрируется и дает:

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 + \frac{\text{const}}{r}$$

Как и следовало, на бесконечности $(r \to \infty) e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1$, т.е.

вдали от гравитирующих тел, метрика автоматически оказывается галилеевой.

Постоянную const легко выразить через массу тела, потребовав, чтобы на больших расстояниях, где поле слабо, имел место закон Ньютона.

Именно, должно быть $g_{00} = 1 + 2\varphi/c^2$, где потенциал φ равен своему ньютоновскому выражению (99.4) : $\varphi = -km/r$(m - полная масса создающего поле тела).

Отсюда видно, что const $= -2\ \mathbf{km/c^2}$ Эта величина имеет размерность длины; ее называют гравитационным радиусом тела r_g:

$$r_g = \frac{2km}{c^2}.$$

Таким образом, окончательно находим пространственно-временную метрику в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - r^2 \left(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2\right) - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}}.$$

Это решение уравнений Эйнштейна было найдено Шварциильдом.

Им полностью определяется гравитационное поле в пустоте, создаваемое любым центрально-симметричным распределением масс.

Подчеркнем, что это решение справедливо не только для покоящихся, но и для движущихся масс, если только движение тоже обладает должной симметрией (скажем, центрально-симметричные пульсации).

Отметим, что метрика (100.14) зависит только от полной массы гравитирующего тела, как и в аналогичной задаче ньютоновской теории.

Свойства

(хз, потом разбирать буду)

Пространственная метрика определяется выражением для элемента пространственного расстояния:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 \left(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2\right)$$

Геометрический смысл координаты r определяется тем, что в метрике (100.15) длина окружности с центром в центре поля равна $2\pi r$. Расстояние же между двумя точками r_1 и r_2 на одном и том же радиусе дается интегралом

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} > r_2 - r_1$$

Далее мы видим, что $g_{00} \leqslant 1$.

В связи с формулой (84.1)$d\tau = = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}dt$, определяющей истинное время, отсюда следует, что

$$d\tau \leqslant dt$$

Знак равенства имеет место на бесконечности, где t совпадает с истинным временем.

Таким образом, на конечных расстояниях от масс происходит «замедление» времени по сравнению со временем на бесконечности.

Наконец, приведем приближенное выражение для ds^2 на больших расстояниях от начала координат:

$$ds^2 = ds_0^2 - \frac{2km}{c^2 r}\left(dr^2 + c^2 dt^2\right)$$

Второй член представляет собой малую поправку к галилеевой метрике ds_0^2. На больших расстояниях от создающих поле масс всякое поле центрально-симметрично.

Поэтому (100.18) определяет метрику на больших расстояниях от любой системы тел. центрально-симметричного гравитационного поля внутри гравитирующих масс.

Из уравнения (100.6) видно, что при $r \to 0\lambda$ должно тоже обращаться в нуль, по крайней мере как r^2; в противном случае правая часть уравнения обратилась бы при $r \to 0$ в бесконечность, т.е.

T_0^0 имело бы в $r = 0$ особую точку.

Интегрируя формально уравнение (100.6) с граничным условием $\lambda|_{r=0} = 0$, получим:

$$\lambda = -\ln\left(1 - \frac{8\pi k}{c^4 r}\int\limits_0^r T_0^0 r^2 dr\right)$$

Поскольку в силу (94.10)$T_0^0 = e^{-\nu}T_{00} \geqslant 0$, то отсюда видно, что $\lambda \geqslant 0$, т.
е.

$$e^{\lambda} \geqslant 1$$

Далее, вычитая уравнение (100.6) почленно из уравнения (100.4), получим:

$$\frac{e^{-\lambda}}{r}(\nu' + \lambda') = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_0^0 - T_1^1\right) = \frac{(\varepsilon + p)\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \geqslant 0$$

т.е.

$\nu' + \lambda' \geqslant 0$. Но при $r \to \infty$ (вдали от масс) метрика переходит в галилееву, т.е.
$\nu \to 0, \lambda \to 0$. Поэтому из $\nu' + \lambda' \geqslant 0$ следует, что во всем пространстве

$$\nu + \lambda \leqslant 0$$

Поскольку $\lambda \geqslant 0$, то отсюда следует, что $\nu \leqslant 0$, т.е.

$$e^{\nu} \leqslant 1$$

Полученные неравенства показывают, что указанные выше свойства (100.16)-(100.17) пространственной метрики и хода часов **В** центрально-симметричном поле в пустоте относятся в той же мере и к полю внутри гравитирующих масс.

Если гравитационное поле создается сферическим телом «радиуса» a, то при $r > a$ имеем $T_0^0 = 0$. Для точек с $r > a$ формула (100.19) поэтому дает:

$$\lambda = -\ln\left(1 - \frac{8\pi k}{c^4 r}\int\limits_0^a T_0^0 r^2 dr\right)$$

С другой стороны, здесь можно применить относящееся к пустоте выражение (100.14), согласно которому

$$\lambda = -\ln\left(1 - \frac{2km}{c^2 r}\right).$$

Сравнивая оба выражения, найдем формулу

$$m = \frac{4\pi}{c^2}\int_0^a T_0^0 r^2 dr$$

определяющую полную массу тела по его тензору энергии-импульса.

В частности, для статического распределения вещества в теле имеем $T_0^0 = \varepsilon$, так что

$$m = \frac{4\pi}{c^2}\int_0^a \varepsilon r^2 dr$$

Поскольку в силу (94.10)$T_0^0 = e^{-\nu}T_{00} \geqslant 0$, то отсюда видно, что $\lambda \geqslant 0$, т. е.

$$e^{\lambda} \geqslant 1$$

Далее, вычитая уравнение (100.6) почленно из уравнения (100.4), получим:

$$\frac{e^{-\lambda}}{r}(\nu' + \lambda') = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_0^0 - T_1^1\right) = \frac{(\varepsilon + p)\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \geqslant 0$$

т.е.

$\nu' + \lambda' \geqslant 0$. Но при $r \to \infty$ (вдали от масс) метрика переходит в галилееву, т.е. $\nu \to 0, \lambda \to 0$.

Поэтому из $\nu' + \lambda' \geqslant 0$ следует, что во всем пространстве

$$\nu + \lambda \leqslant 0$$

Поскольку $\lambda \geqslant 0$, то отсюда следует, что $\nu \leqslant 0$, т.е.

$$e^{\nu} \leqslant 1$$

Полученные неравенства показывают, что указанные выше свойства (100.16)-(100.17) пространственной метрики и хода часов **В** центрально-симметричном поле в пустоте относятся в той же мере и к полю внутри гравитирующих масс.

Масса гравитирующего тела (???)

Если гравитационное поле создается сферическим телом «радиуса» a, то при $r > a$ имеем $T_0^0 = 0$. Для точек с $r > a$ формула (100.19) поэтому дает:

$$\lambda = -\ln\left(1 - \frac{8\pi k}{c^4 r}\int_0^a T_0^0 r^2 dr\right)$$

С другой стороны, здесь можно применить относящееся к пустоте выражение (100.14), согласно которому

$$\lambda = -\ln\left(1 - \frac{2km}{c^2 r}\right).$$

Сравнивая оба выражения, найдем формулу

$$m = \frac{4\pi}{c^2}\int\limits_0^a T_0^0 r^2 dr$$

определяющую полную массу тела по его тензору энергии-импульса.

В частности, для статического распределения вещества в теле имеем $T_0^0 = \varepsilon$, так что

$$m = \frac{4\pi}{c^2}\int\limits_0^a \varepsilon r^2 dr$$

Обратим внимание на то, что интегрирование производится по $4\pi r^2 dr$, между тем как элемент пространственного объема в метрике (100.2) есть $dV = 4\pi r^2 e^{\lambda/2} dr$, причем, согласно (100.20), $e^{\lambda/2} > 1$. Это различие выражает собой гравитационный дефект массы тела.

инварианты тензора кривизны для метрики Шварцшильда

Найти инварианты тензора кривизны для метрики Шварцшильда.

(думаю, это вообще не нужно, но задачка такая есть)

Вычисление по (92.1)$\mathbf{c}\Gamma_{kl}^i$ из (100.3) (или по формулам, полученным в задаче 2§92) приводит к следующим значениям отличных от нуля компонент тензора кривизны:

$$R_{0101} = \tfrac{r_g}{r^3}, \quad R_{0202} = \tfrac{R_{0303}}{\sin^2\theta} = -\tfrac{r_g(r-r_g)}{2r^2}$$
$$R_{1212} = \tfrac{R_{1313}}{\sin^2\theta} = \tfrac{r_g}{2(r-r_g)}, \quad R_{2323} = -r r_g \sin^2\theta$$

Для инвариантов I_1 и I_2(92.20) находим:

$$I_1 = \left(\frac{r_g}{2r^3}\right)^2, \quad I_2 = -\left(\frac{r_g}{2r^3}\right)^3$$

(произведения с участием дуального тензора $\bar{R}_{iklm}$ равны нулю тождественно).

Тензор кривизны относится к типу D по Петрову (с вещественными инвариантами $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = -r_g/2r^3$).

Отметим, что инварианты кривизны имеют особенность лишь в точке $r = 0$, но не при $r = r_g$.

пространственная кривизна

Для той же метрики определить пространственную кривизну.

Компоненты пространственного тензора кривизны $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ могут быть выражены через компоненты тензора $P_{\alpha\beta}$ (и тензор $\gamma_{\alpha\beta}$), так что достаточно вычислить только $P_{\alpha\beta}$ (см. задачу 1 §92).

Тензор $P_{\alpha\beta}$ выражается через $\gamma_{\alpha\beta}$ так же, как R_{lk} выражается через g_{ik}.

Со значениями $\gamma_{\alpha\beta}$ из (100.15) получим после вычисления:

$$P_\theta^\theta = P_\varphi^\varphi = \frac{r_g}{2r^3}, \quad P_r^r = -\frac{r_g}{r^3}$$

и $P_\alpha^\beta = 0$ при $\alpha \neq \beta$. Отметим, что $P_\theta^\theta, P_\varphi^\varphi > 0, P_r^r < 0$, а $P \equiv P_\alpha^\alpha = 0$. По формуле, полученной в задаче (1) §92, найдем:

$$P_{r\theta r\theta} = \left(P_r^r + P_\theta^\theta\right)\gamma_{rr}\gamma_{\theta\theta} = -P_\varphi^\varphi \gamma_{rr}\gamma_{\theta\theta}$$
$$P_{r\varphi r\varphi} = -P_\theta^\theta \gamma_{rr}\gamma_{\theta\theta}, \quad P_{\theta\varphi\theta\varphi} = -P_r^r \gamma_{\theta\theta}\gamma_{\varphi\varphi}$$

Отсюда следует (см. примечание на с. 336) (??), что для "плоскостей", перпендикулярных к радиусам, гауссова кривизна

$$K = \frac{P_{\theta\varphi\theta\varphi}}{\gamma_{\theta\theta}\gamma_{\varphi\varphi}} = -P_r^r > 0$$

(это значит, что для небольших треугольников, проведенных на участке еплоскости» вблизи ее пересечения с перпендикулярным к ней радиусом, сумма углов больше, чем π).

Для «плоскостей» же, проходящих через центр, гауссова кривизна $K < 0$; это значит, что сумма углов, проведенных в иплоскости» небольших треугольников, меньше, чем π (подчеркнем, однако, что последнее свойство не относится к треугольникам, охватывающим центр, - сумма углов в таком треугольнике больше, чем π).

Поверхность вращения, на которой геометрия была бы такой же, как на проходящей через начало координат плоскости в центрально-симметричном гравитационном поле в пустоте (????)

Определить форму поверхности вращения, на которой геометрия была бы такой же, как на проходящей через начало координат плоскости в центрально-симметричном гравитационном поле в пустоте.

Геометрия на поверхности вращения $z = z(r)$ (в цилиндрических координатах) определяется элементом длины

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + r^2 d\varphi = dr^2 \left(1 + z'^2\right) + r^2 d\varphi^2$$

Сравнивая с элементом длины (100.15) в єплоскости» $\theta = \pi/2$

$$dl^2 = r^2 d\varphi^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}}$$

находим:

$$1 + z'^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}$$

откуда

$$z = 2\sqrt{r_g\left(r - r_g\right)}$$

При $r = r_g$ эта функция имеет особенность - точку разветвления.

Это обстоятельство связано с тем, что пространственная метрика (100.15) в противоположность пространственно-временной метрике (100.14) действительно имеет особенность при $r = r_g$.

Указанные в предыдущей задаче общие свойства геометрии на проходящих через центр «плоскостях можно найти также и путем рассмотрения кривизны полученной здесь наглядной модели,

Метрика Шварцшильда в конформно-эвклидовом виде

Преобразовать интервал в метрике Шварцшильда к координатам, в которых пространственная метрика имела бы конформно-эвклидов вид (т.е. dl^2 пропорционально своему евклидову выражению).

Полагая

$$r = \rho\left(1 + \frac{r_g}{4\rho}\right)^2$$

получим из (100.14):

$$ds^2 = \left[\frac{1-\frac{r_g}{4\rho}}{1+\frac{r_g}{4\rho}}\right]^2 c^2dt^2 - \left(1+\frac{r_g}{4\rho}\right)^2 \left(d\rho^2+\rho^2d\theta^2+\rho^2\sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

Координаты ρ, θ, φ называют изотропными сферическими координатами; вместо них можно ввести также и изотропные декартовы координаты x, y, z. В частности, на больших расстояниях ($\rho \gg r_g$) имеем приближенно:

$$ds^2 = \left(1-\frac{r_g}{\rho}\right)c^2dt^2 - \left(1+\frac{r_g}{\rho}\right)\left(dx^2+dy^2+dz^2\right)$$

Уравнения центрально-симметричного гравитационного поля в веществе в сопутствующей системе отсчета

Получить уравнения центрально-симметричного гравитационного поля в веществе в сопутствующей системе отсчета.

Двумя возможными преобразованиями координат r, t в элементе интервала (100.1) воспользуемся для того, чтобы, во-первых, обратить в нуль коэффициент $a(r,t)$ при $drdt$ и, во-вторых, обратить в каждой точке в нуль радиальную скорость вещества (остальные компоненты скорости вообще отсутствуют в силу центральной симметрии).

После этого координаты r и t могут еще быть подвергнуты произвольному преобразованию вида $r = r(r')$, $t = t(t')$ Обозначим выбранные таким образом радиальную координату и время посредством R и τ, а коэффициенты h, k, l - соответственно $-e^{\lambda}, -e^{\mu}, e^{\nu}$ (λ, μ, ν - функции R и τ). Тогда для элемента интервала имеем:

$$ds^2 = c^2e^{\nu}d\tau^2 - e^{\lambda}dR^2 - e^{\mu}\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

Компоненты тензора энергии-импульса равны в сопутствующей системе отсчета:

$$T_0^0 = \varepsilon, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p$$

Вычисление приводит к следующим уравнениям поля:

$$\begin{gathered}
-\tfrac{8\pi k}{c^4}T_1^1 = \tfrac{8\pi k}{c^4}p = \tfrac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\tfrac{\mu'^2}{2}+\mu'\nu'\right) - e^{-\nu}\left(\ddot{\mu}-\tfrac{1}{2}\dot{\mu}\dot{\nu}+\tfrac{3}{4}\dot{\mu}^2\right) - e^{-\mu} \\
-\tfrac{8\pi k}{c^4}T_2^2 = \tfrac{8\pi k}{c^4}p = \tfrac{1}{4}e^{-\lambda}\left(2\nu''+\nu'^2+2\mu''+\mu'^2-\mu'\nu'-\nu'\lambda'+\mu'\nu'\right) + \\
+\tfrac{1}{4}e^{-\nu}\left(\dot{\lambda}\dot{\nu}+\dot{\mu}\dot{\nu}-\dot{\lambda}\dot{\mu}-2\ddot{\lambda}-\dot{\lambda}^2-2\ddot{\mu}-\dot{\mu}^2\right) \\
\tfrac{8\pi k}{c^4}T_0^0 = \tfrac{8\pi k}{c^4}\varepsilon = -e^{-\lambda}\left(\mu''+\tfrac{3}{4}\mu'^2-\tfrac{\mu'\lambda'}{2}\right)+\tfrac{1}{2}e^{-\nu}\left(\dot{\lambda}\dot{\mu}+\tfrac{\dot{\mu}^2}{2}\right)+e^{-\mu} \\
\tfrac{8\pi k}{c^4}T_0^1 = 0 = \tfrac{1}{2}e^{-\lambda}\left(2\dot{\mu}'+\dot{\mu}\mu'-\dot{\lambda}\mu'-\nu'\dot{\mu}\right)
\end{gathered}$$

(штрих означает дифференцирование по R, а точка - по $c\tau$).

Некоторые общие соотношения для λ, μ, ν могут быть легко найдены, если исходить из содержащихся в уравнениях поля уравнений $T^k_{i;k} = 0$. Воспользовавшись формулой (86.11), получим следующие два уравнения

$$\dot{\lambda}+2\dot{\mu} = -\frac{2\dot{e}}{p+\varepsilon}, \quad \nu' = -\frac{2p'}{p+\varepsilon}$$

Если p известно как функция ε, то уравнения (6) интегрируются в виде

$$\lambda+2\mu = -2\int\frac{d\varepsilon}{p+\varepsilon}+f_1(R), \quad \nu = -2\int\frac{dp}{p+\varepsilon}+f_2(\tau)$$

где функции $f_1(R)$ и $f_2(\tau)$ могут быть выбраны произвольным образом ввиду указанной выше возможности произвольных преобразований вида $R = R(R')$, $\tau = \tau(\tau')$ 6.

Статическое гравитационное поле в пустоте вокруг неподвижного аксиально-симметричного тела

Найти уравнения, определяющие статическое гравитационное поле в пустоте вокруг неподвижного аксиально-симметричного тела.

Статический элемент интервала в цилиндрических пространственных координатах $x^1 = \varphi, x^2 = \rho, x^3 = z$ ищем в виде

$$ds^2 = e^{\nu}c^2dt^2 - e^{\omega}d\varphi^2 - e^{\mu}\left(d\rho^2 + dz^2\right)$$

где ν, ω, μ - функции ρ и z. Такое представление фиксирует выбор координат с точностью до преобразования $\rho = \rho\left(\rho', z'\right), z = z\left(\rho', z'\right)$, умножающего квадратичную форму $d\rho^2 + dz^2$ лишь на общий множитель.

Из уравнений (??? выведу их!!)

$$\begin{aligned} R_0^0 =& \frac{1}{4}e^{-\mu}\left[2\nu_{,\rho,\rho} + \nu_{,\rho}\left(\nu_{,\rho} + \omega_{,\rho}\right) + 2\nu_{,z,z} + \nu_{,z}\left(\nu_{,z} + \omega_{,z}\right)\right] = 0 \\ R_1^1 =& \frac{1}{4}e^{-\mu}\left[2\omega_{\cdot\rho,\rho} + \omega_{,\rho}\left(\nu_{,\rho} + \omega_{,\rho}\right) + 2\omega_{,z,z} + \omega_{,z}\left(\nu_{,z} + \omega_{,z}\right)\right] = 0 \end{aligned}$$

(где индексы, ρ и, z означают дифференцирование по ρ и z), взяв их сумму, находим:

$$\rho'_{,\rho,\rho} + \rho'_{,z,z} = 0$$

где обозначено $\rho'(\rho, z) = e^{\frac{\nu+\omega}{2}}$.

Таким образом, $\rho'(\rho, z)$ - гармоническая функция переменных ρ, z.

Согласно известным свойствам таких функций это значит, что существует сопряженная гармоническая функция $z'(\rho, z)$ такая, что $\rho' + iz' = f(\rho + iz)$, где f - аналитическая функция комплексной переменной $\rho + iz$.

Если теперь выбрать ρ', z' в качестве новых координат, то в силу конформности преобразования $\rho, z \to \rho', z'$ будет

$$e^{\mu}\left(d\rho^2 + dz^2\right) = e^{\mu'}\left(d\rho'^2 + dz'^2\right),$$

где $\mu'\left(\rho', z'\right)$ - некоторая новая функция.

В то же время $e^{\omega} = \rho'^2 e^{-\nu}$; обозначив $\omega + \nu = \gamma$ и опустив далее все штрихи, напишем ds^2 в виде

$$ds^2 = e^{\nu}c^2dt^2 - \rho^2 e^{-\nu}d\varphi^2 - e^{\gamma-\nu}\left(d\rho^2 + dz^2\right)$$

Составив для этой метрики уравнения $R_0^0 = 0, R_3^3 - R_2^2 = 0, R_2^3 = 0$, найдем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\nu}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2\nu}{\partial z^2} =& 0 \\ \frac{\partial\gamma}{\partial z} =& \rho\frac{\partial\nu}{\partial\rho}\frac{\partial\nu}{\partial z}, \\ \frac{\partial\gamma}{\partial\rho} =& \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial\nu}{\partial\rho}\right)^2 - \left(\frac{\partial\nu}{\partial z}\right)^2\right] \end{aligned}$$

Отметим, что (2) имеет вид уравнения Лапласа в цилиндрических координатах (для функции, не зависящей от φ). Если это уравнение решено, то функция $\gamma(\rho, z)$ целиком определяется уравнениями (2)-(3).

Вдали от создающего поле тела функции ν и γ должны стремиться к нулю.

(??? тут поисследую эти ур-я потом)

6.2.3 Dynamics in the Schwarzschild Solution

Движение в метрике шварцшильда по Вайнбергу

(показано хорошо в статье Determining the Dimensionality of Spacetime by Gravitational Lensing Jop Briet, David W. Hobill)

Суть

Движение в метрике шварцшильда по Ландау

модель отклонения тела в поле шварцшильда

Рассмотрим движение частицы в центрально-симметричном гравитационном поле.

Как и во всяком центральном поле, движение будет происходить в одной «плоскости», проходящей через центр поля;

выберем эту плоскость в качестве плоскости $\theta = \pi/2$.

Для определения траектории частицы воспользуемся уравнением Гамильтона-Якоби

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2c^2 = 0$$

где m - масса частицы (массу же центрального тела обозначим здесь как m').

С метрическим тензором Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)c^2dt^2 - r^2\left(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2\right) - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)dr^2$$

это уравнение принимает вид

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\partial S}{c\partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - m^2c^2 = 0$$

где $r_g = 2m'k/c^2$ - гравитационный радиус центрального тела.

По общим правилам решения уравнения Гамильтона-Якоби ищем S в виде

$$S = -\mathscr{E}_0 t + M\varphi + S_r(r)$$

с постоянными энергией $\mathscr{E}_0$ и моментом импульса M.

Подставив S в уравнение Гамильтона-Якоби, найдем производную dS_r/dr и проинтегрируем, получим:

$$S_r = \int\left[\frac{\mathscr{E}_0^2}{c^2}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-2} - \left(m^2c^2 + \frac{M^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}\right]^{1/2}dr \tag{6.1}$$

Зависимость $r = r(t)$ дается уравнением $\partial S/\partial\mathscr{E}_0 = \mathbf{const}$, откуда (????)

$$ct = \frac{\mathscr{E}_0}{mc^2}\int\frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left[\left(\frac{\mathscr{E}_0}{mc^2}\right)^2 - \left(1 + \frac{M^2}{m^2c^2r^2}\right)\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\right]^{1/2}}$$

А угол определяется уравнением $\partial S/\partial M = \text{const}$, и равен

$$\varphi = \int\frac{M}{r^2}\left[\frac{\mathscr{E}_0^2}{c^2} - \left(m^2c^2 + \frac{M^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\right]^{-1/2}dr.$$

Этот интеграл приводится к эллиптическому. (?)

релятивистские поправки

Для движения планет в поле тяготения Солнца релятивистская теория приводит лишь к незначительным поправкам по сравнению с теорией Ньютона, поскольку скорости планет очень малы по сравнению со скоростью света.

В уравнении траектории выше этому соответствует малость отношения r_g/r, где r_g - гравитационный радиус Солнца.

(??) Учет поправок происходит за счет разложения в ряды по степеням малого параметра, а также заменой переменных. (сделаю - напишу, не сложно)

Для вычисления релятивистских поправок к траектории удобно исходить из выражения радиальной части действия до его дифференцирования по M:

$$S_r = \int \left[\frac{\mathscr{E}_0^2}{c^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-2} - \left(m^2c^2 + \frac{M^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \right]^{1/2} dr \tag{6.2}$$

Для учета малых поправок, (????) заменим переменную интегрирования согласно $r\,(r - r_g) = r'^2$, т.е. $r - r_g/2 \approx r'$ в результате чего член $\mathbf{c}M^2$ под корнем примет вид M^2/r^2.

В остальных же членах производим разложение по степеням r_g/r' и получаем с требуемой точностью:

$$S_r = \int \left[\left(2\mathscr{E}'m + \frac{\mathscr{E}'^2}{c^2}\right) + \frac{1}{r}\left(2m^2m'k + 4\mathscr{E}'mr_g\right) - \frac{1}{r^2}\left(M^2 - \frac{3m^2c^2r_g^2}{2}\right) \right]^{1/2} dr$$

где мы для краткости опустили штрих у r' и ввели нерелятивистскую энергию $\mathscr{E}'$ (без энергии покоя).

Поправочные члены в коэффициентах в первых двух членах под корнем отражаются только на не представляющем особого интереса изменении связи между энергией и моментом частицы и параметрами ее ньютоновской орбиты (эллипса). (?????? поч?)

Изменение же коэффициента при $1/r^2$ приводит к более существенному эффекту - к систематическому (вековому) смещению перигелия орбиты.

Поскольку траектория определяется уравнением $\varphi + \frac{\partial S_r}{\partial M} = \text{const}$, то изменение угла φ за время одного оборота планеты по орбите есть

$$\Delta\varphi = -\frac{\partial}{\partial M}\Delta S_r$$

где ΔS_r - соответствующее изменение S_r.

Разлагая S_r по степеням малой поправки в коэффициент при $1/r^2$, получим:

$$\Delta S_r = \Delta S_r^{(0)} - \frac{3m^2c^2r_g^2}{4M}\frac{\partial \Delta S_r^{(0)}}{\partial M}$$

где $\Delta S_r^{(0)}$ соответствует движению по несмещающемуся замкнутому эллипсу.

Дифференцируя это соотношение по M и учитывая, что $-\frac{\partial}{\partial M}\Delta S_r^{(0)} = \Delta\varphi^{(0)} = 2\pi$ найдем:

$$\Delta\varphi = 2\pi + \frac{3\pi m^2c^2r_g^2}{2M^2} = 2\pi + \frac{6\pi k^2m^2m'^2}{c^2M^2}$$

Второй член и представляет собой искомое угловое перемещение $\Delta\varphi$ ньютоновского эллипса за время одного оборота, т.е. смещение перигелия орбиты.

Выражая его через длину большой полуоси a и эксцентриситет эллипса e с помощью известной формулы $M^2/km'm^2 = a\,(1 - e^2)$, получим:

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi km'}{c^2a\,(1 - e^2)}$$

отклонение луча в поле шварцшильда

Рассмотрим путь светового луча в центрально-симметричном гравитационном поле. (?) Луч света по сути является упрощением

Оказывается, что под влиянием поля тяготения световой луч искривляется: луч «притягивается» к центру, так что угол между ее двумя асимптотами отличается от π на

$$\delta\varphi = \frac{2r_g}{\rho} = \frac{4km'}{c^2\rho};$$

другими словами, луч света, проходящий на расстоянии ρ от центра поля, отклоняется на угол $\delta\varphi$.

Этот путь определяется уравнением эйконала

$$g^{ik}\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} = 0$$

отличающимся от уравнения Гамильтона-Якоби только тем, что в последнем надо положить $m = 0$.

Поэтому траекторию луча можно получить непосредственно из формулы (101.5), положив в ней $m = 0$; при этом вместо энергии частицы $\mathscr{E}_0 = -\partial S/\partial t$ надо писать частоту света $\omega_0 = -\partial\psi/\partial t$.

Введя также вместо постоянной M постоянную ρ согласно $\rho = cM/\omega_0$, получим:

$$\varphi = \int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}$$

При пренебрежении релятивистскими поправками ($r_g \to 0$) это уравнение дает $r = \rho/\cos\varphi$, т.

е.

прямую, проходящую на расстоянии β от начала координат.

Для исследования же релятивистских поправок поступим аналогично тому, как было сделано в предыдущем случае.

Для радиальной части эйконала имеем (ср.

(101.3)):

$$\psi_r(r) = \frac{\omega_0}{c}\int\sqrt{\frac{r^2}{(r-r_g)^2} - \frac{\rho^2}{r\,(r-r_g)}}dr$$

Производя такие же преобразования, которые служили для перехода оТ (101.3)**К**(101.6), получим:

$$\psi_r(r) = \frac{\omega_0}{c}\int\sqrt{1 + \frac{2r_g}{r} - \frac{\rho^2}{r^2}}dr$$

Разлагая теперь подынтегральное выражение по степеням r_g/r, имеем:

$$\psi_r = \psi_r^{(0)} + \frac{r_g\omega_0}{c}\int\frac{dr}{\sqrt{r^2-\rho^2}} = \psi_r^{(0)} + \frac{r_g\omega_0}{c}\operatorname{Arch}\frac{r}{\rho}$$

где $\psi_r^{(0)}$ отвечает классическому прямолинейному лучу.

Полное изменение ψ_r при распространении луча от некоторого очень большого расстояния R до ближайшей к центру точки $r = \rho$ и затем снова на расстояние R есть

$$\Delta\psi_r = \Delta\psi_r^{(0)} + 2\frac{r_g\omega_0}{c}\operatorname{Arch}\frac{R}{\rho}$$

Соответствующее же изменение полярного угла φ вдоль луча получается дифференцированием по $M = \rho\omega_0/c$:

$$\Delta\varphi = -\frac{\partial\Delta\psi_r}{\partial M} = -\frac{\partial\Delta\psi_r^{(0)}}{\partial M} + \frac{2r_g R}{\rho\sqrt{R^2-\rho^2}}$$

Наконец, переходя к пределу $R \to \infty$ и замечая, что прямолинейному лучу соответствует $\Delta\varphi = \pi$, получим:

$$\Delta\varphi = \pi + \frac{2r_g}{\rho}$$

Это значит, что под влиянием поля тяготения световой луч искривляется: его траектория представляет собой кривую, обращенную вогнутостью к центру (луч «притягивается» к центру), так что угол между ее двумя асимптотами отличается от π на

$$\Delta\varphi = \frac{2r_g}{\rho} = \frac{4km'}{c^2\rho};$$

другими словами, луч света, проходящий на расстоянии ρ от центра поля, отклоняется на угол $\Delta\varphi$

О том, почему этот метод не всегда работате (???)

(я порпобовал - у мен не получилось. забил, пошел другим методом пользоваться. пока хз.)

Движение частиц в метрике Шварцшильда по Лашкевичу (??)

Рассмотрим общий случай движения частицы по орбите и детально разберем процесс разделения переменных в уравнении Гамильтона-Якоби.

(пока не смотрел, потом посмотрю)

обзор

В силу сферической симметрии системы и закона сохранения момента импульса частица будет двигаться в одной плоскости, проходящей через «центр» $r = 0$.

Удобно выбрать эту плоскость перпендикулярной оси $z = x^3$, то есть принять $\vartheta = \pi/2$.

решение уравнения Гамильтона-Якоби для метрики Шварцшильда

Уравнение Гамильтона-Якоби принимает вид

$$\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2 - m^2 = 0 \tag{6.3}$$

Здесь переменные t, φ не входят явно в уравнение, поэтому можем положить соответствующе производные равными константам:

$$\frac{\partial S}{dt} = -E, \quad \frac{\partial S}{d\varphi} = J$$

Здесь первая константа E представляет собой энергию частицы, а J - момент импульса в направлении оси z, отсюда имеем

$$S(E, J, t, r, \varphi) = -Et + J\varphi + S_r(E, J, r).$$

Подставляя это в уравнение Гамильтона-Якоби и интегрируя по r, получаем

$$S_r(E,J,r) = \pm \int dr \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \sqrt{F(E,J,r)}$$

где $F(E,J,r) = E^2 - U^2(J,r) = E^2 - \left(m^2 + \frac{J^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$. Величина $U(J,r)$ играет роль потенциальной энергии.

Мы имеем решение, зависящее от двух параметров, для системы с двумя степенями свободы.

мировая линия частицы

мировая линия частицы определяется уравнениями

$$\frac{\partial S}{\partial E} = -t_0, \quad \frac{\partial S}{\partial J} = \varphi_0$$

где константы t_0, φ_0 имеют очевидный смысл начального времени и угла.

Имеем

$$\begin{aligned} t &= t_0 \pm E \int_{r_0}^{r} \frac{dr_i}{\left(1 - \frac{r_g}{r_i}\right)\sqrt{F(E,J,r_i)}} \\ \varphi &= \varphi_0 \pm J \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{F(E,J,r)}} \end{aligned} \tag{6.4}$$

где r_i - просто переменная интегрирования.

пределы изменения радиальной компоненты

Зададимся вопросом: в каких пределах может меняться радиальная координата r при движении частицы?

Это определяется условием неотрицательности выражения под корнем:

$$F(E,J,r) \geq 0, \quad r > 0$$

Обратим внимание, что уравнение Гамильтона-Якоби можно решать как в области $r > r_g$, так и в области $r < r_g$, причем, если не касаться времени t, решения переходят из одной области в другую непрерывно.

Разрыв в определении времени t, выражающийся логарифмической расходимостью интеграла в уравнении (6.4), означает, что на самом деле мы имеем дело с двумя различными картами, не переходящими друг в друга непрерывно.

Однако частица, движущаяся в метрике Шиварцшильда, «не знает» об этом: время t ее совершенно не касается.

координаты Эддингтона- Финкельштейна

Правильный способ перехода между областями связан с решением уравнения Гамильтона-Якоби в координатах Эддингтона- Финкельштейна, но решения этого уравнения прямо пересчитываются в решения уравнения (6.3).

обзор проблем с разными координатам

как так, что в одних координатах всё хорошо, а в других нет.

типы возможных движений в метрике Шварцшильда

Для начала перечислим возможные формы движения тела в центральном поле:

1. Инфинитное движение.

Частица прилетает из бесконечности, приближается к сфере Шварцшильда до некоторого минимального значения радиальной координаты $r = R_{\min}$, а затем снова улетает на бесконечность.

2. «Инфинитно-сингулярное» движение.

Частица прилетает из бесконечности, пересекает горизонт событий $\mathcal{H}^+$ и достигает сингулярности черной дыры $\mathcal{S}^+$ (падение на черную дыру).

Либо наоборот, испускается сингулярностью белой дыры $\mathcal{S}^-$, пересекает горизонт событий $\mathcal{H}^-$ и уходит на бесконечность (испускание частицы белой дырой).

Эти два движения переходят друг в друга при обрашении времени.

3. Финитное (орбитальное) движение.

Частица совершает орбитальное движение приближаясь к сфере Шварцшильда и удаляясь от нее, оставаясь все время в некоторых пределах $R_{\min} \leq r \leq R_{\max}$

4. «Финитно-сингулярное» движение.

Частица испускается белой дырой, последовательно пересекает горизонты событий $\mathcal{H}^-$ и $\mathcal{H}^+$ и поглощается черной дырой.

При этом ее радиальная координата не превышает некоторого значения $r_{\max}$.

Точки $R_{\max}, R_{\min}, r_{\max}$ являются точками поворота.

Это значит, что в этих точках (и только в этих точках!) может изменяться направление радиального движения частицы: «к центру» на «от центра» и наоборот.

Точки поворота являются решениями уравнения

$$F\left(E, J, r_*\right) \equiv E^2 - U^2\left(J, r_*\right) = 0$$

Сначала рассмотрим случай $J = 0$.

В этом случае уравнение для точек поворота линейно и легко решается.

Неотрицательность F дает:

$$\frac{r_g}{r} \geq -\frac{E^2 - m^2}{m^2}$$

Мы видим, что если $E \geq m$ неравенство выполняется для любых допустимых значений r, точек поворота нет и движение частицы «инфинитно-сингулярное».

В случае $E < m$ частица не может удалиться на расстояние больше $r_{\max} = r_g m^2 / \left(m^2 - E^2\right)$.

Она испускается из сингулярности белой дыры $\mathcal{S}^-$, затем, достигнув точки $r = r_{\text{rax}}$, разворачивается (ее скорость в этот момент равна нулю) и снова падает на «центр», точнее, на сингулярность $\mathcal{S}^+$. Это - «финитно-сингулярное» движение.

Графически это изображено на рис. 11.1.

На графиках приведена зависимость U^2 от r^{-1} и уровни E^2.

Сплошная часть линий уровня E^2 показывает области, где происходит движение частицы, а пунктирная часть запрещенные области.

Когда $J \neq 0$, ситуация оказывается сложнее.

Уравнение (11.9) является уравнением третьей степени.

Удобно рассмотреть его как уравнение для переменной $\xi = r^{-1}$:

$$r_g J^2 \xi_*^3 - J^2 \xi_*^2 + m^2 r_g \xi_* + E^2 - m^2 = 0$$

Старший коэффициент положителен, так что при достаточно больших значениях $|\xi|$ функция $F\left(E, J, \xi^{-1}\right)$ растет.

Далее ситуация зависит от количества вещественных положительных корней уравнения (11.11).

Нетрудно (хотя и утомительно) найти экстремумы функции $F\left(E, J, \xi^{-1}\right)$:

$$\xi_{\pm} = \frac{1}{3r_g}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3r_g^2 m^2}{J^2}}\right)$$

тогда

$$F\left(E, J, \xi_{\pm}^{-1}\right) = E^2 - E_{\pm}^2,$$

где

$$E_{\pm}^2 = \frac{2}{3}m^2 + \frac{2}{27}\frac{J^2}{r_g^2}\left(1 \pm \left(1 - \frac{3r_g^2 m^2}{J^2}\right)^{3/2}\right)$$

(и тут вские графики, которые Лашкевич спрашивал)

Здесь имеется два случая. 1.

Если $|J| \leq \sqrt{3}mr_g$, функция $F(E, J, r)$ монотонна и имеется единственный вещественный корень $r_{\max}$, который положителен при $E < m$ и отрицателен при $E > m$. Действительно, для корней уравнения (11.11)ξ_i имеем $\xi_1\xi_2\xi_3 = \frac{m^2 - E^2}{r_g J^2}$. Поскольку два корня, например ξ_2, ξ_3 комплексно сопряжены друг другу, их произведение положительно.

Значит, знак ξ_1 (и, соответственно, r_1) совпадает со знаком $m^2 - E^2$. Итак, ситуация вполне аналогична ситуации при $J = 0$ за исключением того, что $r_{\text{тах}}$ теперь является решением уравнения третьей степени (см.

рис.

11.2). 2.

Если же момент импульса частицы достаточно велик, $|J| > \sqrt{3}mr_g$, имеется два положительных экстремума $r_g^{-1} > \xi_+ > \xi_- > 0$, причем экстремальные значения удовлетворяют условию $E_+ > E_- > 0$. Следовательно, уравнение (11.11) может иметь от одного до трех вещественных корней, и из этих корней не более, чем один корень может быть отрицательным.

Полагая $E_{\pm} > 0$, мы видим, что при $E > E_+$ имеется ровно один вещественный корень ξ_1. Этот корень положителен при $E^2 < m^2$. Поэтому поведение системы зависит от того, что больше, E_+ или m. Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} E_+ &> m, \quad \text{если } |J| > 2mr_g \\ E_+ &< m, \quad \text{если } |J| < 2mr_g \end{aligned}$$

При $E > E_+, m$ единственный корень отрицателен и частица совершает «инфинитно-сингулярное» движение.

При $E < E_-$ единственный корень $\xi_1 > 0$ дает $r_{\max} = \xi_1^{-1}$ и движение является «финитносингулярным».

В области же $E_- < E < \max\left(E_+, m\right)$ случай 2 распадается на два подслучая. 2а.

При $\sqrt{3}mr_g < J < 2mr_g$ (см.

рис.

11.3) в диапазоне $E_+ < E < m$ система ведет себя как в случае 1: единственный корень ξ_1 положителен и соответствуюшее значение $r_{\max} = \xi_1^{-1}$ дает максимальное удаление частицы от сферы Шварцшильда.

Частица совершает «финитно-сингулярное» движение.

Вслучае же $E_- < E < E_+$ имеется три положительных корня.

Обозначим их $R_{\max} > R_{\min} > r_{\max}$ и две области неотрицательных значений $F(E, J, r) : R_{\min} \leq r \leq R_{\max}$ и $r \leq r_{\max.}$ Первая область отвечает орбитальному (финитном) движению, вторая - «финитно-сингулярному». 26.

При $J > 2mr_g$ (см.

рис.

11.4 в диапазоне $E_+ > E > m$ (то есть, когда момент J достаточно велик) имеется три корня, но один из них отрицательный, а два других - положительны.

Этим двум положительным корням отвечают две точки $R_{\min}, r_{\max}$, такие что $R_{\min} > \xi_-^{-1} > r_{\max} > \xi_+^{-1} > \frac{3}{2}r_g$. В области $r > R_{\min}$ частица совершает инфинитное движение, а в области $r < r_{\max}$ - «финитносингулярное».

Между этими двумя областями имеется потенциальный барьер.

Изучим орбитальное движение тела, которое имеет место в случае 2 при $E_- \leq E \leq m, E_+$. В это случае тело врашается вокруг источника гравитации, периодически приближаясь к источнику и достигая точки перигелия $r = R_{\min}$ и затем удаляясь и достигая точки афелия $r = R_{\text{тах.}}$ Уравнения (11.6), (11.7) дают нам время $T_{\text{пер и угол}}$ $\Phi_{\text{пер}}$, характеризуюшце движение тела по орбите:

$$T_{\text{пер}} = 2E \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{dr}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\sqrt{F(E,J,r)}}$$
$$\Phi_{\text{пер}} = 2J \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{dr}{r^2\sqrt{F(E,J,r)}}$$

Величина $T_{\text{пер}}$ дает время, за которое тело, находящееся в начальный момент времени в перигелии достигает афелия и вновь приближается, достигая новой точки перигелия.

Величина $\Phi_{\text{пер}}$ дает угол, на который следуюшая точка перигелия отличается от предыдущей.

В ньютоновском пределе $\Phi_{\text{пер}} = 2\pi$, то есть следующий перигелий достигается ровно через один оборот вокруг источника гравитации.

В дальнейшем нас будет интересовать величина $\Delta\Phi_{\text{пер}} = \Phi_{\text{пер}} - 2\pi$, характеризуюшая смещение перигелия за один оборот.

Важно отметить, что величина $T_{\text{пер}}$ является периодом радиального движения

тела, а не периодом обращения (сидерическим периодом), то есть периодом, за который угол меняется на 2π. Сидерический период, строго говоря, не является периодом какого бы то ни было движения.

Он зависит от того, с какой начальной точки орбиты мы его отсчитываем.

Хорошо определен только средиий сидерический период, основанный на «многолетних» измерениях:

$$\overline{T_{\text{сид}}} = \frac{2\pi}{\Phi_{\text{пер}}} T_{\text{пер}}$$

6.2.4 Typical Consequences of the Schwarzschild Metric

(overview of applications and so on)

радиальные движения сферически-симметричной материи не влияют на гравитационное поле в пустом пространстве снаружи

Важно отметить, что решение Шварцшильда является единственным (с точностью до преобразований координат) сферически-симметричным решением уравнений Эйнштейна в вакууме для любого сферического слоя. Это значит, что радиальные движения сферически-симметричной материи, как и в ньютоновской теории, не влияют на гравитационное поле в пустом пространстве снаружи.

Свойства

(???? хз, пока не так читал)

Давайте изучим глобальные свойства решения (10.14).

Если размер гравитирующих тел больше r_g, то решение (10.14) хорошо определено.

Чтобы получить полное решение, мы должны сшить его с решением в области, где $T^{\mu\nu} \neq 0$. В то же время, ничто не может гарантировать, что материя распределена достаточно неплотно.

Вполне возможно, что сил отталкивания не хватит, чтобы удержать материю за пределами сферы $r = r_g$, на которой метрика имеет особенность.

Более того, может так случиться, что при ненулевом, но небольшом тензоре энергии-импульса особенность просто сдвинется внутрь, но не исчезнет.

Поэтому попробуем понять смысл этой особенности.

Для этого найдем промежутки времени на прямых $r, \vartheta, \varphi = \text{const}$ и расстояния на плоскостях $t = \text{const}$.

Пусть частица неподвижно висит в шварцшильдовых координатах.

Пусть $\Delta t = t_2 - t_1$ - некоторый промежуток «глобального» координатного времени.

Промежуток физического времени по часам частицы (ее собственного времени) $\Delta\tau$ равен

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}\Delta t$$

Эта величина стремиться к нулю при $r \to r_g$. Это означает, что прямая $r = r_g, \vartheta, \varphi = \text{const}$ изотропна.

Ниже мы увидим, что на самом деле эта прямая является в пространстве-времени единственной точкой.

Теперь перейдем к измерениям расстояний в пространственных слоях.

Так как система координат Шварццильда имеет нулевые компоненты g_{0i}, пространственная часть метрики полностью определяет расстояния между точками.

Мы немедленно получаем, что расстояния между точками на любой сфере $r = \mathbf{const}$, в том числе и на сфере Шварцшильда $r = r_g$, определяются стандартной метрикой на сфере радиуса r:

$$dl^2_{\mathbf{c}\phi} = r^2 d\Omega^2$$

Расстояния же вдоль радиуса растут с приближением к сфере Шиварцшильда:

$$dl_{\mathbf{ра}} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} dr$$

Нетрудно проверить, что расстояние от сферы Шварцшильда до любой близлежашей точки (и, следовательно, до любой вообще точки) конечно.

Пусть $r - r_g \ll r_g$. Тогда имеем

$$l_{\text{рад}}\ (r, r_g) = \int dr \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} \simeq \sqrt{r}_g \int \frac{dr}{\sqrt{r - r_g}} = 2\sqrt{r_g\,(r - r_g)}$$

Это значит, что сфера Шварцшильда не «утолщается» в пространственном направлении. мерным объектом в пространстве-времени.

Область $r < r_g$ вообще не имеет смысла.

Мы выяснили характер особенности координат Шварцшильда.

Теперь мы покажем, что эти координаты не покрывают все физическое пространственно-временное многообразие.

Для этого рассмотрим (светоподобные) изотропные кривые в плоскости (t, r). В силу симметрии системы эти кривые должны быть геодезическими.

Полагая $d\vartheta = d\varphi = 0$ и $ds = 0$, получаем

$$dt = \pm \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}}$$

Знак «+» отвечает «фотону», летящему из центра, а знак «-» фотону», летящему к центру.

Это уравнение нетрудно проинтегрировать, но даже без интегрирования ясно, что будет происходить с фотоном в будущем.

Фотон, удаляющийся от центра, постепенно выйдет на асимптотику $r = t$ и уйдет на бесконечность, в то время как «падающий» фотон будет приближаться к радиусу Шварцшильда по закону $r - r_g \sim e^{-t/r_g}$. Казалось бы, мы решили проблему сингулярности.

Никакая частица не может

обогнать свет и, тем самым, не может пересечь сферу Шварцшильда.

Тем самым, массы никогда не достигнут этой сферы и проблема сингулярности просто не возникнет.

Это так и не так.

Это так, если мы наблюдаем за системой издалека.

Действительно, удаленный наблюдатель будет видеть как частицы приближаются к сфере Шварцшильда, образуя вокруг нее тонкий слой, но никогда не пересекают ее.

В тоже время удаленный наблюдатель будет замечать, как замедляется течение времени на падающих часах (см.

(10.16)!).

замедление времени

На самом деле, это время будет замедляться так быстро, что падающая частица достигнет радиуса Шварцшильда (и окажется в абсолютном будущем для удаленного наблюдателя!) за конечное собственное врем.я.

движение в метрике Шварцшильда

Чтобы убедиться в этом, найдем времениподобную геодезическую в плоскости (t, r). Проще решить не уравнение геодезической (4.6), а уравнение Гамильтона- Якоби (4.19):

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 = m^2$$

Умножив обе части на $1 - r_g/r$, мы получим

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 = m^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2 \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2$$

Левая часть содержит только производную по t, а правая - только производную по r. Давайте искать решение в таком виде, чтобы обе части были равны константе.

Положим

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E$$

Константа E имеет смысл энергии системы, и связана с однородностью задачи по времени.

Так как энергия всюду входит в виде квадрата, мы будем считать ее положительной.

Теперь имеем

$$S(t, r) = -Et + S_r(r)$$

и уравнение превращается в уравнение для S_r:

$$\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 = E^2\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-2} - m^2\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}$$

Отсюда получаем

$$S_r(r) = \pm\int dr\sqrt{\frac{r^2E^2}{(r-r_g)^2} - \frac{rm^2}{r-r_g}}$$

Дифференцируя полное действие $S(t,r,E)$ по параметру E, имеем

$$-t_0 = \frac{\partial S}{\partial E} = -t \pm \int \frac{dr}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\sqrt{1-\frac{m^2}{E^2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)}}$$

где t_0 - новая константа, имеющая смысл «начального» момента времени.

Итак

$$t - t_0 = \pm\int \frac{dr}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\sqrt{1-\frac{m^2}{E^2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)}}$$

Это-алгебраическое уравнение, задающее мировую линию частицы.

Мы сейчас не будем изучать подробно это уравнение и свойства его решений.

Мы сделаем это в следующий раз.

Нас интересует собственное время и мы его выпишем:

$$ds^2 = \left(1-\frac{r_g}{r}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{r_g}{r}} = \frac{dr^2}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(1-\frac{m^2}{E^2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\right)} - \frac{dr^2}{1-\frac{r_g}{r}} = \frac{m^2}{E^2}\frac{dr^2}{1-\frac{m^2}{E^2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)}$$

Отсюда

$$ds = \frac{m}{E}\frac{dr}{\sqrt{1-\frac{m^2}{E^2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)}}$$

Найдем полное собственное время, которое требуется частице, чтобы переместиться из точки r_0 в точку r_g. Извлекая корень, находим

$$s_{\text{пад}} = \frac{m}{E}\int\limits_{r_g}^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1-\frac{m^2}{E^2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)}}$$

Важно, что собственное время падения конечно, так как всюду конечно подынтегральное выражение при том условии, что оно было конечно в начальный момент времени.

Это всегда так, если $E > m$ (частица пришла из бесконечности).

Если же $E < m$, то имеется максимально удаленная точка, для которой знаменатель обращается в нуль.

Это соответствует финитному движению (частица взлетела, а потом начала падать).

идея выхода за Шварцшильдову карту???

Однако и эта корневая особенность интегрируема.

Чтобы построить координаты, выходящие за пределы шварцшильдовской карты, придется отказаться от статичности метрики.

Вместо координат (t,r) удобно будет использовать координаты светового конуса $x^{\pm}$. Потребуем, чтобы решения уравнения (10.17) записывались в виде $x^{\mp} = \text{const}$.

Отсюда

$$dx^{\pm} = dt \pm \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}}$$

Явное интегрирование дает

$$x^{\pm} = t \pm r^*, \quad r^* = r + r_g \log\left(\frac{r}{r_g} - 1\right)$$

Эти уравнения определяют t, r как функции переменных $x^{\pm}$. Важно то, что любой паре вещественных чисел (x^-, x^+) можно сопоставить точку в области $r > r_g$. Бесконечному прошлому и бесконечному будущему в шварцшильдовой метрике отвечают пределы $x^- + x^+ \to \mp\infty$, бесконечно удаленной точке при конечном времени - предел $x^+ - x^- \to +\infty$, а сфере Шварцшильда - предел $x^+ - x^- \to -\infty$. Таким образом на $r = r_g$ один из параметров $x^{\pm}$ может оставаться конечным, но тогда на этом радиусе $t \to \pm\infty$

Переменные $x^{\pm}$ дают возможность построить сразу несколько координатных систем.

Начнем с простейшей.

Координаты Эддингтона- Финкельштейна

Выберем в качестве времени одну из координат светового конуса, например x^+, а в качестве пространственной координаты отставим r. Тогда мы получим координаты Эддингтона-Финкельштейна:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(dx^+\right)^2 - 2dx^+dr - r^2d\Omega^2$$

Метрика в этих координатах по-прежнему стационарна.

Однако на поверхности $r = r_g$ уже нет особенности: компоненты конечные и гладкие, а метрика невырождена, $g = -r^4 \sin^2\vartheta \neq 0$.

Легко видеть, что кривые $r = r_g, \vartheta = \text{const}, \varphi = \text{const}$ являются изотропными геодезическими.

Эти геодезические входят в непрерывное семейство изотропных геодезических $x^- = \text{const}$, которые расходятся от центра

при $r > r_g$ и сходятся к центру при $r < r_g$(Рис.10.2). (????)

О горизонте

Поверхность $r = r_g$ представляет собой горизонт событий будущего $\mathcal{H}^+$, из-за которого мы не можем получать никаких сигналов, так как все частицы, испущенные под горизонтом событий, не выходят из под него, а падают (причем за конечное собственное время!) на сингулярность, которая лежит на линии $r = 0$.

Область внутри горизонта событий будущего называют черной дырой.

Координаты Эддингтона- Финкельштейна сохраняют стационарность метрики, однако в них мы теряем симметрию по отношению к обращению времени.

Это связано с тем, что линия $r = r_g$ в этих координатах находится в абсолютном будущем по отношению ко всей области $r > r_g$ и в шварцшильдовых координатах находится в бесконечном будущем $t \to +\infty$.

Область $r > r_g$ представляет собой одну и ту же область и в координатах Эддингтона- Финкельштейна и в координатах Шварцшильда, но координаты Эддингтона- Финкельштейна растягивают двумерную сферу $r = r_g, t = +\infty$, которая «собирает» все изотропные геодезические типа $\mathcal{I}^-$, в трехмерный горизонт событий $\mathcal{H}^+$, и сжимают сферу Шиарцшильда в двумерную сферу в бесконечном прошлом $x^+ = -\infty$.

Обозначим карту, покрываемую координатами Эддингтона- Финкельштейна через EF^+, а карту, покрываемую координатами Шварцшильда через Sc.

Тогда $EF^+ \supset Sc$.

Обращению времени в этой конструкции отвечает замена $x^+ \to -x^-$, что дает альтернативную систему координат Эддингтона- Финкельштейна EF^-:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(dx^-\right)^2 + 2dx^- dr - r^2 d\Omega^2$$

Эта система продолжает систему координат Шварцшильда в бесконечное прошлое.

В новой системе координат поверхность $r = r_g$ представляет собой горизонт событий прошлого $\mathcal{H}^-$.

Сингулярность $r = 0$ в этой области не поглощает частицы, а испускает их.

Область внутри горизонта событий прошлого называют белой дирой.

Карта Шварцшильда оказывается пересечением двух карт: $Sc = EF^+ \cap EF^-$.

Совмещение картин (???)

Как же совместить две картины (10.25) и (10.26)? Для этого надо полностью перейти к координатам светового конуса $x^\pm$:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r\left(x^-, x^+\right)}\right) dx^- dx^+ - r^2\left(x^-, x^+\right) d\Omega^2$$

Пока мы ничего нового, по сути, не внесли.

Новая идея состоит в том, чтобы осуществить отображение

по-отдельности для переменных $x^\pm$ на полуось.

Это отвечает тому, что мы теперь воспринимаем плоскость (t, r) не как предел квадрата со сторонами, параллельными осям t и r, а как предел квадрата со светоподобными сторонами, параллельными осям x^- и x^+.

В координатах Эддингтона- Финкельштейна мы спокойно «уходили на временную бесконечность» вблизи горизонта событий, оставляя конечными координаты x^+ и r.

Но в этой бесконечности координата x^- будет стремиться к бесконечности вместе с $t = \left(x^- + x^+\right)/2$.

Поэтому неплохо бы ее как-то «поджать».

Аналогично, в прошлом неплохо бы «поджать» x^+.

Свойства по Тонгу

(скоро их разберу. пример применений связаностей, которые мне не зашли ещё)

The connection one-form and curvature two-form provide a slick way to compute the curvature tensor associated to a metric. The reason for this is that computing exterior derivatives takes significantly less effort than computing covariant derivatives. We will illustrate this for metrics of the form,

$$ds^2 = -f(r)^2 dt^2 + f(r)^{-2} dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

For later applications, it will prove useful to compute the Riemann tensor for this metric with general $f(r)$. However, if we want to restrict to the Schwarzschild metric we can take

$$f(r) = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r}}$$

The basis of non-coordinate one-forms is

$$\hat{\theta}^0 = f dt, \quad \hat{\theta}^1 = f^{-1} dr, \quad \hat{\theta}^2 = r d\theta, \quad \hat{\theta}^3 = r \sin\theta d\phi$$

Note that the one-forms $\hat{\theta}$ should not be confused with the angular coordinate θ! In this basis, the metric takes the simple form

$$ds^2 = \eta_{ab} \hat{\theta}^a \otimes \hat{\theta}^b$$

We now compute $d\hat{0}^a$. Calculationally, this is straightforward. In particular, it's substantially easier than computing the covariant derivative because there's no messy connection to worry about. The exterior derivatives are simply

$$d\hat{\theta}^0 = f' dr \wedge dt, \quad d\hat{\theta}^1 = 0, \quad d\hat{\theta}^2 = dr \wedge d\theta, \quad d\hat{\theta}^3 = \sin\theta dr \wedge d\phi + r\cos\theta d\theta \wedge d\phi$$

The first Cartan structure relation, $d\hat{\theta}^a = -\omega^a{}_b \wedge \hat{\theta}^b$, can then be used to read off the connection one-form. The first equation tells us that $\omega^0_1 = f' f dt = f' \hat{\theta}^0$. We then use the anti-symmetry (3.48), together with raising and lowering by the Minkowski metric $\eta = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ to get $\omega^1_0 = \omega_{10} = -\omega_{01} = \omega^0_1$. The Cartan structure equation then gives $d\hat{\theta}^1 = -\omega^1_0 \wedge \hat{\theta}^0 + \ldots$ and the $\omega^1_0 \wedge \hat{\theta}^0$ contribution happily vanishes because it is proportional to $\hat{\theta}^0 \wedge \hat{\theta}^0 = 0$.

Next, we take $\omega^2_1 = f d\theta = (f/r)\theta^2$ to solve the $d\hat{\theta}^2$ structure equation. The antisymmetry (3.48) gives $\omega^1_2 = -\omega^2_1 = -(f/r)\hat{\theta}^2$ and this again gives a vanishing contribution to the $d\hat{\theta}^1$ structure equation.

Finally, the $d\hat{\theta}^3$ equation suggests that we take $\omega^3_1 = f \sin\theta d\phi = (f/r)\hat{\theta}^3$ and $\omega^3_2 = \cos\theta d\phi = (1/r)\cot\theta \hat{\theta}^3$. These anti-symmetric partners $\omega^1_3 = -\omega^3_1$ and $\omega^2_3 = -\omega^3_2$ do nothing to spoil the $d\hat{\theta}^1$ and $d\hat{\theta}^2$ structure equations, so we're home dry. The final result is

$$\omega^0_1 = \omega^1_0 = f' \hat{\theta}^0, \quad \omega^2_1 = -\omega^1_2 = \frac{f}{r}\hat{\theta}^2$$
$$\omega^3_1 = -\omega^1_3 = \frac{f}{r}\hat{\theta}^3 \quad , \quad \omega^3_2 = -\omega^2_3 = \frac{\cot\theta}{r}\hat{\theta}^3$$

Now we can use this to compute the curvature two-form. We will focus on

$$\mathcal{R}^0_1 = d\omega^0_1 + \omega^0_c \wedge \omega^c_1$$

We have

$$d\omega^0_1 = f' d\hat{\theta}^0 + f'' dr \wedge \hat{\theta}^0 = \left((f')^2 + f'' f \right) dr \wedge dt$$

The second term in the curvature 2 -form is $\omega^0_c \wedge \omega^c{}_1 = \omega^0{}_1 \wedge \omega^1{}_1 = 0$. So we're left with

$$\mathcal{R}^0_1 = \left((f')^2 + f'' f \right) dr \wedge dt = \left((f')^2 + f'' f \right) \hat{\theta}^1 \wedge \hat{\theta}^0$$

The other curvature 2 -forms can be computed in a similar fashion. We can now read off the components of the Riemann tensor in the non-coordinate basis using (3.49). (We should remember that we get a contribution from both R^0_{101} and $R^0_{110} = -R^0_{101}$, which cancels the factor of 1/2 in (3.49).) After lowering an index, we find that the non-vanishing components of

the Riemann tensor are

$$\begin{aligned}
R_{0101} &= ff'' + (f')^2 \\
R_{0202} &= \frac{ff'}{r} \\
R_{0303} &= \frac{ff'}{r} \\
R_{1212} &= -\frac{ff'}{r} \\
R_{1313} &= -\frac{ff'}{r} \\
R_{2323} &= \frac{1-f^2}{r^2}
\end{aligned}$$

We can also convert this back to the coordinates $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$ using

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = e^a_\mu e^b_\nu e^c_\rho e^d_\sigma R_{abcd}$$

This is particularly easy in this case because the matrices e^μ_a defining the one-forms (3.53) are diagonal. We then have

$$\begin{aligned}
R_{trtr} &= ff'' + (f')^2 \\
R_{t\theta t\theta} &= f^3 f' r \\
R_{t\phi t\phi} &= f^3 f' r \sin^2\theta \\
R_{r\theta r\theta} &= -\frac{f' r}{f} \\
R_{r\phi r\phi} &= -\frac{f' r}{f}\sin^2\theta \\
R_{\theta\phi\theta\phi} &= \left(1-f^2\right) r^2 \sin^2\theta
\end{aligned}$$

Finally, if we want to specialise to the Schwarzschild metric with $f(r)$ given by (3.52), we have

$$\begin{aligned}
R_{trtr} &= -\frac{2GM}{r^3} \\
R_{t\theta t\theta} &= \frac{GM(r-2GM)}{r^2} \\
R_{t\phi t\phi} &= \frac{GM(r-2GM)}{r^2}\sin^2\theta \\
R_{r\theta r\theta} &= -\frac{GM}{r-2GM} \\
R_{r\phi r\phi} &= -\frac{GM\sin^2\theta}{r-2GM} \\
R_{\theta\phi\theta\phi} &= 2GMr\sin^2\theta
\end{aligned}$$

Although the calculation is a little lengthy, it turns out to be considerably quicker than first computing the Levi-Civita connection and subsequently motoring through to get the Riemann tensor components.

О модификациях метрики Шварцшильда

6.2.5 Kruskal Coordinates

(тут подробно их обсуждаю)

Теория от Вергелеса

(потом вставлю теорию, пока тренироваться всё равно нужно)

координаты Крускала

Это достигается в координатах Крускала

$$u = -2r_g e^{-x^-/2r_g}, \quad v = 2r_g e^{x^+/2r_g}$$

которые остаются конечными на горизонтах событий.

Из (10.24) получаем

$$uv = -4r_g^2 e^{r/r_g}\left(\frac{r}{r_g} - 1\right)$$

То есть условию $r = r_g$ отвечают две поверхности $u = 0$ и $v = 0$.

Шварцшильдовской области $r > r_g$ отвечает квадрант $u < 0, v > 0$, причем значению $r = r_g$ при конечных t соответствует, как мы уже говорили, двумерная сфера $u = v = 0$.

Это немедленно сказывается на метрике.

Она перестает быть сингулярной на этой сфере:

$$ds^2 = \frac{r_g}{r(u,v)} e^{-\frac{r(u,v)}{r_g}} dudv - r^2(u,v)d\Omega^2$$

Здесь r записана как функция новых переменных u, v, которая решает уравнение (10.29).

неполнота шварцильдовских координат

(не уверен, что тема эта раскрыта)

6.2.6 Penrose Diagrams

максимально расширенное многообразие Крускала.

диаграммы Пенроуза

Систему координат Крускала удобно изобразить графически с помощью диаграмми Пенроуза или конформной или причинной диаграмми.

Для этого от некомпактных координат u, v следует перейти к компактным переменным u', v' с помощью замены

$$\begin{aligned} u &= 2r_g \operatorname{tg} u', \\ v &= 2r_g \operatorname{tg} v' \end{aligned}$$

В двумерном пространстве (u, v) это преобразование является конформным и сохраняет изотропные направления.

Дополнительное преобразование Вейля

$$g'_{\mu\nu}(x) = \Omega(x) g_{\mu\nu}(x)$$

с множителем

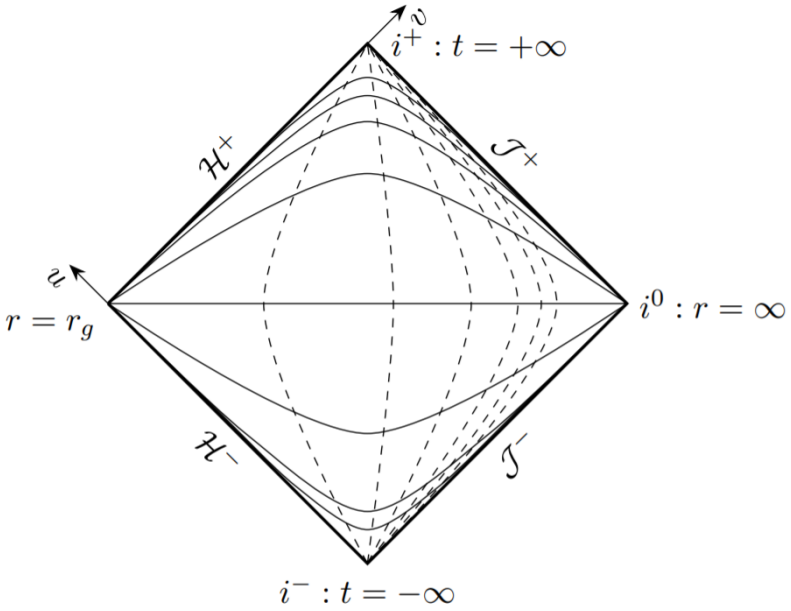
$$\Omega(x) = \frac{r(u,v)}{r_g} e^{\frac{r(u,v)}{r_g}} \frac{1}{\left(1 + u^2/4r_g^2\right)\left(1 + v^2/4r_g^2\right)}$$

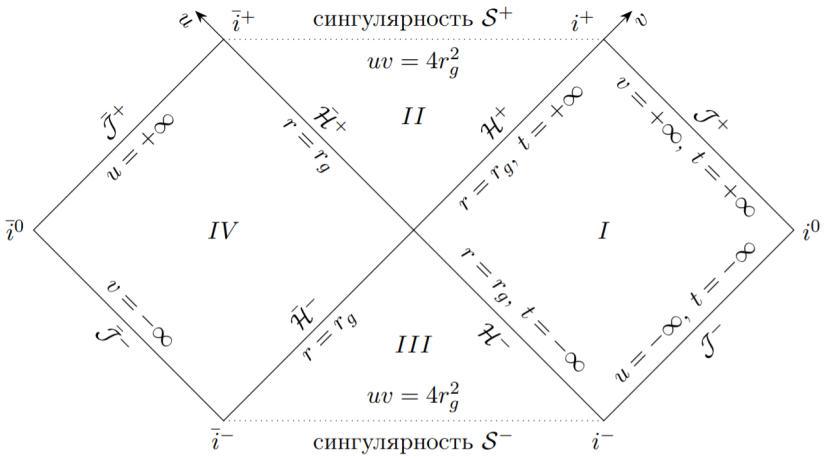
отобразит метрику $ds^2 = \frac{r_g}{r(u,v)} \mathrm{e}^{-\frac{r(u,v)}{r_g}} dudv - r^2(u,v)d\Omega^2$ в плоскую метрику листа бумаги.

(?? почему??)

В общем случае диаграммы Пенроуза получаются сжатием)«компактификацией») координат светового конуса, поэтому изотропные кривые всегда изображаются на них отрезками прямых, лежащими под углом 45° к горизонту, и причинная структура пространства-времени становится понятной.

Диаграмма Пенроуза для метрики Шварцшильда изображена на Рис. ниже.





Горизонт событий будущего $\mathcal{H}^+$ изображается лучом $u = 0, v > 0$, а горизонт событий прошлого $\mathcal{H}^-$ - лучом $v = 0, u < 0$.

Оба луча ограничивают внешнюю область $v > 0, u < 0$, что эквивалентно $r > r_g$ в шварцшильдовых координатах.

Эта область обозначена на конформной диаграмме 10.3 как область I.

Качественно координаты Шварцшильда на конформной диаграмме изображены на Рис. 10.4

отобразит метрику (10.30) в плоскую метрику листа бумаги.

В общем случае диаграммы Пенроуза получаются сжатием)«компактификацией») координат светового конуса, поэтому изотропные кривые всегда изображаются на них отрезками прямых, лежащими под углом 45° к горизонту, и причинная структура пространства-времени становится понятной.

Диаграмма Пенроуза для метрики Шварцшильда изображена на Рис. 10.3.

Горизонт событий будущего $\mathcal{H}^+$ изображается лучом $u = 0, v > 0$, а горизонт событий прошлого $\mathcal{H}^-$ - лучом $v = 0, u < 0$.

Оба луча ограничивают внешнюю область $v > 0, u < 0$, что эквивалентно $r > r_g$ в шварцшильдовых координатах.

Эта область обозначена на конформной диаграмме 10.3 как область I.

Качественно координаты Шаарцшильда на конформной диаграмме изображены на Рис.

10.4

никакого взаимодействия $\frac{2}{4}$ но который обязан существовать.

Формально горизонт $\overline{\mathcal{H}}^+$ и бесконечность $\overline{\mathcal{J}}^+$ отображаются в область $t \to -\infty$, а горизонт $\overline{\mathcal{H}}^-$ и бесконечность $\overline{\mathcal{J}}^-$ - в область $t \to +\infty$, так что можно предположить, что время там течет в некотором смысле назад.

Однако, скорее всего, это относится к области умозрительных непроверяемых предположений.

О применениях (??)

6.2.7 Static Spherically Symmetric Body

(лашк л10, семинар. перенесу потом в другое место скорее всего.)

обзор

В случае статического сферически-симметричного тела задачу нахождения гравитационного поля можно решить точно.

условие статического равновесия Оппенгеймера-Волкова

$$\frac{dp}{dr} = -G\frac{(\rho + p)\left(m(r) + 4\pi r^3 p(r)\right)}{r(r - 2Gm(r))}$$

критерий устойчивости состоит в том, что

$$K < \frac{1}{2G}.$$

Это условие выполнено при любых α. Масса такой звезды может быть сколь угодно велика и определяется только «обрезкой» на малых плотностях, где закон (10.37) перестает работать.

Поэтому предельная масса существенно зависит от уравнения состояния при малых плотностях.

модель

Тензором энергии-импульса имеет вид

$$T_0^0 = \rho(r), \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p(r)$$

Уравнения Эйнштейна принимают вид (?????!!!!!)

$$\begin{aligned}
&\dot{h} = 0\\
&r^{-1}e^{-2h}\left(k' + h'\right) = 4\pi G(\rho + p)\\
&e^{-2h}\left(k'' + k'^2 - k'h' + r^{-1}\left(k' - h'\right)\right) = 8\pi G p\\
&r^{-2}\left(1 - e^{-2h}\right) + r^{-1}\left(h' - k'\right)e^{-2h} = 4\pi G(\rho - p)
\end{aligned}$$

Первое уравнение приводит к статичности метрики.

Уравнение для $h(r)$ отделяется и дает

$$e^{-2h} = 1 - \frac{2Gm(r)}{r}, \quad m(r) = 4\pi \int\limits_0^r dr r^2 \rho(r)$$

С помощью четвертого уравнения отсюда легко найти $k'(r)$:

$$\frac{dk}{dr} = G\frac{m(r) + 4\pi r^3 p(r)}{r(r - 2Gm(r))}$$

Подставляя ответ в третье уравнение, получаем условие статического равновесия Оппенгеймера-Волкова

$$\frac{dp}{dr} = -G\frac{(\rho + p)\,(m(r) + 4\pi r^3 p(r))}{r(r - 2Gm(r))}$$

На этом уравнении строится теория устойчивости звезд в случаях, когда вращением можно пренебречь.

Уравнение следует решать с граничным условием $p(R) = 0$, где R - радиус звезды.

Оценка предела устойчивости звезд (??!!)

Давайте оценим предел устойчивости звезд.

Критерий устойчивости звезды радиуса R имеет вид:

$$r > 2Gm(r) \quad \forall r < R$$

Проще всего найти критерий устойчивости для звезды, состоящей из несжимаемого вещества ρ =const.

В этом случае для предельной массы имеем

$$M_{\max} = \sqrt{\frac{3}{32\pi\rho G^3}}$$

Для нейтронной звезды с плотностью $\rho \simeq 3 \cdot 10^{14}\ \mathbf{g/cm}^3$ имеем $M_{\max} \simeq 6.6 M_\odot$, где $M_\odot$ - масса Солнца.

Рассмотрим теперь звезду с уравнением состояния

$$p = \alpha\rho$$

В случае $\alpha = \frac{1}{3}$ мы имеем ультрарелятивистский идеальный газ.

Здесь имеется точное решение

$$m(r) = Kr, \quad K = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 6\alpha + 1} G^{-1}$$

и критерий устойчивости состоит в том, что

$$K < \frac{1}{2G}.$$

Это условие выполнено при любых α. Масса такой звезды может быть сколь угодно велика и определяется только «обрезкой» на малых плотностях, где закон (10.37) перестает работать.

Поэтому предельная масса существенно зависит от уравнения состояния при малых плотностях.

О применениях

(пока хз)

6.3 General Black Holes

6.3.1 9.1 The Reissner-Nordstrom Solution

The Reissner-Nordstrom (RN) solution describes a charged, spherically symmetric black hole.

• Such solutions are not very important astrophysically. In $G = 1$ units, the charge to mass ratio of a proton is $q/m \sim 10^{18}$. Then if a black hole has a charge to mass ratio $Q/M \gtrsim 10^{-18}$, it will repel protons instead of attracting them, preventing further charge accumulation. A similar conclusion holds for negative charges and electrons. Thus, real black holes always have essentially zero Q/M, but the RN solution is still useful for theoretical studies.

• The action for the Einstein-Maxwell equation is

$$S = \frac{1}{16\pi}\int dx\sqrt{-g}\left(R - F^{ab}F_{ab}\right), \quad F = dA$$

where the normalization of F differs from particle physics. The Einstein equation is

$$R_{ab} = \frac{1}{2}Rg_{ab} = 2\left(F_a{}^cF_{bc} - \frac{1}{4}g_{ab}F^{cd}F_{cd}\right)$$

and the Maxwell equations are the same as usual,

$$\nabla^b F_{ab} = 0, \quad dF = 0$$

• A generalization of Birkhoff's theorem with a similar proof states that the unique spherically symmetric solution of the Einstein-Maxwell equations with a non-constant area radius function r is the RN solution,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2$$

with the potential

$$A = -\frac{Q}{r}dt - P\cos\theta d\phi, \quad e = \sqrt{Q^2 + P^2}$$

As we'll show later, M represents the mass, Q represents the electric charge, and P represents the magnetic charge.

• Having a magnetic charge is perfectly acceptable since there is a singularity at $r = 0$. To see that P does represent magnetic charge, note that taking the Hodge dual of F essentially exchanges Q and P, with the factor $d(\cos\theta) = \sin\theta d\theta$ accounting for the metric determinant.

• The RN solution is static, with timelike Killing vector $k^a = (\partial/\partial t)^a$, and asymptotically flat at null infinity just like the Schwarzschild solution.

• To simplify the metric we define

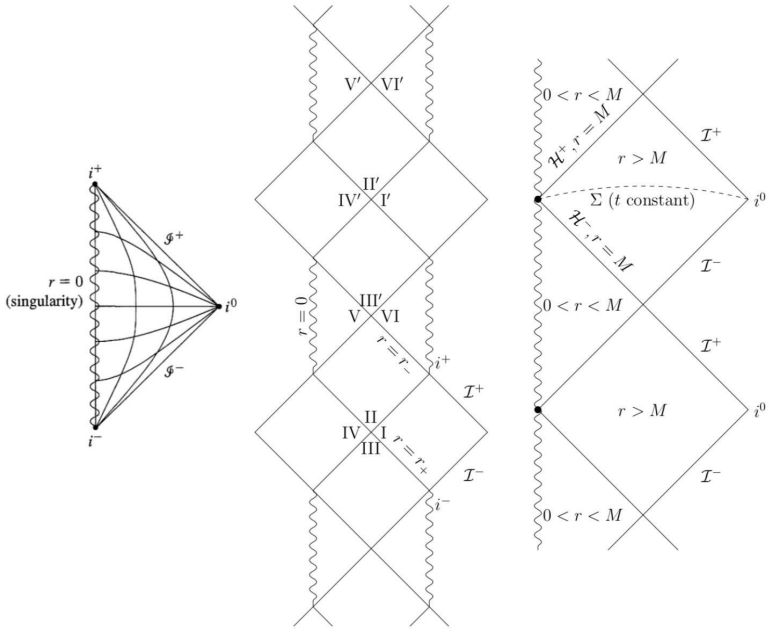
$$\Delta = r^2 - 2Mr + e^2 = (r - r_+)(r - r_-), \quad r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - e^2}$$

so that

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2}dt^2 + \frac{r^2}{\Delta}dr^2 + r^2d\Omega^2$$

There is a curvature singularity at $r = 0$, as can be checked by computing curvature invariants.

There are three qualitatively different cases: $M < e, M > e$, and $M = e$. The Penrose diagrams for these cases are shown below.



• In the case $M < e, \Delta$ is positive for all $r > 0$ and the metric is smooth down to $r = 0$. This is thus a naked singularity, and dynamical formulation of such a singularity is excluded by cosmic censorship. Unlike in the Schwarzschild solution, the singularity is timelike, not spacelike, so observers don't have to fall into it. In fact, one can check that timelike geodesics cannot fall into it, though lightlike geodesics and timelike non-geodesics can.

• Next, we consider the case $M > e$. Then Δ has zeroes at $r = r_\pm > 0$, but there are merely coordinate singularities. To get past them, we use the usual EF trick. In this case we change the radial coordinate, defining

$$dr_* = \frac{r^2}{\Delta} dr, \quad r_* = r + \frac{1}{2\kappa_+} \log \left| \frac{r - r_+}{r_+} \right| + \frac{1}{2\kappa_-} \log \left| \frac{r - r_-}{r_-} \right| + \text{const}, \quad \kappa_\pm = \frac{r_\pm - r_\mp}{2r_\pm^2}$$

Switching to null coordinates, we have

$$u = t - r_*, \quad v = t + r_*, \quad ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2} dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2$$

yielding the ingoing null EF coordinates. The metric is smooth for $r > 0$ with a smooth inverse, and we can analytically continue down to $0 < r < r_+$, yielding regions I, II, and V.

• Note that a surface of constant r has normal $n = dr$ and is hence null when $g^{rr} = \Delta/r^2 = 0$. Thus the surfaces $r = r_\pm$ are null hypersurfaces.

• By the same logic as the Schwarzschild case, r decreases along any future-directed causal curve in the region $r_- < r < r_+$. Then no point in the region $r < r_+$can send a signal to $\mathcal{I}^+$, so there is a black hole region for $r \leq r_+$and the future event horizon is $r = r_+$. Similarly, using outgoing EF coordinates one finds a white hole.

• Unlike the Schwarzschild case, there is no singularity in regions II or III. Instead, we may start in region II and use ingoing EF coordinates, yielding regions V and VI, where there is a timelike singularity. By switching to Kruskal coordinates, we find region III', which is isometric to region III. Repeating the procedure, we get the infinite conformal diagram shown.

Note. Consider a Cauchy surface Σ that goes through regions I and IV. Then only $D(\Sigma)$, consisting of regions I, II, III, and IV, is determined by the Cauchy data; the Cauchy horizon

is $r = r_-$. The spacetime outside $D(\Sigma)$ was determined by analyticity, which is a logically independent assumption that is not necessarily physically relevant. Note that we didn't run into this subtlety with the Schwarzschild spacetime.

Note. The fact that $D(\Sigma)$ is extendible seems to contradict strong cosmic censorship. However, the initial data is not generic. Consider a observer in region I that lives forever, sending signals to an observer that crosses into region II towards region VI. This observer receives an infinite number of signals in a finite proper time, before reaching region VI; this infinite blueshift indicates that a small perturbation in region I becomes large in region II, modifying the singularity structure.

Finally, we consider the extreme RN solution $M = e$.

• In this case, the metric is

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{M}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Using ingoing and outgoing EF coordinates, we can continue to the black hole or white hole region, which contain timelike singularities. Reversing the direction of the EF coordinates allows us to build an infinite Penrose diagram, though we should again take this result with a grain of salt.

• Unlike the previous cases, there is no Einstein-Rosen bridge; instead a surface of constant t is a wormhole of infinite proper length.

• Defining the shifted radial coordinate $\rho = r - M$ and setting $P = 0$, we have

$$ds^2 = -H^{-2}dt^2 + H^2\left(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2\right), \quad H = 1 + \frac{M}{\rho}$$

In fact, in general we have the Majumdar-Papapetrou solution

$$ds^2 = -H(\mathbf{x})^{-2}dt^2 + H(\mathbf{x})^2\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right), \quad A = H^{-1}dt$$

where H is any function obeying $\nabla^2 H = 0$.

• Choosing

$$H = 1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{M_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}$$

gives a static solution containing N extreme RN black holes; note that these black holes are still spheres, not points, since we're using a shifted radial coordinate. Evidently, the gravitational attraction is perfectly balanced by the electrostatic repulsion.

6.3.2 9.2 The Kerr Solution

First, we describe some uniqueness theorems.

• A spacetime asymptotically flat at null infinity is stationary and axisymmetric if it is stationary with timelike Killing vector k^a, admits a Killing vector m^a that is spacelike near $\mathcal{I}^{\pm}$ so that $[k, m] = 0$, and m^a generates a one-parameter group of isometries isomorphic to $U(1)$.

• Axisymmetry is a weakening of spherical symmetry. Given these conditions, we may choose coordinates so that $k = \partial/\partial t$ and $m = \partial/\partial\phi$ with $\phi \sim \phi + 2\pi$.

• It can be shown that if (M, g) is stationary, non-static, asymptotically flat, analytic, and suitably regular, then (M, g) is axisymmetric. This is a weaker analogue of Birkhoff's theorem; however, note that it requires analyticity, which is unphysical.

• In any case, if we assume axisymmetry in addition to the other hypotheses above, and assume we are in vacuum, then (M, g) is a member of the Kerr family of solutions parametrized

by mass M and angular momentum J. This is an example of a no-hair theorem. Adding charges yields the more general Kerr-Newman solution.

• Note that while the spacetime outside a collapsing spherically symmetric star is Schwarzschild, the spacetime outside a general collapsing star is not Kerr-Newman, because it is not stationary.

Next, we consider the Kerr solution in detail.

• The Kerr metric in Boyer-Lindquist coordinates is

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(1-\frac{2Mr}{\rho^2}\right)dt^2 - \frac{2Mar\sin^2\theta}{\rho^2}(dtd\phi + d\phi dt) \\ &+ \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left(\left(r^2+a^2\right)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta\right)d\phi^2 \end{aligned}$$

where

$$\Delta(r) = r^2 - 2Mr + a^2, \quad \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta, \quad a = J/M$$

The two Killing vectors are ∂_t and ∂_ϕ. There are indeed $dtd\phi$ cross terms, indicating the spacetime is not static.

• Boyer-Lindquist coordinates reduce to Schwarzschild coordinates for $a = 0$, but in general they are not ordinary spherical coordinates. If we take $M \to 0$ with a fixed, then

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\left(r^2+a^2\cos^2\theta\right)^2}{r^2+a^2}dr^2 + \left(r^2+a^2\cos^2\theta\right)d\theta^2 + \left(r^2+a^2\right)\sin^2\theta d\phi^2$$

which is flat spacetime in ellipsoidal coordinates, related to Cartesian coordinates by

$$x = \sqrt{r^2+a^2}\sin\theta\cos\phi, \quad y = \sqrt{r^2+a^2}\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta$$

That is, surfaces of constant r are ellipses, not spheres; the surface $r = 0$ is a disc, and $\theta = \pi/2$ is the ring at the boundary of the disc; one can show a curvature singularity occurs here.

• Similarly to the RN solution, we have

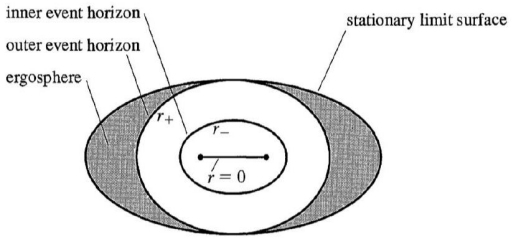
$$\Delta = (r-r_+)(r-r_-), \quad r_\pm = M \pm \sqrt{M^2-a^2}$$

giving the cases $M > a, M = a$, and $M < a$. The case $M < a$ is similar to the $M < e$ case of the RN solution, with a naked singularity, while $M = a$ is unstable. Thus we focus on the case $M > a$.

• The surfaces $r = r_\pm$ are both null hypersurfaces and event horizons. We have coordinate singularities at both event horizons, but we can define analogues of incoming and outgoing EF coordinates to extend through them.

• The maximal analytic extension is similar to RN, with the exception that we can go through the ring singularity at $r = 0$ to reach a region described by the Kerr metric with $r < 0$, where closed timelike curves exist. As argued earlier, these regions are unphysical as they are unstable with respect to perturbations outside the black hole. Note that we can't draw a standard Penrose diagram since we lack spherical symmetry, but we can restrict to $\theta = 0$ and draw a Penrose diagram for that two-dimensional spacetime.

• Next, we turn to the Killing horizons. The Killing horizon for $k = \partial_t$ is the stationary limit surface, which is not an event horizon.



Instead, inside the ergosphere, an observer must move with the rotation of the black hole; this is an extreme example of frame dragging.

• The inner and outer event horizons are Killing horizons for

$$k + \Omega_\pm m, \quad \Omega_\pm = \frac{a}{2Mr_\pm} = \frac{a}{r_\pm^2 + a^2}$$

More generally, every point inside the ergosphere is on some Killing horizon; the Killing horizon for $k + \Omega m$ marks the boundary where it is impossible to rotate with angular velocity less than Ω. We interpret $\Omega_+ = \Omega_H$ as the angular velocity of the black hole. More explicitly, it is the angular velocity of a photon at $r = r_+$moving directly against the rotation of the black hole.

6.3.3 9.3 Mass, Charge, and Spin

So far, we haven't defined the mass, charge, or angular momentum of our black hole solutions. For an asymptotically flat end we define the electric and magnetic charges as

$$Q = \frac{1}{4\pi} \lim_{r\to\infty} \int_{S_r^2} \star F, \quad P = \frac{1}{4\pi} \lim_{r\to\infty} \int_{S_r^2} F$$

where S_r^2 is a sphere of radius r. This is in agreement with our earlier definition of electric charge.

Example. The Coulomb potential is $A = -(q/r)dt$, so

$$F = -\frac{q}{r^2} dt \wedge dr$$

Taking the Hodge dual gives

$$(\star F)_{\theta\phi} = r^2 \sin\theta F^{tr} = q \sin\theta$$

where we used $g = r^2 \sin\theta$, and the charge is

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int d\theta d\phi q \sin\theta = q$$

as expected. By similar reasoning, the Kerr solution has electric charge Q and magnetic charge P.

Next, we define the Komar mass.

• For a stationary spacetime, we can define a conserved energy-momentum current

$$J_a = -T_{ab} k^b, \quad d \star J = 0$$

where k is a timelike Killing vector, and the conservation of J follows from the conservation of the stress-energy tensor and Killing's equation.

• Then we can define the total energy on a spacelike hypersurface Σ as

$$E[\Sigma] = -\int_\Sigma \star J$$

This is conserved, i.e. if Σ and Σ' bound a spacetime region R then

$$E[\Sigma'] - E[\Sigma] = -\int_{\partial R} \star J = -\int_R d \star J = 0$$

If we had $\star J = dX$ for some two-form X, then we could write $E[\Sigma]$ as an integral over $\partial\Sigma$ as we did for charge and evaluate it at infinity; however, this is not possible.

• On the other hand, we have

$$(\star d \star k)_a = -\nabla^b (dk)_{ab} = -\nabla^b \nabla_a k_b + \nabla^b \nabla_b k_a = 2\nabla^b \nabla_b k_a = -2R_{ab}k^b = 8\pi J'_a$$

where we used Killing's equation and $\nabla_a \nabla_b k^c = R^c{}_{bad} k^d$, and by Einstein's equation

$$J'_a = -2\left(T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab}\right) k^b$$

• The current J' is similar to J, but we now have

$$d \star dk = 8\pi \star J'$$

so $\star J'$ is exact; also note this implies J' is conserved. We thus define the Komar mass

$$M_{\text{Komar}} = -\frac{1}{8\pi} \lim_{r\to\infty} \int_{S^2_r} \star dk$$

That is, the Killing vector k itself serves as the analogue of the potential A. Physically, the Komar mass measures the total energy of the spacetime, including both the matter and the gravitational field, while our earlier naive definition measured the energy of the matter alone.

• Why is the Komar mass 'really' the energy? We can verify it works as expected in the Newtonian limit and for the Schwarzschild spacetime, and it is conserved during gravitational collapse; thus it should be the right expression for the energy of a black hole.

• Note that we used nothing in the definition of the Komar mass besides the Killing property; thus for an axisymmetric spacetime, we can define the angular momentum by

$$J_{\text{Komar}} = \frac{1}{16\pi} \lim_{r\to\infty} \int_{S^2_r} \star dm$$

where m is the Killing vector that generates rotations about the axis of symmetry, and the proportionality constant is fixed by the Newtonian limit.

Example. For the Schwarzschild solution, the Killing vector is ∂_t, so

$$k = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt, \quad dk = \frac{2M}{r^2} dt \wedge dr, \quad \star dk = -2M \sin\theta d\theta \wedge d\phi$$

Integrating, the Komar mass is M as expected.

Note. How can the Kerr solution have nonzero charge if the charge density is zero everywhere? A surface of constant t is asymptotically flat with two ends; the charges on each end are opposite. We simply have a given flux going through a wormhole. One could also take a spacelike slice with one end, which instead includes the singularity; in that case the charge density would be singular at the singularity; in either case we can get a nonzero result.

The same story goes for the Komar mass, since the Ricci tensor is zero everywhere. For instance, in the Schwarzschild solution, the two ends of a surface of constant t have opposite Komar masses, because the Killing vector in region IV points the opposite way as it does in region I.

The Komar mass is only defined for stationary spacetimes. We may instead define the energy as the value of the Hamiltonian in a Hamiltonian formulation of GR, and hence define the ADM mass.

• For simplicity, we work in vacuum and set $16\pi G = 1$. We perform a $3+1$ decomposition of spacetime with lapse function N and shift vector N^i,

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ij}\left(dx^i + N^i dt\right)\left(dx^j + N^j dt\right)$$

In terms of these variables, the Einstein-Hilbert action is

$$S = \int dt d^3x \sqrt{h} N \left(R^{(3)} + K_{ij}K^{ij} - K^2\right)$$

where $R^{(3)}$ is the Ricci scalar of h_{ij} and K^{ij} is the extrinsic curvature of a constant t surface,

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}\left(\dot{h}_{ij} - D_i N_j - D_j N_i\right)$$

and the dot denotes a t-derivative.

• We then switch to the Hamiltonian formulation in the usual way, by identifying canonical momenta and performing a Legendre transformation. The conjugate moment of N and N^i vanish, indicating that they are not dynamical, while

$$\pi^{ij} = \frac{\delta S}{\delta \dot{h}_{ij}} = \sqrt{h}\left(K^{ij} - K h^{ij}\right)$$

The Hamiltonian is defined as

$$H = \int d^3x \pi^{ij}\dot{h}_{ij} - \mathcal{L}$$

If we naively integrate by parts, we find that the Hamiltonian vanishes identically on-shell.

• The problem is that we neglected boundary terms. In a closed universe, there is no boundary and the total energy of the universe is indeed zero. But in general we must add a surface term, and it is the ADM energy

$$E_{\text{ADM}} = \frac{1}{16\pi}\lim_{r\to\infty}\int_{S_r^2} dA n_i \left(\partial_j h_{ij} - \partial_i h_{jj}\right)$$

where n^i is the unit outward normal and we restored $G = 1$.

• In general, there is a separate ADM energy for each asymptotic end, just like for the Komar mass. It can be shown that if the surfaces of constant t are orthogonal to the timelike Killing vector as $r \to \infty$, the ADM energy and Komar mass agree.

• We may also define the ADM 3-momentum

$$P_i = \frac{1}{8\pi}\lim_{r\to\infty}\int_{S_r^2} dA \left(K_{ij}n_j - K n_i\right)$$

We then define the ADM mass by

$$M_{\text{ADM}} = \sqrt{E_{\text{ADM}}^2 - P_i P_i}$$

• In 1979, Schoen and Yau proved the 'positive energy theorem': for any geodesically complete asymptotically flat initial data obeying the DEC, $E_{\text{ADM}} \geq \sqrt{P_i P_i}$ with equality only for Minkowski space.

• In the Schwarzschild spacetime, $E_{\text{ADM}} = M$, so the ADM energy is negative for $M < 0$. However, in this case a surface of constant t is singular, i.e. not geodesically complete.

6.3.4 9.4 Black Hole Mechanics

We begin with the example of the Penrose process.

• Consider a particle approaching a Kerr black hole along a geodesic, so that $E = -k \cdot p$ is conserved. If the particle decays at a point, p is conserved, so E is conserved. Similarly, $L = m \cdot p$ is conserved.

• Inside the ergosphere, E can be negative. Hence it is possible for a particle to emit a negative energy particle within the ergosphere. That particle falls into the black hole, reducing its energy and angular momentum, while the original particle leaves with more energy than it entered with; this is the Penrose process. In the context of photons, it is called superradiance.

• To understand the constraints on the Penrose process, note that since k is a future-directed causal vector outside the ergosphere, we must have $E \geq 0$ for any particle there to be 'going forward in time'. Similarly, the most restrictive constraint on a particle just outside the outer event horizon is from $\xi = k + \Omega_H m$, which gives

$$E \geq \Omega_H L$$

That is, the energy of a particle can't be too negative, or else it can't fall in.

• Next, define the irreducible mass of the black hole,

$$M_{\text{irr}}^2 = \frac{1}{2}\left(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2}\right)$$

Then it is straightforward to check that

$$\delta M_{\text{irr}} \propto \Omega_H^{-1} \delta M - \delta J \geq 0$$

Therefore, we can use the Penrose process to reduce a black hole's mass to M_{irr}, reducing its angular momentum to zero in the process. Here we are assuming that the black hole settles back down to a Kerr solution.

• This result is simple in terms of the area of the horizon $r = r_+$. Pulling back the metric to the horizon, i.e. setting $\Delta = dt = dr = 0$,

$$\gamma_{ij} dx^i dx^j = \left(r_+^2 + a^2 \cos^2\theta\right) d\theta^2 + \frac{\left(r_+^2 + a^2\right)^2 \sin^2\theta}{r_+^2 + a^2 \cos^2\theta} d\phi^2$$

and the area is

$$A = \int \sqrt{|\gamma|} d\theta d\phi = \int \left(r_+^2 + a^2\right) \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi\left(r_+^2 + a^2\right) = 16\pi M_{\text{irr}}^2 = 8\pi\left(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2}\right)$$

Therefore, we have shown that $\delta A \geq 0$.

• A similar procedure can be carried out for RN, decreasing the mass and charge. For a charged particle, $p \cdot \partial_t$ is not conserved because of the electromagnetic force, but the total energy $(p - qA) \cdot \partial_t$ is. Using this, we find an ergosphere outside the event horizon where negatively charged particles can have negative energy.

Example. The surface gravity of the Schwarzschild black hole. From the metric, we read off

$$K^\mu = \partial_t, \quad u^\mu = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2}, \quad V = \sqrt{1 - 2M/r}$$

so the redshift factor indeed diverges at the horizon. The four-acceleration is

$$a_\mu = \frac{M}{r^2(1 - 2M/r)} \nabla_\mu r, \quad a = \frac{M}{r^2\sqrt{1 - 2M/r}}$$

The surface gravity is thus

$$\kappa = Va|_{r=2M} = \frac{1}{4M}$$

Note that it becomes smaller as the black hole gets larger. More generally, in the Kruskal spacetime we have a future event horizon $\mathcal{H}^+$at $U = 0$ and a past event horizon $\mathcal{H}^-$at $V = 0$, with surface gravity $1/4M$ and $-1/4M$ respectively. This is an example of a bifurcate Killing horizon, as they intersect on the two-sphere $U = V = 0$ where the Killing vector vanishes.

Next, we state the laws of black hole mechanics.

• By a similar computation to above, the Kerr black hole has surface gravity

$$\kappa = \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{2M\left(M + \sqrt{M^2 - a^2}\right)}$$

so the change in the mass is simply

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi}\delta A + \Omega_H \delta J$$

Note that we proved this by assuming the perturbed black hole settled back down to a Kerr solution. In fact, this assumption is not necessary; this result holds for any small perturbation of the Kerr metric, as proven by Sudasky and Wald in 1992, where δM and δJ are the energy and angular momentum of the matter crossing the event horizon.

• We notice that this looks similar to the first law of thermodynamics,

$$dE = TdS + \mu dJ$$

where μ is a chemical potential for angular momentum. This motivates the identifications

$$E \leftrightarrow M, \quad T \leftrightarrow \kappa/2\pi, \quad S \leftrightarrow A/4, \quad \mu \leftrightarrow \Omega_H.$$

Here, the normalization of T is set because we know a Schwarzschild black hole indeed radiates at temperature $\kappa/2\pi$, as shown below.

• In the case of a charged black hole, we pick up the term $-\Phi_H \delta Q$, where Φ_H is the electrostatic potential difference between the event horizon and infinity.

• The zeroth law of thermodynamics states that in thermal equilibrium, T is constant throughout a system. Similarly, the zeroth law of black hole mechanics states that the future event horizon of a stationary black hole obeying the DEC has constant κ.

• The second law of black hole mechanics is $\delta A \geq 0$, as shown by Hawking's area theorem. When we account for black hole evaporation, A can decrease while the entropy of matter increases; hence we interpret A as a genuine entropy with the generalized second law $\delta\left(S_{\text{matter}} + A/4\right) \geq 0$.

Example. Consider two distant Schwarzschild black holes of masses M_1 and M_2. Then if they merge to a black hole which eventually settles down to a Schwarzschild black hole of mass M, then the second law gives

$$M \geq \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$$

placing a limit on the amount of energy that can be carried away by gravitational waves.

Example. Consider an asymptotically flat initial data set with ADM energy E_i and apparent horizon area A_{app} , which settles into a Kerr black hole with parameters M and J. Then we have

$$A_{\text{app}} \leq A_i \leq 8\pi \left(M_f^2 + \sqrt{M_f^4 - J_f^2} \right) \leq 16\pi M_f^2$$

where A_i is the initial horizon area. Since gravitational waves can only carry away energy, $M_f \leq E_i$. Then we have the Penrose inequality $A_{\text{app}} \leq 16\pi E_i^2$, containing only quantities which can be directly computed from the initial data. It has been proven for time-symmetric initial data and serves as a test of weak cosmic censorship.

Note. Suppose we surround a Kerr black hole with a mirror. Then we expect a photon to continually fall through, getting more and more energy with every pass, creating a "black hole bomb". It is difficult to realize this in reality, because there isn't anything strong enough to act as the mirror.

However, the situation changes when we apply quantum mechanics. Massive fields such as the axion can have bound states around black holes, which look like hydrogen bound states at large radii. The black hole can be unstable to decay into such states with angular momentum, spinning down the black hole and building up a condensate of particles outside.

One prediction this makes is that we don't expect to see any black holes with spin above a certain value depending on the mass, which can be tested by LIGO, though measuring black hole spin is difficult. (The black hole doesn't spin down all the way by successively higher angular momentum modes, as they are exponentially suppressed near the black hole by the angular momentum barrier, so the rates are slow. There are also constraints from the field not coupling too strongly to the accretion disk about the black hole, though these wouldn't be a problem for something coupling purely gravitationally since the accretion disk mass isn't too big.) Another prediction is continuous gravitation wave emission at a constant frequency by the rotation of the condensate, which is possible to see since the radius is larger. Both of these should be probed by LIGO in the next decade, putting constraints on light (10^{-12}eV) axion-like particles.

6.4 Typical Particular Cases of Einstein Equations

Обсудим подробно типичные частные случаи уравнений Эйнштейна.

(прямо модели - в следующей главе, тут то, что можно применять в разных моделях)

6.4.1 Weak Gravitational Fields

(от Лашкевича тоже добавлю теорию сюда)

Основные формулы слабого поля

(потом выпишу, пока - хз)

О применениях слабого поля

Конструкция слабого поля применяется в гравитационных волнах, именно с неё и начинается их изучение.

(тут конкретно укажу.)

Метрика слабого поля

Рассмотрим стационарное гравитационное поле на больших расстояниях r от создающего его тела и определим первые члены его разложения по степеням $1/r$.

Вдали от тела поле слабое, то есть что метрика пространствавремени здесь почти галилеева, т.е. можно выбрать такую систему отсчета, в которой компоненты метрического тензора почти равны своим галилеевым значениям:

$$g_{00}^{(0)} = 1, \quad g_{0\alpha}^{(0)} = 0, \quad g_{\alpha\beta}^{(0)} = -\delta_{\alpha\beta}.$$

Соответственно этому представим g_{ik} в виде

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}$$

где h_{ik} - малые поправки, определяющие гравитационное поле.

Оперируя с тензором h_{ik}, условимся в дальнейшем поднимать и опускать его индексы с помощью «невозмущенной» метрики: $h_i^k = g^{(0)kl}h_{il}$ и т.п. При этом необходимо отличать h^{ik} от поправок в контравариантных компонентах метрического тензора g^{ik}, которые определяются решением уравнений

$$g_{il}g^{lk} = \left(g_{il}^{(0)} + h_{il}\right) g^{lk} = \delta_i^k$$

так, с точностью до величин второго порядка малости находим:

$$g^{ik} = g^{ik(0)} - h^{ik} + h_l^i h^{lk}$$

С той же точностью определитель метрического тензора

$$g = g^{(0)}\left(1 + h + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}h_k^i h_i^k\right)$$

где $h = h_i^i$.

(?? хз откуда эти формулы, потом в линале пропишу их, пока запоминаю, наверное, это так.)

(хотелось бы конкретный тут пример посчитать, мб потом приведу его)

малость h_{ik} не фиксирует однозначного выбора системы отсчета

(хз, к чему это)

Подчеркнем, что условие малости h_{ik} отнюдь не фиксирует однозначного выбора системы отсчета.

Если это условие выполнено в какой-либо одной системе, то оно будет выполнено и после любого преобразования $x^{ii} = x^i + \xi^i$, где ξ^i - малые величины.

Согласно (94.3) (??!!!) тензор h_{ik} переходит при этом в

$$h'_{ik} = h_{ik} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x^i}$$

где $\xi_i = g_{ik}^{(0)}\xi^k$ (ввиду постоянства $g_{ik}^{(0)}$ ковариантные производные в (94.3) сводятся в данном случае к обычным производным).

Поправки в первом порядке малости

В первом приближении, с точностью до членов порядка $1/r$, малые добавки к галилеевым значениям даются соответствующими членами разложения центрально-симметричной метрики Шварцшильда.

В соответствии с отмеченной неопределенностью в выборе (галиеевой на бесконечности) системы отсчета, конкретный вид h_{ik} зависит при этом от способа определения радиальной координаты r.

Так, если шварцшильдова метрика представлена в виде (100.14), первые члены ее разложения при больших r даются выражением (100.18).

Перейдя в нем от сферических пространственных координат к декартовым (для чего надо заменить $dr = n_\alpha dx^\alpha$, где $\mathbf{n}$ - единичный вектор в направлении $\mathbf{r}$), получим следующие значения:

$$h_{00}^{(1)} = -\frac{r_g}{r}, \quad h_{\alpha\beta}^{(1)} = -\frac{r_g}{r} n_\alpha n_\beta, \quad h_{0\alpha}^{(1)} = 0$$

где $r_g = (??)$.

(не совсем понял, как векторами n пользоваться?)

Поправки во втором порядке малости

Среди членов второго порядка, пропорциональных $1/r^2$, имеются члены двоякого происхождения.

Часть членов возникает в результате нелинейности уравнений Эйнштейна из членов первого порядка. Поскольку последние зависят только от массы тела, то только от нее же зависят и эти члены второго порядка. Поэтому эти члены можно получить путем разложения шварцшильдовой метрики.

В тех же координатах найдем:

$$h_{00}^{(2)} = 0, \quad h_{\alpha\beta}^{(2)} = -\left(\frac{r_g}{r}\right)^2 n_\alpha n_\beta$$

(?? откуда это - не знаю)

Остальные члены второго порядка возникают как соответствующие решения линеаризованных уравнений поля.

Произведем линеаризацию уравнений, выписывая формулы в общем виде, не учитывая сразу стационарности поля.

При малых h_{ik} величины Γ_{kl}^i, выражающиеся через производные от h_{ik}, тоже малы.

Пренебрегая степенями выше первой, мы можем оставить в тензоре кривизны только члены в первой скобке:

$$R_{iklm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m}\right)$$

(укажу потом эту формулу в разделе про него, она не сложная)

Для тензора Риччи имеем с той же точностью: $R_{ik} = g^{im} R_{ilmk} \approx g^{im(0)} R_{limk}$, то есть

$$R_{ik} = \frac{1}{2}\left(-g^{lm(0)}\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m} + \frac{\partial^2 h_i^l}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_k^l}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^k}\right)$$

Его можно упростить, воспользовавшись оставшимся произволом в выборе системы отсчета.

Именно, наложим на h_{ik} четыре (по числу произвольных функций ξ^i) дополнительных условия

$$\frac{\partial \psi_i^k}{\partial x^k} = 0, \quad \psi_i^k = h_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k h$$

Тогда последние три члена в (105.9) взаимно сокращаются и остается

$$R_{ik} = -\frac{1}{2} g^{lm(0)} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m}$$

(??!!! проделаю это, это идейно важный переход)

В стационарном случае, когда h_{ik} не зависят от времени, выражение для R_{ik} сводится к $R_{ik} = 1/2\Delta h_{ik}$, где Δ - оператор Лапласа по трем пространственным координатам.

Уравнения же Эйнштейна для поля в пустоте сводятся, таким образом, к уравнениям Лапласа

$$\Delta h_{ik} = 0$$

с дополнительными условиями (105.10), принимающими вид

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(h_\alpha^\beta - \frac{1}{2} h \delta_\alpha^\beta\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} h_0^\beta = 0$$

Обратим внимание на то, что эти условия все еще не фиксируют вполне однозначного выбора системы отсчета.

Легко убедиться в том, что если h_{ik} удовлетворяют условиям (105.13)-(105.14), то таким же условиям будут удовлетворять и h'_{ik}, если только ξ^i удовлетворяют уравнениям

$$\Delta \xi^i = 0$$

Компонента h_{00} должна даваться скалярным решением трехмерного уравнения Лапласа. Такое решение, пропорциональное $1/r^2$, имеет, как известно, вид $\mathbf{a}\nabla\frac{1}{r}$, где $\mathbf{a}$ - постоянный вектор.

Но член такого вида в h_{00} всегда может быть ликвидирован путем простого смещения начала координат в члене первого порядка по $1/r$.

(?? почему это так???)

Таким образом, наличие такого члена свидетельствовало бы лишь о неудачном выборе начала координат и потому не представляет интереса.

Компоненты $h_{0\alpha}$ даются векторным решением уравнения Лапласа, т.е. должны иметь вид

$$h_{0\alpha} = \lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{1}{r}$$

где $\lambda_{\alpha\beta}$ - постоянный тензор.

Условие (105.14) дает

$$\lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{1}{r} = 0$$

откуда следует, что

$$\lambda_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + \lambda \delta_{\alpha\beta},$$

где $a_{\alpha\beta}$ антисимметричный тензор.

Но решение вида $\lambda \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{1}{r}$ может быть исключено преобразованием (105.5) с $\xi^0 = \lambda/r, \xi^\alpha = 0$ (удовлетворяющими условию (105.15)). Поэтому реальным смыслом обладает лишь решение

$$h_{0\alpha} = a_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{1}{r}$$

Наконец, аналогичными, хотя и более громоздкими рассуждениями можно показать, что надлежащим преобразованием пространственных координат всегда можно исключить величины $h_{\alpha\beta}$, даваемые тензорным (симметричным по α, β) решением уравнения Лапласа.

Что касается тензора $a_{\alpha\beta}$, то он связан с тензором полного момента $M_{\alpha\beta}$, и окончательное выражение для $h_{0\alpha}$ имеет вид

$$h_{0\alpha}^{(2)} = \frac{2k}{c^3} M_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{1}{r} = -\frac{2k}{c^3} M_{\alpha\beta} \frac{n_\beta}{r^2}$$

Покажем это путем вычисления интеграла (96.17).

(???? пока даже идейно не понимаю, откуда достать его???)

Момент $M_{\alpha\beta}$ связан только с $h_{0\alpha}$, и потому при вычислении все остальные компоненты h_{ik} можно считать отсутствующими.

С точностью до членов первого порядка по $h_{0\alpha}$ имеем из (96.2)-(96.3) (замечаем, что $g^{\alpha 0} = -h^{\alpha 0} = h_{\alpha 0}$, а g отличается от 1 лишь на величины второго порядка):

$$h^{\alpha 0 \beta} = \frac{c^4}{16\pi k} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left(g^{\alpha 0} g^{\beta\gamma} - g^{\gamma 0} g^{\alpha\beta} \right) = -\frac{c^4}{16\pi k} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left(h_{\alpha 0} \delta_{\beta\gamma} - h_{\gamma 0} \delta_{\alpha\beta} \right)$$

При подстановке сюда (105.16) второй член под знаком производной исчезает, и мы получаем

$$h^{\alpha 0 \beta} = -\frac{c}{8\pi} M_{\alpha\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{1}{r} = -\frac{c}{8\pi} M_{\alpha\gamma} \frac{3 n_\beta n_\gamma - \delta_{\beta\gamma}}{r^3}$$

С помощью этого выражения находим, производя интегрирование в (96.17) по поверхности сферы радиуса r ($df_\gamma = n_\gamma r^2 do$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \oint \left(x^\alpha h^{\beta 0 \gamma} - x^\beta h^{\alpha 0 \gamma} \right) df_\gamma &= -\frac{1}{4\pi} \int \left(n_\alpha n_\gamma M_{\beta\gamma} - n_\beta n_\gamma M_{\alpha\gamma} \right) do = \\ &= -\frac{1}{3} \left(\delta_{\alpha\gamma} M_{\beta\gamma} - \delta_{\beta\gamma} M_{\alpha\gamma} \right) = \frac{2}{3} M_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Аналогичное вычисление дает:

$$\frac{1}{c} \oint \lambda^{\alpha 0 \gamma \beta} df_\gamma = -\frac{c^3}{16\pi k} \oint \left(h_{\alpha 0} df_\beta - h_{\beta 0} df_\alpha \right) = \frac{1}{3} M_{\alpha\beta}$$

Складывая обе величины, получим требуемое значение $M_{\alpha\beta}$.

Подчеркнем, что в общем случае, когда поле вблизи тела может не быть слабым, $M_{\alpha\beta}$ есть момент импульса тела вместе с гравитационным полем.

(?!!! отдельно про этот случай потом подумаю.)

Лишь если поле слабо на всех расстояниях, его вкладом в момент можно пренебречь.

Таким образом, поправки порядка $1/r^2$ имеют вид:

(сюда вставлю формулы выше найденные)

Ковариантные компоненты метрического тензора:

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}^{(1)} + h_{ik}^{(2)}$$

А контравариантные компоненты с той же точностью равны

$$g^{ik} = g^{ik(0)} - h^{ik(1)} - h^{ik(2)} + h_l^{i(1)} h^{ik(1)}$$

Аналогия с вращением

Формула (105.16) может быть переписана в векторном виде как

$$\mathbf{g} = \frac{2k}{c^3 r^2}[\mathbf{nM}]$$

где $\mathbf{M}$ - вектор полного момента тела.

Известно, что в стационарном гравитационном поле на частицу действует «кориолисова сила», такая же, какая действовала бы на частицу в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью:

$$\Omega = \frac{c}{2}\sqrt{g_{00}}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{g}$$

Поэтому можно сказать, что в поле вращающегося тела на удаленную частицу действует кориолисова сила, отвечающая угловой скорости:

$$\Omega \approx \frac{c}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{g} = \frac{k}{c^2 r^3}[\mathbf{M} - 3\mathbf{n}(\mathbf{Mn})]$$

энергии гравитирующего тела по интегралу (96.16).

4-импульс слабого поля (???)

Вычислив нужные компоненты h^{ikl} по формуле (96.2) – (96.3), получим с требуемой точностью (оставляем члены $\sim 1/r^2$):

$$\begin{aligned} h^{\alpha 0\beta} =& 0 \\ h^{00\alpha} =& \frac{c^4}{16\pi k}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(g^{00}g^{\alpha\beta}\right) = \frac{mc^2}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(-\frac{\Delta^{\alpha\beta}}{r} + \frac{x^\alpha x^\beta}{r^3}\right) = \frac{mc^2}{4\pi}\frac{n^\alpha}{r^2} \end{aligned}$$

Интегрируя теперь в (96.16) по сфере радиуса r, получим окончательно;

$$P^\alpha = 0, \quad P^0 = mc$$

- результат, который естественно было ожидать.

Он является выражением факта равенства, как говорят, «гравитационной» и «инертной» масс.

«Гравитационной» называют массу, определяющую создаваемое телом гравитационное поле, - это та масса, которая входит в метрический тензор в гравитационном поле или, в частности, в закон Ньютона.

«Инертная» же масса определяет соотношение между импульсом и энергией тела и, в частности, энергия покоя тела равна этой его массе, умноженной на c^2.

(?? кстати, а иначе как могло бы быть? даже не представляю.)

Полная энергия материи и поля в случае постоянного гравитационного поля

В случае постоянного гравитационного поля оказывается возможным вывести простое выражение для полной энергии материи вместе с полем в виде интеграла только по пространству, занятому материей.

Получить его можно, например, исходя из следующего выражения, справедливого, когда все величины не зависят от x^0:

$$R_0^0 = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{-g}g^{i0}\Gamma^\alpha_{0i}\right)$$

(?? откуда оно??)

Интегрируя $R_0^0\sqrt{-g}$ по (трехмерному) пространству и применив трехмерную теорему Гаусса, получим:

$$\int R_0^0\sqrt{-g}dV = \oint \sqrt{-g}g^{i0}\Gamma_{0i}^{\alpha}df_{\alpha}$$

Взяв достаточно удаленную поверхность интегрирования и воспользовавшись на ней выражениями (105.6) для g_{ik}, получим после простого вычисления:

$$\int R_0^0\sqrt{-g}dV = \frac{4\pi k}{c^2}m = \frac{4\pi k}{c^3}P^0$$

Замечая также, что, согласно уравнениям поля,

$$R_0^0 = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_0^0 - \frac{1}{2}T\right) = \frac{4\pi k}{c^4}\left(T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3\right)$$

получаем искомую формулу:

$$P^0 = mc = \frac{1}{c}\int \left(T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3\right)\sqrt{-g}dV$$

Эта формула выражает полную энергию материи и постоянного гравитационного поля (т.е. полную массу тела) через тензор энергии-импульса одной только материи.

(?? мб она супер важная, а я пока и не применял её, тут приведу пример применения!!!)

Напомним, что в случае центральной симметрии поля мы имели для той же величины еще и другое выражение - формулу $m = \frac{4\pi}{c^2}\int\limits_0^a T_0^0 r^2 dr$.

(?! это формула из задачи про Шварцшильда, на которые я забил полностью.)

$h_{0\alpha}^{(2)}$ такое же для медленно вращающегося сферического тела

(?? я так понимаю, задача на потренироваться, потренируюсь потом!)

Показать, что формула $h_{0\alpha}^{(2)} = -\frac{2k}{c^3}M_{\alpha\beta}\frac{n_\beta}{r^2}$ остается справедливой для поля во всем пространстве вне вращающегося сферического тела при условии медленности вращения (момент $M \ll \mathbf{cmr}_g$), но без требования слабости центрально-симметричной части поля

В сферических пространственных координатах величина $h_{0\alpha}^{(2)}$ записывается как

$$h_{03} = \frac{2kM}{rc^2}\sin^2\theta$$

Рассматривая эту величину как малую поправку к шварцшильдовой метрике, надо проверить выполнение линеаризованного по h_{03} уравнения $R_{03} = 0$ (в остальных уравнениях поля поправочные члены выпадают тождественно).

R_{03} можно вычислить по формуле (4) из задачи к §95, причем линеаризация сводится к тому, что трехмерные тензорные операции должны производиться по "невозмущенной" метрике.

(??? тут вычисления, которые еще нужно проделать!!)

В результате получается уравнение

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\frac{\partial^2 h_{03}}{\partial r^2} + \frac{2r_g}{r^3}h_{03} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial h_{03}}{\partial\theta}\right) = 0$$

которому выражение (1) действительно удовлетворяет.

Вековое смещение частицы за счет вращения центрального тела (?!!)

Пусть частица движется в поле вращающегося тела. Покажем, что систематическое (вековое) смещение её орбиты, связанное с вращением центрального тела имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{2k\,[\mathbf{M}'\mathbf{M}]}{c^2 a^3\,(1-e^2)^{3/2}}$$

Ввиду малости всех релятивистских эффектов они накладываются друг на друга линейно, и при вычислении эффектов, происходящих от вращения центрального тела, можно пренебречь рассмотренным в §101 влиянием неньютоновости центрально-симметричного силового поля; другими словами, можно производить вычисления, считая из всех h_{ik} отличными от нуля лишь $h_{0\alpha}$.

Ориентация классической орбиты частицы определяется двумя сохраняющимися векторами: моментом импульса частицы $\mathbf{M} = [\mathbf{rp}]$ и вектором $\mathbf{A} = \left[\frac{\mathbf{p}}{m}\mathbf{M}\right] - \frac{kmm'\mathbf{r}}{r}$, сохранение которого специфично для ньютонова поля $\varphi = -km'/r$, где (m' есть масса центрального тела, m - масса частицы).

Вектор $\mathbf{M}$ перпендикулярен к плоскости орбиты, а вектор $\mathbf{A}$ направлен вдоль большой полуоси эллипса в сторону перигелия (и по величине равен $kmm'e$, где e - эксцентриситет орбиты).

Искомое вековое смещение орбиты можно описывать как изменение направления этих векторов.

Функция Лагранжа частицы, движущейся в поле $\mathbf{g} = \frac{2k}{c^3 r^2}[\mathbf{nM}]$ есть:

$$L = -mc\frac{ds}{dt} = L_0 + \delta L, \quad \delta L = mc\mathbf{g}\mathbf{v} = \frac{2km}{c^2 r^3}\,(\mathbf{M}'[\mathbf{vr}])$$

где момент центрального тела обозначаем здесь посредством $\mathbf{M}'$ в отличие от момента частицы $\mathbf{M}$.

Отсюда функция Гамильтона

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + \delta\mathscr{H}, \quad \delta\mathscr{H} = \frac{2k}{c^2 r^3}\,(\mathbf{M}'[\mathbf{rp}])$$

Вычисляя производную $\dot{\mathbf{M}} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{p}] + [\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}]$ с помощью уравнений Гамильтона $\dot{\mathbf{r}} = \partial\mathscr{H}/\partial\mathbf{p}, \dot{\mathbf{p}} = -\partial\mathscr{H}/\partial\mathbf{r}$, получим:

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{2k}{c^2 r^3}\,[\mathbf{M}'\mathbf{M}]$$

Интересуясь вековым ходом изменения $\mathbf{M}$, мы должны усреднить это выражение по периоду T обращения частицы.

(?? с таким усреднением пока что не знаком)

Усреднение удобно произвести с помощью параметрического представления зависимости r от времени при движении по эллиптической орбите в виде

$$r = a(1 - e\cos\xi), \quad t = \frac{T}{2\pi}(\xi - e\sin\xi)$$

где a и e - большая полуось и эксцентриситет эллипса.

(в механике уже этот раздел почти и готов, дотренирую его еще!!)

$$\overline{r^{-3}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{dt}{r^3} = \frac{1}{2\pi a^3}\int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{(1-e\cos\xi)^2} = \frac{1}{a^3\,(1-e^2)^{3/2}}$$

Таким образом, вековое изменение $\mathbf{M}$ дается формулой

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{2k\,[\mathbf{M}'\mathbf{M}]}{c^2a^3\,(1-e^2)^{3/2}}$$

т.е. вектор $\mathbf{M}$ вращается вокруг оси вращения центрального тела, оставаясь неизменным по величине.

Аналогичное вычисление для вектора $\mathbf{A}$ дает:

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{2k}{c^2r^3}\,[\mathbf{M}'\mathbf{A}] + \frac{6k}{c^2mr^5}\,(\mathbf{M}\mathbf{M}')\,[\mathbf{r}\mathbf{M}]$$

Усреднение этого выражения производится аналогично тому, как это было сделано выше; при этом из соображений симметрии заранее понятно, что усредненный вектор $\overline{\mathbf{r}/r^5}$ направлен вдоль большой полуоси эллипса, т.е. вдоль направления вектора $\mathbf{A}$. В итоге:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = [\mathbf{\Omega}\mathbf{A}], \quad \mathbf{\Omega} = \frac{2k\mathbf{M}'}{c^2a^3\,(1-e^2)^{3/2}}\,\{\mathbf{n}' - 3\mathbf{n}\,(\mathbf{n}\mathbf{n}')\}$$

($\mathbf{n}, \mathbf{n}'-$ единичные векторы в направлении $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}'$), т.е. вектор $\mathbf{A}$ вращается с угловой скоростью Ω, оставаясь неизменным по величине; последнее обстоятельство означает, что эксцентриситет орбиты не испытывает векового изменения.

(?? это же выше векторное умножение двух векторой (???))

Формулу (3) можно написать в виде

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\mathbf{\Omega}\boldsymbol{M}]$$

с тем же Ω, что и в (4); другими словами, Ω есть угловая скорость вращения эллипса «как целого».

Это вращение включает в себя как дополнительное (по отношению к рассмотренному в §101) смещение перигелия орбиты, так и вековое вращение ее плоскости вокруг направления оси тела (последний эффект отсутствует, если плоскость орбиты совпадает с экваториальной плоскостью центрального тела).

Для сравнения укажем, что рассмотренному в §101 эффекту соответствует

$$\Omega = \frac{6\pi km'}{c^2a\,(1-e^2)\,T}\mathbf{n}$$

(короче, перерешаю еще раз сам это, пока плохо понимаю.)

6.4.2 Weak Gravitational Field in Terms of ψ

(По Лашкевичу. ??? как вообще лучше, через h или через ψ решать??? зачем вообще через ψ мы находим решения??)

Итоговые формулы

(?) связь между решениями этих уравнений и свойствами гравитирующего тела

(нужно найти то есть массу и момент импульса этих тел по метрике (?))

(пока копия Лшк)

(по идее тут сформулирую выше итоговый вывод, который пока что у меня упущен, а дальше - выкладки как у Лашкевича, только своими словами скажу)

(7.10). Наложим d условий

$$\psi^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu} = 0, \quad \psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2}h.$$

Обратно,

$$h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{d-2}\psi, \quad \psi = \psi^{\bar{\mu}}_{\mu} = -\frac{d-2}{2}h$$

При этих условиях все слагаемые в (7.5), кроме первого, сокращаются, и тензор Риччи приобретает вид

$$R^{(1)}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu}$$

Соответственно, уравнения Эйнштейна в калибровке (7.11) имеют вид волнового уравнения с распределенным источником:

$$\Box\psi_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}.$$

Условия согласованности калибровки с этим уравнением

$$0 = \Box\psi^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu} = -16\pi G T^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu}$$

совпадает с уравнением непрерывности для тензора энергии-импульса в лидирующем порядке. Это значит, что эффекты обмена энергией и импульсом между гравитационным полем и материей являются эффектами второго порядка по $h_{\mu\nu}$ и лежат за пределами линейного приближения.

В стационарном релятивистском случае тензор $\psi_{\mu\nu}$ удовлетворяет уравнениям

$$\Delta\psi_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_i\psi_{0i} = 0, \quad \partial_i\psi_{ij} = 0$$

Чтобы найти связь между решениями этих уравнений и свойствами гравитирующего тела, выразим суперпотенциалы псевдотензора энергии-импульса $\tau^{\mu\nu\lambda}$ и $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}$ через асимптотики решений.

Отметим, что условие $\psi^{\bar{\nu}}_{\mu,\nu} = 0$ не фиксирует калибровку до конца. Преобразование (7.10) не нарушает это условие, если

$$\Box\xi^{\mu} = 0,$$

что в случае не зависящих от времени преобразований означает

$$\Delta\xi^{\mu} = 0$$

Будем искать решение уравнения Лапласа двух лидирующих порядках по r^{-1}. Функция r^{3-d} сама является решением уравнения Лапласа. Решения, которые спадают быстрее, даются просто производными этого решения. Поэтому имеем

$$\begin{aligned}
\psi_{00} &= Ar^{3-d} + B^k\partial_k r^{3-d} + O\left(r^{1-d}\right)\\
\psi_{0i} &= A^i r^{3-d} + B^{ik}\partial_k r^{3-d} + O\left(r^{1-d}\right)\\
\psi_{ij} &= A^{ij} r^{3-d} + B^{ijk}\partial_k r^{3-d} + O\left(r^{1-d}\right), \quad A^{ij} = A^{ji}, \quad B^{ijk} = B^{jik}
\end{aligned}$$

Калибровочное условие сводится к равенствам

$$\begin{aligned}
A^i\partial_i r^{3-d} = A^{ij}\partial_j r^{3-d} = 0\\
B^{ik}\partial_i\partial_k r^{3-d} = B^{ijk}\partial_j\partial_k r^{3-d} = 0.
\end{aligned}$$

Первая строчка немедленно дает $A^i = A^{ij} = 0$. Из второй строчки получаем, что [2]

$$B^{ik} = B^{[ik]} + C\delta^{ik}, \quad B^{ijk} = B^{i[jk]} + C^i\delta^{jk} = B^{j[ik]} + C^j\delta^{ik}$$

Члены с символами Кронекера разрешены потому, что соответствующий вклад в левую часть калибровочного условия пропорционален функции $\Delta r^{3-r} = 0$.

Из последнего равенства нетрудно доказать, что $B^{ijk} = 0$ и, таким образом, $\psi_{ij} = 0$. Выражения для ψ_{00} и ψ_{0i} нетрудно упростить, используя преобразование координат, удовлетворяющее (7.22). Действительно, преобразованием ${}^3\xi^i = -B^i/A, \xi^0 = 0$ можно устранить второй член в выражении для ψ_{00}, а преобразованием $\xi^i = 0, \xi^0 = -Cr^{3-d}$ устранить симметричную часть в B^{ik}. Итак, мы можем записать решение в виде

$$\psi_{00} = Ar^{3-d}, \quad \psi_{0i} = B^{ik}\partial_k r^{3-d} \quad \left(B^{ki} = -B^{ik}\right), \quad \psi_{ij} = 0$$

Осталось связать константы A и B^{ik}с данными об источнике гравитации. Для этого вычислим величины $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}$, входящие в псевдотензор энергии-импульса. Все компоненты нас интересовать не будут. Мы ограничимся компонентами $\chi^{\mu 0kl}$.

В компоненту χ^{00kl} вносит вклад как ψ_{00}, так и ψ_{0i}, но, поскольку на болыших расстояниях $|\psi_{00}| \gg |\psi_{0i}|$, достаточно сохранить только вклад ψ_{00}. Действительно,

$$\chi^{00kl} = \frac{|g|}{16\pi G}\left(g^{00}g^{kl} - g^{0k}g^{0l}\right).$$

Первый член в скобках имеет в качестве первой поправки ψ_{00}, а второй - только ψ_{0i}. Поэтому вторым слагаемым можно пренебречь. Первая поправка в $|g|$ также содержит ψ_{00}, так что членами, содержащими ψ_{0i} пренебрегаем. В результате получаем

$$\chi^{00kl} = -\frac{\delta_{kl}}{16\pi G}\left(1 - Ar^{3-d}\right), \quad \tau^{00k} = -\frac{(d-3)A}{16\pi G}r^{1-d}x^k$$

Подставляя в (6.28) получаем полную массу гравитируюшей системы

$$M = P^0 = \oint dS_{0i}\tau^{00i} = -\frac{(d-3)A}{16\pi G}\oint \frac{dS_{0i}x^i}{r^{d-1}} = -\frac{(d-3)S_{d-1}A}{16\pi G}$$

Вклад ψ_{0i} в массу, очевидно, будет стремиться к нулю при $r \to \infty$, что оправдывает сделанное приближение. Итак,

$$A = -\frac{16\pi GM}{(d-3)S_{d-1}}$$

в полном согласии с нерелятивистской формулой (7.16). В четырехмерном случае имеем

$$A = -4GM \quad (d = 4)$$

Теперь вычислим χ^{i0kl}:

$$\chi^{i0kl} = \frac{|g|}{16\pi G}\left(g^{0i}g^{kl} - g^{ik}g^{0l}\right)$$

Оба слагаемых содержат множитель вида $g^{0i} = -h^{\overline{0i}} = h_{0i} = \psi_{0i}$, поэтому мы можем положить $|g| = 1$, $g^{ik} = -\delta^{ik}$. Находим

$$\chi^{i0kl} = \frac{d-3}{16\pi G}\frac{\left(\delta^{kl}B^{im} - \delta^{ik}B^{lm}\right)x^m}{r^{d-1}},$$
$$\tau^{i0k} = \frac{d-3}{16\pi G}\frac{B^{im}\left(\delta^{km}r^2 - (d-1)x^kx^m\right)}{r^{d+1}}$$

Так как $\tau^{i0k} \sim r^{1-d}$ интеграл по поверхности для P^i обращается в нуль и мы получаем

$$P^i = 0$$

как и следовало ожидать в статической задаче. А вот интеграл для момента импульса имеет степень на единицу больше и, вообще говоря, не равен нулю. Прямое вычисление с помощью (6.30) дает

$$B^{ij} = \frac{8\pi G}{(d-3)S_{d-1}} J^{ij}$$

В четырехмерном случае имеем

$$B^{ij} = 2GJ^{ij} \quad (d=4)$$

Итак, по ведущим асимптотикам «гравитационных потенциалов» $h_{\mu\nu}$ на больших расстояниях мы можем узнать обшие массу и момент импульса системы гравитирующих тел.

6.4.3 Constant Gravitational Field (!!)

(!! скоро доработаю, пока просто руки не дошли.)

Суть постоянного поля

(в 1ю часть потом перенесу)

Искомые уравнения должны быть инвариантны по отношению к преобразованию

$$x^\alpha \to x^\alpha, \quad x^0 \to x^0 + f\left(x^\alpha\right),$$

не меняющему стационарности поля.

Мировое время в стационарном поле

Гравитационное поле называют постоянным, если можно выбрать такую систему отсчета, в которой все компоненты метрического тензора не зависят от временной координаты x^0; последнюю называют в таком случае мировым временем.

Выбор мирового времени не вполне однозначен. Так, при добавлении к x^0 произвольной функции пространственных координат все g_{ik} по-прежнему не будут содержать x^0; это преобразование соответствует произвольности выбора начала отсчета времени в каждой точке пространства. Кроме того, разумеется, мировое время допускает умножение на произвольную постоянную, т.е. произвольный выбор единицы его измерения.

Строго говоря, постоянным может быть лишь поле, создаваемое одним телом. В системе нескольких тел их взаимное гравитационное притяжение приводит к возникновению движения, в результате чего создаваемое ими поле не может быть постоянным.

Если создающее поле тело неподвижно (в системе отсчета, в которой g_{ik} не зависит от x^0), то оба направления времени эквивалентны. При должном выборе начала отсчета времени во всех точках пространства, интервал ds в этом случае не должен меняться при изменении знака x^0, а потому все компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора должны быть тождественно равными нулю. Такие постоянные гравитационные поля мы будем называть статическими.

Неподвижность тела, однако, не является обязательным условием постоянства создаваемого им поля. Так, будет постоянным также и поле равномерно вращающегося

вокруг своей оси аксиально-симметричного тела. Но в этом случае оба направления времени уже отнюдь не равноценны - при изменении знака времени меняется знак угловой скорости вращения. Поэтому в таких постоянных гравитационных полях (которые мы будем называть стационарными) компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора, вообще говоря, отличны от нуля.

Смысл мирового времени в постоянном гравитационном поле заключается в том, что его промежуток между двумя событиями в некоторой точке пространства совпадает с его промежутком между любыми другими двумя событиями в любой другой точке пространства, соответственно одновременными (в выясненном в §84 смысле) с первой парой событий. Но одинаковым промежуткам мирового времени x^0 соответствуют в разных точках пространства различные промежутки собственного времени τ. Связь (84.1) между ними можно написать теперь в виде

$$\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}x^0$$

применимом к любым конечным промежуткам.

В слабом гравитационном поле можно воспользоваться приближенным выражением (87.12); при этом (88.1) дает, с той же точностью:

$$\tau = \frac{x^0}{c}\left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right)$$

Таким образом, собственное время течет тем медленнее, чем меньше гравитационный потенциал в данной точке пространства, т.е. чем больше его абсолютная величина (ниже, в §99 будет показано, что потенциал φ отрицателен). Если из двух одинаковых часов одни находились некоторое время в гравитационном поле, то после этого часы, бывшие в поле, окажутся отставшими.

Как уже было указано, в статическом гравитационном поле компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора равны нулю. Согласно результатам §84 это значит, что в таком поле возможна синхронизация часов во всем пространстве.

Заметим также, что для элемента пространственного расстояния в статическом поле имеем просто:

$$dl^2 = -g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$$

В стационарном поле $g_{0\alpha}$ отличны от нуля и синхронизация часов во всем пространстве невозможна. Поскольку g_{ik} не зависят от x^0, то формулу (84.14) для разности значений мирового времени двух одновременных событий, происходящих в разных точках пространства, можно написать в виде

$$\Delta x^0 = -\int \frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{g_{00}}$$

применимом для любых двух точек на линии, вдоль которой производится синхронизация часов. При синхронизации же вдоль замкнутого контура разность значений мирового времени, которая обнаружилась

бы по возвращении в исходную точку, равна интегралу

$$\Delta x^0 = -\oint \frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{g_{00}}$$

взятому по этому замкнутому контуру [1]). Рассмотрим распространение лучей света в постоянном гравитационном поле. Мы видели в §53, что частота света равна производной от эйконала ψ по времени (с обратным знаком). Частота, измеренная в мировом времени x^0/c, поэтому равна $\omega_0 = -c\partial\psi/\partial x^0$.

Поскольку уравнение эйконала (87.9) в постоянном поле не содержит x^0 явно, то частота ω_0 остается постоянной при распространении луча света.

Красное смещение

(?? как это связано с красным смещением в космологии?)

Частота, измеренная в собственном времени, равна $\omega = -\partial\psi/\partial\tau$; она различна в разных точках пространства. В силу соотношения

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x^0}\frac{\partial x^0}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial x^0}\frac{c}{\sqrt{g_{00}}}$$

имеем:

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{g_{00}}}$$

В слабом гравитационном поле получаем отсюда приближенно:

$$\omega = \omega_0\left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right)$$

Мы видим, что частота света возрастает с увеличением абсолютной величины потенциала гравитационного поля, т.е. при приближении к создающим поле телам; наоборот, при удалении луча от этих тел частота света уменьшается. Если луч света, испущенный в точке, где гравитационный потенциал равен φ_1, имеет (в этой точке) частоту ω, то, придя в точку с потенциалом φ_2, он будет иметь частоту (измеренную в собственном времени в этой точке), равную

$$\frac{\omega}{1 - \frac{\varphi_1}{c^2}}\left(1 - \frac{\varphi_2}{c^2}\right) \approx \omega\left(1 + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}\right)$$

Линейчатый спектр, испускаемый какими-либо атомами, находящимися, например, на Солнце, выглядит там точно так же, как выглядит на Земле спектр, испускаемый находящимися на ней такими же атомами. Если же на Земле наблюдается спектр, испускаемый атомами, находящимися на Солнце, то, как следует из вышеизложенного, его линии окажутся смещенными по сравнению с линиями такого же спектра, испускаемого на Земле.

Именно, каждая линия с частотой ω будет смещена на интервал $\Delta\omega$, определяемый из формулы

$$\Delta\omega = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}\omega$$

где φ_1 и φ_2 - потенциалы гравитационного поля соответственно в месте испускания и в месте наблюдения спектра. Если на Земле наблюдается спектр, испускаемый на Солнце или звездах, то $|\varphi_1| > |\varphi_2|$ и из (88.8) следует, что $\Delta\omega < 0$, т.е. смещение происходит в сторону меньших частот. Описанное явление называют красным смещением.

(?? ниже качественное объяснение, которое потом пропишу, пока не так понимаю)

Происхождение этого явления можно уяснить себе непосредственно на основании сказанного выше о мировом времени. В силу постоянства поля промежуток мирового времени, в течение которого некоторое колебание в световой волне распространится из одной заданной точки пространства в другую, не зависит от x^0. Поэтому число колебаний, происходящих в единицу мирового времени, будет одинаковым во всех точках вдоль луча. Но один и тот же промежуток мирового времени соответствует тем большему промежутку собственного времени, чем дальше мы находимся от создающих поле тел.

Следовательно, частота, т.е. число колебаний в единицу собственного времени, будет падать при удалении света от этих масс.

Энергия и скорость в постоянном поле

(!! тут крутые формулы, выпишу их потом обязательно себе в 1ю часть)

При движении частицы в постоянном поле сохраняется ее энергия, определяемая как производная $(-c\partial S/\partial x^0)$ от действия по мировому времени; это следует, например, из того, что x^0 не входит явно в уравнение Гамильтона-Якоби. Определенная таким образом энергия есть временная компонента ковариантного 4-вектора импульса $p_k = mcu_k = mcg_{ki}u^i$. В статическом поле $ds^2 = g_{00}\left(dx^0\right)^2 - dl^2$ и мы имеем для энергии, которую обозначим здесь посредством $\mathscr{E}_0$:

$$\mathscr{E}_0 = mc^2 g_{00}\frac{dx^0}{ds} = mc^2 g_{00}\frac{dx^0}{\sqrt{g_{00}\left(dx^0\right)^2 - dl^2}}$$

Введем скорость частицы:

$$v = \frac{dl}{d\tau} = \frac{cdl}{\sqrt{g_{00}}dx^0}$$

измеренную в собственном времени, т.е. наблюдателем, находящимся в данном месте. Тогда мы получим для энергии:

$$\mathscr{E}_0 = \frac{mc^2\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Это есть та величина, которая остается постоянной при движении частицы.

Легко показать, что выражение (88.9) для энергии остается в силе и в стационарном поле, если только скорость v измерять в собственном времени, определенном по часам, синхронизованным вдоль траектории частицы. Если частица выходит из точки A в момент мирового времени x^0 и приходит в бесконечно близкую точку B в момент $x^0 + dx^0$, то для определения скорости надо взять теперь не промежуток времени $(x^0 + dx^0) - x^0 = dx^0$, а разность между $x^0 + dx^0$ и моментом $x^0 - \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}dx^\alpha$, который одновременен в точке B моменту x^0 в точке A:

$$\left(x^0 + dx^0\right) - \left(x^0 - \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}dx^\alpha\right) = dx^0 + \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}dx^\alpha$$

Умножив его на $\sqrt{g_{00}}/c$, получим соответствующий интервал собственного времени, так что скорость

$$v^\alpha = \frac{cdx^\alpha}{\sqrt{h}\left(dx^0 - g_\alpha dx^\alpha\right)}$$

где мы ввели обозначения $g_\alpha = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}, h = g_{00}$ для трехмерного вектора $\mathbf{g}$ и для трехмерного скаляра g_{00}. Ковариантные компоненты скорости $\mathbf{v}$ как трехмерного вектора в пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$ и соответственно квадрат этого вектора надо понимать как

$$v_\alpha = \gamma_{\alpha\beta}v^\beta, \quad v^2 = v_\alpha v^\alpha$$

Заметим, что при таком определении интервал ds выражается через скорость формулой, аналогичной обычной формуле:

$$\begin{aligned} ds^2 =& g_{00}\left(dx^0\right)^2 + 2g_{0\alpha}dx^0dx^\alpha + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = \\ &= h\left(dx^0 - g_\alpha dx^\alpha\right)^2 - dl^2 = h\left(dx^0 - g_\alpha dx^\alpha\right)^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \end{aligned}$$

Компоненты 4-скорости $u^i = dx^i/ds$ равны

$$u^\alpha = \frac{v^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad u^0 = \frac{1}{\sqrt{h}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{g_\alpha v^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Энергия же

$$\mathscr{E}_0 = mc^2 g_{0i} u^i = mc^2 h \left(u^0 - g_\alpha u^\alpha\right)$$

и после подстановки (88.14) приобретает вид (88.9). В предельном случае слабого гравитационного поля и малых скоростей, подставляя $g_{00} = 1 + 2\varphi/c^2$ в (88.9), получим приближенно:

$$\mathscr{E}_0 = mc^2 + \frac{mv^2}{2} + m\varphi$$

где $m\varphi$ - потенциальная энергия частицы в гравитационном поле, что находится в соответствии с функцией Лагранжа (87.10).

О применении красного смещения в космологии

(укажу это)

Уравнения постоянного гравитационного поля через метрику трехмерного пространства (??!)

(тут какая-то интересная идея, потом еще проделаю это! пока упустил идею, не тот уровень.)

Уравнения постоянного гравитационного поля, где операции дифференцирования по пространственным координатам выражаются в виде ковариантных производных в пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}R_{00} =& \frac{1}{\sqrt{h}}(\sqrt{h})^{;\alpha}_{;\alpha} + \frac{h}{4} f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta} = \frac{8\pi k}{c^4}\left(\frac{\varepsilon + p}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\varepsilon - p}{2}\right), \\
\frac{1}{\sqrt{h}}R^\alpha_0 =& -\frac{\sqrt{h}}{2} f^{\alpha\beta};\beta - \frac{3}{2} f^{\alpha\beta}(\sqrt{h})_{;\beta} = \frac{8\pi k}{c^4}\frac{p+\varepsilon}{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{v^\alpha}{c}, \\
R^{\alpha\beta} =& P^{\alpha\beta} + \frac{h}{2} f^{\alpha\gamma} f^\beta\gamma - \frac{1}{\sqrt{h}}(\sqrt{h})^{;\alpha;\beta} = \frac{8\pi k}{c^4}\left[\frac{(p+\varepsilon)v^\alpha v^\beta}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} + \frac{\varepsilon - p}{2}\gamma^{\alpha\beta}\right],
\end{aligned}$$

где $P^{\alpha\beta}$ - трехмерный тензор, построенный из $\gamma_{\alpha\beta}$ так, как R^{ik} строится из g_{ik}.

Действительно. Вводим обозначения $g_{00} = h; g_{0\alpha} = -hg_\alpha$ и трехмерную скорость $v^\alpha = \frac{cdx^\alpha}{\sqrt{h}(dx^0 - g_\alpha dx^\alpha)}$. Ниже все операции поднимания и опускания индексов и ковариантного дифференцирования производятся в трехмерном пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$ над трехмерными векторами g_α, v^α и трехмерным скаляром h.

Искомые уравнения должны быть инвариантны по отношению к преобразованию

$$x^\alpha \to x^\alpha, \quad x^0 \to x^0 + f\left(x^\alpha\right),$$

не меняющему стационарности поля.

Но при таком преобразовании $g_\alpha \to g_\alpha - \partial f/\partial x^\alpha$, а скаляр h и тензор $\gamma_{\alpha\beta}$ не меняются.

(пропишу в 1й части раздел про такие преобр-я.)

(????) Поэтому искомые уравнения, будучи выражены через $\gamma_{\alpha\beta}$, h и g_α, могут содержать g_α лишь в виде комбинации производных, составляющих трехмерный антисимметричный тензор

$$f_{\alpha\beta} = g_{\beta;\alpha} - g_{\alpha;\beta} = \frac{\partial g_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial x^\beta},$$

инвариантный относительно указанного преобразования.

(????)

Учитывая это обстоятельство, можно существенно упростить вычисления, полагая (после вычисления всех входящих в R_{ik} производных) $g_\alpha = 0$ и $g_{\alpha;\beta} + g_{\beta;\alpha} = 0$.

(????)

Символы Кристоффеля: (??)

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} =& \frac{1}{2} g^\alpha h_{;\alpha}, \\
\Gamma^\alpha_{00} =& \frac{1}{2} h^\alpha \\
\Gamma^0_{\alpha 0} =& \frac{1}{2h} h_{;\alpha} + \frac{h}{2} g^\beta f_{\alpha\beta} + ..., \\
\Gamma^\alpha_{0\beta} =& \frac{h}{2} f^\alpha_\beta - \frac{1}{2} g_\beta h^{;\alpha} \\
\Gamma^0_{\alpha\beta} =& -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_\beta}{\partial x^\alpha}\right) - \frac{1}{2h}\left(g_\alpha h_{;\beta} + g_\beta h_{;\alpha}\right) + g_\gamma \lambda^\gamma_{\alpha\beta} + ... \\
\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} =& \lambda^\alpha_{\beta\gamma} - \frac{h}{2}\left(g_\beta f^\alpha_\gamma + g_\gamma f^\alpha_\beta\right) + ...
\end{aligned}$$

Опущенные здесь члены (вместо которых стоят многоточия) квадратичны по компонентам вектора g_α; эти члены заведомо пропадут, (?????) когда мы положим $g_\alpha = 0$ после проведения дифференцирований в R_{ik} (92.7). (????)

(??????)

При вычислениях использованы формулы (84.9), (84.12) – (84.13) ; $\lambda^\alpha_{\beta\gamma}$ - трехмерные символы Кристоффеля, построенные по метрике $\gamma_{\alpha\beta}$.

Тензор T_{ik} вычисляется по формуле (94.9) с u^i из (88.14) (причем тоже полагаем $g_\alpha = 0$).

В результате вычислений из $R_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T\right)$ получаются следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h} R_{00} =& \frac{1}{\sqrt{h}} (\sqrt{h})^{;\alpha}_{;\alpha} + \frac{h}{4} f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta} = \frac{8\pi k}{c^4}\left(\frac{\varepsilon + p}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{\varepsilon - p}{2}\right) \\
\frac{1}{\sqrt{h}} R^\alpha_0 =& -\frac{\sqrt{h}}{2} f^{\alpha\beta}; \beta - \frac{3}{2} f^{\alpha\beta} (\sqrt{h})_{;\beta} = \frac{8\pi k}{c^4} \frac{p + \varepsilon}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{v^\alpha}{c} \\
R^{\alpha\beta} =& P^{\alpha\beta} + \frac{h}{2} f^{\alpha\gamma} f^\beta \gamma - \frac{1}{\sqrt{h}} (\sqrt{h})^{;\alpha;\beta} = \frac{8\pi k}{c^4}\left[\frac{(p + \varepsilon) v^\alpha v^\beta}{c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} + \frac{\varepsilon - p}{2} \gamma^{\alpha\beta}\right]
\end{aligned}$$

Здесь $P^{\alpha\beta}$ - трехмерный тензор, построенный из $\gamma_{\alpha\beta}$ так, как R^{ik} строится из g_{ik}.

(??????????? потренируюсь!! также примеры напишу, потому что пока что не так владею этим!!)

6.4.4 Einstein Equations in Vacuum (??)

Обсудим подробно гравитационное поле в пустом пространстве.

(потом досмотрю и соберу лучше. часть пар про ур Э из ЛЛ2.)

Вид

В пустом пространстве $T_{ik} = 0$ и уравнения гравитационного поля сводятся к уравнениям

$$R_{ik} = 0$$

Напомним, что это отнюдь не значит, что пустое пространство-время является плоским, - для этого требовалось бы выполнение более сильных условий $R_{iklm} = 0$.

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля обладает свойством:

$$T_i^i = 0.$$

Ввиду (95.7) отсюда следует, что при наличии одного только электромагнитного поля без каких-либо масс скалярная кривизна пространства-времени равна нулю.

Как мы знаем, дивергенция тензора энергии-импульса равна нулю:

$$T_{i;k}^k = 0$$

Поэтому должна быть равна нулю также и дивергенция левой части уравнения (95.6).

Это действительно так в силу тождества (92.10).

Таким образом, уравнения (95.10) по сушеству содержатся в уравнениях поля (95.6).

С другой стороны, уравнения (95.10), выражая собой законы сохранения энергии и импульса, содержат в себе уравнения движения той физической системы, к которой относится рассматриваемый тензор энергии-импульса (т.е. уравнения движения материальных частиц или вторую пару уравнений Максвелла).

Таким образом, уравнения гравитационного поля содержат в себе также и уравнения для самой материи, которая создает это поле.

Поэтому распределение и движение материи, создающей гравитационное поле, отнюдь не могут быть заданы произвольным образом.

Напротив, они должны быть определены (посредством решения уравнений поля при заданных начальных условиях) одновременно с самим создаваемым этой материей полем.

Сравнение с электродинамикой (??)

Обратим внимание на принципиальное отличие этой ситуации от того, что мы имели в случае электромагнитного поля.

Уравнения Максвелла содержат в себе только уравнение сохранения полного заряда (уравнение непрерывности), но не уравнения движения самих зарядов. Поэтому распределение и движение зарядов могут быть заданы произвольным образом, лишь бы полный заряд был постоянным, а по нему и определяется посредством уравнений Максвелла создаваемое электромагнитное поле.

(а явно как в гравитации - пока не совсем владею. потом пропишу.)

О важности уравнения непрерывности

Надо, однако, уточнить, что для полного определения распределения и движения материи в случае гравитационного поля к уравнениям Эйнштейна надо присоединить еще (не содержащееся, конечно, в них) уравнение состояния вещества, т.е. уравнение, связывающее между собой давление и плотность.

Это уравнение должно быть задано наряду с уравнениями поля.

Четыре координаты x^i могут быть подвергнуты произвольному преобразованию.

Посредством этого преобразования можно произвольным образом выбрать четыре из десяти компонент тензора g_{ik}.

Поэтому независимыми неизвестными функциями являются только шесть из величин g_{ik}.

Далее, четыре компоненты входящей в тензор энергии-импульса материи 4-скорости u^i связаны друг с другом соотношением $u_i u^i = 1$, так что независимыми являются только три из них.

Таким образом, мы имеем, как и следовало, десять уравнений поля (95.5) для десяти неизвестных величин: шести из компонент g_{ik}, трех из компонент u^i и плотности материи ε/c^2 (или ее давления p).

Для гравитационного поля в пустоте остается всего шесть неизвестных величин (компонент g_{ik}) и соответственно понижается число независимых уравнений поля: десять уравнений $R_{ik}=0$ связаны четырьмя тождествами (92.10).

Отметим некоторые особенности структуры уравнений Эйнштей- на.

Они представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Однако в уравнения входят вторые производные по времени не от всех 10 компонент g_{ik} Действительно, из (92.1) видно, что вторые производные по времени содержатся только в компонентах $R_{0\alpha 0\beta}$ тензора кривизны, куда они входят в виде члена $-\frac{1}{2}\ddot{g}_{\alpha\beta}$ (точкой обозначаем дифференцирование по x^0); вторые же производные от компонент $g_{0\alpha}$ и g_{00} метрического тензора вообще отсутствуют.

Ясно поэтому, что и получающийся путем упрощения из тензора кривизны тензор R_{ik}, а с ним и уравнения (95.5) тоже содержат вторые производные по времени лишь от шести пространственных компонент $g_{\alpha\beta}$.

Легко также видеть, что эти производные входят лишь в $\overset{\beta}{\alpha}$ -уравнения $(95,6)$, т.е. в уравнения

$$R_\alpha^\beta-\frac{1}{2}\delta_\alpha^\beta R=\frac{8\pi k}{c^4}T_\alpha^\beta$$

Уравнения же $\overset{0}{0}$ и $\overset{0}{\alpha}$, т.е. уравнения

$$R_0^0-\frac{1}{2}R=\frac{8\pi k}{c^4}T_0^0,\quad R_\alpha^0=\frac{8\pi k}{c^4}T_\alpha^0$$

содержат производные по времени лишь первого порядка.

В этом можно убедиться, проверив, что при образовании путем свертывания R_{iklm} величин R_α^0 и $R_0^0-\frac{1}{2}R=\frac{1}{2}\left(R_0^0-R_\alpha^\alpha\right)$ компоненты вида $R_{0\alpha 0\beta}$ действительно выпадают.

Еще проще увидеть это из тождества (92.10), записав его в виде

$$\left(R_i^0-\frac{1}{2}\delta_i^0R\right)_{;0}=-\left(R_i^\alpha-\frac{1}{2}\delta_i^\alpha R\right)_{i\alpha}$$

$(i=0,1,2,3)$.

Старшие производные по времени, входящие в правую часть этого равенства, - вторые производные (фигурирующие в самих величинах R_i^α, R).

Поскольку (95.13) - тождество, то и его левая сторона должна, следовательно, содержать производные по времени не выше второго порядка.

Но одно дифференцирование, по времени фигурирует уже в нем явным образом; поэтому сами выражения $R_i^0-\frac{1}{2}\delta_i^0R$ могут содержать производные по времени не выше первого порядка.

Более того, левые стороны уравнений (95.12) не содержат также и первых производных $\dot{g}_{0\alpha}$ и $\dot{g}_{00}$ (а лишь производные $\dot{g}_{\alpha\beta}$).

Действительно, из всех $\Gamma_{i;kl}$ эти производные содержат только $\Gamma_{\alpha,00}$ и $\Gamma_{0,00}$, а эти величины, в свою очередь, входят только в компоненты тензора кривизны вида $R_{0\alpha 0\beta}$, которые, как мы уже знаем, выпадают при образовании левых сторон уравнений (95.12).

Если интересоваться решением уравнений Эйнштейна при заданных начальных (по времени) условиях, то возникает вопрос о том, для скольких величин могут быть произвольно заданы начальные пространственные распределения.

Начальные условия для уравнений второго порядка должны включать начальные распределения как самих дифференцируемых величин, так и их первых производных по времени.

Однако поскольку в данном случае уравнения содержат вторые производные лишь от шести $g_{\alpha\beta}$, то в начальных условиях не могут быть произвольно заданы все g_{ik} и $\dot{g}_{ik}$.

Так, можно задать (наряду со скоростью и плотностью материи) начальные значения функций $g_{\alpha\beta}$ и $\dot{g}_{\alpha\beta}$, после чего из 4 уравнений (95.12) определятся допустимые начальные значения $g_{0\alpha}$ и g_{00}; в уравнениях же (95.11) останутся еще произвольными начальные значения $\dot{g}_{0\alpha}$ и $\dot{g}_{00}$ В число задаваемых таким образом начальных условий входят, однако, также и функции, произвольность которых связана просто с произволом в выборе 4-системы координат.

Между тем реальным физическим смыслом обладает лишь число физически различных произвольных функций, которое уже не может быть уменьшено никаким выбором системы отсчета.

Из физических соображений легко видеть, что это число равно 8: начальные условия должны задавать распределение плотности материи и трех компонент ее скорости, а также еще четырех величин, характеризующих свободное (не связанное с материей) гравитационное поле (см.???ниже §107); для свободного

гравитационного поля в пустоте начальными условиями должны задаваться лишь последние четыре величины.

6.4.5 Rotating Reference Frame

Теория

Особым случаем стационарных гравитационных полей является поле, возникающее при переходе к равномерно вращающейся системе отсчета.

Для определения интервала ds произведем преобразование от неподвижной (инерциальной) системы к равномерно вращающейся. В неподвижной системе координат r', φ', z', t (мы пользуемся цилиндрическими пространственными координатами) интервал имеет вид

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr'^2 - r'^2d\varphi'^2 - dz'^2$$

Во вращающейся системе цилиндрические координаты пусть будут r, φ, z. Если ось вращения совпадает с осями z и z', то имеем $r' = r$, $z' = z, \varphi' = \varphi + \Omega t$, где Ω - угловая скорость вращения. Подставляя в плоскую метрику, находим искомое выражение для интервала во вращающейся системе отсчета:

$$ds^2 = \left(c^2 - \Omega^2 r^2\right) dt^2 - 2\Omega r^2 d\varphi dt - dz^2 - r^2 d\varphi^2 - dr^2$$

Вращающиеся системы не могут быть бесконечными (?!)

Вращающейся системой отсчета можно пользоваться только до расстояний, равных c/Ω. Действительно, из метрики вращающейся системы отсчета видно, что при $r > c/\Omega$ величина g_{00} становится отрицательной, что недопустимо.

Неприменимость вращающейся системы отсчета на больших расстояниях связана с тем, что скорость вращения сделалась бы на них большей скорости света, и потому такая система не может быть осуществлена реальными телами.

(будет что добавить сюда - добавлю)

Несинхронизируемость часов во вращающейся системе отсчета

Как и во всяком стационарном поле, на вращающемся теле часы не могут быть однозначно синхронизованы во всех точках. Производя синхронизацию вдоль некоторой

замкнутой линии, мы получим, возвратясь в исходную точку, время, отличающееся от первоначального на величину

$$\Delta t = -\frac{1}{c}\oint \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}dx^\alpha = \frac{1}{c^2}\oint \frac{\Omega r^2 d\varphi}{1-\frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}$$

или, предполагая, что $\Omega r/c \ll 1$ (т. е. скорость вращения мала по сравнению со скоростью света),

$$\Delta t = \frac{\Omega}{c^2}\int r^2 d\varphi = \pm\frac{2\Omega}{c^2}S$$

где S - площадь проекции контура на плоскость, перпендикулярную к оси вращения (знак + или - имеет место соответственно при обходе контура по или против направления вращения).

Время распространения луча света по замкнутому контуру

Предположим, что по некоторому замкнутому контуру распространяется луч света. Вычислим с точностью до членов порядка v/c время t, которое проходит между отправлением луча света и возвращением его в исходную точку. Скорость света, по определению, всегда равна c, если время синхронизуется вдоль данной замкнутой линии и в каждой точке пользуемся собственным временем. Поскольку разница между собственным и мировым временем - порядка v^2/c^2, то при вычислении искомого промежутка времени t с точностью до величин порядка v/c этой разницей можно пренебречь. Поэтому имеем:

$$t = \frac{L}{c} \pm \frac{2\Omega}{c^2}S$$

где L - длина контура. Соответственно этому скорость света, измеренная как отношение L/t, оказывается равной

$$c \pm 2\Omega\frac{S}{L}$$

Эту формулу, как и формулу для первого приближения эффекта Доплера, можно легко вывести и чисто классическим путем.

О случаях применения вращающейся системы отсчета (???)

(пока не применял)

Элемент пространственного расстояния во вращающейся системе

Определим элемент пространственного расстояния во вращающейся системе координат (!!)

(проделаю это позже)

С помощью $dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$, $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}$ находим:

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + \frac{r^2 d\varphi^2}{1-\Omega^2\frac{r^2}{c^2}}$$

чем определяется пространственная геометрия во вращающейся системе отсчета. Отметим, что отношение длины окружности в плоскости $z = \text{const}$ (с центром на оси вращения) к ее радиусу r равно

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1-\frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}} > 2\pi$$

6.4.6 Synchronous Reference Frame

Обсудим подробно синхронную систему отсчета и её применения.
(пока плохо тут всё прописано, потому что не до неё)

Суть синхронной системы отсчета

(в 1ю часть это отойдет потом тоже)

Обзор применений синхронной системы отсчета (??)

(на неё отсылки есть, потом пропишу их. встречается, но пока хз, где. серьезно, прямо очень важно это указать потом!!!)

Условие синхронности есть $g_{0\alpha} = 0$

(обосную, почему это так. пар 84 в ЛЛ2 про гравитацию это пояснено.)

Theory

Условие, допускающее синхронизацию хода часов в различных точках пространства, заключается в равенстве нулю компонент $g_{0\alpha}$ метрического тензора.

Если, кроме того, $g_{00} = 1$, то временная координата $x^0 = t$ представляет собой собственное время в каждой точке пространства I).

Систему отсчета, удовлетворяющую условиям

$$g_{00} = 1, \quad g_{0\alpha} = 0$$

назовем синхронной.

Элемент интервала в такой системе дается выражением

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

причем компоненты тензора пространственной метрики совпадают (с точностью до знака) с компонентами $g_{\alpha\beta}$:

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}$$

В синхронной системе отсчета линии времени являются геодезическими линиями в 4-пространстве.

Действительно, 4-вектор $u^i = dx^i/ds$ касательной к мировой линии $x^1, x^2, x^3 = \mathbf{const}$ имеет составляющие $u^\alpha = 0$, $u^0 = 1$ и автоматически удовлетворяет геодезическим уравнениям:

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kl} u^k u^l = \Gamma^i_{00} = 0$$

поскольку при условиях (97.1) символы Кристоффеля $\Gamma^\alpha_{00}, \Gamma^0_{00}$ равны нулю тождественно.

Легко также видеть, что эти линии нормальны к гиперповерхностям $t = \mathbf{const}$.

Действительно, 4-вектор нормали к такой гиперповерхности $n_i = \partial t/\partial x^i$ имеет ковариантные составляющие $n_\alpha = 0, n_0 = 1$.

Соответствующие контравариантные компоненты при условиях (97.1) тоже равны $n^\alpha = 0, n^0 = 1$, т.е. совпадают с компонентами 4-вектора u^i касательных к линиям времени.

построения синхронной системы отсчета в любом пространстве-времени

Обратно, этими свойствами можно воспользоваться для геометрического построения синхронной системы отсчета в любом пространстве-времени.

Для этого выбираем в качестве исходной какую-либо пространственноподобную гиперповерхность, т.е. гиперповерхность, нормаль к которой в каждой ее точке имеет временное направление (лежит внутри светового конуса с вершиной в этой же точке); все элементы интервала на такой гиперповерхности пространственноподобны.

Затем строим семейство нормальных к этой гиперповерхности геодезических линий.

Если теперь выбрать эти линии в качестве координатных линий времени, причем определить временную координату t как длину s геодезической линии, отсчитываемую от исходной гиперповерхности, мы получим синхронную систему отсчета.

Ясно, что такое построение, а тем самым и выбор синхронной системы отсчета в принципе возможны всегда.

Более того, этот выбор еще и не однозначен.

Метрика вида (97.2) допускает любые преобразования пространственных координат, не затрагивающие времени, и, кроме того, преобразование, соответствующее произволу в выборе исходной гиперповерхности в указанном геометрическом построении.

Переход к синхронной системе через уравнения Гамильтона-Якоби (?!)

(идею тут упустил пока что)

Аналитически преобразование к синхронной системе отсчета можно в принципе произвести при помощи уравнения Гамильтона-Якоби.

Основание этого способа состоит в том, что траектории частицы в гравитационном поле как раз и являются геодезическими линиями.

Уравнение Гамильтона-Якоби для частицы с массой равной единице в гравитационном поле есть $g^{ik}\frac{d\tau}{dx^i}\frac{d\tau}{dx^k}=1$, где обозначено действие посредством τ (?? поч??).

Его полный интеграл имеет вид

$$\tau = f\left(\xi^\alpha, x^i\right) + A\left(\xi^\alpha\right)$$

где f - функция четырех координат x^i и трех параметров ξ^α; четвертую постоянную A рассматриваем как произвольную функцию трех ξ^α.

При таком представлении τ уравнения траектории частицы можно получить приравниванием производных $\partial\tau/\partial\xi^\alpha$ нулю, т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha} = -\frac{\partial A}{\partial \xi^\alpha}$$

Для каждых заданных значений параметров ξ^α правые стороны уравнений (97.6) имеют определенные постоянные значения и определяемая этими уравнениями мировая линия является одной из возможных траекторий частицы.

Выбрав постоянные вдоль траекторий величины ξ^α в качестве новых пространственных координат, а величину τ - в качестве новой временной координаты, мы и получим синхронную систему отсчета, причем уравнениями (97.5)-(97.6) определится искомое преобразование от старых координат к новым.

Действительно, геодезичность линий времени при таком преобразовании обеспечивается автоматически, причем эти линии будут нормальны к гиперповерхностям $\tau = \text{const}$.

Последнее очевидно из механической аналогии: 4-вектор нормали к гиперповерхности $-\partial\tau/\partial x^i$ совпадает в механике с 4-импульсом частицы и потому совпадает по направлению с ее 4 -скоростью u^i, т.е. с 4-вектором касательной к траектории.

Наконец, выполнение условия $g_{00} = 1$ очевидно из того, что производная $-d\tau/ds$ действия вдоль траектории есть масса частицы, которую мы приняли равной 1; поэтому $|d\tau/ds| = 1$.

Уравнения Эйнштейна в синхронной системе отсчета

Напишем уравнения Эйнштейна в синхронной системе отсчета, отделив в них операции пространственных и временного дифференцирований.

Введем обозначение

$$\varkappa_{\alpha\beta} = \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial t}$$

для производных по времени от трехмерного метрического тензора; эти величины сами составляют трехмерный тензор.

Все операции перемещения индексов у трехмерного тензора $x_{\alpha\beta}$ и его ковариантные дифференцирования производятся в дальнейшем в трехмерном пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$ 1).

Отметим, что сумма x^α_α есть логарифмическая производная определителя $\gamma \equiv |\gamma_{\alpha\beta}| = -g$;

$$x^\alpha_\alpha = \gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\ln\gamma$$

Для символов Кристоффеля находим выражения:

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{00} =& \Gamma^\alpha_{00} = \Gamma^0_{0\alpha} = 0\\ \Gamma^0_{\alpha\beta} =& \frac{1}{2}\varkappa_{\alpha\beta}, \quad \Gamma^\alpha_{0\beta} = \frac{1}{2}\varkappa^\alpha_\beta, \quad \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \lambda^\alpha_{\beta\gamma}\end{aligned}$$

где $\lambda^\alpha_{\beta\gamma}$ - трехмерные символы Кристоффеля, образованные из тензора $\gamma_{\alpha\beta}$.

Вычисление по формуле (92.7) приводит к следующим выражениям для компонент R_{ik}:

$$\begin{aligned}R_{00} =& -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\varkappa^\alpha_\alpha - \frac{1}{4}\varkappa^\beta_\alpha\varkappa^\alpha_\beta,\\ R_{0\alpha} =& \frac{1}{2}\left(\varkappa^\beta_{\alpha;\beta} - \varkappa^\beta_{\beta;\alpha}\right)\\ R_{\alpha\beta} =& P_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\varkappa_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}\left(\varkappa_{\alpha\beta}\varkappa^\gamma_\gamma - 2\varkappa^\gamma_\alpha\varkappa_{\beta\gamma}\right)\end{aligned}$$

Здесь $P_{\alpha\beta}$ - трехмерный тензор Риччи, построенный из $\gamma_{\alpha\beta}$ так же, как R_{ik} строится из g_{ik}; поднятие его индексов производится ниже тоже с помощью трехмерной метрики $\gamma_{\alpha\beta}$.

Уравнения Эйнштейна напишем в смешанных компонентах:

$$\begin{aligned}R^0_0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}x^\alpha_\alpha - \frac{1}{4}x^\beta_\alpha x^\alpha_\beta =& 8\pi k\left(T^0_0 - \frac{1}{2}T\right)\\ R^0_\alpha = \frac{1}{2}\left(x^\beta_{\alpha;\beta} - x^\beta_{\beta;\alpha}\right) =& 8\pi k T^0_\alpha\\ R^\beta_\alpha = -P^\beta_\alpha - \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{\gamma}x^\beta_\alpha\right) =& 8\pi k\left(T^\beta_\alpha - \frac{1}{2}\delta^\beta_\alpha T\right)\end{aligned}$$

(укажу потом применения. также скопирую в первый пар с обзором синхроннойсистемы)

Нестационарность синхронной системы отсчета

(пока не совсем уверен, что это так)

Характерным свойством синхронных систем отсчета является их нестационарность: в такой системе гравитационное поле не может быть постоянным.

Действительно, в постоянном поле было бы $_{\alpha\beta} = 0$.

Между тем при наличии материи обращение всех $x_{\alpha\beta}$ в нуль во всяком случае противоречило бы уравнению уравнения Эйнштейна для R_0^0 (с отличной от нуля правой частью).

В пустом же пространстве мы нашли бы из (97.13), что все $P_{\alpha\beta}$, а тем самым и все компоненты трехмерного тензора кривизны $\bar{P}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ обращаются в нуль, т.е. поле вообще отсутствует (в синхронной системе при евклидовой пространственной метрике пространство-время плоское).

Материя не может покоиться относительно синхронной системы

В то же время заполняющая пространство материя не может, вообще говоря, покоиться относительно синхронной системы отсчета.

Это очевидно из того, что частицы материи, в которой действуют силь давления, движутся, вообще говоря, не по геодезическим мировым линиям; мировая же линия покоящейся частицы есть линия времени и в синхронной системе является геодезической.

Исключение представляет случай "пылевидной" материи ($p = 0$).

Не взаимодействуя друг с другом, ее частицы движутся по геодезическим мировым линиям; в этом случае, следовательно, условие синхронности системы отсчета не противоречит условию ее сопутствия материи.

Для других уравнений состояния аналогичная ситуация может иметь место лишь в частных случаях, когда во всех или в некоторых направлениях отсутствует градиент давления.

Определитель метрического тензора $-g = \gamma$ в синхронной системе должен обнулиться

(потом укажу важность этого факта)

Из уравнения Эйнштейна для R_0^0 можно показать, что определитель $-g = \gamma$ метрического тензора в синхронной системе отсчета непременно должен обратиться в нуль в течение конечного времени.

Для этого заметим, что выражение в правой стороне этого уравнения при любом распределении материи положительно.

Действительно, в синхронной системе отсчета для тензора энергии-импульса (94.9) имеем:

$$T_0^0 - \frac{1}{2}T = \frac{1}{2}(\varepsilon + 3p) + \frac{(p+\varepsilon)v^2}{1-v^2}$$

(компоненты 4-скорости - из (88.14)); положительность этой величины очевидна.

То же самое справедливо и для тензора энергии-импульса электромагнитного поля ($T = 0, T_0^0 -$ положительная плотность энергии поля).

Таким образом, имеем из уравнения Эйнштейна для R_0^0:

$$-R_0^0 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\varkappa_\alpha^\alpha + \frac{1}{4}x_\alpha^\beta x_\beta^\alpha \leqslant 0$$

(знак равенства достигается в пустом пространстве).

В силу алгебраического неравенства

$$\varkappa_\beta^\alpha \varkappa_\alpha^\beta \geqslant \frac{1}{3}(\varkappa_\alpha^\alpha)^2$$

можно переписать (97.14) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{N}_\alpha^\alpha + \frac{1}{6}(\varkappa_\alpha^\alpha)^2 \leqslant 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{x_\alpha^\alpha} \geqslant \frac{1}{6}$$

Пусть, например, в некоторый момент времени $x_\alpha^\alpha > 0$, Тогда при уменьшении t величина $1/x_\alpha^\alpha$ убывает, имея всегда конечную (не равную нулю) производную, и потому должна обратиться в нуль (с положительной стороны) в течение конечного времени.

Другими словами, x_α^α обращается $\mathbf{B} + \infty, \mathbf{a}$ поскольку $x_\alpha^\alpha = \partial \ln\gamma/\partial t$, то это значит, что определитель γ обращается в нуль (причем, согласно неравенству (97.15), не быстрее - чем t^6).

Если же в начальный момент $x_\alpha^\alpha < 0$, то же самое получится для возрастающего времени.

Этот результат, однако, отнюдь не доказывает неизбежности существования истинной, физической особенности в метрике.

Физической особенностью является лишь такая, которая свойственна пространству-времени как таковому и не связана с характером выбранной системы отсчета (такая особенность должна характеризоваться обрашением в бесконечность скалярных величин - плотности материи, инвариантов тензора кривизны).

Особенность же в синхронной системе отсчета, неизбежность которой мы доказали, в общем случае в действительности является фиктивной, исчезающей при переходе к другой (не синхронной) системе отсчета.

Ее происхождение ясно из простых геометрических соображений.

(???)

(???) пояснения

(тут хз)

Мы видели выше, что построение синхронной системы сводится к построению семейства геодезических линий, ортогональных к какой-либо пространственноподобной гиперповерхности.

Но геодезические линии произвольного семейства, вообще говоря, пересекаются друг с другом на некоторых огибающих гиперповерхностях - четырехмерных аналогах каустических поверхностей геометрической оптики.

Пересечение же координатных линий дает, разумеется, особенность в метрике в данной координатной системе.

Таким образом, имеется геометрическая причина для появления особенности, связанной со специфическими свойствами синхронной системы и потому не имеющей физического характера.

Произвольная метрика 4-пространства допускает, вообше говоря, существование также и непересекающихся семейств времениподобных геодезических линий.

Неизбежность же обращения в нуль определителя γ в синхронной системе означает, что допускаемые уравнениями поля свойства кривизны реального (не плоского) пространства-времени (выражаемые неравенством $R_0^0 \geqslant 0$ исключают возможность

существования таких семейств, так что линии времени во всякой синхронной системе отсчета непременно пересекаются друг с другом.

Мы упоминали выше о том, что для пылевидной материи синхронная система отсчета может быть в то же время и сопутствующей.

В таком случае плотность материи обратится на каустике в бесконечность, - просто как результат пересечения мировых траекторий частиц, совпадающих с линиями времени.

Ясно, однако, что эта особенность плотности устранится уже введением сколь угодно малого, но отличного от нуля давления материи и в этом смысле тоже не имеет физического характера.

Разложение решения уравнений гравитационного поля в пустоте вблизи регулярной по времени точки (???)

(??? зачем это?? пока не вникал)

Найти вид разложения решения уравнений гравитационного поля в пустоте вблизи не особой, регулярной точки по времени.

Выбрав условно рассматриваемую временную точку в качестве начала отсчета времени, будем искать $\gamma_{\alpha\beta}$ в виде

$$\gamma_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + tb_{\alpha\beta} + t^2 c_{\alpha\beta} + ...$$

где $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta}$ - функции пространственных координат.

В том же приближении обратный тензор:

$$\gamma^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta} - tb^{\alpha\beta} + t^2 \left(b^{\alpha\gamma} b^{\beta}_{\gamma} - c^{\alpha\beta}\right)$$

где $a^{\alpha\beta}$ - тензор, обратный $a_{\alpha\beta}$, а поднятие индексов у остальных тензоров производится с помощью $a^{\alpha\beta}$.

Далее имеем:

$$_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} + 2tc_{\alpha\beta}, \quad \gamma^{\beta}_{\alpha} = b^{\beta}_{\alpha} + t\left(2c^{\beta}_{\alpha} - b_{\alpha\gamma} b^{\beta\gamma}\right)$$

Уравнения Эйнштейна в синхронной системе отсчета приводят к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
cR^0_0 =& - c + \frac{1}{4} b^{\beta}_{\alpha} b^{\alpha}_{\beta} = 0 \\
R^0_{\alpha} =& \frac{1}{2}\left(b^{\beta}_{\alpha;\beta} - b_{;\alpha}\right) + t\left[-c_{;\alpha} + \frac{3}{8}\left(b^{\gamma}_{\beta} b^{\beta}_{\gamma}\right)_{i\alpha} + c^{\beta}_{\alpha;\beta} + \frac{1}{4} b^{\beta}_{\alpha} b_{;\beta} - \frac{1}{2}\left(b^{\gamma}_{\alpha} b^{\beta}_{\gamma}\right)_{;\beta}\right] = 0 \\
R^{\beta}_{\alpha} =& - P^{\beta}_{\alpha} - \frac{1}{4} b^{\beta}_{\alpha} b + \frac{1}{2} b^{\gamma}_{\alpha} b^{\beta}_{\gamma} - c^{\beta}_{\alpha} = 0
\end{aligned}$$

где $b \equiv b^{\alpha}_{\alpha}, c \equiv c^{\alpha}_{\alpha}$.

Здесь операции ковариантного дифференцирования производятся в трехмерном пространстве с метрикой $a_{\alpha\beta}$: по этой же метрике определяется тензор $P_{\alpha\beta}$.

Из (4) коэффициенты $c_{\alpha\beta}$ полностью определяются по коэффициентам $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$.

После этого (2) дает соотношение

$$P + \frac{1}{4} b^2 - \frac{1}{4} b^{\beta}_{\alpha} b^{\alpha}_{\beta} = 0$$

Из членов нулевого порядка в (3) имеем:

$$b^{\beta}_{\alpha;\beta} = b_{;\alpha}$$

Члены же $\sim t$ в этом уравнении при использовании (2); (4) – (6)(и тождества $P^{\beta}_{\alpha;\beta} = \frac{1}{2}P_{;\alpha}$; ср.

(92.10)) обращаются в нуль тождественно.

Таким образом, 12 величин $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$ связаны друг с другом одним соотношением (5) и тремя соотношениями (6), так что остается восемь произвольных функций трех пространственных координат.

Из них три связаны с возможностью произвольных преобразований трех пространственных координат и одна - с произволом в выборе исходной гиперповерхности при построении синхронной системы отсчета.

Остается, как и следовало (см. конец §95), четыре «физически различные произвольные функции.

Тензор кривизны R_{iklm} в синхронной системе отсчета

Вычислить компоненты тензора кривизны R_{iklm} в синхронной системе отсчета.

При помощи известных символов Кристоффеля получим по обычной формуле:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -P_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{4}\left(x_{\alpha\delta}x_{\beta\gamma} - x_{\alpha\gamma}x_{\beta\delta}\right)$$
$$R_{0\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(_{\alpha\gamma;\beta} - _{\alpha\beta;\gamma}\right)$$
$$R_{0\alpha0\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}x_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}x_{\alpha\gamma}x^{\gamma}_{\beta}$$

где $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ - трехмерный тензор кривизны, соответствующий трехмерной пространственной метрике $\gamma_{\alpha\beta}$.

(!! проделаю это потом ручками!!!)

Бесконечно малое синхронное преобразование

Найти общий вид бесконечно малого преобразования, не нарушающего синхронности системы отсчета.

В общем случае преобразование имеет вид

$$t \to t + \varphi\left(x^1, x^2, x^3\right), \quad x^{\alpha} \to x^{\alpha} + \xi^{\alpha}\left(x^1, x^2, x^3, t\right)$$

где φ, ξ^{α} - малые величины.

Соблюдение условия $g_{00} = 1$ обеспечивается независимостью φ от t, а для соблюдения условия $g_{0\alpha} = 0$ должны выполняться уравнения

$$\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^{\beta}}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^{\alpha}}$$

откуда

$$\xi^{\alpha} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^{\beta}}\int\gamma^{\alpha\beta}dt + f^{\alpha}\left(x^1, x^2, x^3\right)$$

где f^{α} - снова малые величины (образующие трехмерный вектор $\mathbf{f}$).

При этом пространственный метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta}$ заменяется согласно

$$\gamma_{\alpha\beta} \to \gamma_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha;\beta} - \xi_{\beta;\alpha} - \varphi x_{\alpha\beta}$$

(в чем легко убедиться с помощью формулы (94.3)).

Преобразование содержит, как и следовало, четыре произвольные (малые) функции пространственных координат φ, f^{α}.

(?? потом потренируюсь)

6.4.7 de Sitter Space

Суть

(?)

Теория

(потом у Тонга возьму её)

6.4.8 Anti-de Sitter Space

Суть

(?)

Теория

(потом у Тонга возьму её)

7 Typical Dynamical Models of GR

Обсудим подробно различные модели в метрике Шварцшильда.

(суть и свойства её в разделе выше прописал. тут - то, на что выше указано, подробно обсуждается и решается.)

7.1 Description of Motion of Particles in a Gravitational Field

(!! в 1ю часть суть перенесу!!!)

7.1.1 Equation of Motion of Particles in a Gravitational Field (??)

(пока не особо занимался. выгружу потом ЛЛ2)

Предположение малости скоростей всех частиц требует одновременно, чтобы само гравитационное поле было слабым

в ЛЛ2 в пар 87 доказывается мб.

относительное 4-ускорение двух частиц, движущихся по бесконечно близким геодезическим мировым линиям

Определить относительное 4-ускорение двух частиц, движущихся по бесконечно близким геодезическим мировым линиям.

Рассмотрим семейство геодезических линий, отличаемых значениями некоторого параметра v; другими словами, координаты мировой точки выражаются в виде функций $x^i = x^i(s, v)$, таких, что при каждом $v = \text{const}$ это есть уравнение геодезической (причем s - длина интервала, отсчитываемого вдоль линии от ее точки пересечения с некоторой заданной гиперповерхностью). Введем 4-вектор

$$\eta^i = \frac{\partial x^i}{\partial v}\delta v \equiv v^i \delta v$$

соединяющий на бесконечно близких геодезических (отвечающих значениям параметра v и $v+\delta v$) точки с одинаковыми значениями s.

Из определения ковариантной производной и равенства $\partial u^i/\partial v = \partial v^i/\partial s$ (где $u^i = \partial x^i/\partial s$) следует, что

$$u^i_{;k}v^k = v^i_{;k}u^k$$

Рассмотрим вторую производную:

$$\frac{D^2v^i}{ds^2} \equiv \left(v^i_{;k}u^k\right)_{;l}u^l = \left(u^i_{;k}v^k\right)_{;l}u^l = u^i_{;k;l}v^ku^l + u^i_{;k}v^k_{;l}u^l$$

Во втором члене снова используем (1), а в первом меняем порядок ковариантных дифференцирований с помощью (91.7) и находим:

$$\frac{D^2v^i}{ds^2} = \left(u^i_{;l}u^l\right)_{;k}v^k + u^mR^i_{mkl}u^kv^l$$

Первый тлен равен нулю, поскольку вдоль геодезических линий $u^i_{;l}u^l = 0$. Введя постоянный множитель δv, находим окончательно уравнение:

$$\frac{D^2\eta^i}{ds^2} = R^i_{klm}u^ku^l\eta^m$$

(его называют уравнением геодезического отклонения).

Уравнение движения частиц в гравитационном поле из принципа наименьшего действия

Вывести уравнение движения $\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0$ из принципа наименьшего действия $\delta S = -mc\delta\int ds = 0$.

Имеем:

$$\delta ds^2 = 2ds\delta ds = \delta\left(g_{ik}dx^idx^k\right) = dx^idx^k\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\delta x^l + 2g_{ik}dx^id\delta x^k$$

Поэтому

$$\delta S = -mc\int\left\{\frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\delta x^l + g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{d\delta x^k}{ds}\right\}ds =$$
$$= -mc\int\left\{\frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\delta x^l - \frac{d}{ds}\left(g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\right)\delta x^k\right\}ds$$

(при интегрировании по частям учтено, что на пределах $\delta x^k = 0$). Во втором члене под интегралом заменим индекс k индексом l. Тогда находим, приравнивая нулю коэффициент при произвольной вариации δx^l :

$$\frac{1}{2}u^iu^k\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \frac{d}{ds}\left(g_{il}u^i\right) = \frac{1}{2}u^iu^k\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{il}\frac{du^i}{ds} - u^iu^k\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} = 0$$

Замечая, что третий член можно написать в виде

$$-\frac{1}{2}u^iu^k\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right)$$

и вводя символы Кристоффеля $\Gamma_{l,ik}$ согласно (86.2), получаем:

$$g_{il}\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{l,ik}u^iu^k = 0$$

Уравнение (87.3) получается отсюда поднятием индекса l.

Сила, действующую на частицу в постоянном гравитационном поле

Для нужных нам компонент Γ^i_{kl} находим следующие выражения:

$$\Gamma^\alpha_{00} = \frac{1}{2}h^{;\alpha}$$
$$\Gamma^\alpha_{0\beta} = \frac{h}{2}\left(g^\alpha_{;\beta} - g^{;\alpha}_\beta\right) - \frac{1}{2}g_\beta h^{;\alpha}$$
$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \lambda^\alpha_{\beta\gamma} + \frac{h}{2}\left[g_\beta\left(g^{;\alpha}_\gamma - g^\alpha_{;\gamma}\right) + g_\gamma\left(g^{;\alpha}_\beta - g^\alpha_{;\beta}\right)\right] + \frac{1}{2}g_\beta g_\gamma h^{;\alpha}$$

В этих выражениях все тензорные действия (ковариантные дифференцирования, подъем и опускание индексов) производятся в трехмерном пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$ над трехмерным вектором g^α и трехмерным скаляром h(88.11); $\lambda^\alpha_{\beta\gamma}$ есть трехмерный символ Кристоффеля, составленный из компонент тензора $\gamma_{\alpha\beta}$ так, как Γ^i_{kl} составляется из компонент g_{ik}; при вычислении использованы формулы (84.9) – (84.12). Подставив (1) в уравнение движения

$$\frac{du^\alpha}{ds} = -\Gamma^\alpha_{00}\left(u^0\right)^2 - 2\Gamma^\alpha_{0\beta}u^0u^\beta - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}u^\beta u^\gamma$$

и используя выражения (88.14) для компонент 4-скорости, после простых преобразований получим:

$$\frac{d}{ds}\frac{v^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{h^{;\alpha}}{2h\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} - \frac{\sqrt{h}\left(g^\alpha_{;\beta} - g^{;\alpha}_\beta\right)v^\beta}{c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} - \frac{\lambda^\alpha_{\beta\gamma}v^\beta v^\gamma}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$$

Действующая на частицу сила $\mathbf{f}$ есть производная от ее импульса $\mathbf{p}$ по (синхронизованному) собственному времени, определенная с помощью трехмерного ковариантного дифференциала:

$$f^\alpha = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{Dp^\alpha}{ds} = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{d}{ds}\frac{mv^\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \lambda^\alpha_{\beta\gamma}\frac{mv^\beta v^\gamma}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Из (2) имеем поэтому (для удобства опускаем индекс α):

$$f_\alpha = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{-\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\ln\sqrt{h} + \sqrt{h}\left(\frac{\partial g_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial x^\beta}\right)\frac{v^\beta}{c}\right\}$$

или в обычных трехмерных векторных обозначениях [1])

$$\mathbf{f} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{-\operatorname{grad}\ln\sqrt{h} + \sqrt{h}\left[\frac{\mathbf{v}}{c}\operatorname{rot}\mathbf{g}\right]\right\}$$

Отметим, что если тело неподвижно, то действующая на него сила (первый член в (3)) имеет потенциал. При малых скоростях движения второй член в (3) имеет вид $mc\sqrt{h}[\mathbf{v}\operatorname{rot}\mathbf{g}]$, аналогичный силе Кориолиса, которая возникла бы (при отсутствии поля) в системе координат, вращающейся с угловой скоростью

$$\Omega = \frac{c}{2}\sqrt{h}\operatorname{rot}\mathbf{g}$$

7.1.2 Properties of Motion of Particles in Curved Spaces

Относительное ускорение частиц, движущихся по геодезическим

Определим относительное 4-ускорение двух частиц, движущихся по бесконечно близким геодезическим мировым линиям.

Рассмотрим семейство геодезических линий, отличаемых значениями некоторого параметра v; другими словами, координаты мировой точки выражаются в виде функций $x^i = x^i(s, v)$, таких, что при каждом $v = \text{const}$ это есть уравнение геодезической (причем s - длина интервала, отсчитываемого вдоль линии от ее точки пересечения с некоторой заданной гиперповерхностью).

Введем 4-вектор

$$\eta^i = \frac{\partial x^i}{\partial v}\Delta v \equiv v^i \Delta v$$

соединяющий на бесконечно близких геодезических (отвечающих значениям параметра v и $v + \Delta v$) точки с одинаковыми значениями s.

Из определения ковариантной производной и равенства $\partial u^i/\partial v = \partial v^i/\partial s$ (где $u^i = \partial x^i/\partial s$) следует, что

$$u^i_{;k} v^k = v^i_{;k} u^k$$

Рассмотрим вторую производную:

$$\frac{D^2 v^i}{ds^2} \equiv \left(v^i_{;k} u^k\right)_{;l} u^l = \left(u^i_{;k} v^k\right)_{;l} u^l = u^i_{;k;l} v^k u^l + u^i_{;k} v^k_{;l} u^l$$

Во втором члене снова используем (1), а в первом меняем порядок ковариантных дифференцирований с помощью (91.7) и находим:

$$\frac{D^2 v^i}{ds^2} = \left(u^i_{;l} u^l\right)_{;k} v^{k|} + u^m R^i_{mkl} u^k v^l$$

Первый член равен нулю, поскольку вдоль геодезических линий $u^i_{;l} u^l = 0$. Введя постоянный множитель Δv, находим окончательно уравнение:

$$\frac{D^2 \eta^i}{ds^2} = R^i_{klm} u^k u^l \eta^m$$

(его называют уравнением геодезического отклонения).

7.1.3 Deflection Angle of Particles

(тут то, чем при случае пользуюсь. потом Вайнберга добавлю!!)

Модель в двух словах (!!)

(!! переделаю это еще раз потом!!! перепровею выкладки!!)

One begins by recognizing that a general four dimensional, static, spherically symmetric line element can be written as

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - C(r)r^2\left(d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2\right)$$

The equations of motion can be obtained either by varying the Lagrangian for the motion of zero-mass particles or directly from the null geodesic equations. To simplify the calculations,

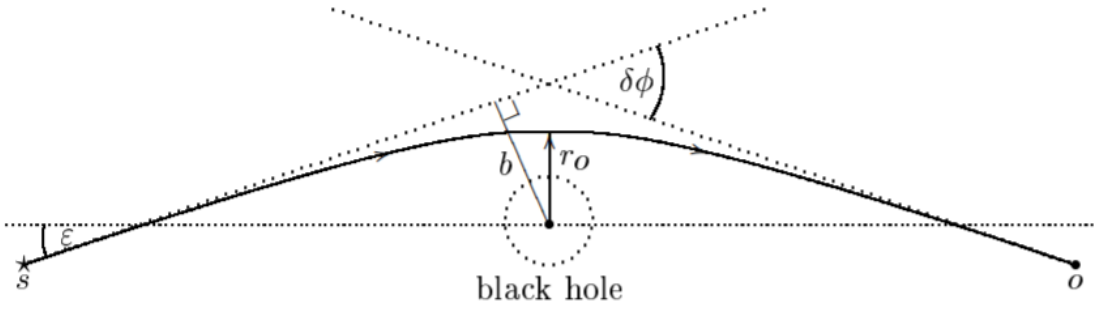
the variation in the polar angle can be set to zero since we are dealing with spherical symmetry and motion in the plane defined by $\theta = \pi/2$. The equations of motion for this case are

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &\equiv A\frac{dt}{d\lambda}\\ J &\equiv Cr^2\frac{d\phi}{d\lambda}\\ 0 =& \frac{d}{d\lambda}\left(2B\frac{dr}{d\lambda}\right) + A'\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - B'\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2\\ &- \left(Cr^2\right)'\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2\end{aligned}$$

where $\mathcal{E}$ and J are the constants of the motion associated with the energy and angular momentum of the photon, λ is an affine parameter along the geodesic, and a prime represents a derivative with respect to r. Substituting equations (10) and (11) into (12), making the substitution $u = 1/r$ and re-writing the equation such that ϕ is the independent variable, we obtain a second order differential equation for the inverse radial distance from the black hole u,

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + \left(\frac{C}{B}\right)u = -\frac{1}{2}u^2\frac{d}{du}\left(\frac{C}{B}\right) + \frac{\mathcal{E}^2}{2J^2}\frac{d}{du}\left(\frac{C^2}{AB}\right).$$

One now introduces the impact parameter $b \equiv J/\mathcal{E}$. Once the metric coefficients are specified explicitly, equation (13) can be solved by successive approximations to find the angle of deflection. While the form of the metric for both the Schwarzschild and Reissner-Nordström solutions allows one to use the form (9) and the geodesic equation (13), it will be seen that the 5D metric (1) also leads to the same equations of motion (13) for photons which will allow us to use the same method of solution for all three spacetimes.



Вывод по Вайнбергу

(хороший вывод)

Рассмотрим теперь движение свободно падающей материальной частицы или фотона в статическом изотропном гравитационном поле. Сначала рассмотрим наиболее общий вид метрики, заданный в стандартной форме (см. § 1 этой главы), т. е.

$$d\tau^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2.$$

Уравнения свободного падения имеют вид

$$\frac{d^2x^\mu}{dp^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{dp}\frac{dx^\lambda}{dp} = 0$$

где p - параметр, описывающий траекторию. Вообще, $d\tau$ пропорционально dp, а потому для материальной частицы мы можем нормировать p так, чтобы сделать $p = \tau$. Однако для фотона константа пропордиональности $d\tau/dp$ равна нулю, а так как мы хотим рассматривать фотоны наравне с массивными частицами, удобно сохранить свободу нормировать p независимо от нормировки τ. Подставляя в (8.4.2) ненулевые компоненты аффинной связности, задаваемой (8.1.11), получаем:

$$0 = \frac{d^2r}{dp^2} + \frac{A'(r)}{2A(r)}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - \frac{r}{A(r)}\left(\frac{d\theta}{dp}\right)^2 -$$

$$-r\frac{\sin\theta}{A(r)}\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + \frac{B'(r)}{2A(r)}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2,$$

$$0 = \frac{d^2\theta}{dp^2} + \frac{2}{r}\frac{d\theta}{dp}\frac{dr}{dp} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2,$$

$$0 = \frac{d^2\varphi}{dp^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dp}\frac{dr}{dp} + 2\operatorname{ctg}\theta\frac{d\varphi}{dp}\frac{d\theta}{dp},$$

$$0 = \frac{d^2t}{dp^2} + \frac{B'(r)}{B(r)}\frac{dt}{dp}\frac{dr}{dp}.$$

(Штрих означает d/dr.) Мы решим эти уравнения, отыскивая интегралы движения.

Так как поле изотропно, можно считать, что орбита рассматриваемой частицы расположена в экваториальной плоскости, т. е.

$$\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда (8.4.4) удовлетворяется тривиально, и мы можем забыть о θ как о динамической переменной. Разделив затем уравнения (8.4.5) и (8.4.6) на $d\varphi/dp$ и dt/dp соответственно, находим

$$\frac{d}{dp}\left\{\ln\frac{d\varphi}{dp} + \ln r^2\right\} = 0,$$

$$\frac{d}{dp}\left\{\ln\frac{dt}{dp} + \ln B\right\} = 0.$$

Это приводит к двум интегралам движения. Один из них можно включить в определение p, поскольку p выбирается таким образом, чтобы решение (8.4.9) имело вид

$$\frac{dt}{dp} = \frac{1}{B(r)}.$$

Так как величина $B(r)$ близка к единице, то параметр p почти равеnі координатному времени t. Другой интеграл движения получается с помощью (8.4.8) и играет роль углового момента для единицы массы:

$$r^2\frac{d\varphi}{dp} = J \text{ (const)}.$$

Подставляя (8.4.7), (8.4.10) и (8.4.11) в (8.4.3), переписываем это последнее оставшееся уравнение движения в виде

$$0 = \frac{d^2r}{dp^2} + \frac{A'(r)}{2A(r)}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - \frac{J^2}{r^3A(r)} + \frac{B'(r)}{2A(r)B^2(r)}.$$

Умножая это уравнение на $2A(r)dr/dp$, можно переписать его так:

$$\frac{d}{dp}\left\{A(r)\left(\frac{dr}{dp}\right)^2+\frac{J^2}{r^2}-\frac{1}{B(r)}\right\}=0.$$

Тогда последний неизвестный интеграл движения оказывается равным

$$A(r)\left(\frac{dr}{dp}\right)^2+\frac{J^2}{r^2}-\frac{1}{B(r)}=-E(\text{ const })$$

Собственное время τ можно теперь пайти с помощью (8.4.1), (8.4.7), (8.4.10), (8.4.11) и (8.4.13); полученный результат

$$d\tau^2=Edp^2$$

находится в соответствии с ранее сделанным замечанием о том, что (8.4.2) требует, чтобы производная $d\tau/dp$ была постоянной. Мы видим, что

$$E>0 \text{ для материальных частиц,}$$
$$E=0 \text{ для фотонов.}$$

Заметим также, что $A(r)$ на практике всегда положительно, а потому (8.4.13) говорит о том, что рассматриваемая частица может достигать радиуса r только в том случае, если выполняется условие

$$\frac{J^2}{r^2}+E\leqslant\frac{1}{B(r)}.$$

Параметр p можіно везде исключить подстановкой (8.4.10) в (8.4.11), (8.4.13) и (8.4.14). В результате получаем

$$r^2\frac{d\varphi}{dt}=JB(r),$$
$$\frac{A(r)}{B^2(r)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{J^2}{r^2}-\frac{1}{B(r)}=-E,$$
$$d\tau^2=EB^2(r)dt^2.$$

Для медленно движущейся частицы в слабом поле величины $J^2/r^2, (dr/dt)^2, A-1$ и $B-1\approx 2\phi$ будут все малы, и в первом порядке по этим величинам вышеприведенные уравнения движения записываются следующим образом:

$$r^2\frac{d\varphi}{dt}\approx J,$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{J^2}{2r^2}+\phi\approx\frac{1-E}{2}.$$

Это те же самые уравнения, которые получались бы в теории Ньютона с учетом того, что величина $(1-E)/2$ выполняет роль энергии, приходящейся на единицу массы.

Для наглядности рассмотрим точные уравнения движения для простого случая частицы, движущейся по круговой орбите радиусом R. Так как dr/dt равно нулю, уравнение (8.4.19) имеет вид

$$\frac{J^2}{R^2}-\frac{1}{B(R)}+E=0$$

Далее, чтобы на этомі радиусе частица находилась в состоянии равновесия, производная по R от левой части должна равняться нулю:

$$-\frac{2J^2}{R^3}+\frac{B'(R)}{B^2(R)}=0.$$

(Если мы будем рассматривать окружность как предельный случай эллипса с перигелием $R-\delta$ и афелием $R+\delta$, тогда (8.4.19) показывает, что величина $J^2/r^2 - 1/B(r) + E$ должна равняться нулю при $r = R \pm \delta$, а это дает соотношения (8.4.21) и (8.4.22) в пределе $\delta \to 0$.] Из (8.4.21) и (8.4.22) находим

$$E = \frac{1}{B(R)}\left(1 - \frac{RB'(R)}{2B(R)}\right)$$
$$J^2 = \frac{B'(R)R^3}{2B^2(R)}$$

Подставляя (8.4.24) в (8.4.18), находим, что скорость вращения равняется

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{B'(R)}{2R}\right)^{1/2},$$

в то время как (8.4.23) и (8.4.20) приводят к следующей формуле для собственного времени:

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{B(R) - \frac{1}{2}RB'(R)}$$

Используя разложение Робертсона (8.3.8), находим

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{MG}{R^3}\right)^{1/2}\left[1 - \frac{(\beta-\gamma)MG}{R} + \ldots\right],$$
$$\frac{d\tau}{dt} = \left[1 - \frac{3MG}{R} + \ldots\right].$$

В большинстве приложений общей теории относительности наибольший интерес представляет для нас форма орбит, т. е. зависимость r от φ, а не их эволюция во времени. Форму орбит можно получить непосредственно, исключая dp из (8.4.11) и (8.4.13); это приводит к уравнению

$$\frac{A(r)}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{J^2B(r)} = -\frac{E}{J^2}.$$

Рөшөниө можөт быть найдено в квадратурах: 44

$$\varphi = \pm\int \frac{A^{1/2}(r)dr}{r^2\left(\frac{1}{J^2B(r)} - \frac{E}{J^2} - \frac{1}{r^2}\right)^{1/2}}.$$

отклонение в метрике Шварцшильда как пример

(чисто как иллюстрация, это же подробнее в части про модель него)

In Schwarzschild coordinates the metric coefficients are $A = B^{-1} = 1 - 2Mu$ and $C = 1$. This will leave equation (13) as

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3Mu^2$$

Assuming the solution is expandable in the form $u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \cdots$ will enable us to approximate the solution to arbitrary order in ϵ. The solution to the homogeneous (zeroth order) equation is $u_0 = u_N \cos\phi$, where u_N is equal to the inverse of the impact parameter

($u_N = 1/b$) which at this order is equal to the inverse of the distance of closest approach. If we now set $\epsilon = Mu_N$, equation (14) can be written as

$$(u_0'' + u_0) + \epsilon\left(u_1'' + u_1 - 3\cos^2\phi\right) + \epsilon^2\left(u_2'' + u_2 - 6u_1\cos\phi\right) + \cdots = 0,$$

so that the equations up to second order in ϵ become

$$u_1'' + u_1 = 3\cos^2\phi$$
$$u_2'' + u_2 = 6u_1\cos\phi$$

Solving these leaves us with the following expression for the inverse radial distance from the black hole,

$$u \simeq u_N\left(\cos\phi + \frac{1}{2}Mu_N[3 - \cos(2\phi)] + \frac{3}{16}M^2u_N^2[20\phi\sin\phi + \cos(3\phi)]\right).$$

When the light ray originates at a distant source located at r_s and terminates at a distant observer located at r_o, such that $r_{s,o} \to \infty$ or equivalently $u_{s,o} \to 0$ the deviation from straight line motion is going to be very small. The deflection angle can be found by solving for ε, using the source and observer angles $\phi_{s,o} = \pm(\pi/2 + \varepsilon)$ (See Fig. 1). Since $\varepsilon \ll 1$, the trigonometric functions can be expanded in powers of ε. The trajectory is symmetric about $\phi = 0$, so that the total deviation from straight line motion is the angle $\delta\phi = 2\varepsilon$. The expression for the deviation angle to second order in $\epsilon = Mu_N = M/b$ can then be found to be:

$$\delta\phi \simeq \frac{4M}{b} + \frac{M^2}{b^2}\frac{15}{4}\pi.$$

However the bending angle is often written in terms of the distance of closest approach r_0 which is the value of r when $\phi = 0$. This leads to the relation:

$$1/r_0 = u_N + Mu_N^2 + 3M^2u_N^3/16$$

The approximation of the deflection angle up to second order M/r_0 now becomes:

$$\delta\phi \simeq \frac{4M}{r_0} + \frac{M^2}{r_0^2}\left(\frac{15}{4}\pi - 4\right)$$

It must be remembered that the second order terms in this latter expression is valid only for Schwarzschild coordinates since r_0 depends upon the choice of the radial coordinate used to express the metric. Since the impact parameter $b = J/\mathcal{E}$ depends only upon the constants of the motion, the expression (19) will be invariant with respect to all choices of radial coordinates. Of course the first order expression which yields the "Einstein angle" is independent of the radial coordinate since to this order $b \simeq r_0$.

Точные углы

(отсылка на Вайнберга)

The deflection angles can also be calculated exactly by finding an expression for the azimuthal angle in terms of the radial distance. Following §8.5 of [15] we find that the total

deflection angle can be found by solving an integral in terms of the four dimensional metric coefficients.

$$\delta\phi = 2\int_{r_0}^{\infty} \frac{\sqrt{B(r)}}{r\sqrt{\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\left(\frac{A(r_0)}{A(r)}\right)-1}}dr - \pi$$

Fortunately the metric coefficient associated with the fifth dimension does not come in into play for the motion of photons in the Kaluza Klein case since the last term in the line element was found to be zero for uncharged test particles. One can evaluate the above integral numerically using a standard Simpson's rule method and setting the upper limit on the radial position to 10^4-10^5 times the value of r_0. A plot of the deflection angle $\Delta\phi = \pi+\delta\phi$ (See Fig. 2) shows that the deflection decreases as the charge on the black hole increases. This effect is clearly larger for the five dimensional Kaluza-Klein solution than it is for the Reissner-Nordström solution. When the charge on the black hole is zero, both the Reissner-Nordström and Kaluza-Klein solutions reduce to the Schwarzschild solution.

Связь с временной задержкой

(укажу потом её)

7.1.4 Trajectory in Gravitational and Electromagnetic Fields

(тут от Лшк теория, потом разберу.)

Суть

Теперь добавим поле и посмотрим, что же будет.
известно (откуда?), что действие такое вот:

$$S[x] = \int_A^B (-mds - eA_\mu dx^\mu) = \int_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau(-m\sqrt{g(\dot{x},\dot{x})} - eA(\dot{x})) \tag{7.1}$$

оказывается, что такие же калибровочные условия должны быть, а уравнения движения будут такими:
(потом попробую это все вывести, я хз честно говоря, как это сделать?)

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \frac{e}{m}F^\lambda_\kappa\dot{x}^\kappa, \quad F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} \tag{7.2}$$

тут ; - ковариантная производная, , - это обычная (?) (см мб прошлые лекции.
уже проявляются нюансы про математику)
еще раз про репрозентационную (?) инвариантность.
хотим разработать гамильтонов подход для таких задач.
имеем лагранжиан $L = (-m\sqrt{g(\dot{x},\dot{x})} - eA(\dot{x}))$

обобщенный импульс????

вводим обобщенный импульс

$$P_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = -\frac{mg_{\mu\nu}\dot{x}^\nu}{\sqrt{g(\dot{x},\dot{x})}} - eA_\mu \tag{7.3}$$

тут можно подумать, найти подмногообразие, где это все определено, тут какое-то уравнение получается.

тут возникает неприятность: Гамильтониан частицы в поле будет

$$H_\tau(x,P) = P_\mu \dot{x}^\mu - L(x,\dot{x}) = 0 \tag{7.4}$$

то есть система что ли не эволюционирует?

добавление связей?????

(идея Дирака), что можно к гамильтонину прибавить уравнение связи, которое на наших траекторий равно 0, так что любой гамильтониан такой будет движением системы.

(обобщенный метод мн Лагранжа?)

$\chi = \left(g^{\mu\nu}\left(P_\mu + eA_\mu\right)\left(P_\nu + eA_\nu\right) - m^2\right)$ оно задает поверхность, на которой все и происходит!!

$$H'_\tau(x,P) = H_\tau(x,P) + \alpha(x,P)\chi(x,P) = \alpha(x,P)\left(g^{\mu\nu}\left(P_\mu + eA_\mu\right)\left(P_\nu + eA_\nu\right) - m^2\right) \tag{7.5}$$

у нас появилось какое-то уравнение связи!!!!

(можно записать тут про связи, см конспект, там формула какая-то)

!!!! тут крутой был ход, что мы берем и создаем новую функцию гамильтона, после того, как мы преобразовали его.

вот так вот можно делать, и идем дальше. (потом можно подумать про этот метод и записать на самом деле в другое место.)

нашли уравнения движения:

$$\begin{aligned} \dot{P}_\mu &= -\tfrac{\partial H'_\tau}{\partial x^\mu} = -\alpha\left(\partial_\mu g^{\lambda\nu}\left(P_\lambda + eA_\lambda\right) + 2eg^{\lambda\nu}\partial_\mu A_\lambda\right)\left(P_\nu + eA_\nu\right) \\ \dot{x}^\mu &= \tfrac{\partial H'_\tau}{\partial P_\mu} = 2\alpha g^{\mu\nu}\left(P_\nu + eA_\nu\right) \end{aligned} \tag{7.6}$$

круто, вот наши уравнения движения (?)

теперь подумаем опять про действие как функцию от конечной точки B.

все делаем с действием, что всегда, только в итоге пишем ее в зависимости от конечной точки.

приходим к

$$s = \int_A^B \left(P_\mu dx^\mu - H_0 d\tau\right) \tag{7.7}$$

(интересный метод, откуда он взялся? так мы и получаем Г-Я всегда???) пффф.....

находим из действия импульс.

(потом свои замечания добавлю, когда пойму, что происходит?)

вышли на уравнение Гамильтона-Якоби, с которым мы будем работать.

$$g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial S}{\partial x^\mu} + eA_\mu\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x^\nu} + eA_\nu\right) - m^2 = 0 \tag{7.8}$$

хотим решать его.

сперва сделаем утверждене (в других случаях оно тоже прокатывает?)

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial S(x(\tau),\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial S}{\partial x^\mu}\dot{x}^\mu\right) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(P_\mu \dot{x}^\mu\right) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(P_\mu \dot{x}^\mu - H_\tau\right) = \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \alpha} = 0$$

типа мы пришли к импульсам.

прикольно, я почти понял.

в итоге наше решение зависит от двух констант.
получаем (d-1) уравнений, и что-то там хорошее мы все-таки получаем.
зависят они от $2(d-1)$ параметров.

Примеры (?!!)

(решу хотя бы какую-то задачу на эти формулы! а то пока сыро очень.)

7.1.5 Dynamics of Particles via Feynman Integral (??)

(в искривленном пространстве. прямо очень интересно эту связку создать, но пока не до этого. У Мизера т. 1 стр 389 про это сказано, мне интересно очень, потом посмотрю.)

7.2 Influence of Gravitational Field on Bodies

7.2.1 Lense-Thirring Effect

(мб в другой раздел перенесу потом)
Увлечение инерциальных систем отсчёта - явление в ОТО, наблюдаемое вблизи вращающихся массивных тел. Эффект проявляется в появлении дополнительных ускорений, сходных с ускорением Кориолиса, то есть, в итоге, сил, действующих на пробные тела, двигающиеся в гравитационном поле.

Суть

(??)

Теория

О случаях применения

Простейший пример

(очень хотелось бы явно привести пример!)

7.2.2 Geodetic Precession (de Sitter Effect)

(тут в одну строчку напишу суть потом)

Суть

(??)
Геодезическая прецессия (эффект де Ситтера) возникает при параллельном переносе вектора момента импульса в искривленном пространстве-времени. Для системы Земля-Луна, движущейся в поле Солнца, скорость геодезической прецессии равна 1,9” в столетие; точные астрометрические измерения выявили этот эффект, который совпал с предсказанным в пределах ошибки ˜1 %. Геодезическая прецессия гироскопов на спутнике Gravity Probe B совпала с предсказанным значением (поворот оси на 6,606 угловой секунды в год в плоскости орбиты спутника) с точностью лучше 1 %.

Теория

О случаях применения

Простейший пример

(очень хотелось бы явно привести пример!)

7.2.3 Deflection of Light by Gravitational Field

Теория

(хз)

7.2.4 Dust Falling into a Black Hole

Рассмотрим падение тонкого сферического слоя пылевидной материи малой массы m с полной энергией ΔE на черную дыру массы $M \gg \Delta E$.

(???(лашкевич). пока не знаю, зачем она нужна, ну есть модель, но не до неё.)

Падающая пыль на черную дыру в двух словах

(приведу суть того, что дальше)

итоговая метрика:

уравнения Эйнштейна:

масса черной дыры увеличивается ровно на энергию падающей пылевидной сферы, а скорость течения времени испытывает скачок δk на поверхности разрыва.

Модель падения пыли

Описание падения пыли сводится к тому, что (???) уравнения Эйнштейна решаем.

(?? потом напишу вкратце об этом)

Движение пыли описывается функцией $r = r(t)$.

Внутри ($r < r(t)$) и вне ($r > r(t)$) пылевидной оболочки будем искать решение в виде метрики Шварцшильда в слегка более общем виде, полагая, что $k + h = F(t)$:

$$ds^2 = \exp\big\{2F\,\mathrm{sign}(r - r(t))(t - 2h(r,t))\big\}dt^2 - \exp\big\{2h(r,t)\big\}dr^2 - r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right),$$

где $e^{-2h(r,t)} = 1 - \frac{r_g(r,t)}{r}$.

Мы помним, что множитель $e^{2F(t)}$ устраняется калибровкой, но на материальной сфере метрика испытывает скачок, и мы не можем гарантировать, что две метрики сшиваются в одной и той же калибровке.

Величина $r_g(r,t)$ постоянна вне материального слоя и испытывает скачок на нем.

Ниже мы найдем малые скачки гравитационного радиуса δr_g и калибровочной функции $\delta F(t) = F_+(t) - F_-(t)$.

Изучим сначала падение пылевидной сферы.

Будем считать, что она настолько легкая, что при вычислении закона ее падения скачками F и r_g можно пренебречь.

Это падение описывается уравнением Гамильтона-Якоби, которое для собственного времени $\tau(t,r)$ пылинок: (?????)

$$e^{2h(r)-2F(t)}\tau_{,t}^2 - e^{-2h(r)}\tau_r^2 = 1$$

Решение уравнения ищем в виде

$$\tau(t,r,\varepsilon) = \varepsilon f(t) + \tilde\tau(r,\varepsilon),$$

где $f'(t) = e^{F(t)}$, а ε представляет собой энергию на единицу массы.

Подставляя в уравнение Гамильтона-Якоби находим,

$$\tilde{\tau}(r, \varepsilon) = \int dr e^{2h} \sqrt{\varepsilon^2 - e^{-2h}}$$

Мы выбрали знак «+» перед корнем, так как это отвечает падающим частицам (это отвечает знаку «-» в (11.4)). (????)

Без ограничения общности мы будем полагать $t_0 = 0$. Тогда легко находим

$$d\tau = \tau_{,t} dt + \tau_{,r} dr = e^F \varepsilon dt + e^{2h} \sqrt{\varepsilon^2 - e^{-2h}} dr$$

Нетрудно подобрать ортогональное направление с единичной нормой: (??????)

$$dl = e^F \sqrt{\varepsilon^2 - e^{-2h}} dt + e^{2h} \varepsilon dr$$

В этом ортогональном направлении плотность дается простой дельта-функцией:

$$\rho = \frac{m}{4\pi r^2} \delta(l)$$

где l - отклонение от положения сферы в данный момент времени $r(t)$ вдоль направления, задаваемого dl.

Полагая $dt = 0$, выражаем dr через dl:

$$dr = e^{-2h} \varepsilon^{-1} dl$$

что есть ни что иное как лоренцевское сжатие с учетом гравитации.

Получаем

$$\rho(t, r) = \frac{m}{4\pi r^2 \varepsilon e^{2h}} \delta(r - r(t))$$

Тензор энергии-импульса равен $T^\mu_\nu = \rho u^\mu u_\nu$, где $u_\mu = \tau_{,\mu}$.

Отсюда получаем уравнения Эйнштейна:

$$R^t_t = \left(-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2\right) e^{-2k} + \left(k'' + k^2 - k'h' + \frac{2k'}{r}\right) e^{-2h} = \frac{2G\delta E}{r^2} \left(1 - \frac{e^{-2h}}{2\varepsilon^2}\right) \delta(r - r(t))$$

$$R^r_r = \left(-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2\right) e^{-2k} + \left(k'' + k'^2 - k'h' - \frac{2h'}{r}\right) e^{-2h} = -\frac{2G\delta E}{r^2} \left(1 - \frac{e^{-2h}}{2\varepsilon^2}\right) \delta(r - r(t))$$

$$R^t_r = \frac{2e^{-2k}\dot{h}}{r} = -\frac{G\delta E}{r^2} e^{2h-F} \varepsilon^{-1} \sqrt{\varepsilon^2 - e^{-2h}} \delta(r - r(t))$$

$$R^\vartheta_\vartheta = R^\varphi_\varphi = -\frac{1 + (rh' - rk' - 1) e^{-2h}}{r^2} = -\frac{G\delta E}{\varepsilon e^{2h} r^2} \delta(r - r(t))$$

где мы использовали равенство $\delta E = \varepsilon m$.

Уравнения для $R^t_t - R^r_r$ и R^ϑ_ϑ немедленно дают

$$e^{-2h}(k' + h') = \frac{2G\delta E}{r} \left(1 - \frac{e^{-2h}}{2\varepsilon^2}\right) \delta(r - r(t))$$

$$e^{-2h}(k' - h') = -\frac{G\delta E}{\varepsilon^2 e^{2h} r} \delta(r - r(t)) + \frac{1 - e^{-2h}}{r}$$

Отсюда для скачков получаем

$$\delta k = \mathrm{G}\delta\mathrm{E} \left(\frac{1}{r - r_g} - \frac{1}{\varepsilon^2 r}\right), \quad \delta h = \frac{G\delta E}{r - r_g}$$

так как

$$k = F(t) + \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{r_g}{r}\right), \quad h = -\frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$$

и, следовательно,

$$\delta k = \delta F - \frac{\delta r_g}{2\left(r - r_g\right)}, \quad \delta h = \frac{\delta r_g}{2\left(r - r_g\right)}$$

получаем

$$\delta r_g = 2G\delta E, \quad \delta F(t) = \frac{G\delta E}{r(t) - r_g} + \delta k(r(t))$$

Иными словами, масса черной дыры увеличивается ровно на энергию падающей пылевидной сферы, а скорость течения времени испытывает скачок δk на поверхности разрыва.

В нерелятивистском пределе $r_g \to 0, \varepsilon \to 1$ этот скачок стремиться к нулю.

Это соответствует тому хорошо известному факту, что потенциал поля не испытывает скачка на материальной поверхности конечной поверхностной плотности.

Если последовательно падает, не пересекаясь, несколько пылевых сфер, то они ничего друг о друге «не знают», поэтому решение можно обобщить на пылевой шар, сжимающийся таким образом, чтобы частицы двигались по непересекающцмся геодезическим.

О применениях модели падающей пыли

(хз, пока что она не за чем.)

7.3 Time delays

7.3.1 Time Delay

(напишу потом по Вайнбергу)

Суть

The deviations from the flat-space travel time (i.e. the Shapiro time delay) for photons passing by a black hole can be estimated for all three geometries. Rather than take the approach that was used to compute the bending angle, the alternative is to use the formal integral expression obtained from the geodesic equation for the temporal coordinate, approximate the integrand to second order in the appropriate expansion parameter and then evaluate the resulting integrals term by term.

Following §8.7 of [15], we find that when curvature coordinates are used, the exact time delay is given by

$$t\left(r, r_0\right) = \int_{r_0}^{r} \left(\frac{B(r)/A(r)}{1 - \left(\frac{A(r)}{A(r_0)}\right)\left(\frac{r_0}{r}\right)^2} \right)^{1/2} dr$$

Again some straightforward computations are required which are outlined in the following subsections.

Вывод по Вайнбергу

(укажу потом, с чего стартуем (с теории о движении частиц))

Классическая проверка общей теории относительности, рассмотренная нами в предыдущих параграфах, определялась только видом траекторий фотонов и планет.

Развитие в последние годы быстродействующей электроники и мощных средств радиолокации дало возможность измерять движение в зависимости от времени с той степенью точности, которая необходима для проверки уравнений Эйнштейна. В частности, Папиро [24] предложил эксперимент и провел его совместно с группой Линкольновской лаборатории, измерив [25, 26] время, которое необходимо радарному сигналу, чтобы достичь планеты, расположенной на внутренней орбите, и, отразившись, вернуться обратно на Землю.

Чтобы понять смысл этих измерений, вычислим прежде всего время, затрачиваемое радиолокационным сигналом на прохождение от одной точки с координатами $r = r_1, \quad \theta = \pi/2, \varphi = \varphi_1$ до другой с координатами $r = r_2, \quad \theta = \pi/2, \quad \varphi = \varphi_2$. Уравнение (8.4.19), определяющее эволюцию орбиты во времени, выглядит следующим образом:

$$\frac{A(r)}{B^2(r)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} = -E.$$

Поскольку мы имеем дело со световыми лучами, то $E = 0$. Более того, $(dr/dt)^2$ должно обращаться в нуль в точке максимального сближения с Солнцем $r = r_0$, поэтому

$$J^2 = \frac{r_0^2}{B\left(r_0\right)}$$

Тогда уравнение движения фотона имеет вид

$$\frac{A(r)}{B^2(r)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 B^{-1}\left(r_0\right) - B^{-1}(r) = 0.$$

Из этого уравнения находим время, необходимое свету для прохождения пути от r_0 до r или от r до r_0:

$$t\left(r, r_0\right) = \int\limits_{r_0}^{r} \left(\frac{A(r)/B(r)}{\left[1 - \frac{B(r)}{B(r_0)}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right]}\right)^{1/2} dr,$$

а потому полное время, которое будет затрачено, чтобы пройти от точки 1 к точке 2, равно (для $|\varphi_1 - \varphi_2| > \pi/2$)

$$t_{12} = t\left(r_1, r_0\right) + t\left(r_2, r_0\right).$$

Чтобы вычислить интеграл (8.7.2), необходимо снова применить к подынтегральному выражению разложение Робертсона, о котором говорилось в § 3 этой главы, а именно

$$A(r) \approx 1 + \frac{2\gamma MG}{r}, \quad B(r) \approx 1 - \frac{2MG}{r}.$$

Тогда имеем

$$1 - \frac{B(r)}{B\left(r_0\right)}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \approx 1 - \left[1 + 2MG\left(\frac{1}{r_0} \; -\frac{1}{r}\right)\right]\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \approx$$
$$\approx \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)\left[1 - \frac{2MGr_0}{r\left(r + r_0\right)}\right].$$

Поэтому в первом порядке по MG/r и MG/r_0(8.7.2) сводится к

$$t\left(r, r_0\right) \approx \int\limits_{r_0}^{r} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1/2}\left[1 + \frac{(1+\gamma)MG}{r} + \frac{MGr_0}{r\left(r + r_0\right)}\right] dr.$$

Интеграл стал табличным, и можно найти время прохождения светом расстояния от r_0 до r:

$$t\left(r, r_0\right) \approx \sqrt{r^2 - r_0^2} + (1+\gamma) MG \times \\ \times \ln\left(\frac{r + \sqrt{r^2 - r_0^2}}{r_0}\right) + MG\left(\frac{r - r_0}{r + r_0}\right)^{1/2}$$

Обсуждение от Вайнберга

(пока не выгружал, потому что там много о чем поболтать можно, не до этого всё равно.)

Основной член $\sqrt{r^2 - r_0^2}$ - это то, чего следовало ожидать, если бы свет распространялся с единичной скоростью по прямым линиям. Очевидно, что другие члены отражают дополнительное гравитадионное запаздывание во времени, которое возни кнет, пока радиосигнал дойдет до Меркурия и обратно. (Обратим внимание на то, что это запаздывание прямо противоположно тому, которое следует из авалогии со случаем медленно движущегося тела, скажем, кометы.) Это дополнительное запаздывание максимально, когда Мергіурий находится в верхнем соединении и радиолокадионный сигнал касается Солнца. В этом случае расстояние r_0 примерно равно радиусу Солнца, $r_0 \approx R_\odot$, и много меньше, чем расстояния от Земли $r_\oplus$ и от Меркурия r до Солнца. Поэтому дополнительное максимальное время запаздывания при движении луча туда и обратно задается с помощью соотношений (8.7.3) и (8.7.4) в виде

$$(\Delta t)_{\text{макс}} \equiv 2\left[t\left(r_\oplus, R_\odot\right) + t\left(r_\emptyset, R_\odot\right) - \sqrt{r_\oplus^2 - R_\odot^2} - \sqrt{r_\wp^2 - R_\odot^2}\right] \approx$$

$$\approx 4 M_\odot G\left\{1 + \left(\frac{1+\gamma}{2}\right) \ln\left(\frac{4 r_k r_\oplus}{R_\odot^2}\right)\right\} \approx \\ \approx 5,9\text{km}\left\{1 + 11,2\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\right\}.$$

Если уравнения поля Эйнштейна верны, то $\gamma = 1$ и дополнительное максимальное запаздывание

$$(\Delta t)_{\text{макс}} \approx 72\text{КМ} = 240\text{МКс}.$$

Не представляет никакой сложности отсчитать с точностью до мигросекунд время порядка 20 мин, затрачиваемое радиосигналом на прохождение до Меркурия и обратно. Тем не менее при разборе и интерпретации такого эксперимента возникают чрезвычайно большие трудности.

Schwarzschild and Reissner-Nordström spacetimes

These spacetimes can be handled together by simply computing the results for the Reissner-Nordström solution and setting $Q = 0$ to obtain the Schwarzschild result. Expanding the metric functions in powers of M/r and Q/r leads to:

$$A(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}, \quad B(r) \simeq 1 + \frac{2M}{r} + \frac{(4M^2 - Q^2)}{r^2}$$

to second order. The square of the denominator of the integral in equation (42) takes the form:

$$1 - \frac{A(r)}{A\left(r_0\right)}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \simeq \\ \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)\left[1 - \frac{2Mr_0}{r\left(r + r_0\right)} - \frac{4M^2}{r\left(r + r_0\right)} + \frac{Q^2}{r^2}\right]$$

so that equation(42) expanded to second order becomes:

$$t\left(r,r_0\right) \simeq \int_{r_0}^{r} \left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \times$$
$$\left[1+\frac{2M}{r}+\frac{Mr_0}{r\left(r+r_0\right)}+\frac{6M^2}{r^2}-\frac{3}{2}\frac{Q^2}{r^2}+\frac{3}{2}\frac{M^2r_0^2}{r^2\left(r+r_0\right)^2}\right]dr.$$

Evaluating this integral term by term leads to:

$$t\left(r,r_0\right) \simeq \sqrt{r^2-r_0^2}+2M\ln\left(\frac{r+\sqrt{r^2-r_0^2}}{r_0}\right)$$
$$+M\sqrt{\frac{r-r_0}{r+r_0}}+\frac{3}{2}\frac{Q^2}{r_0}\left[\sin^{-1}\left(\frac{r_0}{r}\right)-\frac{\pi}{2}\right]$$
$$+\frac{M^2}{r_0}\left[\frac{15\pi}{4}-\frac{15}{2}\sin^{-1}\left(\frac{r_0}{r}\right)-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r-r_0}{r+r_0}}\left(\frac{4r+5r_0}{r+r_0}\right)\right]$$

The first term represents the zeroth order (flat space) delay due to the photon travel time from the distance of closest approach to the a position r far from the black hole. The next two terms are the standard first order (M dependent) Shapiro time delays occurring in the Schwarzschild spacetime. The second order contributions to the time delay have a negative contribution from the charge and additional positive terms from the mass. In taking the limit where $r \gg r_0$ all the second order effects introduce a constant delay

$$\Delta t_2 = \frac{1}{4r_0}\left[(15\pi-8)M^2-3\pi Q^2\right].$$

Clearly these represent small deviations from the standard Shapiro effect.

(соберу, аналогично статье Christian G Bohmer et al. Classical tests of general relativity. заготовлю шаблоны, потому что это самое типичное, что можно делать в ОТО!)

Шаблон описания

Дополнения

7.3.2 Shapiro time delay

(????)

7.4 Perihelion Precession

7.4.1 Description of Perihelion Precession

По Тонгу (???)

To understand the orbits in more detail, we can attempt to solve the equations of motion. We follow our Newtonian analysis, introducing the inverse parameter $u = 1/r$ and converting $\dot{r}$ into $du/d\phi$. Our equation (1.39) becomes

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2+u^2-\frac{2GM}{l^2}u-\frac{2GM}{c^2}u^3=\frac{E^2}{l^2c^2}-\frac{c^2}{l^2}$$

This equation is considerably harder than our Newtonian orbit equation (1.42). To proceed, it's simplest to first differentiate again with respect to ϕ. This gives

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - \frac{GM}{l^2} - \frac{3GM}{c^2}u^2 = 0$$

where we have assumed that $du/d\phi \neq 0$, which means that we are neglecting the simple circular solution. The equation above differs from the analogous Newtonian equation by the final term (which indeed vanishes if we take $c^2 \to \infty$). There is no closed-form solution to this equation, but we can make progress by working perturbatively. To this end, we define the dimensionless parameter

$$\beta = \frac{3G^2M^2}{l^2c^2}$$

and write the orbit equation as

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - \frac{GM}{l^2} = \beta\frac{l^2u^2}{GM}$$

We will assume $\beta \ll 1$ and look for series solutions of the form

$$u = u_0 + \beta u_1 + \beta^2 u_2 + ...$$

To leading order, we can ignore the terms proportional to β on the right-hand-side of (1.47). This gives us an equation for u_0 which is identical to the Newtonian orbit

$$\frac{d^2u_0}{d\phi^2} + u_0 - \frac{GM}{l^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_0(\phi) = \frac{GM}{l^2}(1 + e\cos\phi)$$

We now feed this back into the equation (1.47) to get an equation for u_1,

$$\frac{d^2u_1}{d\phi^2} + u_1 = \frac{l^2}{GM}u_0^2 = \frac{GM}{l^2}\left[\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) + 2e\cos\phi + \frac{e^2}{2}\cos 2\phi\right]$$

You can check that this is solved by

$$u_1 = \frac{GM}{l^2}\left[\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) + e\phi\sin\phi - \frac{e^2}{6}\cos 2\phi\right]$$

We could proceed to next order in β, but the first correction u_1 will be sufficient for our purposes.

The interesting term is the $\phi\sin\phi$ in u_1. This is not periodic in ϕ and it means that the orbit no longer closes: it sits at a different radial value at $\phi = 0$ and $\phi = 2\pi$. To illustrate this, we ask: when is the particle closest to origin? This is the perihelion of the orbit. It occurs when

$$\frac{du}{d\phi} \approx \frac{d\left(u_0 + \beta u_1\right)}{d\phi} = 0 \Rightarrow -e\sin\phi + \beta\left(e\sin\phi + e\phi\cos\phi + \frac{e^2}{3}\sin 2\phi\right) = 0$$

Clearly this is solved by $\phi = 0$. The next solution is at $\phi = 2\pi + \delta$ where, due to our perturbative expansion, δ will be small. Expanding our expression above, and dropping terms of order δ^2 and $\beta\delta$, we find the precession of the perihelion given by

$$\delta = 2\pi\beta = 6\pi\frac{G^2M^2}{l^2c^2}$$

For planets orbiting the Sun, the perihelion shift depends only on the angular momentum l of the planet and the mass of the Sun, denoted $M_\odot$. The latter is $M_\odot \approx 2\times 10^{30}$ kg, corresponding to the length scale

$$\frac{GM_\odot}{c^2} \approx 1.5 \times 10^3 \text{ m}$$

If a planet on an almost-circular orbit of radius r orbits the sun in a time T, then the angular momentum (1.36) is

$$l = \frac{2\pi r^2}{T}$$

Recall that Kepler's third law (which follows from the inverse square law) tells us that $T \propto r^{3/2}$. This means that $l \propto r^{1/2}$ and, correspondingly, the perihelion shift (1.48) is proportional to $\delta \propto 1/r$. We learn that the effect should be more pronounced for planets closest to the Sun.

The closest planet to the Sun is Mercury which, happily, is also the only planet whose orbit differs significantly from a circle; it has eccentricity $e \approx 0.2$, the radius varying from 4.6 to 7×10^{10} m. Mercury orbits the Sun once every 88 days but, in fact, we don't need to use this to compute the angular momentum and precession. Instead, we can invoke the elliptic formula (1.44) which tells us that the minimum r_- and maximum distance $r_+$is given by

$$r_\pm = \frac{l^2}{GM}\frac{1}{1\mp e} \Rightarrow l^2 = GMr_+(1-e)$$

from which we get the precession

$$\delta = \frac{6\pi GM}{c^2}\frac{1}{r_+(1-e)}$$

Plugging in the numbers gives $\delta \approx 5.0 \times 10^{-7}$. This is rather small. However, the perihelion precession is cumulative. Over a century, Mercury completes 415 orbits, giving the precession of 2.1×10^{-4} per century.

The result above is quoted in radians. Astronomers prefer units of arcseconds, with 3600 arcseconds (denoted as $3600''$) in a degree and, of course, 360 degrees in 2π radians. This means that $1'' \approx 4.8 \times 10^{-6}$ radians. Our calculation from general relativity gives $43''$ per century as the shift in the perihelion. This was one of the first successful predictions of the theory. Subsequently, the perihelion shift of Venus and Earth has been measured and is in agreement with the predictions of general relativity.

7.4.2 Other about Perihelion Precession

(add a lot of things here later!)

7.5 Deflection of Light

7.5.1 Description Template

По Тонгу

It is straightforward to extend the results above to determine the null geodesics in the Schwarzschild metric. We continue to use the equations of motion derived from S_{useful} in (1.35). But this time we replace the constraint (1.38) with the null version (1.34), which reads

$$-A(r)c^2\dot{t}^2 + A^{-1}(r)\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = 0$$

The upshot is that we can again reduce the problem to radial motion,

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{\rm null}\,(r) = \frac{1}{2}\frac{E^2}{c^2}$$

but now with the effective potential (1.40) replaced by

$$V_{\rm null}(r) = \frac{l^2}{2r^2}\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)$$

A typical potential is shown in Figure 9. Note that, as $r \to \infty$, the potential asymptotes to zero from above, while $V_{\rm null} \to -\infty$ as $r \to 0$. The potential has a single maximum at

$$V'_{\rm null}\,(r_\star) = -\frac{l^2}{r_\star^3} + \frac{3GMl^2}{r_\star^4 c^2} = 0 \Rightarrow r_\star = \frac{3GM}{c^2}$$

We learn that there is a distance, $r_\star$, at which light can orbit a black hole. This is known as the photon sphere. The fact that this sits on a maximum of the potential means that this orbit is unstable. In principle, focussing effects mean that much of the light emitted from an accretion disc around a non-rotating black hole emerges from the photon sphere. In practice, it seems likely that photograph of the Event Horizon Telescope does not have the resolution to see this.

The fate of other light rays depends on the relative value of their energy E and angular momentum l. To see this, note that the maximum value of the potential is

$$V_{\rm null}\,(r_\star) = \frac{l^2}{54}\frac{c^4}{G^2M^2}$$

The physics depends on how this compares to the right-hand side of (1.52), $E^2/2c^2$. There are two possibilities - $E < lc^3/\sqrt{27}GM$: In this case, the energy of light is lower than the angular momentum barrier. This means that light emitted from $r < r_\star$ cannot escape to infinity; it will orbit the star, before falling back towards the origin. The flip side is that light coming from infinity will not fall into the star; instead it will bounce off the angular momentum barrier and return to infinity. In other words, the light will be scattered. We will compute this in more detail below. - $E > lc^3/\sqrt{27}GM$: Now the energy of the light is greater than the angular momentum barrier. This means that light emitted from $r < r_\star$ can escape to infinity. (We will see in Section 6 that this is only true for light in the region $R_s < r < r_\star$.) Meanwhile, light coming in from infinity is captured by the black hole and asymptotes to $r \to 0$.

To understand the trajectories of light-rays in more detail, we again adopt the inverse parameter $u = 1/r$. The equation of motion (1.52) then becomes

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2}u\right) = \frac{E^2}{l^2c^2}$$

If we now differentiate again, we get

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{3GM}{c^2}u^2$$

We will again work perturbatively. First, suppose that we ignore the GM term on the right-hand side. We have

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{b}\sin\phi$$

for constant b. The meaning of this solution becomes clearer if we write it as $r\sin\phi = b$: this is the equation of a horizontal straight line, a distance b above the origin as shown by the dotted line in Figure 10. The distance b is called the impact parameter.

We will solve the full equation (1.53) perturbatively in the small parameter

$$\tilde{\beta} = \frac{GM}{c^2 b}$$

We then look for solutions of the form

$$u = u_0 + \bar{\beta} u_1 + ...$$

We start with the straight line solution $u_0 = (1/b)\sin\phi$. At leading order, we then have

$$\frac{d^2 u_1}{d\phi^2} + u_1 = \frac{3\sin^2\phi}{b} = \frac{3(1-\cos 2\phi)}{2b}$$

The general solution is

$$u_1 = A\cos\phi + B\sin\phi + \frac{1}{2b}(3+\cos 2\phi)$$

where the first two terms are the complimentary solution, with A and B integration constants. We pick them so that the initial trajectory at $\phi = \pi$ agrees with the straight line u_0. This holds if we choose $B = 0$ and $A = 2/b$, so that $u_1 \to 0$ as $\phi \to \pi$. To leading order in $\tilde{\beta}$, the solution is then

$$u = \frac{1}{b}\sin\phi + \frac{GM}{2b^2c^2}(3 + 4\cos\phi + \cos 2\phi)$$

The question now is: at what angle does the particle escape to $r = \infty$ or, equivalently, $u = 0$? Before we made the correction this happened at $\phi = 0$. Within our perturbative approach, we can approximate $\sin\phi \approx \phi$ and $\cos\phi \approx 1$ to find that the particle escapes at

$$\phi \approx -\frac{4GM}{bc^2}$$

This light bending is known as gravitational lensing.

Отклонение света методом Гамильтона-Якоби по Ландау

Количественные оценки (??)

There is a difficulty in testing this prediction: things behind the Sun are rarely visible. However, Nature is kind to us because the size of the moon as seen in the sky is more or less the same as the size of the Sun. (This random coincidence would surely make our planet a popular tourist destination for alien hippies if only it wasn't such a long way to travel.) This means that during a solar eclipse the light from the Sun is blocked, allowing us to measure the positions of stars whose light passes nearby the Sun. This can then be compared to the usual positions of these stars.

This measurement was first carried out in May 1919, soon after cessation of war, in two expeditions led by Arthur Eddington, one to the island of Principe and the other to Brazil. The data is shown in the figure above. In the intervening century, we have much more impressive evidence of light bending, in which clusters of galaxies distort the light from a background source, often revealing a distinctive ring-like pattern as shown in the right-hand figure.

7.5.2 Gravitational Lensing in Centrally Symmetric Field

(другие все темы и вопросы - в дополнениях и отдельной записи.)

Описание гравитационного линзирования (??)

(пока еще хз)

О другом в гравитационном линзировании

Почему метод Гамильтона-Якоби не такой хороший

7.6 Other Effects (??)

7.6.1 Influence of Other Planets in the Schwarzschild Metric (??)

The Pull of Other Planets по Тонгу

The general relativistic contribution of $43''$ per century is not the full story. In fact the observed perihelion shift of Mercury is much larger, at around $575''$. The vast majority of this is due to the gravitational force of other planets and can be understood entirely within the framework of Newtonian gravity. For completeness, we now give an estimate of these effects.

We start be considering the effect of single, heavy planet with mass M', orbiting at a distance R from the Sun. Of course, the 3-body problem in Newtonian gravity is famously hard. However, there is an approximation which simplifies the problem tremendously: we consider the outer planet to be a circular ring, with mass per unit length given by $M'/2\pi R$.

It's not obvious that this is a good approximation. Each of the outer planets takes significantly longer to orbit the Sun than Mercury. This suggests for any given orbit of Mercury, it would be more appropriate to treat the position of the outer planets to be fixed. (For example, it takes Jupiter 12 years to orbit the Sun, during which time Mercury has completed 50 orbits.) This means that the perihelion shift of Mercury depends on the position of these outer planets and that's a complicated detail that we're happy to ignore. Instead, we want only to compute the total perihelion shift of Mercury averaged over a century. And for this, we may hope that the ring approximation, in which we average over the orbit of the outer planet first, suffices.

In fact, as we will see, the ring approximation is not particularly good: the calculation is non-linear and averaging over the position of the outer planet first does not commute with averaging over the orbits of Mercury. This means that we will get a ballpark figure for the perihelion precession of Mercury but, sadly, not one that is accurate enough to test relativity.

We would like to determine the Newtonian potential felt by a planet which orbits a star of mass M and is surrounded, in the same plane, by a ring of density $M'/2\pi R$. The geometry is shown in the figure. Obviously, the potential (per unit mass) from the star is

$$V_{\rm star}(r) = -\frac{GM}{r}$$

We need to calculate the potential (per unit mass) from the Figure 8: ring. This is

$$V_{\rm ring}(r) = -\frac{GM'}{2\pi R}\int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{x} \text{ with } \quad x^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta$$

We use the fact that Mercury is much closer to the Sun than the other planets and Taylor expand the integral in r^2/R^2. To leading order we have

$$V_{\rm ring}(r) = -\frac{GM'}{R}\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^2 + ...\right]$$

Dropping constant terms, we learn that the effective potential (per unit mass) experienced by Mercury is, to leading order,

$$V_{\rm eff}(r) = -\frac{GM}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \sum_i \frac{GM_i'}{4}\frac{r^2}{R_i^3} + ...$$

where we've included the angular momentum barrier and the sum is over all the outer planets. In what follows, we must assume that the r^2 correction term is suitably small so that it doesn't destabilise the existence of orbits. Obviously, this is indeed the case for Mercury.

Now we can follow our calculation for the perihelion precession in general relativity. Conservation of energy tells us

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = E$$

Working with everyone's favourite orbit variable, $u = 1/r$, viewed as $u = u(\phi)$, the general relativistic equation (1.47) is replaced by

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - \frac{GM}{l^2} = -\alpha\frac{(GM)^4}{l^8u^3}$$

where this time our small dimensionless parameter is

$$\alpha = \frac{l^6}{2G^3M^4}\sum_i \frac{M_i'}{R_i^3} = \frac{(1-e)^3}{2}\sum_i \frac{M_i'}{M}\left(\frac{r_+}{R_i}\right)^3$$

where, in the second equality, we've used (1.49); here M is the mass of the Sun, $r_+$is the outermost radius of Mercury's orbit, and $e \approx 0.2$ is the eccentricity of Mercury's orbit. We safely have $\alpha \ll 1$ and so we look for series solutions of the form

$$u = u_0 + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \ldots$$

We've already met the leading order solution, $u_0(\phi) = (GM/l^2)\,(1 + e\cos\phi)$ with e the eccentricity of the planet's orbit. Feeding this into (1.51), we get an equation for the first correction

$$\frac{d^2u_1}{d\phi^2} + u_1 = -\frac{(GM)^4}{l^8}\frac{1}{u_0^3} = -\frac{GM}{l^2}\frac{1}{(1+e\cos\phi)^3}$$

This equation is somewhat harder to solve than the general relativistic counterpart. To proceed, we will assume that the eccentricity is small, $e \ll 1$, and solve the equation to leading order in e. Then this equation becomes

$$\frac{d^2u_1}{d\phi^2} + u_1 = -\frac{GM}{l^2}(1 - 3e\cos\phi)$$

which has the solution

$$u_1 = \frac{GM}{l^2}\left(-1 + \frac{3e}{2}\phi\sin\phi\right)$$

The precession of the perihelion occurs when

$$\frac{du}{d\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad -e\sin\phi + \frac{3e\alpha}{2}(\sin\phi + \phi\cos\phi) = 0$$

As in the relativistic computation, this is solved by $\phi = 0$ and by $\phi = 2\pi + \delta$ where, to leading order, the shift of the perihelion is given by

$$\delta = 3\pi\alpha = \frac{3\pi}{2}\sum_i \frac{M_i'}{M}\left(\frac{r_0}{R_i}\right)^3$$

with $r_0 = (1-e)r_+$. Once again, we can put the numbers in. The mass of the Sun is $M = M_\odot \approx 2 \times 10^{30}$ kg. The formula is very sensitive to the radius of Mercury's orbit: we use $r_0 \approx 5.64 \times 10^{10}$ m. The relevant data for the other planets is then

Planet	Mass (10^{24} kg)	Distance (10^{11} m)	$\frac{M}{M_\odot}\left(\frac{r_0}{R}\right)^3$
Venus	4.9	1.1	3.6×10^{-7}
Earth	6.0	1.5	1.7×10^{-7}
Mars	0.64	2.3	5.1×10^{-9}
Jupiter	1900	7.8	3.9×10^{-7}
Saturn	570	14	2.0×10^{-8}

A quick glance at this table shows that the largest contributions come from Jupiter (because of its mass) and Venus (because of it proximity), with the Earth in third place. (The contributions from Uranus, Neptune and Pluto are negligible.)

Adding these contributions, we find $\delta \approx 40 \times 10^{-7}$ radians per orbit. This corresponds to $344''$ per century, significantly larger than the $43''$ per century arising from general relativity but not close to the correct Newtonian value of $532''$. Higher Order Contributions Our analysis above gave us a result of $380''$ per century for the perihelion shift of Mercury. A more precise analysis gives $532''$ coming from the Newtonian pull of the other planets.

We made a number of different approximations in the discussion above. But the one that introduced the biggest error turns out to be truncating the ring potential (1.50) at leading order in r/R. This, it turns out, is particularly bad for Venus since its orbit compared to Mercury is only $(r_0/R) \approx 0.5$. To do better, we can expand the potential (1.50) to higher orders. We have

$$\begin{aligned} V_{\text{ring}}(r) &= -\frac{GM'}{2\pi R}\int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}} \\ &= -\frac{GM'}{R}\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^2+\frac{9}{64}\left(\frac{r}{R}\right)^4+\frac{25}{256}\left(\frac{r}{R}\right)^6+\ldots\right] \end{aligned}$$

An identical calculation to the one above now gives a corresponding perturbative expansion for the perihelion shift,

$$\delta = \pi\sum_i \frac{M_i'}{M}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{r_0}{R_i}\right)^3+\frac{45}{16}\left(\frac{r_0}{R_i}\right)^5+\frac{525}{128}\left(\frac{r_0}{R_i}\right)^7+\ldots\right]$$

with $r_0 = (1-e)r_+$the mean orbit of Mercury. The extra terms give significant contributions for Venus, and smaller for Earth. Using the value of $r_0 \approx 5.64 \times 10^{10}$ m and

7.6.2 Spin in Gravitational Field (??)

(его тоже многие изучают, тут напишу потом эту задачу)

8 Experiments on general relativity

Обсудим подробно, какие эксперименты и как можно поставить для проверки ОТО.

8.0.1 Line displacement

идея проверки через эффект Мессбауэра

есть инфа, что так это смещение и проверяли.
хз, почему именно Мессбауэр нужен для этого.

8.0.2 Confirmation the Redshift

вкратце суть красного смещения

8.0.3 The discovery of gravitational waves

Метод Халсома и Тейлора

Экспериментальное открытие таких радиационных потерь в 1979 Расселом Халсом и Джозефом Тейлором было первым подтверждением существования гравитационных волн.

В 1991 году авторы открытия были удостоены Нобелевской премии.

потом чет посмотрю, пока просто знаю это и всё

8.0.4 Experiments on graviton mass

тоже интересно, пару статей видел, потом их почитаю

8.1 Classical tests

1.2
(see Tests of General Relativity: A Review By Estelle Asmodelle)

8.1.1 Perihelion Advance of Mercury

.. 1.3

8.1.2 Deflection of light

... 1.4

8.1.3 Gravitational Redshift

.

8.2 Modern tests

2.1

8.2.1 Shapiro Delay

. 2.2

8.2.2 Gravitational Time Dilation

2.3

8.2.3 Frame-dragging and Geodetic effect

. 2.4

8.2.4 Equivalence principle tests

. 2.5

8.2.5 Solar-system tests

...

8.3 Strong field tests

3.1

8.3.1 Gravitational lensing

3.2

8.3.2 Gravitational waves

3.3

8.3.3 Timing pulsars

. 3.4

8.3.4 Extreme Environments

CHAPTER 4:

8.4 Cosmological tests

4.1

8.4.1 Expanding universe

4.2

8.4.2 Cosmological observations

4.3

8.4.3 Weak lensing surveys

9 Black Holes: Special Types and Special Physics

Обсудим подробно черные дыры.

(У Тонга хорошо написано, по нему в первую очередь и буду изучать. потом уже всякие другие лекции буду смотреть про них, нпр. Лашкевича и др..)

9.1 Typical Effects and Properties of Black Holes

9.1.1 On Penrose–Hawking singularity theorems

Теория

(пока не тот уровень, чтобы этим заниматься, да и потребности особо нет в этом пока что.)

9.1.2 On Raychaudhuri equation (??????)

In general relativity, the Raychaudhuri equation, or Landau-Raychaudhuri equation, [1] is a fundamental result describing the motion of nearby bits of matter.

The equation is important as a fundamental lemma for the Penrose-Hawking singularity theorems and for the study of exact solutions in general relativity, but has independent interest, since it offers a simple and general validation of our intuitive expectation that gravitation should be a universal attractive force between any two bits of mass-energy in general relativity, as it is in Newton's theory of gravitation.

The equation was discovered independently by the Indian physicist Amal Kumar Raychaudhuri [2] and the Soviet physicist Lev Landau. [3]

Теория

(пока не тот уровень, чтобы этим заниматься, да и потребности особо нет в этом пока что.)

(по статьям потом почитаю, вроде есть хорошие обзоры.)

9.1.3 Hawking Radiation: Basics (??!!?)

(соберу компактную его теорию, потому что часто к ней отсылки)

9.1.4 Hawking Radiation: Other Statements (??!!?)

(соберу компактную его теорию, потому что часто к ней отсылки)

Observation of Hawking Radiation

(???? was it observed???)

9.1.5 What Happens when one Falls into BH?

(I'll write the answer, a very typical question)

9.1.6 The Entropy of Black Holes (??)

9.2 Charged Black Holes

9.2.1 1 The Reissner-Nordstrom Solution

Теория Тонга

Charged black holes arise as a solution to Einstein-Maxwell theory, with action

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G}R - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right]$$

The equations of motion are the Maxwell equation

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = 0$$

together with the Einstein-Maxwell equation

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G\left(F_\mu{}^\rho F_{\nu\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\right)$$

where the right-hand side is the Maxwell stress-energy tensor that we calculated in (4.52).

These equations of motion admit a spherically symmetric solution with gauge field

$$A = -\frac{Q_e}{4\pi r}dt - \frac{Q_m}{4\pi}\cos\theta d\phi$$

The metric takes the familiar spherically symmetric form

$$ds^2 = -f(r)^2dt^2 + f(r)^{-2}dr^2 + r^2d\Omega_2^2$$

where, this time,

$$f(r)^2 = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{e^2}{r^2} \quad \text{with} \quad e^2 = \frac{G}{4\pi}\left(Q_e^2 + Q_m^2\right)$$

This is the Reissner-Nordström solution, discovered over a period of years from 1916 to 1921.

An analog of Birkhoff's theorem says that the Reissner-Nordström solution is almost the unique spherically symmetric solution of the Einstein-Maxwell equations. There is one exception: there is a solution with geometry $\mathrm{AdS}_2 \times \mathbf{S}^2$, threaded with electric flux; we'll see how this emerges a special limit of the Reissner-Nordström solution in Section 6.2.5.

The dt term in the gauge field describes a radial electric field. Meanwhile, the $d\phi$ term is the gauge field for a magnetic monopole; it is only rotationally invariant up to a gauge transformation. (See, for example, the lectures on Gauge Theory for more discussion.) Both of these charges can be measured asympotically as explained in 3.2.5. One can check that

$$Q_e = \int_{\mathbf{S}^2} \star F \text{ and } Q_m = \int_{\mathbf{S}^2} F$$

The solution has non-vanishing electric and magnetic charge, even though the theory (6.19) has no charge matter. The electric and magnetic charges can be viewed as lurking in the singularity.

To get some intuition for the Reissner-Nordström black hole, we write the metric factor as

$$f(r)^2 = \frac{1}{r^2}(r - r_+)(r - r_-)$$

Here the two roots are given by

$$r_\pm = GM \pm \sqrt{G^2M^2 - e^2}$$

In the limit where $e \to 0$, the smaller root merges with the singularity, $r_- \to 0$ while the larger root coincides with the Schwarzschild radius $r_+ \to 2GM$. The physical interpretation of the metric depends on the roots of this polynomial. We deal with these cases in turn.

О другой теории Тонга

(у Тонга еще куча страниц, потом мб разберу. пока вообще не до этого.)

Отклонение света в метрике Рейснера-Нордстрема

(исп теория из раздела про физику в гравитации из статьи одной, в которой по Вайнбергу решают)

The metric coefficients for the Reissner-Nordström solution are $A = B^{-1} = 1 - 2Mu + Q^2u^2$ and $C = 1$. Following the exact same procedure as for the Schwarzschild case, equation (13) becomes

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3Mu^2 - 2Q^2u^3,$$

so that the expanded form of equation (21) is

$$(u_0'' + u_0) + \epsilon\left(u_1'' + u_1 - 3\cos^2\phi\right) + \epsilon^2\left(u_2'' + u_2 - 6u_1\cos\phi + 2\frac{Q^2}{M^2}\cos^3\phi\right) + \cdots = 0.$$

Since u_N is assumed to be small, the last term involving the charge Q will be second order in ϵ as long as Q is less than or equal to M (i.e. there are no naked singularities present). The equations up to second order ϵ are now

$$u_1'' + u_1 = 3\cos^2\phi$$
$$u_2'' + u_2 = 6u_1\cos\phi - 2\frac{Q^2}{M^2}\cos^3\phi$$

so that the approximate solution for u becomes:

$$u \simeq u_N\left[\cos\phi + \frac{1}{2}Mu_N(3-\cos(2\phi)) + \frac{3}{16}M^2u_N^2\left(\left(20 - \frac{4Q^2}{M^2}\right)\phi\sin\phi + \left(1 + \frac{Q^2}{3M^2}\right)\cos(3\phi)\right)\right]$$

and this yields a deflection angle expression in terms of the impact parameter:

$$\delta\phi \simeq \frac{4M}{b} + \frac{M^2}{b^2}\frac{15}{4}\pi - \frac{3}{4}\frac{Q^2}{b^2}\pi.$$

The existence of the non-zero charge charge adds a small (but negative) correction in the second order term, which leads to a deflection angle that is smaller than that found in the Schwarzschild case.

9.3 Other Black Holes (???)

9.3.1 Rotating Black Holes

(??????????????/)

Обзор электронной чёрной дыры

(Материал из Википедии)

Экстремальная чёрная дыра — понятие теоретической физики, чёрная дыра с минимально возможной массой, которая может обладать данным зарядом и моментом импульса[1]. Иными словами, это чёрная дыра заданной массы с наибольшей допустимой скоростью вращения — при большей скорости горизонт событий исчезает. (?? почему)

В классической динамике чёрных дыр существует теорема неуменьшения площади горизонта, которая, в частности, приводит к тому, что никакими процессами раскрутить уже существующую чёрную дыру быстрее экстремальной невозможно[2]. С квантовой точки зрения такие дыры тоже интересны тем, что они являются стабильными и не выделяют излучение Хокинга.

Считается, что чёрные дыры в центрах активных галактик как минимум близки к экстремальным, так как падающий на них газ несёт с собой обычно момент импульса, превышающий предельный, и поэтому он раскручивал бы их сильнее, чем в случае внесения дополнительной массы. «Лишний» момент импульса, как предполагается,

выбрасывается в процессе аккреции в виде релятивистских струй — джетов.[источник не указан 3020 дней]

В теориях суперсимметрии экстремальные чёрные дыры часто являются суперсимметричными объектами: они инвариантны относительно некоторых суперзарядов. Это является следствием связи Богомольного — Прасада — Зоммерфельда (англ.)рус.. Такие чёрные дыры являются стабильными и не выделяют излучение Хокинга. Их энтропия[3] может быть рассчитана с помощью теории струн.

Шон Кэрролл из Калтеха высказал предположение, что энтропия экстремальной чёрной дыры равна нулю. Кэрролл объясняет отсутствие энтропии за счёт возникновения отдельного измерения внутри экстремальной чёрной дыры[4].

Гипотетические электронные чёрные дыры являются, в терминах этой теории, «супер-экстремальными» (обладающими бОльшим зарядом и моментом импульса, чем экстремальная чёрная дыра той же массы).

теорема неуменьшения площади горизонта

Как было до этой модели (????)

(?? что за "постулировать геодезическое движение как часть общей теории относительности"??? мб посмотрю, если будет нужно.)

9.3.2 Requirements to Create a Black Hole

О создании черных дыр в лабораторных условиях (??)

(отвечу, можно ли такое сделать. пока не знаю.)

Can a Big Blow of Dynamite Create a Black Hole?

(????/)

10 Stars [see Miesner Thorn Wheeler!]

(I already have a latex, I'll add it later, I need first to think about it)

Spherical Stars 593

1. Prolog 593 2. Coordinates and Metric for a Static, Spherical System 594 3. Physical Interpretation of Schwarzschild coordinates 595 4. Description of the Matter Inside a Star 597 5. Equations of Structure 600 6. External Gravitational Field 607 7. How to Construct a Stellar Model 608 8. The Spacetime Geometry for a Static Star 612

24. Pulsars and Neutron Stars; Quasars and Supermassive Stars 618 1. Overview 6 18 2. The Endpoint of Stellar Evolution 621 3. Pulsars 627 4. Supermassive Stars and Stellar Instabilities 630 5. Quasars and Explosions In Galactic Nuclei 634 6. Relativistic Star Clusters 634

25. The" Pit in the Potential" as the Central New Feature of Motion in Schwarzschild Geometry 636 1'1 From Kepler's Laws to the Effective Potential for Motion in Schwarzschild Geometry 636 2. Symmetries and Conservation Laws 650 3. Conserved Quantities for Motion in Schwarzschild Geometry 655 4. Gravitational Redshift 659 5. Orbits of Particles 659 6. Orbit of a Photon, Neutrino, or Graviton in Schwarzschild Geometry 672 7. Spherical Star Clusters 679

26. Stellar Pulsations 688 1. Motivation 688 2. Setting Up the Problem 689 3. Eulerian versus Lagrangian Perturbations 690 4. Initial-Value Equations 691 5. Dynamic Equation and Boundary Conditions 693 6. Summary of Results 694

11 Gravitational Waves: Typical Cases

(!!! see a special note about them, it is a very big topic, I'll write theory here very not soon)

11.1 Typical Gravitational Waves

11.1.1 GW by Tong (???)

(скоро вставлю!)

11.1.2 GW by Landau

Уравнение слабых гравитационных волн

(тут пока повторение того, что раньше должно быть написано, потом уберу в части и разделы раньше)

Слабое свободное гравитационное поле в пустоте описывается тензором h_{ik}, отвечающим за возмущение галилеевой метрики:

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}$$

Обратная метрика точностью до величин первого порядка по h_{ik}:

$$g^{ik} = g^{ik(0)} - h^{ik}.$$

а определитель тензора g_{ik}:

$$g = g^{(0)}(1 + h),$$

где $h \equiv h_i^i$; все операции поднимания и опускания тензорных индексов производятся по невозмущенной метрике $g_{ik}^{(0)}$.

Условие малости h_{ik} оставляет возможность произвольных преобразований системы отсчета вида $x^i = x^i + \xi^i$ с малыми ξ^i, при этом

$$h'_{ik} = h_{ik} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x^i}$$

Поэтому, налагаем на h_{ik} дополнительное условие с помощью параметра $\psi_i^k \equiv h_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k h$:

$$\frac{\partial \psi_i^k}{\partial x^k} = 0,$$

после чего тензор Риччи принимает простой вид $R_{ik} = -\frac{1}{2} g^{lm(0)} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m}$, который запишем как:

$$R_{ik} = \frac{1}{2} \Box h_{ik},$$

где $\Box$ есть оператор д'Аламбера: $\Box = -g^{lm(0)} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^m} = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$.

Условия $\frac{\partial \psi_i^k}{\partial x^k} = 0$ все еще не фиксируют однозначного выбора системы отсчета: если некоторые h_{ik} удовлетворяют этим условиям, то им же будут удовлетворять и h_{ik}(107.4), если только ξ^i являются решениями уравнения

$$\Box \xi^i = 0$$

Приравняв тензор Риччи R_{ik} нулю, найдем, таким образом, уравнения гравитационного поля в пустоте в виде

$$\Box h_i^k = 0$$

Это - обычное волновое уравнение.

Следовательно, гравитационные поля, как и электромагнитные, распространяются в пустоте со скоростью света.

В плоской слабой волне поле меняется только вдоль одного направления в пространстве; в качестве этого направления выберем ось $x^1 = x$.

Уравнения $\Box h_i^k = 0$ тогда превращаются в

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) h_i^k = 0$$

решением которых является любая функция от $t \pm x/c$.

Вид гравитационной волны

Пусть волна распространяется в положительном направлении оси x.

Все величины h_i^k в ней являются функциями от $t - x/c$.

Дополнительные калибровочные условия дают в этом случае $\dot{\psi}_i^1 - \dot{\psi}_i^0 = 0$, где точка над буквой означает дифференцирование по t.

Эти равенства можно проинтегрировать, просто вычеркнув знак дифференцирования; постоянные интегрирования можно положить равными нулю, так как мы интересуемся здесь (как и в случае электромагнитных волн) только переменной частью поля.

Таким образом, между отдельными компонентами ψ_i^k имеются соотношения:

$$\psi_1^1 = \psi_1^0, \quad \psi_2^1 = \psi_2^0, \quad \psi_3^1 = \psi_3^0, \quad \psi_0^1 = \psi_0^0$$

Как было указано, условия $\frac{\partial \psi_i^k}{\partial x^k} = 0$ еще не определяют однозначно системы отсчета; мы можем подвергнуть координаты преобразованию вида $x'^i = x^i + \xi^i(t - x/c)$.

Этим преобразованием можно воспользоваться для того, чтобы обратить в нуль четыре величины: $\psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0, \psi_2^2 + \psi_3^3$.

Из равенств выше следует, что при этом обратятся в нуль также и компоненты $\psi_1^1, \psi_2^1, \psi_3^1, \psi_0^0$.

Остающиеся величин ψ_2^3, ψ_2^2 нельзя обратить в нуль никаким выбором системы отсчета, поскольку при преобразовании с $\xi_i = \xi_i(t - x/c)$ эти компоненты вообще не меняются.

Заметим, что обращается в нуль и $\psi \equiv \psi_i^i$, а потому $\psi_i^k = h_i^k$ Таким образом, плоская гравитационная волна определяется двумя величинами: $h_{23}, h_{22} = -h_{33}$.

Поперечность гравитационных волн

Другими словами, гравитационные волны являются поперечными волнами, поляризация которых определяется симметричным тензором 2-го ранга в плоскости yz и сумма диагональных членов которого $h_{22} + h_{33}$ равна нулю.

и что?

Существование двух независимых поляризаций

В качестве двух независимых поляризаций можно выбрать случаи, в которых отлична от нуля одна из двух величин h_{23} и $1/2\,(h_{22} - h_{33})$.

Такие две поляризации отличаются друг от друга поворотом на угол $\pi/4$ в плоскости yz.

я вот так и не въехал, чего не может быть других?

Псевдотензор энергии-импульса в плоской гравитационной волне

(тут важные рассуждения добавлю! также нужно проработать раздел про него нормально!)

Псевдотензор энергии-импульса в плоской гравитационной волне имеет вид:

$$t^{ik} = \frac{c^4}{32\pi k} h^{n,i}_q h^{q,k}_n,$$

что и покажем ниже. Компоненты t^{ik} - величины второго порядка малости; мы должны вычислить их, пренебрегая членами еще более высокого порядка.

Поскольку при $h = 0$ определитель g отличается от $g^{(0)} = -1$ лишь величинами второго порядка, то в формуле явного вида ТЭИ можно положить $\mathfrak{g}^{ik}_{,l} \approx g_{,l} \approx -h_{,l}$. Поэтому для плоской волны все отличные от нуля члены в $t^{\imath k}$ заключены в члене

$$\frac{1}{2} g^{il} g^{km} g_{np} g_{qr} g^{nr}_{,l} q^{pq}{}_{,m} = \frac{1}{2} h^{n,i}_q h^{q,k}_n$$

в этом легко убедиться, выбрав одну из осей галилеевой системы отсчета в направлении распространения волны. (?? потом убеждусь!!) Таким образом,

$$t^{ik} = \frac{c^4}{32\pi k} h^{n,i}_q h^{q,k}_n$$

(!!! тут напишу пример его!! хотя бы один посчитать нужно!!)

Поток энергии в волне

Поток энергии в волне определяется величинами $-cgt^{0\alpha} \approx ct^{0\alpha}$.

В плоской волне, распространяющейся вдоль оси x^1, в которой отличные от нуля h_{23} и $h_{22} = -\bar{h}_{33}$ зависят только от разности $t - x/c$, этот поток направлен вдоль той же оси x^1 и равен

$$ct^{01} = \frac{c^3}{16\pi k} \left[\dot{h}^2_{23} + \frac{1}{4} \left(\dot{h}_{22} - \dot{h}_{33} \right)^2 \right]$$

Начальные условия для произвольного поля гравитационных волн

Начальные условия для произвольного поля гравитационных волн должны задаваться четырьмя произвольными функциями координат: в силу поперечности волн имеется всего две независимые компоненты $h_{\alpha\beta}$, вместе с которыми должны быть заданы также и их первые производные по времени.

Хотя этот подсчет мы произвели здесь, исходя из свойств слабого гравитационного поля, но ясно, что его результат - число 4 - не может быть связан с этим предположением и относится к любому свободному, т.е. не связанному с гравитирующими массами, гравитационному полю.

Тензор кривизны в слабой плоской гравитационной волне

Тензор кривизны $R_{iklm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m} \right)$, в слабой плоской гравитационной волне покомпонентно имеет вид:

$$-R_{0202} = R_{0303} = -R_{1212} = R_{0212} = R_{0331} = R_{3131} = \sigma$$
$$R_{0203} = -R_{1231} = -R_{0312} = R_{0231} = \mu$$

где обозначено: $\sigma = -\frac{1}{2}\ddot{h}_{33} = \frac{1}{2}\ddot{h}_{22}, \mu = -\frac{1}{2}\ddot{h}_{23}$.

Действительно, ведь достаточно посчитать

(потом посчитаю, по идее не сложно, просто вставить метрику в формулу тензора кривизны)

В терминах введенных в трехмерных тензоров $A_{\alpha\beta}$ и $B_{\alpha\beta}$ имеем:

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & \mu \\ 0 & \mu & \sigma \end{pmatrix}, \quad B_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \sigma \\ 0 & \sigma & -\mu \end{pmatrix}$$

(потом поработаю с этими A и B, пока не знаю)

Надлежащим поворотом осей x^2, x^3 можно обратить (в заданной точке 4-пространства) одну из величин σ или μ в нуль; обратив в нуль величину σ, приведем тензор кривизны к вырожденному типу Петрова II (тип N).

(количественно тут оценю)

пример: простейшие гравитационные волн от бинарной системы

рассмотрим два тела, которые вращаются

ее характеристики:(??)

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{32G^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{5c^5 r^5}$$
$$-\frac{dr}{dt} = \frac{64G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{5c^5 r^3}$$

а дальше при излучении, энергия теряется, тела должны падать друг на друга.

в итоге еще болше волн выделится.

(??? как посчитать?)

мб в части про явления с грав волнами подробно распишу, тут лишь пару идейных штрихов этой модели.

решение уравнения движения гравитационных волн

(мб от Тонга зависла теория, потом вернусь к ней)

$$h^a_a \equiv h = h_{ab} k^b =$$

используется TT калибровка

$$h_{\alpha\beta} = \hbar_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\hbar \quad \to \quad h_{\alpha\beta} = \hbar_{\alpha\beta}$$
$$h^\alpha_\alpha \equiv h = h_{\alpha\beta} k^\beta = h_{\alpha 0} = 0$$

Let us consider a flat wave propagaing along OZ axis.

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx} & h_{xy} & 0 \\ 0 & h_{xy} & -h_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{h_{xx}dx^2 - h_{yy}dy^2}_{h_+} + \underbrace{2h_{xy}dxdy}_{h_\times}$$

и видим, что есть две поляризации гравитационных волн:

$$h_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad h_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{xy} & 0 \\ 0 & h_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Гравитационные волны в движущейся ультрарелятивистской системе отсчета (???)

(пусть мы нашли волну в покоящейся системе отсчета. пусть вторая движется равномерно со скоростью, близкой ко скорости света относительно первой. как будет выглядеть гр волна в ней?)

11.1.3 GW by Lashkevich (???)

(тут много полезных вычислений, которые позже разберу!)

Волны как решение волнового уравнения в общем виде (????)

До сих пор мы рассматривали специальное решение линейной системы

$$\psi^{\bar\mu}_{\nu,\mu}=0,\quad \psi_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}-\frac{\eta_{\mu\nu}}{2}h\quad \Box\psi_{\mu\nu}=-16\pi G T_{\mu\nu}.$$

В стационарном случае мы выделяли это специальное решение условием стационарности самого решения. В общем случае мы требовали, чтобы это решение достаточно быстро спадало на пространственной бесконечности. Но мы знаем, что общее решение неоднородной линейной системы равно сумме любого специального решения и общего решения однородной системы. В данном случае однородная система состоит из волнового уравнения и условия калибровки:

$$\Box\psi_{\mu\nu}=0,\quad \psi^{\bar\mu}_{\nu,\mu}=0$$

Мы ослабим ограничения и разрешим решения этого уравнения во всем пространстве, которые не спадают на бесконечности. Сначала найдем комплексные решения в виде плоских волн, а потом наложим условие вещественности на их комбинации. Именно, подставляя функции $\psi_{\mu\nu}$ в виде

$$\psi_{\mu\nu}(x)=A_{\mu\nu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx},\quad A_{\nu\mu}=A_{\mu\nu}$$

из волнового уравнения получаем спектр

$$k^{\bar0}=\pm\sqrt{\left(k^{\bar i}\right)^2}=\pm|\boldsymbol{k}|,\quad \boldsymbol{k}=k^{\bar i}\partial_i$$

а из условия калибровки получаем условие пространственно-временной поперечности

$$k^{\bar\mu}A_{\mu\nu}=0.$$

Общее решение имеет вид линейной комбинации всех возможных плоских волн

$$\psi_{\mu\nu}(x)=\frac12\sum_{\varepsilon=\pm}\int\frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}}A^{\varepsilon}_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon\left(|\boldsymbol{k}|x^0-\boldsymbol{k}r\right)}$$

$$|\boldsymbol{k}|A^{\pm}_{0\nu}(\boldsymbol{k})+k^iA^{\pm}_{i\nu}(\boldsymbol{k})=0,\quad A^{\pm}_{\nu\mu}(\boldsymbol{k})=A^{\pm}_{\mu\nu}(\boldsymbol{k}),\quad A^{-}_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})=\left(A^{+}_{\mu\nu}(\boldsymbol{k})\right)^*$$

Последнее равенство во второй строчке представляет собой условие вещественности решения.

(??? дальше мы применяем калибровки и я не совсем понимаю, как это делается????? пока тут нужно тренироваться ещё.)

Рассмотрим одну монохроматическую плоскую волну, движущуюся вправо вдоль оси x^1, то есть с $k^{\bar0}=k^{\bar1}=\omega\neq0, k^a=0(a\geq2)$:

$$\psi_{\mu\nu}(x)=\mathrm{Re}\,A_{\mu\nu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(x^0-x^1\right)}$$

Для удобства мы здесь будем обозначать индексы 0,1 начальными буквами греческого алфавита, а индексы $2, ..., d-1$ - латинского:

$$\alpha, \beta, ... = 0, 1; \quad a, b, ... = 2, ..., d-1$$

Условие калибровки (7.11) дает d уравнений

$$A_{0\nu} = -A_{1\nu}$$

Таким образом, из $d(d+1)/2$ величин $A_{\mu\nu}$ осталось $d(d-1)/2$. Тем не менее, количество физически различных поляризаций меньше. Как мы уже отмечали, условие (7.11) не фиксирует калибровку полностью. Остаются еще преобразования

$$\psi'_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + \xi_{\bar{\mu},\nu} + \xi_{\bar{\nu},\mu} - \eta_{\mu\nu}\xi^{\lambda}_{,\lambda}.$$

удовлетворяющие уравнению $\Box\xi^\mu = 0$. Возьмем вектор ξ^μ вида

$$\xi^\mu = \mathrm{Re}\, X^\mu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\left(x^0 - x^1\right)}$$

Из (8.8) получаем

$$\begin{aligned} A'_{00} &= A_{00} - \mathrm{i}\omega\left(X^0 + X^1\right) \\ A'_{0a} &= A_{0a} + \mathrm{i}\omega X^a \\ A'_{ab} &= A_{ab} - \mathrm{i}\omega\left(X^0 - X^1\right)\delta_{ab} \end{aligned}$$

Таким образом, калибровочные преобразования позволяют устранить еще d компонент. Например, положив

$$X^0 + X^1 = -\mathrm{i}\omega^{-1}A_{00}, \quad X^a = \mathrm{i}\omega^{-1}A_{0a}, \quad X^0 - X^1 = -\frac{\mathrm{i}\omega^{-1}}{d-2}\sum_{a=1}^{d-2} A_{aa},$$

мы получаем $A'_{\alpha\mu} = 0, A'^{\bar{\mu}}_{\mu} = 0$, то есть в результате калибровочного преобразования волна стала поперечной и бесследовой. Всего «живых» компонент остается $d(d-3)/2$. В четырехмерном пространстве удобно выбрать две калибровочно-инвариантные компоненты ψ_{23} и $\psi_{22} - \psi_{33}$.

Чтобы задача Коши для гравитационного поля имела единственное решение, необходимо задать значения этих «живых» компонент и их первых производных по времени, то есть $d(d-3)$ функции пространственных координат. В четырехмерном пространстве-времени нужно задать четыре функции. Решения однородного уравнения в размерностях $d \leq 3$ полностью устраняются калибровкой, и гравитация в этих размерностях не имеет собственных динамических степеней свободы. Хотя мы рассматривали слабые возмущения плоского пространства-времени, выводы, касающиеся задачи Коши в ОТО, имеют общий характер.

Волны, переходя к световому конусу

Изучая плоские волны, мы можем рассуждать по-другому. Рассмотрим общее решение уравнений (8.1), не зависящее от координат x^a. В плоскости (x^0, x^1) удобно перейти к координатам светового конуса $x^\pm = x^0 \pm x^1$. Тогда

$$ds^2 = h_{++}\left(dx^+\right)^2 + h_{--}\left(dx^-\right)^2 + \left(1 + 2h_{+-}\right)dx^+dx^- - \left(\delta_{ab} - h_{ab}\right)dx^a dx^b.$$

Уравнения (8.1) для постоянных по x^a функций принимают вид

$$\partial_+\partial_-\psi_{\mu\nu} = 0, \quad \partial_+\psi_{-\mu} + \partial_-\psi_{+\mu} = 0.$$

Из волнового уравнения немедленно находим

$$\psi_{\mu\nu} = \psi^R_{\mu\nu}\left(x^-\right) + \psi^L_{\mu\nu}\left(x^+\right)$$

Функция $\psi^R_{\mu\nu}\left(x^-\right)$описывает волну, движущуюся направо, а функция $\psi^L_{\mu\nu}\left(x^+\right)$ −волну, движущуюся налево. Калибровочное условие дает $\dot{\psi}^L_{-\mu}\left(x^+\right) = -\dot{\psi}^R_{+\mu}\left(x^-\right)$.Левая часть этого уравнения зависит только от x^+, а правая - только от x^-.Это значит, что обе функции постоянны. Исключая линейные решения для $\psi^{R,L}_{\mu\nu}$ как не соответствующие физическому условию малости и постоянные ненулевые решения, как отвечающие другой задаче (мы еще обсудим это в следующей лекции), находим:

$$\psi^L_{-\mu} = \psi^R_{+\mu} = 0.$$

Нетрудно показать, что калибровочным преобразованием вида (8.8) можно обратить в нуль компоненты $\psi^L_{+\mu}, \psi^R_{-\mu}$ и следы $\psi^{R,L} = \eta^{\mu\nu}\psi^{R,L}_{\mu\nu}$ (поперечная калибровка). Тогда $h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu}$ и решения будут иметь вид

$$h_{ab}(x) = h^R_{ab}\left(x^-\right) + h^L_{ab}\left(x^+\right), \quad h_{\alpha\mu} = 0, \quad \eta^{ab}h^{R,L}_{ab} = 0.$$

Мы видим, что эволюция системы волн определяется $d(d-3)$ функциями $h^R_{ab}, h^L_{ab}((a,b) \neq (d-1,d-1))$ в согласии с нашими предыдущими соображениями.

Оставив только одну движущуюся направо волну, изучим, как меняются в ней пространственные расстояния. Так как поперечной калибровке отвечает синхронная система координат ($g_{0\mu} = \delta_{0\mu}$), имеем

$$dl^2 = \left(dx^1\right)^2 + \left(\delta_{ab} - h_{ab}\right)dx^a dx^b$$

Если мы возьмем $(d-2)$-мерную сферу в плоскости, перпендикулярной волне, то функции h_{ab} описывают небольшие центрально-симметричные деформации такой сферы, причем компонента h_{aa} дает нам сжатие сферы в направлении оси x^a, а $h_{ab}(a \neq b)$ дает сжатие сферы в диагональном направлении $x^a = x^b$ в плоскости $\left(x^a, x^b\right)$ и растяжение в перпендикулярном ему диагональном направлении

$x^a = -x^b$. В силу бесследовости объем сферы в первом порядке по h_{ab} сохраняется: $\det\left(\delta_{ab} + h_{ab}\right) \simeq 1 + \mathrm{tr}\left(h_{ab}\right) = 1$. Важно, что эта $(d-2)$-мерная сфера может быть физически реализована как система частиц. Имен- но, свободные пробные частицы, неподвижные в системе координат, в которой реализуется поперечная калибровка, остаются неподвижными в этой системе координат в течение всего времени прохождения волны. Действительно, в силу калибровки $h_{0\mu} = 0$ имеем $\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(2h_{0\nu,0} - h_{00,\nu}\right) = 0$. Это значит, что уравнение движения свободной частицы имеет вид

$$\ddot{x}^\mu = -2\Gamma^\mu_{i0}\dot{x}^i\dot{x}^0 - \Gamma^\mu_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j,$$

То есть, если частица имеет нулевую скорость ($\dot{x}^i = 0$) в какой-то момент времени, то она имеет и нулевое ускорение ($\ddot{x}^i = 0$). Значит, она будет оставаться неподвижной в поле волны сколь угодно долго. Рассмотрим подробно случай $d = 4$. Имеется две независимые компоненты тельном пространстве), перпендикулярной волновому вектору. Пусть θ - угол, отсчитываемый от оси x^2, задающий точку на окружности. Тогда координаты этой точки отличаются от координат центра окружности на величины

$$h_+ = h_{22} = -h_{33},$$

В плоскости, поперечной к направлению движения волны имеем

$$dl_2^2 = \left(1 - h_+\right)\left(dx^2\right)^2 + \left(1 + h_+\right)\left(dx^3\right)^2 - 2h_\times dx^2 dx^3.$$

Рассмотрим маленькую окружность радиуса dr в плоскости x^2x^3 (точнее, в соответствующем касательном пространстве), перпендикулярной волновому вектору. Пусть θ - угол, отсчитываемый от оси x^2, задающий точку на окружности. Тогда координаты этой точки отличаются от координат центра окружности на величины

$$dx^2 = dr\cos\theta, \quad dx^3 = dr\sin\theta$$

Отсюда имеем

$$dl_2 = dr\left(1 - \frac{h_+}{2}\cos 2\theta - \frac{h_\times}{2}\sin 2\theta\right) = dr\left(1 - \frac{h_*}{2}\cos 2(\theta-\varphi)\right)$$

где

$$h_+ = h_*\cos 2\varphi, \quad h_\times = h_*\sin 2\varphi.$$

Этот результат можно интерпретировать следующим образом. Предположим, у нашей волны h_+и $h_\times$пропорциональны (в случае монохромной волны это значит, что отношение A_{22}/A_{23} вещественно), то есть $\varphi = \text{const}$. Тогда кольцо в плоскости x^2x^3, будет сжиматься и растягиваться вдоль прямой, повернутом под углом φ к оси x^2, и одновременно растягиваться и сжиматься вдоль перпендикулярной ей прямой. Мы будем называть такую волну волной с линейной (или плоской) поляризацией. В отличие от линейной поляризации электромагнитных волн угол φ определен не по модулю π, а по модулю $\frac{\pi}{2}$. Действительно, правая часть (8.19) не меняется при замене $\varphi \to \varphi + \frac{\pi}{2}, h_* \to -h_*$.

Наличие двух независимых коэффициентов h_+и $h_\times$означает, что любую поляризацию волны (в том числе, любую плоскую поляризацию) можно представить как линейную комбинацию двух линейно независимых поляризаций, например, поляризаций с $\varphi = 0$ (определяемой функцией h_+) и с $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (определяемой функцией $h_\times$).

Заготовка про энергию гравитационных волн

Теперь выясним, какие энергию и импульс переносят гравитационные волны. Рассмотрим плоскую гравитационную волну в виде (8.15). Наша цель состоит в том, чтобы вычислить псевдотензор энергииимпульса. Согласно определению

$$|g|t^{\mu\nu} = |g|T^{\mu\nu}_{\text{граВ}} + \chi^{\mu\nu\lambda\kappa},\lambda\kappa = -\frac{|g|}{8\pi G}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) + \chi^{\mu\nu\lambda\kappa},\lambda\kappa.$$

Казалось бы, можно положить $T^{\mu\nu}_{\text{грав}} = -T^{\mu\nu} = 0$, но это не так. Дело в том, что мы рассматриваем гравитационные волны в линейном приближении, а плотности и потоки энергии и импульса-величины второго порядка по $h_{\mu\nu}$. Наше решение обращает в нуль только вклад первого порядка в $T^{\mu\nu}_{\text{грав}}$ а вклад второго порядка оказывается ненулевым. Есть два способа решить эту проблему. Первый способ состоит в том, чтобы получить явную формулу для $t^{\mu\nu}$ и увидеть, что она представляет собой линейную комбинацию членов, содержащих произведения вида $g^{\mu\nu},\lambda g^{\rho\sigma},\kappa$. В первом порядке $g^{\mu\nu},\lambda = -h^{\mu\nu}_{,\lambda}$, поэтому все эти произведения - второго порядка, а, значит, во всех коэффициентах можно заменить $g_{\mu\nu}$ на $\eta_{\mu\nu}$. Этот метод дает правильный ответ, но требует дополнительного обоснования.

Гравитационные волны во втором порядке малости: итоговые формулы (?!!!!!!)

(сюда их перепишу из параграфа ниже!!!)

Гравитационные волны во втором порядке малости (?!!!!!!)

Поэтому мы используем другой, более последовательный метод. Мы получим уравнения для поправок второго порядка в гравитационной волне и, подставив их в выражение для $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}$, покажем что в выражении для псевдотензора энергии-импульса $t^{\mu\nu} = |g|^{-1}\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}, \lambda\kappa$ соответствующие вклады можно выразить через решения линейного уравнения (8.1).

Давайте рассмотрим разложение:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h^{(1)}_{\mu\nu} + h^{(2)}_{\mu\nu} + \cdots$$

Здесь $h^{(1)}_{\mu\nu}$ - решение линеаризованных уравнений Эйнштейна, в нашей задаче - (8.1), а $h^{(k)}_{\mu\nu}$ - поправка k-го порядка. Мы немного изменим обозначения: буквы h, ψ без индексов теперь будут обозначать матрицы, отвечающие соответствующим тензорам, а следы будут обозначаться значком tr: $\operatorname{tr} a = a^{\bar\mu}_{\mu} = \eta^{\mu\nu}a_{\mu\nu}, (ab)_{\mu\nu} = a^{\bar\lambda}_{\mu}b_{\lambda\nu}$ и т.п. Отсюда легко находим:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} - h^{(1)\overline{\mu\nu}} - h^{(2)\overline{\mu\nu}} + \left(h^{(1)2}\right)^{\overline{\mu\nu}} + \cdots \\ |g| &= 1 + \operatorname{tr} h^{(1)} + \operatorname{tr} h^{(2)} + \frac{1}{2}\left(\left(\operatorname{tr} h^{(1)}\right)^2 - \operatorname{tr} h^{(1)2}\right) + \cdots \end{aligned}$$

В нашей задаче в силу калибровочных условий $h^{(1)}_{\alpha\nu} = 0, \operatorname{tr} h^{(1)} = 0$. Отсюда получаем во втором порядке

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} &= \eta^{\alpha\beta} - h^{(2)\overline{\alpha\beta}} \\ g^{\alpha b} &= -h^{(2)\overline{\alpha b}} \\ g^{ab} &= \eta^{ab} - h^{(1)\overline{ab}} - h^{(2)\overline{ab}} + \left(h^{(1)2}\right)^{\overline{ab}} \\ |g| &= 1 + \operatorname{tr} h^{(2)} - \frac{1}{2}\operatorname{tr} h^{(1)2} \end{aligned}$$

Теперь вычислим символы Кристоффеля. При этом на поправки второго порядка наложим такое же калибровочное условие, как и на поправки первого порядка:

$$\psi^{(2)\overline{\mu\nu}}, \nu = 0, \quad \psi^{(2)}_{\mu\nu} = h^{(2)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\operatorname{tr} h^{(2)}$$

Вклады $h^{(2)}_{\mu\nu}$ легко отделяются:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\kappa}\left(h^{(2)}_{\mu\kappa,\nu} + h^{(2)}_{\nu\kappa,\mu} - h^{(2)}_{\mu\nu,\kappa}\right) + \tilde\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$$

где $\tilde\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ содержат только вклады $h^{(1)}_{\mu\nu}$. Нетрудно проверить, что

$$\tilde\Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu} = \frac{1}{2}\left(\eta^{\lambda\kappa} - h^{(1)\overline{\lambda\kappa}}\right)h^{(1)}_{\kappa\nu,\alpha}, \quad \tilde\Gamma^{\lambda}_{ab} = -\frac{1}{2}h^{(1),\lambda}_{ab},$$

Отсюда следует, что единственные ненулевые компоненты равны

$$\tilde\Gamma^{c}_{\alpha b} = \frac{1}{2}\left(\eta^{cd} - h^{(1)\overline{cd}}\right)h^{(1)}_{bd,\alpha}, \quad \tilde\Gamma^{\gamma}_{ab} = -\frac{1}{2}h^{(1),\gamma}_{ab}.$$

Кроме того, для следа символов Кристоффеля имеем

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr} h^{(2)} - \frac{1}{2}\operatorname{tr} h^{(1)2}\right)_{,\alpha}, \quad \Gamma^{\lambda}_{a\lambda} = 0.$$

Отсюда во втором порядке немедленно получаем

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box h^{(2)}_{\mu\nu} + \tilde{R}_{\mu\nu},$$

где

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(h^{(1)}h^{(1)},\alpha\beta\right) + \frac{1}{4}\operatorname{tr}\left(h^{(1)}{}_{,\alpha}h^{(1)},\beta\right), \quad \tilde{R}_{\alpha b} = 0, \quad \tilde{R}_{ab} = \frac{1}{2}\left(h^{(1),\bar{\alpha}}h^{(1)},\alpha\right)_{ab},$$
$$\tilde{R} = \frac{3}{4}\operatorname{tr}\left(h^{(1),\bar{\alpha}}h^{(1)},\alpha\right).$$

Так как это уже выражения второго порядка, мы можем здесь поднимать индексы с помощью $\eta^{\mu\nu}$, а $|g|$ в коэффициентах при тензоре Риччи положить равным единице.

Из уравнений Эйнштейна в вакууме $R_{\mu\nu} = 0$ мы немедленно получаем уравнение для поправки второго порядка к метрике:

$$\Box h^{(2)}_{\mu\nu} = 2\tilde{R}_{\mu\nu}$$

Для плоской волны имеем

$$\begin{aligned}
\Box h^{(2)}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}\left(h^{(1)2}\right)_{,\alpha\beta} - \operatorname{tr} h^{(1)}_{,\alpha}h^{(1)}_{,\beta}\right)\\
\Box h^{(2)}_{\alpha b} &= 0\\
\Box h^{(2)}_{ab} &= \frac{1}{2}\Box\left(h^{(1)2}\right)_{ab}
\end{aligned}$$

Также имеем

$$\Box \operatorname{tr} h^{(2)} = \frac{3}{4}\Box \operatorname{tr} h^{(1)2}$$

Мы всюду учитывали уравнение движения для вклада первого порядка $\Box h^{(1)}_{ab} = 0$. Подняв индексы в (8.32a) и вытислив дивергенцию нетрудно привести ее к виду половины градиента правой части (8.33) и, тем самым, убедиться, что условие калибровки (8.24) согласовано с уравнениями движения. Найдем величины $\chi^{\mu\nu\lambda\kappa}$. Подставляя (8.23) в определение (6.22), получаем

$$\begin{aligned}
16\pi G\chi^{\alpha\beta\gamma\delta} &= \left(1 + \operatorname{tr} h^{(2)} - \frac{1}{2}\operatorname{tr} h^{(1)2}\right)\left(\eta^{\alpha\beta}\eta^{\gamma\delta} - \eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\delta}\right)\\
&\quad - h^{(2)\overline{\alpha\beta}}\eta^{\gamma\delta} - \eta^{\alpha\beta}h^{(2)\overline{\gamma\delta}} + h^{(2)\overline{\alpha\gamma}}\eta^{\beta\delta} + \eta^{\alpha\gamma}h^{(2)\overline{\beta\delta}}\\
16\pi G\chi^{\alpha b\gamma\delta} &= -h^{(2)\overline{\alpha b}}\eta^{\gamma\delta} + \eta^{\alpha\gamma}h^{(2)\overline{b\delta}}\\
16\pi G\chi^{ab\gamma\delta} &= \left(1 + \operatorname{tr} h^{(2)} - \frac{1}{2}\operatorname{tr} h^{(1)2}\right)\eta^{ab}\eta^{\gamma\delta} - \left(h^{(1)\overline{ab}} + h^{(2)\overline{ab}} - \left(h^{(1)2}\right)^{\overline{ab}}\right)\eta^{\gamma\delta} - \eta^{ab}h^{(2)\gamma\delta}
\end{aligned}$$

Чтобы получить $t^{\mu\nu}$, надо продифференцировать это по x^γ, x^δ. Явно выполним вычисление для второй строчки:

$$16\pi G\chi^{\alpha b\gamma\delta}_{\ \ ,\gamma\delta} = -\Box h^{(2)\overline{\alpha b}} + \left(h^{(2)\overline{b\delta}}{}_{,\delta}\right)^{,\bar{\alpha}} = 0$$

Первое слагаемое обращается в нуль в силу уравнения движения (8.32b), а второе слагаемое - в силу калибровочного условия (8.24). Мы получили естественный результат, что плотность импульса (= плотность потока энергии) в направлении, перпендикулярном к направлению распространения волны, равна нулю. Аналогично, применяя уравнения

движения (8.32) и калибровочное условие (8.24) к производным от правых частей (8.34a) и (8.34c) и опуская индекс (1) и черточки над индексами, получаем

$$t^{\alpha\beta} = \frac{1}{32\pi G}\left(\operatorname{tr} h^{,\alpha}h^{,\beta} - \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\Box \operatorname{tr} h^2\right)$$

Немного удивляет ненулевой псевдотензор напряжений t^{ab}, однако вспомним, что этот результат получен для произвольного двумерного решения уравнения (8.1) вида

$$h_{\mu\nu}(x) = h^R_{\mu\nu}\left(x^0 - x^1\right) + h^L_{\mu\nu}\left(x^0 + x^1\right),$$

то есть для двух встречных волн. Если мы положим $h^L_{\mu\nu} = 0$ (волна распространяется только вправо), то все члены, содержащие лапласиан $\Box$ в правых частях будут обращаться в нуль, так как будут лапласианами от функций вида $F\left(x^0 - x^1\right)$. Таким образом, для распространяющейся вправо волны получим

$$t^{\alpha\beta} = \frac{1}{32\pi G}h^{a,\alpha}_b h^{b,\beta}_a, \quad t^{\alpha b} = 0, \quad t^{ab} = 0$$

В лоренц-инвариантном виде можно написать

$$t^{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi G}\operatorname{tr} h^{,\mu}h^{,\nu} = \frac{1}{32\pi G}h^{\lambda,\mu}_\kappa h^{\kappa,\nu}_\lambda.$$

Эту формулу мы используем на следующей лекции, чтобы узнать потери энергии движущегося тела на излучение гравитационных волн.

Сравнение гравитационной и электромагнитной волн (??)

(раскрою подробно это с формулами, пока не очень вижу)
там типа фаза 2 фи, а не фи.

11.1.4 Proof that there are GW

(I'll write about experimental confirmation and other things)

11.2 Radiation of GW

Обсудим подробно излучение гравитационных волн.

11.2.1 Radiation of GW by Lashkevich (???)

Рассмотрим гравитационные волны как вынужденные решения.

модель

Рассмотрим систему частиц, совершающих движение с небольшой скоростью в конечном объеме и найдем «вынужденное» решения уравнения $\Box\psi_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}$.

Итак, решение уравнения (7.14) называется запаздывающим, если оно удовлетворяет следующему условию.

Возьмем две функции $T_{\mu\nu}(t,r)$ и $T'_{\mu\nu}(t,r)$, такие, что $T_{\mu\nu} = T'_{\mu\nu}$ для всех r при $t < t_0$, тогда соответствующие запаздывающие решения $\psi_{\mu\nu}(t,r)$ и $\psi'_{\mu\nu}(t,r)$ тоже совпадают при $t < t_0$.

Более того, если $T_{\mu\nu}$ и $T'_{\mu\nu}$ различаются в какой-то области пространства-времени, то и решения различаются только внутри светового конуса будущего (включая сам световой конус) этой области.

Можно сказать по-другому: решение, которое мы ищем, причинно-зависимо от тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}$. В случае произвольной размерности решение можно записать в виде

$$\psi_{\mu\nu}(t,r) = -16\pi G \int\limits_{-\infty}^{t} dt' \int d^{d-1}x' G^R\left(t-t', |r-r'|\right) T_{\mu\nu}\left(t', r'\right)$$

где запаздывающая функция Грина $G^R(t,r)$ представляет собой решение уравнения

$$\Box G^R(t,r) = \delta(t)\delta(r)$$

с начальным условием

$$G^R(t,r) = 0 \text{ при } t < r$$

Запаздывающую функцию Грина можно построить так. Рассмотрим фурье-преобразование

$$G^R(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{G}^R(k) e^{-ikx}.$$

Подставляя это в уравнение (9.2) и учитывая, что

$$\delta(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ikx}$$

получаем $(-ik)^2 \tilde{G}^R(k) = 1$ и, следовательно,

$$\tilde{G}^R(k) = -\frac{1}{k^2}.$$

В этом виде решение еще недоопределено. Действительно, при интегрировании по k^0 в (9.4) полюс в точках $k^0 = \pm|\boldsymbol{k}|$ можно обходить с разных сторон. Чтобы учесть условие (9.3), нужно, чтобы интеграл обращался в нуль при $t < 0$. В этом случае множитель $e^{-ik^0 t}$ стремится к нулю, если $\mathrm{Im}\ k^0 \to +\infty$. Поэтому контур должен проходить над полюсами. Тогда его можно будет сдвинуть вверх на бесконечность и условие будет выполнено. Вместо того, чтобы изгибать контур, удобно бесконечно мало сдвинуть полюсы вниз. Этого можно достичь заменой k^0 на $k^0 + i0$ в знаменателе (9.6):

$$\tilde{G}^R(k) = -\frac{1}{\left(k^0 + i0\right)^2 - k^2} = -\frac{1}{k^2 + i0k^0}.$$

При $t > 0$ экспонента $e^{-ik^0 t}$ стремится к нулю при $\mathrm{Im}\, k^0 \to -\infty$, поэтому интеграл по k^0 сводится к сумме вычетов по двум полюсам:

$$G^R(x) = i \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \Big(\operatorname*{res}_{\omega=-|k|} + \operatorname*{res}_{\omega=|k|} \Big) \frac{e^{-i\omega t + ikr}}{\omega^2 - k^2} = \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \frac{e^{ikr} \sin|k|t}{|k|}$$

В пространстве произвольной размерности функция Грина сложная и мне неизвестная..

В четырехмерном пространстве-времени запаздывающая функция Грина оператора Даламбера пропорциональна дельта-функции с носителем в точности на световом конусе будущего:

$$G^R(t,r) = \frac{\Delta(t-r)}{4\pi r}.$$

В результате запаздывающее решение имеет простой вид

$$\psi_{\mu\nu}(t,r) = -4G\int d^3x' \frac{T_{\mu\nu}\left(t-|r-r'|,r'\right)}{|r-r'|}$$

Важный факт состоит в том, что если материя сосредоточена в конечной области пространства (то есть тензор энергии-импульса отличен от нуля в конечной области), то вдали от этой области решение неотличимо от суммы статического решения и гравитационной волны.

Более того, достаточно далеко от гравитирующей материи гравитационная волна в небольшой области пространства неотличима от плоской волны.

Мы уже говорили о том, что ковариантный закон сохранения импульса $T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$ в первом порядке по $h_{\mu\nu}$ дает сохранение импульса и момента импульса в пространстве Минковского:

$$T^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu} = 0$$

(?? это еще раз в другой части акцентирую!)

Но излучение гравитационных волн должно приводить к тому, что материя теряет энергию.

Замечание о каком-то приеме (???)

(?? вообще не понял, спрошу лучше Лашкевича, явно показать, как работает этот прием.)

В некоторых задачах поле вблизи источника может быть не так мало, чтобы можно было пренебречь нелинейными поправками, в то время как нас интересует волна на больших расстояниях, в области слабого поля.

В этом случае рассуждения этой лекции применимы, если мы заменим компоненты тензора энергии-импульса на величины

$$\tilde{T}^{\mu}_{\nu} = T^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{8\pi G}\left(\tilde{R}^{\mu}_{\nu} - \frac{\delta^{\mu}_{\nu}}{2}\tilde{R}\right)?,$$

где $\tilde{R}^{\mu}_{\nu} = R^{\mu}_{\nu} - R^{(1)\bar{\mu}}$. Здесь линеаризованный тензор Риччи, определенный в (7.5).

Нетрудно проверить, что, в силу свойств $R^{(1)}_{\mu\nu}$, символ $\tilde{T}_{\bar{\mu}\nu}$ симметричен и формально выполняется закон сохранения

$$\tilde{T}^{\mu}_{\nu,\mu} = 0.$$

Действительно, на решениях точных уравнений Эйнштейна он просто равен

$$\tilde{T}^{\mu}_{\nu,\mu} = \frac{1}{8\pi G}\left(R^{(1)\mu}\nu - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}R^{(1)\bar{\lambda}}\right).$$

Разумеется, в этом случае задача не решается так прямо, но прием, выражающий ответ через одну компоненту $\tilde{T}^{0}_{0}$ во многих случаях работает.

Волны вдали от источника

Мы рассмотрим простейший случай нерелятивистской материи, сосредоточенной в течение всего времени вблизи начала координат $r = 0$. Мы наблюдаем гравитационное поле $\psi_{\mu\nu}(t,R)$ на большом расстоянии R от источника: $R \gg r_{\text{ист}}$, где $r_{\text{ист}}$ - характерный размер области, где находится материя. За пределами этой области мы будем считать $T_{\mu\nu} = 0$. При этом условии решение упрощается, поскольку знаменатель $|R - r'| \simeq R$ можно считать постоянным.

Для запаздывания это будет слишком грубым приближением, поэтому положим там $|R - r'| \simeq R - nr'$, где $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{R}/R$. Получаем

$$\psi_{\mu\nu}(t, \boldsymbol{R}) = -\frac{4GM_{\mu\nu}(t - R, n)}{R}, \quad M_{\mu\nu}(t, n) = \int d^3x T_{\mu\nu}(t + nr, r)$$

где для упрощения обозначений мы убрали штрихи у r'.

Величины $M_{\mu\nu}$ не преобразуются как компоненты тензора даже по отношению к преобразованиям Лоренца.

Чтобы легче было изучать их свойства, положим $R = R\partial_1$, то есть $X^2 = X^3 = 0, X^1 = R > 0$. Тогда

$$M_{\mu\nu}(t) \equiv M_{\mu\nu}\left(t, \partial_1\right) = \int d^3x T_{\mu\nu}\left(t + x^1, r\right)$$

(?? дальше вообще не уверен в преобразованиях, проделаю потом их.)

Воспользуемся уравнением непрерывности $T^{\bar{\mu}}_{\nu,\mu} = 0$. С учетом запаздывания имеем

$$T_{0\nu,0}\left(t + x^1, r\right) = T_{k\nu,k}\left(t + x^1, r\right) = \partial_k T_{k\nu}\left(t + x^1, r\right) - T_{1\nu,0}\left(t + x^1, r\right)$$

В правой части частная производная ∂_k берется по переменной x^k от всего выражения, включая первый аргумент тензора энергии-импульса.

Если мы определим $T^-_\nu = 2T_{+\nu} = T_{0\nu} + T_{1\nu}$, [1] то немедленно получим

$$\dot{T}^-_\nu\left(t + x^1, r\right) = \partial_k T_{k\nu}\left(t + x^1, r\right)$$

Поэтому величины $M^-_\nu(t) = M_{0\nu}(t) + M_{1\nu}(t)$ сохраняются.

В самом деле,

$$\dot{M}^-_\nu = \int d^3x \dot{T}^-_\nu\left(t + x^1, r\right) = \int d^3x \partial_k T_{k\nu}\left(t + x^1, r\right) = 0$$

так как последний интеграл сводится к интегралу по удаленной границе, где по условию тензор энергии-импульса обращается в нуль.

Легко видеть, что M^-_ν есть не что иное как 4-импульс P_ν системы.

Следовательно,

$$M^-_0 = \int d^3x T^0_0(t, r) = M, \quad M^-_i = 0$$

где M - полная масса гравитирующих тел. Второе равенство следует из того, что скорость центра масс системы равна нулю. Из (9.18) немедленно следует, что

$$\psi_{0\nu}\left(R\partial_1\right) + \psi_{1\nu}\left(R\partial_1\right) = -\frac{4GM}{R}\eta_{0\nu}.$$

Этот результат почти соответствует условию (8.7), которое должно выполняться в гравитационной волне в принятой нами калибровке (7.11). Несоответствие имеется только при $\nu = 0$, где возникает ненулевой вклад, который нельзя устранить калибровкой. Однако этот вклад отвечает постоянному во времени продольному полю, создаваемому массой. В пределе плоской волны (небольшая область пространства размера $l \ll R$) это отвечает постоянному однородному полю, которое мы исключали в прошлой лекции. Это поле следует вычесть из $\psi_{\mu\nu}$, чтобы получить чистое поле гравитационной волны.

Теперь нам нужно найти пространственные поперечные компоненты $M_{ab}(t)$ которые дадут нам физический, не устранимый калибровочным преобразованием, вклад в

потенциалы $\psi_{\mu\nu}$. Чтобы сделать это, снова воспользуемся условиями (9.15). Умножив уравнение (9.15) для $\nu = j$ на x^i и проинтегрировав по всему пространству, получим

$$\partial_0 \int d^3x T_j^- \left(t + x^1, \boldsymbol{r}\right) x^i = \int d^3x \left(\partial_k T_{kj} \left(t + x^1, \boldsymbol{r}\right)\right) x^i = \int d^3x \partial_k \left(T_{kj} \left(t + x^1, \boldsymbol{r}\right) x^i\right) - M_{ij}.$$

Первый член в правой части представляет собой интеграл по удаленной границе, где $T_{ki} = 0$, и мы его опустим. Симметризуя по индексам i, j, получаем

$$M_{ij} = -\partial_0 \int d^3x \left(T_{+i} \left(t + x^1, \boldsymbol{r}\right) x^j + T_{+j} \left(t + x^1, \boldsymbol{r}\right) x^i\right)$$

Теперь умножим уравнение (9.15) для $\nu = +$ на $x^i x^j$ и проинтегрируем по всему пространству

$$\partial_0 \int d^3x 2T_{++} \left(t + x^1, \boldsymbol{r}\right) x^i x^j = \int d^3x \partial_k \left(T_{+k} \left(t + x^1, \boldsymbol{r}\right) x^i x^j\right) - \int d^3x \left(T_{+i} \left(t + x^1, \boldsymbol{r}\right) x^j + T_{+j} \left(t + x^1, \boldsymbol{r}\right)\right.$$

Опять первый интеграл обращается в нуль, а второй интеграл совпадает интегралом в правой части (9.20). Отсюда получаем

$$M_{ij}(t) = \partial_0^2 \int d^3x 2T_{++} \left(t + x^1, \boldsymbol{r}\right) x^i x^j$$

В прошлой лекции мы выяснили, что малой (порядка $h_{\mu\nu}$) заменой координат можно сделать гравитационную волну поперечной $h_{1i} = 0$ и бесследовой $(\psi_a^{\bar{a}} = h_a^{\bar{a}} = 0)$. Но нам даже нет необходимости делать такую замену координат. Мы уже видели, что величины $h_\times = h_{23} = \psi_{23}$ и $2h_+ = h_{22} - h_{33} = \psi_{22} - \psi_{33}$ являются калибровочно-инвариантными по отношению к остаточным преобразованиям, то есть преобразованиям, не нарушающим калибровку (7.11). Мы получаем

$$h_+(t, \boldsymbol{R}) = -\frac{4GM_+(t - R, \boldsymbol{n})}{R}, \quad h_\times(t, \boldsymbol{R}) = -\frac{4GM_\times(t - R, \boldsymbol{n})}{R}$$

где, если выбрать координаты так, чтобы было $\boldsymbol{n} = \partial_1$, имеем

$$M_+(t) = \partial_0^2 \int d^3x T_{++} \left(t + x^1, \boldsymbol{r}\right) \left(\left(x^2\right)^2 - \left(x^3\right)^2\right)$$
$$M_\times(t) = \partial_0^2 \int d^3x T_{++} \left(t + x^1, \boldsymbol{r}\right) \cdot 2x^2 x^3$$

Разумеется, ортогональные координаты x^2, x^3 при этом выбираются произвольно. Теперь используем предположение о нерелятивистском характере движения гравитирующих тел. Это условие предполагает, что размеры системы настолько малы, что за то время, пока сигнал, распространяющийся со скоростью света, пересечет всю систему, положения частиц существенно не изменятся: $vr_{\text{ист}} \ll l, ar_{\text{ист}} \ll v$, где v, a - характерная скорость и ускорение частиц, l - характерное расстояние между телами. В этом предположении мы можем опустить x^1 в аргументе $t + x^1$ в (9.23) и заменить там $4T_{++}$на $T_{00} = T_0^0 = \rho$, поскольку $|T_{00}| \gg |T_{10}|$. Казалось бы, мы могли бы сделать это в самом начале, в (9.13). Оказывается, нет. Дело в том, что тогда бы мы явно нарушили условие калибровки (7.11). Эти приближения мы можем сделать только в окончательных выражениях для калибровочно-инвариантных величин. Итак, в случае нерелятивистского источника имеем

$$M_+(t) = \frac{1}{4}\partial_0^2 \int d^3x \rho(t, \boldsymbol{r}) \left(\left(x^2\right)^2 - \left(x^3\right)^2\right)$$
$$M_\times(t) = \frac{1}{2}\partial_0^2 \int d^3x \rho(t, \boldsymbol{r}) x^2 x^3$$

Удобно выразить их через квадрупольный момент плотности энергии

$$D_{ij}(t) = \int d^3x \rho(t, \boldsymbol{r}) \left(3x^i x^j - r^2 \delta_{ij}\right).$$

Квадрупольный момент определен так, чтобы его след был равен нулю: $\sum\limits_{i=1}^{3} D_{ii} = 0$. Имеем

$$h_+ (t, R\partial_1) = -\frac{G}{3R}\left(\ddot{D}_{22}(t-R) - \ddot{D}_{33}(t-R)\right), \quad h_\times (t, R\partial_1) = -\frac{2G}{3R}\ddot{D}_{23}(t-R).$$

Угловое распределение и полная излученная энергия

Теперь найдем плотность потока энергии в волне. Эта плотность равна компоненте t^{01} псевдотензора энергии-импульса. На большом расстоянии от источника мы можем воспользоваться формулой для плоской волны (8.37). Подставляя туда (9.26), находим

$$t^{01}(t+R, R\partial_3) = \frac{G}{36\pi R^2}\left(\left(\frac{\dddot{D}_{22}(t) - \dddot{D}_{33}(t)}{2}\right)^2 + \dddot{D}^2_{23}(t)\right)$$

Наша задача состоит в том, чтобы вычислить поток энергии $dI(t, \boldsymbol{n})$ в элемент телесного угла $do = \sin\theta d\theta d\varphi$ и, в конечном счете, потери энергии $-d\mathcal{E}/dt$ системой. Для элемента телесного угла в направлении x^1 имеем

$$dI(t, \partial_1) = t^{01}(t+R, R\partial_1) R^2 do = \frac{G}{36\pi}\left(\left(\frac{\dddot{D}_{22}(t) - \dddot{D}_{33}(t)}{2}\right)^2 + \dddot{D}^2_{23}(t)\right) do$$

Мы специально «откатили» dI на R назад во времени, поскольку она должна характеризовать потери энергии системы именно в момент времени t и не зависеть от точки наблюдения.

Обратим внимание, что формула (9.28) имеет вид суммы по двум поляризациям гравитационной волны. Перепишем ее в виде

$$dI(t, \partial_1) = \frac{G}{72\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(\dddot{D}_{ij} e^{(s)}_{ij}\right)^2 do,$$

где два трехмерных тензора поляризации имеют вид

$$e^{(1)} = e^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad e^{(2)} = e^{(x)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Эти тензоры удовлетворяют условиям бесследовости, симметричности, поперечности и ортонормированности

$$e^{(s)}_{ii} = 0, \quad e^{(s)}_{ij} = e^{(s)}_{ji}, \quad e^{(s)}_{ij} n_j = 0, \quad e^{(s)}_{ij} e^{(s')}_{ij} = \delta^{ss'}$$

Нетрудно показать, что формула (9.29) верна для любой пары трехмерных тензоров, удовлетворяющих этим четырем условиям. Теперь мы можем повернуть систему координат любым способом и написать

$$dI(t, \boldsymbol{n}) = \frac{G}{72\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(\dddot{D}_{ij} e^{(s)}_{ij}\right)^2 do = \frac{G}{72\pi}\dddot{D}_{ij}\dddot{D}_{kl} E_{ijkl}(\boldsymbol{n}) do, \quad E_{ijkl}(\boldsymbol{n}) = \sum_{s=1}^{2} e^{(s)}_{ij} e^{(s)}_{kl}$$

для произвольного $\boldsymbol{n}$. Нам осталось найти явно тензор $E_{ijkl}(\boldsymbol{n})$. Для этого воспользуемся его свойствами:

$$E_{iikl} = 0, \quad E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{klij}, \quad E_{ijkl} n_i = 0$$
$$E_{2222}(\partial_1) = E_{3333}(\partial_1) = E_{2323}(\partial_1) = -E_{2233}(\partial_1) = \frac{1}{2}$$

которые немедленно следуют из (9.31) и (9.30). Из второго свойства запишем E_{ijkl} в виде

$$E_{ijkl} = E_1 n_i n_j n_k n_l + E_2 (n_i n_j \delta_{kl} + n_k n_l \delta_{ij}) + E_3 (n_i n_k \delta_{jl} + n_j n_k \delta_{il} + n_i n_l \delta_{jk} + n_j n_l \delta_{ik}) + E_4 \delta_{ij}\delta_{kl} + E_5 (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

Коэффициенты $E_1, ..., E_5$ находим из остальных условий:

$$E_1 = E_2 = -E_3 = -E_4 = E_5 = \frac{1}{2}$$

Подставляя (9.33), (9.34) в (9.32), получаем

$$dI(\boldsymbol{n}) = \frac{G}{36\pi}\left(\frac{1}{4}\left(\dddot{D}_{ij} n_i n_j\right)^2 + \frac{1}{2}\dddot{D}_{ij}^2 - \dddot{D}_{ij}\dddot{D}_{ik} n_j n_k\right) do.$$

Интегрируя по углам, находим полную скорость потери энергии системой

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = I = \frac{G}{45}\dddot{D}_{ij}^2$$

Эта потеря энергии очень мала, и может быть измерена только для тесных двойных звездных систем. Экспериментальное открытие таких радиационных потерь в 1979 Расселом Халсом и Джозефом Тейлором было первым подтверждением существования гравитационных волн. В 1991 году авторы открытия были удостоены Нобелевской премии.

Излучение волн в размерностях $> d = 4$

(Лашкевич про это размышлял, мб и я что-нибудь придумаю. пока это не нужно.)

11.2.2 Radiation of GW by Landau (???)

(мб тут то же, что и ранее, я просто пока не въехал)

Вывод формул излучения гравитационных волн

(раз просмотрел и пошел дальше, тренироваться тут еще пару часов нужно)

Рассмотрим вопрос об энергии, излучаемой движущимися телами в виде гравитационных волн. в предположении слабого гравитационного поля.

Благодаря наличию материи уравнения гравитационного поля будут содержать в правой стороне равенства члены, происходящие тензор энергии-импульса материи. Напишем эти уравнения с помощью величины $\psi_i^k = h_i^k - \frac{1}{2}\Delta_i^k h$ как:

$$\frac{1}{2}\Box\psi^k = \frac{8\pi k}{c^4}\tau_i^k,$$

где τ_i^k условно обозначает дополнительные выражения, получающиеся при переходе в точных уравнениях тяготения к случаю слабых полей в рассматриваемом приближении.

Легко убедиться в том, что компоненты τ_0^0 и τ_α^0 получаются непосредственно из соответствующих компонент T_i^k путем выделения из них величин интересующего нас порядка малости; что же касается компонент τ_β^α, то они содержат наряду с членами, получающимися из T_β^α, также и члены второго порядка малости из $R_i^k - \frac{1}{2}\Delta_i^k R$.

Величины ψ_i^k удовлетворяют калибровочному условию $\partial\psi_i^k/\partial x^k = 0$. Из уравнения слабого гравитационного поля следует, что такое же уравнение имеет место и для τ_i^k:

$$\frac{\partial \tau_i^k}{\partial x^k} = 0$$

Это уравнение заменяет здесь общее соотношение $T_{i:k}^k = 0$.

Для поиска энергии необходимо определить гравитационное поле в «волновой зоне», т.е. на расстояниях, больших по сравнению с длиной излучаемых волн.

Все вычисления принципиально вполне аналогичны тем, которые мы производили для электромагнитных волн.

(??? а это я так и не выучил ещё, вот мотивация выучить)

Уравнения слабого гравитационного поля (110.1) по форме совпадают с уравнением запаздывающих потенциалов ($62), поэтому их общее решение можно сразу написать в виде

$$\psi_i^k = -\frac{4k}{c^4}\int \left(\tau_i^k\right)_{t-R/c}\frac{dV}{R}$$

Поскольку скорости всех тел в системе малы, то для поля на больших расстояниях от системы можно написать:

$$\psi_i^k = -\frac{4k}{c^4 R_0}\int \left(\tau_i^k\right)_{t-R_0/c} dV$$

где R_0 - расстояние от начала координат, расположенного где-нибудь внутри системы; индекс $t - R_0/c$ в подынтегральных выражениях мы будем ниже для краткости опускать.

Для вычисления этих интегралов воспользуемся калибровочными уравнениями. Запишем их, опуская индексы у τ_i^k и выделяя пространственные и временные компоненты:

$$\frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \tau_{\alpha 0}}{\partial x^0} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{0\gamma}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \tau_{00}}{\partial x^0} = 0$$

Умножив первое уравнение на x^β, проинтегрируем по всему пространству

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int \tau_{\alpha 0} x^\beta dV = \int \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma} x^\beta dV = \int \frac{\partial\left(\tau_{\alpha\gamma} x^\beta\right)}{\partial x^\gamma} dV - \int \tau_{\alpha\beta} dV$$

Поскольку на бесконечности $\tau_{ik} = 0$, то первый интеграл правой части, будучи преобразован по теореме Гаусса, исчезает. Полусумма оставшегося равенства и его же с переставленными индексами дает:

$$\int \tau_{\alpha\beta} dV = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^0}\int \left(\tau_{\alpha 0} x^\beta + \tau_{\beta 0} x^\alpha\right) dV$$

Далее умножим второе из уравнение $\frac{\partial \tau_{0\gamma}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \tau_{00}}{\partial x^0}$ на $x^\alpha x^\beta$ и тоже проинтегрируем по всему пространству. Аналогичное преобразование приводит к равенству

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int \tau_{00} x^\alpha x^\beta dV = -\int \left(\tau_{\alpha 0} x^\beta + \tau_{\beta 0} x^\alpha\right) dV$$

Сравнивая оба полученных результата, находим:

$$\int \tau_{\alpha\beta} dV = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^2 \int \tau_{00} x^\alpha x^\beta dV$$

Таким образом, интегралы от всех $\tau_{\alpha\beta}$ оказываются выраженными через интегралы, содержащие только компоненту τ_{00}.

(???? почему? мб (см. (99.1))) Но τ_{00}, как указано выше, совпадает с соответствующей компонентой T_{00} тензора энергии-импульса, и с достаточной точностью имеем:

$$\tau_{00} = \mu c^2$$

Поэтому, вводя время $t = x^0/c$, переписываем выражение для $\psi_{\alpha\beta}$ в виде

$$\psi_{\alpha\beta} = -\frac{2k}{c^4 R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \mu x^\alpha x^\beta dV$$

Поток энергии (?)

(тут хз, даже 1я часть слаба в этом вопросе еще)

На больших расстояниях от тел можно рассматривать волну (в небольших участках пространства) как плоскую. Поэтому можно вычислить поток энергии, излучаемой системой, скажем, в направлении оси x^1, воспользовавшись формулой (107.12).

В эту формулу входят только компоненты $h_{23} = \psi_{23}$ и $h_{22} - h_{33} = \psi_{22} - \psi_{33}$.

Из (110.8) находим для них выражения:

$$h_{23} = -\frac{2k}{3c^4 R_0}\ddot{D}_{23}, \quad h_{22} - h_{33} = -\frac{2k}{3c^4 R_0}\left(\ddot{D}_{22} - \ddot{D}_{33}\right)$$

(точка означает дифференцирование по времени), где введен тензор квадрупольного момента масс (99.8)

$$D_{\alpha\beta} = \int \mu\left(3x^\alpha x^\beta - r^2\Delta_{\alpha\beta}\right)dV$$

В результате находим плотность потока энергии в направлении оси x^1 в виде

$$ct^{10} = \frac{k}{36\pi c^5 R_0^2}\left[\left(\frac{\dddot{D}_{22} - \dddot{D}_{33}}{2}\right)^2 + \dddot{D}_{23}^2\right]$$

Поток энергии в элемент телесного угла в данном направлении получится отсюда умножением на $R_0^2 do$.

О поляризациях

Два члена в этом выражении отвечают излучению волн двух независимых поляризаций.

Для записи их в инвариантном (не зависящем от выбора направления излучения) виде введем трехмерный единичный тензор поляризации плоской гравитационной волны $e_{\alpha\beta}$, определяющий, какие именно из компонент $h_{\alpha\beta}$ отличны от нуля (в калибровке h_{ik}, в которой $h_{0\alpha} = h_{00} = h = 0$).

Тензор поляризации симметричен и удовлетворяет условиям

$$e_{\alpha\alpha} = 0, \quad e_{\alpha\beta}\mathbf{n}_\beta = 0, \quad e_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta} = 1$$

где $\mathbf{n}$ - единичный вектор в направлении распространения волны; первые два условия выражают тензорность и поперечность волны.

С помощью этого тензора интенсивность излучения заданной поляризации в телесный угол do запишется в виде

$$dI = \frac{k}{72\pi c^5}\left(\dddot{D}_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}\right)^2 do$$

Это выражение зависит от направления $\mathbf{n}$ неявным образом через условие поперечности $e_{\alpha\beta}n_\beta = 0$.

Суммарное угловое распределение излучения всех поляризаций получается суммированием dI по поляризациям или, что то же, усреднением по поляризациям и умножением результата на 2 (число независимых поляризаций) (? кст, поч? 1я часть про это слабая).

Усреднение осуществляется формулой

$$\overline{e_{\alpha\beta}e_{\gamma\delta}} = \frac{1}{4}\{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta + (n_\alpha n_\beta \delta_{\gamma\delta} + n_\gamma n_\delta \delta_{\alpha\beta}) - \\ - (n_\alpha n_\gamma \delta_{\beta\delta} + n_\beta n_\gamma \delta_{\alpha\delta} + n_\alpha n_\delta \delta_{\beta\gamma} + n_\beta n_\delta \delta_{\alpha\gamma}) - \\ -\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + (\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\beta\gamma}\delta_{\alpha\delta})\} \quad (11.1)$$

(выражение справа - тензор, составленный из единичного тензора и компонент вектора $\mathbf{n}$, обладающий требуемой симметрией по своим индексам, дающий единицу при упрощении по парам индексов α, γ и β, δ, и обращающийся в нуль при скалярном умножении на $\mathbf{n}$).

В результате находим:

$$dI = \frac{k}{36\pi c^5}\left[\frac{1}{4}\left(\dddot{D}_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta\right)^2 + \frac{1}{2}\dddot{D}^2_{\alpha\beta} - \dddot{D}_{\alpha\beta}\ddot{D}_{\alpha\gamma}n_\beta n_\gamma\right] do$$

Полное излучение по всем направлениям, т.е. потерю энергии системой в единицу времени ($-d\mathscr{E}/dt$), можно найти, усреднив dI/do по направлениям $\mathbf{n}$ и умножив результат на 4π. Получим

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{k}{45c^5}\dddot{D}^2_{\alpha\beta}$$

Отметим, что излучение гравитационных волн оказывается эффектом пятого порядка по $1/c$.

Это обстоятельство, вместе с малостью гравитационной постоянной k, приводит, вообще говоря, к чрезвычайной малости эффекта.

(?? пока так и не оценил его)

11.2.3 Some Models That Radiate GWs

Волны и их энергия от двух тел, двигающихся по круговым орбитам

(пока слабая теория для этого)

Два тела, притягивающиеся по закону Ньютона, движутся по круговым орбитам вокруг их общего центра инерции. Определить среднюю по периоду обращения интенсивность излучения гравитационных волн и его распределение по поляризациям и направлениям.

Выбрав начало координат в центре инерции, имеем для радиус-векторов двух тел:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

Компоненты тензора $D_{\alpha\beta}$ (плоскость xy совпадает с плоскостью движения):

$$\begin{aligned} D_{xx} =& \mu r^2\left(3\cos^2\psi - 1\right), \\ D_{yy} =& \mu r^2\left(3\sin^2\psi - 1\right) \\ D_{xy} =& 3\mu r^2\cos\psi\sin\psi, \\ D_{zz} =& -\mu r^2, \end{aligned}$$

где $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, ψ - полярный угол вектора $\mathbf{r}$ в плоскости xy.

При круговом движении $r = \text{const}$, а $\dot{\psi} = r^{-3/2}\sqrt{k(m_1+m_2)} = \omega$.

Направление $\mathbf{n}$ задаем сферическими углами (полярным углом θ и азимутом φ) с полярной осью z, перпендикулярной к плоскости движения.

(???)

Рассматриваем две поляризации, для которых: 1) $e_{\theta\varphi} = 1/\sqrt{2}$, 2) $e_{\theta\theta} = -e_{\varphi\varphi} = 1/\sqrt{2}$. Проецируя тензор $D_{\alpha\beta}$ на направления сферических ортов $\mathbf{e}_\theta$ и $\mathbf{e}_\varphi$, вычисляя по формуле (110.13) и усредняя по времени, получим в результате для этих двух случаев и для суммы $I = I_1 + I_2$:

$$\begin{aligned}\overline{\frac{dI_1}{do}} &= \frac{k\mu^2\omega^6 r^4}{2\pi c^5} 4\cos^2\theta,\\ \overline{\frac{dI_2}{do}} &= \frac{k\mu^2\omega^6 r^4}{2\pi c^5}\left(1+\cos^2\theta\right)^2\\ \overline{\frac{dI}{do}} &= \frac{k\mu^2\omega^6 r^4}{2\pi c^5}\left(1+6\cos^2\theta+\cos^4\theta\right)\end{aligned}$$

и после интегрирования по направлениям:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = I = \frac{32k\mu^2\omega^6 r^4}{5c^5} = \frac{32k^4 m_1^2 m_2^2 (m_1+m_2)}{5c^5 r^5}, \quad \frac{\overline{I_1}}{\overline{I_2}} = \frac{5}{7}$$

(для вычисления одной лишь полной интенсивности I следовало бы, конечно, воспользоваться (110.16)).

Потеря энергии излучающей системой приводит к постепенному (как говорят, вековому) сближению обоих тел.

Поскольку $\mathscr{E} = -\mathbf{km}_1\,\mathbf{m}_2/2r$, то скорость сближения

$$\dot{r} = \frac{2r^2}{km_1m_2}\frac{d\mathscr{E}}{dt} = -\frac{64k^3 m_1 m_2 (m_1+m_2)}{5c^5 r^3}$$

Волны и их энергия от двух тел, двигающихся по эллиптическим орбитам

(мб тут аналогично предыдущей задаче, но матем сложнее. так или иначе, еще не шарю теорию, чтобы этим заниматься)

Найти среднюю по периоду обращения энергию, излучаемую в виде гравитационных волн системой двух тел, движущихся по эллиптическим орбитам. В этом случае расстояние r и угловая скорость меняются вдоль орбиты по законам

$$\frac{a(1-e^2)}{r} = 1 + e\cos\psi, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{r^2}\left[k(m_1+m_2)\,a\left(1-e^2\right)\right]^{1/2}$$

где e - эксцентриситет, а a - большая полуось орбиты

(в механике эти результаты четко обязательно пропишу!!!)

Довольно длинное вычисление по $-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{k}{45c^5}\dddot{D}^2_{\alpha\beta}$ дает:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{8k^4 m_1^2 m_2^2 (m_1+m_2)}{15a^5c^5\left(1-e^2\right)^5}(1+e\cos\psi)^4\left[12(1+e\cos\psi)^2 + e^2\sin^2\psi\right]$$

При усреднении по периоду обращения интегрирование по dt заменяется интегрированием по $d\psi$ и приводит к результату:

$$-\overline{\frac{dE}{dt}} = \frac{32k^4 m_1^2 m_2^2 (m_1+m_2)}{5c^5 a^5}\frac{1}{\left(1-e^2\right)^{7/2}}\left(1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right)$$

Обратим внимание на быстрое возрастание интенсивности излучения с увеличением эксцентриситета орбиты.

Потеря момента импульса системой, испускающей гравитационные волны

(пока не смотрел)

Определить среднюю (по времени) скорость потери момента импульса системой стационарно движущихся тел, испускающей гравитационные волны.

Для удобства записи формул будем временно рассматривать тела как состоящие из дискретных частиц.

Представим среднюю скорость потери энергии системой как работу действующих на частицы «сил трения $\mathbf{f}$:

$$\overline{\frac{d\mathscr{E}}{dt}} = \sum \overline{\mathbf{fv}}$$

(индекс, нумерующий частицы, не выписываем).

Тогда средняя скорость потери момента вычисляется как

$$\overline{\frac{dM_\alpha}{dt}} = \sum \overline{[\mathbf{rf}]}_\alpha = \sum e_{\alpha\beta\gamma}\overline{x_\beta f_\gamma}$$

(ср.

вывод формулы (75.7)).

Для определения $\mathbf{f}$ пишем:

$$\overline{\frac{d\mathscr{E}}{dt}} = -\frac{k}{45c^5}\ddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\alpha\beta} = -\frac{k}{45c^5}\overline{\dot{D}}_{\alpha\beta}D^{(V)}_{\alpha\beta}$$

(использовано равенство нулю средних значений от полных производных по времени).

Подставив сюда $\dot{D}_{\alpha\beta} = \sum m\,(3x_\alpha v_\beta + 3x_\beta v_\alpha - 2\,\mathrm{rv}\,\Delta_{\alpha\beta})$ и сравнив с (1), найдем:

$$f_\alpha = -\frac{2k}{15c^5}D^{(\mathbf{V})}_{\alpha\beta}mx_\beta$$

Подстановка этого выражения в (2) приводит к результату:

$$\overline{\frac{dM_\alpha}{dt}} = -\frac{2k}{45c^5}e_{\alpha\beta\gamma}\overline{D^{(\mathbf{V})}_{\beta\Delta}D_{\gamma\Delta}} = -\frac{2k}{45c^5}e_{\alpha\beta\gamma}\overline{D_{\beta\Delta}\dddot{D}_{\gamma\Delta}}.$$

Потеря момента импульса системы двух тел, движущихся по эллиптическим орбитам

(пока не смотрел)

Для системы двух тел, движущихся по эллиптическим орбитам, найти средний теряемый ею в единицу времени момент импульса.

Вычисление по формуле (3) из предыдущей задачи, аналогичное произведенному в задаче (2), приводит к результату:

$$-\overline{\frac{dM_z}{dt}} = -\frac{32k^{7/2}m_1^2m_2^2\sqrt{m_1+m_2}}{5c^5c^{7/2}}\frac{1}{(1-e^2)^2}\left(1+\frac{7}{8}e^2\right)$$

При круговом движении ($e = 0$) значения $\dot{\mathscr{E}}$ и $\dot{M}$ находятся, как и следовало, в соотношении $\dot{\mathscr{E}} = \dot{M}\omega$.

Излучение гравитационных волн электромагнитной волной

Лашкевич в пару строк сделал, а я тупой.

Обзор источников гравитационных волн

(идея сравнить и указать их особенности)
Binary compact objects (neutron stars, black holes, white dwarfs)
Collisions of galaxies and their clusters
Asymmetric collapse of stars
Cosmological gravitational waves
In general, almost any accelerated motion of masses (except for a spherically-symmetric one)

11.3 Other about GW

11.3.1 Polarization of GW

Разберем подробно поляризацию гравитационных волн.
(!!! доделываю уравнение девиации и перехожу к этой теории!!!)

Поляризация волн через уравнение девиации

(в дополнениях этот раздел проработаю! пока еще не доделал его, там самая суть происходящего!)
This relative physics is captured by the geodesic deviation equation.
(??? такое что ли оно важное??)
Consider a family of geodesics $x^\mu(\tau, s)$, with s labelling the different geodesics, and τ the affine parameter along any geodesic. The vector field tangent to these geodesics is the velocity 4-vector $u^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}\big|_s$. Meanwhile, the displacement vector S^μ takes us between neighbouring geodesics, $S^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial s}\big|_\tau$. Уравнение девиации есть:

$$\frac{D^2 S^\mu}{D\tau^2} = R^\mu_{\rho\sigma\nu} u^\rho u^\sigma S^\nu$$

We'll consider the situation where, in the absence of the gravitational wave, our family of geodesics are sitting in a rest frame, with $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$. As the gravitational wave passes, the geodesics will change as

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0) + \mathcal{O}(h)$$

Fortunately, we won't need to compute the details of this. We will compute the deviation to leading order in the metric perturbation h, but the Riemann tensor is already $\mathcal{O}(h)$, which means that we can neglect the corrections in the other terms.
(?? о утверждении выше пропишу в дополнениях указание)
Similarly, we can replace the proper time τ for the coordinate time t. We then have

$$\frac{d^2 S^\mu}{dt^2} = R^\mu_{00\nu} S^\nu$$

Линеаризованный тензор Римана есть $R^\mu_{\rho\sigma\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\left(\partial_\sigma\partial_\rho h_{\nu\lambda} - \partial_\sigma\partial_\lambda h_{\nu\rho} - \partial_\nu\partial_\rho h_{\sigma\lambda} + \partial_\nu\partial_\lambda h_{\sigma\rho}\right)$.
(укажу это тоже явно в 1й части.)
Using $h_{\mu 0} = 0$, the component we need is simply

$$R^\mu_{00\nu} = \frac{1}{2}\partial_0^2 h^\mu_\nu$$

Our geodesic deviation equation is then

$$\frac{d^2 S^\mu}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{d^2 h^\mu{}_\nu}{dt^2} S^\nu$$

We see that the gravitational wave propagating in, say, the z dircction with polarisation vector

$$H_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_+ & H_X & 0 \\ 0 & H_X & -H_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

в $\bar{h}_{\mu\nu} = \mathrm{Re}\left(H_{\mu\nu} e^{ik_\rho x^\rho}\right)$ affects neither S^0 nor S^3. The only effect on the geodesics is in the (x, y) plane, transverse to the direction of propagation. For simplicity, we will solve this equation in the $z = 0$ plane.

Волна продольной поляризации H_+

В случае продольной поляризации $H_X = 0$, так что

$$H_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -H_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тогда the geodesic deviation equation $\frac{d^2 S^\mu}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{d^2 h^\mu_\nu}{dt^2} S^\nu$ becomes

$$\frac{d^2 S^1}{dt^2} = -\frac{\omega^2}{2} H_+ e^{i\omega t} S^1$$
$$\frac{d^2 S^2}{dt^2} = +\frac{\omega^2}{2} H_+ e^{i\omega t} S^2$$

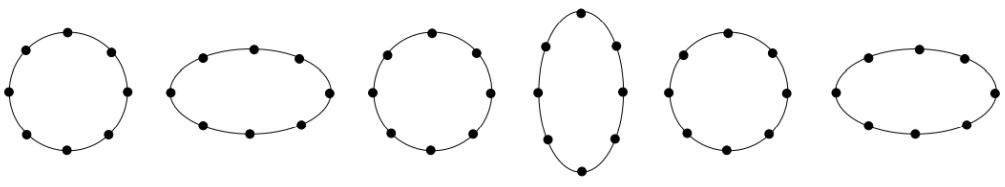
We can solve these perturbatively in H_+. Keeping terms of order $\mathcal{O}(h)$ only, we have

$$S^1(t) = S^1(0)\left(1 + \frac{1}{2} H_+ e^{i\omega t} + \ldots\right)$$
$$S^2(t) = S^2(0)\left(1 - \frac{1}{2} H_+ e^{i\omega t} + \ldots\right)$$

where, as we mentioned previously, we should take the real part of the right-hand-side. (Recall that H_+ can also be complex.)

From these solutions, we can determine the way in which geodesics are affected by a passing wave. Think of the displacement vector S^μ as the distance from the origin to a neighbouring geodesic. We will consider a family of neighbouring geodesics corresponding to a collection of particles which, at time $t = 0$, are arranged around a circle of radius R. This means that we have initial conditions $S^a(t = 0)$ satisfying $S^1(0)^2 + S^2(0)^2 = R^2$.

The solutions $S^1(t), S^2(t)$ tell us how these geodesics evolve. The relative minus sign between the two equations means that when geodesics move outwards in, say, the $x^1 = x$ direction, they move inwards in the $x^2 = y$ direction, and vice-versa. The net result is that, as time goes on, these particles will evolve from a circle to an ellipse and back again, displaced like this:



(????)

Волна поперечной поляризации H_X

В случае поперечной поляризации $H_+ = 0$, так что

$$H_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_X & 0 \\ 0 & H_X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

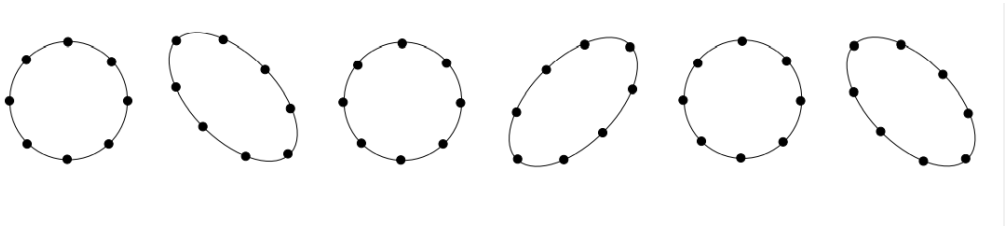
, then the geodesic deviation equation $\frac{d^2 S^\mu}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{d^2 h^\mu_\nu}{dt^2} S^\nu$ becomes

$$\frac{d^2 S^1}{dt^2} = -\frac{\omega^2}{2} H_X e^{i\omega t} S^2$$
$$\frac{d^2 S^2}{dt^2} = -\frac{\omega^2}{2} H_X e^{i\omega t} S^1$$

Again, we solve these perturbatively in H_X. We have

$$S^1(t) = S^1(0) + \frac{1}{2} S^2(0) H_X e^{i\omega t} + ...$$
$$S^2(t) = S^2(0) + \frac{1}{2} S^1(0) H_X e^{i\omega t} + ...$$

The displacement is the same as previously, but rotated by 45°. (To see this, note that the displacements $S^1(t) \pm S^2(t)$ have the same functional form as (5.24).) This means that this time the displacement of geodesics looks like this:



(????)

Волна смешанной поляризации

(смешанный случай укажу, когда с выше разберусь случаями.)

11.3.2 Some Other Features of GW

Обсудим свойства гравитационных волн, понимание которых не обязательно для работы с ними.

(тут мои разные вопросы и мелочи про гравитационные волны, соберу их скоро!! многое в первую часть потом продублирую.)

О фактическом переходе в систему отсчета с нужной калибровкой (?!!)

(вопрос у меня, нужно ли в неё переходить, если изначально мы в галилеевой (????) спрошу того, кто знает.)

Роза излучения волн (????)

(вот тут совсем не знаю, как рисовать её, сперва в ЭД нарисовал бы...)

О гравитонах и связи с гравитационными волнами

(есть ли вообще гравитоны? есть ли минимальная возможная волна? думаю, из ур Эйнштейна следует, что они могут быть как угодно мелкими, но может быть есть другая теория, которая ограничивает нас в мелкости.)

Отличия гравитационных волн от электромагнитных

(соберу все отличия)
в электричестве есть положительные и отрицательные заряды,
в гравитации же - нет
так что нет диполей.
(? и)

Источники гравитационных волн

(мб в раздел ниже переставлю, посмотрим. обсудим все их и их особенности)
Binary compact objects (neutron stars, black holes, white dwarfs)
Collisions of galaxies and their clusters
Asymmetric collapse of stars
Cosmological gravitational waves
In general, almost any accelerated motion of masses (except for a spherically-symmetric one)

О том, излучаются гравитационные волны дискретно или непрерывно

(то ест гравитоном или волной? тут не знаю как-то, а мб и никто не знает. но потом рассуждения про это добавлю)

Объяснение существования волн

Можно задаться вопросом: почему вообще гравитационные волны существуют? В этом разделе ответим на этот вопрос.

Гравитационные волны существуют, потому что уравнение Эйнштейна допускают такое решение.

(потом максимально конкретно раскрою это объяснение)
(как связано с конечностью скорости взаимодействия?)

О невозможности существования гравитационных волн в $d < 3$

(Лшк выводил это в л8, потом пропишу, когда четко пойму, почему их там по факту нет. мб в другое место перенесу)

Решения однородного уравнения в размерностях $\mathrm{d} \leq 3$ полностью устраняются калибровкой, и гравитация в этих размерностях не имеет собственных динамических степеней свободы.

(?? тут формулы будут)

Основные формулы слабой гравитационной волны

(скоро пропишу)
(!! нужно потом указать, что какого порядка малости??)

Амплитуда типичной волны (?)

(тут примеры, оценки и комметарии про них)
Амплитуда гравитационной волны от массивных объектов во вселенной есть

$$h \sim 10^{-21}.$$

(тут расчеты, формулы уже представляю.)
(также от других объектов приведу величины амплитуды. сравню.)
(она всегда безразмерна? какая система единиц, в которой мы записываем метрику?)

Частота типичной волны (??)

Частота типичной волны есть:

$$1 \text{ kHz}$$

(тут её вычислю, пока хз)

Энергия гравитационной волны

энергия гравитационной волны является величиной второго порядка малости
(?? не четко это вижу ещё)

Величина гравитационной волны, создаваемая большим электромагнитным полем

(интересно, потом посчитаю)

Обзор нелинейных волн

(указываю, какие вообще есть. подробно они в отдельной записи изучаются.)

11.3.3 Other about GW

Когда мы занимаемся калибровками, меняя систему отсчета, будет ли в нашей системе отсчета тот же вид волны, которую мы нашли, перейдя в другую систему, то есть, сделав калибровку? (!?!??!?!??)

(очень важный вопрос для понимания, люди говорят, что да, я так и не понял это!!!!)
(попробую решить его и потом спрошу у кого-то!!!!)

Особенности гравитационных волн на практике

Обсудим особенности моделей волн, встречающихся в экспериментах.
(тут будут все особенности для приложений. пока не дошел ещё.)

Вид реальной гравитационной волны

(Почему гравитационные волны не такие периодические, как электромагнитные? странно видеть такую картинку, как в LIGO, все-таки периодичности как-то мало очень. а почему?)

11.3.4 GW in Different Theories and Dimensions (????)

(тут суть про них будет, подробно - в записи про волны.)

Теория вкратце

(это пока не знаю)

Количество гравитонов в пространстве (2+1) и (1+1)

(задача Вергелеса, я не так уж въехал, потом переучивать нужно.)

11.4 Detection of GW

(see special note about them, it is a very very big topic)

12 Other Models of GR

(остальное все тут)

12.1 Collapsars

(мб все-таки в теорию перенесу, ну или что-нибудь чисто крайне похожее на это там точно будет. по идее на это может быть много задач, так что как одна из них - они в каталоге)

12.1.1 Collapse of Spherical Body

102 лл2

мотивация изучать гравитационный коллапс

вроде бы крутая задача, да?
а зачем она?

модель гравитационного коллапса

В шварцшильдовой метрике (100.14) g_{00} обращается в нуль, а g_{11} - в бесконечность при $r = r_g$ (на шварциильдовой сфере).

Это обстоятельство могло бы дать основания к заключению о наличии особенности пространственно-временной метрики и затем к заключению о невозможности существования тел с «радиусом» (при заданной массе), меньшим гравитационного радиуса.

В действительности, однако, такие заключения были бы неправильными.

На это указывает уже то обстоятельство, что определитель $g = -r^4 \sin^2\theta$ никакой особенности при $r = r_g$ не имеет, так что условие $g < 0(82.3)$ не нарушается.

Мы увидим, что фактически мы имеем дело лишь с невозможностью осуществления при $r < r_g$ жесткой системы отсчета.

Для выяснения истинного характера пространственно-временной метрики в этой области произведем преобразование координат вида

$$c\tau = \pm ct \pm \int \frac{f(r)dr}{1 - \frac{r_g}{r}}, \quad r = ct + \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) f(r)}$$

Тогда

$$ds^2 = \frac{1 - \frac{r_g}{r}}{1 - f^2}\left(c^2 d\tau^2 - f^2 dr^2\right) - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

Мы устраним особенность, при $r = r_g$, выбрав $f(r)$ так, чтобы $f(r_g) = 1$.

Если положить $f(r) = \sqrt{r_g/r}$, то новая система координат будет также и синхронной ($g_{\tau\tau} = 1$).

Выбрав сначала для определенности верхние знаки в (102.1), будем иметь:

$$R - c\tau = \int \frac{(1-f^2)\,dr}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right) f} = \int \sqrt{\frac{r}{r_g}}dr = \frac{2}{3}\frac{r^{3/2}}{r_g^{1/2}}$$

ИЛ И

$$r = \left[\frac{3}{2}(R-c\tau)\right]^{2/3} r_g^{1/3}$$

(постоянную интегрирования, зависящую от начала отсчета времени τ, полагаем равной нулю).

Элемент интервала:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \frac{dr^2}{\left[\frac{3}{2r_g}(R-c\tau)\right]^{2/3}} - \left[\frac{3}{2}(R-c\tau)\right]^{4/3} r_g^{2/3}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

В этих координатах особенность на шварцшильдовой сфере (которой соответствует здесь равенство $\frac{3}{2}(R-c\tau) = r_g$) отсутствует.

Координата R является везде пространственной, а τ - временной.

Метрика (102.3) нестационарна.

Как во всякой синхронной системе отсчета, линии времени в ней являются геодезическими линиями.

Другими словами, покоящиеся относительно системы отсчета «пробные» частицы это частицы, свободно движущиеся в данном поле.

Заданным значениям r отвечают мировые линии $R - c\tau = \mathbf{const}$ (наклонные прямые линии на диаграмме рис. 20).

Мировые же линии частиц, покоящихся относительно системы отсчета, на этой диаграмме изображаются вертикальными прямыми; передвигаясь вдоль них,

частицы за конечный интервал собственного времени «падают» в центр поля ($r = 0$), представляющий собой точку истинной особенности метрики.

Рассмотрим распространение радиальных световых сигналов.

Уравнение $ds^2 = 0$ (при $\theta, \varphi = \text{const}$) дает для производной $d\tau/dr$ вдоль луча:

$$c\frac{d\tau}{dr} = \pm\left[\frac{3}{2r_g}(R-c\tau)\right]^{-1/3} = \pm\sqrt{\frac{r_g}{r}}$$

два знака отвечают двум границам светового «конуса» с вершиной в заданной мировой точке.

При $r > r_g$ (точка a на рис.

20) наклон этих границ $|cd\tau/dr| < 1$, так что прямая $r = \mathbf{const}$ (вдоль которой $cd\tau/dr = 1$) попадает внутрь конуса.

В области же $r < r_g$ (точка a') имеем $|cd\tau/dr| > 1$, так что прямая $r = \mathbf{const}$ - мировая линия неподвижной (относительно центра поля) частицы - лежит вне конуса.

Обе границы конуса на конечном расстоянии пересекают линию $r = 0$, подходя к ней вертикально.

Поскольку никакие причинно связанные события не могут лежать на мировой линии вне светового конуса, отсюда следует, что в области $r < r_g$ никакие частицы не могут быть неподвижными.

Все вообще взаимодействия и сигналы распространяются здесь по направлению к центру, достигая его за конечный промежуток времени τ.

Аналогичным образом, выбрав в преобразовании (102.1) нижние знаки, мы получили бы «расширяющуюся» систему отсчета с метрикой, отличающейся от (102.3) изменением знака перед τ.

Она отвечает пространству-времени, в котором (в области $r < r_g$) по-прежнему невозможен покой, но распространение всех сигналов происходит в направлении от центра.

Изложенные результаты можно применить к вопросу о поведении массивных тел в общей теории относительности.

Исследование релятивистских условий равновесия сферического тела показывает, что для тела достаточно большой массы равновесного статического состояния может не существовать (см.

вСтатистическая физика», ч.

1, §109).

что такое тело должно неограниченно сжиматься (так называемый гравитационный коллапс). В не связанной с телом галилеевой на бесконечности системе отсчета (метрика (100.14)) радиус центрального тела не может быть меньше r_g.

Это значит, что по часам t удаленного наблюдателя радиус сжимающегося тела лишь асимптотически при $t \to \infty$ стремится к гравитационному радиусу.

Легко выяснить предельный закон этого приближения.

Частица на поверхности сжимающегося тела находится все вре- МЯ в поле тяготения постоянной массы m - полной массы тела.

При $r \to r_g$ силы тяготения становятся очень большими; плотность же тела (а с нею и давление) остается конечной.

Пренебрегая на этом основании силами давления, мы сведем определение зависимости радиуса тела от времени к рассмотрению свободного падения пробной частицы в поле массы m.

Зависимость $r(t)$ для падения в шварцшильдовом поле дается интегралом (101.4), причем для чисто радиального движения момент $M = 0$.

Так, если падение начинается на «расстоянии» r_0 от центра с нулевой скоростью в некоторый момент времени t_0, то энергия частицы $\mathscr{E}_0 = mc^2\sqrt{1 - r_g/r_0}$ и для времени t достижения ею «расстояния» r имеем:

$$c\,(t - t_0) = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r_0}} \int\limits_r^{r_0} \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\sqrt{\frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r_0}}}.$$

Этот интеграл расходится при $r \to r_g$ как $-r_g \ln (r - r_g)$.

Отсюда асимптотический закон приближения r к r_g:

$$r - r_g = \text{const}\, e^{-ct/r_g}$$

Таким образом, конечная стадия приближения коллапсирующего тела к гравитационному радиусу происходит по экспоненциальному закону с очень малым характерным временем $\sim r_g/c$.

Хотя скорость наблюдаемого извне сжатия асимптотически стремится к нулю, скорость v падающих частиц, измеренная в их собственном времени, напротив, возрастает, стремясь к скорости света.

Действительно, согласно определению (88.10):

$$v^2 = \left(\frac{\sqrt{-g_{11}}dr}{\sqrt{g_{00}}dt}\right)^2$$

Взяв g_{11} и g_{00} из (100.14), а dr/dt из (102.5), найдем:

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1 - r_g/r}{1 - r_g/r_0}$$

Приближение к гравитационному радиусу, требующее бесконечного времени по часам удаленного наблюдателя, занимает лишь конечный интервал собственного времени (время в сопутствующей системе отсчета).

Это ясно уже из изложенного выше общего анализа, но в этом можно убедиться и непосредственным вычислением собственного времени τ как инвариантного интеграла

$$c\tau = \int ds = \int \left[c^2 g_{00} \frac{dt^2}{dr^2} + g_{11} \right]^{1/2} dr$$

Взяв dr/dt из (102.5), находим для собственного времени падения из точки r_0 В r:

$$\tau - \tau_0 = \frac{1}{c} \int_r^{r_0} \left(\frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r_0} \right)^{-1/2} dr$$

Этот интеграл сходится при $r \to r_g$.

Достигнув (по собственному времени) гравитационного радиуса, тело будет продолжать сжиматься, причем все его частицы достигнут центра за конечное собственное время; момент падения каждой порции вещества в центр представляет собой истинную особенность пространственно-временной метрики.

Весь процесс сжатия тела под шварцшильдовой сферой, однако, не наблюдаем из внешней системы отсчета.

Моменту прохождения поверхностью тела этой сферы отвечает время $t = \infty$; можно сказать, что весь процесс коллапса под шварцшильдовой сферой происходит как бы «за временной бесконечностью" удаленного наблюдателя - крайний пример относительности хода времени.

Никаких логических противоречий в этой картине, разумеется, нет.

В полном соответствии с ней находится указанное выше свойство сжимающейся системы отсчета: в этой системе из-под шварцшильдовой сферы не выходят никакие сигналы.

Частицы или лучи света могут пересекать эту сферу (в сопутствующей системе отсчета) лишь в одном направлении - внутрь и, раз пройдя туда, уже никогда обратно выйти не могут.

Такую поверхность «одностороннего клапана» называют горизонтом событий.

По отношению ко внешнему наблюдателю сжатие к гравитационному радиусу сопровождается «самозамыканием» тела.

Время распространения посылаемых с тела сигналов стремится к бесконечности.

Действительно, для световых сигналов $ds^2 = 0$ и в шварцшильдовой системе имеем $cdt = dr/\left(1 - r_g/r\right)$; время распространения от r до некоторого $r_0 > r$ дается интегралом

$$c\Delta t = \int_r^{r_0} \frac{dr}{1 - r_g/r} = r_0 - r + r_g \ln \frac{r_0 - r_g}{r - r_g}$$

расходящимся (как и интеграл (102.5)) при $r \to r_g$.

Интервалы собственного времени на поверхности тела сокращены по отношению к интервалам времени t бесконечно удаленного наблюдателя в отношении

$$\sqrt{g_{00}} = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}$$

при $r \to r_g$, следовательно, все процессы на теле по отношению ко внешнему наблюдателю «застывают».

Частота спектральной линии, испускаемой на теле и воспринимаемой удаленным наблюдателем, уменьшается, однако не только этим эффектом гравитационного красного смещения, но и эффектом Доплера от движения источника, падающего к центру вместе с поверхностью шара.

Когда радиус шара уже близок к r_g (так что скорость падения уже близка к скорости света), этот эффект уменьшает частоту в

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\Big/\left(1+\frac{v}{c}\right) \approx \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

раз.

Под влиянием обоих эффектов наблюдаемая частота обращается, следовательно, в нуль при $r \to r_g$ по закону

$$\omega = \text{const}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)$$

Таким образом, с точки зрения удаленного наблюдателя гравитационный коллапс приводит к возникновению «застывшего» тела, которое не посылает в окружающее пространство никаких сигналов и взаимодействует с внешним миром только своим статическим гравитационным полем.

Такое образование называют черной дырой или коллапсаром.

В заключение сделаем еще одно замечание методического характера.

Мы видели, что для центрального поля в пустоте инерциальная на бесконечности «система внешнего наблюдателя» не полна: в ней нет места для мировых линий частиц, движущихся внутри шварцшильдовой сферы.

Метрика же (102.3) применима также и внутри шварцшильдовой сферы, однако и эта система отсчета в известном смысле не полна.

Действительно, рассмотрим в этой системе частицу, совершающую радиальное движение по направлению от центра.

Ее мировая линия при $\tau \to \infty$ уходит в бесконечность, а при $\tau \to -\infty$ она должна асимптотически приближаться к $r = r_g$, поскольку в данной метрике внутри шварцшильдовой сферы движение может происходить лишь по направлению к центру.

С другой стороны, продвижение частицы от $r = r_g$ до любой заданной точки $r > r_g$ происходит за конечный промежуток собственного времени.

По собственному времени, следовательно, частица должна подойти к шварцшильдовой сфере изнутри прежде, чем начать двигаться вне ее; но эта часть истории частицы не охватывается данной системой отсчета.

Подчеркнем, однако, что эта неполнота возникает только при формальном рассмотрении метрики поля, как создаваемого точечной массой.

В реальной физической задаче, скажем, о коллапсе протяженного тела, неполнота не проявляется: решение, получающееся путем сшивания метрики (102.3) с решением внутри вещества, будет, разумеется, полным и будет описывать всю историю всех возможных движений частиц (мировые линии частиц, движущихся в области $r > r_g$ по на- правлению от центра, при этом непременно начинаются от поверхности шара еще до его сжатия под сферу Шварцшильда).

Для частицы в поле коллапсара найти радиусы круговых орбит

Зависимость $r(t)$ для частицы, движущейся в шварцшильдовом поле, дается формулой (101.4) или, в дифференциальном виде;

$$\frac{1}{1-r_g/r}\frac{dr}{cdt}=\frac{1}{\mathscr{E}_0}\left[\mathscr{E}_0^2-U^2(r)\right]^{1/2}$$

где

$$U(r)=mc^2\left[\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(1+\frac{M^2}{m^2c^2r^2}\right)\right]^{1/2}$$

($m-$ масса частицы, $r_g=2km'/c^2$ - гравитационный радиус центрального тела с массой m').

Функция $U(r)$ играет роль «эффективной потенциальной энергии в том смысле, что условием $\mathscr{E}_0\geqslant U(r)$ определяются (аналогично нерелятивистской теории) допустимые области движения.

На рис.

21 изображены кривые $U(r)$ для различных значений момента частицы M.

Радиусы круговых орбит и соответствующие им значения $\mathscr{E}_0$ и M определяются экстремумами функции $U(r)$, причем минимумы отвечают устойчивым, а максимумы - неустойчивым орбитам.

Совместное решение уравнений $U(r)=\mathscr{E}_0, U'(r)=0$ дает;

$$r_g=\frac{M^2}{m^2c^2r_g^2}\left[1\pm\sqrt{1-\frac{3m^2c^2r_g^2}{M^2}}\right]^r$$
$$\mathscr{E}_0=Mc\sqrt{\frac{2}{rr_g}}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)$$

причем верхний знак относится к устойчивым, а нижний - к неустойчивым орбитам.

Ближайшая к центру устойчивая круговая орбита имеет параметры

$$r=3r_g,\quad M=\sqrt{3}mcr_g,\quad \mathscr{E}_0=\sqrt{\frac{8}{9}}mc^2$$

Минимальный радиус неустойчивой орбиты равен $3r_g/2$ и достигается в пределе $M\to\infty,\mathscr{E}_0\to\infty$.

На рис.

22 изображена кривая зависимости r/r_g от $\mathbf{M/mcr}_g$; ее верхняя ветвь дает радиусы устойчивых, а нижняя - неустойчивых орбит.

Сечение гравитационного захвата (?!!)

(интересно, порешаю скоро!!ы)

Для движения в том же поле определить сечение гравитационного захвата падающих на бесконечности: а) нерелятивистских, б) ультрарелятивистских частиц

а) Для нерелятивистской (на бесконечности) скорости v_∞ энергия частицы $\mathscr{E}_0\approx mc^2$.

Из кривых рис.

21 видно, что прямая $\mathscr{E}_0=mc^2$ лежит выше всех потенциальных кривых с моментами $M<2mcr_g$, т.

е.

с прицельными расстояниями $\rho<2cr_g/v_\infty$.

Все частицы с такими ρ гравитационно захватываются: они достигают (асимптотически, при $t\to\infty$) шварцшильдовой сферы, не уходя снова на бесконечность.

Сечение захвата:

$$\sigma = 4\pi r_g^2 \left(\frac{c}{v_\infty}\right)^2$$

б) Вуравнении (1) задачи 1 переход к ультрарелятивистской частице (или к лучу света) осуществляется заменой $m \to 0$.

Введя также прицельное расстояние $\rho = cM/\mathscr{E}_0$, получим:

$$\frac{1}{1 - r_g/r}\frac{dr}{cdt} = \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} + \frac{\rho^2 r_g}{r^3}}$$

Границы движения по r (точки поворота) определяются нулями подкоренного выражения.

Как функция от ρ они изображаются кривой на рис.

23 ; возможным движениям отвечает незаштрихованная часть плоскости.

Кривая имеет минимум в точке

$$\rho = \frac{3\sqrt{3}}{2} r_g, \quad r = \frac{3}{2} r_g$$

При меньших значениях прицельного расстояния частица не встречает точки поворота, т.е. проходит к шварцшильдовой сфере.

Отсюда сечение захвата

$$\sigma = \frac{27}{4}\pi r_g^2$$

О случаях применения

(пока хз, где это нужно, но очень интересно указать это!)

12.1.2 Collapse of Dust Sphere

(кст, Лашкевич тоже решал её!!)

Модель коллапса пылевидной сферы

Выяснение хода изменения внутреннего состояния коллапсирующего тела (в том числе в течение процесса его сжатия под шварцшильдовой сферой) требует решения уравнений Эйнштейна для гравитационного поля в материальной среде.

В центрально-симметричном случае уравнения поля могут быть решены в общем виде в пренебрежении давлением вещества, т. е. для уравнения состояния «пылевидной» материи: $p = 0$(R. Tolman, 1934).

Хотя такое пренебрежение в реальных ситуациях обычно недопустимо, общее решение этой задачи представляет заметный методический интерес.

Как было указано в §97, пылевидная среда допускает выбор системы отсчета, являющейся одновременно синхронной и сопутствующей 1).

Обозначив выбранные именно таким образом время и радиальную координату посредством τ и R, напишем сферическисимметричный элемент интервала в виде

$$ds^2 = d\tau^2 - e^{\lambda(\tau,R)}dr^2 - r^2(\tau,R)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

Функция $r(\tau, R)$ представляет собой «радиус», определенный так, что $2\pi r$ есть длина окружности (с центром в начале координат).

Форма (103.1) фиксирует выбор τ однозначным образом, но допускает еще произвольные преобразования радиальной координаты вида $R = R\,(R')$.

Вычисление компонент тензора Риччи для этой метрики приводит к следующей системе уравнений Эйнштейна 1):

$$\begin{gathered}
-e^{-\lambda}r'^2 + 2r\ddot{r} + \dot{r}^2 + 1 = 0 \\
-\tfrac{e^{-\lambda}}{r}\,(2r'' - r'\lambda') + \tfrac{\dot{r}\dot{\lambda}}{r} + \ddot{\lambda} + \tfrac{\dot{\lambda}^2}{2} + \tfrac{2\ddot{r}}{r} = 0 \\
-\tfrac{e^{-\lambda}}{r^2}\,(2rr'' + r'^2 - rr'\lambda') + \tfrac{1}{r^2}\left(r\dot{r}\dot{\lambda} + \dot{r}^2 + 1\right) = 8\pi k\varepsilon \\
2\dot{r}' - \dot{\lambda}r' = 0
\end{gathered}$$

где штрих означает дифференцирование по R, а точка - по τ.

Уравнение (103.5) непосредственно интегрируется по времени, давая

$$e^{\lambda} = \frac{r'^2}{1 + f(R)}$$

где $f(R)$ - произвольная функция, удовлетворяющая лишь условию $1 + f > 0$.

Подставив это выражение в (103.2), получим

$$2r\ddot{r} + \dot{r}^2 - f = 0$$

(подстановка же в (103.3) не дает ничего нового).

Первый интеграл этого уравнения есть

$$\dot{r}^2 = f(R) + \frac{F(R)}{r}$$

где $F(R)$ - еще одна произвольная функция.

Отсюда

$$\tau = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{f + \frac{F}{r}}}.$$

Получающуюся в результате интегрирования зависимость $r(\tau, R)$ можно представить в параметрическом виде:

$$\begin{gathered}
r = \frac{F}{2f}(\operatorname{ch}\eta - 1), \quad \tau_0(R) - \tau = \frac{F}{2f^{3/2}}(\operatorname{sh}\eta - \eta) \text{ при } f > 0, \\
r = \frac{F}{-2f}(1 - \cos\eta), \quad \tau_0(R) - \tau = \frac{F}{2(-f)^{3/2}}(\eta - \sin\eta) \text{ при } f < 0,
\end{gathered}$$

где $\tau_0(R)$ - снова произвольная функция.

Если же $f = 0$, то

$$r = \left(\frac{9F}{4}\right)^{1/3} [\tau_0(R) - \tau]^{2/3} \text{ при } f = 0$$

Во всех случаях, подставив (103.6) в (103.4) и исключив f с помощью (103.7), получим следующее выражение для плотности материи 1):

$$8\pi k\varepsilon = \frac{F'}{r'r^2}$$

Формулы (103.6)-(103.11) определяют искомое общее решение 2).

Заметим, что оно зависит всего от двух «физически различных» произвольных функций: хотя в нем фигурируют три функции f, F, τ_0 но сама координата R может еще быть подвергнута произвольному преобразованию $R = R\,(R')$.

Это число как раз соответствует тому, что наиболее общее центрально-симметричное распределение материи задается двумя функциями (распределение плотности и радиальной скорости материи), а свободного гравитационного поля с центральной симметрией вообще не существует.

Поскольку система отсчета сопутствует материи, то каждой частице вещества отвечает определенное значение R; функция же $r(\tau, R)$ при этом значении R определяет закон движения данной частицы, а производная $\dot{r}$ есть ее радиальная скорость.

Важное свойство полученног решения состоит в том, что задание входящих в него произвольных функций в интервале от 0 до некоторого R_0 полностью определяет поведение сферы этого радиуса; оно не зависит от того, каким образом заданы эти функции при $R > R_0$.

Тем самым автоматически получается решение внутренней задачи для любой конечной сферы.

Полная масса шара дается, согласно (100.23), интегралом

$$m = 4\pi \int_0^{r(\tau,R_0)} \varepsilon r^2 dr = 4\pi \int_0^{R_0} \varepsilon r^2 r' dr$$

Подставив сюда (103.11) и заметив, что $F(0) = 0$ (при $R = 0$ должно быть и $r = 0$), найдем:

$$m = \frac{F(R_0)}{2k}, \quad r_g = F(R_0)$$

(r_g- гравитационный радиус шара).

При $F = \mathbf{const} \neq 0$ из (103.11) имеем $\varepsilon = 0$, так что решение относится к пустому пространству, т.

е.

описывает поле точечной массы (находящейся в центре - особой точке метрики).

Так, положив $F = r_g$,

$$f = 0, \tau_0 = R, \text{ получим метрику } (102.3)^{1})$$

Формулы (103.8)-(103.10) описывают (в зависимости от пробегаемой параметром η области значений) как сжатие, так и расширение шара; то и другое в равной степени допускаются самими по себе уравнениями поля.

Реальной задаче о поведении неустойчивого массивного тела отвечает сжатие - гравитационный коллапс.

Решения (103.8)-(103.10) выписаны таким образом, что сжатие имеет место, когда τ, увеличиваясь, стремится к τ_0.

Моменту $\tau = \tau_0(R)$ отвечает достижение центра веществом с заданной радиальной координатой R (при этом должно быть $\tau_0' > 0$).

Предельный характер метрики внутри шара при $\tau \to \tau_0(R)$ одинаков во всех трех случаях (103.8) – (103.10):

$$r \approx \left(\frac{9F}{4}\right)^{1/3} (\tau_0 - \tau)^{2/3}, \quad e^{\lambda/2} \approx \left(\frac{2F}{3}\right)^{1/3} \frac{\tau_0'}{\sqrt{1+f}} (\tau_0 - \tau)^{-1/3}.$$

Это значит, что все радиальные расстояния (в рассматриваемой сопутствующей системе отсчета) стремятся к бесконечности, а окружные к нулю, причем все объемы тоже стремятся к нулю (как $\tau - \tau_0$) 2).

Соответственно этому плотность материи неограниченно возрастает 3)

$$8\pi k\varepsilon \approx \frac{2F'}{3F\tau_0'\left(\tau_0-\tau\right)}$$

Таким образом, в соответствии со сказанным в §102, происходит коллапс всего распределения материи в центр 1).

В частном случае, когда функция то $\tau_0(R) = \mathbf{const}$ (т.

е.

все частицы достигают центра одновременно), метрика внутри сжимающегося шара имеет другой характер.

В этом случае

$$r \approx \left(\tfrac{9F}{4}\right)^{1/2}\left(\tau_0-\tau\right)^{2/3}, \quad e^{\lambda/2} \approx \left(\tfrac{2}{3}\right)^{1/3}\frac{F'}{2F^{2/3}\sqrt{1+f}}\left(\tau_0-\tau\right)^{2/3}$$
$$8\pi k\varepsilon \approx \frac{4}{3\left(\tau_0-\tau\right)^2}$$

т.

е.

при $\tau \to \tau_0$ все расстояния - как окружные, так и радиальные стремятся к нулю по одинаковому закону $\sim (\tau_0-\tau)^{2/3}$; плотность материи стремится к бесконечности как $(\tau_0-\tau)^{-2}$, причем в пределе ее распределение становится однородным.

Обратим внимание на то, что во всех случаях момент прохождения поверхности коллапсирующего шара под шварцшильдову сферу ($r\left(\tau, R_0\right) = r_g$) ничем не замечателен для его внутренней динамики (описываемой метрикой в сопутствующей системе отсчета).

В каждый момент времени, однако, определенная часть шара уже находится под своим «горизонтом событий».

Подобно тому, как $F\left(R_0\right)$ определяет, согласно (103.12), гравитационный радиус шара в целом, так $F(R)$ для любого заданного значения R есть гравитационный радиус части шара, расположенный под сферической поверхностью $R = \mathbf{const}$; поэтому указанная часть шара определяется в каждый момент времени τ условием $r(\tau, R) \leqslant F(R)$ Наконец, покажем, каким образом полученными формулами можно воспользоваться для решения поставленного в конце §102 вопроса: построения наиболее полной системы отсчета для поля точечной массы 2).

Для достижения этой цели надо исходить из такой метрики в пустоте, которая содержала бы как сжимающуюся, так и расширяющуюся пространственно-временные области.

Таковым является решение (103.9), в котором надо положить $F = \mathbf{const} = r_g$.

Выбрав также

$$f = -\frac{1}{\left(R/r_g\right)^2+1}, \quad \tau_0 = \frac{\pi}{2}r_g(-f)^{-3/2}$$

получим $\frac{r}{r_g} = \frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{r_g^2}+1\right)(1-\cos\eta)$ $\frac{\tau}{r_g} = \frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{r_g^2}+1\right)^{3/2}(\pi-\eta+\sin\eta)$ когда параметр η пробегает значения от 2π до 0, время τ (при заданном R) монотонно возрастает, а r возрастает от нуля, проходит через максимум и снова убывает до нуля.

На рис.

24 линии ACB и $A'C'B'$ отвечают точке $r = 0$ (им соответствуют значения параметра $\eta = 2\pi$ и $\eta = 0$).

Линии AOA' и BOB' отвечают шварцшильдовой сфере $r = r_g$.

Между $A'C'B'$ и $A'OB'$ расположена пространственно-временная область, в которой возможно лишь движение от центра, а между ACB и AOB - область, в которой движение происходит лишь по направлению к центру.

Мировая линия частицы, покоящейся относительно данной системы отсчета, - вертикальная прямая ($R = \mathbf{const}$).

Она начинается

от $r = 0$ (точка a), пересекает сферу Шварцшильда в точке b, достигает в момент $\tau = 0$ наибольшего удаления $\left(r = r_g\left(R^2/r_g^2 + 1\right)\right)$, затем частица снова начинает падать к сфере Шварцшильда, пересекает ее в точке c и вновь достигает $r = 0$ (точка d) в момент

$$\tau = r_g \frac{\pi}{2}\left(\frac{R^2}{r_g^2} + 1\right)^{3/2}$$

Полученная система является полной: оба конца мировой линии всякой движущейся в поле частицы лежат либо на истинной особенности $r = 0$, либо уходят на бесконечность.

Не полная же метрика (102.3) охватывает собой только область правее линии AOA' (или левее BOB'), а такая же «расширяющаяся» система отсчета - область справа от $\mathbf{BOB'}$ (или слева от $\mathbf{AOA'}$).

Что же касается шварцшильдовой системы отсчета с метрикой (100.14), то она охватывает лишь область справа от BOA' (или слева от AOB').

Решение внутренней задачи гравитационного коллапса пылевидной сферы

Найти решение внутренней задачи для гравитационного коллапса пылевидной однородной сферы, вещество которой в начальный момент покоится.

Положив

$$\tau_0 = \text{ const}, \quad f = -\sin^2 R, \quad F = 2a_0 \sin^3 R$$

получим

$$r = a_0 \sin R(1 - \cos\eta), \quad \tau - \tau_0 = a_0(\eta - \sin\eta)$$

(радиальная координата R здесь безразмерна и пробегает значения от 0 до 2π).

При этом плотность

$$8\pi k\varepsilon = \frac{6}{a_0^2(1 - \cos\eta)^3}$$

и при заданном τ не зависит от R, т.е. шар однороден.

Метрику (103.1) с r из (1) можно представить в виде

$$ds^2 = d\tau^2 - a^2(\tau)\left[dr^2 + \sin^2 R\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

где $a = a_0(1 - \cos\eta)$.

Обратим внимание на то, что она совпадает с решением Фридмана для метрики мира, полностью заполненного однородной пылевидной материей (\$ 112), вполне естественный результат, поскольку сфера, вырезанная из однородного распределения материн, обладает центральной симметрией.

Поставленному начальному условию можно удовлетворить решением с определенным выбором постоянных a_0, τ_0.

Изменив здесь для удобства определение параметра ($\eta \to \pi - \eta$), представим решение в виде

$$r = \frac{r_0}{2}\frac{\sin R}{\sin R_0}(1 + \cos\eta), \quad \tau = \frac{R_0}{2\sin R_0}(\eta + \sin\eta)$$

причем (согласно (103.12)) гравитационный радиус шара $r_g = r_0 \sin^2 R_0$.

В начальный момент ($\tau = 0, \eta = 0$) вещество покоится ($\dot{r} = 0$), а $2\pi r_0 = 2\pi r\,(0, R_0)$ - начальная длина окружности шара.

Падение всего вещества в центр происходит в момент $\tau = \pi r_0/2\sin R_0$

Время t в системе отсчета удаленного наблюдателя (шварцшильдова систе- ма) связано с собственным временем на шаре τ уравнением

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}},$$

где под r надо понимать значение $r(\tau, R_0)$, отвечающее поверхности шара.

Интегрирование этого уравнения приводит к следующему выражению t в функции того же параметра η;

$$\frac{t}{r_g} = \ln \frac{\operatorname{ctg} R_0 + \operatorname{tg} \frac{\eta}{2}}{\operatorname{ctg} R_0 - \operatorname{tg} \frac{\eta}{2}} + \operatorname{ctg} R_0 \left[\eta + \frac{1}{2 \sin^2 R_0}(\eta + \sin \eta)\right]$$

(причем момент $t = 0$ отвечает моменту $\tau = 0$).

Прохождению поверхности шара через шварцшильдову сферу ($r(\tau, R_0) = r_g$) отвечает значение параметра η, определяемое равенством

$$\cos^2 \frac{\eta}{2} = \frac{r_g}{r_0} = \sin^2 R_0$$

При приближении к этому значению время $t \to \infty$ - в соответствии со сказанным в \$102[1]).

О случаях применения

(пока хз, где это нужно, но очень интересно указать это!)

12.1.3 Collapse of Non-spherical and Rotating Bodies

итоговая модель коллапса

Качественная картина гравитационного коллапса остается той же и для тел с малыми отклонениями от сферической симметрии.

Theory

Будем сначала говорить о телах, отклонение которых от центральной симметрии связано с распределением вещества в них, но не с вращением тела как целого.

что если массивное центрально-симметричное тело гравитационно неустойчиво, то эта неустойчивость сохранится и при малом нарушении симметрии, так что и такое тело будет коллапсировать.

Рассматривая слабую асимметрию как малое возмущение, можно проследить за его развитием (в сопутствующей системе отсчета) в ходе сжатия тела.

Возмущения, вообще говоря, возрастают по мере увеличения плотности тела.

Но если возмущения были достаточно малы в начале сжатия, то они останутся еще малыми и в момент достижения телом гравитационного радиуса; в \$103 было отмечено, что этот момент ничем не замечателен для внутренней динамики сжимающегося тела, а его плотность, разумеется, еще конечна.

В силу малости внутренних возмущений в теле остаются малыми также и возмущения создаваемого им внешнего центральносимметричного гравитационного поля.

Это значит, что остается почти неизменной также и поверхность «горизонта событий» - шварцшильдова сфера, и ничто не мешает коллапсирующему телу (в сопутствующей системе отсчета) пересечь ее.

О дальнейшем нарастании возмущений внутри тела к внешнему наблюдателю не поступает никаких сведений, поскольку из-под горизонта событий не выходят никакие

сигналы; весь этот процесс остается «за временной бесконечностью" удаленного наблюдателя.

Отсюда, в свою очередь, следует, что по отношению к внешней системе отсчета гравитационное поле коллапсирующего тела должно стремиться к стационарности, когда тело асимптотически приближается к гравитационному радиусу.

Характерное время этого приближения очень мало ($\sim r_g/c$), и по его истечении можно считать, что во внешнем пространстве остаются лишь ранее возникшие возмущения центральносимметричного поля.

Но все переменные возмущения должны с течением времени рассеяться в пространстве, как гравитационные волны, уходя на бесконечность (или проходя под горизонт).

Во внешнем гравитационном поле возникающего коллапсара не могут остаться также и не зависящие от времени статические возмущения.

Этот вывод можно извлечь из анализа постоянных возмущений, налагаемых на шварцшильдово поле в пустоте.

Такой анализ показывает, что в статическом случае всякое (убывающее на бесконечности) возмущение неограниченно возрастает при приближении к шварцшильдовой сфере невозмущенной задачи ; между тем для возникновения больших возмущений внешнего поля в данном случае, как уже было указано, нет никаких оснований.

Отклонения от сферической симметрии в распределении плотности тела описываются квадрупольным и высшими мультипольными моментами этого распределения; каждый из них дает свой вклад во внешнее гравитационное поле.

Сделанное утверждение означает, что все такие возмущения внешнего поля затухают на конечных (с точки зрения внешнего наблюдателя) стадиях коллапса 2).

Установившееся гравитационное поле коллапсара оказывается снова центрально-симметричным полем Шварцшильда, определяющимся одной только полной массой тела.

Вопрос о конечной судьбе тела в его коллапсе под горизонтом событий (не наблюдаемом из внешней системы отсчета) не вполне ясен.

Можно, по-видимому, утверждать, что и здесь коллапс заканчивается истинной особенностью пространственно-временной метрики, но особен-ностью совсем другого типа, нежели в центрально-симметричном случае.

Этот вопрос, однако, в настоящее время еще не выяснен до конца.

Обратимся к случаю, когда слабое нарушение сферической симметрии связано не только с распределением плотности, но и с вращением тела как целого; предполагаемая малость отклонений от сферической симметрии означает при этом достаточную медленность вращения.

Все сказанное выше остается в силе, за одним лишь исключением.

Заранее ясно, что в силу сохранения полного момента импульса тела $\mathbf{M}$ поле коллапсара в этом случае не может зависеть от одной только массы.

Этому как раз соответствует то обстоятельство, что среди не зависящих от времени стационарных (но не статических) возмущений центрально-симметричного гравитационного поля есть одно, которое не растет неограниченно при $r \to r_g$.

Это возмущение связано именно с вращением тела и описывается добавкой к шварцшильдову метрическому тензору g_{ik} (в координатах $x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$) малой недиагональной компоненты:

$$g_{03} = \frac{2kM}{r} \sin^2 \theta$$

(см.

задачу 1 к §105).

Это выражение остается справедливым (во внешнем пространстве) при приближении тела к гравитационному радиусу, и, таким образом, гравитационное поле медленно вращающегося коллапсара будет (в первом приближении по малому моменту M) центрально-симметричным шварцшильдовым полем с малой поправкой (104.1).

Это поле уже не статично, а лишь стационарно.

Если гравитационный коллапс допускается при малых нарушениях сферической симметрии, то коллапс такого же характера (с уходом тела под горизонт событии) должен быть возможен и в некоторой конечной области значительных отклонений от сферичности; условия, определяющие эту область, в настоящее время еще не установлены.

Вне зависимости от этих условий можно, по-видимому, утверждать, что свойства возникающего в результате такого коллапса образования (вращающегося коллапсара) с точки зрения внешнего наблюдателя не зависят ни от каких характеристик первоначального тела, за исключением лишь его полных массы m и момента M^2).

Если тело не вращается как целое ($M = 0$), то внешнее гравитационное поле коллапсара есть центрально-симметричное поле Шварцшильда.

Метрика Керра

Гравитационное же поле вращающегося коллапсара дается следующей аксиально-симметричной стационарной метрикой Керра [1])

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g r}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \\ - \left(r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2}{\rho^2} \sin^2\theta\right) \sin^2\theta d\varphi^2 + \frac{2 r_g r a}{\rho^2} \sin^2\theta d\varphi dt,$$

где введены обозначения $\Delta = r^2 - r_g r + a^2$, $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta$ а r_g есть по-прежнему $r_g = 2mk$.

Эта метрика зависит от двух постоянных параметров, m и a, смысл которых ясен из предельного вида метрики на больших расстояниях r.

С точностью до членов $\sim 1/r$ имеем:

$$g_{00} \approx 1 - \frac{r_g}{r}, \quad g_{03} \approx \frac{r_g a}{r} \sin^2\theta$$

сравнение первого выражения с (100.18), а второго с (104.1) показывает, что m есть масса тела, а параметр a связан **с** моментом M соотношением

$$M = ma$$

($M = mac$ в обычных единицах).

При $a = 0$ метрика Керра переходит в шварцшильдову метрику в ее стандартном виде (100.14) 2).

Обратим внимание также на то, что форма (104.2) в явном виде выявляет симметрию по отношению к обращению времени: это преобразование ($t \to -t$) меняет также и направление вращения, т.е.

знак момента ($a \to -a$), в результате чего ds^2 остается неизменным.

Определитель метрического тензора из (104.2)

$$-g = \rho^4 \sin^2\theta$$

Приведем также контравариантные компоненты g^{ik}, сведя их в следующем выражении для квадрата оператора 4-градиента:

$$g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{1}{\Delta}\left(r^2+a^2+\frac{r_g r a^2}{\rho^2}\sin^2\theta\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \frac{\Delta}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 - \\ - \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 - \frac{1}{\Delta\sin^2\theta}\left(1-\frac{r_g r}{\rho^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2 + \frac{2r_g r a}{\rho^2\Delta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial t}$$

При $m = 0$, в отсутствие тяготеющей массы, метрика (104.2) должна сводиться к галилеевой.

Действительно, выражение

$$ds^2 = dt^2 - \frac{\rho^2}{r^2+a^2}dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \left(r^2+a^2\right)\sin^2\theta d\varphi^2$$

представляет собой галилееву метрику

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

написанную в пространственных сплюснутых сфероидальных координатах; преобразование этих координат в декартовы осуществляется формулами

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{r^2+a^2}\sin\theta\cos\varphi \\ y &= \sqrt{r^2+a^2}\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

поверхности $r = \mathbf{const}$ представляют собой сплюснутые эллипсоиды вращения:

$$\frac{x^2+y^2}{r^2+a^2}+\frac{z^2}{r^2}=1$$

Метрика (104.2) имеет фиктивные особенности, подобно тому как метрика Шварцшильда (100.14) имеет фиктивную особенность при $r = r_g$.

Но в то время как в шварцшильдовом случае на поверхности $r = r_g$ происходит одновременное обращение g_{00} в нуль и g_{11} в бесконечность, в метрике Керра эти две поверхности разделены.

Равенство $g_{00} = 0$ имеет место при $\rho^2 = r r_g$; больший из двух корней этого квадратного уравнения есть

$$r_0 = \frac{r_g}{2} + \sqrt{\left(\frac{r_g}{2}\right)^2 - a^2\cos^2\theta} \quad (g_{00}=0)$$

Обращение же g_{11} в бесконечность имеет место при $\Delta = 0$; больший из двух корней этого уравнения:

$$r_{\text{гор}} = \frac{r_g}{2} + \sqrt{\left(\frac{r_g}{2}\right)^2 - a^2} \quad (g_{11}=\infty)$$

Метрика (104.2) имеет фиктивные особенности, подобно тому как метрика Шварцшильда (100.14) имеет фиктивную особенность при $r = r_g$.

Но в то время как в шварцшильдовом случае на поверхности $r = r_g$ происходит одновременное обращение g_{00} в нуль и g_{11} в бесконечность, в метрике Керра эти две поверхности разделены.

Равенство $g_{00} = 0$ имеет место при $\rho^2 = r r_g$; больший из двух корней этого квадратного уравнения есть

$$r_0 = \frac{r_g}{2} + \sqrt{\left(\frac{r_g}{2}\right)^2 - a^2\cos^2\theta} \quad (g_{00}=0)$$

Обращение же g_{11} в бесконечность имеет место при $\Delta = 0$; больший из двух корней этого уравнения:

$$r_{\text{гор}} = \frac{r_g}{2} + \sqrt{\left(\frac{r_g}{2}\right)^2 - a^2} \quad (g_{11} = \infty)$$

из этой точки светового конуса.

Таким образом, построенные (скажем, в сторону будущего) из каждой точки нулевой гиперповерхности световые конусы лежат целиком по одну из ее сторон, касаясь (в этих точках) гиперповерхности вдоль одной из своих образующих.

Но это свойство как раз и означает, что (направленные в будущее) мировые линии частиц или световых лучей могут пересекать гиперповерхность лишь в одну сторону.

Описанное свойство нулевых гиперповерхностей имеет обычно физически тривиальный характер: одностороннее пропускание через них выражает собой просто невозможность движения со скоростью, большей скорости света (простейший пример такого рода: гиперплоскость $x = t$ в плоском пространстве-времени).

Нетривиальная новая физическая ситуация возникает, когда нулевая гиперповерхность не простирается на пространственную бесконечность, так что ее сечения $t = \textbf{const}$ представляют собой замкнутые пространственные поверхности; эти поверхности и являются горизонтом событий в том смысле, как это было описано для шварцшильдовой сферы в центрально-симметричном гравитационном поле.

Такой же является и поверхность $S_{\text{гор}}$ в поле Керра.

Действительно, условие $n_i n^i = 0$ для гиперповерхности вида $f(r, \theta) = \text{const}$ в поле Керра имеет вид

$$g^{11}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + g^{22}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2}\left[\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2\right] = 0$$

(g^{ik} из (104.6)).

Это уравнение не выполняется на S_0, но выполняется на $S_{\text{гор}}$ (для которой $\partial f/\partial\theta = 0, \Delta = 0$).

Продолжение метрики Керра внутрь поверхности горизонта (подобно тому, как это было показано в §102, §103 для метрики Шварцшильда) не имеет физического смысла.

Такое продолжение зависело бы лишь от тех же двух параметров (m и a), что и поле вне $S_{\text{гор}}$, , и уже отсюда ясно, что оно не могло бы иметь отношения к физической задаче о судьбе коллапсирующего тела после его ухода под горизонт.

Эффекты несферичности в сопутствующей системе отсчета отнюдь не затухают, а напротив, должны нарастать при дальнейшем сжатии тела, и потому нет никаких оснований ожидать, чтобы поле под горизонтом могло определяться лишь полными массой и моментом тела.

Эргосфера (???)

Обратимся к свойствам поверхности S_0 и пространства между нею и горизонтом (эту область поля Керра называют эргосферой).

Основное свойство эргосферы состоит в том, что никакая частица здесь не может оставаться в покое по отношению к системе отсчета удаленного наблюдателя: при $r, \theta, \varphi = \textbf{const}$ имеем $ds^2 < 0$, т.

е.

интервал не времениподобен, как это должно было бы быть для мировой

линии частицы; переменная t теряет свой временной характер.

Таким образом, жесткая система отсчета не может простираться от бесконечности внутрь эргосферы, и в этом смысле поверхность S_0 можно назвать пределом стационарности.

Характер движения, в котором должны находиться частицы в эргосфере, существенно отличается от того, что мы имели внутри горизонта в поле Шварцшильда.

В последнем случае частицы тоже не могли покоиться относительно внешней системы отсчета, причем для них было невозможно $r = \mathbf{const}$: все частицы должны двигаться радиально по направлению к центру.

В эргосфере же поля Керра для частицы невозможно $\varphi = \text{const}$ (частицы непременно должны вращаться вокруг оси симметрии поля), но $r = \text{const}$ для частицы возможно.

Более того, частицы (и световые лучи) могут двигаться как с уменьшением, так и с увеличением r, выходя при этом из эргосферы во внешнее пространство.

В соответствии с последним обстоятельством находится также и возможность достижения эргосферы частицей, приходящей из внешнего пространства: время достижения поверхности S_0 такой частицей (или лучом света), отсчитываемое по часам t удаленного наблюдателя, конечно для всей S_0, за исключением лишь ее полюсов, в которых S_0 касается $S_{\text{гор}}$, время достижения этих точек, как и всей $S_{\text{гор}}$, разумеется, по-прежнему бесконечно.

Ввиду неизбежности вращательного движения частиц в эргосфере естественная форма представления метрики в этой области:

$$ds^2 = \left(g_{00} - \frac{g_{03}^2}{g_{33}}\right) dt^2 + g_{11}dr^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{33}\left(d\varphi + \frac{g_{03}}{g_{33}}dt\right)^2$$

Коэффициент при dt^2

$$g_{00} - \frac{g_{03}^2}{g_{33}} = \frac{\Delta}{r^2 + a^2 + r_g r a^2 \sin^2\theta/\rho^2}$$

положителен везде вне $S_{\text{гор}}$ (и не обращается в нуль при S_0; интервал ds при $r = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, $d\varphi = -\left(g_{03}/g_{33}\right) dt$ времениподобен.

Величина

$$-\frac{g_{03}}{g_{33}} = \frac{r_g a r}{\rho^2\left(r^2 + a^2\right) + r_g r a^2 \sin^2\theta}$$

играет роль общей «угловой скорости вращения эргосферы» относительно внешней системы отсчета (причем направление этого вращения совпадает с направлением вращения центрального тела).

Энергия частицы, определенная как производная $-\partial S/\partial\tau$ от действия по собственному времени частицы τ, синхронизованному вдоль траектории, всегда положительна (см. §88).

Но, как было объяснено в §88, при движении частицы в поле, не зависящем от переменной t, сохраняется энергия $\mathscr{E}_0$, определенная как производная $-\partial S/\partial t$; эта величина совпадает с ковариантной компонентой 4-импульса $p_0 = mu_0 = mg_{0i}dx^i$ (здесь m - масса частицы).

Тот факт, что переменная t (время по часам удаленного наблюдателя) не имеет в эргосфере временного характера, приводит к своеобразной ситуации: в этой области $g_{00} < 0$, и потому величина

$$\mathscr{E}_0 = m\left(g_{00}u^0 + g_{03}u^3\right) = m\left(g_{00}\frac{dt}{ds} + g_{03}\frac{d\varphi}{ds}\right)$$

может быть отрицательной.

Поскольку во внешнем пространстве, где t - время, энергия $\mathscr{E}_0$ не может быть отрицательной, то частица с $\mathscr{E}_0 < 0$ не может попасть в эргосферу извне.

Возможный источник возникновения такой частицы состоит в распаде влетающего в эргосферу тела, скажем, на две части, из которых одна захватывается на орбиту с «отрицательной энергией».

Эта часть уже не может выйти из эргосферы и в конце концов захватывается внутрь горизонта.

Вторая же часть может выйти обратно во внешнее пространство; поскольку $\mathscr{E}_0$ - сохраняющаяся аддитивная величина, то энергия этой части окажется при этом больше энергии первоначального тела - произойдет извлечение энергии из вращающегося коллапсара (R.

Penrose, 1969).

Наконец, отметим, что хотя поверхность S_0 не является особой для пространственно-временной метрики, чисто пространственная метрика (в системе отсчета (104.2)) имеет здесь особенность.

Вне S_0, где переменная t имеет временной характер, пространственный метрический тензор вычисляется по (84.7) и элемент пространственного расстояния имеет вид

$$dl^2 = \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\Delta \sin^2\theta}{1 - rr_g/\rho^2}d\varphi^2$$

Вблизи S_0 длины параллелей ($\theta = \mathbf{const}, r = \mathbf{const}$) стремятся к бесконечности по закону $2\pi a \sin^2\theta/\sqrt{g_{00}}$.

Здесь же стремится к бесконечности также и разность показаний часов (см. (88.5)) при их синхронизации вдоль этого замкнутого контура.

Разделение переменных в уравнении Гамильтона-Якоби для частицы, движущейся в поле Керра

Произвести разделение переменных в уравнении Гамильтона-Якоби для частицы, движущейся в поле Керра.

В уравнении Гамильтона-Якоби

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2 = 0$$

($m-$ масса частицы, не смешивать с массой цетрального тела!) с g^{ik} из (104.6) время t и угол φ - циклические переменные; поэтому они входят в действие S в виде $-\dot{\mathscr{E}}_0 t + L\varphi$, где $\mathscr{E}_0$ - сохраняющаяся энергия, а посредством L обозначена компонента момента частицы вдоль оси симметрии поля.

Оказывается, что и переменные θ и r могут быть разделены.

Представив S в виде

$$S = -\mathscr{E}_0 t + L\varphi + S_r(r) + S_\theta(\theta)$$

сведем уравнение Гамильтона-Якоби к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 + \left(a\ell_0 \sin\theta - \frac{L}{\sin\theta}\right)^2 + a^2 m^2 \cos^2\theta = K$$

$$\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 - \frac{1}{\Delta}\left[\left(r^2 + a^2\right)\mathscr{E}_0 - aL\right]^2 + m^2 r^2 = -K$$

где K (параметр разделения) - новая произвольная постоянная.

Функции S_θ и S_r определяются отсюда простыми квадратурами.

4-импульс частицы:

$$p^i = m\frac{dx^i}{ds} = g^{ik}p_k = -g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^k}$$

Вычисляя правую сторону этого равенства с помощью (1) (2), получим следующие уравнения:

$$m\frac{dt}{ds} = -\frac{r_g r a}{\rho^2\Delta}L + \frac{\mathscr{E}_0}{\Delta}\left(r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2}{\rho^2}\sin^2\theta\right)$$
$$m\frac{d\varphi}{ds} = \frac{L}{\Delta\sin^2\theta}\left(1 - \frac{r_g r}{\rho^2}\right) + \frac{r_g r a}{\rho^2\Delta}\mathscr{E}_0$$
$$m^2\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \frac{1}{\rho^4}\left[\left(r^2+a^2\right)\mathscr{E}_0 - aL\right]^2 - \frac{\Delta}{\rho^4}\left(K + m^2 r^2\right)$$
$$m^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = \frac{1}{\rho^4}\left(K - a^2 m^2\cos^2\theta\right) - \frac{1}{\rho^4}\left(a\mathscr{E}_0\sin\theta - \frac{L}{\sin\theta}\right)^2$$

Эти равенства - первые интегралы уравнений движения (уравнений геодезических линий).

Уравнение траектории и зависимость координат от времени вдоль траекторий могут быть найдены либо из (3)-(6), либо прямо из уравнений

$$\partial S/\partial\mathscr{E}_0 = \text{ const}, \quad \partial S/\partial L = \text{ const }, \quad \partial S/\partial K = \text{ const}.$$

Для световых лучей в правых сторонах уравнений (3)-(6) надо положить $m = 0$ и писать ω_0 вместо $\mathscr{E}_0$ (ср.

§101), а в левых сторонах вместо производных md/ds надо писать производные $d/d\lambda$ по параметру K, меняющемуся вдоль лучей (ср.$ 87).

Уравнения $(4) - (6)$ допускают чисто радиальное движение лишь вдоль оси вращения тела, как это ясно уже из соображений симметрии.

Из тех же соображений ясно, что движение в одной "плоскости" возможно, лишь если эта плоскость экваториальная.

В последнем случае, положив $\theta = \pi/2$ и выразив K через $\mathscr{E}_0$ и L из условия $d\theta/ds = 0$, получим уравнения движения в виде

$$m\frac{dt}{ds} = -\frac{r_g a}{r\Delta}L + \frac{\mathscr{E}_0}{\Delta}\left(r^2 + a^2 + \frac{r_g a^2}{r}\right)$$
$$m\frac{d\varphi}{ds} = \frac{M}{\Delta}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) + \frac{r_g a}{r\Delta}\mathscr{E}_0$$
$$m^2\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \frac{1}{r^4}\left[\left(r^2+a^2\right)\mathscr{E}_0 - aL\right]^2 - \frac{\Delta}{r^4}\left[\left(a\mathscr{E}_0 - L\right)^2 + m^2 r^2\right]$$

радиус ближайшей к центру устойчивой круговой орбиты частицы в поле Керра

Определить радиус ближайшей к центру устойчивой круговой орбиты частицы, движущейся в экваториальной плоскости предельного ($a \to r_g/2$) поля Керра.

(???)

Поступая аналогично решению задачи 1 §102, вводим «эффективную потенциальную энергию» $U(r)$, определенную согласно

$$\left[\left(r^2+a^2\right)U(r) - aL\right]^2 - \Delta\left[(aU(r) - L)^2 + r^2 m^2\right] = 0$$

(при $\mathscr{E}_0 = U$ правая сторона уравнения (9) обращается в нуль).

Радиусы устойчивых орбит определяются минимумами функции $U(r)$, т.

е.

совместным решением уравнений $U(r) = \mathcal{E}_0, U'(r) = 0$ при $U''(r) > 0$.

Ближайшей к центру орбите отвечает равенство $U''(r_{\min}) = 0$; при $r < r_{\min}$ функция $U(r)$ не имеет минимумов.

В результате получаются следующие значения параметров движения: а) при $L < 0$, т. е.

при движении частицы в направлении, обратном направлению вращения коллапсара:

$$\frac{r_{\min}}{r_g} = \frac{9}{2}, \quad \frac{\mathscr{E}_0}{m} = \frac{5}{3\sqrt{3}}, \quad \frac{L}{m r_g} = \frac{11}{3\sqrt{3}}.$$

б) при $L > 0$ (движение в направлении вращения коллапсара) при $a \to r_g/2$ радиус $r_{\min}$ стремится к радиусу горизонта.

Положив $a = \frac{r_g}{2}(1+\Delta)$, получим при $\Delta \to 0$:

$$\frac{r_{\text{гор}}}{r_g} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2\Delta}), \quad \frac{r_{\min}}{r_g} = \frac{1}{2}\left[1+(4\Delta)^{1/3}\right]$$

При этом

$$\frac{\mathscr{E}_0}{m} = \frac{L}{mr_g} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[1+(4\Delta)^{1/3}\right]$$

Обратим внимание на то, что все время остается $r_{\min}/r_{\text{гор}} > 1$, т.

е.

орбита проходит вне горизонта.

Так и должно было быть: горизонт представляет собой нулевую гиперповерхность, в которой не могут лежать времениподобные мировые линии движущихся частиц.

О случаях применения

(пока хз, где это нужно, но очень интересно указать это!)

12.2 Other Models

(???)

12.2.1 Interaction of Gravitational Field with Matter

затухание гравитационного поля

превращение электромагнитной волны в гравитационную в магнитном поле

.

да ну, не думаю, что это может быть. см Лашкевич хз что.

12.2.2 Gravitational Fields of Other Bodies

(тут каталог тоже полезного)

Гравитационное поле постоянно движущейся частицы

лашкевич предлагает решить, я вообще хз, но звучит круто.

Количественные оценки и примеры

интересно набрать их.

Поля стержней и плоскостей

вроде очень полезные шаблоны.

Равномерно движущиеся стержни и плоскости

лашкевич предлагает решить, я вообще хз, но звучит круто.

Гравитационное поле луча света (???!!!)

лашкевич предлагает решить, я вообще хз, но звучит круто.

12.3 Catalogue of Spacetimes by Müller, Grave

12.3.1 Introduction to Catalogue of Spacetimes and Notation

The *Catalogue of Spacetimes* is a collection of four-dimensional Lorentzian spacetimes in the context of the General Theory of Relativity (GR). The aim of the catalogue is to give a quick reference for students who need some basic facts of the most well-known spacetimes in GR. For a detailed discussion of a metric, the reader is referred to the standard literature or the original articles. Important resources for exact solutions are the book by Stephani et al and the book by Griffiths and Podolský.

Most of the metrics in this catalogue are implemented in the Motion4D-library and can be visualized using the GeodesicViewer. Except for the Minkowski and Schwarzschild spacetimes, the metrics are sorted by their names.

Notation

The notation we use in this catalogue is as follows:

Indices: Coordinate indices are represented either by Greek letters or by coordinate names. Tetrad indices are indicated by Latin letters or coordinate names in brackets.

Einstein sum convention: When an index appears twice in a single term, once as lower index and once as upper index, we build the sum over all indices:

$$\zeta_\mu \zeta^\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{3} \zeta_\mu \zeta^\mu. \tag{12.1}$$

Vectors: A coordinate vector in x^μ direction is represented as $\partial_{x^\mu} \equiv \partial_\mu$. For arbitrary vectors, we use boldface symbols. Hence, a vector $\mathbf{a}$ in coordinate representation reads $\mathbf{a} = a^\mu \partial_\mu$.

Derivatives: Partial derivatives are indicated by a comma, $\partial\psi/\partial x^\mu \equiv \partial_\mu \psi \equiv \psi_{,\mu}$, whereas covariant derivatives are indicated by a semicolon, $\nabla\psi = \psi_{;\mu}$.

Symmetrization and Antisymmetrization brackets:

$$a_{(\mu} b_{\nu)} = \frac{1}{2}\left(a_\mu b_\nu + a_\nu b_\mu\right), \qquad a_{[\mu} b_{\nu]} = \frac{1}{2}\left(a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu\right) \tag{12.2}$$

General remarks

The Einstein field equation in the most general form reads

$$G_{\mu\nu} = \varkappa T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}, \qquad \varkappa = \frac{8\pi G}{c^4}, \tag{12.3}$$

with the symmetric and divergence-free Einstein tensor $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$, the Ricci tensor $R_{\mu\nu}$, the Ricci scalar R, the metric tensor $g_{\mu\nu}$, the energy-momentum tensor $T_{\mu\nu}$, the cosmological constant Λ, Newton's gravitational constant G, and the speed of light c. Because the Einstein tensor is divergence-free, the conservation equation $?T^{\mu\nu}_{\ \ ;\nu}? = 0$ is automatically fulfilled.

A solution to the field equation is given by the line element

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{12.4}$$

with the symmetric, covariant metric tensor $g_{\mu\nu}$. The contravariant metric tensor $g^{\mu\nu}$ is related to the covariant tensor via $g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda} = \delta^{\lambda}_{\mu}$ with the Kronecker-δ. Even though $g_{\mu\nu}$ is only a component of the metric tensor $\mathbf{g} = g_{\mu\nu}dx^{\mu} \otimes dx^{\nu}$, we will also call $g_{\mu\nu}$ the metric tensor.

Note that, in this catalogue, we mostly use the convention that the signature of the metric is +2. In general, we will also keep the physical constants c and G within the metrics.

Basic objects of a metric

The basic objects of a metric are the Christoffel symbols, the Riemann and Ricci tensors as well as the Ricci and Kretschmann scalars which are defined as follows:

Christoffel symbols of the first kind:[1]

$$\Gamma_{\nu\lambda\mu} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\mu\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\mu}\right) \tag{12.5}$$

with the relation

$$g_{\nu\lambda,\mu} = \Gamma_{\mu\nu\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda\nu} \tag{12.6}$$

Christoffel symbols of the second kind:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}\left(g_{\rho\nu,\lambda} + g_{\rho\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\rho}\right) \tag{12.7}$$

which are related to the Christoffel symbols of the first kind via

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = g^{\mu\rho}\Gamma_{\nu\lambda\rho} \tag{12.8}$$

Riemann tensor:

$$?R^{\mu}_{\nu\rho\sigma}? = \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^{\mu}_{\nu\rho,\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} \tag{12.9}$$

or

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\lambda}?R^{\lambda}_{\nu\rho\sigma}? = \Gamma_{\nu\sigma\mu,\rho} - \Gamma_{\nu\rho\mu,\sigma} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\Gamma_{\mu\sigma\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}\Gamma_{\mu\sigma\lambda} \tag{12.10}$$

with symmetries

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho}, \qquad R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma}, \qquad R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu} \tag{12.11}$$

and

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\rho\sigma\nu} + R_{\mu\sigma\nu\rho} = 0 \tag{12.12}$$

Ricci tensor:

$$R_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma}R_{\rho\mu\sigma\nu} = ?R^{\rho}_{\mu\rho\nu}? \tag{12.13}$$

Ricci and Kretschmann scalar:

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = ?R^{\mu}_{\mu}?, \qquad \mathcal{K} = R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} = ?R^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}??R^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}? \tag{12.14}$$

Weyl tensor:

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{2}\left(g_{\mu[\rho}R_{\sigma]\nu} - g_{\nu[\rho}R_{\sigma]\mu}\right) + \frac{1}{3}R\, g_{\mu[\rho}g_{\sigma]\nu} \tag{12.15}$$

If we change the signature of a metric, these basic objects transform as follows:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} \mapsto \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}, \qquad R_{\mu\nu\rho\sigma} \mapsto -R_{\mu\nu\rho\sigma}, \qquad C_{\mu\nu\rho\sigma} \mapsto -C_{\mu\nu\rho\sigma}, \tag{12.16a}$$

$$R_{\mu\nu} \mapsto R_{\mu\nu}, \qquad \mathcal{R} \mapsto -\mathcal{R}, \qquad \mathcal{K} \mapsto \mathcal{K}. \tag{12.16b}$$

[1] The notation of the Christoffel symbols of the first kind differs from the one used by Rindler, $\Gamma^{\text{Rindler}}_{\mu\nu\lambda} = \Gamma^{\text{CoS}}_{\nu\lambda\mu}$.

Covariant derivative

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu;\lambda} = 0. \tag{12.17}$$

Covariant derivative of the vector field ψ^μ:

$$\nabla_\nu \psi^\mu = \psi^\mu_{;\nu} = \partial_\nu \psi^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\psi^\lambda \tag{12.18}$$

Covariant derivative of a r-s-tensor field:

$$\begin{aligned}\nabla_c ? T^{a_1\ldots a_r}_{b_1\ldots b_s} ? = \partial_c ? T^{a_1\ldots a_r}_{b_1\ldots b_s} ? + \Gamma^{a_1}_{dc} ? T^{d\ldots a_r}_{b_1\ldots b_s} ? + \ldots + \Gamma^{a_r}_{dc} ? T^{a_1\ldots a_{r-1}d}_{b_1\ldots b_s} ? \\ - \Gamma^{d}_{b_1 c} ? T^{a_1\ldots a_r}_{d\ldots b_s} ? - \ldots - \Gamma^{d}_{b_s c} ? T^{a_1\ldots a_r}_{b_1\ldots b_{s-1}d} ?\end{aligned} \tag{12.19}$$

Killing equation:

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0. \tag{12.20}$$

Natural local tetrad and initial conditions for geodesics

We will call a local tetrad natural if it is adapted to the symmetries or the coordinates of the spacetime. The four base vectors $\mathbf{e}_{(i)} = e^\mu_{(i)}\partial_\mu$ are given with respect to coordinate directions $\partial/\partial x^\mu = \partial_\mu$, compare Nakahara or Chandrasekhar for an introduction to the tetrad formalism. The inverse or dual tetrad is given by $\boldsymbol{\theta}^{(i)} = \theta^{(i)}_\mu dx^\mu$ with

$$\boldsymbol{\theta}^{(i)}_\mu e^\mu_{(j)} = \delta^{(i)}_{(j)} \qquad \text{and} \qquad \theta^{(i)}_\mu e^\nu_{(i)} = \delta^\nu_\mu. \tag{12.21}$$

Note that we us Latin indices in brackets for tetrads and Greek indices for coordinates.

Orthonormality condition

To be applicable as a local reference frame (Minkowski frame), a local tetrad $\mathbf{e}_{(i)}$ has to fulfill the orthonormality condition

$$\left\langle \mathbf{e}_{(i)}, \mathbf{e}_{(j)} \right\rangle_{\mathbf{g}} = \mathbf{g}\left(\mathbf{e}_{(i)}, \mathbf{e}_{(j)}\right) = g_{\mu\nu} e^\mu_{(i)} e^\nu_{(j)} \overset{!}{=} \eta_{(i)(j)}, \tag{12.22}$$

where $\eta_{(i)(j)} = \mathrm{diag}(\mp 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ depending on the signature $\mathrm{sign}(\mathbf{g}) = \pm 2$ of the metric. Thus, the line element of a metric can be written as

$$ds^2 = \eta_{(i)(j)} \boldsymbol{\theta}^{(i)} \boldsymbol{\theta}^{(j)} = \eta_{(i)(j)} \theta^{(i)}_\mu \theta^{(j)}_\nu dx^\mu dx^\nu. \tag{12.23}$$

To obtain a local tetrad $\mathbf{e}_{(i)}$, we could first determine the dual tetrad $\boldsymbol{\theta}^{(i)}$ via Eq. (12.23). If we combine all four dual tetrad vectors into one matrix Θ, we only have to determine its inverse Θ^{-1} to find the tetrad vectors,

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta^{(0)}_0 & \theta^{(0)}_1 & \theta^{(0)}_2 & \theta^{(0)}_3 \\ \theta^{(1)}_0 & \theta^{(1)}_1 & \theta^{(1)}_2 & \theta^{(1)}_3 \\ \theta^{(2)}_0 & \theta^{(2)}_1 & \theta^{(2)}_2 & \theta^{(2)}_3 \\ \theta^{(3)}_0 & \theta^{(3)}_1 & \theta^{(3)}_2 & \theta^{(3)}_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Theta^{-1} = \begin{pmatrix} e^0_{(0)} & e^0_{(1)} & e^0_{(2)} & e^0_{(3)} \\ e^1_{(0)} & e^1_{(1)} & e^1_{(2)} & e^1_{(3)} \\ e^2_{(0)} & e^2_{(1)} & e^2_{(2)} & e^2_{(3)} \\ e^3_{(0)} & e^3_{(1)} & e^3_{(2)} & e^3_{(3)} \end{pmatrix}. \tag{12.24}$$

There are also several useful relations:

$$e_{(a)\mu} = g_{\mu\nu} e^\nu_{(a)}, \qquad \eta_{(a)(b)} = e^\mu_{(a)} e_{(b)\mu}, \qquad e_{(b)\mu} = \eta_{(a)(b)} \theta^{(a)}_\mu, \tag{12.25a}$$

$$\theta^{(b)}_\mu = \eta^{(a)(b)} e_{(a)\mu}, \qquad g_{\mu\nu} = e_{(a)\mu} \theta^{(a)}_\nu, \qquad \eta^{(a)(b)} = \theta^{(a)}_\mu \theta^{(b)}_\nu g^{\mu\nu}. \tag{12.25b}$$

Tetrad transformations

Instead of the above found local tetrad that was directly constructed from the spacetime metric, we can also use any other local tetrad

$$\hat{\mathbf{e}}_{(i)} = A_i^k \mathbf{e}_{(k)}, \tag{12.26}$$

where $\mathbf{A}$ is an element of the Lorentz group $O(1,3)$. Hence $\mathbf{A}^T \boldsymbol{\eta} \mathbf{A} = \boldsymbol{\eta}$ and $(\det \mathbf{A})^2 = 1$.

Lorentz-transformation in the direction $n^a = (\sin\chi\cos\xi, \sin\chi\sin\xi, \cos\xi)^T = n_a$ with $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$,

$$\Lambda^0_0 = \gamma, \qquad \Lambda^0_a = -\beta\gamma n_a, \qquad \Lambda^a_0 = -\beta\gamma n^a, \qquad \Lambda^a_b = (\gamma-1)n^a n_b + \delta^a_b. \tag{12.27}$$

Ricci rotation-, connection-, and structure coefficients

The Ricci rotation coefficients $\gamma_{(i)(j)(k)}$ with respect to the local tetrad $\mathbf{e}_{(i)}$ are defined by

$$\gamma_{(i)(j)(k)} := g_{\mu\lambda} e^\mu_{(i)} \nabla_{\mathbf{e}_{(k)}} e^\lambda_{(j)} = g_{\mu\lambda} e^\mu_{(i)} e^\nu_{(k)} \nabla_\nu e^\lambda_{(j)} = g_{\mu\lambda} e^\mu_{(i)} e^\nu_{(k)} \left(\partial_\nu e^\lambda_{(j)} + \Gamma^\lambda_{\nu\beta} e^\beta_{(j)} \right). \tag{12.28}$$

They are antisymmetric in the first two indices, $\gamma_{(i)(j)(k)} = -\gamma_{(j)(i)(k)}$, which follows from the definition, Eq. (12.28), and the relation

$$0 = \partial_\mu \eta_{(i)(j)} = \nabla_\mu \left(g_{\beta\nu} e^\beta_{(i)} e^\nu_{(j)} \right), \tag{12.29}$$

where $\nabla_\mu g_{\beta\nu} = 0$, compare . Otherwise, we have

$$?\gamma^{(i)}_{(j)(k)}? = \theta^{(i)}_\lambda e^\nu_{(k)} \nabla_\nu e^\lambda_{(j)} = -e^\lambda_{(j)} e^\nu_{(k)} \nabla_\nu \theta^{(i)}_\lambda. \tag{12.30}$$

The contraction of the first and the last index is given by

$$\gamma_{(j)} = ?\gamma^{(k)}_{(j)(k)}? = \eta^{(k)(i)} \gamma_{(i)(j)(k)} = -\gamma_{(0)(j)(0)} + \gamma_{(1)(j)(1)} + \gamma_{(2)(j)(2)} + \gamma_{(3)(j)(3)} = \nabla_\nu e^\nu_{(j)}. \tag{12.31}$$

The connection coefficients $\boldsymbol{\omega}^{(m)}_{(j)(n)}$ with respect to the local tetrad $\mathbf{e}_{(i)}$ are defined by

$$\boldsymbol{\omega}^{(m)}_{(j)(n)} := \theta^{(m)}_\mu \nabla_{\mathbf{e}_{(j)}} e^\mu_{(n)} = \theta^{(m)}_\mu e^\alpha_{(j)} \nabla_\alpha e^\mu_{(n)} = \theta^{(m)}_\mu e^\alpha_{(j)} \left(\partial_\alpha e^\mu_{(n)} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} e^\beta_{(n)} \right), \tag{12.32}$$

compare Nakahara. They are related to the Ricci rotation coefficients via

$$\gamma_{(i)(j)(k)} = \boldsymbol{\eta}_{(i)(m)} \boldsymbol{\omega}^{(m)}_{(k)(j)}. \tag{12.33}$$

Furthermore, the local tetrad has a non-vanishing Lie-bracket $[X,Y]^\nu = X^\mu \partial_\mu Y^\nu - Y^\mu \partial_\mu X^\nu$. Thus,

$$\left[\mathbf{e}_{(i)}, \mathbf{e}_{(j)} \right] = c^{(k)}_{(i)(j)} \mathbf{e}_{(k)} \qquad \text{or} \qquad c^{(k)}_{(i)(j)} = \boldsymbol{\theta}^{(k)} \left[\mathbf{e}_{(i)}, \mathbf{e}_{(j)} \right]. \tag{12.34}$$

The structure coefficients $c^{(k)}_{(i)(j)}$ are related to the connection coefficients or the Ricci rotation coefficients via

$$c^{(k)}_{(i)(j)} = \boldsymbol{\omega}^{(k)}_{(i)(j)} - \boldsymbol{\omega}^{(k)}_{(j)(i)} = \boldsymbol{\eta}^{(k)(m)} \left(\gamma_{(m)(j)(i)} - \gamma_{(m)(i)(j)} \right) = ?\gamma^{(k)}_{(j)(i)}? - ?\gamma^{(k)}_{(i)(j)}?. \tag{12.35}$$

Riemann-, Ricci-, and Weyl-tensor with respect to a local tetrad

The transformations between the coordinate representations of the Riemann-, Ricci-, and Weyl-tensors and their representation with respect to a local tetrad $\mathbf{e}_{(i)}$ are given by

$$R_{(a)(b)(c)(d)} = R_{\mu\nu\rho\sigma} e^\mu_{(a)} e^\nu_{(b)} e^\rho_{(c)} e^\sigma_{(d)}, \tag{12.36a}$$

$$R_{(a)(b)} = R_{\mu\nu} e^\mu_{(a)} e^\nu_{(b)}, \tag{12.36b}$$

$$\begin{aligned} C_{(a)(b)(c)(d)} &= C_{\mu\nu\rho\sigma} e^\mu_{(a)} e^\nu_{(b)} e^\rho_{(c)} e^\sigma_{(d)} \\ &= R_{(a)(b)(c)(d)} - \frac{1}{2} \left(\eta_{(a)[(c)} R_{(d)](b)} - \eta_{(b)[(c)} R_{(d)](a)} \right) + \frac{R}{3} \eta_{(a)[(c)} \eta_{(d)](b)}. \end{aligned} \tag{12.36c}$$

Null or timelike directions

A null or timelike direction $\boldsymbol{\upsilon} = \upsilon^{(i)}\mathbf{e}_{(i)}$ with respect to a local tetrad $\mathbf{e}_{(i)}$ can be written as

$$\boldsymbol{\upsilon} = \upsilon^{(0)}\mathbf{e}_{(0)} + \psi\left(\sin\chi\cos\xi\,\mathbf{e}_{(1)} + \sin\chi\sin\xi\,\mathbf{e}_{(2)} + \cos\chi\,\mathbf{e}_{(3)}\right) = \upsilon^{(0)}\mathbf{e}_{(0)} + \psi\mathbf{n}. \tag{12.37}$$

In the case of a null direction we have $\psi = 1$ and $\upsilon^{(0)} = \pm 1$. A timelike direction can be identified with an initial four-velocity $\mathbf{u} = c\gamma\,(\mathbf{e}_0 + \beta\mathbf{n})$, where

$$\mathbf{u}^2 = \langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle_{\mathbf{g}} = c^2\gamma^2\left\langle\mathbf{e}_{(0)} + \beta\mathbf{n}, \mathbf{e}_{(0)} + \beta\mathbf{n}\right\rangle = c^2\gamma^2\left(-1+\beta^2\right) = \mp c^2, \qquad \operatorname{sign}(\mathbf{g}) = \pm 2. \tag{12.38}$$

Thus, $\psi = c\beta\gamma$ and $\upsilon^0 = \pm c\gamma$. The sign of $\upsilon^{(0)}$ determines the time direction.

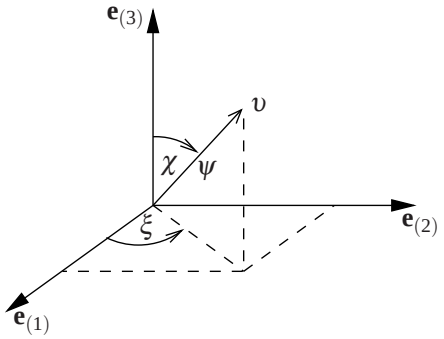


Figure 12.1: Null or timelike direction $\boldsymbol{\upsilon}$ with respect to the local tetrad $\mathbf{e}_{(i)}$.

The transformations between a local direction $\upsilon^{(i)}$ and its coordinate representation υ^{μ} read

$$\upsilon^{\mu} = \upsilon^{(i)}e^{\mu}_{(i)} \qquad \text{and} \qquad \upsilon^{(i)} = \theta^{(i)}_{\mu}\upsilon^{\mu}. \tag{12.39}$$

Local tetrad for diagonal metrics

If a spacetime is represented by a diagonal metric

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2, \tag{12.40}$$

the natural local tetrad reads

$$\mathbf{e}_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\partial_0, \quad \mathbf{e}_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\partial_1, \quad \mathbf{e}_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\partial_2, \quad \mathbf{e}_{(3)} = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\partial_3, \tag{12.41}$$

given that the metric coefficients are well behaved. Analogously, the dual tetrad reads

$$\boldsymbol{\theta}^{(0)} = \sqrt{g_{00}}\,dx^0, \quad \boldsymbol{\theta}^{(1)} = \sqrt{g_{11}}\,dx^1, \quad \boldsymbol{\theta}^{(2)} = \sqrt{g_{22}}\,dx^2, \quad \boldsymbol{\theta}^{(3)} = \sqrt{g_{33}}\,dx^3. \tag{12.42}$$

Local tetrad for stationary axisymmetric spacetimes

The line element of a stationary axisymmetric spacetime is given by

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\varphi}\,dt\,d\varphi + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\vartheta\vartheta}d\vartheta^2, \tag{12.43}$$

where the metric components are functions of r and ϑ only.
The local tetrad for an observer on a stationary circular orbit, $(r = \text{const}, \vartheta = \text{const})$, with four velocity $\mathbf{u} = c\Gamma\,(\partial_t + \zeta\partial_\varphi)$ can be defined as, compare Bini,

$$\mathbf{e}_{(0)} = \Gamma\,(\partial_t + \zeta\partial_\varphi)\,, \qquad \mathbf{e}_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}\partial_r, \qquad \mathbf{e}_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{g_{\vartheta\vartheta}}}\partial_\vartheta, \tag{12.44a}$$

$$\mathbf{e}_{(3)} = \Delta\Gamma\left[\pm(g_{t\varphi} + \zeta g_{\varphi\varphi})\partial_t \mp (g_{tt} + \zeta g_{t\varphi})\partial_\varphi\right], \tag{12.44b}$$

where

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{-\left(g_{tt} + 2\zeta g_{t\varphi} + \zeta^2 g_{\varphi\varphi}\right)}} \qquad \text{and} \qquad \Delta = \frac{1}{\sqrt{g_{t\varphi}^2 - g_{tt} g_{\varphi\varphi}}}. \tag{12.45}$$

The angular velocity ζ is limited due to $g_{tt} + 2\zeta g_{t\varphi} + \zeta^2 g_{\varphi\varphi} < 0$

$$\zeta_{\min} = \omega - \sqrt{\omega^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}} \qquad \text{and} \qquad \zeta_{\max} = \omega + \sqrt{\omega^2 - \frac{g_{tt}}{g_{\varphi\varphi}}} \tag{12.46}$$

with $\omega = -g_{t\varphi}/g_{\varphi\varphi}$.

For $\zeta = 0$, the observer is static with respect to spatial infinity. The locally non-rotating frame (LNRF) has angular velocity $\zeta = \omega$, see also MTW, exercise 33.3.

Static limit: $\zeta_{\min} = 0 \quad \Rightarrow \quad g_{tt} = 0$.

The transformation between the local direction $v^{(i)}$ and the coordinate direction v^μ reads

$$v^0 = \Gamma\left(v^{(0)} \pm v^{(3)}\Delta w_1\right), \qquad v^1 = \frac{v^{(1)}}{\sqrt{g_{rr}}}, \qquad v^2 = \frac{v^{(2)}}{\sqrt{g_{\vartheta\vartheta}}}, \qquad v^3 = \Gamma\left(v^{(0)}\zeta \mp v^{(3)}\Delta w_2\right), \tag{12.47}$$

with

$$w_1 = g_{t\varphi} + \zeta g_{\varphi\varphi} \qquad \text{and} \qquad w_2 = g_{tt} + \zeta g_{t\varphi}. \tag{12.48}$$

The back transformation reads

$$v^{(0)} = \frac{1}{\Gamma}\frac{v^0 w_2 + v^3 w_1}{\zeta w_1 + w_2}, \qquad v^{(1)} = \sqrt{g_{rr}}\, v^1, \quad v^{(2)} = \sqrt{g_{\vartheta\vartheta}}\, v^2, \qquad v^{(3)} = \pm\frac{1}{\Delta\Gamma}\frac{\zeta v^0 - v^3}{\zeta w_1 + w_2}. \tag{12.49}$$

Note, to obtain a right-handed local tetrad, $\det\left(e^\mu_{(i)}\right) > 0$, the upper sign has to be used.

Newman-Penrose tetrad and spin-coefficients

The Newman-Penrose tetrad consists of four null vectors $\mathbf{e}^\star_{(i)} = \{\mathbf{l}, \mathbf{n}, \mathbf{m}, \bar{\mathbf{m}}\}$, where $\mathbf{l}$ and $\mathbf{n}$ are real and $\mathbf{m}$ and $\bar{\mathbf{m}}$ are complex conjugates; see Penrose and Rindler or Chandrasekhar for a thorough discussion. The Newman-Penrose (NP) tetrad has to fulfill the orthonormality relation

$$\left\langle \mathbf{e}^\star_{(i)}, \mathbf{e}^\star_{(j)} \right\rangle = \boldsymbol{\eta}^\star_{(i)(j)} \qquad \text{with} \qquad \boldsymbol{\eta}^\star_{(i)(j)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{12.50}$$

A straightforward relation between the NP tetrad and the natural local tetrad, as discussed in Sec. 12.3.1, is given by

$$\mathbf{l} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}_{(0)} + \mathbf{e}_{(1)}\right), \quad \mathbf{n} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}_{(0)} - \mathbf{e}_{(1)}\right), \quad \mathbf{m} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}_{(2)} + i\mathbf{e}_{(3)}\right), \tag{12.51}$$

where the upper/lower sign has to be used for metrics with positive/negative signature. The Ricci rotation-coefficients of a NP tetrad are now called *spin coefficients* and are designated by specific symbols:

$$\kappa = \gamma_{(2)(1)(1)}, \qquad \rho = \gamma_{(2)(0)(3)}, \qquad \epsilon = \frac{1}{2}\left(\gamma_{(1)(0)(0)} + \gamma_{(2)(3)(0)}\right), \tag{12.52a}$$

$$\sigma = \gamma_{(2)(0)(2)}, \qquad \mu = \gamma_{(1)(3)(2)}, \qquad \gamma = \frac{1}{2}\left(\gamma_{(1)(0)(1)} + \gamma_{(2)(3)(1)}\right), \tag{12.52b}$$

$$\lambda = \gamma_{(1)(3)(3)}, \qquad \tau = \gamma_{(2)(0)(1)}, \qquad \alpha = \frac{1}{2}\left(\gamma_{(1)(0)(3)} + \gamma_{(2)(3)(3)}\right), \tag{12.52c}$$

$$\nu = \gamma_{(1)(3)(1)}, \qquad \pi = \gamma_{(1)(3)(0)}, \qquad \beta = \frac{1}{2}\left(\gamma_{(1)(0)(2)} + \gamma_{(2)(3)(2)}\right). \tag{12.52d}$$

Coordinate relations

Spherical and Cartesian coordinates

The well-known relation between the spherical coordinates (r, ϑ, φ) and the Cartesian coordinates (x, y, z), compare Fig. 12.2, are

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\vartheta, \tag{12.53}$$

and

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad \vartheta = \arctan 2(\sqrt{x^2+y^2}, z), \qquad \varphi = \arctan 2(y, x), \tag{12.54}$$

where $\arctan 2()$ ensures that $\varphi \in [0, 2\pi)$ and $\vartheta \in (0, \pi)$.

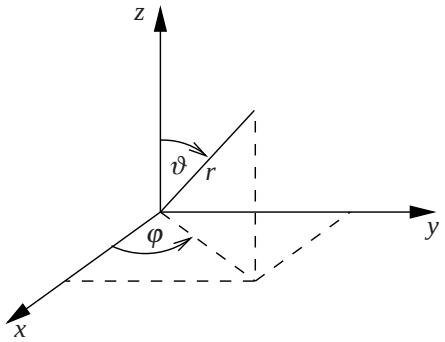


Figure 12.2: Relation between spherical and Cartesian coordinates.

The total differentials of the spherical coordinates read

$$dr = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{r}, \qquad d\vartheta = \frac{xz\,dx + yz\,dy - (x^2+y^2)dz}{r^2\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad d\varphi = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}, \tag{12.55}$$

whereas the coordinate derivatives read

$$\partial_r = \frac{\partial x}{\partial r}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial r}\partial_y + \frac{\partial z}{\partial r}\partial_z = \sin\vartheta\cos\varphi\,\partial_x + \sin\vartheta\sin\varphi\,\partial_y + \cos\vartheta\,\partial_z, \tag{12.56a}$$

$$\partial_\vartheta = \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial \vartheta}\partial_y + \frac{\partial z}{\partial \vartheta}\partial_z = r\cos\vartheta\cos\varphi\,\partial_x + r\cos\vartheta\sin\varphi\,\partial_y - r\sin\vartheta\,\partial_z, \tag{12.56b}$$

$$\partial_\varphi = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\partial_y + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\partial_z = -r\sin\vartheta\sin\varphi\,\partial_x + r\sin\vartheta\cos\varphi\,\partial_y, \tag{12.56c}$$

and

$$\partial_x = \frac{\partial r}{\partial x}\partial_r + \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\partial_\vartheta + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\partial_\varphi = \sin\vartheta\cos\varphi\,\partial_r + \frac{\cos\vartheta\cos\varphi}{r}\,\partial_\vartheta - \frac{\sin\varphi}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi, \tag{12.57a}$$

$$\partial_y = \frac{\partial r}{\partial y}\partial_r + \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\partial_\vartheta + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\partial_\varphi = \sin\vartheta\sin\varphi\,\partial_r + \frac{\cos\vartheta\sin\varphi}{r}\,\partial_\vartheta + \frac{\cos\varphi}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi, \tag{12.57b}$$

$$\partial_z = \frac{\partial r}{\partial z}\partial_r + \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\partial_\vartheta + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\partial_\varphi = \cos\vartheta\,\partial_r - \frac{\sin\vartheta}{r}\,\partial_\vartheta. \tag{12.57c}$$

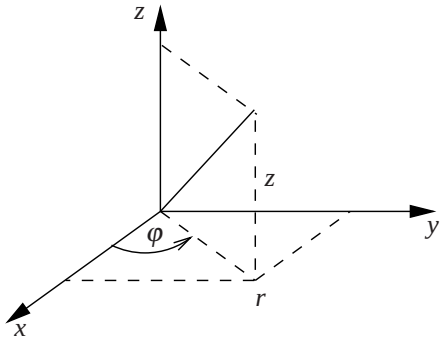


Figure 12.3: Relation between cylindrical and Cartesian coordinates.

Cylindrical and Cartesian coordinates

The relation between cylindrical coordinates (r, φ, z) and Cartesian coordinates (x, y, z) is given by

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \qquad \text{and} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \arctan 2(y, x), \tag{12.58}$$

where $\arctan 2()$ again ensures that the angle $\varphi \in [0, 2\pi)$.

The total differentials of the spherical coordinates are given by

$$dr = \frac{x\,dx + y\,dy}{r}, \qquad d\varphi = \frac{-y\,dx + x\,dy}{r^2}, \tag{12.59}$$

and

$$dx = \cos\varphi\,dr - r\sin\varphi\,d\varphi, \qquad dy = \sin\varphi\,dr + r\cos\varphi\,d\varphi. \tag{12.60}$$

The coordinate derivatives are

$$\partial_r = \frac{\partial x}{\partial r}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial r}\partial_y \ = \cos\varphi\,\partial_x + \sin\varphi\,\partial_y, \tag{12.61a}$$

$$\partial_\varphi = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\partial_y \ = -r\sin\varphi\,\partial_x + r\cos\varphi\,\partial_y m \tag{12.61b}$$

and

$$\partial_x = \frac{\partial r}{\partial x}\partial_r + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\partial_\varphi \ = \cos\varphi\,\partial_r - \frac{\sin\varphi}{r}\,\partial_y, \tag{12.62a}$$

$$\partial_y = \frac{\partial r}{\partial y}\partial_r + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\partial_\varphi \ = \sin\varphi\,\partial_r + \frac{\cos\varphi}{r}\,\partial_y. \tag{12.62b}$$

Embedding diagram

A two-dimensional hypersurface with line segment

$$d\sigma^2 = g_{rr}(r)dr^2 + g_{\varphi\varphi}(r)d\varphi^2 \tag{12.63}$$

can be embedded in a three-dimensional Euclidean space with cylindrical coordinates,

$$d\sigma^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2\right] d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2. \tag{12.64}$$

With $\rho(r)^2 = g_{\varphi\varphi}(r)$ and $dr = (dr/d\rho)d\rho$, we obtain for the embedding function $z = z(r)$,

$$\frac{dz}{dr} = \pm\sqrt{g_{rr} - \left(\frac{d\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}{dr}\right)^2}. \tag{12.65}$$

If $g_{\varphi\varphi}(r) = r^2$, then $d\sqrt{g_{\varphi\varphi}}/dr = 1$.

Equations of motion and transport equations

Geodesic equation

The geodesic equation reads

$$\frac{D^2x^\mu}{d\lambda^2} = \frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \tag{12.66}$$

with the affine parameter λ. For timelike geodesics, however, we replace the affine parameter by the proper time τ.

The geodesic equation (12.66) is a system of ordinary differential equations of second order. Hence, to solve these differential equations, we need an initial position $x^\mu(\lambda = 0)$ as well as an initial direction $(dx^\mu/d\lambda)(\lambda = 0)$. This initial direction has to fulfill the constraint equation

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = \kappa c^2, \tag{12.67}$$

where $\kappa = 0$ for lightlike and $\kappa = \mp 1$, $(\mathrm{sign}(\mathbf{g}) = \pm 2)$, for timelike geodesics.

The initial direction can also be determined by means of a local reference frame, compare sec. 12.3.1, that automatically fulfills the constraint equation (12.67). If we use the natural local tetrad as local reference frame, we have

$$\left.\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = v^\mu = v^{(i)}e^\mu_{(i)}. \tag{12.68}$$

Fermi-Walker transport

The Fermi-Walker transport, see e.g. Stephani, of a vector $\mathbf{X} = X^\mu\partial_\mu$ along the worldline $x^\mu(\tau)$ with four-velocity $\mathbf{u} = u^\mu(\tau)\partial_\mu$ is given by $\mathbb{F}_\mathbf{u}X^\mu = 0$ with

$$\mathbb{F}_\mathbf{u}X^\mu := \frac{dX^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}u^\rho X^\sigma + \frac{1}{c^2}\left(u^\sigma a^\mu - a^\sigma u^\mu\right)g_{\rho\sigma}X^\rho. \tag{12.69}$$

The four-acceleration follows from the four-velocity via

$$a^\mu = \frac{D^2x^\mu}{d\tau^2} = \frac{Du^\mu}{d\tau} = \frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}u^\rho u^\sigma. \tag{12.70}$$

Parallel transport

If the four-acceleration vanishes, the Fermi-Walker transport simplifies to the parallel transport $\mathbb{P}_\mathbf{u}X^\mu = 0$ with

$$\mathbb{P}_\mathbf{u}X^\mu := \frac{DX^\mu}{d\tau} = \frac{dX^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}u^\rho X^\sigma. \tag{12.71}$$

Euler-Lagrange formalism

A detailed discussion of the Euler-Lagrange formalism can be found, e.g., in Rindler. The Lagrangian $\mathcal{L}$ is defined as

$$\mathcal{L} := g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu, \qquad \mathcal{L} \stackrel{!}{=} \kappa c^2, \tag{12.72}$$

where x^μ are the coordinates of the metric, and the dot means differentiation with respect to the affine parameter λ. For timelike geodesics, $\kappa = \mp 1$ depending on the signature of the metric, $\mathrm{sign}(\mathbf{g}) = \pm 2$. For lightlike geodesics, $\kappa = 0$.

The Euler-Lagrange equations read

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0. \tag{12.73}$$

If $\mathcal{L}$ is independent of x^ρ, then x^ρ is a cyclic variable and

$$p_\rho = g_{\rho\nu}\dot{x}^\nu = \text{const.} \tag{12.74}$$

Note that $[\mathcal{L}]_{\text{U}} = \frac{\text{length}^2}{\text{time}^2}$ for timelike and $[\mathcal{L}]_{\text{U}} = 1$ for lightlike geodesics, see Sec. 19.2.2.

Hamilton formalism

The super-Hamiltonian $\mathcal{H}$ is defined as

$$\mathcal{H} := \frac{1}{2}g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu, \qquad \mathcal{H} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}\kappa c^2, \tag{12.75}$$

where $p_\mu = g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu$ are the canonical momenta, see e.g. MTW, para. 21.1. As in classical mechanics, we have

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\mu} \qquad \text{and} \qquad \frac{dp_\mu}{d\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\mu}. \tag{12.76}$$

Units

A first test in analyzing whether an equation is correct is to check the units. Newton's gravitational constant G, for example, has the following units

$$[G]_{\text{U}} = \frac{\text{length}^3}{\text{mass}\cdot\text{time}^2}, \tag{12.77}$$

where $[\cdot]_{\text{U}}$ indicates that we evaluate the units of the enclosed expression. Further examples are

$$[ds]_{\text{U}} = \text{length}, \qquad [\mathbf{u}]_{\text{U}} = \frac{\text{length}}{\text{time}}, \qquad [R^{\text{Schwarzschild}}_{trtr}]_{\text{U}} = \frac{1}{\text{time}^2}, \qquad \left[R^{\text{Schwarzschild}}_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi}\right]_{\text{U}} = \text{length}^2. \tag{12.78}$$

Tools

Maple/GRTensorII

The Christoffel symbols, the Riemann- and Ricci-tensors as well as the Ricci and Kretschmann scalars in this catalogue were determined by means of the software Maple together with the GRTensorII package by Musgrave, Pollney, and Lake.[2]

A typical worksheet to enter a new metric may look like this:

```
> grtw();
> makeg(Schwarzschild);

Makeg 2.0: GRTensor metric/basis entry utility
To quit makeg, type 'exit' at any prompt.
Do you wish to enter a 1) metric [g(dn,dn)],
   2) line element [ds],
   3) non-holonomic basis [e(1)...e(n)], or
   4) NP tetrad [l,n,m,mbar]?
> 2:

Enter coordinates as a LIST (eg. [t,r,theta,phi]):
```

[2]The commercial software Maple can be found here: http://www.maplesoft.com. The GRTensorII-package is free: http://grtensor.phy.queensu.ca.

```
> [t,r,theta,phi]:

Enter the line element using d[coord] to indicate differentials.
(for example, r^2*(d[theta]^2 + sin(theta)^2*d[phi]^2)
[Type 'exit' to quit makeg]
ds^2 =

If there are any complex valued coordinates, constants or functions
for this spacetime, please enter them as a SET (eg. { z, psi }).

Complex quantities [default={}]:
> {}:

You may choose to 0) Use the metric WITHOUT saving it,
 1) Save the metric as it is,
 2) Correct an element of the metric,
 3) Re-enter the metric,
 4) Add/change constraint equations,
 5) Add a text description, or
 6) Abandon this metric and return to Maple.
> 0:
```

The worksheets for some of the metrics in this catalogue can be found on the authors homepage. To determine the objects that are defined with respect to a local tetrad, the metric must be given as non-holonomic basis.
The various basic objects can be determined via

Christoffel symbols $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$	`grcalc(Chr2);`	`grcalc(Chr(dn,dn,up));`
partial derivatives $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho,\sigma}$		`grcalc(Chr(dn,dn,up,pdn));`
Riemann tensor $R_{\mu\nu\rho\sigma}$	`grcalc(Riemman);`	`grcalc(R(dn,dn,dn,dn));`
Ricci tensor $R_{\mu\nu}$	`grcalc(Ricci);`	`grcalc(R(dn,dn));`
Ricci scalar $\mathcal{R}$	`grcalc(Ricciscalar);`	
Kretschmann scalar $\mathcal{K}$	`grcalc(RiemSq);`	

Mathematica

The calculation of the Christoffel symbols, the Riemann- or Ricci-tensor within *Mathematica* could read like this:

```
Clearing the values of symbols:
In[1]:= Clear[coord, metric, inversemetric, affine,
  t, r, Theta, Phi]

Setting the dimension:
In[2]:= n:= 4

Defining a list of coordinates:
In[3]:= coord:= {t, r, Theta, Phi}

Defining the metric:
In[4]:= metric:= {{-(1 - rs/r) c^2, 0, 0, 0},
   {0, 1/(1 - rs/r), 0, 0},
   {0, 0, r^2, 0},
   {0, 0, 0, r ^2 Sin[Theta]^2}}
In[5]:= metric // MatrixForm

Calculating the inverse metric:
In[6]:= inversemetric:= Simplify[Inverse[metric]]

In[7]:= inversemetric // MatrixForm

Calculating the Christoffel symbols of the second kind:
In[8]:= affine:= affine = Simplify[
Table[(1/2) Sum[inversemetric[[Mu, Rho]] (
D[metric[[Rho, Nu]], coord[[Lambda]]] +
D[metric[[Rho, Lambda]], coord[[Nu]]] -
D[metric[[Nu, Lambda]], coord[[Rho]]]),
{Rho, 1, n}], {Nu, 1, n}, {Lambda, 1, n}, {Mu, 1, n}]]

Displaying the Christoffel symbols of the second kind:
In[9]:= listaffine:=
```

```
Table[If[UnsameQ[affine[[Nu, Lambda, Mu]], 0],
{Style[ Subsuperscript[\[CapitalGamma],
Row[{coord[[Nu]], coord[[Lambda]]}], coord[[Mu]]], 18],
"=",
Style[affine[[Nu, Lambda, Mu]], 14]}],
{Lambda, 1, n}, {Nu, 1, Lambda}, {Mu, 1, n}]

In[10]:= TableForm[Partition[DeleteCases[Flatten[listaffine],
        Null], 3],
   TableSpacing -> {1, 2}]

Defining the Riemann tensor:
In[11]:= riemann:= riemann =
Table[D[affine[[Nu, Sigma, Mu]], coord[[Rho]]] -
D[affine[[Nu, Rho, Mu]], coord[[Sigma]]] +
Sum[affine[[Rho, Lambda, Mu]]
affine[[Nu, Sigma, Lambda]] -
affine[[Sigma, Lambda, Mu]]
affine[[Nu, Rho, Lambda]],
{Lambda, 1, n}],
{Mu, 1, n}, {Nu, 1, n}, {Rho, 1, n}, {Sigma, 1, n}]

Defining the Riemann tensor with lower indices:
In[12]:= riemannDn:= riemannDn =
Table[Simplify[
Sum[metric[[Mu, Kappa]] riemann[[Kappa, Nu, Rho, Sigma]],
{Kappa, 1, n}]],
{Mu, 1, n}, {Nu, 1, n}, {Rho, 1, n}, {Sigma, 1, n}]

In[13]:= listRiemann:=
Table[If[UnsameQ[riemannDn[[Mu, Nu, Rho, Sigma]], 0],
{Style[Subscript[R, Row[{coord[[Mu]], coord[[Nu]], coord[[Rho]],
coord[[Sigma]]}]], 16], "=",
riemannDn[[Mu, Nu, Rho, Sigma]]}],
{Nu, 1, n}, {Mu, 1, Nu}, {Sigma, 1, n}, {Rho, 1, Sigma}]

In[14]:= TableForm[Partition[DeleteCases[Flatten[listRiemann],
        Null], 3],
  TableSpacing -> {2, 2}]

Defining the Ricci tensor:
In[15]:= ricci:= ricci =
Table[Simplify[
Sum[riemann[[Rho, Mu, Rho, Nu]], {Rho, 1, n}]],
{Mu, 1, n}, {Nu, 1, n}]

In[16]:= listRicci:=
Table[If[UnsameQ[ricci[[Mu, Nu]], 0],
{Style[Subscript[R, Row[{coord[[Mu]], coord[[Nu]]}]], 16],
"=",
Style[ricci[[Mu, Nu]], 16]}], {Nu, 1, 4}, {Mu, 1, Nu}]

In[17]:= TableForm[Partition[DeleteCases[Flatten[listRicci],
        Null], 3],
  TableSpacing -> {1, 2}]

Defining the Ricci scalar:
In[18]:= ricciscalar:= ricciscalar =
Simplify[Sum[
Sum[inversemetric[[Mu, Nu]] ricci[[Nu, Mu]],
{Mu, 1, n}], {Nu, 1, n}]]

Defining the Kretschmann scalar:
In[19]:= riemannUp:= riemannUp =
Table[Simplify[
Sum[inversemetric[[Nu, Kappa]]
riemann[[Mu, Kappa, Rho, Sigma]], {Kappa, 1, n}]],
{Mu, 1, n}, {Nu, 1, n}, {Rho, 1, n}, {Sigma, 1, n}]

In[20]:= kretschmann:= kretschmann =
Simplify[Sum[ Sum[Sum[Sum[
riemannUp[[Mu, Nu, Rho, Sigma]]
riemannUp[[Rho, Sigma, Mu, Nu]],
{Mu, 1, n}], {Nu, 1, n}], {Rho, 1, n}], {Sigma, 1, n}]]
```

Some example notebooks can be found on the authors homepage.

Maxima

Instead of using commercial software like *Maple* or *Mathematica*, Maxima also offers a tensor package that helps to calculate the Christoffel symbols etc. The above example for the Schwarzschild metric can be written as a maxima worksheet as follows:

```
/* load ctensor package */
load(ctensor);

/* define coordinates to use */
ct_coords:[t,r,theta,phi];

/* start with the identity metric */
lg:ident(4);
lg[1,1]:c^2*(1-rs/r);
lg[2,2]:-1/(1-rs/r);
lg[3,3]:-r^2;
lg[4,4]:-r^2*sin(theta)^2;
cmetric();

/* calculate the christoffel symbols of the second kind */
christof(mcs);

/* calculate the riemann tensor */
lriemann(mcs);

/* calculate the ricci tensor */
ricci(mcs);

/* calculate the ricci scalar */
scurvature();

/* calculate the Kretschmann scalar */
uriemann(mcs);
rinvariant();
ratsimp(%);
```

As you may have noticed, the Schwarzschild metric must be given with negative signature.

12.3.2 Minkowski

Cartesian coordinates

The Minkowski metric in Cartesian coordinates $\{t, x, y, z \in \mathbb{R}\}$ reads

$$\boxed{ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.} \tag{12.79}$$

All Christoffel symbols as well as the Riemann- and Ricci-tensor vanish identically. The natural local tetrad is trivial,

$$\mathbf{e}_{(t)} = \frac{1}{c}\partial_t, \qquad \mathbf{e}_{(x)} = \partial_x, \qquad \mathbf{e}_{(y)} = \partial_y, \qquad \mathbf{e}_{(z)} = \partial_z, \tag{12.80}$$

with dual

$$\boldsymbol{\theta}^{(t)} = c\,dt, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(x)} = dx, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(y)} = dy, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(z)} = dz. \tag{12.81}$$

Cylindrical coordinates

The Minkowski metric in cylindrical coordinates $\{t \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^+, \varphi \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}\}$,

$$\boxed{ds^2 = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2d\varphi^2 + dz^2,} \tag{12.82}$$

has the natural local tetrad

$$\mathbf{e}_{(t)} = \frac{1}{c}\partial_t, \qquad \mathbf{e}_{(r)} = \partial_r, \qquad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{1}{r}\partial_\varphi, \qquad \mathbf{e}_{(z)} = \partial_z. \tag{12.83}$$

Christoffel symbols:

$$\Gamma^{r}_{\varphi\varphi} = -r, \qquad \Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \frac{1}{r}. \tag{12.84}$$

Partial derivatives

$$\Gamma^{\varphi}_{r\varphi,r} = -\frac{1}{r^2}, \qquad \Gamma^{r}_{\varphi\varphi,r} = -1. \tag{12.85}$$

Ricci rotation coefficients:

$$\gamma_{(\varphi)(r)(\varphi)} = \frac{1}{r} \qquad \text{and} \qquad \gamma_{(r)} = \frac{1}{r}. \tag{12.86}$$

Spherical coordinates

In spherical coordinates $\{t \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^{+}, \vartheta \in (0,\pi), \varphi \in [0, 2\pi)\}$, the Minkowski metric reads

$$\boxed{ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right).} \tag{12.87}$$

Christoffel symbols:

$$\Gamma^{r}_{\vartheta\vartheta} = -r, \qquad \Gamma^{r}_{\varphi\varphi} = -r\sin^2\vartheta, \qquad \Gamma^{\vartheta}_{r\vartheta} = \frac{1}{r}, \tag{12.88a}$$

$$\Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta, \qquad \Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi} = \cot\vartheta. \tag{12.88b}$$

Partial derivatives

$$\Gamma^{\vartheta}_{r\vartheta,r} = -\frac{1}{r^2}, \qquad \Gamma^{\varphi}_{r\varphi,r} = -\frac{1}{r^2}, \qquad \Gamma^{r}_{\vartheta\vartheta,r} = -1, \tag{12.89a}$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi,\vartheta} = -\frac{1}{\sin^2\vartheta}, \qquad \Gamma^{r}_{\varphi\varphi,r} = -\sin^2\vartheta, \qquad \Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi,\vartheta} = -\cos(2\vartheta), \tag{12.89b}$$

$$\Gamma^{r}_{\varphi\varphi,\vartheta} = -\sin(2\vartheta). \tag{12.89c}$$

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(t)} = \frac{1}{c}\partial_t, \qquad \mathbf{e}_{(r)} = \partial_r, \qquad \mathbf{e}_{(\vartheta)} = \frac{1}{r}\partial_\vartheta, \qquad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.90}$$

Ricci rotation coefficients:

$$\gamma_{(\vartheta)(r)(\vartheta)} = \gamma_{(\varphi)(r)(\varphi)} = \frac{1}{r}, \qquad \gamma_{(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = \frac{\cot\vartheta}{r}. \tag{12.91}$$

The contractions of the Ricci rotation coefficients read

$$\gamma_{(r)} = \frac{2}{r}, \qquad \gamma_{(\vartheta)} = \frac{\cot\vartheta}{r}. \tag{12.92}$$

Conform-compactified coordinates

The Minkowski metric in conform-compactified coordinates $\{\psi \in [-\pi,\pi], \xi \in (0,\pi), \vartheta \in (0,\pi), \varphi \in [0,2\pi)\}$ reads

$$\boxed{ds^2 = -d\psi^2 + d\xi^2 + \sin^2\xi\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right).} \tag{12.93}$$

This form follows from the spherical Minkowski metric (12.87) by means of the coordinate transformation

$$ct + r = \tan\frac{\psi+\xi}{2}, \qquad ct - r = \tan\frac{\psi-\xi}{2}, \tag{12.94}$$

resulting in the metric

$$d\tilde{s}^2 = \frac{-d\psi^2 + d\xi^2}{4\cos^2\frac{\psi+\xi}{2}\cos^2\frac{\psi-\xi}{2}} + \frac{\sin^2\xi}{4\cos^2\frac{\psi+\xi}{2}\cos^2\frac{\psi-\xi}{2}}\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right), \tag{12.95}$$

and by the conformal transformation $ds^2 = \Omega^2 d\tilde{s}^2$ with $\Omega^2 = 4\cos^2\frac{\psi+\xi}{2}\cos^2\frac{\psi-\xi}{2}$.

Christoffel symbols:

$$\Gamma^{\vartheta}_{\xi\vartheta} = \cot\xi, \qquad \Gamma^{\varphi}_{\xi\varphi} = \cot\xi, \qquad \Gamma^{\xi}_{\vartheta\vartheta} = -\sin\xi\cos\xi, \tag{12.96a}$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi} = \cot\vartheta, \qquad \Gamma^{\xi}_{\varphi\varphi} = -\sin\xi\cos\xi\sin^2\vartheta, \qquad \Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta. \tag{12.96b}$$

Partial derivatives

$$\Gamma^{\vartheta}_{\xi\vartheta,\xi} = -\frac{1}{\sin^2\xi}, \qquad \Gamma^{\varphi}_{\xi\varphi,\xi} = -\frac{1}{\sin^2\xi}, \qquad \Gamma^{\xi}_{\vartheta\vartheta,\xi} = -\cos(2\xi), \tag{12.97a}$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi,\vartheta} = -\frac{1}{\sin^2\vartheta}, \qquad \Gamma^{\xi}_{\varphi\varphi,\xi} = -\cos(2\xi)\sin^2\vartheta, \quad \Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi,\vartheta} = -\cos(2\vartheta), \tag{12.97b}$$

$$\Gamma^{\xi}_{\varphi\varphi,\vartheta} = -\frac{1}{2}\sin(2\xi)\sin(2\vartheta). \tag{12.97c}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{\xi\vartheta\xi\vartheta} = \sin^2\xi, \qquad R_{\xi\varphi\xi\varphi} = \sin^2\xi\sin^2\vartheta, \qquad R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = \sin^4\xi\sin^2\vartheta. \tag{12.98}$$

Ricci-Tensor:

$$R_{\xi\xi} = 2, \qquad R_{\vartheta\vartheta} = 2\sin^2\xi, \qquad R_{\varphi\varphi} = 2\sin^2\xi\sin^2\vartheta. \tag{12.99}$$

Ricci and Kretschmann scalars:

$$\mathcal{R} = 6, \qquad \mathcal{K} = 12. \tag{12.100}$$

The Weyl tensor vanishs identically.

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(\psi)} = \partial_\psi, \qquad \mathbf{e}_{(\xi)} = \partial_\xi, \qquad \mathbf{e}_{(\vartheta)} = \frac{1}{\sin\xi}\partial_\vartheta, \qquad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{1}{\sin\xi\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.101}$$

Ricci rotation coefficients:

$$\gamma_{(\vartheta)(\xi)(\vartheta)} = \gamma_{(\varphi)(\xi)(\varphi)} = \cot\xi, \qquad \gamma_{(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = \frac{\cot\vartheta}{\sin\xi}. \tag{12.102}$$

The contractions of the Ricci rotation coefficients read

$$\gamma_{(\xi)} = 2\cot\xi, \qquad \gamma_{(\vartheta)} = \frac{\cot\vartheta}{\sin\xi}. \tag{12.103}$$

Riemann-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(\xi)(\vartheta)(\xi)(\vartheta)} = R_{(\xi)(\varphi)(\xi)(\varphi)} = R_{(\vartheta)(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = 1. \tag{12.104}$$

Ricci-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(\xi)(\xi)} = R_{(\vartheta)(\vartheta)} = R_{(\varphi)(\varphi)} = 2. \tag{12.105}$$

Rotating coordinates

The transformation $d\varphi \mapsto d\varphi + \omega\, dt$ brings the Minkowski metric (12.82) into the rotating form with coordinates $\{t \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^+, \varphi \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}\}$,

$$\boxed{ds^2 = -\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)\left[c\,dt - \Omega(r) d\varphi\right]^2 + dr^2 + \frac{r^2}{1 - \omega^2 r^2/c^2} d\varphi^2 + dz^2} \tag{12.106}$$

with $\Omega(r) = (r^2\omega/c)/(1 - \omega^2 r^2/c^2)$.

Metric-Tensor:

$$g_{tt} = -c^2 + \omega^2 r^2, \qquad g_{t\varphi} = \omega r^2, \qquad g_{rr} = g_{zz} = 1, \qquad g_{\varphi\varphi} = r^2. \tag{12.107}$$

Christoffel symbols:

$$\Gamma^r_{tt} = -\omega^2 r, \qquad \Gamma^\varphi_{tr} = \frac{\omega}{r}, \qquad \Gamma^r_{t\varphi} = -\omega r, \qquad \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r. \tag{12.108}$$

Partial derivatives

$$\Gamma^r_{tt,r} = -\omega^2, \quad \Gamma^\varphi_{tr,r} = -\frac{\omega}{r^2}, \quad \Gamma^r_{t\varphi,r} = -\omega, \quad \Gamma^\varphi_{r\varphi,r} = -\frac{1}{r^2}, \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi,r} = -1. \tag{12.109}$$

The local tetrad of the comoving observer is

$$\mathbf{e}_{(t)} = \frac{1}{c}\partial_t - \frac{\omega}{c}\partial_\varphi, \qquad \mathbf{e}_{(r)} = \partial_r, \qquad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{1}{r}\partial_\varphi, \qquad \mathbf{e}_{(z)} = \partial_z, \tag{12.110}$$

whereas the static observer has the local tetrad

$$\mathbf{e}_{(t)} = \frac{1}{c\sqrt{1 - \omega^2 r^2/c^2}}\partial_t, \qquad \mathbf{e}_{(r)} = \partial_r, \qquad \mathbf{e}_{(z)} = \partial_z, \tag{12.111a}$$

$$\mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{\omega r}{c^2\sqrt{1 - \omega^2 r^2/c^2}}\partial_t + \frac{\sqrt{1 - \omega^2 r^2/c^2}}{r}\partial_\varphi. \tag{12.111b}$$

Rindler coordinates

The worldline of an observer in the Minkowski spacetime who moves with constant proper acceleration α along the x direction reads

$$x = \frac{c^2}{\alpha}\cosh\frac{\alpha t'}{c}, \qquad ct = \frac{c^2}{\alpha}\sinh\frac{\alpha t'}{c}, \tag{12.112}$$

where t' is the observer's proper time. The observer starts at $x = 1$ with zero velocity. However, such an observer could also be described with Rindler coordinates. With the coordinate transformation

$$(ct, x) \mapsto (\tau, \rho): \qquad ct = \frac{1}{\rho}\sinh\tau, \qquad x = \frac{1}{\rho}\cosh\tau, \tag{12.113}$$

where $\rho = \alpha/c^2$, the Rindler metric reads

$$\boxed{ds^2 = -\frac{1}{\rho^2}d\tau^2 + \frac{1}{\rho^4}d\rho^2 + dy^2 + dz^2.} \tag{12.114}$$

Christoffel symbols:

$$\Gamma^{\rho}_{\tau\tau} = -\rho, \qquad \Gamma^{\tau}_{\tau\rho} = -\frac{1}{\rho}, \qquad \Gamma^{\rho}_{\rho\rho} = -\frac{2}{\rho}. \tag{12.115}$$

Partial derivatives

$$\Gamma^{\rho}_{\tau\tau,\rho} = -1, \qquad \Gamma^{\tau}_{\tau\rho,\rho} = \frac{1}{\rho^2}, \qquad \Gamma^{\rho}_{\rho\rho,\rho} = \frac{2}{\rho^2}. \tag{12.116}$$

The Riemann and Ricci tensors as well as the Ricci and Kretschmann scalar vanish identically.

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(\tau)} = \rho\partial_\tau, \qquad \mathbf{e}_{(\rho)} = \rho^2\partial_\rho, \qquad \mathbf{e}_{(y)} = \partial_y, \qquad \mathbf{e}_{(z)} = \partial_z. \tag{12.117}$$

Ricci rotation coefficients:

$$\gamma_{(\tau)(\rho)(\tau)} = \rho, \qquad \text{and} \qquad \gamma_{(\rho)} = -\rho. \tag{12.118}$$

12.3.3 Schwarzschild spacetime

Schwarzschild coordinates

In Schwarzschild coordinates $\{t \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^+, \vartheta \in (0,\pi), \varphi \in [0, 2\pi)\}$, the Schwarzschild metric reads

$$\boxed{ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - r_s/r} dr^2 + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right),} \tag{12.119}$$

where $r_s = 2GM/c^2$ is the Schwarzschild radius, G is Newton's constant, c is the speed of light, and M is the mass of the black hole. The critical point $r = 0$ is a real curvature singularity while the event horizon, $r = r_s$, is only a coordinate singularity, see e.g. the Kretschmann scalar.

Christoffel symbols:

$$\Gamma^{r}_{tt} = \frac{c^2 r_s(r - r_s)}{2r^3}, \qquad \Gamma^{t}_{tr} = \frac{r_s}{2r(r - r_s)}, \qquad \Gamma^{r}_{rr} = -\frac{r_s}{2r(r - r_s)}, \tag{12.120a}$$

$$\Gamma^{\vartheta}_{r\vartheta} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^{r}_{\vartheta\vartheta} = -(r - r_s), \tag{12.120b}$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi} = \cot\vartheta, \qquad \Gamma^{r}_{\varphi\varphi} = -(r - r_s)\sin^2\vartheta, \qquad \Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta. \tag{12.120c}$$

Partial derivatives

$$\Gamma^{r}_{tt,r} = -\frac{(2r - 3r_s)c^2 r_s}{2r^4}, \qquad \Gamma^{t}_{tr,r} = -\frac{(2r - r_s)r_s}{2r^2(r - r_s)^2}, \qquad \Gamma^{r}_{rr,r} = \frac{(2r - r_s)r_s}{2r^2(r - r_s)^2}, \tag{12.121a}$$

$$\Gamma^{\vartheta}_{r\vartheta,r} = -\frac{1}{r^2}, \qquad \Gamma^{\varphi}_{r\varphi,r} = -\frac{1}{r^2}, \qquad \Gamma^{r}_{\vartheta\vartheta,r} = -1, \tag{12.121b}$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi,\vartheta} = -\frac{1}{\sin^2\vartheta}, \qquad \Gamma^{r}_{\varphi\varphi,r} = -\sin^2\vartheta, \qquad \Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi,\vartheta} = -\cos(2\vartheta), \tag{12.121c}$$

$$\Gamma^{r}_{\varphi\varphi,\vartheta} = -(r - r_s)\sin(2\vartheta). \tag{12.121d}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{trtr} = -\frac{c^2 r_s}{r^3}, \qquad R_{t\vartheta t\vartheta} = \frac{1}{2}\frac{c^2\,(r-r_s)\,r_s}{r^2}, \qquad R_{t\varphi t\varphi} = \frac{1}{2}\frac{c^2\,(r-r_s)\,r_s\sin^2\vartheta}{r^2}, \tag{12.122a}$$

$$R_{r\vartheta r\vartheta} = -\frac{1}{2}\frac{r_s}{r-r_s}, \qquad R_{r\varphi r\varphi} = -\frac{1}{2}\frac{r_s\sin^2\vartheta}{r-r_s}, \qquad R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = r r_s \sin^2\vartheta. \tag{12.122b}$$

As aspected, the Ricci tensor as well as the Ricci scalar vanish identically because the Schwarzschild spacetime is a vacuum solution of the field equations. Hence, the Weyl tensor is identical to the Riemann tensor. The Kretschmann scalar reads

$$\mathcal{K} = 12\frac{r_s^2}{r^6}. \tag{12.123}$$

Here, it becomes clear that at $r = r_s$ there is no real singularity.

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(t)} = \frac{1}{c\sqrt{1-r_s/r}}\partial_t, \qquad \mathbf{e}_{(r)} = \sqrt{1-\frac{r_s}{r}}\partial_r, \qquad \mathbf{e}_{(\vartheta)} = \frac{1}{r}\partial_\vartheta, \qquad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.124}$$

Dual tetrad:

$$\boldsymbol{\theta}^{(t)} = c\sqrt{1-\frac{r_s}{r}}\,dt, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(r)} = \frac{dr}{\sqrt{1-r_s/r}}, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\vartheta)} = r\,d\vartheta, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\varphi)} = r\sin\vartheta\,d\varphi. \tag{12.125}$$

Ricci rotation coefficients:

$$\gamma_{(r)(t)(t)} = \frac{r_s}{2r^2\sqrt{1-r_s/r}}, \quad \gamma_{(\vartheta)(r)(\vartheta)} = \gamma_{(\varphi)(r)(\varphi)} = \frac{1}{r}\sqrt{1-\frac{r_s}{r}}, \quad \gamma_{(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = \frac{\cot\vartheta}{r}. \tag{12.126}$$

The contractions of the Ricci rotation coefficients read

$$\gamma_{(r)} = \frac{4r-3r_s}{2r^2\sqrt{1-r_s/r}}, \qquad \gamma_{(\vartheta)} = \frac{\cot\vartheta}{r}. \tag{12.127}$$

Structure coefficients:

$$c^{(t)}_{(t)(r)} = \frac{r_s}{2r^2\sqrt{1-r_s/r}}, \qquad c^{(\vartheta)}_{(r)(\vartheta)} = c^{(\varphi)}_{(r)(\varphi)} = -\frac{1}{r}\sqrt{1-\frac{r_s}{r}}, \qquad c^{(\varphi)}_{(\vartheta)(\varphi)} = \frac{\cot\vartheta}{r}. \tag{12.128}$$

Riemann-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(t)(r)(t)(r)} = -R_{(\vartheta)(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = -\frac{r_s}{r^3}, \tag{12.129a}$$

$$R_{(t)(\vartheta)(t)(\vartheta)} = R_{(t)(\varphi)(t)(\varphi)} = -R_{(r)(\vartheta)(r)(\vartheta)} = -R_{(r)(\varphi)(r)(\varphi)} = \frac{r_s}{2r^3}. \tag{12.129b}$$

The covariant derivatives of the Riemann tensor read

$$R_{(t)(r)(t)(r);(r)} = -R_{(\vartheta)(\varphi)(\vartheta)(\varphi);(r)} = \frac{3r_s}{r^5}\sqrt{r(r-r_s)}, \tag{12.130a}$$

$$\begin{aligned} R_{(t)(r)(r)(\vartheta);(\vartheta)} &= R_{(t)(r)(t)(\varphi);(\varphi)} = R_{(t)(\vartheta)(t)(\vartheta);(r)} = R_{(t)(\varphi)(t)(\varphi);(r)} = \\ &= R_{(r)(\varphi)(\vartheta)(\varphi);(\vartheta)} = -\frac{3r_s}{2r^5}\sqrt{r(r-r_s)}, \end{aligned} \tag{12.130b}$$

$$R_{(r)(\vartheta)(r)(\vartheta);(r)} = R_{(r)(\vartheta)(\vartheta)(\varphi);(\varphi)} = R_{(r)(\varphi)(r)(\varphi);(r)} = \frac{3r_s}{2r^5}\sqrt{r(r-r_s)}. \tag{12.130c}$$

Newman-Penrose tetrad:

$$\mathbf{l} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}_{(t)} + \mathbf{e}_{(r)}\right), \qquad \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}_{(t)} - \mathbf{e}_{(r)}\right), \qquad \mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}_{(\vartheta)} + i\mathbf{e}_{(\varphi)}\right). \tag{12.131}$$

Non-vanishing spin coefficients:

$$\rho = \mu = -\frac{1}{\sqrt{2}r}\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}, \quad \gamma = \epsilon = \frac{r_s}{4\sqrt{2}r^2\sqrt{1 - r_s/r}}, \quad \alpha = -\beta = -\frac{\cot\vartheta}{2\sqrt{2}r}. \tag{12.132}$$

Embedding:

The embedding function reads

$$z = 2\sqrt{r_s}\sqrt{r - r_s}. \tag{12.133}$$

Euler-Lagrange:

The Euler-Lagrangian formalism, Sec. 12.3.1, for geodesics in the $\vartheta = \pi/2$ hyperplane yields

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\frac{k^2}{c^2}, \qquad V_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\left(\frac{h^2}{r^2} - \kappa c^2\right) \tag{12.134}$$

with the constants of motion $k = (1 - r_s/r)c^2\dot{t}$, $h = r^2\dot{\varphi}$, and κ as in Eq. (12.67). For timelike geodesics, the effective potential has the extremal points

$$r_\pm = \frac{h^2 \pm h\sqrt{h^2 - 3c^2r_s^2}}{c^2 r_s}, \tag{12.135}$$

where r_+ is a maximum and r_- is a minimum. The innermost timelike circular geodesic follows from $h^2 = 3c^2r_s^2$ and reads $r_{\text{itcg}} = 3r_s$. Null geodesics, however, have only a maximum at $r_{\text{po}} = \frac{3}{2}r_s$. The corresponding circular orbit is called photon orbit.

Further reading:

Schwarzschild; , MTW, Rindler, Wald, Chandrasekhar,
Müller; .

Schwarzschild in pseudo-Cartesian coordinates

The Schwarzschild spacetime in pseudo-Cartesian coordinates (t, x, y, z) reads

$$\begin{aligned} ds^2 \;=& -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)c^2dt^2 + \left(\frac{x^2}{1 - r_s/r} + y^2 + z^2\right)\frac{dx^2}{r^2} + \left(x^2 + \frac{y^2}{1 - r_s/r} + z^2\right)\frac{dy^2}{r^2} \\ &+ \left(x^2 + y^2 + \frac{z^2}{1 - r_s/r}\right)\frac{dz^2}{r^2} + \frac{2r_s}{r^2(r - r_s)}\left(xy\,dxdy + xz\,dxdz + yz\,dydz\right), \end{aligned} \tag{12.136}$$

where $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. For a natural local tetrad that is adapted to the x-axis, we make the following ansatz:

$$\mathbf{e}_{(0)} = \frac{1}{c\sqrt{1 - r_s/r}}\partial_t, \qquad \mathbf{e}_{(1)} = A\partial_x, \qquad \mathbf{e}_{(2)} = B\partial_x + C\partial_y, \qquad \mathbf{e}_{(3)} = D\partial_x + E\partial_y + F\partial_z. \tag{12.137}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{g_{xx}}}, \qquad B = \frac{-g_{xy}}{g_{xx}\sqrt{-g_{xy}^2/g_{xx} + g_{yy}}}, \qquad C = \frac{1}{\sqrt{-g_{xy}^2/g_{xx} + g_{yy}}}, \tag{12.138a}$$

$$D = \frac{g_{xy}g_{yz} - g_{xz}g_{yy}}{\sqrt{NW}}, \qquad E = \frac{g_{xz}g_{xy} - g_{xx}g_{yz}}{\sqrt{NW}}, \qquad F = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{W}}, \tag{12.138b}$$

with

$$N = g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2, \tag{12.139a}$$

$$W = g_{xx}g_{yy}g_{zz} - g_{xz}^2 g_{yy} + 2g_{xz}g_{xy}g_{yz} - g_{xy}^2 g_{zz} - g_{xx}g_{yz}^2. \tag{12.139b}$$

Spherical isotropic coordinates

The Schwarzschild metric (12.119) in spherical isotropic coordinates $(t, \rho, \vartheta, \varphi)$ reads

$$\boxed{ds^2 = -\left(\frac{1-\rho_s/\rho}{1+\rho_s/\rho}\right)^2 c^2 dt^2 + \left(1+\frac{\rho_s}{\rho}\right)^4 \left[d\rho^2 + \rho^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)\right],} \tag{12.140}$$

where

$$r = \rho\left(1+\frac{\rho_s}{\rho}\right)^2 \qquad \text{or} \qquad \rho = \frac{1}{4}\left(2r - r_s \pm 2\sqrt{r(r-r_s)}\right) \tag{12.141}$$

is the coordinate transformation between the Schwarzschild radial coordinate r and the isotropic radial coordinate ρ, see e.g. MTW page 840. The event horizon is given by $\rho_s = r_s/4$. The photon orbit and the innermost timelike circular geodesic read

$$\rho_{\text{po}} = \left(2+\sqrt{3}\right)\rho_s \qquad \text{and} \qquad \rho_{\text{itcg}} = \left(5+2\sqrt{6}\right)\rho_s. \tag{12.142}$$

Christoffel symbols:

$$\Gamma^{\rho}_{tt} = \frac{2(\rho-\rho_s)\rho^4\rho_s c^2}{(\rho+\rho_s)^7}, \quad \Gamma^{t}_{t\rho} = \frac{2\rho_s}{\rho^2-\rho_s^2}, \quad \Gamma^{\rho}_{\rho\rho} = -\frac{2\rho_s}{(\rho+\rho_s)\rho}, \tag{12.143a}$$

$$\Gamma^{\vartheta}_{\rho\vartheta} = \frac{\rho-\rho_s}{(\rho+\rho_s)\rho}, \quad \Gamma^{\varphi}_{\rho\varphi} = \frac{\rho-\rho_s}{(\rho+\rho_s)\rho}, \quad \Gamma^{\rho}_{\vartheta\vartheta} = -\rho\frac{\rho-\rho_s}{\rho+\rho_s}, \tag{12.143b}$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi} = \cot\vartheta, \quad \Gamma^{\rho}_{\varphi\varphi} = -\frac{(\rho-\rho_s)\rho\sin^2\vartheta}{\rho+\rho_s}, \quad \Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta. \tag{12.143c}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{t\rho t\rho} = -4\frac{(\rho-\rho_s)^2\rho_s c^2}{(\rho+\rho_s)^4\rho}, \qquad R_{t\vartheta t\vartheta} = 2\frac{(\rho-\rho_s)^2\rho\rho_s c^2}{(\rho+\rho_s)^4}, \tag{12.144a}$$

$$R_{t\varphi t\varphi} = 2\frac{(\rho-\rho_s)^2\rho c^2\rho_s\sin^2\vartheta}{(\rho+\rho_s)^4}, \qquad R_{\rho\vartheta\rho\vartheta} = -2\frac{(\rho+\rho_s)^2\rho_s}{\rho^3}, \tag{12.144b}$$

$$R_{\rho\varphi\rho\varphi} = -2\frac{(\rho+\rho_s)^2\rho_s\sin^2\vartheta}{\rho^3}, \qquad R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = \frac{4(\rho+\rho_s)^2\rho_s\sin^2\vartheta}{\rho}. \tag{12.144c}$$

The Ricci tensor and the Ricci scalar vanish identically.

Kretschmann scalar:

$$\mathcal{K} = 192\frac{r_s^2}{\rho^6\left(1+\rho_s/\rho\right)^{12}} = 12\frac{r_s^2}{r(\rho)^6}. \tag{12.145}$$

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(t)} = \frac{1+\rho_s/\rho}{1-\rho_s/\rho}\frac{\partial_t}{c}, \qquad \mathbf{e}_{(r)} = \frac{1}{\left[1+\rho_s/\rho\right]^2}\partial_\rho, \tag{12.146a}$$

$$\mathbf{e}_{(\vartheta)} = \frac{1}{\rho\left[1+\rho_s/\rho\right]^2}\partial_\vartheta, \qquad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{1}{\rho\left[1+\rho_s/\rho\right]^2\sin^2\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.146b}$$

Ricci rotation coefficients:

$$\gamma_{(\rho)(t)(t)} = \frac{2\rho_s\rho^2}{(\rho+\rho_s)^3(\rho-\rho_s)}, \quad \gamma_{(\vartheta)(\rho)(\vartheta)} = \gamma_{(\varphi)(\rho)(\varphi)} = \frac{\rho(\rho-\rho_s)}{(\rho+\rho_s)^3}, \tag{12.147a}$$

$$\gamma_{(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = \frac{\rho\cot\vartheta}{(\rho+\rho_s)^2}. \tag{12.147b}$$

The contractions of the Ricci rotation coefficients read

$$\gamma_{(\rho)} = \frac{2\rho(\rho^2-\rho\rho_s+\rho_s^2)}{(\rho+\rho_s)^3(\rho-\rho_s)}, \qquad \gamma_{(\vartheta)} = \frac{\rho\cot\vartheta}{(\rho+\rho_s)^2}. \tag{12.148}$$

Riemann-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(t)(\rho)(t)(\rho)} = -R_{(\vartheta)(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = -\frac{r_s}{r(\rho)^3}, \tag{12.149a}$$

$$R_{(t)(\vartheta)(t)(\vartheta)} = R_{(t)(\varphi)(t)(\varphi)} = -R_{(\rho)(\vartheta)(\rho)(\vartheta)} = -R_{(\rho)(\varphi)(\rho)(\varphi)} = \frac{r_s}{2r(\rho)^3}. \tag{12.149b}$$

Further reading:
Buchdahl.

Cartesian isotropic coordinates

The Schwarzschild metric (12.119) in Cartesian isotropic coordinates (t,x,y,z) reads,

$$\boxed{ds^2 = -\left(\frac{1-\rho_s/\rho}{1+\rho_s/\rho}\right)^2 c^2dt^2 + \left(1+\frac{\rho_s}{\rho}\right)^4\left[dx^2+dy^2+dz^2\right],} \tag{12.150}$$

where $\rho^2 = x^2+y^2+z^2$ and, as before,

$$r = \rho\left(1+\frac{\rho_s}{\rho}\right)^2. \tag{12.151}$$

Christoffel symbols:

$$\Gamma^x_{tt} = \frac{2c^2\rho^3\rho_s\left(\rho-\rho_s\right)x}{\left(\rho+\rho_s\right)^7}, \qquad \Gamma^y_{tt} = \frac{2c^2\rho^3\rho_s\left(\rho-\rho_s\right)y}{\left(\rho+\rho_s\right)^7}, \qquad \Gamma^z_{tt} = \frac{2c^2\rho^3\rho_s\left(\rho-\rho_s\right)z}{\left(\rho+\rho_s\right)^7}, \tag{12.152a}$$

$$\Gamma^t_{tx} = \frac{2\rho_s x}{\rho^3\left[1-\rho_s^2/\rho^2\right]}, \qquad \Gamma^t_{ty} = \frac{2\rho_s y}{\rho^3\left[1-\rho_s^2/\rho^2\right]}, \qquad \Gamma^t_{tz} = \frac{2\rho_s z}{\rho^3\left[1-\rho_s^2/\rho^2\right]}, \tag{12.152b}$$

$$\Gamma^x_{xx} = \Gamma^y_{xy} = \Gamma^z_{xz} = -\Gamma^x_{yy} = -\Gamma^x_{zz} = -\frac{2\rho_s}{\rho^3}\frac{x}{1+\rho_s/\rho}, \tag{12.152c}$$

$$\Gamma^y_{xx} = -\Gamma^x_{xy} = -\Gamma^y_{yy} = -\Gamma^z_{yz} = \Gamma^y_{zz} = \frac{2\rho_s}{\rho^3}\frac{y}{1+\rho_s/\rho}, \tag{12.152d}$$

$$\Gamma^z_{xx} = -\Gamma^x_{xz} = \Gamma^z_{yy} = -\Gamma^y_{yz} = -\Gamma^z_{zz} = \frac{2\rho_s}{\rho^3}\frac{z}{1+\rho_s/\rho}. \tag{12.152e}$$

Eddington-Finkelstein

The transformation of the Schwarzschild metric (12.119) from the usual Schwarzschild time coordinate t to the advanced null coordinate v with

$$cv = ct + r + r_s \ln(r - r_s) \tag{12.153}$$

leads to the ingoing Eddington-Finkelstein; metric with coordinates $(v, r, \vartheta, \varphi)$,

$$\boxed{ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dv^2 + 2c\, dv\, dr + r^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right).} \tag{12.154}$$

Metric-Tensor:

$$g_{vv} = -c^2\left(1 - \frac{r_s}{r}\right), \qquad g_{vr} = c, \qquad g_{\vartheta\vartheta} = r^2, \qquad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\vartheta. \tag{12.155}$$

Christoffel symbols:

$$\Gamma^v_{vv} = \frac{cr_s}{2r^2}, \qquad \Gamma^r_{vv} = \frac{c^2 r_s(r - r_s)}{2r^3}, \qquad \Gamma^r_{vr} = -\frac{cr_s}{2r^2}, \qquad \Gamma^\vartheta_{r\vartheta} = \frac{1}{r}, \tag{12.156a}$$

$$\Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^v_{\vartheta\vartheta} = -\frac{r}{c}, \qquad \Gamma^r_{\vartheta\vartheta} = -(r - r_s), \qquad \Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} = \cot\vartheta, \tag{12.156b}$$

$$\Gamma^v_{\varphi\varphi} = -\frac{r\sin^2\vartheta}{c}, \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -(r - r_s)\sin^2\vartheta, \quad \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta. \tag{12.156c}$$

Partial derivatives

$$\Gamma^v_{vv,r} = -\frac{cr_s}{r^3}, \qquad \Gamma^r_{vv,r} = -\frac{(2r - 3r_s)c^2 r_s}{2r^4}, \qquad \Gamma^r_{vr,r} = \frac{cr_s}{r^3}, \tag{12.157a}$$

$$\Gamma^\vartheta_{r\vartheta,r} = -\frac{1}{r^2}, \qquad \Gamma^\varphi_{r\varphi,r} = -\frac{1}{r^2}, \qquad \Gamma^v_{\vartheta\vartheta,r} = -\frac{1}{c}, \tag{12.157b}$$

$$\Gamma^r_{\vartheta\vartheta,r} = -1, \qquad \Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi,\vartheta} = -\frac{1}{\sin^2\vartheta}, \qquad \Gamma^v_{\varphi\varphi,r} = -\frac{\sin^2\vartheta}{c}, \tag{12.157c}$$

$$\Gamma^v_{\varphi\varphi,\vartheta} = -\frac{r\sin(2\vartheta)}{c}, \qquad \Gamma^r_{\varphi\varphi,r} = -\sin^2\vartheta, \qquad \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi,\vartheta} = -\cos(2\vartheta), \tag{12.157d}$$

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi,\vartheta} = -(r - r_s)\sin(2\vartheta). \tag{12.157e}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{vrvr} = -\frac{c^2 r_s}{r^3}, \qquad R_{v\vartheta v\vartheta} = \frac{c^2 r_s(r - r_s)}{2r^2}, \qquad R_{v\vartheta r\vartheta} = -\frac{cr_s}{2r}, \tag{12.158a}$$

$$R_{v\varphi v\varphi} = \frac{c^2 r_s(r - r_s)\sin^2\vartheta}{2r^2}, \qquad R_{v\varphi r\varphi} = -\frac{cr_s\sin^2\vartheta}{2r}, \qquad R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = rr_s\sin^2\vartheta. \tag{12.158b}$$

While the Ricci tensor and the Ricci scalar vanish identically, the Kretschmann scalar is $\mathcal{K} = 12r_s^2/r^6$.

Static local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(v)} = \frac{1}{c\sqrt{1 - r_s/r}}\partial_v, \quad \mathbf{e}_{(r)} = \frac{1}{c\sqrt{1 - r_s/r}}\partial_v + \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}\partial_r, \quad \mathbf{e}_{(\vartheta)} = \frac{1}{r}\partial_\vartheta, \quad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.159}$$

Dual tetrad:

$$\boldsymbol{\theta}^{(v)} = c\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}dv - \frac{dr}{\sqrt{1 - r_s/r}}, \quad \boldsymbol{\theta}^{(r)} = \frac{dr}{\sqrt{1 - r_s/r}}, \quad \boldsymbol{\theta}^{(\vartheta)} = r\, d\vartheta, \quad \boldsymbol{\theta}^{(\varphi)} = r\sin\vartheta d\varphi. \tag{12.160}$$

Ricci rotation coefficients:

$$\gamma_{(r)(v)(v)} = \frac{r_s}{2r^2\sqrt{1-r_s/r}}, \quad \gamma_{(\vartheta)(r)(\vartheta)} = \gamma_{(\varphi)(r)(\varphi)} = \frac{1}{r}\sqrt{1-\frac{r_s}{r}}, \quad \gamma_{(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = \frac{\cot\vartheta}{r}. \tag{12.161}$$

The contractions of the Ricci rotation coefficients read

$$\gamma_{(r)} = \frac{4r-3r_s}{2r^2\sqrt{1-r_s/r}}, \qquad \gamma_{(\vartheta)} = \frac{\cot\vartheta}{r}. \tag{12.162}$$

Riemann-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(v)(r)(v)(r)} = -R_{(\vartheta)(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = -\frac{r_s}{r^3}, \tag{12.163a}$$

$$R_{(v)(\vartheta)(v)(\vartheta)} = R_{(v)(\varphi)(v)(\varphi)} = -R_{(r)(\vartheta)(r)(\vartheta)} = -R_{(r)(\varphi)(r)(\varphi)} = \frac{r_s}{2r^3}. \tag{12.163b}$$

Kruskal-Szekeres

The Schwarzschild metric in Kruskal-Szekeres; coordinates $(T, X, \vartheta, \varphi)$ reads

$$\boxed{ds^2 = \frac{4r_s^3}{r}e^{-r/r_s}\left(-dT^2+dX^2\right) + r^2 d\Omega^2,} \tag{12.164}$$

where $r \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ is given by means of the LambertW-function $\mathcal{W}$,

$$\left(\frac{r}{r_s}-1\right)e^{r/r_s} = X^2 - T^2 \qquad \text{or} \qquad r = r_s\left[\mathcal{W}\left(\frac{X^2-T^2}{e}\right)+1\right]. \tag{12.165}$$

The Schwarzschild coordinate time t in terms of the Kruskal coordinates T and X reads

$$t = 2r_s \operatorname{arctanh}\frac{T}{X}, \qquad r > r_s, \tag{12.166a}$$

$$t = 2r_s \operatorname{arctanh}\frac{X}{T}, \qquad r < r_s, \tag{12.166b}$$

$$t = \infty, \qquad r = r_s. \tag{12.166c}$$

The transformations between Kruskal- and Schwarzschild coordinates read

$$X = \sqrt{1-\frac{r}{r_s}}\,e^{r/(2r_s)}\sinh\frac{ct}{2r_s}, \quad T = \sqrt{1-\frac{r}{r_s}}\,e^{r/(2r_s)}\cosh\frac{ct}{2r_s}, \qquad 0 < r < r_2, \tag{12.167a}$$

$$X = \sqrt{\frac{r}{r_s}-1}\,e^{r/(2r_s)}\cosh\frac{ct}{2r_s}, \quad T = \sqrt{\frac{r}{r_s}-1}\,e^{r/(2r_s)}\sinh\frac{ct}{2r_s}, \qquad r \geq r_s. \tag{12.167b}$$

Christoffel symbols:

$$\Gamma^T_{TT} = \Gamma^X_{TX} = \Gamma^T_{XX} = \frac{Tr_s(r+r_s)}{r^2}e^{-r/r_s}, \tag{12.168a}$$

$$\Gamma^X_{TT} = \Gamma^T_{TX} = \Gamma^X_{XX} = -\frac{Xr_s(r+r_s)}{r^2}e^{-r/r_s}, \tag{12.168b}$$

$$\Gamma^\vartheta_{T\vartheta} = -\frac{2r_s^2 T}{r^2}e^{-r/r_s}, \qquad \Gamma^\vartheta_{X\vartheta} = \frac{2r_s^2 X}{r^2}e^{-r/r_s}, \tag{12.168c}$$

$$\Gamma^T_{\vartheta\vartheta} = -\frac{r}{2r_s}T, \qquad \Gamma^X_{\vartheta\vartheta} = \frac{r}{2r_s}X, \tag{12.168d}$$

$$\Gamma^T_{\vartheta\vartheta} = -\frac{r}{2r_s}T\sin^2\vartheta, \qquad \Gamma^X_{\vartheta\vartheta} = \frac{r}{2r_s}X\sin^2\vartheta, \tag{12.168e}$$

$$\Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} = \cot\vartheta, \qquad \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta. \tag{12.168f}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{TXTX} = -16\frac{r_s^7}{r^5}e^{-2r/r_s}, \qquad R_{T\vartheta T\vartheta} = \frac{2r_s^4}{r^2}e^{-r/r_s}, \tag{12.169a}$$

$$R_{T\varphi T\varphi} = \frac{2r_s^4}{r^2}e^{-r/r_s}\sin^2\vartheta, \qquad R_{X\vartheta X\vartheta} = -\frac{2r_s^4}{r^2}e^{-r/r_s}, \tag{12.169b}$$

$$R_{X\varphi X\varphi} = -\frac{2r_s^4}{r^2}e^{-r/r_s}\sin^2\vartheta, \qquad R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = rr_s\sin^2\vartheta. \tag{12.169c}$$

The *Ricci-Tensor* as well as the *Ricci-scalar* vanish identically.

Kretschmann scalar:

$$\mathcal{K} = \frac{12r_s^2}{r^6}. \tag{12.170}$$

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(T)} = \frac{\sqrt{r}}{2r_s\sqrt{r_s}}e^{r/(2r_s)}\partial_T, \quad \mathbf{e}_{(X)} = \frac{\sqrt{r}}{2r_s\sqrt{r_s}}e^{r/(2r_s)}\partial_X, \quad \mathbf{e}_{(\vartheta)} = \frac{1}{r}\partial_\vartheta, \quad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi \tag{12.171}$$

Riemann-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(T)(X)(T)(X)} = R_{(X)(\vartheta)(X)(\vartheta)} = R_{(X)(\varphi)(X)(\varphi)} = -R_{(\vartheta)(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = -\frac{r_s}{r^3}, \tag{12.172a}$$

$$R_{(T)(\vartheta)(T)(\vartheta)} = R_{(T)(\varphi)(T)(\varphi)} = \frac{r_s}{2r^3}. \tag{12.172b}$$

Tortoise coordinates

The Schwarzschild metric represented by tortoise coordinates $(t, \rho, \vartheta, \varphi)$ reads

$$\boxed{ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r(\rho)}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r(\rho)}\right)d\rho^2 + r(\rho)^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right),} \tag{12.173}$$

where $r_s = 2GM/c^2$ is the Schwarzschild radius, G is Newton's constant, c is the speed of light, and M is the mass of the black hole. The tortoise radial coordinate ρ and the Schwarzschild radial coordinate r are related by

$$\rho = r + r_s\ln\left(\frac{r}{r_s} - 1\right) \qquad \text{or} \qquad r = r_s\left\{1 + \mathcal{W}\left[\exp\left(\frac{\rho}{r_s} - 1\right)\right]\right\}. \tag{12.174}$$

Christoffel symbols:

$$\Gamma^\rho_{tt} = \frac{c^2r_s}{2r(\rho)^2}, \qquad \Gamma^t_{t\rho} = \frac{r_s}{2r(\rho)^2}, \qquad \Gamma^\rho_{\rho\rho} = \frac{r_s}{2r(\rho)^2}, \tag{12.175a}$$

$$\Gamma^\vartheta_{\rho\vartheta} = \frac{1}{r(\rho)} - \frac{1}{r_s}, \qquad \Gamma^\varphi_{\rho\varphi} = \frac{1}{r(\rho)} - \frac{1}{r_s}, \qquad \Gamma^\rho_{\vartheta\vartheta} = -r(\rho), \tag{12.175b}$$

$$\Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} = \cot\vartheta, \qquad \Gamma^\rho_{\varphi\varphi} = -r(\rho)\sin^2\vartheta, \qquad \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta. \tag{12.175c}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{t\rho t\rho} = -\frac{c^2r_s}{r(\rho)^3}\left(1 - \frac{r_s}{r(\rho)}\right)^2, \qquad R_{t\vartheta t\vartheta} = \frac{c^2}{2}\left(1 - \frac{r_s}{r(\rho)}\right)\frac{r_s}{r(\rho)}, \tag{12.176a}$$

$$R_{t\varphi t\varphi} = \frac{c^2\sin^2\vartheta}{2}\left(1 - \frac{r_s}{r(\rho)}\right)\frac{r_s}{r(\rho)}, \qquad R_{\rho\vartheta\rho\vartheta} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{r_s}{r(\rho)}\right)\frac{r_s}{r(\rho)} \tag{12.176b}$$

$$R_{\rho\varphi\rho\varphi} = -\frac{\sin^2\vartheta}{2}\left(1 - \frac{r_s}{r(\rho)}\right)\frac{r_s}{r(\rho)}, \qquad R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = r(\rho)r_s\sin^2\vartheta. \tag{12.176c}$$

The Ricci tensor as well as the Ricci scalar vanish identically because the Schwarzschild spacetime is a vacuum solution of the field equations. Hence, the Weyl tensor is identical to the Riemann tensor. The Kretschmann scalar reads

$$\mathcal{K} = 12\frac{r_s^2}{r(\rho)^6}. \tag{12.177}$$

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(t)} = \frac{1}{c\sqrt{1-r_s/r(\rho)}}\partial_t, \quad \mathbf{e}_{(\rho)} = \frac{1}{\sqrt{1-r_s/r(\rho)}}\partial_\rho, \quad \mathbf{e}_{(\vartheta)} = \frac{1}{r(\rho)}\partial_\vartheta, \quad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{1}{r(\rho)\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.178}$$

Dual tetrad:

$$\boldsymbol{\theta}^{(t)} = c\sqrt{1-\frac{r_s}{r(\rho)}}\,dt, \quad \boldsymbol{\theta}^{(\rho)} = \sqrt{1-\frac{r_s}{r(\rho)}}\,d\rho, \quad \boldsymbol{\theta}^{(\vartheta)} = r(\rho)\,d\vartheta, \quad \boldsymbol{\theta}^{(\varphi)} = r(\rho)\sin\vartheta\,d\varphi. \tag{12.179}$$

Riemann-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(t)(\rho)(t)(\rho)} = -R_{(\vartheta)(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = -\frac{r_s}{r(\rho)^3}, \tag{12.180a}$$

$$R_{(t)(\vartheta)(t)(\vartheta)} = R_{(t)(\varphi)(t)(\varphi)} = -R_{(\rho)(\vartheta)(\rho)(\vartheta)} = -R_{(\rho)(\varphi)(\rho)(\varphi)} = \frac{r_s}{2r(\rho)^3}. \tag{12.180b}$$

Further reading:
MTW

Painlevé-Gullstrand

The Schwarzschild metric expressed in Painlevé-Gullstrand coordinates reads

$$\boxed{ds^2 = -c^2dT^2 + \left(dr + \sqrt{\frac{r_s}{r}}c\,dT\right)^2 + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right),} \tag{12.181}$$

where the new time coordinate T follows from the Schwarzschild time t in the following way:

$$cT = ct + 2r_s\left(\sqrt{\frac{r}{r_s}} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{r/r_s}-1}{\sqrt{r/r_s}+1}\right|\right). \tag{12.182}$$

Metric-Tensor:

$$g_{TT} = -c^2\left(1-\frac{r_s}{r}\right), \qquad g_{Tr} = c\sqrt{\frac{r_s}{r}}, \qquad g_{rr} = 1, \qquad g_{\vartheta\vartheta} = r^2, \qquad g_{\varphi\varphi} = r^2\sin^2\vartheta. \tag{12.183}$$

Christoffel symbols:

$$\Gamma^T_{TT} = \frac{cr_s}{2r^2}\sqrt{\frac{r_s}{r}}, \qquad \Gamma^r_{TT} = \frac{c^2r_s(r-r_s)}{2r^3}, \qquad \Gamma^T_{Tr} = \frac{r_s}{2r^2}, \tag{12.184a}$$

$$\Gamma^r_{Tr} = -\frac{cr_s}{2r^2}\sqrt{\frac{r_s}{r}}, \qquad \Gamma^T_{rr} = \frac{r_s}{2cr^2}\sqrt{\frac{r}{r_s}}, \qquad \Gamma^r_{rr} = -\frac{r_s}{2r^2}, \tag{12.184b}$$

$$\Gamma^\vartheta_{r\vartheta} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^T_{\vartheta\vartheta} = -\frac{r}{c}\sqrt{\frac{r_s}{r}}, \tag{12.184c}$$

$$\Gamma^r_{\vartheta\vartheta} = -(r-r_s), \qquad \Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} = \cot\vartheta, \qquad \Gamma^T_{\varphi\varphi} = -\frac{r}{c}\sqrt{\frac{r_s}{r}}\sin^2\vartheta, \tag{12.184d}$$

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -(r-r_s)\sin^2\vartheta, \qquad \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta. \tag{12.184e}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{TrTr} = -\frac{c^2 r_s}{r^3}, \qquad R_{T\vartheta T\vartheta} = \frac{c^2 r_s (r-r_s)}{2r^2}, \qquad R_{T\vartheta r\vartheta} = -\frac{c r_s}{2r}\sqrt{\frac{r_s}{r}}, \tag{12.185a}$$

$$R_{T\varphi T\varphi} = \frac{c^2 r_s (r-r_s)\sin^2\vartheta}{2r^2}, \quad R_{T\varphi r\varphi} = -\frac{c r_s}{2r}\sqrt{\frac{r_s}{r}}\sin^2\vartheta, \quad R_{r\vartheta r\vartheta} = -\frac{r_s}{2r}, \tag{12.185b}$$

$$R_{r\varphi r\varphi} = -\frac{r_s \sin^2\vartheta}{2r}, \qquad R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = r r_s \sin^2\vartheta. \tag{12.185c}$$

The Ricci tensor and the Ricci scalar vanish identically.

Kretschmann scalar:

$$\mathcal{K} = 12 r_s^2 / r^6. \tag{12.186}$$

For the Painlevé-Gullstrand coordinates, we can define two natural local tetrads.

Static local tetrad:

$$\hat{\mathbf{e}}_{(T)} = \frac{1}{c\sqrt{1-r_s/r}}\partial_T, \quad \hat{\mathbf{e}}_{(r)} = \frac{\sqrt{r_s}}{c\sqrt{r-r_s}}\partial_T + \sqrt{1-\frac{r_s}{r}}\partial_r, \quad \hat{\mathbf{e}}_{(\vartheta)} = \frac{1}{r}\partial_\vartheta, \quad \hat{\mathbf{e}}_{(\varphi)} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi, \tag{12.187}$$

Dual tetrad:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(T)} = c\sqrt{1-\frac{r_s}{r}}dT - \frac{dr}{\sqrt{r/r_s-1}}, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)} = \frac{dr}{\sqrt{1-r_s/r}}, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(\vartheta)} = r\,d\vartheta, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(\varphi)} = r\sin\vartheta\,d\varphi. \tag{12.188}$$

Freely falling local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(T)} = \frac{1}{c}\partial_T - \sqrt{\frac{r_s}{r}}\partial_r, \qquad \mathbf{e}_{(r)} = \partial_r, \qquad \mathbf{e}_{(\vartheta)} = \frac{1}{r}\partial_\vartheta, \qquad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.189}$$

Dual tetrad:

$$\boldsymbol{\theta}^{(T)} = c\,dT, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(r)} = c\sqrt{\frac{r_s}{r}}dT + dr, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\vartheta)} = r\,d\vartheta, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\varphi)} = r\sin\vartheta d\varphi. \tag{12.190}$$

Riemann-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(T)(r)(T)(r)} = -R_{(\vartheta)(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = -\frac{r_s}{r^3}, \tag{12.191a}$$

$$R_{(T)(\vartheta)(T)(\vartheta)} = R_{(T)(\varphi)(T)(\varphi)} = -R_{(r)(\vartheta)(r)(\vartheta)} = -R_{(r)(\varphi)(r)(\varphi)} = \frac{r_s}{2r^3}. \tag{12.191b}$$

Israel coordinates

The Schwarzschild metric in Israel coordinates $(x, y, \vartheta, \varphi)$ reads

$$\boxed{ds^2 = r_s^2\left[4dx\left(dy + \frac{y^2 dx}{1+xy}\right) + (1+xy)^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)\right],} \tag{12.192}$$

where the coordinates x and y follow from the Schwarzschild coordinates via

$$t = r_s\left(1 + xy + \ln\frac{y}{x}\right) \qquad \text{and} \qquad r = r_s(1+xy). \tag{12.193}$$

Christoffel symbols:

$$\Gamma^x_{xx} = -\frac{y(2+xy)}{(1+xy)^2}, \quad \Gamma^y_{xx} = \frac{y^3(3+xy)}{(1+xy)^3}, \quad \Gamma^y_{xy} = \frac{y(2+xy)}{(1+xy)^2}, \tag{12.194a}$$

$$\Gamma^\vartheta_{x\vartheta} = \frac{y}{1+xy}, \quad \Gamma^\varphi_{x\varphi} = \frac{y}{1+xy}, \quad \Gamma^\vartheta_{y\vartheta} = \frac{x}{1+xy}, \tag{12.194b}$$

$$\Gamma^\varphi_{x\varphi} = \frac{x}{1+xy}, \quad \Gamma^x_{\vartheta\vartheta} = -\frac{x}{2}(1+xy), \quad \Gamma^y_{\vartheta\vartheta} = -\frac{y}{2}(1-xy), \tag{12.194c}$$

$$\Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} = \cot\vartheta, \quad \Gamma^x_{\varphi\varphi} = -\frac{x}{2}(1+xy)\sin^2\vartheta, \quad \Gamma^y_{\varphi\varphi} = -\frac{y}{2}(1-xy)\sin^2\vartheta, \tag{12.194d}$$

$$\Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta. \tag{12.194e}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{xyxy} = -4\frac{r_s^2}{(1+xy)^3}, \quad R_{x\vartheta x\vartheta} = -2\frac{y^2 r_s^2}{(1+xy)^2}, \quad R_{x\vartheta y\vartheta} = -\frac{r_s^2}{1+xy}, \tag{12.195a}$$

$$R_{x\varphi x\varphi} = -2\frac{r_s^2 y^2\sin^2\vartheta}{(1+xy)^2}, \quad R_{x\varphi y\varphi} = -\frac{r_s^2\sin^2\vartheta}{1+xy}, \quad R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = (1+xy)r_s^2\sin^2\vartheta. \tag{12.195b}$$

The Ricci tensor as well as the Ricci scalar vanish identically. Hence, the Weyl tensor is identical to the Riemann tensor. The Kretschmann scalar reads

$$\mathcal{K} = \frac{12}{r_s^4(1+xy)^6}. \tag{12.196}$$

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(0)} = -\frac{\sqrt{1+xy}}{2r_s y}\partial_x + \frac{y}{r_s\sqrt{1+xy}}\partial_y, \quad \mathbf{e}_{(1)} = \frac{\sqrt{1+xy}}{2r_s y}\partial_x, \tag{12.197a}$$

$$\mathbf{e}_{(2)} = \frac{1}{r_s(1+xy)}\partial_\vartheta, \quad \mathbf{e}_{(3)} = \frac{1}{r_s(1+xy)\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.197b}$$

Dual tetrad:

$$\boldsymbol{\theta}^{(0)} = \frac{r_s\sqrt{1+xy}}{y}\,dy, \quad \boldsymbol{\theta}^{(1)} = \frac{2r_s y}{\sqrt{1+xy}}dx + \frac{r_s\sqrt{1+xy}}{y}\,dy, \tag{12.198a}$$

$$\boldsymbol{\theta}^{(2)} = r_s(1+xy)\,d\vartheta, \quad \boldsymbol{\theta}^{(3)} = r_s(1+xy)\sin\vartheta\,d\varphi. \tag{12.198b}$$

12.3.4 Alcubierre Warp

The Warp metric given by Miguel Alcubierre reads

$$\boxed{ds^2 = -c^2dt^2 + \left(dx - v_s f(r_s)dt\right)^2 + dy^2 + dz^2} \tag{12.199}$$

where

$$v_s = \frac{dx_s(t)}{dt}, \tag{12.200a}$$

$$r_s(t) = \sqrt{(x - x_s(t))^2 + y^2 + z^2}, \tag{12.200b}$$

$$f(r_s) = \frac{\tanh(\sigma(r_s+R)) - \tanh(\sigma(r_s-R))}{2\tanh(\sigma R)}. \tag{12.200c}$$

The parameter $R > 0$ defines the radius of the warp bubble and the parameter $\sigma > 0$ its thickness.

Metric-Tensor:

$$g_{tt} = -c^2 + v_s^2 f(r_s)^2, \qquad g_{tx} = -v_s f(r_s), \qquad g_{xx} = g_{yy} = g_{zz} = 1. \tag{12.201}$$

Christoffel symbols:

$$\Gamma^t_{tt} = \frac{f^2 f_x v_s^3}{c^2}, \qquad \Gamma^z_{tt} = -f f_z v_s^2, \qquad \Gamma^y_{tt} = -f f_y v_s^2, \tag{12.202a}$$

$$\Gamma^x_{tt} = \frac{f^3 f_x v_s^4 - c^2 f f_x v_s^2 - c^2 f_t v_s}{c^2}, \qquad \Gamma^t_{tx} = -\frac{f f_x v_s^2}{c^2}, \qquad \Gamma^x_{tx} = -\frac{f^2 f_x v_s^3}{c^2}, \tag{12.202b}$$

$$\Gamma^y_{tx} = \frac{f_y v_s}{2}, \qquad \Gamma^z_{tx} = \frac{f_z v_s}{2}, \qquad \Gamma^t_{ty} = -\frac{f f_y v_s^2}{2c^2}, \tag{12.202c}$$

$$\Gamma^x_{ty} = -\frac{f^2 f_y v_s^3 + c^2 f_y v_s}{2c^2}, \qquad \Gamma^t_{tz} = -\frac{f f_z v_s^2}{2c^2}, \qquad \Gamma^x_{tz} = -\frac{f^2 f_z v_s^3 + c^2 f_z v_s}{2c^2}, \tag{12.202d}$$

$$\Gamma^t_{xx} = \frac{f_x v_s}{c^2}, \qquad \Gamma^x_{xx} = \frac{f f_x v_s^2}{c^2}, \qquad \Gamma^t_{xy} = \frac{f_y v_s}{2c^2}, \tag{12.202e}$$

$$\Gamma^x_{xy} = \frac{f f_y v_s^2}{2c^2}, \qquad \Gamma^t_{xz} = \frac{f_z v_s}{2c^2}, \qquad \Gamma^x_{xz} = \frac{f f_z v_s^2}{2c^2}, \tag{12.202f}$$

with derivatives

$$f_t = \frac{df(r_s)}{dt} = \frac{-v_s \sigma \left(x - x_s(t)\right)}{2 r_s \tanh(\sigma R)} \left[\operatorname{sech}^2\left(\sigma(r_s + R)\right) - \operatorname{sech}^2\left(\sigma(r_s - R)\right)\right] \tag{12.203a}$$

$$f_x = \frac{df(r_s)}{dx} = \frac{\sigma \left(x - x_s(t)\right)}{2 r_s \tanh(\sigma R)} \left[\operatorname{sech}^2\left(\sigma(r_s + R)\right) - \operatorname{sech}^2\left(\sigma(r_s - R)\right)\right] \tag{12.203b}$$

$$f_y = \frac{df(r_s)}{dy} = \frac{\sigma y}{2 r_s \tanh(\sigma R)} \left[\operatorname{sech}^2\left(\sigma(r_s + R)\right) - \operatorname{sech}^2\left(\sigma(r_s - R)\right)\right] \tag{12.203c}$$

$$f_z = \frac{df(r_s)}{dz} = \frac{\sigma z}{2 r_s \tanh(\sigma R)} \left[\operatorname{sech}^2\left(\sigma(r_s + R)\right) - \operatorname{sech}^2\left(\sigma(r_s - R)\right)\right] \tag{12.203d}$$

Riemann- and Ricci-tensor as well as Ricci- and Kretschman-scalar are shown only in the Maple worksheet.

Comoving local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(0)} = \frac{1}{c}\left(\partial_t + v_s f \partial_x\right), \quad \mathbf{e}_{(1)} = \partial_x, \quad \mathbf{e}_{(2)} = \partial_y, \quad \mathbf{e}_{(3)} = \partial_z. \tag{12.204}$$

Static local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - v_s^2 f^2}} \partial_t, \quad \mathbf{e}_{(1)} = \frac{v_s f}{c\sqrt{c^2 - v_s^2 f^2}} \partial_t + \frac{\sqrt{c^2 - v_s^2 f^2}}{c} \partial_x, \quad \mathbf{e}_{(2)} = \partial_y, \quad \mathbf{e}_{(3)} = \partial_z. \tag{12.205}$$

Further reading:

Pfenning, Clark, Van Den Broeck

12.3.5 Barriola-Vilenkin monopol

The Barriola-Vilenkin metric describes the gravitational field of a global monopole. In spherical coordinates $(t, r, \vartheta, \varphi)$, the metric reads

$$\boxed{ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + k^2 r^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2\right),} \tag{12.206}$$

where k is the scaling factor responsible for the deficit/surplus angle.

Christoffel symbols:

$$\Gamma^{r}_{\vartheta\vartheta} = -k^2 r, \qquad \Gamma^{r}_{\varphi\varphi} = -k^2 r \sin^2\vartheta, \qquad \Gamma^{\vartheta}_{r\vartheta} = \frac{1}{r}, \tag{12.207a}$$

$$\Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta, \qquad \Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi} = \cot\vartheta. \tag{12.207b}$$

Partial derivatives

$$\Gamma^{\vartheta}_{r\vartheta,r} = -\frac{1}{r^2}, \qquad \Gamma^{\varphi}_{r\varphi,r} = -\frac{1}{r^2}, \qquad \Gamma^{r}_{\vartheta\vartheta,r} = -k^2, \tag{12.208a}$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi,\vartheta} = -\frac{1}{\sin^2\vartheta}, \qquad \Gamma^{r}_{\varphi\varphi,r} = -k^2\sin^2\vartheta, \qquad \Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi,\vartheta} = -\cos(2\vartheta), \tag{12.208b}$$

$$\Gamma^{r}_{\varphi\varphi,\vartheta} = -k^2 r\sin(2\vartheta). \tag{12.208c}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = (1-k^2)k^2r^2\sin^2\vartheta. \tag{12.209}$$

Ricci tensor, Ricci and Kretschmann scalar:

$$R_{\vartheta\vartheta} = (1-k^2), \qquad R_{\varphi\varphi} = (1-k^2)\sin^2\vartheta, \qquad \mathcal{R} = 2\frac{1-k^2}{k^2r^2}, \qquad \mathcal{K} = 4\frac{(1-k^2)^2}{k^4r^4}. \tag{12.210}$$

Weyl-Tensor:

$$C_{trtr} = -\frac{c^2(1-k^2)}{3k^2r^2}, \quad C_{t\vartheta t\vartheta} = \frac{c^2}{6}(1-k^2), \qquad C_{t\varphi t\varphi} = \frac{c^2}{6}(1-k^2)\sin^2\vartheta, \tag{12.211a}$$

$$C_{r\vartheta r\vartheta} = -\frac{1}{6}(1-k^2), \quad C_{r\varphi r\varphi} = -\frac{1}{6}(1-k^2)\sin^2\vartheta, \quad C_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = \frac{k^2r^2}{3}(1-k^2)\sin^2\vartheta. \tag{12.211b}$$

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(t)} = \frac{1}{c}\partial_t, \qquad \mathbf{e}_{(r)} = \partial_r, \qquad \mathbf{e}_{(\vartheta)} = \frac{1}{kr}\partial_\vartheta, \qquad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{1}{kr\,\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.212}$$

Dual tetrad:

$$\boldsymbol{\theta}^{(t)} = c\,dt, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(r)} = dr, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\vartheta)} = kr\,d\vartheta, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\varphi)} = kr\sin\vartheta\,d\varphi. \tag{12.213}$$

Ricci rotation coefficients:

$$\gamma_{(\vartheta)(r)(\vartheta)} = \gamma_{(\varphi)(r)(\varphi)} = \frac{1}{r}, \qquad \gamma_{(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = \frac{\cot\vartheta}{kr}. \tag{12.214}$$

The contractions of the Ricci rotation coefficients read

$$\gamma_{(r)} = \frac{2}{r}, \qquad \gamma_{(\vartheta)} = \frac{\cot\vartheta}{kr}. \tag{12.215}$$

Riemann-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(\vartheta)(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = \frac{1-k^2}{k^2r^2}. \tag{12.216}$$

Ricci-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(\vartheta)(\vartheta)} = R_{(\varphi)(\varphi)} = \frac{1-k^2}{k^2r^2}. \tag{12.217}$$

Weyl-Tensor with respect to local tetrad:

$$C_{(t)(r)(t)(r)} = -C_{(\vartheta)(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = -\frac{1-k^2}{3k^2r^2}, \tag{12.218a}$$

$$C_{(t)(\vartheta)(t)(\vartheta)} = C_{(t)(\varphi)(t)(\varphi)} = -C_{(r)(\vartheta)(r)(\vartheta)} = -C_{(r)(\varphi)(r)(\varphi)} = \frac{1-k^2}{6k^2r^2}. \tag{12.218b}$$

Embedding:

The embedding function, see Sec. 12.3.1, for $k < 1$ reads

$$z = \sqrt{1-k^2}\, r. \tag{12.219}$$

Euler-Lagrange:

The Euler-Lagrangian formalism, Sec. 12.3.1, for geodesics in the $\vartheta = \pi/2$ hyperplane yields

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\frac{h_1^2}{c^2}, \qquad V_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\left(\frac{h_2^2}{k^2r^2} - \kappa c^2\right), \tag{12.220}$$

with the constants of motion $h_1 = c^2\dot{t}$ and $h_2 = k^2r^2\dot{\varphi}$.

The point of closest approach r_{pca} for a null geodesic that starts at $r = r_i$ with $\mathbf{y} = \pm\mathbf{e}_{(t)} + \cos\xi\mathbf{e}_{(r)} + \sin\xi\mathbf{e}_{(\varphi)}$ is given by $r = r_i \sin\xi$. Hence, the r_{pca} is independent of k. The same is also true for timelike geodesics.

Further reading:

Barriola and Vilenkin, Perlick.

12.3.6 Bertotti-Kasner

The Bertotti-Kasner spacetime in spherical coordinates $(t, r, \vartheta, \varphi)$ reads

$$\boxed{ds^2 = -c^2dt^2 + e^{2\sqrt{\Lambda}ct}dr^2 + \frac{1}{\Lambda}\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right),} \tag{12.221}$$

where the cosmological constant Λ must be positive.

Christoffel symbols:

$$\Gamma^r_{tr} = c\sqrt{\Lambda}, \qquad \Gamma^t_{rr} = \frac{\sqrt{\Lambda}}{c}e^{2\sqrt{\Lambda}ct}, \qquad \Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi} = \cot\vartheta, \qquad \Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta. \tag{12.222}$$

Partial derivatives

$$\Gamma^t_{rr,t} = 2\Lambda e^{2\sqrt{\Lambda}ct}, \qquad \Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi,\vartheta} = -\frac{1}{\sin^2\vartheta}, \qquad \Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi,\vartheta} = -\cos(2\vartheta). \tag{12.223}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{trtr} = -\Lambda c^2 e^{2\sqrt{\Lambda}ct}, \qquad R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = \frac{\sin^2\vartheta}{\Lambda}. \tag{12.224}$$

Ricci-Tensor:

$$R_{tt} = -\Lambda c^2, \qquad R_{rr} = \Lambda e^{2\sqrt{\Lambda}ct}, \qquad R_{\vartheta\vartheta} = 1, \qquad R_{\varphi\varphi} = \sin^2\vartheta. \tag{12.225}$$

The Ricci and Kretschmann scalars read

$$\mathcal{R} = 4\Lambda, \qquad \mathcal{K} = 8\Lambda^2. \tag{12.226}$$

Weyl-Tensor:

$$C_{trtr} = -\frac{2}{3}\Lambda c^2 e^{2\sqrt{\Lambda}ct}, \qquad C_{t\vartheta t\vartheta} = \frac{c^2}{3}, \qquad C_{t\varphi t\varphi} = -\frac{1}{3}e^{2\sqrt{\Lambda}ct}, \tag{12.227a}$$

$$C_{r\vartheta r\vartheta} = -\frac{1}{3}e^{2\sqrt{\Lambda}ct}, \qquad C_{r\varphi r\varphi} = -\frac{1}{3}e^{2\sqrt{\Lambda}ct}\sin^2\vartheta, \qquad C_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = \frac{2}{3}\frac{\sin^2\vartheta}{\Lambda}. \tag{12.227b}$$

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(t)} = \frac{1}{c}\partial_t, \qquad \mathbf{e}_{(r)} = e^{-\sqrt{\Lambda}ct}\partial_r, \qquad \mathbf{e}_{(\vartheta)} = \sqrt{\Lambda}\partial_\vartheta, \qquad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{\sqrt{\Lambda}}{\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.228}$$

Dual tetrad:

$$\boldsymbol{\theta}^{(t)} = c\,dt, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(r)} = e^{\sqrt{\Lambda}ct}dr, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\vartheta)} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}d\vartheta, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\varphi)} = \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{\Lambda}}d\varphi. \tag{12.229}$$

Ricci rotation coefficients:

$$\boldsymbol{\gamma}_{(t)(r)(r)} = \sqrt{\Lambda}, \qquad \boldsymbol{\gamma}_{(\vartheta)(\varphi)(\varphi)} = -\sqrt{\Lambda}\cot\vartheta. \tag{12.230}$$

The contractions of the Ricci rotation coefficients read

$$\boldsymbol{\gamma}_{(t)} = -\sqrt{\Lambda}, \qquad \boldsymbol{\gamma}_{(\vartheta)} = \sqrt{\Lambda}\cot\vartheta. \tag{12.231}$$

Riemann-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(t)(r)(t)(r)} = -R_{(\vartheta)(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = -\Lambda. \tag{12.232}$$

Ricci-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(t)(t)} = -R_{(r)(r)} = -R_{(\vartheta)(\vartheta)} = -R_{(\varphi)(\varphi)} = -\Lambda. \tag{12.233}$$

Weyl-Tensor with respect to local tetrad:

$$C_{(t)(r)(t)(r)} = -C_{(\vartheta)(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = -\frac{2\Lambda}{3}, \tag{12.234a}$$

$$C_{(t)(\vartheta)(t)(\vartheta)} = C_{(t)(\varphi)(t)(\varphi)} = -C_{(r)(\vartheta)(r)(\vartheta)} = -C_{(r)(\varphi)(r)(\varphi)} = \frac{\Lambda}{3}. \tag{12.234b}$$

Euler-Lagrange:

The Euler-Lagrangian formalism, Sec. 12.3.1, for geodesics in the $\vartheta = \pi/2$ hyperplane yields

$$c^2\dot{t}^2 = h_1^2 e^{-2\sqrt{\Lambda}\,ct} + \Lambda h_2^2 - \kappa \tag{12.235}$$

with the constants of motion $h_1 = \dot{r}e^{2\sqrt{\Lambda}\,ct}$ and $h_2 = \dot{\varphi}/\Lambda$. Thus,

$$\lambda = \frac{1}{c\sqrt{\Lambda}\sqrt{\Lambda h_2^2 - \kappa}}\ln\left(\frac{1+q(t)}{1-q(t)}\frac{1-q(t_i)}{1+q(t_i)}\right), \qquad q(t) = \frac{h_1^2 e^{-2\sqrt{\Lambda}\,ct}}{\Lambda h_2^2 - \kappa} + 1, \tag{12.236}$$

where t_i is the initial time. We can also solve the orbital equation:

$$r(t) = w(t) - w(t_i) + r_i, \qquad w(t) = -\frac{\sqrt{h_1^2 e^{-2\sqrt{\Lambda}\,ct} + \Lambda h_2^2 - \kappa}}{h_1\sqrt{\Lambda}}, \tag{12.237}$$

where r_i is the initial radial position.

Further reading:

Rindler: *"Every spherically symmetric solution of the generalized vacuum field equations $R_{ij} = \Lambda g_{ij}$ is either equivalent to Kottler's generalization of Schwarzschild space or to the [...] Bertotti-Kasner space (for which Λ must be necessarily be positive)."*

12.3.7 Bessel gravitational wave

D. Kramer introduced in an exact gravitational wave solution of Einstein's vacuum field equations. According to we execute the substitution $x \to t$ and $y \to z$.

Cylindrical coordinates

The metric of the Bessel wave in cylindrical coordinates reads

$$\boxed{ds^2 = \mathrm{e}^{-2U}\left[\mathrm{e}^{2K}\left(d\rho^2 - dt^2\right) + \rho^2 d\varphi^2\right] + \mathrm{e}^{2U} dz^2.} \tag{12.238}$$

The functions U and K are given by

$$U := C J_0(\rho)\cos(t), \tag{12.239}$$

$$K := \frac{1}{2}C^2\rho\left\{\rho\left[J_0(\rho)^2 + J_1(\rho)^2\right] - 2J_0(\rho)\,J_1(\rho)\cos^2(t)\right\}, \tag{12.240}$$

where $J_n(\rho)$ are the Bessel functions of the first kind.

Christoffel symbols:

$$\Gamma^t_{tt} = \Gamma^\rho_{t\rho} = \Gamma^t_{\rho\rho} = -\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial K}{\partial t}, \qquad \Gamma^\varphi_{t\varphi} = \Gamma^z_{tz} = -\frac{\partial U}{\partial t}, \qquad \Gamma^t_{\varphi\varphi} = -\mathrm{e}^{-2K}\rho^2\frac{\partial U}{\partial t}, \tag{12.241a}$$

$$\Gamma^\rho_{tt} = \Gamma^t_{t\rho} = \Gamma^\rho_{\rho\rho} = -\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\partial K}{\partial \rho}, \qquad \Gamma^\varphi_{\rho\varphi} = \frac{1}{\rho} - \frac{\partial U}{\partial \rho}, \qquad \Gamma^\rho_{zz} = -\mathrm{e}^{4U-2K}\frac{\partial U}{\partial \rho}, \tag{12.241b}$$

$$\Gamma^\rho_{\varphi\varphi} = \rho\mathrm{e}^{-2K}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial \rho} - 1\right), \qquad \Gamma^z_{\rho z} = \frac{\partial U}{\partial \rho}, \qquad \Gamma^t_{zz} = \mathrm{e}^{4U-2K}\frac{\partial U}{\partial t}. \tag{12.241c}$$

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(t)} = \mathrm{e}^{U-K}\partial_t, \quad \mathbf{e}_{(\rho)} = \mathrm{e}^{U-K}\partial_\rho, \quad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{1}{\rho}\mathrm{e}^{U}\partial_\varphi, \quad \mathbf{e}_{(z)} = \mathrm{e}^{-U}\partial_z. \tag{12.242}$$

Dual tetrad:

$$\boldsymbol{\theta}^{(t)} = \mathrm{e}^{K-U}dt, \quad \boldsymbol{\theta}^{(\rho)} = \mathrm{e}^{K-U}d\rho, \quad \boldsymbol{\theta}^{(\varphi)} = \rho\mathrm{e}^{-U}d\varphi, \quad \boldsymbol{\theta}^{(z)} = \mathrm{e}^{U}dz. \tag{12.243}$$

Cartesian coordinates

In Cartesian coordinates with $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ the metric (12.238) reads

$$\boxed{\begin{aligned} ds^2 = &-\mathrm{e}^{2(K-U)}dt^2 + \frac{\mathrm{e}^{-2U}}{x^2+y^2}\Big[\left(\mathrm{e}^{2K}x^2+y^2\right)dx^2 + 2xy\left(\mathrm{e}^{2K}-1\right)dxdy \\ &+ \left(x^2+\mathrm{e}^{2K}y^2\right)dy^2\Big] + \mathrm{e}^{2U}dz^2. \end{aligned}} \tag{12.244}$$

Local tetrad:

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_{(t)} = \mathrm{e}^{U-K}\partial_t, \qquad \mathbf{e}_{(x)} = \mathrm{e}^{U}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{\mathrm{e}^{2K}x^2+y^2}}\partial_x, \\ &\mathbf{e}_{(y)} = \mathrm{e}^{U-K}\sqrt{\frac{\mathrm{e}^{2K}x^2+y^2}{x^2+y^2}}\partial_y + xy\frac{\mathrm{e}^{U-K}\left(\mathrm{e}^{2K}-1\right)}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)\left(\mathrm{e}^{2K}x^2+y^2\right)}}\partial_x, \qquad \mathbf{e}_{(z)} = \mathrm{e}^{-U}\partial_z \end{aligned} \tag{12.245}$$

12.3.8 Cosmic string in Schwarzschild spacetime

A cosmic string in the Schwarzschild spacetime represented by Schwarzschild coordinates $(t, r, \vartheta, \varphi)$ reads

$$\boxed{ds^2 = -\left(1-\frac{r_s}{r}\right)c^2dt^2 + \frac{1}{1-r_s/r}dr^2 + r^2\left(d\vartheta^2 + \beta^2\sin^2\vartheta d\varphi^2\right),} \tag{12.246}$$

where $r_s = 2GM/c^2$ is the Schwarzschild radius, G is Newton's constant, c is the speed of light, M is the mass of the black hole, and β is the string parameter, compare Aryal et al.

Christoffel symbols:

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{c^2 r_s(r-r_s)}{2r^3}, \qquad \Gamma^t_{tr} = \frac{r_s}{2r(r-r_s)}, \qquad \Gamma^r_{rr} = -\frac{r_s}{2r(r-r_s)}, \tag{12.247a}$$

$$\Gamma^\vartheta_{r\vartheta} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^r_{\vartheta\vartheta} = -(r-r_s), \tag{12.247b}$$

$$\Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} = \cot\vartheta, \qquad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -(r-r_s)\beta^2\sin^2\vartheta, \qquad \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} = -\beta^2\sin\vartheta\cos\vartheta. \tag{12.247c}$$

Partial derivatives

$$\Gamma^r_{tt,r} = -\frac{(2r-3r_s)c^2r_s}{2r^4}, \qquad \Gamma^t_{tr,r} = -\frac{(2r-r_s)r_s}{2r^2(r-r_s)^2}, \qquad \Gamma^r_{rr,r} = \frac{(2r-r_s)r_s}{2r^2(r-r_s)^2}, \tag{12.248a}$$

$$\Gamma^\vartheta_{r\vartheta,r} = -\frac{1}{r^2}, \qquad \Gamma^\varphi_{r\varphi,r} = -\frac{1}{r^2}, \qquad \Gamma^r_{\vartheta\vartheta,r} = -1, \tag{12.248b}$$

$$\Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi,\vartheta} = -\frac{1}{\sin^2\vartheta}, \qquad \Gamma^r_{\varphi\varphi,r} = -\beta^2\sin^2\vartheta, \qquad \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi,\vartheta} = -\beta^2\cos(2\vartheta), \tag{12.248c}$$

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi,\vartheta} = -(r-r_s)\beta^2\sin(2\vartheta). \tag{12.248d}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{trtr} = -\frac{c^2r_s}{r^3}, \qquad R_{t\vartheta t\vartheta} = \frac{1}{2}\frac{c^2\left(r-r_s\right)r_s}{r^2}, \qquad R_{t\varphi t\varphi} = \frac{1}{2}\frac{c^2\left(r-r_s\right)r_s\beta^2\sin^2\vartheta}{r^2}, \tag{12.249a}$$

$$R_{r\vartheta r\vartheta} = -\frac{1}{2}\frac{r_s}{r-r_s}, \qquad R_{r\varphi r\varphi} = -\frac{1}{2}\frac{r_s\beta^2\sin^2\vartheta}{r-r_s}, \qquad R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = rr_s\beta^2\sin^2\vartheta. \tag{12.249b}$$

The Ricci tensor as well as the Ricci scalar vanish identically. Hence, the Weyl tensor is identical to the Riemann tensor. The Kretschmann scalar reads

$$\mathcal{K} = 12\frac{r_s^2}{r^6}. \tag{12.250}$$

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(t)} = \frac{1}{c\sqrt{1-r_s/r}}\partial_t, \qquad \mathbf{e}_{(r)} = \sqrt{1-\frac{r_s}{r}}\partial_r, \qquad \mathbf{e}_{(\vartheta)} = \frac{1}{r}\partial_\vartheta, \qquad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{1}{r\beta\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.251}$$

Dual tetrad:

$$\boldsymbol{\theta}^{(t)} = c\sqrt{1-\frac{r_s}{r}}\,dt, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(r)} = \frac{dr}{\sqrt{1-r_s/r}}, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\vartheta)} = r\,d\vartheta, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\varphi)} = r\beta\sin\vartheta\,d\varphi. \tag{12.252}$$

Ricci rotation coefficients:

$$\gamma_{(r)(t)(t)} = \frac{r_s}{2r^2\sqrt{1-r_s/r}}, \quad \gamma_{(\vartheta)(r)(\vartheta)} = \gamma_{(\varphi)(r)(\varphi)} = \frac{1}{r}\sqrt{1-\frac{r_s}{r}}, \quad \gamma_{(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = \frac{\cot\vartheta}{r}. \tag{12.253}$$

The contractions of the Ricci rotation coefficients read

$$\gamma_{(r)} = \frac{4r-3r_s}{2r^2\sqrt{1-r_s/r}}, \qquad \gamma_{(\vartheta)} = \frac{\cot\vartheta}{r}. \tag{12.254}$$

Riemann-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(t)(r)(t)(r)} = -R_{(\vartheta)(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = -\frac{r_s}{r^3}, \tag{12.255a}$$

$$R_{(t)(\vartheta)(t)(\vartheta)} = R_{(t)(\varphi)(t)(\varphi)} = -R_{(r)(\vartheta)(r)(\vartheta)} = -R_{(r)(\varphi)(r)(\varphi)} = \frac{r_s}{2r^3}. \tag{12.255b}$$

Embedding:

The embedding function for $\beta^2 < 1$ reads

$$z = (r-r_s)\sqrt{\frac{r}{r-r_s}-\beta^2} - \frac{r_s}{2\sqrt{1-\beta^2}}\ln\frac{\sqrt{r/(r-r_s)-\beta^2}-\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{r/(r-r_s)-\beta^2}+\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{12.256}$$

If $\beta^2 = 1$, we have the embedding function of the standard Schwarzschild metric, compare Eq.(12.133).

Euler-Lagrange:

The Euler-Lagrangian formalism, Sec. 12.3.1, for geodesics in the $\vartheta = \pi/2$ hyperplane yields

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\frac{k^2}{c^2}, \qquad V_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\left(\frac{h^2}{r^2\beta^2}-\kappa c^2\right) \tag{12.257}$$

with the constants of motion $k = (1-r_s/r)c^2\dot{t}$ and $h = r^2\beta^2\dot{\varphi}$. The maxima of the effective potential V_{eff} lead to the same critical orbits $r_{\text{po}} = \frac{3}{2}r_s$ and $r_{\text{itcg}} = 3r_s$ as in the standard Schwarzschild metric.

12.3.9 Ernst spacetime

A cosmic string in the Schwarzschild spacetime represented by Schwarzschild coordinates $(t, r, \vartheta, \varphi)$ reads

$$\boxed{ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - r_s/r} dr^2 + r^2 \left(d\vartheta^2 + \beta^2 \sin^2\vartheta d\varphi^2\right),} \tag{12.258}$$

where $r_s = 2GM/c^2$ is the Schwarzschild radius, G is Newton's constant, c is the speed of light, M is the mass of the black hole, and β is the string parameter, compare Aryal et al.

Christoffel symbols:

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{c^2 r_s (r - r_s)}{2r^3}, \qquad \Gamma^t_{tr} = \frac{r_s}{2r(r - r_s)}, \qquad \Gamma^r_{rr} = -\frac{r_s}{2r(r - r_s)}, \tag{12.259a}$$

$$\Gamma^\vartheta_{r\vartheta} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^r_{\vartheta\vartheta} = -(r - r_s), \tag{12.259b}$$

$$\Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} = \cot\vartheta, \qquad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -(r - r_s)\beta^2 \sin^2\vartheta, \qquad \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} = -\beta^2 \sin\vartheta\cos\vartheta. \tag{12.259c}$$

Partial derivatives

$$\Gamma^r_{tt,r} = -\frac{(2r - 3r_s)c^2 r_s}{2r^4}, \qquad \Gamma^t_{tr,r} = -\frac{(2r - r_s)r_s}{2r^2(r - r_s)^2}, \qquad \Gamma^r_{rr,r} = \frac{(2r - r_s)r_s}{2r^2(r - r_s)^2}, \tag{12.260a}$$

$$\Gamma^\vartheta_{r\vartheta,r} = -\frac{1}{r^2}, \qquad \Gamma^\varphi_{r\varphi,r} = -\frac{1}{r^2}, \qquad \Gamma^r_{\vartheta\vartheta,r} = -1, \tag{12.260b}$$

$$\Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi,\vartheta} = -\frac{1}{\sin^2\vartheta}, \qquad \Gamma^r_{\varphi\varphi,r} = -\beta^2 \sin^2\vartheta, \qquad \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi,\vartheta} = -\beta^2 \cos(2\vartheta), \tag{12.260c}$$

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi,\vartheta} = -(r - r_s)\beta^2 \sin(2\vartheta). \tag{12.260d}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{trtr} = -\frac{c^2 r_s}{r^3}, \qquad R_{t\vartheta t\vartheta} = \frac{1}{2}\frac{c^2 (r - r_s) r_s}{r^2}, \qquad R_{t\varphi t\varphi} = \frac{1}{2}\frac{c^2 (r - r_s) r_s \beta^2 \sin^2\vartheta}{r^2}, \tag{12.261a}$$

$$R_{r\vartheta r\vartheta} = -\frac{1}{2}\frac{r_s}{r - r_s}, \qquad R_{r\varphi r\varphi} = -\frac{1}{2}\frac{r_s \beta^2 \sin^2\vartheta}{r - r_s}, \qquad R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = r r_s \beta^2 \sin^2\vartheta. \tag{12.261b}$$

The Ricci tensor as well as the Ricci scalar vanish identically. Hence, the Weyl tensor is identical to the Riemann tensor. The Kretschmann scalar reads

$$\mathcal{K} = 12\frac{r_s^2}{r^6}. \tag{12.262}$$

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(t)} = \frac{1}{c\sqrt{1 - r_s/r}}\partial_t, \qquad \mathbf{e}_{(r)} = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}\partial_r, \qquad \mathbf{e}_{(\vartheta)} = \frac{1}{r}\partial_\vartheta, \qquad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{1}{r\beta\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.263}$$

Dual tetrad:

$$\boldsymbol{\theta}^{(t)} = c\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}\, dt, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(r)} = \frac{dr}{\sqrt{1 - r_s/r}}, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\vartheta)} = r\, d\vartheta, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\varphi)} = r\beta\sin\vartheta\, d\varphi. \tag{12.264}$$

Ricci rotation coefficients:

$$\gamma_{(r)(t)(t)} = \frac{r_s}{2r^2\sqrt{1 - r_s/r}}, \qquad \gamma_{(\vartheta)(r)(\vartheta)} = \gamma_{(\varphi)(r)(\varphi)} = \frac{1}{r}\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}, \qquad \gamma_{(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = \frac{\cot\vartheta}{r}. \tag{12.265}$$

The contractions of the Ricci rotation coefficients read

$$\gamma_{(r)} = \frac{4r - 3r_s}{2r^2\sqrt{1 - r_s/r}}, \qquad \gamma_{(\vartheta)} = \frac{\cot\vartheta}{r}. \tag{12.266}$$

Riemann-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(t)(r)(t)(r)} = -R_{(\vartheta)(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = -\frac{r_s}{r^3}, \tag{12.267a}$$

$$R_{(t)(\vartheta)(t)(\vartheta)} = R_{(t)(\varphi)(t)(\varphi)} = -R_{(r)(\vartheta)(r)(\vartheta)} = -R_{(r)(\varphi)(r)(\varphi)} = \frac{r_s}{2r^3}. \tag{12.267b}$$

Embedding:

The embedding function for $\beta^2 < 1$ reads

$$z = (r - r_s)\sqrt{\frac{r}{r - r_s} - \beta^2} - \frac{r_s}{2\sqrt{1-\beta^2}} \ln \frac{\sqrt{r/(r-r_s) - \beta^2} - \sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{r/(r-r_s) - \beta^2} + \sqrt{1-\beta^2}}. \tag{12.268}$$

If $\beta^2 = 1$, we have the embedding function of the standard Schwarzschild metric, compare Eq.(12.133).

Euler-Lagrange:

The Euler-Lagrangian formalism, Sec. 12.3.1, for geodesics in the $\vartheta = \pi/2$ hyperplane yields

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\frac{k^2}{c^2}, \qquad V_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)\left(\frac{h^2}{r^2\beta^2} - \kappa c^2\right) \tag{12.269}$$

with the constants of motion $k = (1 - r_s/r)c^2\dot{t}$ and $h = r^2\beta^2\dot{\varphi}$. The maxima of the effective potential V_{eff} lead to the same critical orbits $r_{\text{po}} = \frac{3}{2}r_s$ and $r_{\text{itcg}} = 3r_s$ as in the standard Schwarzschild metric.

12.3.10 Ernst spacetime II (???)

"The Ernst metric is a static, axially symmetric, electro-vacuum solution of the Einstein-Maxwell equations with a black hole immersed in a magnetic field."

In spherical coordinates $(t, r, \vartheta, \varphi)$, the Ernst metric reads $(G = c = 1)$

$$\boxed{ds^2 = \Lambda^2\left[-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2M/r} + r^2\,d\vartheta^2\right] + \frac{r^2\sin^2\vartheta}{\Lambda^2}d\varphi^2,} \tag{12.270}$$

where $\Lambda = 1 + B^2r^2\sin^2\vartheta$. Here, M is the mass of the black hole and B the magnetic field

strength.

Christoffel symbols:

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{\left(2B^2r^3\sin^2\vartheta - 3MB^2r^2\sin^2\vartheta + M\right)(r-2M)}{r^3\Lambda},\ \Gamma^\vartheta_{tt} = \frac{2\,(r-2M)\,B^2\sin\vartheta\cos\vartheta}{r\Lambda}, \tag{12.271a}$$

$$\Gamma^t_{tr} = \frac{2B^2r^3\sin^2\vartheta - 3MB^2r^2\sin^2\vartheta + M}{r\,(r-2M)\,\Lambda}, \qquad \Gamma^t_{t\vartheta} = \frac{2B^2r^2\sin\vartheta\cos\vartheta}{\Lambda}, \tag{12.271b}$$

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{2B^2r^3\sin^2\vartheta - 5MB^2r^2\sin^2\vartheta - M}{r\,(r-2M)\,\Lambda}, \qquad \Gamma^\vartheta_{rr} = -\frac{2B^2r\sin\vartheta\cos\vartheta}{(r-2M)\,\Lambda}, \tag{12.271c}$$

$$\Gamma^r_{r\vartheta} = \frac{2B^2r^2\sin\vartheta\cos\vartheta}{\Lambda}, \qquad \Gamma^\vartheta_{r\vartheta} = \frac{3B^2r^2\sin^2\vartheta + 1}{r\Lambda}, \tag{12.271d}$$

$$\Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1 - B^2r^2\sin^2\vartheta}{r\Lambda}, \qquad \Gamma^r_{\vartheta\vartheta} = \frac{\left(3B^2r^2\sin^2\vartheta + 1\right)(r-2M)}{\Lambda}, \tag{12.271e}$$

$$\Gamma^\vartheta_{\vartheta\vartheta} = \frac{2B^2r^2\sin\vartheta\cos\vartheta}{\Lambda}, \qquad \Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} = \frac{\Xi\cos\vartheta}{\Lambda}, \tag{12.271f}$$

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = \frac{(r-2M)\,\Xi\sin^2\vartheta}{\Lambda^5}, \tag{12.271g}$$

$$\Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} = \frac{\Xi\sin\vartheta\cos\vartheta}{\Lambda^5}. \tag{12.271h}$$

with $\Xi = 1 - B^2r^2\sin^2\vartheta$.

Riemann-Tensor:

$$R_{trtr} = \frac{2}{r^3}\left[B^4r^4\sin^4\vartheta\,(3M-r) - M + 2r^5B^4\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta + B^2r^2\sin^2\vartheta\,(r-2M)\right], \tag{12.272a}$$

$$R_{tr\vartheta} = 2B^2\sin\vartheta\cos\vartheta\left[(3B^2r^2\sin^2\vartheta\,(2M-3r) + r - 2M\right], \tag{12.272b}$$

$$R_{t\vartheta t\vartheta} = \frac{1}{r^2}\left[B^4r^4(r-2M)(4r-9M)\sin^4\vartheta + 2\Xi B^2r^3(r-2M)\cos^2\vartheta + M(r-2M)\right], \tag{12.272c}$$

$$R_{t\varphi t\varphi} = \frac{1}{\Lambda^4r^2}\left[(2B^2r^3 - 3B^2Mr^2\sin^2\vartheta + M)\Xi(r-2M)\sin^2\vartheta\right], \tag{12.272d}$$

$$R_{r\vartheta r\vartheta} = -\frac{(2B^2r^3 - 3B^2Mr^2\sin^2\vartheta + M)\Xi}{r-2M}, \tag{12.272e}$$

$$R_{r\varphi r\varphi} = -\frac{\sin^2\vartheta}{\Lambda^4(r-2M)}\left[B^4r^4(4r-9M)\sin^4\vartheta + 2B^2r^2(8M-4r\vartheta)\sin^2\vartheta + 2\Xi B^2r^3\cos^2\vartheta + M\right], \tag{12.272f}$$

$$R_{r\varphi\vartheta\varphi} = -\frac{2B^2r^3\sin^3\vartheta\cos\vartheta\left(3B^2r^2\sin^2\vartheta - 5\right)}{\Lambda^4}, \tag{12.272g}$$

$$R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = \frac{r\sin^2\vartheta}{\Lambda^4}\left[2B^4r^4(r-3M)\sin^4\vartheta + 4B^2r^3\cos^2\vartheta(1+\Xi) + 2B^2r^2\sin^2\vartheta(2M-r) + 2M\right]. \tag{12.272h}$$

Ricci-Tensor:

$$R_{tt} = \frac{4B^2(r-2M)(r+2M\sin^2\vartheta)}{r^2\Lambda^2}, \quad R_{rr} = -\frac{4B^2[r\cos^2\vartheta-(r-2M)\sin^2\vartheta]}{(r-2M)\Lambda^2}, \tag{12.273a}$$

$$R_{r\vartheta} = \frac{8B^2 r\sin\vartheta\cos\vartheta}{\Lambda^2}, \qquad R_{\vartheta\vartheta} = \frac{4B^2 r\left[r\cos^2\vartheta+(r-2M)\sin^2\vartheta\right]}{\Lambda^2}, \tag{12.273b}$$

$$R_{\varphi\varphi} = \frac{4B^2 r\sin^2\vartheta\left(r+2M\sin^2\vartheta\right)}{\Lambda^6}. \tag{12.273c}$$

Ricci and Kretschmann scalars:

$$R = 0, \tag{12.274a}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K} = \frac{16}{r^6\Lambda^8}\Big[&3B^8r^8\left(4r^2-18Mr+21M^2\right)\sin^8\vartheta\\ &+2B^4r^4\left(31M^2-37Mr-24B^2r^4\cos^2\vartheta+42B^2Mr^3\cos^2\vartheta+10r^2+6B^4r^6\cos^4\vartheta\right)\sin^6\vartheta\\ &+2B^2r^2\left(-3Mr+20B^2r^4\cos^2\vartheta+6M^2-46B^2Mr^3\cos^2\vartheta-12B^4r^6\cos^4\vartheta\right)\sin^4\vartheta\\ &-6B^6r^6\left(6B^2Mr^3\cos^2\vartheta+4r^2-4B^2r^4\cos^2\vartheta+18M^2-17Mr\right)\\ &+20B^4r^6\cos^4\vartheta+12B^2Mr^3\cos^2\vartheta+3M^2\Big].\end{aligned} \tag{12.274b}$$

Static local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(t)} = \frac{1}{\Lambda\sqrt{1-2m/r}}\partial_t, \quad \mathbf{e}_{(r)} = \frac{\sqrt{1-2m/r}}{\Lambda}\partial_r, \quad \mathbf{e}_{(\vartheta)} = \frac{1}{\Lambda r}\partial_\vartheta, \quad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{\Lambda}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.275}$$

Dual tetrad:

$$\boldsymbol{\theta}^{(t)} = \Lambda\sqrt{1-\frac{2m}{r}}dt, \quad \boldsymbol{\theta}^{(r)} = \frac{\Lambda}{\sqrt{1-2m/r}}dr, \quad \boldsymbol{\theta}^{(\vartheta)} = \Lambda r\,d\vartheta, \quad \boldsymbol{\theta}^{(\varphi)} = \frac{r\sin\vartheta}{\Lambda}\,d\varphi. \tag{12.276}$$

Euler-Lagrange:

The Euler-Lagrangian formalism, Sec. 12.3.1, for geodesics in the $\vartheta = \pi/2$ hyperplane yields

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2(1-r_s/r)}{r^2} - \frac{k^2}{\Lambda^4} + \kappa\frac{1-r_s/r}{\Lambda^2} = 0 \tag{12.277}$$

with constants of motion $k = \Lambda^2(1-r_s/r)\dot{t}$ and $h = (r^2/\Lambda^2)\dot{\varphi}$.

Further reading:

Ernst, Dhurandhar and Sharma, Karas and Vokrouhlicky, Stuchlík and Hledík.

12.3.11 Friedman-Robertson-Walker

The Friedman-Robertson-Walker metric describes a general homogeneous and isotropic universe. In a general form it reads:

$$ds^2 = -c^2dt^2 + R^2d\sigma^2 \tag{12.278}$$

with $R = R(t)$ being an arbitrary function of time only and $d\sigma^2$ being a metric of a 3-space of constant curvature for which three explicit forms will be described here.
In all formulas in this section a dot denotes differentiation with respect to t, e.g. $\dot{R} = dR(t)/dt$.

Form 1

$$\boxed{ds^2 = -c^2dt^2 + R^2\left\{\frac{d\eta^2}{1-k\eta^2} + \eta^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)\right\}} \tag{12.279}$$

Christoffel symbols:

$$\Gamma^{\eta}_{t\eta} = \frac{\dot{R}}{R}, \qquad \Gamma^{\vartheta}_{t\vartheta} = \frac{\dot{R}}{R}, \qquad \Gamma^{\varphi}_{t\varphi} = \frac{\dot{R}}{R}, \tag{12.280a}$$

$$\Gamma^{t}_{\eta\eta} = \frac{R\dot{R}}{c^2(1-k\eta^2)}, \quad \Gamma^{\eta}_{\eta\eta} = \frac{k\eta}{1-k\eta^2}, \qquad \Gamma^{\vartheta}_{\eta\vartheta} = \frac{1}{\eta}, \tag{12.280b}$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\eta\varphi} = \frac{1}{\eta}, \qquad \Gamma^{t}_{\vartheta\vartheta} = \frac{R\eta^2\dot{R}}{c^2}, \qquad \Gamma^{\eta}_{\vartheta\vartheta} = (k\eta^2-1)\eta, \tag{12.280c}$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi} = \cot\vartheta, \qquad \Gamma^{t}_{\varphi\varphi} = \frac{R\eta^2\sin^2\vartheta\dot{R}}{c^2}, \qquad \Gamma^{\eta}_{\varphi\varphi} = (k\eta^2-1)\eta\sin^2\vartheta, \tag{12.280d}$$

$$\Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta. \tag{12.280e}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{t\eta t\eta} = \frac{R\ddot{R}}{k\eta^2-1}, \qquad R_{t\vartheta t\vartheta} = -R\eta^2\ddot{R}, \tag{12.281a}$$

$$R_{t\varphi t\varphi} = -R\eta^2\sin^2\vartheta\ddot{R}, \qquad R_{\eta\vartheta\eta\vartheta} = -\frac{R^2\eta^2\left(\dot{R}^2+kc^2\right)}{c^2(k\eta^2-1)}, \tag{12.281b}$$

$$R_{\eta\varphi\eta\varphi} = -\frac{R^2\eta^2\sin^2\vartheta\left(\dot{R}^2+kc^2\right)}{c^2(k\eta^2-1)}, \qquad R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = \frac{R^2\eta^4\sin^2\vartheta\left(\dot{R}^2+kc^2\right)}{c^2}. \tag{12.281c}$$

Ricci-Tensor:

$$R_{tt} = -3\frac{\ddot{R}}{R}, \qquad R_{\eta\eta} = \frac{R\ddot{R}+2(\dot{R}^2+kc^2)}{c^2(1-k\eta^2)}, \tag{12.282a}$$

$$R_{\vartheta\vartheta} = \eta^2\frac{R\ddot{R}+2(\dot{R}^2+kc^2)}{c^2}, \qquad R_{\varphi\varphi} = \eta^2\sin^2\vartheta\frac{R\ddot{R}+2(\dot{R}^2+kc^2)}{c^2}. \tag{12.282b}$$

The *Ricci scalar and Kretschmann scalar read:*

$$\mathcal{R} = 6\frac{R\ddot{R}+\dot{R}^2+kc^2}{R^2c^2}, \qquad \mathcal{K} = 12\frac{\ddot{R}^2R^2+\dot{R}^4+2\dot{R}^2kc^2+k^2c^4}{R^4c^4}. \tag{12.283}$$

Local tetrad:

$$e_{(t)} = \frac{1}{c}\partial_t, \qquad e_{(\eta)} = \frac{\sqrt{1-k\eta^2}}{R}\partial_\eta, \qquad e_{\vartheta} = \frac{1}{R\eta}\partial_\vartheta, \qquad e_{\varphi} = \frac{1}{R\eta\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.284}$$

Ricci rotation coefficients:

$$\begin{aligned}&\gamma_{(\eta)(t)(\eta)} = \gamma_{(\vartheta)(t)(\vartheta)} = \gamma_{(\varphi)(t)(\varphi)} = \frac{\dot{R}}{Rc} \qquad \gamma_{(\vartheta)(\eta)(\vartheta)} = \gamma_{(\varphi)(\eta)(\varphi)} = \frac{\sqrt{1-k\eta^2}}{R\eta},\\ &\gamma_{(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = \frac{\cot\vartheta}{R\eta}.\end{aligned} \tag{12.285}$$

The contractions of the Ricci rotation coefficients read

$$\gamma_{(t)} = \frac{3\dot{R}}{Rc}, \qquad \gamma_{(r)} = \frac{2\sqrt{1-k\eta^2}}{R\eta}, \qquad \gamma_{(\vartheta)} = \frac{\cot\vartheta}{R\eta}. \tag{12.286}$$

Riemann-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(t)(\eta)(t)(\eta)} = R_{(t)(\vartheta)(t)(\vartheta)} = R_{(t)(\varphi)(t)(\varphi)} = -\frac{\ddot{R}}{Rc^2} \tag{12.287a}$$

$$R_{(\eta)(\vartheta)(\eta)(\vartheta)} = R_{(\eta)(\varphi)(\eta)(\varphi)} = R_{(\vartheta)(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = \frac{\dot{R}^2 + kc^2}{R^2c^2}. \tag{12.287b}$$

Ricci-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(t)(t)} = -\frac{3\ddot{R}}{Rc^2}, \qquad R_{(r)(r)} = R_{(\vartheta)(\vartheta)} = R_{(\varphi)(\varphi)} = \frac{R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2kc^2}{R^2c^2}. \tag{12.288}$$

Form 2

$$\boxed{ds^2 = -c^2dt^2 + \frac{R^2}{(1+\frac{k}{4}r^2)^2}\left\{dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)\right\}} \tag{12.289}$$

Christoffel symbols:

$$\Gamma^r_{tr} = \frac{\dot{R}}{R}, \qquad \Gamma^\vartheta_{t\vartheta} = \frac{\dot{R}}{R}, \qquad \Gamma^\varphi_{t\varphi} = \frac{\dot{R}}{R}, \tag{12.290a}$$

$$\Gamma^t_{rr} = 16\frac{R\dot{R}}{c^2(4+kr^2)^2}, \quad \Gamma^r_{rr} = -\frac{2kr}{4+kr^2}, \quad \Gamma^\vartheta_{r\vartheta} = \frac{4-kr^2}{(4+kr^2)r}, \tag{12.290b}$$

$$\Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{4-kr^2}{(4+kr^2)r}, \quad \Gamma^t_{\vartheta\vartheta} = 16\frac{Rr^2\dot{R}}{c^2(4+kr^2)^2}, \quad \Gamma^r_{\vartheta\vartheta} = \frac{r(kr^2-4)}{4+kr^2}, \tag{12.290c}$$

$$\Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} = \cot\vartheta, \quad \Gamma^t_{\varphi\varphi} = 16\frac{Rr^2\sin^2\vartheta\dot{R}}{c^2(4+kr^2)^2}, \quad \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta, \tag{12.290d}$$

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = \frac{r\sin^2\vartheta(kr^2-4)}{4+kr^2}. \tag{12.290e}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{trtr} = -16\frac{R\ddot{R}}{(4+kr^2)^2}, \qquad R_{t\vartheta t\vartheta} = -16\frac{Rr^2\ddot{R}}{(4+kr^2)^2}, \tag{12.291a}$$

$$R_{t\varphi t\varphi} = -16\frac{Rr^2\sin^2\vartheta\ddot{R}}{(4+kr^2)^2}, \qquad R_{r\vartheta r\vartheta} = 256\frac{R^2r^2\left(\dot{R}^2+kc^2\right)}{c^2(4+kr^2)^4}, \tag{12.291b}$$

$$R_{r\varphi r\varphi} = 256\frac{R^2r^2\sin^2\vartheta\left(\dot{R}^2+kc^2\right)}{c^2(4+kr^2)^4}, \quad R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = 256\frac{R^2r^4\sin^2\vartheta\left(\dot{R}^2+kc^2\right)}{c^2(4+kr^2)^4}. \tag{12.291c}$$

Ricci-Tensor:

$$R_{tt} = -3\frac{\ddot{R}}{R}, \qquad R_{rr} = 16\frac{R\ddot{R} + 2(\dot{R}^2+kc^2)}{c^2(4+kr^2)^2}, \tag{12.292a}$$

$$R_{\vartheta\vartheta} = 16r^2\frac{R\ddot{R} + 2(\dot{R}^2+kc^2)}{c^2(4+kr^2)^2}, \qquad R_{\varphi\varphi} = 16r^2\sin^2\vartheta\frac{R\ddot{R} + 2(\dot{R}^2+kc^2)}{c^2(4+kr^2)^2}. \tag{12.292b}$$

The *Ricci scalar and Kretschmann scalar read:*

$$\mathcal{R} = 6\frac{R\ddot{R} + \dot{R}^2 + kc^2}{R^2c^2}, \qquad \mathcal{K} = 12\frac{\ddot{R}^2R^2 + \dot{R}^4 + 2\dot{R}^2kc^2 + k^2c^4}{R^4c^4}. \tag{12.293}$$

Local tetrad:

$$e_{(t)} = \frac{1}{c}\partial_t, \qquad e_{(r)} = \frac{1+\frac{k}{4}r^2}{R}\partial_r, \qquad e_\vartheta = \frac{1+\frac{k}{4}r^2}{Rr}\partial_\vartheta, \qquad e_\varphi = \frac{1+\frac{k}{4}r^2}{Rr\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.294}$$

Ricci rotation coefficients:

$$\gamma_{(r)(t)(r)} = \gamma_{(\vartheta)(t)(\vartheta)} = \gamma_{(\varphi)(t)(\varphi)} = \frac{\dot{R}}{Rc} \qquad \gamma_{(\vartheta)(r)(\vartheta)} = \gamma_{(\varphi)(r)(\varphi)} = -\frac{\frac{k}{4}r^2 - 1}{Rr}, \tag{12.295a}$$

$$\gamma_{(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = \frac{(\frac{k}{4}r^2+1)\cot\vartheta}{Rr}. \tag{12.295b}$$

The contractions of the Ricci rotation coefficients read

$$\gamma_{(t)} = \frac{3\dot{R}}{Rc}, \qquad \gamma_{(r)} = 2\frac{1-\frac{k}{4}r^2}{Rr}, \qquad \gamma_{(\vartheta)} = \frac{(\frac{k}{4}r^2+1)\cot\vartheta}{Rr}. \tag{12.296}$$

Riemann-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(t)(\eta)(t)(\eta)} = R_{(t)(\vartheta)(t)(\vartheta)} = R_{(t)(\varphi)(t)(\varphi)} = -\frac{\ddot{R}}{Rc^2} \tag{12.297a}$$

$$R_{(\eta)(\vartheta)(\eta)(\vartheta)} = R_{(\eta)(\varphi)(\eta)(\varphi)} = R_{(\vartheta)(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = \frac{\dot{R}^2 + kc^2}{R^2c^2}. \tag{12.297b}$$

Ricci-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(t)(t)} = -\frac{3\ddot{R}}{Rc^2}, \qquad R_{(r)(r)} = R_{(\vartheta)(\vartheta)} = R_{(\varphi)(\varphi)} = \frac{R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2kc^2}{R^2c^2}. \tag{12.298}$$

Form 3

The following forms of the metric are obtained from 12.279 by setting $\eta = \sin\psi, \psi, \sinh\psi$ for $k = 1, 0, -1$ respectively.

Positive Curvature

$$\boxed{ds^2 = -c^2dt^2 + R^2\left\{d\psi^2 + \sin^2\psi\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)\right\}} \tag{12.299}$$

Christoffel symbols:

$$\Gamma^\psi_{t\psi} = \frac{\dot{R}}{R}, \qquad \Gamma^\vartheta_{t\vartheta} = \frac{\dot{R}}{R}, \qquad \Gamma^\varphi_{t\varphi} = \frac{\dot{R}}{R}, \tag{12.300a}$$

$$\Gamma^t_{\psi\psi} = \frac{R\dot{R}}{c^2}, \qquad \Gamma^\vartheta_{\psi\vartheta} = \cot\psi, \qquad \Gamma^\varphi_{\psi\varphi} = \cot\psi, \tag{12.300b}$$

$$\Gamma^t_{\vartheta\vartheta} = \frac{R\sin^2\psi\dot{R}}{c^2}, \qquad \Gamma^\psi_{\vartheta\vartheta} = -\sin\psi\cos\psi, \qquad \Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} = \cot(\vartheta), \tag{12.300c}$$

$$\Gamma^t_{\varphi\varphi} = \frac{R\sin^2\psi\sin^2\vartheta\dot{R}}{c^2}, \Gamma^\psi_{\varphi\varphi} = -\sin\psi\cos\psi\sin^2\vartheta, \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta. \tag{12.300d}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{t\psi t\psi} = -R\ddot{R}, \qquad R_{t\vartheta t\vartheta} = -R\sin^2\psi\ddot{R}, \tag{12.301a}$$

$$R_{t\varphi t\varphi} = -R\sin^2\psi\sin^2\vartheta\ddot{R}, \qquad R_{\psi\vartheta\psi\vartheta} = \frac{R^2\sin^2\psi\left(\dot{R}^2+c^2\right)}{c^2}, \tag{12.301b}$$

$$R_{\psi\varphi\psi\varphi} = \frac{R^2\sin^2\psi\sin^2\vartheta\left(\dot{R}^2+c^2\right)}{c^2}, \quad R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = \frac{R^2\sin^4\psi\sin^2\vartheta\left(\dot{R}^2+c^2\right)}{c^2}. \tag{12.301c}$$

Ricci-Tensor:

$$R_{tt} = -3\frac{\ddot{R}}{R}, \qquad R_{\psi\psi} = \frac{R\ddot{R}+2(\dot{R}^2+c^2)}{c^2}, \tag{12.302a}$$

$$R_{\vartheta\vartheta} = \sin^2\psi\frac{R\ddot{R}+2(\dot{R}^2+c^2)}{c^2}, \qquad R_{\varphi\varphi} = \sin^2\vartheta\sin^2\psi\frac{R\ddot{R}+2(\dot{R}^2+c^2)}{c^2}. \tag{12.302b}$$

The *Ricci scalar and Kretschmann read*

$$\mathcal{R} = 6\frac{R\ddot{R}+\dot{R}^2+c^2}{R^2c^2}, \qquad \mathcal{K} = 12\frac{\ddot{R}^2R^2+\dot{R}^4+2\dot{R}^2c^2+c^4}{R^4c^4}. \tag{12.303}$$

Local tetrad:

$$e_{(t)} = \frac{1}{c}\partial_t, \qquad e_{(\psi)} = \frac{1}{R}\partial_\psi, \qquad e_\vartheta = \frac{1}{R\sin\psi}\partial_\vartheta, \qquad e_\varphi = \frac{1}{R\sin\psi\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.304}$$

Ricci rotation coefficients:

$$\gamma_{(\psi)(t)(\psi)} = \gamma_{(\vartheta)(t)(\vartheta)} = \gamma_{(\varphi)(t)(\varphi)} = \frac{\dot{R}}{Rc} \qquad \gamma_{(\vartheta)(\psi)(\vartheta)} = \gamma_{(\varphi)(\psi)(\varphi)} = \frac{\cot\psi}{R}, \tag{12.305a}$$

$$\gamma_{(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = \frac{\cot\theta}{R\sin\psi}. \tag{12.305b}$$

The contractions of the Ricci rotation coefficients read

$$\gamma_{(t)} = \frac{3\dot{R}}{Rc}, \qquad \gamma_{(r)} = 2\frac{\cot\psi}{R}, \qquad \gamma_{(\vartheta)} = \frac{\cot\vartheta}{R\sin\psi}. \tag{12.306}$$

Riemann-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(t)(\psi)(t)(\psi)} = R_{(t)(\vartheta)(t)(\vartheta)} = R_{(t)(\varphi)(t)(\varphi)} = -\frac{\ddot{R}}{Rc^2}, \tag{12.307a}$$

$$R_{(\psi)(\vartheta)(\psi)(\vartheta)} = R_{(\psi)(\varphi)(\psi)(\varphi)} = R_{(\vartheta)(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = \frac{\dot{R}^2+c^2}{R^2c^2}. \tag{12.307b}$$

Ricci-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(t)(t)} = -\frac{3\ddot{R}}{Rc^2}, \qquad R_{(\psi)(\psi)} = R_{(\vartheta)(\vartheta)} = R_{(\varphi)(\varphi)} = \frac{R\ddot{R}+2(\dot{R}^2+c^2)}{R^2c^2}. \tag{12.308}$$

Vanishing Curvature

$$\boxed{ds^2 = -c^2dt^2 + R^2\left\{d\psi^2 + \psi^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)\right\}} \tag{12.309}$$

Christoffel symbols:

$$\Gamma^{\psi}_{t\psi} = \frac{\dot{R}}{R}, \qquad \Gamma^{\vartheta}_{t\vartheta} = \frac{\dot{R}}{R}, \qquad \Gamma^{\varphi}_{t\varphi} = \frac{\dot{R}}{R}, \tag{12.310a}$$

$$\Gamma^{t}_{\psi\psi} = \frac{R\dot{R}}{c^2}, \qquad \Gamma^{\vartheta}_{\psi\vartheta} = \frac{1}{\psi}, \qquad \Gamma^{\varphi}_{\psi\varphi} = \frac{1}{\psi}, \tag{12.310b}$$

$$\Gamma^{t}_{\vartheta\vartheta} = \frac{R\psi^2\dot{R}}{c^2}, \qquad \Gamma^{\psi}_{\vartheta\vartheta} = -\psi, \qquad \Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi} = \cot(\vartheta), \tag{12.310c}$$

$$\Gamma^{t}_{\varphi\varphi} = \frac{R\psi^2\sin^2\vartheta\dot{R}}{c^2}, \qquad \Gamma^{\psi}_{\varphi\varphi} = -\psi\sin^2\vartheta, \quad \Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta. \tag{12.310d}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{t\psi t\psi} = -R\ddot{R}, \qquad R_{t\vartheta t\vartheta} = -R\psi^2\ddot{R}, \tag{12.311a}$$

$$R_{t\varphi t\varphi} = -R\psi^2\sin^2\vartheta\ddot{R}, \qquad R_{\psi\vartheta\psi\vartheta} = \frac{R^2\psi^2\dot{R}^2}{c^2}, \tag{12.311b}$$

$$R_{\psi\varphi\psi\varphi} = \frac{R^2\psi^2\sin^2\vartheta\dot{R}^2}{c^2}, \qquad R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = \frac{R^2\psi^4\sin^2\vartheta\dot{R}^2}{c^2}. \tag{12.311c}$$

Ricci-Tensor:

$$R_{tt} = -3\frac{\ddot{R}}{R}, \qquad R_{\psi\psi} = \frac{R\ddot{R} + 2\dot{R}^2}{c^2}, \tag{12.312a}$$

$$R_{\vartheta\vartheta} = \psi^2\frac{R\ddot{R} + 2\dot{R}^2}{c^2}, \qquad R_{\varphi\varphi} = \sin^2\vartheta\psi^2\frac{R\ddot{R} + 2\dot{R}^2}{c^2}. \tag{12.312b}$$

The *Ricci scalar and Kretschmann read*

$$\mathcal{R} = 6\frac{R\ddot{R} + \dot{R}^2}{R^2c^2}, \qquad \mathcal{K} = 12\frac{\ddot{R}^2R^2 + \dot{R}^4}{R^4c^4}. \tag{12.313}$$

Local tetrad:

$$e_{(t)} = \frac{1}{c}\partial_t, \qquad e_{(\psi)} = \frac{1}{R}\partial_\psi, \qquad e_{\vartheta} = \frac{1}{R\psi}\partial_\vartheta, \qquad e_{\varphi} = \frac{1}{R\psi\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.314}$$

Ricci rotation coefficients:

$$\gamma_{(\psi)(t)(\psi)} = \gamma_{(\vartheta)(t)(\vartheta)} = \gamma_{(\varphi)(t)(\varphi)} = \frac{\dot{R}}{Rc} \qquad \gamma_{(\vartheta)(\psi)(\vartheta)} = \gamma_{(\varphi)(\psi)(\varphi)} = \frac{1}{R\psi}, \tag{12.315a}$$

$$\gamma_{(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = \frac{\cot(\vartheta)}{R\psi}. \tag{12.315b}$$

The contractions of the Ricci rotation coefficients read

$$\gamma_{(t)} = \frac{3\dot{R}}{Rc}, \qquad \gamma_{(r)} = \frac{2}{R\psi}, \qquad \gamma_{(\vartheta)} = \frac{\cot\vartheta}{R\psi}. \tag{12.316}$$

Riemann-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(t)(\psi)(t)(\psi)} = R_{(t)(\vartheta)(t)(\vartheta)} = R_{(t)(\varphi)(t)(\varphi)} = -\frac{\ddot{R}}{Rc^2}, \tag{12.317a}$$

$$R_{(\psi)(\vartheta)(\psi)(\vartheta)} = R_{(\psi)(\varphi)(\psi)(\varphi)} = R_{(\vartheta)(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = \frac{\dot{R}^2}{R^2c^2}. \tag{12.317b}$$

Ricci-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(t)(t)} = -\frac{3\ddot{R}}{Rc^2}, \qquad R_{(\psi)(\psi)} = R_{(\vartheta)(\vartheta)} = R_{(\varphi)(\varphi)} = \frac{R\ddot{R} + 2\dot{R}^2}{R^2c^2}. \tag{12.318}$$

Negative Curvature

$$\boxed{ds^2 = -c^2dt^2 + R^2\left\{d\psi^2 + \sinh^2\psi\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)\right\}} \tag{12.319}$$

Christoffel symbols:

$$\Gamma^{\psi}_{t\psi} = \frac{\dot{R}}{R}, \qquad \Gamma^{\vartheta}_{t\vartheta} = \frac{\dot{R}}{R}, \qquad \Gamma^{\varphi}_{t\varphi} = \frac{\dot{R}}{R}, \tag{12.320a}$$

$$\Gamma^{t}_{\psi\psi} = \frac{R\dot{R}}{c^2}, \qquad \Gamma^{\vartheta}_{\psi\vartheta} = \coth\psi, \qquad \Gamma^{\varphi}_{\psi\varphi} = \coth\psi, \tag{12.320b}$$

$$\Gamma^{t}_{\vartheta\vartheta} = \frac{R\sinh^2\psi\dot{R}}{c^2}, \qquad \Gamma^{\psi}_{\vartheta\vartheta} = -\sinh\psi\cosh\psi, \qquad \Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi} = \cot\vartheta, \tag{12.320c}$$

$$\Gamma^{t}_{\varphi\varphi} = \frac{R\sinh^2\psi\sin^2\vartheta\dot{R}}{c^2}, \quad \Gamma^{\psi}_{\varphi\varphi} = -\sinh\psi\cosh\psi\sin^2\vartheta, \quad \Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta. \tag{12.320d}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{t\psi t\psi} = -R\ddot{R}, \qquad R_{t\vartheta t\vartheta} = -R\sinh^2\psi\ddot{R}, \tag{12.321a}$$

$$R_{t\varphi t\varphi} = -R\sinh^2\psi\sin^2\vartheta\ddot{R}, \qquad R_{\psi\vartheta\psi\vartheta} = \frac{R^2\sinh^2\psi\left(\dot{R}^2 - c^2\right)}{c^2}, \tag{12.321b}$$

$$R_{\psi\varphi\psi\varphi} = \frac{R^2\sinh^2\psi\sin^2\vartheta\left(\dot{R}^2 - c^2\right)}{c^2}, \quad R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = \frac{R^2\sinh\psi^4\sin^2\vartheta\left(\dot{R}^2 - c^2\right)}{c^2}. \tag{12.321c}$$

Ricci-Tensor:

$$R_{tt} = -3\frac{\ddot{R}}{R}, \qquad R_{\psi\psi} = \frac{R\ddot{R} + 2(\dot{R}^2 - c^2)}{c^2}, \tag{12.322a}$$

$$R_{\vartheta\vartheta} = \sinh^2\psi\frac{R\ddot{R} + 2(\dot{R}^2 - c^2)}{c^2}, \quad R_{\varphi\varphi} = \sin^2\vartheta\sin^2\psi\frac{R\ddot{R} + 2(\dot{R}^2 - c^2)}{c^2}. \tag{12.322b}$$

The *Ricci scalar and Kretschmann read*

$$\mathcal{R} = 6\frac{R\ddot{R} + \dot{R}^2 - c^2}{R^2c^2}, \qquad \mathcal{K} = 12\frac{\ddot{R}^2R^2 + \dot{R}^4 - 2\dot{R}^2c^2 + c^4}{R^4c^4}. \tag{12.323}$$

Local tetrad:

$$e_{(t)} = \frac{1}{c}\partial_t, \qquad e_{(\psi)} = \frac{1}{R}\partial_\psi, \qquad e_{\vartheta} = \frac{1}{R\sinh\psi}\partial_\vartheta, \qquad e_{\varphi} = \frac{1}{R\sinh\psi\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.324}$$

Ricci rotation coefficients:

$$\gamma_{(\psi)(t)(\psi)} = \gamma_{(\vartheta)(t)(\vartheta)} = \gamma_{(\varphi)(t)(\varphi)} = \frac{\dot{R}}{Rc} \qquad \gamma_{(\vartheta)(\psi)(\vartheta)} = \gamma_{(\varphi)(\psi)(\varphi)} = \frac{\coth\psi}{R}, \tag{12.325a}$$

$$\gamma_{(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = \frac{\cot\theta}{R\sinh\psi}. \tag{12.325b}$$

The contractions of the Ricci rotation coefficients read

$$\gamma_{(t)} = \frac{3\dot{R}}{Rc}, \qquad \gamma_{(r)} = 2\frac{\coth\psi}{R}, \qquad \gamma_{(\vartheta)} = \frac{\cot\vartheta}{R\sinh\psi}. \tag{12.326}$$

Riemann-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(t)(\psi)(t)(\psi)} = R_{(t)(\vartheta)(t)(\vartheta)} = R_{(t)(\varphi)(t)(\varphi)} = -\frac{\ddot{R}}{Rc^2}, \tag{12.327a}$$

$$R_{(\psi)(\vartheta)(\psi)(\vartheta)} = R_{(\psi)(\varphi)(\psi)(\varphi)} = R_{(\vartheta)(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = \frac{\dot{R}^2 - c^2}{R^2c^2}. \tag{12.327b}$$

Ricci-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(t)(t)} = -\frac{3\ddot{R}}{Rc^2}, \qquad R_{(\psi)(\psi)} = R_{(\vartheta)(\vartheta)} = R_{(\varphi)(\varphi)} = \frac{R\ddot{R} + 2(\dot{R}^2 - c^2)}{R^2c^2}. \tag{12.328}$$

Further reading:
Rindler

12.3.12 Gödel Universe

Gödel introduced a homogeneous and rotating universe model in . We follow the notation of

Cylindrical coordinates

The Gödel metric in cylindrical coordinates is

$$\boxed{ds^2 = -c^2dt^2 + \frac{dr^2}{1+[r/(2a)]^2} + r^2\left[1 - \left(\frac{r}{2a}\right)^2\right]d\varphi^2 + dz^2 - 2r^2\frac{c}{\sqrt{2}a}dtd\varphi,} \tag{12.329}$$

where $2a$ is the Gödel radius.

Christoffel symbols:

$$\Gamma^t_{tr} = \frac{r}{2a^2}\frac{1}{1+[r/(2a)]^2}, \qquad \Gamma^\varphi_{tr} = -\frac{c}{\sqrt{2}ar}\frac{1}{1+[r/(2a)]^2}, \tag{12.330a}$$

$$\Gamma^r_{t\varphi} = \frac{cr}{\sqrt{2}a}\left[1 + \left(\frac{r}{2a}\right)\right]^2, \qquad \Gamma^r_{rr} = -\frac{r}{4a^2}\frac{1}{1+[r/(2a)]^2}, \tag{12.330b}$$

$$\Gamma^t_{r\varphi} = \frac{r^3}{4\sqrt{2}ca^3}\frac{1}{1+[r/(2a)]^2}, \qquad \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r}\frac{1}{1+[r/(2a)]^2}, \tag{12.330c}$$

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = r\left[1 + \left(\frac{r}{2a}\right)^2\right]\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]. \tag{12.330d}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{trtr} = \frac{c^2}{2a^2}\frac{1}{1+[r/(2a)]^2}, \qquad R_{trr\varphi} = -\frac{cr^2}{2\sqrt{2}a^3}\frac{1}{1+[r/(2a)]^2}, \tag{12.331a}$$

$$R_{t\varphi t\varphi} = \frac{c^2r^2}{2a^2}\frac{1}{1+[r/(2a)]^2}, \quad R_{r\varphi r\varphi} = \frac{r^2}{2a^2}\frac{1+3[r/(2a)]^2}{1+[r/(2a)]^2}. \tag{12.331b}$$

Ricci-Tensor:

$$R_{tt} = \frac{c^2}{a^2}, \quad R_{t\varphi} = \frac{r^2c}{\sqrt{2}a^3}, \quad R_{\varphi\varphi} = \frac{r^4}{2a^4}. \tag{12.332}$$

Ricci and Kretschmann scalar

$$\mathcal{R} = -\frac{1}{a^2}, \qquad \mathcal{K} = \frac{3}{a^4}. \tag{12.333}$$

cosmological constant:

$$\Lambda = \frac{R}{2} \tag{12.334}$$

Killing vectors:
An infinitesimal isometric transformation $x'^\mu = x^\mu + \epsilon\xi^\mu(x^\nu)$ leaves the metric unchanged, that is $g'_{\mu\nu}(x'^\sigma) = g_{\mu\nu}(x'^\sigma)$. A killing vector field ξ^μ is solution to the killing equation $\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0$. There exist five killing vector fields in Gödel's spacetime:

$$\underset{a}{\xi^\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underset{b}{\xi^\mu} = \frac{1}{\sqrt{1+[r/(2a)]^2}} \begin{pmatrix} \frac{r}{\sqrt{2}c}\cos\varphi \\ a\left(1+[r/(2a)]^2\right)\sin\varphi \\ \frac{a}{r}\left(1+2[r/(2a)]^2\right)\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underset{c}{\xi^\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{12.335a}$$

$$\underset{d}{\xi^\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underset{e}{\xi^\mu} = \frac{1}{\sqrt{1+[r/(2a)]^2}} \begin{pmatrix} \frac{r}{\sqrt{2}c}\sin\varphi \\ -a\left(1+[r/(2a)]^2\right)\cos\varphi \\ \frac{a}{r}\left(1+2[r/(2a)]^2\right)\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{12.335b}$$

An arbitrary linear combination of killing vector fields is again a killing vector field.

Local tetrad:
For the local tetrad in Gödel's spacetime an ansatz similar to the local tetrad of a rotating spacetime in spherical coordinates (Sec. 12.3.1) can be used. After substituting $\vartheta \to z$ and swapping base vectors $\mathbf{e}_{(2)}$ and $\mathbf{e}_{(3)}$ an orthonormalized and right-handed local tetrad is obtained.

$$\mathbf{e}_{(0)} = \Gamma\left(\partial_t + \zeta\partial_\varphi\right), \quad \mathbf{e}_{(1)} = \sqrt{1+[r/(2a)]^2}\partial_r, \quad \mathbf{e}_{(2)} = \Delta\Gamma\left(A\partial_t + B\partial_\varphi\right), \quad \mathbf{e}_{(3)} = \partial_z, \tag{12.336a}$$

where

$$A = -\frac{r^2c}{\sqrt{2}a} + \zeta r^2\left(1-[r/(2a)]^2\right), \qquad B = c^2 + \frac{\zeta r^2 c}{\sqrt{2}a}, \tag{12.337a}$$

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{c^2 + \zeta r^2 c\sqrt{2}/a - \zeta^2 r^2\left(1-[r/(2a)]^2\right)}}, \qquad \Delta = \frac{1}{rc\sqrt{1+[r/(2a)]^2}}. \tag{12.337b}$$

Transformation between local direction $y^{(i)}$ and coordinate direction y^μ:

$$y^0 = y^{(0)}\Gamma + y^{(2)}\Delta\Gamma A, \quad y^1 = y^{(1)}\sqrt{1+[r/(2a)]^2}, \quad y^2 = y^{(0)}\Gamma\zeta + y^{(2)}\Delta\Gamma B, \quad y^3 = y^{(3)}. \tag{12.338}$$

with the above abbreviations.

Scaled cylindrical coordinates

If we apply the simple transformation

$$T = \frac{t}{r_G}, \qquad R = \frac{r}{r_G}, \qquad \phi = \varphi, \qquad Z = \frac{z}{r_G}, \tag{12.339}$$

with $r_G = 2a$, we find a formulation for the metric scaling with r_G, which is

$$\boxed{ds^2 = r_G^2 \left(-c^2 dT^2 + \frac{dR^2}{1+R^2} + R^2(1-R^2) D\phi^2 + dZ^2 - 2\sqrt{2} c R^2 \, dT d\phi \right).} \tag{12.340}$$

Christoffel symbols:

$$\Gamma^T_{TR} = \frac{2R}{1+R^2}, \qquad \Gamma^\phi_{TR} = -\frac{\sqrt{2}c}{R(1+R^2)}, \tag{12.341a}$$

$$\Gamma^R_{T\phi} = \sqrt{2} c R (1+R^2), \qquad \Gamma^R_{RR} = -\frac{R}{1+R^2}, \tag{12.341b}$$

$$\Gamma^T_{R\phi} = \frac{\sqrt{2} R^3}{c(1+R^2)}, \qquad \Gamma^\phi_{R\phi} = \frac{1}{R(1+R^2)}, \tag{12.341c}$$

$$\Gamma^R_{\phi\phi} = R(1+R^2)(2R^2-1). \tag{12.341d}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{TRTR} = \frac{2 r_G^2 c^2}{1+R^2}, \qquad R_{TRR\phi} = -\frac{2\sqrt{2} r_G^2 c R^2}{1+R^2}, \tag{12.342a}$$

$$R_{T\phi T\phi} = 2 c^2 r_G^2 R^2 (1+R^2), \quad R_{R\phi R\phi} = \frac{2 r_G^2 R^2 (1+3R^2)}{1+R^2}. \tag{12.342b}$$

Ricci-Tensor:

$$R_{TT} = 4c^2, \quad R_{T\phi} = 4\sqrt{2} c R^2, \quad R_{\phi\phi} = 8R^4. \tag{12.343}$$

Ricci and Kretschmann scalar

$$\mathcal{R} = -\frac{4}{r_G^2}, \qquad \mathcal{K} = \frac{48}{r_G^4}. \tag{12.344}$$

cosmological constant:

$$\Lambda = \frac{R}{2} \tag{12.345}$$

Killing vectors:
The Killing vectors read

$$\underset{a}{\xi^\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underset{b}{\xi^\mu} = \frac{1}{\sqrt{1+R^2}} \begin{pmatrix} \frac{R}{\sqrt{2}c} \cos\varphi \\ \frac{1}{2}(1+R^2)\sin\varphi \\ \frac{1}{2R}(1+2R^2)\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underset{c}{\xi^\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{12.346a}$$

$$\underset{d}{\xi^\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underset{e}{\xi^\mu} = \frac{1}{\sqrt{1+R^2}} \begin{pmatrix} \frac{R}{\sqrt{2}c} \sin\varphi \\ -\frac{1}{2}(1+R^2)\cos\varphi \\ \frac{1}{2R}(1+2R^2)\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{12.346b}$$

Local tetrad:
After the transformation to scaled cylindrical coordinates, the local tetrad reads

$$\mathbf{e}_{(0)} = \frac{\Gamma}{r_G}\left(\partial_T + \zeta\partial_\phi\right), \quad \mathbf{e}_{(1)} = \frac{1}{r_G}\sqrt{1+R^2}\,\partial_R, \qquad \mathbf{e}_{(2)} = \frac{\Delta\Gamma}{r_G}\left(A\partial_T + B\partial_\phi\right), \quad \mathbf{e}_{(3)} = \frac{1}{r_G}\,\partial_Z, \tag{12.347a}$$

where

$$A = R^2\left[-\sqrt{2}c + (1-R^2)\zeta\right], \qquad B = c^2 + \sqrt{2}R^2 c\zeta, \tag{12.348a}$$

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{c^2 + 2\sqrt{2}R^2c\zeta - R^2(1-R^2)\zeta^2}}, \qquad \Delta = \frac{1}{Rc\sqrt{1+R^2}}. \tag{12.348b}$$

Transformation between local direction $y^{(i)}$ and coordinate direction y^μ:

$$y^0 = \frac{\Gamma}{r_G}y^{(0)} + \frac{\Delta\Gamma A}{r_G}y^{(2)}, \qquad y^1 = \frac{1}{r_G}\sqrt{1+R^2}y^{(1)}, \qquad y^2 = \frac{\Gamma\zeta}{r_G}y^{(0)} + \frac{\Delta\Gamma B}{r_G}y^{(2)}, \qquad y^3 = \frac{1}{r_G}y^{(3)}, \tag{12.349}$$

and the back transformation is given by

$$y^{(0)} = \frac{r_G}{\Gamma}\frac{By^0 - Ay^2}{B - \zeta A}, \qquad y^{(1)} = \frac{r_G}{\sqrt{1+R^2}}y^1, \qquad y^{(2)} = \frac{r_G}{\Delta\Gamma}\frac{y^2 - \zeta y^0}{B - \zeta A}, \qquad y^{(3)} = r_G y^3. \tag{12.350a}$$

12.3.13 Halilsoy standing wave

The standing wave metric by Halilsoy reads

$$\boxed{ds^2 = V\left[e^{2K}\left(d\rho^2 - dt^2\right) + \rho^2 d\varphi^2\right] + \frac{1}{V}\left(dz + A\,d\varphi\right)^2,} \tag{12.351}$$

where

$$V = \cosh^2\alpha e^{-2CJ_0(\rho)\cos(t)} + \sinh^2\alpha e^{2CJ_0(\rho)\cos(t)}, \tag{12.352a}$$

$$K = \frac{C^2}{2}\left[\rho^2\left(J_0(\rho)^2 + J_1(\rho)^2\right) - 2\rho J_0(\rho)J_1(\rho)\cos^2 t\right], \tag{12.352b}$$

$$A = -2C\sinh(2\alpha)\rho J_1(\rho)\sin(t). \tag{12.352c}$$

with spherical Bessel functions $J_{1,2}$ and parameters α and C.
Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(0)} = \frac{e^{-K}}{\sqrt{V}}\partial_t, \qquad \mathbf{e}_{(1)} = \frac{e^{-K}}{\sqrt{V}}\partial_\rho, \qquad \mathbf{e}_{(2)} = \frac{1}{\rho\sqrt{V}}\partial_\varphi - \frac{A}{\rho\sqrt{V}}\partial_z, \qquad \mathbf{e}_{(3)} = \sqrt{V}\partial_z. \tag{12.353}$$

dual tetrad:

$$\boldsymbol{\theta}^{(0)} = \sqrt{V}e^K\,dt, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(2)} = \sqrt{V}e^K\,d\rho, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(2)} = \sqrt{V}\rho\,d\varphi, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{V}}\left(dz + A\,d\varphi\right). \tag{12.354}$$

12.3.14 Janis-Newman-Winicour

The Janis-Newman-Winicour spacetime in spherical coordinates $(t, r, \vartheta, \varphi)$ is represented by the line element

$$\boxed{ds^2 = -\alpha^\gamma c^2 dt^2 + \alpha^{-\gamma} dr^2 + r^2 \alpha^{-\gamma+1} \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right),} \tag{12.355}$$

where $\alpha = 1 - r_s/(\gamma r)$. The Schwarzschild radius $r_s = 2GM/c^2$ is defined by Newton's constant G, the speed of light c, and the mass parameter M. For $\gamma = 1$, we obtain the Schwarzschild metric (12.119).

Christoffel symbols:

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{r_s c^2}{2r^2}\alpha^{2\gamma-1}, \qquad \Gamma^t_{tr} = \frac{r_s}{2\gamma r^2 \alpha}, \qquad \Gamma^r_{rr} = -\frac{r_s}{2\gamma r^2 \alpha}, \tag{12.356a}$$

$$\Gamma^\vartheta_{r\vartheta} = \frac{2\gamma r - r_s(\gamma+1)}{2\gamma r^2 \alpha}, \qquad \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{2\gamma r - r_s(\gamma+1)}{2\gamma r^2 \alpha}, \qquad \Gamma^r_{\vartheta\vartheta} = -\frac{2\gamma r - r_s(\gamma+1)}{2\gamma}, \tag{12.356b}$$

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = \Gamma^r_{\vartheta\vartheta}\sin^2\vartheta, \qquad \Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} = \cot\vartheta, \qquad \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta. \tag{12.356c}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{trtr} = -\frac{r_s c^2 \left[2\gamma r - r_s(\gamma+1)\right]\alpha^{\gamma-2}}{2\gamma r^4}, \qquad R_{t\vartheta t\vartheta} = \frac{r_s c^2 \left[2\gamma r - r_s(\gamma+1)\right]\alpha^{\gamma-1}}{4\gamma r^2}, \tag{12.357a}$$

$$R_{t\varphi t\varphi} = \frac{r_s c^2 \left[2\gamma r - r_s(\gamma+1)\right]\alpha^{\gamma-1}\sin^2\vartheta}{4\gamma r^2}, \quad R_{r\vartheta r\vartheta} = -\frac{r_s\left[2\gamma^2 r - r_s(\gamma+1)\right]}{4\gamma^2 r^2 \alpha^{\gamma-1}}, \tag{12.357b}$$

$$R_{r\varphi r\varphi} = -\frac{r_s\left[2\gamma^2 r - r_s(\gamma+1)\right]\sin^2\vartheta}{4\gamma^2 r^2 \alpha^{\gamma-1}}, \qquad R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = \frac{r_s\left[4\gamma^2 r - r_s(\gamma+1)^2\right]\sin^2\vartheta}{4\gamma^2\alpha^\gamma}. \tag{12.357c}$$

Weyl-Tensor:

$$C_{trtr} = -\frac{r_s c^2 \alpha^{\gamma-2}\beta}{6\gamma^2 r^4}, \qquad C_{t\vartheta t\vartheta} = \frac{r_s c^2 \alpha^{\gamma-1}\beta}{12\gamma^2 r^2}, \tag{12.358a}$$

$$C_{t\varphi t\varphi} = \frac{r_s c^2 \alpha^{\gamma-1}\beta\sin^2\vartheta}{12\gamma^2 r^2}, \qquad C_{r\vartheta r\vartheta} = -\frac{r_s\beta}{12\gamma^2 r^2 \alpha^{\gamma-1}}, \tag{12.358b}$$

$$C_{r\varphi r\varphi} = -\frac{r_s\beta\sin^2\vartheta}{12\gamma^2 r^2\alpha^{\gamma-1}}, \qquad C_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = \frac{r_s\beta\sin^2\vartheta}{6\gamma^2\alpha^\gamma}, \tag{12.358c}$$

where $\beta = 6\gamma^2 r - r_s(\gamma+1)(2\gamma+1)$.

Ricci-Tensor:

$$R_{rr} = \frac{r_s^2(1-\gamma^2)}{2\gamma^2 r^4 \alpha^2}. \tag{12.359}$$

The *Ricci scalar* reads

$$\mathcal{R} = \frac{r_s^2(1-\gamma^2)\alpha^{\gamma-2}}{2\gamma^2 r^4}, \tag{12.360}$$

whereas the *Kretschmann scalar* is given by

$$\mathcal{K} = \frac{r_s^2\alpha^{2\gamma-4}}{4\gamma^4 r^8}\left[7\gamma^2 r_s^2(2+\gamma^2) + 48\gamma^4 r^2\alpha + 8\gamma r_s(2\gamma^2+1)(r_s - 2\gamma r) + 3r_s^2\right]. \tag{12.361}$$

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(t)} = \frac{1}{c\alpha^{\gamma/2}}\partial_t, \qquad \mathbf{e}_{(r)} = \alpha^{\gamma/2}\partial_r, \qquad \mathbf{e}_{(\vartheta)} = \frac{\alpha^{(\gamma-1)/2}}{r}\partial_\vartheta, \qquad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{\alpha^{(\gamma-1)/2}}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.362}$$

Dual tetrad:

$$\boldsymbol{\theta}^{(t)} = c\alpha^{\gamma/2}dt, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(r)} = \frac{dr}{\alpha^{\gamma/2}}, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\vartheta)} = \frac{r}{\alpha^{(\gamma-1)/2}}d\vartheta, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\varphi)} = \frac{r\sin\vartheta}{\alpha^{(\gamma-1)/2}}d\varphi. \tag{12.363}$$

Ricci rotation coefficients:

$$\gamma_{(r)(t)(t)} = \frac{r_s}{2r^2}\alpha^{(\gamma-2)/2}, \qquad \gamma_{(\vartheta)(r)(\vartheta)} = \gamma_{(\varphi)(r)(\varphi)} = \frac{2\gamma r - r_s(\gamma+1)}{2\gamma r^2}\alpha^{(\gamma-2)/2}, \tag{12.364a}$$

$$\gamma_{(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = \frac{\cot\vartheta}{r}\alpha^{(\gamma-1)/2}. \tag{12.364b}$$

The contractions of the Ricci rotation coefficients read

$$\gamma_{(r)} = \frac{4\gamma r - r_s(2+\gamma)}{2\gamma r^2}\alpha^{(\gamma-1)/2}, \qquad \gamma_{(\vartheta)} = \frac{\cot\vartheta}{r}\alpha^{(\gamma-1)/2}. \tag{12.365}$$

Structure coefficients:

$$c^{(t)}_{(t)(r)} = \frac{r_s}{2r^2}\alpha^{(\gamma-2)/2}, \qquad c^{(\vartheta)}_{(r)(\vartheta)} = c^{(\varphi)}_{(r)(\varphi)} = -\frac{2\gamma r - r_s(\gamma+1)}{2\gamma r^2}\alpha^{(\gamma-2)/2}, \tag{12.366a}$$

$$c^{(\varphi)}_{(\vartheta)(\varphi)} = -\frac{\cot\vartheta}{r}\alpha^{(\gamma-1)/2}. \tag{12.366b}$$

Euler-Lagrange:

The Euler-Lagrangian formalism, Sec. 12.3.1, for geodesics in the $\vartheta = \pi/2$ hyperplane yields the effective potential

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\alpha^{\gamma}\left(\frac{h^2\alpha^{\gamma-1}}{r^2} - \kappa c^2\right) \tag{12.367}$$

with the constants of motion $h = r^2\alpha^{-\gamma+1}\dot{\varphi}$ and $k = \alpha^{\gamma}c^2\dot{t}$. For null geodesics ($\kappa = 0$) and $\gamma > \frac{1}{2}$, there is an extremum at

$$r = r_s\frac{1+2\gamma}{2\gamma}. \tag{12.368}$$

Embedding:

The embedding function $z = z(r)$ for $r \in [r_s(\gamma+1)^2/(4\gamma^2), \infty)$ follows from

$$\frac{dz}{dr} = \sqrt{\frac{r_s\left[4r\gamma^2 - r_s(1+\gamma)^2\right]}{4r^2\gamma^2\alpha^{\gamma+1}}}. \tag{12.369}$$

However, the analytic solution

$$z(r) = 2\sqrt{r_s r}\,F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{\gamma+1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{r_s}{r\gamma}, \frac{r_s(1+\gamma)^2}{4r\gamma^2}\right) - \frac{2\pi\gamma}{\gamma+1}{}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{\gamma+1}{2}; 1; \frac{4\gamma}{(\gamma+1)^2}\right), \tag{12.370}$$

depends on the Appell-F_1- and the Hypergeometric-${}_2F_1$-function.

12.3.15 Kasner

The Kasner spacetime in Cartesian coordinates (t, x, y, z) is represented by the line element; $(c = 1)$

$$\boxed{ds^2 = -dt^2 + t^{2p_1}dx^2 + t^{2p_2}dy^2 + t^{2p_3}tz^2,} \tag{12.371}$$

where p_1, p_2, p_3 have to fulfill the two conditions

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 \qquad \text{and} \qquad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1. \tag{12.372}$$

These two conditions can also be represented by the Khalatnikov-Lifshitz parameter u with

$$p_1 = -\frac{u}{1+u+u^2}, \qquad p_2 = \frac{1+u}{1+u+u^2}, \qquad p_3 = \frac{u(1+u)}{1+u+u^2}. \tag{12.373}$$

Christoffel symbols:

$$\Gamma^x_{tx} = \frac{p_1}{t}, \qquad \Gamma^y_{ty} = \frac{p_2}{t}, \qquad \Gamma^z_{tz} = \frac{p_3}{t}, \tag{12.374a}$$

$$\Gamma^t_{xx} = \frac{p_1 t^{2p_1}}{t}, \qquad \Gamma^t_{yy} = \frac{p_2 t^{2p_2}}{t}, \qquad \Gamma^t_{zz} = \frac{p_3 t^{2p_3}}{t}. \tag{12.374b}$$

Partial derivatives

$$\Gamma^x_{tx,t} = -\frac{p_1}{t^2}, \qquad \Gamma^t_{ty,t} = -\frac{p_2}{t^2}, \qquad \Gamma^z_{tz,t} = -\frac{p_3}{t^2}, \tag{12.375a}$$

$$\Gamma^t_{xx,t} = p_1(2p_1-1)t^{2p_1-2}, \qquad \Gamma^t_{yy,t} = p_2(2p_2-1)t^{2p_2-2}, \qquad \Gamma^t_{zz,t} = p_3(2p_3-1)t^{2p_3-2}. \tag{12.375b}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{txtx} = \frac{p_1(1-p_1)t^{2p_1}}{t^2}, \qquad R_{tyty} = \frac{p_2(1-p_2)t^{2p_2}}{t^2}, \qquad R_{tztz} = \frac{p_3(1-p_3)t^{2p_3}}{t^2}, \tag{12.376a}$$

$$R_{xyxy} = \frac{p_1 p_2 t^{2p_1} t^{2p_2}}{t^2}, \qquad R_{xzxz} = \frac{p_1 p_3 t^{2p_1} t^{2p_3}}{t^2}, \qquad .R_{yzyz} = \frac{p_2 p_3 t^{2p_2} t^{2p_3}}{t^2}. \tag{12.376b}$$

The Ricci tensor as well as the Ricci scalar vanish identically. The Kretschmann scalar reads

$$\mathcal{K} = \frac{4}{t^4}\left(p_1^2 - 2p_1^3 + p_1^4 + p_2^2 - 2p_2^3 + p_2^4 + p_1^2 p_3^2 + p_3^2 - 2p_3^3 + p_3^4 + p_1^2 p_2^2 + p_2^2 p_3^2\right) \tag{12.377a}$$

$$= \frac{16u^2(1+u)^2}{t^4(1+u+u^2)^3}. \tag{12.377b}$$

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(t)} = \partial_t, \qquad \mathbf{e}_{(x)} = t^{-p_1}\partial_x, \qquad \mathbf{e}_{(y)} = t^{-p_2}\partial_y, \qquad \mathbf{e}_{(z)} = t^{-p_3}\partial_z. \tag{12.378}$$

Dual tetrad:

$$\boldsymbol{\theta}^{(t)} = dt, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(x)} = t^{p_1}dx, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(y)} = t^{p_2}dy, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(z)} = t^{p_3}dz. \tag{12.379}$$

Ricci rotation coefficients:

$$\boldsymbol{\gamma}_{(t)(r)(r)} = \frac{p_1}{t}, \qquad \boldsymbol{\gamma}_{(t)(\vartheta)(\vartheta)} = \frac{p_2}{t}, \qquad \boldsymbol{\gamma}_{(t)(\varphi)(\varphi)} = \frac{p_3}{t}. \tag{12.380}$$

The contractions of the Ricci rotation coefficients read

$$\boldsymbol{\gamma}_{(t)} = -\frac{1}{t}. \tag{12.381}$$

Riemann-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(t)(x)(y)(x)} = \frac{p_1(1-p_1)}{t^2}, \qquad R_{(t)(y)(t)(y)} = \frac{p_2(1-p_2)}{t^2}, \qquad R_{(t)(z)(t)(z)} = \frac{p_3(1-p_3)}{t^2}, \tag{12.382a}$$

$$R_{(x)(y)(x)(y)} = \frac{p_1 p_2}{t^2}, \qquad R_{(x)(z)(x)(z)} = \frac{p_1 p_3}{t^2}, \qquad R_{(y)(z)(y)(z)} = \frac{p_2 p_3}{t^2}. \tag{12.382b}$$

12.3.16 Kerr

The Kerr spacetime, found by Roy Kerr in 1963, describes a rotating black hole.

Boyer-Lindquist coordinates

The Kerr metric in Boyer-Lindquist coordinates

$$\boxed{\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1-\frac{r_s r}{\Sigma}\right)c^2dt^2 - \frac{2r_s a r\sin^2\vartheta}{\Sigma}c\,dt\,d\varphi + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\vartheta^2 \\ &\quad + \left(r^2+a^2+\frac{r_s a^2 r\sin^2\vartheta}{\Sigma}\right)\sin^2\vartheta d\varphi^2, \end{aligned}} \tag{12.383}$$

with $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\vartheta$, $\Delta = r^2 - r_s r + a^2$, and $r_s = 2GM/c^2$, is taken from Bardeen. M is the mass and a is the angular momentum per unit mass of the black hole. The contravariant form of the metric reads

$$\partial_s^2 = -\frac{A}{c^2\Sigma\Delta}\partial_t^2 - \frac{2r_s a r}{c\Sigma\Delta}\partial_t\partial_\varphi + \frac{\Delta}{\Sigma}\partial_r^2 + \frac{1}{\Sigma}\partial_\vartheta^2 + \frac{\Delta - a^2\sin^2\vartheta}{\Sigma\Delta\sin^2\vartheta}\partial_\varphi^2, \tag{12.384}$$

where $A = \left(r^2+a^2\right)^2 - a^2\Delta\sin^2\vartheta = \left(r^2+a^2\right)\Sigma + r_s a^2 r\sin^2\vartheta$.

The event horizon r_+ is defined by the outer root of Δ,

$$r_+ = \frac{r_s}{2} + \sqrt{\frac{r_s^2}{4} - a^2}, \tag{12.385}$$

whereas the outer boundary r_0 of the ergosphere follows from the outer root of $\Sigma - r_s r$,

$$r_0 = \frac{r_s}{2} + \sqrt{\frac{r_s^2}{4} - a^2\cos^2\vartheta}, \tag{12.386}$$

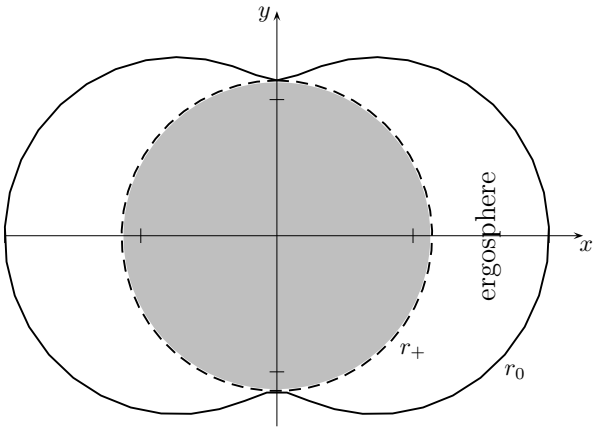


Figure 12.4: Ergosphere and horizon (dashed circle) for $a = 0.99\frac{r_s}{2}$.

Christoffel symbols:

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{c^2 r_s \Delta (r^2 - a^2\cos^2\vartheta)}{2\Sigma^3}, \qquad \Gamma^\vartheta_{tt} = -\frac{c^2 r_s a^2 r \sin\vartheta\cos\vartheta}{\Sigma^3}, \tag{12.387a}$$

$$\Gamma^t_{tr} = \frac{r_s(r^2+a^2)(r^2-a^2\cos^2\vartheta)}{2\Sigma^2\Delta}, \qquad \Gamma^\varphi_{tr} = \frac{c r_s a (r^2 - a^2\cos^2\vartheta)}{2\Sigma^2\Delta}, \tag{12.387b}$$

$$\Gamma^t_{t\vartheta} = -\frac{r_s a^2 r \sin\vartheta\cos\vartheta}{\Sigma^2}, \qquad \Gamma^\varphi_{t\vartheta} = -\frac{c r_s a r \cot\vartheta}{\Sigma^2}, \tag{12.387c}$$

$$\Gamma^r_{t\varphi} = -\frac{c\Delta r_s a \sin^2\vartheta (r^2 - a^2\cos^2\vartheta)}{2\Sigma^3}, \qquad \Gamma^\vartheta_{t\varphi} = \frac{c r_s a r (r^2+a^2)\sin\vartheta\cos\vartheta}{\Sigma^3}, \tag{12.387d}$$

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{2ra^2\sin^2\vartheta - r_s(r^2 - a^2\cos^2\vartheta)}{2\Sigma\Delta}, \qquad \Gamma^\vartheta_{rr} = \frac{a^2\sin\vartheta\cos\vartheta}{\Sigma\Delta}, \tag{12.387e}$$

$$\Gamma^r_{r\vartheta} = -\frac{a^2\sin\vartheta\cos\vartheta}{\Sigma}, \qquad \Gamma^\vartheta_{r\vartheta} = \frac{r}{\Sigma}, \tag{12.387f}$$

$$\Gamma^r_{\vartheta\vartheta} = -\frac{r\Delta}{\Sigma}, \qquad \Gamma^\vartheta_{\vartheta\vartheta} = -\frac{a^2\sin\vartheta\cos\vartheta}{\Sigma}, \tag{12.387g}$$

$$\Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} = \frac{\cot\vartheta}{\Sigma^2}\left[\Sigma^2 + r_s a^2 r \sin^2\vartheta\right], \qquad \Gamma^t_{\vartheta\varphi} = \frac{r_s a^3 r \sin^3\vartheta\cos\vartheta}{c\Sigma^2}, \tag{12.387h}$$

$$\Gamma^t_{r\varphi} = \frac{r_s a \sin^2\vartheta\left[a^2\cos^2\vartheta(a^2 - r^2) - r^2(a^2+3r^2)\right]}{2c\Sigma^2\Delta}, \tag{12.387i}$$

$$\Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{2r\Sigma^2 + r_s\left[a^4\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta - r^2(\Sigma + r^2 + a^2)\right]}{2\Sigma^2\Delta}, \tag{12.387j}$$

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = \frac{\Delta\sin^2\vartheta}{2\Sigma^3}\left[-2r\Sigma^2 + r_s a^2\sin^2\vartheta(r^2 - a^2\cos^2\vartheta)\right], \tag{12.387k}$$

$$\Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} = -\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{\Sigma^3}\left[A\Sigma + \left(r^2+a^2\right) r_s a^2 r \sin^2\vartheta\right], \tag{12.387l}$$

General local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(0)} = \Gamma\left(\partial_t + \zeta\partial_\varphi\right), \qquad \mathbf{e}_{(1)} = \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}}\partial_r, \tag{12.388a}$$

$$\mathbf{e}_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{\Sigma}}\partial_\vartheta, \qquad \mathbf{e}_{(3)} = \frac{\Gamma}{c}\left(\mp\frac{g_{t\varphi} + \zeta g_{\varphi\varphi}}{\sqrt{\Delta}\,\sin\vartheta}\partial_t \pm \frac{g_{tt} + \zeta g_{t\varphi}}{\sqrt{\Delta}\,\sin\vartheta}\partial_\varphi\right), \tag{12.388b}$$

where $-\Gamma^{-2} = g_{tt} + 2\zeta g_{t\varphi} + \zeta^2 g_{\varphi\varphi}$,

$$\Gamma^{-2} = \left(1 - \frac{r_s r}{\Sigma}\right) + \frac{2r_s a r\sin^2\vartheta}{\Sigma}\frac{\zeta}{c} - \left(r^2 + a^2 + \frac{r_s a^2 r\sin^2\vartheta}{\Sigma}\right)\frac{\zeta^2}{c^2}\sin^2\vartheta \tag{12.389}$$

Non-rotating local tetrad ($\zeta = \omega$)**:**

$$\mathbf{e}_{(0)} = \sqrt{\frac{A}{\Sigma\Delta}}\left(\frac{1}{c}\partial_t + \omega\partial_\varphi\right), \quad \mathbf{e}_{(1)} = \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}}\partial_r, \quad \mathbf{e}_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{\Sigma}}\partial_\vartheta, \quad \mathbf{e}_{(3)} = \sqrt{\frac{\Sigma}{A}}\frac{1}{\sin\vartheta}\partial_\varphi, \tag{12.390}$$

where $\omega = -g_{t\varphi}/g_{\varphi\varphi} = r_s a r/A$.

Dual tetrad:

$$\boldsymbol{\theta}^{(2)} = \sqrt{\frac{\Sigma\Delta}{A}}c\,dt, \quad \boldsymbol{\theta}^{(1)} = \sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta}}dr, \quad \boldsymbol{\theta}^{(2)} = \sqrt{\Sigma}d\vartheta, \quad \boldsymbol{\theta}^{(3)} = \sqrt{\frac{A}{\Sigma}}\sin\vartheta\left(d\varphi - \omega\,d\varphi\right). \tag{12.391}$$

The relation between the constants of motion E, L, Q, and μ (defined in Bardeen) and the initial direction $\boldsymbol{v}$, compare Sec. (12.3.1), with respect to the LNRF reads ($c = 1$)

$$v^{(0)} = \sqrt{\frac{A}{\Sigma\Delta}}\,E - \frac{r_s r a}{\sqrt{A\Sigma\Delta}}L, \qquad v^{(1)} = \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}}p_r, \tag{12.392a}$$

$$v^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{\Sigma}}\sqrt{Q - \cos^2\vartheta\left[a^2\left(\mu^2 - E^2\right) + \frac{L^2}{\sin^2\vartheta}\right]}, \qquad v^{(3)} = \sqrt{\frac{\Sigma}{A}}\frac{L}{\sin\vartheta}. \tag{12.392b}$$

Static local tetrad ($\zeta = 0$)**:**

$$\mathbf{e}_{(0)} = \frac{1}{c\sqrt{1 - r_s r/\Sigma}}\partial_t, \qquad \mathbf{e}_{(1)} = \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}}\partial_r, \qquad \mathbf{e}_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{\Sigma}}\partial_\vartheta, \tag{12.393a}$$

$$\mathbf{e}_{(3)} = \pm\frac{r_s a r \sin\vartheta}{c\sqrt{1 - r_s r/\Sigma}\sqrt{\Delta\Sigma}}\partial_t \mp \frac{\sqrt{1 - r_s r/\Sigma}}{\sqrt{\Delta}\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.393b}$$

Photon orbits:
The direct(-) and retrograd(+) photon orbits have radius

$$r_{\text{po}} = r_s\left[1 + \cos\left(\frac{2}{3}\arccos\frac{\mp 2a}{r_s}\right)\right]. \tag{12.394}$$

Marginally stable timelike circular orbits
are defined via

$$r_{\text{ms}} = \frac{r_s}{2}\left(3 + Z_2 \mp \sqrt{(3 - Z_1)(2 + Z_1 + 2Z_2)}\right), \tag{12.395}$$

where

$$Z_1 = 1 + \left(1 - \frac{4a^2}{r_s^2}\right)^{1/3}\left[\left(1 + \frac{2a}{r_s}\right)^{1/3} + \left(1 - \frac{2a}{r_s}\right)^{1/3}\right], \tag{12.396a}$$

$$Z_2 = \sqrt{\frac{12a^2}{r_s^2} + Z_1^2}. \tag{12.396b}$$

Euler-Lagrange:
The Euler-Lagrangian formalism, Sec. 12.3.1, for geodesics in the $\vartheta = \pi/2$ hyperplane yields

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}} = 0 \tag{12.397}$$

with the effective potential

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{2r^3}\left\{h^2(r - r_s) + 2\frac{ahk}{c}r_s - \frac{k^2}{c^2}\left[r^3 + a^2(r + r_s)\right]\right\} - \frac{\kappa c^2\Delta}{r^2} \tag{12.398}$$

and the constants of motion

$$k = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)c^2\dot{t} + \frac{c r_s a}{r}\dot{\varphi}, \qquad h = \left(r^2 + a^2 + \frac{r_s a^2}{r}\right)\dot{\varphi} - \frac{c r_s a}{r}\dot{t}. \tag{12.399}$$

Further reading:
Boyer and Lindquist, Wilkins, Brill.

12.3.17 Kottler spacetime

The Kottler spacetime is represented in spherical coordinates $(t, r, \vartheta, \varphi)$ by the line element

$$\boxed{ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - r_s/r - \Lambda r^2/3} dr^2 + r^2 d\Omega^2,} \tag{12.400}$$

where $r_s = 2GM/c^2$ is the Schwarzschild radius, G is Newton's constant, c is the speed of light, M is the mass of the black hole, and Λ is the cosmological constant. If $\Lambda > 0$ the metric is also known as Schwarzschild-deSitter metric, whereas if $\Lambda < 0$ it is called Schwarzschild-anti-deSitter.

For the following, we define the two abbreviations

$$\alpha = 1 - \frac{r_s}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \qquad \text{and} \qquad \beta = \frac{r_s}{r} - \frac{2\Lambda}{3} r^2. \tag{12.401}$$

The critical points of the Kottler metric follow from the roots of the cubic equation $\alpha = 0$. These can be found by means of the parameters $p = -1/\Lambda$ and $q = 3r_s/(2\Lambda)$. If $\Lambda < 0$, we have only one real root

$$r_1 = \frac{2}{\sqrt{-\Lambda}} \sinh\left[\frac{1}{3}\operatorname{arsinh}\left(\frac{3r_s}{2}\sqrt{-\Lambda}\right)\right]. \tag{12.402}$$

If $\Lambda > 0$, we have to distinguish whether $D \equiv q^2 + p^3 = 9r_s^2/(4\Lambda^2) - \Lambda^{-3}$ is positive or negative. If $D > 0$, there is no real positive root. For $D < 0$, the two real positive roots read

$$r_\pm = \frac{2}{\sqrt{\Lambda}} \cos\left[\frac{\pi}{3} \pm \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3r_s}{2}\sqrt{\Lambda}\right)\right] \tag{12.403}$$

Christoffel symbols:

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{c^2\alpha\beta}{2r}, \qquad \Gamma^t_{tr} = \frac{\beta}{2r\alpha}, \qquad \Gamma^r_{rr} = -\frac{\beta}{2r\alpha}, \tag{12.404a}$$

$$\Gamma^\vartheta_{r\vartheta} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^r_{\vartheta\vartheta} = -\alpha r, \tag{12.404b}$$

$$\Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} = \cot\vartheta, \qquad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -\alpha r \sin^2\vartheta, \qquad \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta. \tag{12.404c}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{trtr} = -\frac{c^2\left(3r_s + \Lambda r^3\right)}{3r^3}, \qquad R_{t\vartheta t\vartheta} = \frac{1}{2}c^2\alpha\beta, \tag{12.405a}$$

$$R_{t\varphi t\varphi} = \frac{1}{2}c^2\alpha\beta\sin^2\vartheta, \qquad R_{r\vartheta r\vartheta} = -\frac{\beta}{2\alpha}, \tag{12.405b}$$

$$R_{r\varphi r\varphi} = -\frac{\beta}{2\alpha}\sin^2\vartheta, \qquad R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = r\left(r_s + \frac{\Lambda r^3}{3}\right)\sin^2\vartheta. \tag{12.405c}$$

Ricci-Tensor:

$$R_{tt} = -c^2\alpha\Lambda, \qquad R_{rr} = \frac{\Lambda}{\alpha}, \qquad R_{\vartheta\vartheta} = \Lambda r^2, \qquad R_{\varphi\varphi} = \Lambda r^2\sin^2\vartheta. \tag{12.406}$$

The *Ricci scalar* and the *Kretschmann scalar* read

$$\mathcal{R} = 4\Lambda, \qquad \mathcal{K} = 12\frac{r_s^2}{r^6} + \frac{8\Lambda^2}{3}. \tag{12.407}$$

Weyl-Tensor:

$$C_{trtr} = -\frac{c^2 r_s}{r^3}, \qquad C_{t\vartheta t\vartheta} = \frac{c^2 \alpha r_s}{2r}, \qquad C_{t\varphi t\varphi} = \frac{c^2 \alpha r_s \sin^2\vartheta}{2r}, \tag{12.408a}$$

$$C_{r\vartheta r\vartheta} = -\frac{r_s}{2r\alpha}, \qquad C_{r\varphi r\varphi} = -\frac{r_s \sin^2\vartheta}{2r\alpha}, \qquad C_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = r r_s \sin^2\vartheta. \tag{12.408b}$$

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(t)} = \frac{1}{c\sqrt{\alpha}}\partial_t, \qquad \mathbf{e}_{(r)} = \sqrt{\alpha}\partial_r, \qquad \mathbf{e}_{(\vartheta)} = \frac{1}{r}\partial_\vartheta, \qquad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.409}$$

Dual tetrad:

$$\boldsymbol{\theta}^{(t)} = c\sqrt{\alpha}\, dt, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(r)} = \frac{dr}{\sqrt{\alpha}}, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\vartheta)} = r\, d\vartheta, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\varphi)} = r\sin\vartheta\, d\varphi. \tag{12.410}$$

Ricci rotation coefficients:

$$\boldsymbol{\gamma}_{(r)(t)(t)} = \frac{r_s - \frac{2}{3}\Lambda r^3}{2r^2\sqrt{\alpha}}, \quad \boldsymbol{\gamma}_{(\vartheta)(r)(\vartheta)} = \boldsymbol{\gamma}_{(\varphi)(r)(\varphi)} = \frac{\sqrt{\alpha}}{r}, \quad \boldsymbol{\gamma}_{(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = \frac{\cot\vartheta}{r}. \tag{12.411}$$

The contractions of the Ricci rotation coefficients read

$$\boldsymbol{\gamma}_{(r)} = \frac{4r - 3r_s - 2\Lambda r^3}{2r^2\sqrt{\alpha}}, \qquad \boldsymbol{\gamma}_{(\vartheta)} = \frac{\cot\vartheta}{r}. \tag{12.412}$$

Riemann-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(t)(r)(t)(r)} = -R_{(\vartheta)(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = -\frac{\Lambda r^3 + 3r_s}{3r^3}, \tag{12.413a}$$

$$R_{(t)(\vartheta)(t)(\vartheta)} = R_{(t)(\varphi)(t)(\varphi)} = -R_{(r)(\vartheta)(r)(\vartheta)} = -R_{(r)(\varphi)(r)(\varphi)} = \frac{3r_s - 2\Lambda r^3}{6r^3}. \tag{12.413b}$$

Weyl-Tensor with respect to local tetrad:

$$C_{(t)(r)(t)(r)} = -C_{(\vartheta)(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = -\frac{r_s}{r^3}, \tag{12.414a}$$

$$C_{(t)(\vartheta)(t)(\vartheta)} = C_{(t)(\varphi)(t)(\varphi)} = -C_{(r)(\vartheta)(r)(\vartheta)} = -C_{(r)(\varphi)(r)(\varphi)} = \frac{r_s}{2r^3}. \tag{12.414b}$$

Embedding:

The embedding function follows from the numerical integration of

$$\frac{dz}{dr} = \sqrt{\frac{r_s/r + \Lambda r^2/3}{1 - r_s/r - \Lambda r^2/3}}. \tag{12.415}$$

Euler-Lagrange:

The Euler-Lagrangian formalism yields the effective potential

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r_s}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)\left(\frac{h^2}{r^2} - \kappa c^2\right) \tag{12.416}$$

with the constants of motion $k = (1 - r_s/r - \Lambda r^2/3)c^2\dot{t}$, $h = r^2\dot{\varphi}$, and κ as in Eq. (12.67).
As in the Schwarzschild metric, the effective potential has only one extremum for null geodesics, the so called photon orbit at $r = \frac{3}{2}r_s$. For timelike geodesics, however, we have

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = \frac{h^2(-6r + 9r_s) + c^2 r^2(3r_s - 2r^3\Lambda)}{3r^4} \stackrel{!}{=} 0. \tag{12.417}$$

This polynomial of fifth order might have up to five extrema.

Further reading:

Kottler, Weyl, Hackmann, Cruz.

12.3.18 Morris-Thorne

The most simple wormhole geometry is represented by the metric of Morris and Thorne,

$$\boxed{ds^2 = -c^2dt^2 + dl^2 + (b_0^2 + l^2)\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right),} \tag{12.418}$$

where b_0 is the throat radius and l is the proper radial coordinate; and $\{t \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}, \vartheta \in (0,\pi), \varphi \in [0, 2\pi)\}$.

Christoffel symbols:

$$\Gamma^{\vartheta}_{l\vartheta} = \frac{l}{b_0^2 + l^2}, \qquad \Gamma^{\varphi}_{l\varphi} = \frac{l}{b_0^2 + l^2}, \qquad \Gamma^{l}_{\vartheta\vartheta} = -l, \tag{12.419a}$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi} = \cot\vartheta, \qquad \Gamma^{l}_{\varphi\varphi} = -l\sin^2\vartheta, \qquad \Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\,\cos\vartheta. \tag{12.419b}$$

Partial derivatives

$$\Gamma^{\vartheta}_{l\vartheta,l} = -\frac{l^2 - b_0^2}{(b_0^2 + l^2)^2}, \qquad \Gamma^{\varphi}_{l\varphi,l} = -\frac{l^2 - b_0^2}{(b_0^2 + l^2)^2}, \qquad \Gamma^{l}_{\vartheta\vartheta,l} = -1, \tag{12.420a}$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi,\vartheta} = -\frac{1}{\sin^2\vartheta}, \qquad \Gamma^{l}_{\varphi\varphi,l} = -\sin^2\vartheta, \qquad \Gamma^{l}_{\varphi\varphi,\vartheta} = -l\sin(2\vartheta), \tag{12.420b}$$

$$\Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi,\vartheta} = -\cos(2\vartheta). \tag{12.420c}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{l\vartheta l\vartheta} = -\frac{b_0^2}{b_0^2 + l^2}, \quad R_{l\varphi l\varphi} = -\frac{b_0^2\sin^2\vartheta}{b_0^2 + l^2}, \quad R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = b_0^2\sin^2\vartheta. \tag{12.421}$$

Ricci tensor, Ricci and Kretschmann scalar:

$$R_{ll} = -2\frac{b_0^2}{(b_0^2 + l^2)^2}, \qquad \mathcal{R} = -2\frac{b_0^2}{(b_0^2 + l^2)^2}, \qquad \mathcal{K} = \frac{12b_0^4}{(b_0^2 + l^2)^4}. \tag{12.422}$$

Weyl-Tensor:

$$C_{tltl} = -\frac{2}{3}\frac{c^2b_0^2}{(b_0^2 + l^2)^2}, \qquad C_{t\vartheta t\vartheta} = \frac{1}{3}\frac{c^2b_0^2}{b_0^2 + l^2}, \qquad C_{t\varphi t\varphi} = \frac{1}{3}\frac{c^2b_0^2\sin^2\vartheta}{b_0^2 + l^2}, \tag{12.423a}$$

$$C_{l\vartheta l\vartheta} = -\frac{1}{3}\frac{b_0^2}{b_0^2 + l^2}, \qquad C_{l\varphi l\varphi} = -\frac{1}{3}\frac{b_0^2\sin^2\vartheta}{b_0^2 + l^2}, \qquad C_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = \frac{2}{3}b_0^2\sin^2\vartheta. \tag{12.423b}$$

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(t)} = \frac{1}{c}\partial_t, \qquad \mathbf{e}_{(l)} = \partial_l, \qquad \mathbf{e}_{(\vartheta)} = \frac{1}{\sqrt{b_0^2 + l^2}}\partial_\vartheta, \qquad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{1}{\sqrt{b_0^2 + l^2}\,\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.424}$$

Dual tetrad

$$\boldsymbol{\theta}^{(t)} = c\,dt, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(l)} = dl, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\vartheta)} = \sqrt{b_0^2 + l^2}\,d\vartheta, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\varphi)} = \sqrt{b_0^2 + l^2}\sin\vartheta\,d\varphi. \tag{12.425}$$

Ricci rotation coefficients:

$$\boldsymbol{\gamma}_{(\vartheta)(r)(\vartheta)} = \boldsymbol{\gamma}_{(\varphi)(r)(\varphi)} = \frac{l}{b_0^2 + l^2}, \qquad \boldsymbol{\gamma}_{(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = \frac{\cot\vartheta}{\sqrt{b_0^2 + l^2}}. \tag{12.426}$$

The contractions of the Ricci rotation coefficients read

$$\boldsymbol{\gamma}_{(r)} = \frac{2l}{b_0^2 + l^2}, \qquad \boldsymbol{\gamma}_{(\vartheta)} = \frac{\cot\vartheta}{\sqrt{b_0^2 + l^2}}. \tag{12.427}$$

Riemann-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(l)(\vartheta)(l)(\vartheta)} = R_{(l)(\varphi)(l)(\varphi)} = -R_{(\vartheta)(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = -\frac{b_0^2}{\left(b_0^2 + l^2\right)^2}. \tag{12.428}$$

Ricci-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(l)(l)} = -\frac{2b_0^2}{\left(b_0^2 + l^2\right)^2}. \tag{12.429}$$

Weyl-Tensor with respect to local tetrad:

$$C_{(t)(l)(t)(l)} = -C_{(\vartheta)(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = -\frac{2b_0^2}{3\left(b_0^2 + l^2\right)^2}, \tag{12.430a}$$

$$C_{(t)(\vartheta)(t)(\vartheta)} = C_{(t)(\varphi)(t)(\varphi)} = -C_{(l)(\vartheta)(l)(\vartheta)} = -C_{(l)(\varphi)(l)(\varphi)} = \frac{b_0^2}{3\left(b_0^2 + l^2\right)^2}. \tag{12.430b}$$

Embedding:

The embedding function reads

$$z(r) = \pm b_0 \ln\left[\frac{r}{b_0} + \sqrt{\left(\frac{r}{b_0}\right)^2 - 1}\right] \tag{12.431}$$

with $r^2 = b_0^2 + l^2$.

Euler-Lagrange:

The Euler-Lagrangian formalism, Sec. 12.3.1, for geodesics in the $\vartheta = \pi/2$ hyperplane yields

$$\frac{1}{2}\dot{l}^2 + V_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\frac{k^2}{c^2}, \qquad V_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{b_0^2 + l^2} - \kappa c^2\right), \tag{12.432}$$

with the constants of motion $k = c^2\dot{t}$ and $h = (b_0^2 + l^2)\dot{\varphi}$. The shape of the effective potential V_{eff} is independend of the geodesic type. The maximum of the effective potential is located at $l = 0$.

A geodesic that starts at $l = l_i$ with direction $\mathbf{y} = \pm\mathbf{e}_{(t)} + \cos\xi\mathbf{e}_{(l)} + \sin\xi\mathbf{e}_{(\varphi)}$ approaches the wormhole throat asymptotically for $\xi = \xi_{\text{crit}}$ with

$$\xi_{\text{crit}} = \arcsin\frac{b_0}{\sqrt{b_0^2 + l_i^2}}. \tag{12.433}$$

This critical angle is independent of the type of the geodesic.

Further reading:

Ellis, Visser, Müller;

12.3.19 Oppenheimer-Snyder collapse

Outer metric

The metric of the outer spacetime, $R > R_b$, in comoving coordinates $(\tau, R, \vartheta, \varphi)$ with $(c = 1)$ is given by

$$\boxed{ds^2 = -d\tau^2 + \frac{R}{\left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau\right)^{2/3}} dR^2 + \left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau\right)^{4/3} \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right).} \tag{12.434}$$

Christoffel symbols:

$$\Gamma^R_{\tau R} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{r_s}}{R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau}, \qquad \Gamma^\vartheta_{\tau\vartheta} = -\frac{\sqrt{r_s}}{R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau}, \tag{12.435a}$$

$$\Gamma^\varphi_{\tau\varphi} = -\frac{\sqrt{r_s}}{R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau}, \qquad \Gamma^\tau_{RR} = \frac{R\sqrt{r_s}}{2\left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau\right)^{5/3}}, \tag{12.435b}$$

$$\Gamma^R_{RR} = -\frac{3\sqrt{r_s}\tau}{4\left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau\right)R}, \qquad \Gamma^\vartheta_{R\vartheta} = \frac{\sqrt{R}}{R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau}, \tag{12.435c}$$

$$\Gamma^\varphi_{R\varphi} = \frac{\sqrt{R}}{R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau}, \qquad \Gamma^\tau_{\vartheta\vartheta} = -\sqrt{r_s}\left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau\right)^{1/3}, \tag{12.435d}$$

$$\Gamma^R_{\vartheta\vartheta} = -\frac{R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau}{\sqrt{R}}, \qquad \Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} = \cot\vartheta, \tag{12.435e}$$

$$\Gamma^\tau_{\varphi\varphi} = -\sqrt{r_s}\left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau\right)^{1/3}\sin^2\vartheta, \qquad \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\,\cos\vartheta, \tag{12.435f}$$

$$\Gamma^R_{\varphi\varphi} = -\frac{\left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau\right)\sin^2\vartheta}{\sqrt{R}}. \tag{12.435g}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{\tau R\tau R} = -\frac{Rr_s}{\left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\,\tau\right)^{8/3}}, \qquad R_{\tau\vartheta\tau\vartheta} = \frac{1}{2}\frac{r_s}{\left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\,\tau\right)^{2/3}}, \tag{12.436a}$$

$$R_{\tau\varphi\tau\varphi} = \frac{1}{2}\frac{r_s\sin^2\vartheta}{\left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\,\tau\right)^{2/3}}, \qquad R_{R\vartheta R\vartheta} = -\frac{1}{2}\frac{Rr_s}{\left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\,\tau\right)^{4/3}}, \tag{12.436b}$$

$$R_{R\varphi R\varphi} = -\frac{1}{2}\frac{Rr_s\sin^2\vartheta}{\left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\,\tau\right)^{4/3}}, \qquad R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = \left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\,\tau\right)^{2/3} r_s\sin^2\vartheta. \tag{12.436c}$$

The Ricci tensor and the Ricci scalar vanish identically.

Kretschmann scalar:

$$\mathcal{K} = 12\frac{r_s^2}{\left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\,\tau\right)^4}. \tag{12.437}$$

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(\tau)} = \partial_\tau, \qquad \mathbf{e}_{(R)} = \frac{\left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau\right)^{1/3}}{\sqrt{R}}\partial_R, \tag{12.438a}$$

$$\mathbf{e}_{(\vartheta)} = \frac{1}{\left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau\right)^{2/3}}\partial_\vartheta, \qquad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{1}{\left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau\right)^{2/3}\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.438b}$$

Ricci rotation coefficients:

$$\gamma_{(\tau)(R)(R)} = -\frac{\sqrt{r_s}}{2R^{3/2} - 3\sqrt{r_s}\tau}, \quad \gamma_{(\tau)(\vartheta)(\vartheta)} = \gamma_{(\tau)(\varphi)(\varphi)} = \frac{2\sqrt{r_s}}{2R^{3/2} - 3\sqrt{r_s}\tau}, \tag{12.439a}$$

$$\gamma_{(R)(\varphi)(\varphi)} = \gamma_{(R)(\vartheta)(\vartheta)} = -\left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau\right)^{-2/3}. \tag{12.439b}$$

The contractions of the Ricci rotation coefficients read

$$\gamma_{(\tau)} = -\frac{3\sqrt{r_s}}{2R^{3/2} - 3\sqrt{r_s}\tau}, \quad \gamma_{(R)} = 2\left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau\right)^{-2/3}, \quad \gamma_{(\vartheta)} = \cot\vartheta\left(R^{3/2} - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}\tau\right)^{-2/3}. \tag{12.440}$$

Riemann-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(\tau)(R)(\tau)(R)} = -R_{(\vartheta)(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = -\frac{4r_s}{\left(2R^{3/2} - 3\sqrt{r_s}\tau\right)^2}, \tag{12.441a}$$

$$R_{(\tau)(\vartheta)(\tau)(\vartheta)} = R_{(\tau)(\varphi)(\tau)(\varphi)} = -R_{(R)(\vartheta)(R)(\vartheta)} = -R_{(R)(\varphi)(R)(\varphi)} = \frac{2r_s}{\left(2R^{3/2} - 3\sqrt{r_s}\tau\right)^2}. \tag{12.441b}$$

The Ricci tensor with respect to the local tetrad vanishes identically.

Inner metric

The metric of the inside, $R \leq R_b$, reads

$$\boxed{ds^2 = -d\tau^2 + \left(1 - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}R_b^{-3/2}\tau\right)^{4/3}\left[dR^2 + R^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)\right].} \tag{12.442}$$

For the following components, we define

$$A_{\text{Oin}} := 1 - \frac{3}{2}\sqrt{r_s}R_b^{-3/2}\tau. \tag{12.443}$$

Christoffel symbols:

$$\Gamma^R_{\tau R} = -\frac{\sqrt{r_s}R_b^{-3/2}}{A_{\text{Oin}}}, \qquad \Gamma^\vartheta_{\tau\vartheta} = -\frac{\sqrt{r_s}R_b^{-3/2}}{A_{\text{Oin}}}, \quad \Gamma^\varphi_{\tau\varphi} = -\frac{\sqrt{r_s}R_b^{-3/2}}{A_{\text{Oin}}}, \tag{12.444a}$$

$$\Gamma^\tau_{RR} = -A_{\text{Oin}}^{1/3}\sqrt{r_s}R_b^{-3/2}, \quad \Gamma^\vartheta_{R\vartheta} = \frac{1}{R}, \qquad \Gamma^\varphi_{R\varphi} = \frac{1}{R}, \tag{12.444b}$$

$$\Gamma^R_{\vartheta\vartheta} = -R, \qquad \Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} = \cot\vartheta, \qquad \Gamma^\tau_{\vartheta\vartheta} = -A_{\text{Oin}}^{1/3}\sqrt{r_s}R_b^{-3/2}R^2, \tag{12.444c}$$

$$\Gamma^R_{\varphi\varphi} = -R\sin^2\vartheta, \qquad \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\,\cos\vartheta, \quad \Gamma^\tau_{\varphi\varphi} = -A_{\text{Oin}}^{1/3}\sqrt{r_s}R_b^{-3/2}R^2\sin^2\vartheta. \tag{12.444d}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{\tau R\tau R} = \frac{1}{2}\frac{r_s}{R_b^3 A_{\text{Oin}}^{2/3}}, \qquad R_{\tau\vartheta\tau\vartheta} = \frac{1}{2}\frac{r_s R^2}{R_b^3 A_{\text{Oin}}^{2/3}}, \qquad R_{\tau\varphi\tau\varphi} = \frac{1}{2}\frac{r_s R^2\sin^2\vartheta}{R_b^3 A_{\text{Oin}}^{2/3}}, \tag{12.445a}$$

$$R_{R\varphi R\varphi} = \frac{r_s R^2\sin^2\vartheta}{R_b^3}A_{\text{Oin}}^{2/3}, \qquad R_{R\vartheta R\vartheta} = \frac{r_s R^2}{R_b^3}A_{\text{Oin}}^{2/3}, \qquad R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = \frac{r_s R^4\sin^2\vartheta}{R_b^3}A_{\text{Oin}}^{2/3}. \tag{12.445b}$$

Ricci-Tensor:

$$R_{\tau\tau} = \frac{3}{2}\frac{r_s}{R_b^3 A_{\text{Oin}}^2}, \qquad R_{RR} = \frac{3}{2}\frac{r_s}{R_b^3 A_{\text{Oin}}^{2/3}}, \quad R_{\vartheta\vartheta} = \frac{3}{2}\frac{r_s R^2}{R_b^3 A_{\text{Oin}}^{2/3}}, \quad R_{\varphi\varphi} = \frac{3}{2}\frac{r_s R^2 \sin^2\vartheta}{R_b^3 A_{\text{Oin}}^{2/3}}. \tag{12.446}$$

The *Ricci* and *Kretschmann* scalars read:

$$\mathcal{R} = \frac{3r_s}{R_b^3 A_{\text{Oin}}^2}, \qquad \mathcal{K} = 15\frac{r_s^2}{R_b^6 A_{\text{Oin}}^4}. \tag{12.447}$$

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(\tau)} = \partial_\tau, \qquad \mathbf{e}_{(R)} = \frac{1}{A_{\text{Oin}}^{2/3}}\partial_R, \qquad \mathbf{e}_{(\vartheta)} = \frac{1}{RA_{\text{Oin}}^{2/3}}\partial_\vartheta, \qquad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{1}{A_{\text{Oin}}^{2/3} R\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.448}$$

Ricci rotation coefficients:

$$\gamma_{(\tau)(R)(R)} = \gamma_{(\tau)(\vartheta)(\vartheta)} = \gamma_{(\tau)(\varphi)(\varphi)} = \frac{\sqrt{r_s}R_b^{-3/2}}{A_{\text{Oin}}}, \tag{12.449a}$$

$$\gamma_{(R)(\vartheta)(\vartheta)} = \gamma_{(R)(\varphi)(\varphi)} = -\frac{1}{RA_{\text{Oin}}^{2/3}}, \tag{12.449b}$$

$$\gamma_{(\vartheta)(\varphi)(\varphi)} = -\frac{\cot\vartheta}{RA_{\text{Oin}}^{2/3}}. \tag{12.449c}$$

The contractions of the Ricci rotation coefficients read

$$\gamma_{(\tau)} = -\frac{3\sqrt{r_s}R_b^{-3/2}}{A_{\text{Oin}}}, \qquad \gamma_{(R)} = \frac{2}{RA_{\text{Oin}}^{2/3}}, \qquad \gamma_{(\vartheta)} = \frac{\cot\vartheta}{RA_{\text{Oin}}^{2/3}}. \tag{12.450}$$

Riemann-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(\tau)(R)(\tau)(R)} = R_{(\tau)(\vartheta)(\tau)(\vartheta)} = R_{(\tau)(\varphi)(\tau)(\varphi)} = \frac{r_s R_b^{-3}}{2A_{\text{Oin}}^2}, \tag{12.451a}$$

$$R_{(R)(\vartheta)(R)(\vartheta)} = R_{(R)(\varphi)(R)(\varphi)} = R_{(\vartheta)(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = \frac{r_s R_b^{-3}}{A_{\text{Oin}}^2}. \tag{12.451b}$$

Ricci-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(\tau)(\tau)} = R_{(R)(R)} = R_{(\vartheta)(\vartheta)} = R_{(\varphi)(\varphi)} = \frac{3r_s R_b^{-3}}{2A_{\text{Oin}}^2}. \tag{12.452}$$

Further reading:
Oppenheimer and Snyder.

12.3.20 Petrov-Type D – Levi-Civita spacetimes

The Petrov type D static vacuum spacetimes AI-C are taken from Stephani et al., Sec. 18.6, with the coordinate and parameter ranges given in "Exact solutions of the gravitational field equations" by Ehlers and Kundt .

Case AI

In spherical coordinates, $(t, r, \vartheta, \varphi)$, the metric is given by the line element

$$\boxed{ds^2 = r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right) + \frac{r}{r-b}dr^2 - \frac{r-b}{r}dt^2.} \tag{12.453}$$

This is the well known Schwarzschild solution if $b = r_s$, cf. Eq. (12.119). Coordinates and parameters are restricted to

$$t \in \mathbb{R}, \qquad 0 < \vartheta < \pi, \qquad \varphi \in [0, 2\pi), \qquad (0 < b < r) \vee (b < 0 < r).$$

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(t)} = \sqrt{\frac{r}{r-b}}\partial_t, \qquad \mathbf{e}_{(r)} = \sqrt{\frac{r-b}{r}}\partial_r, \qquad \mathbf{e}_{(\vartheta)} = \frac{1}{r}\partial_\vartheta, \qquad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.454}$$

Dual tetrad:

$$\boldsymbol{\theta}^{(t)} = \sqrt{\frac{r-b}{r}}\,dt, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(r)} = \sqrt{\frac{r}{r-b}}\,dr, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\vartheta)} = r\,d\vartheta, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\varphi)} = r\sin\vartheta\,d\varphi. \tag{12.455}$$

Effective potential:
With the Hamilton-Jacobi formalism it is possible to obtain an effective potential fulfilling $\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}C_0^2$ with

$$V_{\text{eff}}(r) = K\frac{r-b}{r^3} - \kappa\frac{r-b}{r} \tag{12.456}$$

and the constants of motion

$$C_0^2 = \dot{t}^2\left(\frac{r-b}{r}\right)^2, \tag{12.457a}$$

$$K = \dot{\vartheta}^2 r^4 + \dot{\varphi}^2 r^4 \sin^2\vartheta. \tag{12.457b}$$

Case AII

In cylindrical coordinates, the metric is given by the line element

$$\boxed{ds^2 = z^2\left(dr^2 + \sinh^2 r\,d\varphi^2\right) + \frac{z}{b-z}dz^2 - \frac{b-z}{z}dt^2.} \tag{12.458}$$

Coordinates and parameters are restricted to

$$t \in \mathbb{R}, \qquad 0 < r, \qquad \varphi \in [0, 2\pi), \qquad 0 < z < b.$$

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(t)} = \sqrt{\frac{z}{b-z}}\partial_t, \qquad \mathbf{e}_{(r)} = \frac{1}{z}\partial_r, \qquad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{1}{z\sinh r}\partial_\varphi, \qquad \mathbf{e}_{(z)} = \sqrt{\frac{b-z}{z}}\partial_z. \tag{12.459}$$

Dual tetrad:

$$\boldsymbol{\theta}^{(t)} = \sqrt{\frac{b-z}{z}}\,dt, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(r)} = z\,dr, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\varphi)} = z\sinh r\,d\varphi, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(z)} = \sqrt{\frac{z}{b-z}}\,dz. \tag{12.460}$$

Case AIII

In cylindrical coordinates, the metric is given by the line element

$$\boxed{ds^2 = z^2\left(dr^2 + r^2 d\varphi^2\right) + z dz^2 - \frac{1}{z}dt^2.} \tag{12.461}$$

Coordinates and parameters are restricted to

$$t \in \mathbb{R}, \qquad 0 < r, \qquad \varphi \in [0, 2\pi), \qquad 0 < z.$$

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(t)} = \sqrt{z}\partial_t, \qquad \mathbf{e}_{(r)} = \frac{1}{z}\partial_r, \qquad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{1}{zr}\partial_\varphi, \qquad \mathbf{e}_{(z)} = \frac{1}{\sqrt{z}}\partial_z. \tag{12.462}$$

Dual tetrad:

$$\boldsymbol{\theta}^{(t)} = \frac{1}{\sqrt{z}}dt, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(r)} = z\, dr, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\varphi)} = zr\, d\varphi, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(z)} = \sqrt{z}\, dz. \tag{12.463}$$

Case BI

In spherical coordinates, the metric is given by the line element

$$\boxed{ds^2 = r^2\left(d\vartheta^2 - \sin^2\vartheta dt^2\right) + \frac{r}{r-b}dr^2 + \frac{r-b}{r}d\varphi^2.} \tag{12.464}$$

Coordinates and parameters are restricted to

$$t \in \mathbb{R}, \qquad 0 < \vartheta < \pi, \qquad \varphi \in [0, 2\pi), \qquad (0 < b < r) \vee (b < 0 < r).$$

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(t)} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_t, \qquad \mathbf{e}_{(r)} = \sqrt{\frac{r-b}{r}}\partial_r, \qquad \mathbf{e}_{(\vartheta)} = \frac{1}{r}\partial_\vartheta, \qquad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \sqrt{\frac{r}{r-b}}\partial_\varphi. \tag{12.465}$$

Dual tetrad:

$$\boldsymbol{\theta}^{(t)} = r\sin\vartheta\, dt, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(r)} = \sqrt{\frac{r}{r-b}}\, dr, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\vartheta)} = r\, d\vartheta, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\varphi)} = \sqrt{\frac{r-b}{r}}\, d\varphi. \tag{12.466}$$

Effective potential:
With the Hamilton-Jacobi formalism, an effective potential for the radial coordinate can be calculated fulfilling $\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}C_0^2$ with

$$V_{\text{eff}}(r) = K\frac{r-b}{r^3} - \kappa\frac{r-b}{r} \tag{12.467}$$

and the constants of motion

$$C_0^2 = \dot{\varphi}^2\left(\frac{r-b}{r}\right)^2, \tag{12.468a}$$

$$K = \dot{\vartheta}^2 r^4 - \dot{t}^2 r^4 \sin^2\vartheta. \tag{12.468b}$$

Note that the metric is not spherically symmetric. Particles or light rays fall into one of the poles if they are not moving in the $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ plane.

Case BII

In cylindrical coordinates, the metric is given by the line element

$$\boxed{ds^2 = z^2\left(dr^2 - \sinh^2 r\, dt^2\right) + \frac{z}{b-z}dz^2 + \frac{b-z}{z}d\varphi^2.} \tag{12.469}$$

Coordinates and parameters are restricted to

$$t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi), \qquad 0 < z < b, \qquad 0 < r.$$

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(t)} = \frac{1}{z\sinh r}\partial_t, \qquad \mathbf{e}_{(r)} = \frac{1}{z}\partial_r, \qquad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \sqrt{\frac{z}{b-z}}\partial_\varphi, \qquad \mathbf{e}_{(z)} = \sqrt{\frac{b-z}{z}}\partial_z. \tag{12.470}$$

Dual tetrad:

$$\boldsymbol{\theta}^{(t)} = z\sinh r\, dt, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(r)} = z\, dr, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\varphi)} = \sqrt{\frac{b-z}{z}}\, d\varphi, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(z)} = \sqrt{\frac{z}{b-z}}\, dz. \tag{12.471}$$

Case BIII

In cylindrical coordinates, the metric is given by the line element

$$\boxed{ds^2 = z^2\left(dr^2 - r^2 dt^2\right) + z dz^2 + \frac{1}{z}d\varphi^2.} \tag{12.472}$$

Coordinates and parameters are restricted to

$$t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi), \qquad 0 < z, \qquad 0 < r.$$

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(t)} = \frac{1}{zr}\partial_t, \qquad \mathbf{e}_{(r)} = \frac{1}{z}\partial_r, \qquad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \sqrt{z}\,\partial_\varphi, \qquad \mathbf{e}_{(z)} = \frac{1}{\sqrt{z}}\partial_z. \tag{12.473}$$

Dual tetrad:

$$\boldsymbol{\theta}^{(t)} = zr\, dt, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(r)} = z\, dr, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\varphi)} = \frac{1}{\sqrt{z}}\, d\varphi, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(z)} = \sqrt{z}\, dz. \tag{12.474}$$

Case C

The metric is given by the line element

$$\boxed{ds^2 = \frac{1}{(x+y)^2}\left(\frac{1}{f(x)}dx^2 + f(x)d\varphi^2 - \frac{1}{f(-y)}dy^2 + f(-y)dt^2\right)} \tag{12.475}$$

with $f(u) := \pm(u^3 + au + b)$. Coordinates and parameters are restricted to

$$0 < x + y, \qquad f(-y) > 0, \qquad 0 > f(x).$$

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(t)} = (x+y)\frac{1}{\sqrt{-y^3-ay+b}}\,\partial_t, \qquad \mathbf{e}_{(x)} = (x+y)\sqrt{x^3+ax+b}\,\partial_x, \tag{12.476a}$$

$$\mathbf{e}_{(y)} = (x+y)\sqrt{-y^3-ay+b}\,\partial_y, \qquad \mathbf{e}_{(\varphi)} = (x+y)\frac{1}{\sqrt{x^3+ax+b}}\,\partial_\varphi, \tag{12.476b}$$

Dual tetrad:

$$\boldsymbol{\theta}^{(t)} = \frac{1}{x+y}\sqrt{-y^3-ay+b}\,dt, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(x)} = \frac{1}{x+y}\frac{1}{\sqrt{x^3+ax+b}}\,dx, \tag{12.477a}$$

$$\boldsymbol{\theta}^{(y)} = \frac{1}{x+y}\frac{1}{\sqrt{-y^3-ay+b}}\,dy, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\varphi)} = \frac{1}{x+y}\sqrt{x^3+ax+b}\,d\varphi, \tag{12.477b}$$

A coordinate change can eliminate the linear term in the polynom f generating a quadratic term instead. This brings the line element to the form

$$\boxed{ds^2 = \frac{1}{A(x+y)^2}\left[\frac{1}{f(x)}dx^2 + f(x)dp^2 - \frac{1}{f(-y)}dy^2 + f(-y)dq^2\right]} \tag{12.478}$$

with $f(u) := \pm(-2mAu^3 - u^2 + 1)$ given in .

Furthermore, coordinates can be adapted to the boost-rotation symmetry with the line element in from in

$$\boxed{ds^2 = \frac{1}{z^2-t^2}\left[e^\rho r^2(z\,dt - t\,dz)^2 - e^\lambda(z\,dz - t\,dt)^2\right] - e^\lambda\,dr^2 - r^2e^{-\rho}\,d\varphi^2} \tag{12.479}$$

with

$$e^\rho = \frac{R_3 + R + Z_3 - r^2}{4\alpha^2\,(R_1 + R + Z_1 - r^2)},$$

$$e^\lambda = \frac{2\alpha^2\,[R(R+R_1+Z_1) - Z_1r^2]\,[R_1R_3 + (R+Z_1)(R+Z_3) - (Z_1+Z_3)r^2]}{R_iR_3\,[R(R+R_3+Z_3) - Z_3r^2]},$$

$$R = \frac{1}{2}\left(z^2 - t^2 + r^2\right),$$

$$R_i = \sqrt{(R+Z_i)^2 - 2Z_ir^2},$$

$$Z_i = z_i - z_2,$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{4}\frac{m^2}{A^6(z_2-z_1)^2(z3-z1)^2},$$

$$q = \frac{1}{4\alpha^2},$$

and $z_3 < z_1 < z_2$ the roots of $2A^4z^3 - A^2z^2 + m^2$.

Local tetrad:

Case $z^2 - t^2 > 0$:

$$\mathbf{e}_{(t)} = \frac{1}{\sqrt{z^2-t^2}}\left(qze^{-\rho/2}\,\partial_t + te^{-\lambda/2}\,\partial_z,\right), \qquad \mathbf{e}_{(r)} = e^{-\lambda/2}\,\partial_r, \tag{12.480a}$$

$$\mathbf{e}_{(z)} = \frac{1}{\sqrt{z^2-t^2}}\left(qte^{-\rho/2}\,\partial_t + ze^{-\lambda/2}\,\partial_z,\right), \qquad \mathbf{e}_{(\varphi)} = re^{\rho/2}\,\partial_\varphi. \tag{12.480b}$$

Case $z^2 - t^2 < 0$:

$$\mathbf{e}_{(t)} = \frac{1}{\sqrt{t^2 - z^2}} \left(qte^{-\rho/2}\, \partial_t + ze^{-\lambda/2}\, \partial_z, \right), \qquad \mathbf{e}_{(r)} = e^{-\lambda/2}\, \partial_r, \tag{12.481a}$$

$$\mathbf{e}_{(z)} = \frac{1}{\sqrt{t^2 - z^2}} \left(qze^{-\rho/2}\, \partial_t + te^{-\lambda/2}\, \partial_z, \right), \qquad \mathbf{e}_{(\varphi)} = re^{\rho/2}\, \partial_\varphi. \tag{12.481b}$$

Dual tetrad:

Case $z^2 - t^2 > 0$:

$$\boldsymbol{\theta}^{(t)} = \sqrt{\frac{e^\rho}{z^2 - t^2}} \frac{1}{q} \left(z\, dt + t\, dz \right), \qquad \boldsymbol{\theta}^{(r)} = e^\lambda\, dr, \tag{12.482a}$$

$$\boldsymbol{\theta}^{(z)} = \sqrt{\frac{e^\lambda}{z^2 - t^2}} \left(t\, dt + z\, dz \right), \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\varphi)} = \frac{1}{re^\rho}\, d\varphi. \tag{12.482b}$$

Case $z^2 - t^2 > 0$:

$$\boldsymbol{\theta}^{(t)} = \sqrt{\frac{e^\lambda}{t^2 - z^2}} \left(t\, dt + z\, dz \right), \qquad \boldsymbol{\theta}^{(r)} = e^\lambda\, dr, \tag{12.483a}$$

$$\boldsymbol{\theta}^{(z)} = \sqrt{\frac{e^\rho}{t^2 - z^2}} \frac{1}{q} \left(z\, dt + t\, dz \right), \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\varphi)} = \frac{1}{re^\rho}\, d\varphi. \tag{12.483b}$$

12.3.21 Plane gravitational wave

W. Rindler described in an exact plane gravitational wave which is bounded between two planes. The metric of the so called 'sandwich wave' with $u := t - x$ reads

$$\boxed{ds^2 = -dt^2 + dx^2 + p^2(u)\, dy^2 + q^2(u)\, dz^2.} \tag{12.484}$$

The functions $p(u)$ and $q(u)$ are given by

$$p(u) := \begin{cases} p_0 = \text{const.} & u < -a \\ 1 - u & 0 < u \\ L(u)\, \mathrm{e}^{m(u)} & \text{else} \end{cases} \quad \text{and} \quad q(u) := \begin{cases} q_0 = \text{const.} & u < -a \\ 1 - u & 0 < u \\ L(u)\, \mathrm{e}^{-m(u)} & \text{else} \end{cases}, \tag{12.485}$$

where a is the longitudinal extension of the wave. The functions $L(u)$ and $m(u)$ are

$$L(u) = 1 - u + \frac{u^3}{a^2} + \frac{u^4}{2a^3}, \qquad m(u) = \pm 2\sqrt{3} \int \sqrt{\frac{u^2 + au}{2a^3 u - 2au^3 - u^4 - 2a^3}}\, du. \tag{12.486}$$

Christoffel symbols:

$$\Gamma^y_{ty} = -\Gamma^y_{xy} = \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial u}, \qquad \Gamma^t_{zz} = \Gamma^x_{zz} = q\frac{\partial q}{\partial u}, \qquad \Gamma^z_{tz} = -\Gamma^z_{xz} = \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial u}, \qquad \Gamma^t_{yy} = \Gamma^x_{yy} = p\frac{\partial p}{\partial u}. \tag{12.487}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{tyty} = R_{xyxy} = -R_{tyxy} = -p\frac{\partial^2 p}{\partial u^2}, \qquad R_{tztz} = R_{xzxz} = -R_{tzxz} = -q\frac{\partial^2 q}{\partial u^2}. \tag{12.488}$$

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(t)} = \partial_t, \quad \mathbf{e}_{(x)} = \partial_x, \quad \mathbf{e}_{(y)} = \frac{1}{p}\partial_y, \quad \mathbf{e}_{(z)} = \frac{1}{q}\partial_z. \tag{12.489}$$

Dual tetrad:

$$\boldsymbol{\theta}^{(t)} = dt, \quad \boldsymbol{\theta}^{(x)} = dx, \quad \boldsymbol{\theta}^{(y)} = pdy, \quad \boldsymbol{\theta}^{(z)} = qdz. \tag{12.490}$$

12.3.22 Reissner-Nordstrøm

The Reissner-Nordstrøm black hole in spherical coordinates $\{t \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^+, \vartheta \in (0,\pi), \varphi \in [0,2\pi)\}$ is defined by the metric

$$\boxed{ds^2 = -A_{\mathrm{RN}} c^2 dt^2 + A_{\mathrm{RN}}^{-1} dr^2 + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right),} \tag{12.491}$$

where

$$A_{\mathrm{RN}} = 1 - \frac{r_s}{r} + \frac{\rho Q^2}{r^2} \tag{12.492}$$

with $r_s = 2GM/c^2$, the charge Q, and $\rho = G/(\epsilon_0 c^4) \approx 9.33 \cdot 10^{-34}$. As in the Schwarzschild case, there is a true curvature singularity at $r = 0$. However, for $Q^2 < r_s^2/(4\rho)$ there are also two critical points at

$$r = \frac{r_s}{2} \pm \frac{r_s}{2}\sqrt{1 - \frac{4\rho Q^2}{r_s^2}}. \tag{12.493}$$

Christoffel symbols:

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{A_{\mathrm{RN}} c^2 (r_s r - 2\rho Q^2)}{2r^3}, \qquad \Gamma^t_{tr} = \frac{r_s r - 2\rho Q^2}{2r^3 A_{\mathrm{RN}}}, \qquad \Gamma^r_{rr} = -\frac{r_s r - 2\rho Q^2}{2r^3 A_{\mathrm{RN}}}, \tag{12.494a}$$

$$\Gamma^\vartheta_{r\vartheta} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^r_{\vartheta\vartheta} = -r A_{\mathrm{RN}}, \tag{12.494b}$$

$$\Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} = \cot\vartheta, \qquad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r A_{\mathrm{RN}} \sin^2\vartheta, \qquad \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta. \tag{12.494c}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{trtr} = -\frac{c^2(r_s r - 3\rho Q^2)}{r^4}, \qquad R_{t\vartheta t\vartheta} = \frac{A_{\mathrm{RN}} c^2 (r s_r - 2\rho Q^2)}{2r^2}, \tag{12.495a}$$

$$R_{t\varphi t\varphi} = \frac{A_{\mathrm{RN}} c^2 (r_s r - 2\rho Q^2)\sin^2\vartheta}{2r^2}, \qquad R_{r\vartheta r\vartheta} = -\frac{r_s r - 2\rho Q^2}{2r^2 A_{\mathrm{RN}}}, \tag{12.495b}$$

$$R_{r\varphi r\varphi} = -\frac{(r_s r - 2\rho Q^2)\sin^2\vartheta}{2r^2 A_{\mathrm{RN}}}, \qquad R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = (r_s r - \rho Q^2)\sin^2\vartheta. \tag{12.495c}$$

Ricci-Tensor:

$$R_{tt} = \frac{c^2 \rho Q^2 A_{\mathrm{RN}}}{r^4}, \qquad R_{rr} = -\frac{\rho Q^2}{r^4 A_{\mathrm{RN}}}, \qquad R_{\vartheta\vartheta} = \frac{\rho Q^2}{r^2}, \qquad R_{\varphi\varphi} = \frac{\rho Q^2 \sin^2\vartheta}{r^2}. \tag{12.496}$$

While the Ricci scalar vanishes identically, the Kretschmann scalar reads

$$\mathcal{K} = 4\frac{3r_s^2 r^2 - 12 r_s r \rho Q^2 + 14\rho^2 Q^4}{r^8}. \tag{12.497}$$

Weyl-Tensor:

$$C_{trtr} = -\frac{c^2(r_s r - 2\rho Q^2)}{r^4}, \qquad C_{t\vartheta t\vartheta} = -\frac{A_{\mathrm{RN}} c^2 (r s_r - 2\rho Q^2)}{2r^2}, \tag{12.498a}$$

$$C_{t\varphi t\varphi} = \frac{A_{\mathrm{RN}} c^2 (r_s r - 2\rho Q^2)\sin^2\vartheta}{2r^2}, \qquad C_{r\vartheta r\vartheta} = -\frac{r_s r - 2\rho Q^2}{2r^2 A_{\mathrm{RN}}}, \tag{12.498b}$$

$$C_{r\varphi r\varphi} = -\frac{(r_s r - 2\rho Q^2)\sin^2\vartheta}{2r^2 A_{\mathrm{RN}}}, \qquad C_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = (r_s r - 2\rho Q^2)\sin^2\vartheta. \tag{12.498c}$$

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(t)} = \frac{1}{c\sqrt{A_{\mathrm{RN}}}}\partial_t, \qquad \mathbf{e}_{(r)} = \sqrt{A_{\mathrm{RN}}}\partial_r, \qquad \mathbf{e}_{(\vartheta)} = \frac{1}{r}\partial_\vartheta, \qquad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.499}$$

Dual tetrad:

$$\boldsymbol{\theta}^{(t)} = c\sqrt{A_{\mathrm{RN}}}\,dt, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(r)} = \frac{dr}{\sqrt{A_{\mathrm{RN}}}}, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\vartheta)} = r\,d\vartheta, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(\varphi)} = r\sin\vartheta\,d\varphi. \tag{12.500}$$

Ricci rotation coefficients:

$$\boldsymbol{\gamma}_{(r)(t)(t)} = \frac{rr_s - 2\rho Q^2}{2r^3\sqrt{A_{\mathrm{RN}}}}, \quad \boldsymbol{\gamma}_{(\vartheta)(r)(\vartheta)} = \boldsymbol{\gamma}_{(\varphi)(r)(\varphi)} = \frac{\sqrt{A_{\mathrm{RN}}}}{r}, \quad \boldsymbol{\gamma}_{(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = \frac{\cot\vartheta}{r}. \tag{12.501}$$

The contractions of the Ricci rotation coefficients read

$$\boldsymbol{\gamma}_{(r)} = \frac{4r^2 - 3rr_s + 2\rho Q^2}{2r^3\sqrt{A_{\mathrm{RN}}}}, \qquad \boldsymbol{\gamma}_{(\vartheta)} = \frac{\cot\vartheta}{r}. \tag{12.502}$$

Riemann-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(t)(r)(t)(r)} = -\frac{r_s r - 3\rho Q^2}{r^4}, \qquad R_{(\vartheta)(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = \frac{r_s r - \rho Q^2}{r^4}, \tag{12.503a}$$

$$R_{(t)(\vartheta)(t)(\vartheta)} = R_{(t)(\varphi)(t)(\varphi)} = -R_{(r)(\vartheta)(r)(\vartheta)} = -R_{(r)(\varphi)(r)(\varphi)} = \frac{r_s r - 2\rho Q^2}{2r^4}. \tag{12.503b}$$

Ricci-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(t)(t)} = -R_{(r)(r)} = R_{(\vartheta)(\vartheta)} = R_{(\varphi)(\varphi)} = \frac{\rho Q^2}{r^4}. \tag{12.504}$$

Weyl-Tensor with respect to local tetrad:

$$C_{(t)(r)(t)(r)} = -C_{(\vartheta)(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = -\frac{r_s r - 2\rho Q^2}{r^4}, \tag{12.505a}$$

$$C_{(t)(\vartheta)(t)(\vartheta)} = C_{(t)(\varphi)(t)(\varphi)} = -C_{(r)(\vartheta)(r)(\vartheta)} = -C_{(r)(\varphi)(r)(\varphi)} = \frac{r_s r - 2\rho Q^2}{2r^4}. \tag{12.505b}$$

Embedding:

The embedding function follows from the numerical integration of

$$\frac{dz}{dr} = \sqrt{\frac{1}{1 - r_s/r + \rho Q^2/r^2} - 1}. \tag{12.506}$$

Euler-Lagrange:

The Euler-Lagrangian formalism, Sec. 12.3.1, for geodesics in the $\vartheta = \pi/2$ hyperplane yields

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{2}\frac{k^2}{c^2}, \qquad V_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{\rho Q^2}{r^2}\right)\left(\frac{h^2}{r^2} - \kappa c^2\right) \tag{12.507}$$

with constants of motion $k = A_{\mathrm{RN}}c^2\dot{t}$ and $h = r^2\dot{\varphi}$. For null geodesics, $\kappa = 0$, there are two extremal points

$$r_\pm = \frac{3}{4}r_s\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{32\rho Q^2}{9r_s^2}}\right), \tag{12.508}$$

where r_+ is a maximum and r_- a minimum.

Further reading:

Eiroa

12.3.23 de Sitter spacetime

The de Sitter spacetime with $\Lambda > 0$ is a solution of the Einstein field equations with constant curvature. A detailed discussion can be found for example in Hawking and Ellis. Here, we use the coordinate transformations given by Bičák.

Standard coordinates

The de Sitter metric in standard coordinates $\{\tau \in \mathbb{R}, \chi \in [-\pi, \pi], \vartheta \in (0, \pi), \varphi \in [0, 2\pi)\}$ reads

$$\boxed{ds^2 = -d\tau^2 + \alpha^2 \cosh^2 \frac{\tau}{\alpha} \left[d\chi^2 + \sin^2 \chi \left(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \, d\varphi^2 \right) \right],} \tag{12.509}$$

where $\alpha^2 = 3/\Lambda$.

Christoffel symbols:

$$\Gamma^{\chi}_{\tau\chi} = \frac{1}{\alpha} \tanh \frac{\tau}{\alpha}, \qquad \Gamma^{\vartheta}_{\tau\vartheta} = \frac{1}{\alpha} \tanh \frac{\tau}{\alpha}, \qquad \Gamma^{\varphi}_{\tau\varphi} = \frac{1}{\alpha} \tanh \frac{\tau}{\alpha}, \tag{12.510a}$$

$$\Gamma^{\tau}_{\chi\chi} = \alpha \sinh \frac{\tau}{\alpha} \cosh \frac{\tau}{\alpha}, \qquad \Gamma^{\vartheta}_{\chi\vartheta} = \cot \chi, \qquad \Gamma^{\varphi}_{\chi\varphi} = \cot \chi, \tag{12.510b}$$

$$\Gamma^{\tau}_{\vartheta\vartheta} = \alpha \sin^2 \chi \sinh \frac{\tau}{\alpha} \cosh \frac{\tau}{\alpha}, \qquad \Gamma^{\chi}_{\vartheta\vartheta} = -\sin \chi \cos \chi, \qquad \Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi} = \cot \vartheta, \tag{12.510c}$$

$$\Gamma^{\tau}_{\varphi\varphi} = \alpha \sin^2 \chi \sin^2 \vartheta \sinh \frac{\tau}{\alpha} \cosh \frac{\tau}{\alpha}, \Gamma^{\chi}_{\varphi\varphi} = -\sin^2 \vartheta \sin \chi \cos \chi, \Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi} = -\sin \vartheta \cos \vartheta. \tag{12.510d}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{\tau\chi\tau\chi} = -\cosh^2 \frac{\tau}{\alpha}, \qquad R_{\tau\vartheta\tau\vartheta} = -\cosh^2 \frac{\tau}{\alpha} \sin^2 \chi, \tag{12.511a}$$

$$R_{\tau\varphi\tau\varphi} = -\cosh^2 \frac{\tau}{\alpha} \sin^2 \chi \sin^2 \vartheta, \qquad R_{\chi\vartheta\chi\vartheta} = \alpha^2 \left(1 + \sinh^2 \frac{\tau}{\alpha} \right)^2 \sin^2 \chi, \tag{12.511b}$$

$$R_{\chi\varphi\chi\varphi} = \alpha^2 \left(1 + \sinh^2 \frac{\tau}{\alpha} \right)^2 \sin^2 \chi \sin^2 \vartheta, \qquad R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = \alpha^2 \left(1 + \sinh^2 \frac{\tau}{\alpha} \right)^2 \sin^4 \chi \sin^2 \vartheta. \tag{12.511c}$$

Ricci-Tensor:

$$R_{\tau\tau} = -\frac{3}{\alpha^2}, \quad R_{\chi\chi} = 3 \cosh^2 \frac{\tau}{\alpha}, \quad R_{\vartheta\vartheta} = 3 \cosh^2 \frac{\tau}{\alpha} \sin^2 \chi, \quad R_{\varphi\varphi} = 3 \cosh^2 \frac{\tau}{\alpha} \sin^2 \chi \sin^2 \vartheta. \tag{12.512}$$

Ricci and Kretschmann scalars:

$$\mathcal{R} = \frac{12}{\alpha^2}, \qquad \mathcal{K} = \frac{24}{\alpha^4}. \tag{12.513}$$

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(\tau)} = \partial_\tau, \quad \mathbf{e}_{(\chi)} = \frac{1}{\alpha \cosh \frac{\tau}{\alpha}} \partial_\chi, \quad \mathbf{e}_{(\vartheta)} = \frac{1}{\alpha \cosh \frac{\tau}{\alpha} \sin \chi} \partial_\vartheta, \quad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{1}{\alpha \cosh \frac{\tau}{\alpha} \sin \chi \sin \vartheta} \partial_\varphi. \tag{12.514}$$

Dual tetrad:

$$\boldsymbol{\theta}^{(\tau)} = d\tau, \quad \boldsymbol{\theta}^{(\chi)} = \alpha \cosh \frac{\tau}{\alpha} d\chi, \quad \boldsymbol{\theta}^{(\vartheta)} = \alpha \cosh \frac{\tau}{\alpha} \sin \chi \, d\vartheta, \quad \boldsymbol{\theta}^{(\varphi)} = \alpha \cosh \frac{\tau}{\alpha} \sin \chi \sin \vartheta \, d\varphi. \tag{12.515}$$

Conformally Einstein coordinates

In conformally Einstein coordinates $\{\eta \in [0,\pi], \chi \in [-\pi,\pi], \vartheta \in [0,\pi], \varphi \in [0,2\pi)\}$, the de Sitter metric reads

$$\boxed{ds^2 = \frac{\alpha^2}{\sin^2\eta}\left[-d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2\chi\,\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right)\right].} \tag{12.516}$$

It follows from the standard form (12.509) by the transformation

$$\eta = 2\arctan\left(e^{\tau/\alpha}\right). \tag{12.517}$$

Conformally flat coordinates

Conformally flat coordinates $\{T \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}, \vartheta \in (0,\pi), \varphi \in [0,2\pi)\}$ follow from conformally Einstein coordinates by means of the transformations

$$T = \frac{\alpha\sin\eta}{\cos\chi+\cos\eta}, \quad r = \frac{\alpha\sin\chi}{\cos\chi+\cos\eta}, \quad \text{or} \quad \eta = \arctan\frac{2T\alpha}{\alpha^2 - T^2 + r^2}, \quad \chi = \arctan\frac{2r\alpha}{\alpha^2+T^2-r^2}. \tag{12.518}$$

For the transformation $(T,R) \to (\eta,\chi)$, we have to take care of the coordinate domains. In that case, if $\kappa^2 - T^2 + r^2 < 0$, we have to map $\eta \to \eta + \pi$. On the other hand, if $\kappa^2 + T^2 - r^2 < 0$, we have to consider the sign of r. If $r > 0$, then $\chi \to \chi + \pi$, otherwise $\chi \to \chi - \pi$.

The resulting metric reads

$$\boxed{ds^2 = \frac{\alpha^2}{T^2}\left[-dT^2 + dr^2 + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right)\right].} \tag{12.519}$$

Note that we identify points $(r<0,\vartheta,\varphi)$ with $(r>0,\pi-\vartheta,\varphi-\pi)$.

Christoffel symbols:

$$\Gamma^T_{TT} = \Gamma^r_{Tr} = \Gamma^\vartheta_{T\vartheta} = \Gamma^\varphi_{T\varphi} = \Gamma^T_{rr} = -\frac{1}{T}, \quad \Gamma^\vartheta_{r\vartheta} = \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^T_{\vartheta\vartheta} = -\frac{r^2}{T}, \quad \Gamma^r_{\vartheta\vartheta} = -r, \tag{12.520a}$$

$$\Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} = \cot\vartheta, \quad \Gamma^T_{\varphi\varphi} = -\frac{r^2\sin^2\vartheta}{T}, \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r\sin^2\vartheta, \quad \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta. \tag{12.520b}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{TrTr} = -\frac{\alpha^2}{T^4}, \qquad R_{T\vartheta T\vartheta} = -\frac{\alpha^2 r^2}{T^4}, \qquad R_{T\varphi T\varphi} = -\frac{\alpha^2 r^2\sin^2\vartheta}{T^4}, \tag{12.521a}$$

$$R_{r\vartheta r\vartheta} = \frac{\alpha^2 r^2}{T^4}, \qquad R_{r\varphi r\varphi} = \frac{\alpha^2 r^2\sin^2\vartheta}{T^4}, \qquad R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = \frac{\alpha^2 r^4\sin^2\vartheta}{T^4}. \tag{12.521b}$$

Ricci-Tensor:

$$R_{TT} = -\frac{3}{T^2}, \qquad R_{rr} = \frac{3}{T^2}, \qquad R_{\vartheta\vartheta} = \frac{3r^2}{T^2}, \qquad R_{\varphi\varphi} = \frac{3r^2\sin^2\vartheta}{T^2}. \tag{12.522}$$

The *Ricci and Kretschmann scalar read:*

$$\mathcal{R} = \frac{12}{\alpha^2}, \qquad \mathcal{K} = \frac{24}{\alpha^4}. \tag{12.523}$$

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(T)} = \frac{T}{\alpha}\partial_T, \qquad \mathbf{e}_{(r)} = \frac{T}{\alpha}\partial_r, \qquad \mathbf{e}_{(\vartheta)} = \frac{T}{\alpha r}\partial_\vartheta, \qquad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{T}{\alpha r\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.524}$$

Static coordinates

The de Sitter metric in static spherical coordinates $\{t \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^+, \vartheta \in (0,\pi), \varphi \in [0,2\pi)\}$ reads

$$\boxed{ds^2 = -\left(1-\frac{\Lambda}{3}r^2\right)c^2dt^2 + \left(1-\frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1}dr^2 + r^2\left(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right).} \tag{12.525}$$

It follows from the conformally Einstein form (12.516) by the transformations

$$t = \frac{\alpha}{2}\ln\frac{\cos\chi-\cos\eta}{\cos\chi+\cos\eta}, \quad r = \alpha\frac{\sin\chi}{\sin\eta}. \tag{12.526}$$

Christoffel symbols:

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{(\Lambda r^2-3)}{9}c^2\Lambda r, \qquad \Gamma^t_{tr} = \frac{\Lambda r}{\Lambda r^2-3}, \qquad \Gamma^r_{rr} = \frac{\Lambda r}{3-\Lambda r^2}, \tag{12.527a}$$

$$\Gamma^\vartheta_{r\vartheta} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^r_{\vartheta\vartheta} = \frac{(\Lambda r^2-3)r}{3}, \tag{12.527b}$$

$$\Gamma^\phi_{\vartheta\phi} = \cot(\vartheta), \qquad \Gamma^r_{\phi\phi} = \frac{\Lambda r^2-3}{3}r\sin^2(\vartheta), \qquad \Gamma^\vartheta_{\phi\phi} = -\sin(\vartheta)\cos(\vartheta). \tag{12.527c}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{trtr} = -\frac{\Lambda}{3}c^2, \qquad R_{t\vartheta t\vartheta} = -\frac{3-\Lambda r^2}{9}c^2\Lambda r^2, \qquad R_{t\varphi t\varphi} = -\frac{3-\Lambda r^2}{9}c^2\Lambda r^2\sin(\vartheta)^2, \tag{12.528a}$$

$$R_{r\vartheta r\vartheta} = \frac{\Lambda r^2}{-\Lambda r^2+3}, \qquad R_{r\varphi r\varphi} = \frac{\Lambda r^2\sin(\theta)^2}{-\Lambda r^2+3}, \qquad R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = \frac{r^4\sin^2(\theta)\Lambda}{3}. \tag{12.528b}$$

Ricci-Tensor:

$$R_{tt} = \frac{\Lambda r^2-3}{3}c^2\Lambda, \qquad R_{rr} = \frac{3\Lambda}{3-\Lambda r^2}, \qquad R_{\vartheta\vartheta} = \Lambda r^2, \qquad R_{\varphi\varphi} = r^2\sin^2(\vartheta)\Lambda. \tag{12.529}$$

The *Ricci scalar and Kretschmann scalar read:*

$$\mathcal{R} = 4\Lambda, \qquad \mathcal{K} = \frac{8}{3}\Lambda^2. \tag{12.530}$$

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(t)} = \sqrt{\frac{3}{3-\Lambda r^2}}\frac{\partial_t}{c}, \qquad \mathbf{e}_{(r)} = \sqrt{1-\frac{\Lambda r^2}{3}}\partial_r, \qquad \mathbf{e}_{(\vartheta)} = \frac{1}{r}\partial_\vartheta, \qquad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\partial_\varphi. \tag{12.531}$$

Ricci rotation coefficients:

$$\gamma_{(t)(r)(t)} = -\frac{\Lambda r}{\sqrt{9-3\Lambda r^2}}, \qquad \gamma_{(\vartheta)(r)(\vartheta)} = \gamma_{(\varphi)(r)(\varphi)} = \frac{\sqrt{9-3\Lambda r^2}}{3r}, \qquad \gamma_{(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = \frac{\cot\vartheta}{r}. \tag{12.532}$$

The contractions of the Ricci rotation coefficients read

$$\gamma_{(r)} = \frac{\sqrt{9-3\Lambda r^2}(\Lambda r^2-2)}{(\Lambda r^2-3)r}, \qquad \gamma_{(\vartheta)} = \frac{\cot\vartheta}{r}. \tag{12.533}$$

Riemann-Tensor with respect to local tetrad:

$$-R_{(t)(r)(t)(r)} = -R_{(t)(\vartheta)(t)(\vartheta)} = -R_{(t)(\varphi)(t)(\varphi)} = R_{(r)(\vartheta)(r)(\vartheta)} = R_{(r)(\varphi)(r)(\varphi)} = R_{(\vartheta)(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = \frac{1}{3}\Lambda. \tag{12.534}$$

Ricci-Tensor with respect to local tetrad:

$$-R_{(t)(t)} = R_{(r)(r)} = R_{(\vartheta)(\vartheta)} = R_{(\varphi)(\varphi)} = \Lambda. \tag{12.535}$$

Lemaître-Robertson form

The de Sitter universe in the Lemaître-Robertson form reads

$$\boxed{ds^2 = -c^2dt^2 + e^{2Ht}\left[dr^2 + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right)\right],} \tag{12.536}$$

with Hubble's Parameter $H = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}} = \frac{c}{\alpha}$, which is assumed here to be time-independent. This a special case of the first and second form of the Friedman-Robertson-Walker metric defined in Eqs. (12.279) and (12.289) with $R(t) = e^{Ht}$ and $k = 0$.

Christoffel symbols:

$$\Gamma^r_{tr} = H, \qquad \Gamma^\vartheta_{t\vartheta} = H, \qquad \Gamma^\varphi_{t\varphi} = H, \tag{12.537a}$$

$$\Gamma^t_{rr} = \frac{e^{2Ht}H}{c^2}, \qquad \Gamma^\vartheta_{r\vartheta} = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \tag{12.537b}$$

$$\Gamma^t_{\vartheta\vartheta} = \frac{e^{2Ht}r^2H}{c^2}, \qquad \Gamma^r_{\vartheta\vartheta} = -r, \qquad \Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} = \cot(\vartheta), \tag{12.537c}$$

$$\Gamma^t_{\varphi\varphi} = \frac{e^{2Ht}r^2\sin^2(\theta)H}{c^2}, \qquad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r\sin(\vartheta)^2, \qquad \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} = -\sin(\vartheta)\cos(\vartheta). \tag{12.537d}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{trtr} = -e^{2Ht}H^2, \qquad R_{t\vartheta t\vartheta} = -e^{2Ht}r^2H^2, \tag{12.538a}$$

$$R_{t\varphi t\varphi} = -e^{2Ht}r^2\sin^2(\vartheta)H^2, \qquad R_{r\vartheta r\vartheta} = \frac{e^{4Ht}r^2H^2}{c^2}, \tag{12.538b}$$

$$R_{r\varphi r\varphi} = \frac{e^{4Ht}r^2\sin^2(\vartheta)H^2}{c^2}, \qquad R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = \frac{e^{4Ht}r^4\sin^2(\vartheta)H^2}{c^2}. \tag{12.538c}$$

Ricci-Tensor:

$$R_{tt} = -3H^2, \qquad R_{rr} = 3\frac{e^{2Ht}H^2}{c^2}, \qquad R_{\vartheta\vartheta} = 3\frac{e^{2Ht}r^2H^2}{c^2}, \qquad R_{\varphi\varphi} = 3\frac{e^{2Ht}r^2\sin^2(\vartheta)H^2}{c^2}. \tag{12.539}$$

Ricci and Kretschmann scalars:

$$\mathcal{R} = \frac{12H^2}{c^2}, \qquad \mathcal{K} = \frac{24H^4}{c^4}. \tag{12.540}$$

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(t)} = \frac{1}{c}\partial_t, \qquad \mathbf{e}_{(r)} = e^{-Ht}\partial_r, \qquad \mathbf{e}_{(\vartheta)} = \frac{e^{-Ht}}{r}\partial_\vartheta, \qquad \mathbf{e}_{(\varphi)} = \frac{e^{-Ht}}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.541}$$

Ricci rotation coefficients:

$$\gamma_{(r)(t)(r)} = \gamma_{(\vartheta)(t)(\vartheta)} = \gamma_{(\varphi)(t)(\varphi)} = \frac{H}{c} \tag{12.542a}$$

$$\gamma_{(\vartheta)(r)(\vartheta)} = \gamma_{(\varphi)(r)(\varphi)} = \frac{1}{e^{Ht}r}, \quad \gamma_{(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = \frac{\cot(\theta)}{e^{Ht}r}. \tag{12.542b}$$

The contractions of the Ricci rotation coefficients read

$$\gamma_{(t)} = 3\frac{H}{c}, \qquad \gamma_{(r)} = \frac{2}{e^{Ht}r}, \gamma_{(\vartheta)} = \frac{\cot(\theta)}{e^{Ht}r}. \tag{12.543}$$

Riemann-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(t)(r)(t)(r)} = R_{(t)(\vartheta)(t)(\vartheta)} = R_{(t)(\varphi)(t)(\varphi)} = -\frac{H^2}{c^2} \tag{12.544a}$$

$$R_{(r)(\vartheta)(r)(\vartheta)} = R_{(r)(\varphi)(r)(\varphi)} = R_{(\vartheta)(\varphi)(\vartheta)(\varphi)} = \frac{H^2}{c^2}. \tag{12.544b}$$

Ricci-Tensor with respect to local tetrad:

$$-R_{(t)(t)} = R_{(r)(r)} = R_{(\vartheta)(\vartheta)} = R_{(\varphi)(\varphi)} = 3\frac{H^2}{c^2}. \tag{12.545}$$

Cartesian coordinates

The de Sitter universe in Lemaître-Robertson form can also be expressed in Cartesian coordinates:

$$\boxed{ds^2 = -c^2dt^2 + e^{2Ht}\left[dx^2 + dy^2 + dz^2\right].} \tag{12.546}$$

Christoffel symbols:

$$\Gamma^x_{tx} = H, \qquad \Gamma^y_{ty} = H, \qquad \Gamma^z_{tz} = H, \tag{12.547a}$$

$$\Gamma^t_{xx} = \frac{e^{2Ht}H}{c^2}, \qquad \Gamma^t_{yy} = \frac{e^{2Ht}H}{c^2}, \qquad \Gamma^t_{zz} = \frac{e^{2Ht}H}{c^2}. \tag{12.547b}$$

$$\tag{12.547c}$$

Partial derivatives

$$\Gamma^t_{xx,t} = \Gamma^t_{yy,t} = \Gamma^t_{zz,t} = \frac{2H^2e^{2Ht}}{c^2}. \tag{12.548}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{txtx} = R_{txtx} = R_{tztz} = -e^{2Ht}H^2, \qquad R_{xyxy} = R_{xzxz} = R_{yzyz} = \frac{e^{4Ht}H^2}{c^2}. \tag{12.549}$$

Ricci-Tensor:

$$R_{tt} = -3H^2, \qquad R_{xx} = R_{yy} = R_{zz} = 3\frac{e^{2Ht}H^2}{c^2}. \tag{12.550}$$

The Ricci and Kretschmann scalar read:

$$\mathcal{R} = 12\frac{H^2}{c^2}, \qquad \mathcal{K} = 24\frac{H^4}{c^4}. \tag{12.551}$$

Local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(t)} = \frac{1}{c}\partial_t, \qquad \mathbf{e}_{(x)} = e^{-Ht}\partial_x, \qquad \mathbf{e}_{(y)} = e^{-Ht}\partial_y, \qquad \mathbf{e}_{(z)} = e^{-Ht}\partial_z. \tag{12.552}$$

Ricci rotation coefficients:

$$\gamma_{(x)(t)(x)} = \gamma_{(y)(t)(y)} = \gamma_{(z)(t)(z)} = \frac{H}{c}. \tag{12.553}$$

The only non-vanishing contraction of the Ricci rotation coefficients read

$$\gamma_{(t)} = 3\frac{H}{c}. \tag{12.554}$$

Riemann-Tensor with respect to local tetrad:

$$R_{(t)(x)(t)(x)} = R_{(t)(y)(t)(y)} = R_{(t)(z)(t)(z)} = -\frac{H^2}{c^2}, \tag{12.555a}$$

$$R_{(x)(y)(x)(y)} = R_{(x)(z)(x)(z)} = R_{(y)(z)(y)(z)} = \frac{H^2}{c^2}. \tag{12.555b}$$

Ricci-Tensor with respect to local tetrad:

$$-R_{(t)(t)} = R_{(x)(x)} = R_{(y)(y)} = R_{(z)(z)} = 3\frac{H^2}{c^2}. \tag{12.556}$$

Further reading:
Tolman(, sec. 142), Bičák

12.3.24 Straight spinning string

The metric of a straight spinning string in cylindrical coordinates (t, ρ, φ, z) reads

$$\boxed{ds^2 = -\left(c\,dt - a\,d\varphi\right)^2 + d\rho^2 + k^2\rho^2 d\varphi^2 + dz^2,} \tag{12.557}$$

where $a \in \mathbb{R}$ and $k > 0$ are two parameters, see Perlick.
Metric-Tensor:

$$g_{tt} = -c^2, \qquad g_{t\varphi} = ac, \qquad g_{\rho\rho} = g_{zz} = 1, \qquad g_{\varphi\varphi} = k^2\rho^2 - a^2. \tag{12.558}$$

Christoffel symbols:

$$\Gamma^t_{\rho\varphi} = \frac{a}{c\rho}, \qquad \Gamma^\varphi_{\rho\varphi} = \frac{1}{\rho}, \qquad \Gamma^\rho_{\varphi\varphi} = -k^2\rho. \tag{12.559}$$

Partial derivatives

$$\Gamma^t_{\rho\varphi,\rho} = -\frac{\alpha}{c\rho^2}, \qquad \Gamma^\varphi_{\rho\varphi,\rho} = -\frac{1}{\rho^2}, \qquad \Gamma^\rho_{\varphi\varphi,\rho} = -k^2. \tag{12.560}$$

The Riemann-, Ricci-, and Weyl-tensors as well as the Ricci- and Kretschmann-scalar vanish identically.
Static local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(0)} = \frac{1}{c}\partial_t, \qquad \mathbf{e}_{(1)} = \partial_\rho, \qquad \mathbf{e}_{(2)} = \frac{1}{k\rho}\left(\frac{a}{c}\partial_t + \partial_\varphi\right), \qquad \mathbf{e}_{(3)} = \partial_z. \tag{12.561}$$

Dual tetrad:

$$\boldsymbol{\theta}^{(0)} = c\,dt - a\,d\varphi, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(1)} = d\rho, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(2)} = k\rho\,d\varphi, \qquad \boldsymbol{\theta}^{(3)} = dz. \tag{12.562}$$

Ricci rotation coefficients and their contractions read

$$\gamma_{(2)(1)(2)} = \frac{1}{\rho}, \qquad \gamma_{(0)} = \gamma_{(2)} = \gamma_{(3)} = 0, \qquad \gamma_{(1)} = \frac{1}{\rho}. \tag{12.563}$$

Comoving local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(0)} = \frac{\sqrt{k^2\rho^2 - a^2}}{k\rho}\left(\frac{1}{c}\partial_t - \frac{a}{k^2\rho^2 - a^2}\partial_\varphi\right), \qquad \mathbf{e}_{(1)} = \partial_\rho, \tag{12.564a}$$

$$\mathbf{e}_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{k^2\rho^2 - a^2}}\partial_\varphi, \qquad \mathbf{e}_{(3)} = \partial_z. \tag{12.564b}$$

Dual tetrad:

$$\boldsymbol{\theta}^{(0)} = \frac{k\rho}{\sqrt{k^2\rho^2 - a^2}}c\,dt, \quad \boldsymbol{\theta}^{(1)} = d\rho, \quad \boldsymbol{\theta}^{(2)} = \frac{ac\,dt}{\sqrt{k^2\rho^2 - a^2}} + \sqrt{k^2\rho^2 - a^2}d\varphi, \quad \boldsymbol{\theta}^{(3)} = dz. \tag{12.565}$$

Ricci rotation coefficients and their contractions read

$$\gamma_{(0)(1)(0)} = \frac{a^2}{\rho\left(k^2\rho^2 - a^2\right)}, \quad \gamma_{(2)(1)(0)} = \gamma_{(0)(2)(1)} = \gamma_{(0)(1)(2)} = \frac{ak}{k^2\rho^2 - a^2}, \tag{12.566a}$$

$$\gamma_{(2)(1)(2)} = \frac{k^2\rho}{k^2\rho^2 - a^2}, \tag{12.566b}$$

$$\gamma_{(1)} = \frac{1}{\rho}. \tag{12.566c}$$

Euler-Lagrange:

The Euler-Lagrangian formalism, Sec. 12.3.1, for geodesics in the $\vartheta = \pi/2$ hyperplane yields

$$\dot{\rho}^2 + \frac{1}{k^2\rho^2}\left(h_2 - \frac{ah_1}{c}\right)^2 - \kappa c^2 = \frac{h_1^2}{c^2}, \tag{12.567}$$

with the constants of motion $h_1 = c(c\dot{t} - a\dot{\varphi})$ and $h_2 = a(c\dot{t} - a\dot{\varphi}) + k^2\rho^2\dot{\varphi}$.

The point of closest approach ρ_{pca} for a null geodesic that starts at $\rho = \rho_i$ with $\mathbf{y} = \pm\mathbf{e}_{(0)} + \cos\xi\mathbf{e}_{(1)} + \sin\xi\mathbf{e}_{(2)}$ with respect to the static tetrad is given by $\rho = \rho_i \sin\xi$. Hence, the ρ_{pca} is independent of a and k. The same is also true for timelike geodesics.

12.3.25 Sultana-Dyer spacetime

The Sultana-Dyer metric represents a black hole in the Einstein-de Sitter universe. In spherical coordinates $(t, r, \vartheta, \varphi)$, the metric reads $(G = c = 1)$

$$\boxed{ds^2 = t^4\left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 - \frac{4M}{r}dt\,dr - \left(1 + \frac{2M}{r}\right)dr^2 - r^2\,d\Omega^2\right],} \tag{12.568}$$

where M is the mass of the black hole and $\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2$ is the spherical surface element. Note that here, the signature of the metric is $\text{sign}(\mathbf{g}) = -2$.

Christoffel symbols:

$$\Gamma^t_{tt} = \frac{2\left(r^3 + 4M^2r + M^2t\right)}{tr^3}, \quad \Gamma^r_{tt} = \frac{M(r-2M)(4r+t)}{tr^3}, \quad \Gamma^t_{tr} = \frac{M(r+2M)(4r+t)}{tr^3}, \tag{12.569a}$$

$$\Gamma^r_{tr} = \frac{2\left(r^3 - 4M^2r - M^2t\right)}{tr^3}, \quad \Gamma^\vartheta_{t\vartheta} = \frac{2}{t}, \quad \Gamma^\varphi_{t\varphi} = \frac{2}{t}, \tag{12.569b}$$

$$\Gamma^\vartheta_{r\vartheta} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^t_{\vartheta\vartheta} = \frac{2\left(r^2 + 2Mr - Mt\right)}{t}, \tag{12.569c}$$

$$\Gamma^r_{\vartheta\vartheta} = -\frac{4Mr + tr - 2Mt}{t}, \quad \Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} = \cot\vartheta, \quad \Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta, \tag{12.569d}$$

$$\Gamma^t_{rr} = \frac{2\left(r^3 + 4Mr^2 + 4M^2r + M^2t + Mtr\right)}{tr^3}, \quad \Gamma^r_{rr} = -\frac{M\left(4r^2 + 8Mr + 2Mt + tr\right)}{tr^3}, \tag{12.569e}$$

$$\Gamma^t_{\varphi\varphi} = \frac{2\left(r^2 + 2Mr - Mt\right)\sin^2\vartheta}{t}, \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -\frac{(4Mr + tr - 2Mt)\sin^2\vartheta}{t}. \tag{12.569f}$$

Riemann-Tensor:

$$R_{trtr} = \frac{2t^2\left(-2Mr^2 - r^3 + Mt^2 + 2Mtr\right)}{r^3}, \tag{12.570a}$$

$$R_{r\vartheta t\vartheta} = -\frac{t^2\left(2r^4 + 16M^2r^2 + 4Mtr^2 - 4M^2r^2t + Mt^2r - 2M^2t^2\right)}{r^2}, \tag{12.570b}$$

$$R_{t\vartheta r\vartheta} = -\frac{2Mt^2(4r+t)(r^2+2Mr-Mt)}{r^2}, \tag{12.570c}$$

$$R_{r\varphi t\varphi} = -\frac{t^2\sin^2\vartheta\left(2r^4 + 16M^2r^2 + 4Mtr^2 - 4M^2r^2t + Mt^2r - 2M^2t^2\right)}{r^2}, \tag{12.570d}$$

$$R_{t\varphi r\varphi} = -\frac{2Mt^2\sin^2\vartheta(4r+t)(r^2+2Mr-Mt)}{r^2}, \tag{12.570e}$$

$$R_{r\vartheta r\vartheta} = -\frac{t^2\left(4r^4 + 16Mr^4 - 4M^2tr + 16M^2r^2 - 2M^2t^2 - Mt^2r\right)}{r^2}, \tag{12.570f}$$

$$R_{r\varphi r\varphi} = -\frac{t^2\sin^2\vartheta\left(4r^4 + 16Mr^4 - 4M^2tr + 16M^2r^2 - 2M^2t^2 - Mt^2r\right)}{r^2}, \tag{12.570g}$$

$$R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = -2t^2r\sin^2\vartheta\left(2r^3 + 4Mr^2 - 4Mtr + mt^2\right). \tag{12.570h}$$

Ricci-Tensor:

$$R_{tt} = \frac{2\left(3r^2 + 12M^2 + 2Mt\right)}{t^2r^2}, \qquad R_{tr} = \frac{4M\left(3r + t + 6M\right)}{t^2r^2}, \tag{12.571a}$$

$$R_{rr} = \frac{2\left(3r^2 + 12Mr + 2Mt + 12M^2\right)}{t^2r^2}, \quad R_{\vartheta\vartheta} = \frac{6\left(r^2 + 2Mr - 2Mt\right)}{t^2}, \tag{12.571b}$$

$$R_{\varphi\varphi} = \frac{6\left(r^2 + 2Mr - 2Mt\right)\sin^2\vartheta}{t^2}. \tag{12.571c}$$

Ricci and Kretschmann scalars:

$$R = -\frac{12\left(r^2 + 2Mr - 2Mt\right)}{t^6r^2}, \tag{12.572a}$$

$$\mathcal{K} = \frac{48\left(M^2t^4 + 20M^2r^4 + 20Mr^5 + 8M^2r^2t^2 - 4Mr^4t - 16M^2r^3t + 5r^6\right)}{t^12r^6}. \tag{12.572b}$$

Comoving local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(0)} = \frac{\sqrt{1+2M/r}}{t^2}\partial_t - \frac{2M/r}{t^2\sqrt{1+2M/r}}\partial_r, \quad \mathbf{e}_{(1)} = \frac{1}{t^2\sqrt{1+2M/r}}\partial_r, \quad \mathbf{e}_{(2)} = \frac{1}{t^2r}\partial_\vartheta, \quad \mathbf{e}_{(3)} = \frac{1}{t^2r\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.573}$$

Static local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(0)} = \frac{1}{t^2\sqrt{1-2M/r}}\partial_t, \quad \mathbf{e}_{(1)} = \frac{2M/r}{t^2\sqrt{1-2M/r}}\partial_t + \frac{\sqrt{1-2M/r}}{t^2}\partial_r, \quad \mathbf{e}_{(2)} = \frac{1}{t^2r}\partial_\vartheta, \quad \mathbf{e}_{(3)} = \frac{1}{t^2r\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.574}$$

Further reading:

Sultana and Dyer.

12.3.26 TaubNUT

The TaubNUT metric in Boyer-Lindquist like spherical coordinates $(t, r, \vartheta, \varphi)$ reads ($G = c = 1$)

$$\boxed{ds^2 = -\frac{\Delta}{\Sigma}\left(dt + 2\ell\cos\vartheta\, d\varphi\right)^2 + \Sigma\left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\right),} \tag{12.575}$$

where $\Sigma = r^2 + \ell^2$ and $\Delta = r^2 - 2Mr - \ell^2$. Here, M is the mass of the black hole and ℓ the magnetic monopol strength.

Christoffel symbols:

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{\Delta\rho}{\Sigma^3}, \qquad \Gamma^t_{tr} = \frac{\rho}{\Delta\Sigma}, \qquad \Gamma^t_{t\vartheta} = -2\ell^2\cos\vartheta\frac{\Delta}{\Sigma^2}, \tag{12.576a}$$

$$\Gamma^\varphi_{t\vartheta} = \frac{\ell\Delta}{\Sigma^2\sin\vartheta}, \quad \Gamma^r_{t\varphi} = \frac{2\ell\rho\Delta\cos\vartheta}{\Sigma^3}, \quad \Gamma^\vartheta_{t\varphi} = -\frac{\ell\Delta\sin\vartheta}{\Sigma^2}, \tag{12.576b}$$

$$\Gamma^r_{rr} = -\frac{\rho}{\Sigma\Delta}, \qquad \Gamma^\vartheta_{r\vartheta} = \frac{r}{\Sigma}, \qquad \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{r}{\Sigma}, \qquad \Gamma^r_{\vartheta\vartheta} = -\frac{r\Delta}{\Sigma}, \tag{12.576c}$$

$$\Gamma^t_{r\varphi} = \frac{-2\ell(r^3 - 3Mr^2 - 3r\ell^2 + M\ell^2)\cos\vartheta}{\Sigma\Delta}, \tag{12.576d}$$

$$\Gamma^t_{\vartheta\varphi} = -\frac{\ell\left[\cos^2\vartheta\left(6r^2\ell^2 - 8\ell^2Mr - 3\ell^4 + r^4\right) + \Sigma^2\right]}{\Sigma^2\sin\vartheta}, \tag{12.576e}$$

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = \frac{\Delta}{\Sigma^3}\left[\cos^2\vartheta\left(9r\ell^4 + 4\ell^2Mr^2 - 4\ell^4M + r^5 + 2r^3\ell^2\right) - r\Sigma^2\right], \tag{12.576f}$$

$$\Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi} = \frac{(4r^2\ell^2 - 4Mr\ell^2 - \ell^4 + r^4)\cot\vartheta}{\Sigma^2}, \tag{12.576g}$$

$$\Gamma^\vartheta_{\varphi\varphi} = -\frac{(6r^2\ell^2 - 8Mr\ell^2 - 3\ell^4 + r^4)\sin\vartheta\cos\vartheta}{\Sigma^2}, \tag{12.576h}$$

where $\rho = 2r\ell^2 + Mr^2 - M\ell^2$.

Static local tetrad:

$$\mathbf{e}_{(0)} = \sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta}}\partial_t, \quad \mathbf{e}_{(1)} = \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}}\partial_r, \quad \mathbf{e}_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{\Sigma}}\partial_\vartheta, \quad \mathbf{e}_{(3)} = -\frac{2\ell\cot\vartheta}{\sqrt{\Sigma}}\partial_t + \frac{1}{\sqrt{\Sigma}\sin\vartheta}\partial_\varphi. \tag{12.577}$$

Dual tetrad:

$$\boldsymbol{\theta}^{(0)} = \sqrt{\frac{\Delta}{\Sigma}}\left(dt + 2\ell\cos\vartheta\, d\varphi\right), \quad \boldsymbol{\theta}^{(1)} = \sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta}}dr, \quad \boldsymbol{\theta}^{(2)} = \sqrt{\Sigma}d\vartheta, \quad \boldsymbol{\theta}^{(3)} = \sqrt{\Sigma}\sin\vartheta\, d\varphi. \tag{12.578}$$

Euler-Lagrange:

The Euler-Lagrangian formalism, Sec. 12.3.1, for geodesics in the $\vartheta = \pi/2$ hyperplane yields

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\frac{k^2}{c^2}, \qquad V_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\frac{\Delta}{\Sigma}\left(\frac{h^2}{\Sigma} - \kappa\right) \tag{12.579}$$

with the constants of motion $k = (\Delta/\Sigma)\dot{t}$ and $h = \Sigma\dot{\varphi}$. For null geodesics, we obtain a photon orbit at $r = r_{\text{po}}$ with

$$r_{\text{po}} = M + 2\sqrt{M^2 + \ell^2}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{M}{\sqrt{M^2 + \ell^2}}\right) \tag{12.580}$$

Further reading:

Bini et al..

Part IV
Problems in Gravity

13 Basic Problems

(у Лайтмана и др. их полным полно)

13.1 Preparatory Problems for GR

13.1.1 Problems about Kinematic Models of SR

13.1.2 Problems about Dynamic Models of SR

13.1.3 Problems about Coordinate Transformations in SR

13.1.4 Problems about Electromagnetic Field

Solution

4.1. Предположим, что проволока совпадает с осью z цилиндрической системы координат и несет заряд с собственной плотностью ρ_0. В системе покоя проволоки $J^0 = \rho_0$ и $\vec{J} = \overrightarrow{0}$. По теореме Гаусса единственная ненулевая компонента тензора электромагнитного поля равна

$$E^r = \rho_0 A/2\pi r = F^{0r},$$

где A-площадь поперечного сечения проволоки. Если проволока движется в положительном направлении оси $\boldsymbol{z}$ со скоростью β относительно лабораторной системы отсчета, то преобразование Лоренца $\Lambda_0^{0'} = \gamma, \Lambda_z^{0'} = \beta\gamma$ дает

$$J^{0'} = \gamma\rho_0, \quad J^{z'} = \beta\gamma\rho_0,$$
$$B^{\hat{\varphi}} = F^{z'r'} = \Lambda^{z'}{}_0 F^{0r} = \beta\gamma\rho_0 A/2\pi r, \quad E^{r'} = \gamma\rho_0 A/2\pi r$$

($B^{\hat{\varphi}}$ - «физическая компонента», т. е. компонента, связанная с единичным вектором $\mathbf{e}_\varphi$). Если на поле, создаваемое проволокой, наложить поле (создаваемое аналогичной проволокой, которая покоится в лабораторной системе отсчета) с плотностью заряда - $\gamma\rho_0$, то полная плотность заряда и электрическое поле $\vec{E}$ взаимно компенсируются. Ток

$$I = \int J^{z'} dxdy = \beta\gamma\rho_0 A$$

создает только магнитное поле

$$B^{\hat{\varphi}} = I/2\pi r$$

Solution

4.2. Инвариантность величин $B^2 - E^2$ и $\vec{B}\cdot\vec{E}$ следует из того, что они равны скалярам:

$$B^2 - E^2 = \frac{1}{2}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta},$$
$$\vec{E}\cdot\vec{B} = \frac{1}{4} * F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = \frac{1}{8}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} = \det\left(F^{\mu\nu}\right).$$

Любой инвариант должен сохранять свое значение при поворотах в 3-пространстве. Следовательно, инварианты можно построить лишь из скаляров $\vec{E}\cdot\vec{B}, \vec{E}\cdot\vec{E}$ и $\vec{B}\cdot\vec{B}$. Если бы число независимых инвариантов было равно 3, то, например, величина $\vec{B}\cdot\vec{B}$ была бы инвариантной. Но это невозможно, поскольку B^2, вообще говоря, изменяется под действием преобразования Лоренца.

Solution

4.3. В любой системе отсчета угол между электрическим вектором и вектором магнитного поля определяется соотношением

$$\cos\vartheta_0 = \vec{E}\cdot\vec{B}/|E||B|$$

Но скалярное произведение $\vec{E}\cdot\vec{B}$ инвариантно (см. задачу 4.2), а произведение $|E||B|$ неинвариантно. Следовательно, угол ϑ_0 может быть инвариантным в том и только в том случае, если $\vec{E}\cdot\vec{B}=0$, т. е. если $\vartheta_0=\pi/2$.

Solution

4.4. Лоренц-инвариантность величины $\mathscr{E}^2-|S|^2$ мы докажем, если нам удастся представить ее в виде функции от инвариантов E^2-B^2 и $\vec{E}\cdot\vec{B}$:

$$\begin{aligned}64\pi\left(\mathscr{E}^2-|\vec{S}|^2\right) &= \left(E^2+B^2\right)^2-4(\vec{E}\times\vec{B})^2 = \\ &= \left[E^4+2E^2B^2+B^4\right]-4\left[E^2B^2-(\vec{E}\cdot\vec{B})^2\right] = \\ &= E^4-2E^2B^2+B^4+4(\vec{E}\cdot\vec{B})^2 = \\ &= \left(E^2-B^2\right)^2+4(\vec{E}\cdot\vec{B})^2.\end{aligned}$$

Решение 4.5. Пусть $\vec{v}=\alpha(\vec{E}\times\vec{B})$. Тогда

$$\begin{aligned}\vec{E}'\gamma^{-1} &= \vec{E}+\vec{v}\times\vec{B} = \left(1-\alpha B^2\right)\vec{E}+\alpha(\vec{E}\cdot\vec{B})\vec{B},\\ B'\gamma^{-1} &= \vec{B}-\tilde{v}\times\vec{E} = \left(1-\alpha E^2\right)\vec{B}+\alpha(\vec{E}\cdot\vec{B})\vec{E}.\end{aligned}$$

Случай 1. Если $\vec{E}\cdot\vec{B}=0$ и $|E|=|B|$, то преобразование эквивалентно красному смещению плоской волны и векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ невозможно сделать параллельньми.

Случай 2. Если $\vec{E}\cdot\vec{B}=0$, но $E^2\neq B^2$, то, выбрав $\alpha=1/\max\left(E^2,B^2\right)$, обратим в нуль либо $\vec{E}'$, либо $\overrightarrow{B'}$. Тогда $\vec{E}'\times\vec{B}'=0$.

Случай 3. Если $\vec{E}\cdot\vec{B}\neq 0$, то векторы $\vec{E}'$ и $\vec{B}'$ можно сделать параллельными, выбрав параметр α так, чтобы он удовлетворял соотношению

Тогда

$$\alpha^2\left[(\vec{E}\cdot\vec{B})^2-E^2B^2\right] = 1-\alpha\left(E^2+B^2\right)$$

$$\frac{\vec{v}}{1+v^2} = \frac{\alpha(\vec{E}\times\vec{B})}{1+\alpha^2[(\vec{E}\times\vec{B})]^2} = \frac{\alpha(E\times B)}{1+\alpha^2\left[E^2B^2-(\vec{E}\cdot\vec{B})^2\right]} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{E^2+B^2}.$$

Solution

4.6. Если $E^2-B^2>0$, то, выполнив преобразование Лоренца с $\vec{v}=\vec{E}\times\vec{B}/E^2$, получим $\vec{B}'=\gamma(\vec{B}-\vec{v}\times E)=0$. При $E^2-B^2<0$k аналогичному результату приводит преобразование Лоренца с $\vec{v}=-\vec{B}\times E/B^2$. Если $E^2-B^2=0$, то $|E|=|B|$ после любого преобразования. Преобразование с $\vec{v}=\alpha(\vec{E}\times\overrightarrow{B})$ (см. задачу 4.5) уменьшает величину векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ на множитель

$$\gamma\left(1-\alpha E^2\right)=\gamma(1-v)=[(1-v)/(1+v)]^{1/2}$$

В пределе при $v\to 1$ величину векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ можно сделать сколь угодно малой.

Solution

4.7. При интегрировании выражения для J^μ воспользуемся соотношением

$$\int F(\tau)\delta\left[t-z^0(\tau)\right]d\tau = \int F(\tau)\delta\left[t-z^0(\tau)\right](d\tau/dt)dt = F(\tau[t])/u^0$$

и получим

$$J^\mu = \sum_k \frac{u_k^\mu}{u_k^0} e_k \delta^3 \left[\vec{x} - \vec{z}_k(t)\right]$$

Нетрудно видеть, что выражение для временной и пространственных компонент оказываются правильными.

Solution

4.8. Для решения этой задачи полезно ввести трехмерный полностью антисимметричный тензор ε_{ijk} (с нормировкой $\varepsilon_{123} = 1$). Заметим, что

$$F^{ij} = \varepsilon^{ijk} B_k, \quad B^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} F_{jk},$$
$$(\vec{U} \times \vec{V})^i = \varepsilon^{ijk} U' V^k.$$

Запишем покомпонентно «электрические» уравнения $F^{\mu v}, v = 4\pi J^\mu$:

$$F^{0\beta}{}_{,\beta} = F^{0i}, i = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi J^0 = 4\pi\rho,$$
$$F^{i\beta}{}_{,\beta} = F^{ij}, j + F^{i0}, 0 = \varepsilon^{ijk} B_{k,j} - E^i, 0 = 4\pi J^i.$$

Последнее уравнение совпадает с i-й. компонентой векторного уравнения

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \vec{E} = 4\pi \vec{J}$$

Рассмотрим теперь «магнитные» уравнения. Предположим сначала, что индексы α, β и γ соответствуют пространственным компонентам. Пусть $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3$. Тогда

$$F_{12,3} + F_{31,2} + F_{23,1} = B^3, 3 + B^2, 2 + B^1, 1 = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.$$

Пусть теперь $\alpha = 0$, а β и γ соответствуют пространственным компонентам. Тогда

$$F_{0i,j} + F_{j0,l} + F_{ij,0} = E_{i,j} + E_{j,i} + \varepsilon_{ijk}\dot{B}^k =$$
$$= \varepsilon_{ijk}(\vec{\nabla} \times \vec{E})^k + \varepsilon_{ijk}\dot{B}^k = 0.$$

Умножая это уравнение на ε^{ijm}, получаем

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0$$

Solution 4.9.

В задаче 4.8 было показано, что тензорное уравнение

$$F^{\mu v}, v = 0$$

эквивалентно «электрическим» уравнениям Максвелла (в вакууме). Что касается магнитных уравнений, то

$$*F^{\mu v}, v = \frac{1}{2}\left(F_{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\beta\mu v}\right)_{,v} = \frac{1}{2}F_{\alpha\beta,v}\varepsilon^{\alpha\beta\mu v} =$$
$$= \frac{1}{2}F_{[\alpha\beta,v]}\varepsilon^{\alpha\beta\mu v},$$

поэтому уравнение
эквивалентно уравнению

$$*F^{\mu v}, v = 0$$

$$F_{\alpha\beta,v} + F_{v\alpha,\beta} + F_{\beta v,\alpha} = 0.$$

Solution

4.10. При $\mu = 0$ уравнение для силы Лоренца принимает вид

$$dP^0/d\tau = eF^0 i u_t = eE^i v v_i$$

Поскольку $d\tau = dt/\gamma$, то его можно преобразовать следующим образом:

$$dP^0/dt = eE^i v_i$$

Это уравнение отличается от нерелятивистского уравнения лишь тем, что P^0 - релятивистская масса-энергия.

Рещекие 4.11. Пространственные компоненты уравнения для силы Лоренца имеют вид

$$\frac{dP^i}{d\tau} = \gamma \frac{dP^i}{dt} = qF^{i\mu}u_\mu = qF^{i0}u_0 + qF^{ij}u_j = q\gamma E^i + q\gamma \varepsilon^{ijk} B_k v_j$$

поэтому

$$d\vec{P}/dt = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Solution

4.12. От нуля отличны лишь компоненты $F_y^l = F_t^y = E$ тензора F_v^μ. Начальная 4-скорость u^α частицы обладает компо- нентами $(\gamma, \gamma v, 0, 0)$, где $\gamma \equiv \left(1 - v^2\right)^{-1/1}$. Из уравнений для силы Лоренца

$$dP^\mu/d\tau = qF^\mu{}_v u^\nu$$

при $\mu = 1$ получаем $dP^x/d\tau = 0$ и, следовательно,

$$u^x = \gamma v, \quad \tau = x/\gamma v$$

Уравнения при $\mu = 0$ и $\mu = 2$

$$\frac{du^t}{d\tau} = \frac{q}{m} E u^y, \quad \frac{du^y}{d\tau} = \frac{q}{m} E u^t$$

можно объединить в одно уравнение

$$\frac{d^2 u^y}{d\tau^2} = \left(\frac{qE}{m}\right)^2 u^y$$

допуск ающее решение

$$u^y = \gamma \,\mathrm{sh}\left[\left(\frac{qE}{m}\right)\tau\right]$$

(при интегрировании уравнения мы использовали начальные условия, наложенные на компоненты 4-скорости u^t и u^y). Интегрируя u^y по τ, подставляя $\tau = x/\gamma v$ и используя начальное условие $y = 0$ при $x = 0$, получаем

$$y = \left(\frac{m}{qE}\right)\gamma\left[\mathrm{ch}\left(\frac{qE}{m}\right)\frac{x}{v\gamma} - 1\right]$$

Pemerue 4.13.

а) Из уравнения для силы Лоренца (см. задачу 4.11) следует

$$\omega p = |d\vec{p}/dt| = qvB$$

поэтому

$$B = \frac{\omega p}{qv} = \frac{m\omega}{q\left(1 - v^2\right)^{1/2}} = \frac{m\omega}{q\left(1 - \omega^2 R^2\right)^{1/s}}$$

б) Компоненты 4-скорости, измеренные в лабораторной системе координат, равны $u^0 = \left(1 - \omega^2 R^2\right)^{-1/2}$, $u^x = \omega y \left(1 - \omega^2 R^2\right)^{-2/2}$, $u^y = -\omega x \left(1 - \omega^2 R^2\right)^{-1/2}$. Компоненты, измеренные движущимся наблюдателем, мы найдем, выполнив преобразование Лоренца:

$$u^{0'} = \gamma\left(u^0 - \beta u^x\right) = \gamma(1 - \beta\omega y)\left(1 - \omega^2 R^2\right)^{-1/2}$$

где $\gamma \equiv \left(1 - \beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ в) Поскольку компонента $u^{0'}$ не постоянна, энергия с точки зрения движущегося наблюдателя должна возрастать:

$$\frac{dp^{0'}}{d\tau} = m\frac{du^{0'}}{d\tau} = -\frac{m\beta\omega\gamma u^{y^m}}{(1-\omega^2R^2)^{1/2}}$$

В своей системе отсчета движущийся наблюдатель измеряет электрическое поле $\vec{E}$, равное $E^{y'} = -\gamma\beta B$. (В этом нетрудно убедиться, выполнив соответствующее преобразование Лоренца над тензором электромагнитного поля $F^{\mu v}$.) Следовательно, с точки зрения движущегося наблюдателя энергии частицы (производимая над ней работа) должна изменяться со скоростью

$$\frac{dp^{0'}}{d\tau} = qE^{y'}u^{y'} = -\frac{m\omega\gamma u^{y'}}{(1-\omega^2R^2)^{1/2}} = -\frac{m\omega\gamma u^{y}}{(1-\omega^2R^2)^{1/2}}$$

Тем самым кажущийся «парадокс» разрешен.
Решение 4.14. Из уравнения для силы Лоренца (задача 4.11) получаем

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \left(-q\omega RB + \frac{qQ}{R^2}\right)\vec{e}_r = m\frac{d}{dt}(\gamma\vec{v})$$

Поскольку над частицей не совершается работа, то величина

$$\gamma = \left(1-\omega^2R^2\right)^{-1/2}$$

постоянна. Подставляя $d\vec{v}/dt = -\omega^2R\vec{e}_r$, находим

$$q\omega RB - qQ/R^2 = m\omega^2R/\left(1-\omega^2R^2\right)^{1/3}$$

и, следовательно,

$$\frac{q}{m} = \frac{\omega^2}{(1-\omega^2R^2)^{1/2}(\omega B - Q/R^3)}$$

Solution

4.15. Вид тензора энергии-импульса электромагнитного поля приведен во введении к задачам гл. 4. Взяв его дивергенцию, получим

$$\begin{aligned} 4\pi T^{\mu v}, v &= F^{\mu\alpha}, F^{v}{}_{\alpha} + F^{\mu\alpha}F_{\alpha,v} - \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta,\mu} = \\ &= F^{\mu\alpha}F^{v}{}_{\alpha,v} + F_{v\alpha}\left(F^{\mu\alpha,v} - \frac{1}{2}F^{v\alpha,\mu}\right) = \\ &= F^{\mu\alpha}F^{v}{}_{\alpha,v} + \frac{1}{2}F_{v\alpha}\left(F^{\alpha v,\mu} + F^{\mu\alpha,v} + F^{v\mu,\alpha}\right). \end{aligned}$$

Пользуясь уравнениями Максвелла для вакуума, заключаем, что $F^{v}\alpha, v$ и члены, стоящие в скобках, обращаются в нуль, поэтому $T^{\mu v}, v = 0$. Примечание. Если имеется ток проводимости $\mathbf{J}$, то, как нетрудно проверить, ответ задачи переходит в $T^{\mu v}, v = -F^{\mu\alpha}J_{\hookrightarrow}$.

Solution

4.16. След тензора энергии-импульса $T^{\mu v}$ электромагнитного поля нетрудно вычислить, если сначала $T^{\mu\nu}$ выразить через компоненты тензора Максвелла:
Тогда

$$T^{\mu v} = (1/4\pi)\left(F^{\mu\alpha}F_{\alpha} - \frac{1}{4}\eta^{\mu v}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)$$

$$T^{\mu}_{\mu} = (1/4\pi)\left(F^{\mu\alpha}F_{\mu\alpha} - \frac{1}{4}\cdot 4\cdot F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) = 0.$$

Solution

4.17. Достаточно доказать, что это соотношение выполняется в какой-нибудь одной системе отсчета.
Случай 1.$E^2 = B^2, \vec{E} \cdot \vec{B} = 0$.

Выберем $\vec{E} = \varepsilon\vec{e}_x, B = \varepsilon\vec{e}_y$. Тогда отличными от нуля будут лишь компоненты тензора энергии-импульса $T^{00} = T^{0z} = T^{zz} = \varepsilon^2/4\pi$ и, следовательно, $T^{\mu}_{\alpha}T^{\alpha}{}_{\nu} = 0$.

Случай 2. $\left(E^2 - B^2\right)^2 + (\vec{E} \cdot \vec{B})^2 \neq 0$.

В решении 4.5 показано, каким образом векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ можно сделать параллельными. Пусть $\vec{E} = E\vec{e}_x, \vec{B} = \vec{e}_x$. Тогда отличньми от нуля будут лишь компоненты тензора энергии-импульса

$$T^{00} = -T^{xx} = T^{yy} = T^{zz} = (1/8\pi)\left(E^2 + B^2\right),$$
$$T^{\mu}{}_{\alpha}T^{\alpha}{}_{v} = \delta^{\mu}{}_{v}\left[E^2 + B^2\right]^2/(8\pi)^2 = \delta^{\mu}{}_{v}\left[\left(E^2 - B^2\right)^2 + 4E^2B^2\right]/(8\pi)^2 =$$
$$= \delta^{\mu}{}_{v}\left[\left(E^2 - B^2\right)^2 + (2\vec{E} \cdot \vec{B})^2\right]/(8\pi)^2.$$

Решение 4.18. Если u^{μ} − 4-скорость проводящего элемента, то в системе отсчета, связанной с носителями зарядов, электрическое поле $\vec{E}$ в проводящем элементе равно $E^{\mu} = F^{\mu}v_v u^v$. Вектор, который в системе покоя носителей заряда равен $\vec{J}$, имеет компоненты $J^{\mu} + u^{\mu}J_v u^v$. Следовательно, закон Ома можно записать в виде

$$J^{\mu} + u^{\mu}J_v u^v = \sigma F^{\mu}u^v u^2$$

Поскольку это тензорное уравнение, выполняющееся в системе покоя проводящего элемента, оно должно быть справедливо во всех системах отсчета.

Solution

4.19. Из задачи 4.7 известно, что для частицы с зарядом q

$$J^{\mu}(\mathbf{x}) = q\int \delta^4(\mathbf{x} - \mathrm{z}[\tau])u^{\mu}d\tau$$

поэтому действие можно записать в виде

$$\int Ld\tau = q\int u^{\mu}A_{\mu}d\tau - m\int d\tau$$

а функцию Лагранжа - в виде

$$L = qu^{\mu}A_{\mu} - m\left(-\eta_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta}\right)^{2/s}$$

Координаты z^{λ}, задающие положение частицы, зависят от параметра τ, и

$$\frac{\partial L}{\partial\left(dz^{\lambda}/d\tau\right)} = \frac{\partial L}{\partial u^{\lambda}} = qA_{\lambda} + mu_{\lambda}.$$

Из уравнений Эйлера - Лагранжа находим

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial u^{\lambda}}\right) = qA_{\lambda,\mu}\frac{dz^{\mu}}{d\tau} + m\frac{du_{\lambda}}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial z^{\lambda}}L = qu^{\mu}A_{\mu,\lambda}$$

Следовательно, уравнения движения можно представить в виде
или

$$mdu_{\lambda}/d\tau = q\left(A_{\mu,\lambda} - A_{\lambda,\mu}\right)u^{\mu}$$

$$dp_{\lambda}/d\tau = qF_{\lambda\mu}u^{\mu}$$

Ремение 4.20.

а) Зная, каким образом тензор Максвелла $F^{\mu v}$ выражается через $\vec{E}$ и $\vec{B}$ (см. введение в гл. 4), и используя определение дуального тензора $*F$ (см. задачу 3.25), получаем

$$*F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu} = \\ = \left| \begin{array}{cccc} 0 & -B^x & -B^y & -B^{z^-} \\ B^x & 0 & E^z & -E^y \\ B^y & -E^z & 0 & E^x \\ B^z & E^y & -E^x & 0 \end{array} \right].$$

Следовательно, переход $\mathbf{F} \to *\mathbf{F}$ соответствует замене $\vec{E} \to -\vec{B}$ и $\vec{B} \to \vec{E}$

б) [Примечание. Поскольку $*(*\mathbf{F}) = -\mathbf{F}$, то оператор $*$ перехода к дуальному тензору обладает такими же алгебраическими свойствами, как и $*i$, поэтому $e^{*\alpha}\mathbf{F}$ можно представить в виде $\mathbf{F}\cos\alpha + *\mathbf{F}\sin\alpha$.] Как показано в задаче 4.9, уравнения Максвелла в отсутствие источников имеют вид

$$*F^{\mu v}, v = 0, \quad F^{\mu v}, v = 0.$$

Ясно, что преобразование $\mathbf{F} \to *\mathbf{F}$ оставляет эти уравнеиия инвариантными, т. е. если $\mathbf{F}$ - решение уравнений Максвелла, то и - F - также решение уравнений Максвелла. Так как уравнения линейны, то линейная комбинация, например $e^{*\alpha}\mathbf{F}$, должна также удовлетворять уравнениям Максвелла.

Solution

4.21. Поскольку при преобразовании

$$\vec{E} \to -\vec{B}, \quad \vec{B} \to \vec{E}$$

тензор Максвелла $\mathbf{F}$ переходит в дуальный тензор $*\mathbf{F}$, то вектор $\mathbf{K}$ можно было бы интерпретировать как «ток проводимости магнитного заряда» (взятый со знаком минус). Заметим, что в силу двойственности отношения $\mathbf{F} \leftrightarrow *\mathbf{F}$ из уравнения $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = -4\pi K^0$ следует существование магнитных монополей.

Solution

4.22. В 4-мерном евклиловом пространстве, описываемом декартовыми координатами $x^i (i = 1, ..., 4)$, рассмотрим функцию $G = 1/\sum \left(x^i\right)^2$. Дифференцируя ее, можно доказать непосредственно, что

$$\nabla^2 G \equiv \sum_i \partial^2 G/\partial x^{i^2} = 0$$

всюду, за исключением, быть может, точки $x^l = 0$.

Если ввести сферические координаты в 4-мерном пространстве

$$\begin{array}{ll} x^4 = U\cos V, & r = U\sin V \quad (0 \leqslant U < \infty, 0 \leqslant V \leqslant \pi), \\ 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, & 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \end{array}$$

то $G = U^{-2}$. Интеграл $\int \nabla^2 G d^4x$ нетрудно записать в этих координатах. Если в качестве объема в четырехмерном пространстве выбрать внутренность некоторой гиперсферы $U \leqslant U_0$, то интеграл по объему можно преобразовать в интеграл по 3-мерной гиперсферической поверхности $U = U_0$:

$$\int\limits_{U\leqslant U_0} \nabla^2 G d^4x = \int\limits_0^\pi dV \int\limits_0^\pi d\vartheta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\partial G}{\partial U}\right) V^3 \sin^2 V \sin\vartheta = -4\pi^2.$$

Следовательно,

$$\nabla^2 G = -4\pi^2 \delta\left(x^1\right)\delta\left(x^2\right)\delta\left(x^3\right)\delta\left(x^4\right)$$

и G можно использовать как функцию Грина при решении 4-мерного уравнения Пуассона $\nabla^2\Phi = -4\pi f\left(x^i\right)$:

$$\Phi\left(x^i\right) = \frac{1}{\pi}\int \frac{f\left(\zeta^i\right) d^4\zeta}{\sum\limits_i \left(\zeta^l - x^l\right)^2}.$$

Предположим, что функция f каким-то образом определена при мнимых ζ^4. Введем новые переменные $\zeta^4 = i\tilde{x}^4$ н $\xi^i = \tilde{x}^i (i = 1, 2, 3)$ и определим функцию S так, чтобы

Уравнение

$$f\left(\zeta^i\right) = S\left(x^i\right)$$

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi f\left(x^i\right)$$

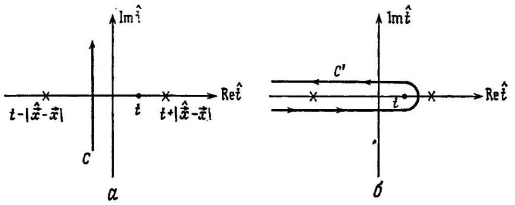
при этом перейдет в уравнение

$$\Box\Phi = -4\pi S\left(x^1, x^2, x^3, t\right)$$

Решение этого уравнения дается приведенным выше интегралом. Произведя в нем замену переменных, получаем

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{-i}{\pi} \int \frac{S(\hat{x}, \hat{t}) d^3\hat{x} d\hat{t}}{\eta_{\mu v}\left(\hat{x}^\mu - x^\mu\right)\left(\hat{x^\nu} - x^\nu\right)},$$

где интегрирование по t производится от $i\infty$ до - $i\infty$. Предположим, что функция источников $S(\vec{x}, \hat{t})$ в уравнении Даламбера определена и не имеет полюсов на вещественной оси $\hat{t}$ при $\hat{t} < t$. В комплексной плоскости $\hat{t}$ определим S при помощи аналитического продолжения. Контур интегрирования C выберем так, как



ur. 10.

показано на фиг. 10, a. Граничные условия определяются тем как должен деформироваться контур C, чтобы охватить вещественную ось, на которой задано распределение источников $S(\overrightarrow{\hat{x}}, \hat{t})$. Полюсы $1/\left(\hat{x}^\mu - x^\mu\right)\left(\hat{x}_\mu - x_\mu\right)$ функции S расположены в точках $\hat{t} = t \pm |\overrightarrow{\hat{x}} - \vec{x}|$. Запаздывающие граничные условия соответствуют деформации контура C в контур C', изображенный на фиг. 10,6. В этом нетрудно убедиться, если воспользоваться приведенным выше результатом для решения уравнения

$$\Box A_\mu = -4\pi J_\mu$$

Мы получим следующее выражение:

$$A_\mu\left(x^\alpha\right) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{C^\circ} \frac{J_\mu\left(\hat{x}^\alpha\right) d^4\hat{x}}{r_{\sigma^r \sigma}}.$$

Интегрируя по dt, преобразуем его к известному решению в виде запаздывающцго интеграла

$A_\mu(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\pi i} \int \frac{J_\mu(\overrightarrow{\hat{x}}, \hat{t}) d\hat{x} d\hat{t}}{(\hat{t} - t - |\overrightarrow{\hat{x}} - \vec{x}|)(\hat{t} - t + |\overrightarrow{\hat{x}} - \vec{x}|)} =$

$= -\frac{1}{\pi i} \int 2\pi i \left[\frac{J_\mu(\overrightarrow{\hat{x}}, \hat{t}) d^{3\hat{x}}}{\hat{t} - t - |\vec{x} - \vec{x}|}\right]\Bigg|_{\hat{t} = t - |\vec{x} - \vec{x}|} = \int \frac{J_\mu(\hat{x}, \hat{t} - |\overrightarrow{\hat{x}} - \vec{x}|) d^3\hat{x}}{|\vec{x} - \vec{x}|}.$

Поскольку

$$\partial\left(r_\sigma r^\sigma\right)^{-1} / \partial x^v = -2x^v\left(r_\sigma r^\sigma\right)^{-2}$$

то формальное выражение для тензора электромагнитного поля сводится к следующему:

$$F_{\mu v} = 2A_{[v,\mu]} = \frac{4}{\pi i} \int \frac{x_{[v} J_{\mu]}\left(\hat{x}^\alpha\right) d^{\hat{4}}}{\left(r_\sigma r^\sigma\right)^2}.$$

Solution

4.23. Поскольку проводимость бесконечна, то сила Лоренца, действующая иа носитель заряда, должна быть равна нулю и $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0$. Из уравнения Максвелла $\vec{B} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$ получаем

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = -\vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$$

Если перейти в мгновенную систему покоя жидкости $\mathbf{c}\vec{v} = 0$, $t = \tau$ (собственное время), то величина $\gamma = 1$, ее первые производные обращаются в нуль, $\partial/\partial t$ совпадает с $\partial/\partial\tau$ (т. е. конвективная производная и частная производная равны), и поэтому

$$dB^l/d\tau = -B^i v^i,_\jmath + B' v^i,_\jmath = -B^i w_{,j} + B' u^i,$$

Поскольку $u^i,_\jmath$ - проекция тензора u^μ, v, перпендикулярная вектору u, то $u_{l,j}$ можно представить в виде

$$u_{i,j} = \omega_{ij} + \sigma_{ij} + \frac{1}{3} g_{ij} \vartheta$$

Ясно, что свертка этого трехмерного тензора $u^i,_\iota$ равна ϑ, и, следовательно, производная вектора $\vec{B}$ по собственному времени имеет вид

$$dB^i/d\tau = -B^{i\vartheta} + B_j \left(\omega^{ij} + \sigma^{ij} + \frac{1}{3} g^{i/\vartheta} \right) =$$

$$= -\frac{2}{3} B^{i\vartheta} + \left(\sigma^{ij} + \omega^{il} \right) B_j.$$

В правую часть уравнения (2) можно включить любой аддитивный член, пропорциональный пространственной компоненте 4-скорости (обращающейся в нуль в сопутствующей системе отсчета). Запи- шем уравнение (2) в виде

$$dB^i/d\tau = -\frac{2}{3} B^{i\vartheta} + \left(\sigma^{ij} + \omega^{ij} \right) B_j + f u^i$$

тде функция f пока произвольна. Преобразуем теперь уравнение (2) в тензорное уравнение. Для этого проделаем следующие операции.

а) Разрешим индексам пробегать значения от 0 до 3 вместо прежних значений от 1 до 3.

Определим 4-вектор B^α соотношением $B^\alpha u_\alpha = 0$, потребовав, чтобы в сопутствующей системе отсчета пространственная часть B совпадала с вектором $\vec{B}$.

в) Заменим обычные производные на ковариантные.

г) Определим функцию f так, чтобы $d(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u})/d\tau = 0$, т. е. чтобы нормировка вектора B осталась неизменной.

Единственное тензорное уравнение, удовлетворяющее требованиям а- r, имеет вид

$$DB^\alpha/d\tau = u^\alpha a_\beta B^\beta + \left(\omega^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta} \right) B_\beta - \frac{2}{3} \vartheta P_\beta B^\beta$$

где a-вектор 4-ускорения, а $P\alpha_\beta$ - проекционный оператор, определенный в задаче 5.18. Ясно, что уравнение (4) тензорное и в сопутствующей ортонормированной системе отсчета переходит в уравнения (3) и (1), т. е. верно во всех системах отсчета.

13.1.5 Problems about Matter and Radiation

Решение 5.1.

а) В системе покоя частиц единственная ненулевая компонента тензора энергии-импульса равна $T^{0'0} = \rho_0$. Переходя к системе отсчета, движущейся в направлении оси x со скоростью $-\beta$, получаем ненулевые компоненты

$$T^{00} = \rho_0 \gamma^2, \quad T^{0x} = T^{x0} = \rho_0 \gamma^2 \beta, \quad T^{xx} = \rho_0 \beta^2 \gamma^2,$$

где $\gamma \equiv \left(1 - \beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}$. В общем случае, если $\mathbf{u}$ – 4-скорость частиц, то $T = \rho_0 \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$.

б) Пусть окружность, по которой происходит движение, лежит в плоскости xy. Рассмотрим сплошную среду с плотностью массы покоя в точке $x = 0, y = a$, равной ρ_0, движущуюся со скоростью$\beta = \omega a$. В п. «а» мы вычислили компоненты тензора энергии-импульса в тсчке $x = 0, y = a$ $\left(T^{00} = \rho_0 \gamma^2\right.$ и т. д.). Если мы рассмотрим материальное кольцо, то все точки кольца эквивалентны, поэтому в полярных координатах ненулевые компоненты тензора T $^\mu$ имеют вид

$$T^{00} = \rho_0 \gamma^2, \quad T^{0\hat{\varphi}} = \rho_0 \gamma^2 \beta = T^{\hat{\varphi}0}, \quad T^{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = \rho_0 \gamma^2 \beta^2$$

Теперь нам необходимо связать ρ_0 с заданным набором частиц. Еоли предположить, что число частиц N достаточно велико, то дискретные частицы можно приближенно считать непрерывно распределенными по кольцу с плотностью $\rho_0 \sim \delta(r - a)\delta(z)$. Поекольку полная энергия частиц должна быть равна $\gamma N m$, то

$$T^{00} 2\pi r dr dz = \gamma N m$$

И

$$\rho_0 = N m \delta(r - a)\delta(z)/2\pi a^\nu$$

Полагая $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, запишем полученные результаты в декартовых координатах:

$$T^{\mu v} = \frac{\gamma N m \delta\left(\left[x^2+y^2\right]^{1/\alpha} - a\right)\delta(z)}{2\pi a}\begin{bmatrix} 1-\beta\sin\varphi & \beta\cos\varphi & 0^- \\ \beta^2\sin^2\varphi & -\beta^2\sin\varphi\cos\varphi & 0 \\ \beta^2\cos^2\varphi & 0 & \\ \text{(симметричные элементы)} & 0 & \end{bmatrix}.$$

в) Если имеется еще одно кольцо, вращающееся в противоположном направлении, то тензор энергии-импульса остается таким же, как в п. «б», а знак $\beta = \omega a$ изменяется. Сложив оба тензора, мы получим сумму, в которой линейные по β члены взаимно уничтожатся, а члены, квадратичные по β, удвоятся. В полярных координатах ненулевые компоненты тензора энергии-импульса системы двух колец равны

$$T^{00} = T^{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}/\boldsymbol{\beta}^2 = \gamma N m \delta(r-a)\delta(z)/\pi a.$$

Solution

5.2. В решении 5.1 было показано, что для частиц с 4-скоростью и тензор энергии-импульса пропорционален $\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}$. Для изотропного множества частиц $\mathbf{cu} = \gamma(1, v\vec{n})$ тензор энергииимпульса равен

$$\mathbf{T} = x\langle \mathbf{u}\otimes\mathbf{u}\rangle, \quad x \text{ - некоторая постоянная,}$$

а усреднение произведено по всем ориентациям вектора $\vec{n}$. В силу симметрии внедиагональные компоненты при усреднении обращаются в нуль:

$$T^{0i} = x\gamma^2 v\left\langle n^i\right\rangle = 0,$$
$$T^{i\prime} = x\gamma^2 v^2\left\langle n^i n'\right\rangle = 0, \quad i \neq j.$$

Для вычисления диагональных (пространственных) компонент заметим, что

$$\langle n^x n^x\rangle = \langle n^y n^y\rangle = \langle n^z n^z\rangle$$

Н ТО

$$\langle n^x n^x\rangle + \langle n^y n^y\rangle + \langle n^z n^z\rangle = \left\langle n^2\right\rangle = 1$$

в силу чего

$$\left\langle n^i n^i\right\rangle = \frac{1}{3}, \quad T^{ii} = x\gamma^2\mho^2/3$$

Поскольку известно, что каждая движущаяся частица обладает энергией $m\gamma$, то плотность массы-энергии равна

$$m\gamma N = T^{00} = x\gamma^2\langle 1\rangle = x\gamma^2.$$

Таким образом, $x = mN/\gamma$ и ненулевые компоненты тензора энергии-импульса равны

$$T^{00} = m\gamma N, \quad T^{ij} = \left(m\gamma N v^2/3\right)\delta^{ij}.$$

Для фотонов $v \to c, m\gamma \to hv$. Для холодной пыли $v = 0$, поэтому $T^{00} = mN$ - единственная ненулевая компонента.

Решение 5.3. В системе покоя элемента жидкости $u^0 = 1$, $u^l = 0$, поэтому

$$T^{\mu v} = pg^{\mu\nu} + (\rho + p)u^\mu u^v.$$

Поскольку это тензорное уравнение выполняется в системе покоя элемента жидкости, то оно должно быть верным и в любой другой системе.

Solution

5.4. Пространственные координаты мы всегда можем выбрать так, чтобы диагонализовать 3-мерный тензор энергииимпульса T^{ij}. Из соображений симметрии ясно, что из пространственных направлений выделено лишь то, которое совпадает с направлением вектора $\vec{B}$, а выбор двух других ортогональных направлений произволен. Если выбрать $\vec{B} = \vec{B}e_z$, то $T^{xx} = T^{yy}$ и $T^{xy} = T^{xz} = T^{yz} = 0$. Поскольку в рассматриваемой задаче поле статично и нет переноса энергии, то $T^{0i} = 0$. Плотность энергии магнитного поля $T^{00} = B^2/8\pi$.

Теперь нам необходимо вычислить «давления» T^{xx}, T^{yy}, T^{zz}. Для этого мы рассмотрим ячейку поля с размерами $\Delta x, \Delta y, \Delta\dot{z}$ и представим себе, что она расширяется адиабатически. (При адиабатическом

расширении остается постоянным магнитный поток $B\Delta x\Delta y$, т. е. число «силовых линий» магнитного поля B в объеме.) Энергия поля, заключенного в ячейке, равна

$$\mathscr{E} = \left(B^2/8\pi\right)\Delta x\Delta y\Delta z = (B\Delta x\Delta y)^2\Delta z/8\pi\Delta x\Delta y.$$

Зная энергию, нетрудно найти давления

$$T^{xx} = -\frac{1}{\Delta y\Delta z}\frac{dE}{d(\Delta x)} = B^2/8\pi = T^{yy},$$
$$T^{zz} = -\frac{1}{\Delta x\Delta y}\frac{dE}{d(\Delta z)} = -B^2/8\pi.$$

Таким образом, тензор энергии-импульса имеет вид

$$T^{\mu v} = \frac{B^2}{8\pi}\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}.$$

Чтобы найти тензор энергии-импульса хаотического поля, выберем набор ортогональных осей и усредним поля $\vec{B}$ по направлениям x, y и z. Из доказанного выше ясно, что усреднение даст

$$\langle T^{\mu v}\rangle = \frac{B^2}{8\pi}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{3} & & \\ & & \frac{1}{3} & \\ & & & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

где B - средняя напряженность поля. Выбрав любые другие ортогональные направления, мы получим тот же результат, потому что блок 3×3, стоящий в левом верхнем углу матрицы $T^{\mu\nu}$ (единичная матрица 3×3), инвариантен относительно поворотов. Следовательно, полученный нами результат совпадает с результатом усреднения по всем направлениям.

Solution

5.5. Поскольку погонная плотность массы стержня равна μ, то $T^{00} = \mu/A$. В системе покоя стержня поток энергии отсутствует, в снлу чего $T^{0i} = 0$. Выберем ось z вдоль оси стержня. Из соображений симметрии (см. задачу 5.4) ясно, что внедиагональные компоненты тензора энергии-импульса T^{xy}, T^{xz}, T^{yz} (напряжения) должны быть равны нулю. Поскольку растяжение действует вдоль оси z, то $T^{zz} = -F/A$. В направлениях осей x и y напряжения не приложены (поэтому в направлениях этих осей нет переноса импульса) и $T^{xx} = T^{yy} = 0$.

Решение 5.6. Предположим, что к веревке приложена снла, бесконечно малая по сравнению с усилием разрыва F. Если A - площадь поперечного сечения, а ось веревки совпадает с осью z, то компоненты тензора T в системе покоя стержня можно взять из задачи 5.5. Наблюдатель, движущийся со скоростью $\mathbf{u} = (\gamma, \gamma\vec{v})$, измерит плотность энергии

$$T^{0'0'} = T^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta = \left(\gamma^2/A\right)\left[\mu - Fv_z^2\right]$$

Ясно, что наибольший шанс полууить отрицательную компоненту $T^{0'0'}$ имеет наблюдатель, движущийся в направлении оси z со скоростью $v \to c$. Чтобы компонента $T^{0'0'}$ была положительной, слабое условие энергии требует выполнения неравенства $F < \mu$, задающего верхний предел допустимой нагрузки. В физических единицах для хорошего стального троса это соответствует

$$\frac{F}{A} < \frac{\mu}{A}c^2 = \rho c^2 = 7\times 10^{13}\text{кГ} - \text{ВТ/ММ}^2,$$

в то время как реальное усилие разрыва составляет $\approx$ 200 кГВт/мм. Расхождение по порядку величины в $10^{11,5}$ раз обусловлено тем, что прочность стали определяется в основном энергией молекулярных связей ($\lesssim$ 1 эВ/атом), а не плотностью всей массы, сосредоточенной главным образом в ядрах $\left(\sim 5\times 10^{10}\right.$ эВ).

Solution

5.7. Пусть S' - мгновенная система покоя элемента стержня (фиг. 11). В этой системе покоя отличны от нуля лишь компоненты $T^{0,0'} = \rho, T^{x'x'} = p$. Переходя при помощи преобразования Лоренца в лабораторную систему отсчета, мы найдем следующие ненулевые компоненты:

$$T^{xx} = p, \quad T^{yy} = \gamma^2\beta^2\rho, \quad T^{00} = \gamma^2\rho, \quad T^{0y} = \gamma^2\beta\rho$$

где $\beta = \omega r$ и $\gamma \equiv \left(1-\beta^2\right)^{-1/2}$. В сферических координатах отличны от нуля компоненты

$$T^{rr} = p, \quad T^{\varphi\varphi} = \gamma^2\beta^2\rho/r^2, \quad T^{0\varphi} = \gamma^2\beta\rho/r, \quad T^{00} = \gamma^2\rho.$$

Чтобы найти $p(r)$, воспользуемся радиальной компонентой уравнения движения

$$\begin{aligned} 0 = T^{rv}{}_{;} &= T^{rr}{}_{,}r + T^{\varphi\varphi}\Gamma^r_{\varphi\varphi} + T^{rr}\left[\ln(-g)^{1/2}\right]_{,r} = \\ &= \left(T^{rr}r^2\right)_{,r}/r^2 - r\sin^2\vartheta T^{\varphi\varphi} \end{aligned}$$

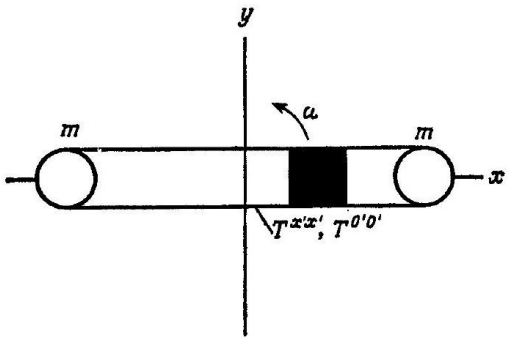
и получим

$$\left(pr^2\right)_{,}r = r\sin^2\vartheta\gamma^2\beta^2\rho$$

Поскольку вся масса сосредоточена в материальных точках, плотность массы можно представить в виде

$$\rho = m\delta(r-a)\delta(\cos\vartheta)[\delta(\varphi-\omega t) + \delta(\varphi-\omega t-\pi)]/r^2$$

Знаs1 ρ, можно проинтегрировать уравнение движения с граничным условием $p = 0$ при $r > a$ и получить p. После того как это



Dur. 11.
будет проделано, компоненты тензора энергии-импульса (в лабораторной системе отсчета, описываемой координатами t, r, ϑ, φ) окажутся равными

$$T^{\mu v} = \frac{m}{1-\omega^2a^2}\delta(\cos\vartheta)[\delta(\varphi-\omega t) + \delta(\varphi-\omega t-\pi)]\times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{\delta(r-a)}{a^2} & 0 & 0 & \frac{\omega\delta(r-a)}{a^2} \\ -\frac{\omega^2 a}{r^2} & 0 & 0 & \\ \text{симметричные члены} & 0 & 0 & \\ & & \frac{\omega^2\delta(r-a)}{a^2} & \end{bmatrix}$$

Решение 5.8. Электростатическое поле для движущегося конденсатора остается равным E, поскольку электрическое поле, параллельное направлению движения, не изменяется. Вследствие лоренцевского сокращения зазор между обкладками движущегося конденсатора равен d/γ, где $\gamma \equiv \left(1-v^2\right)^{-\frac{1}{2}}$. Следовательно, движущийся конденсатор обладает электростатической энергией

$$E^2Ad/8\pi\gamma < E^2Ad/8\pi.$$

Давление газа должно быть по абсолютной величине равно (отрицательному) давлению электрического поля E, т. е. $p = E^2/8\pi$. В системе покоя конденсатора ненулевые компоненты тензора энергии-импульса газа равны

$$T^{00} = \rho_0, \quad T^{xx} = T^{yy} = T^{zz} = E^2/8\pi,$$

а полная масса покоя конденсатора -

$$M = E^2Ad/8\pi + \rho_0 Ad$$

Если конденсатор движется, то плотность энергии газа мы получим, произведя преобразование Лоренца:

$$T^{0'0'} = \gamma^2\left(T^{00} + \beta^2T^{xx}\right) = \gamma^2\left(\rho_0 + \beta^2E^2/8\pi\right).$$

Следовательно, полная энергия движущегося конденсатора равна

$$\begin{aligned} \mathscr{E} &= E^2Ad/8\pi\gamma + \gamma^2\left(\rho_0 + \beta^2E^2/8\pi\right)Ad/\gamma = \\ &= \left(\gamma\rho_0 + \gamma E^2/8\pi\left[1/\gamma^2 + \beta^2\right]\right)Ad = \gamma\left(\rho_0 + E^2/8\pi\right)Ad = \gamma M. \end{aligned}$$

Решение 5.9. Для простоты воспользуемся координатами Минковского. Для частиц тензор энергии-импульса равен

$$T^{\mu\nu}_{\text{част}}(\mathbf{x}) = \sum_i m_i \int u_i^\mu(\tau_i)\, u_i^\nu(\tau_i)\, \delta^4[\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(\tau_i)]\, d\tau_t$$

и, следовательно,

$$T^{\mu\nu}_{\text{част},\, v} = \sum_i m_i \int u_i^\mu u_i^v\, (\partial/\partial x^v)\, \delta^4[\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(\tau_i)]\, d\tau_i$$

Дельта-функция зависит только от $\mathbf{x} - \mathbf{x}_i$, поэтому пронзводную $\partial/\partial x^v$ можно заменить на - $\partial/\partial x_i^\nu$. Поскольку
То

$$u_i^v \partial/\partial x_i^v = d/d\tau_i$$

$$T^{\mu\nu}_{\text{час},v} = -\sum_l m_l \int u_i^\mu\, (d/d\tau_l)\, \delta^4[\mathbf{x} - \mathbf{x}_l(\tau_l)]\, d\tau_i =$$

$$= \sum_l m_i \int (du_i^\mu/d\tau_i)\, \delta^l[\mathbf{x} - \mathbf{x}_l(\tau_l)]\, d\tau_i$$

(последнее равенство получено интегрированием по частям). Для i-й частицы

$$m_l du_i^\mu/d\tau_l = q_l F_v^\mu(\mathrm{x}_i)\, u_i^\nu$$

Сопоставляя это уравнение с ответом задачи 4.7, находим

$$T^{\mu v}_{\text{част},\, v} = \sum_i q_l \int F_v^\mu u_l^v \delta^{\mathbb{1}}[\mathrm{x} - \mathrm{x}_l(\tau_i)]\, d\tau_i =$$

$$= F_v^\mu J^\mu.$$

Но из задачи 4.15 известно, что
поэтому

$$T^{\mu\nu}_{\text{электромаг},} = (4\pi)^{-1} F^{\mu\alpha} F^v_{\alpha,v} = -F^{\mu\alpha} J_\alpha$$

$$\left(T^{\mu v}_{\text{част}} + T^{\mu\nu}_{\text{электромаг}}\right)_{,v} = 0.$$

Solution

5.10. Рассмотрим бесконечно малое число фотонов dN с небольшим разбросом по частоте и положению, движущихся в узком конусе и проходящих за малый интервал времени через элементарную площадку. По определению

$$I_v = \frac{d\ (\text{энергия})}{d\ (\text{частота})\ d\ (\text{время})\ d\ [\text{телесный угол}]\ d\left[\begin{array}{l}\text{площадь}\\ \text{поперечного}\\ \text{сечения}\end{array}\right]}.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что узкий конус, ограничивающий телесный угол d (телесный угол), внутри которого движутся фотоны, вытянут вдоль оси z. Тогда
d (энергия) $= hvdN$,
$d($ телесный угол $) = dv^x dv^y = d\,(p^x/E)\, d\,(p^y/E) = dp^x dp^y/h^2v^2$,
d (время) $= dz/c = dz$,
d (площадь поперечного сечения) $= dxdy$,
$d($ частота $) = d(hv)/h = dp^z/h$,
поэтому

$$I_v = \frac{dNh^4v^3}{dxdydzdp^xdp^ydp^z}$$

Плотность частиц в фазовом пространстве dN/d^3xd^3p лоренцинвариантна (см. задачу 3.34). Следовательно, и величина I_v/v^3 также лоренц-инвариантна.

Solution

5.11. Введем в системе отсчета, связанной со звездой, для описания 3-мерного пространства 3-мерные сферические координаты. Тогда тензор энергии-импульса излучения будет иметь вид

$$T^{\mu v}(r,\theta,\varphi) = \left(L/4\pi r^2\right) \begin{bmatrix} t & r & \theta & \varphi \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Пусть ℓ - вектор (разумеется, изотропный), ведущий из точки пространства-времени, где был испущен фотон, в точку, где он был воспринят наблюдателем. Если в системе отсчета, связанной со звездой, наблюдатель находится от звезды на расстоянии r, то $\ell^0 = r, \ell^r = r, \ell^\theta = \ell^\varphi = 0$. В точке пространства-в ремени, в которой фотон достигает наблюдателя, тензор энергии-импульса можно представить в впде

$$\mathbf{T} = \left[L/4\pi \left(u_{3B} \cdot l\right)^4\right] l \otimes l$$

не зависящем от системы отсчета, где ив $_{з}$ - 4-скорость звезды, так что при вычислениях в системе отсчета, связанной со звездой, $\mathbf{u_s} \cdot l$ =-r. Зная выражение для тензора энергии-импульса T, не зависячще от системы отсчета, нтрудно вычислить поток энергии, приходяций к наблюдателю. э iусть $\mathbf{n} = (0, \vec{n})$ - пространственноподобный вектор, направленный в системе покоя наблюдателя к видимому положению звезды, так что $l = (R, -R\vec{n})$. Поток энергии, измеренный наблюдателем в своей системе покоя, будет paBeH

$$F_{\text{набл}} = -T^{0i} n_i = \mathrm{u}_{\mathrm{a}\sigma,} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$$

Но в этой системе отсчета

$$\mathbf{u_{3B}} \cdot \ell = (\gamma, \gamma\vec{v}) \cdot (R, -R\vec{n}) = -\gamma R(1 + v\cos\theta)$$

Н, кроме TOго,
поэTOMy
$\boldsymbol{l} \cdot \mathbf{u}_{\text{набл}} = -R$ и $\boldsymbol{l} \cdot \mathbf{n} = -R$

$$F_{\text{набл}} = L/\left[4\pi\gamma^4(1 + v\cos\vartheta)^4 R^2\right]$$

Этот же результат можно получить, используя лоренц-инвариантность величины I_v/v^3 (см. задачу 5.10).

Решение 5.I2. Пусть и-4-скорость частицы, l - изотропный 4-вектор, вдоль которого распространяется излучение. Частица поглошает поток 4-импульса - $SA(\mathbf{u}\cdot l)l$, т. е. тензор энергииимпульса излучения равен тензору $\mathbf{T} = S\ell \otimes l$, умноженому на эффективное сечение частицы и свернутому с ее 4-скоростью (чтобы получить поток в системе покоя частицы). Минус обусловлен сигнатурой - $+t+$ В Временная компонента потока импульса в системе покоя частицы равна $SA(\mathbf{u} \cdot l)(\mathbf{u}l)$ и совпадает с погло- щенной энергией, повторно испущенной частицей в виде излучения в своей системе покоя. Таким образом, окончательное изменение 4-импульса равно

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{m d\mathbf{u}}{d\tau} = -SA\left[(\mathbf{u} \cdot l)\ell + (\mathbf{u} \cdot l)^2\mathbf{u}\right]$$

Это соотношение можно рассматривать как уравнение движения для $\mathbf{u}$.

Чтобы решить уравнение (1), положим $\mathbf{W} \equiv \mathbf{u} \cdot l$ и умножим уравнение скалярно на l. Тогда

$$dW/d\tau = -(SA/m)W^8$$

и, следовательно,

$$W = [(2SA\tau/m) + K]^{-1/3}$$

где K - некоторая постоянная. Будем считать теперь $\mathbf{W}$ независимой переменной и, произведя в уравнении (1) подстановку $d\tau = -dWm/SAW^3$, преобразуем его к виду

$$\frac{d\mathbf{u}}{dW} - \frac{\mathbf{u}}{W} = \frac{1}{W^2} l$$

Это уравнение имеет интегрирующий множитель $1/W$ и легко интегрируется:

$$\frac{d}{dW}\left(\frac{1}{W}\mathbf{u}\right) = \frac{1}{W^3}\ell,$$

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{2}\ell + W\mathbf{q},$$

где $\mathbf{q}$ - постоянная интегрирования. Из условий $\mathbf{u} \cdot l - W\mathbf{u}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$ следует, что $\mathbf{q} \cdot \ell = 1$ и $\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = 0$. Подставляя W из соотношения (2) в (5) и интегрируя, находим

$$\mathrm{x} = +\frac{1}{6\alpha}(2\alpha\tau + K)^{8/2}\ell - \frac{1}{\alpha}(2\alpha\tau + K)^{1/2}\mathbf{q} + \mathrm{x}_0$$

где $\alpha = SA/m$. Если постоянную интегрирования выбрать так, чтобы частица начинала двигаться из начала координат в поле излучения параллельно оси x, то

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{6\alpha}(2\alpha\tau+1)^{3/2} + \frac{1}{2\alpha}(2\alpha\tau+1)^{1/2} - \frac{2}{3\alpha}, \\ x &= \frac{1}{6\alpha}(2\alpha\tau+1)^{3/2} - \frac{1}{2\alpha}(2\alpha\tau+1)^{1/2} - \frac{1}{3\alpha}, \\ y &= 0 \\ z &= 0. \end{aligned}$$

(Приведенное решение заимст вовано из книги [10], стр. 116 = 118.)

Solution

5.13. Для находящегося на сфере наблюдателя доплеровское смещение спектра излучения абсолютно черного тела будет различным в разных направлениях. Поскольку для интенсивности излучения черного тела справедливо соотношение

$$I_v/v^3 = \text{ const } \left(e^{hv/kT} - 1\right)^{-1}$$

и величина I_v/v^3 лоренц-инвариантна, то доплеровское смещение $v_0 \to v$ приведет к изменению эффективной температуры $T_0 \to T = T_0\,(v/v_0)$

Какое доплеровское смещение измеряет сопутствующий наблюдатель, глядящий под углом к направлению движения? Ответ на этот вопрос, приводимый во многих курсах теории относительности, нетрудно вывести из инвариантов. Пусть $\mathbf{u}$ − 4-скорость сферы, $\mathbf{u}_0$ − 4-скорость системы покоя излучения и $\mathbf{p}$ − 4-импульс фотона в системе единиц, в которой $h = 1$. Тогда

$\boldsymbol{v} = -\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}$, $\quad v_0 = \mathbf{u}_0\cdot\mathbf{p}$ $\quad$ и $\quad \left(1-v^2\right)^{-1/2} \equiv \boldsymbol{\gamma} = -\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_0$.

В системе покоя сферы

$$\mathbf{u} = (1, \overrightarrow{0}), \quad \mathbf{u}_0 = (\gamma, -\gamma\vec{v}), \quad p = (v, v\vec{n})$$

где $\vec{n}$ - единичный 3-вектор. Единичный пространственноподобный вектор в направлении $\vec{v}$ равен

$$\left(0, \frac{\vec{v}}{|v|}\right) = -\frac{\dot{u}_0 + (\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{u})\,\mathbf{u}}{\gamma v}$$

(в этом нетрудно убедиться, подставив компоненты, вычисленные в системе покоя сферы). Аналогичным образом вектор $(0, \vec{n})$ инвариантно можно записать в виде

$$(0,\vec{n}) = \frac{\mathbf{p} + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{p})\mathbf{u}}{v},$$

поэтому угол испускания фотона в системе отсчета, связанной со сферой, определяется соотношением

$$\cos\vartheta = (0,\vec{n})\cdot\left(0, \frac{\vec{v}}{|v|}\right) = \frac{v_0 - \gamma v}{\gamma v v}$$

Для получения последнего результата мы взяли скалярное произведение 4-векторов, записанных в инвариантной форме, и воспользовались тем, что $v = -\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}$ и т. д. Разрешив это соотношение относительно v/v_0, найдем

$$\frac{T}{T_0} = \frac{v}{v_0} = \frac{1}{\gamma(1 + v\cos\vartheta)}$$

Наконец, равновесную температуру мы получим, усреднив температуру T по всем направлениям $\left\langle T(\vartheta)^4\right\rangle^{1/4}$ (поскольку количество энергии, излучаемой в единицу времени, равно в состоянии равновесия количеству энергии, поглощаемой в единицу времени, то по закону Стефана - Больцмана оно пропорционально T^4). Таким образом,

$$\left\langle \frac{T}{T_0}\right\rangle^4 = \frac{1}{2}\int\limits_{\cos\theta=-1}^{\cos\theta=1} \frac{d(\cos\theta)}{\gamma^4(1+v\cos\theta)^4} = \frac{1}{\gamma^4}\frac{1}{6v}\left[\frac{1}{(1-v)^3} - \frac{1}{(1+v)^3}\right]$$

u

$$T_{\text{равновесн}} = \left\langle T^4\right\rangle^{1/4} = \left(\gamma^2\left(1 + v^2/3\right)\right)^{1/4} T_0.$$

Ремение 5.14. Пусть $\langle \Delta E \rangle$ - среднее количество энергии, теряемой фотоном при столкновениях. Из условий задачи известно, что $E/mc^2 \leqslant 1$ и $T/mc^2 \leqslant 1$ (в системе единиц с $k = 1$), поэтому в разложении в двойной ряд

$$\langle \Delta E \rangle = mc^2 \left[\alpha_1 + \alpha_2(E/m) + \alpha_3(T/m) + \right.$$
$$\left. + \alpha_4 \left(E^2/m^2\right) + \alpha_5 \left(ET/m^2\right) + \alpha_6 \left(T^2/m^2\right) + \ldots\right]$$

необхс.чмо удерживать лишь первые не обращающиеся в нуль ч..:. При $T = E = 0$ ничего не происходит, и поэтому $\alpha_1 = 0$. $\because T = 0, E \neq 0$ мы имеем обычное комптоновское рассеяние с сечением

$$d\sigma/d\Omega \sim \left(1 + \cos^2\theta\right)$$

и переданной энергией

$$\Delta E = \left(E^2/i : l\right)(1 - \cos\theta)$$

Поскольку сечение рассеяния симметрично относительно направления вперед и назад, то член с $\cos\vartheta$ при усреднении по углам выпадает и

$$\langle \Delta E \rangle = \left(E^2/m\right), \quad T = 0.$$

Следовательно, $\alpha_2 = 0$ и $\alpha_1 = 1$. При $E = 0, T \neq 0$ фотон обладает нулевой энергией и обращается в вакуум, поэтому $\alpha_3 = \alpha_8 = 0$.

Наконец, нам понадобится коэффициент α_5. Рассмотрим мысленно разреженный поток фотонов (излучение абсолютно черного тела) с температурой, равной температуре газа:

$$d \text{ (число фотонов)}/dE = \text{ const } \times E^2 e^{-E/T}.$$

Подставляя в разложение (1)

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_6 = 0, \quad \alpha_4 = 1$$

и налагая требование теплового равновесия
получаем

$$\int_0^\infty \langle \Delta E \rangle E^2 e^{-E/T} dE = 0,$$

$$0 = (3T/m)\left(4T + \alpha_5 T\right),$$

или $\alpha_5 = -4$, что позволяет записать соотношение (1) в окончательном виде:

$$\langle E \rangle = \left(E^2 - 4TE\right)/mc^2 + \ldots$$

Solution

5.15. Воспользуемся для доказательства уравнениями движения ($T^{\mu\nu}, v = 0$) и запишем члены с первыми производными в дивергентном виде, а затем по теореме Гаусса преобразуем дивергенции в интегралы по поверхности, равные нулю вне системы. Обращаясь повторно к уравнениям движения, получаем

$$T^{00}_{,00} = -T^{0k}{}_{,k0} = -T^{k0}{}_{,0k} = T^{km}{}_{,,mk}.$$

Умножив затем все члены этих равенств на $x^i x^t$, преобразуем их к виду

$$\left(x^i x^j T^{00}\right)_{,00} = x^i x^j \left(T^{km}\right)_{,km} =$$
$$= \left(T^{km} x^i x^j\right)_{,km} - 2\left(x^i x^j\right)_{,k} T^{km}{}_{,m} - T^{km}\left(x^i x^j\right)_{,km} =$$
$$= \left(T^{km} x^i x^j\right)_{,km} - 2\left(x^j T^{im}{}_{,m} + x^i T^{jm}{}_{,m}\right) - 2T^{ij}.$$

Члены с первыми производными можно упростить. Например,

$$x^j T^{im}{}_{,m} = \left(x^j T^{im}\right)_{,m} - \delta_m T^{im}.$$

Произведя такое упрощение, проинтегрировав по всему пространству и отбросив все дивергенции, которые можно преобразовать в обращающиеся в нуль интегралы по поверхности, получим

$$\frac{d^2}{dt^2}\int x^i x^j T^{00} d^3x = \int \left[0 - 2\left(-T^{ij} - T^{ij}\right) - 2T^{ij}\right] d^3x = 2\int T^{ij} d^3x$$

Solution

5.16. Пусть v - времениподобный собственный вектор:

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}=\alpha\mathbf{v}$$

Рассмотрим тензор энергии-импульса, измеренный наблюдателем с 4-скоростью $\mathbf{u}=\pm\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$. (Знак выберем так, чтобы вектор $\mathbf{u}$ был обращен в будущее.) В системе покоя наблюдателя $\mathbf{u}=(1,\overrightarrow{0})$, а вектор потока энергии (взятый со знаком минус) равен

$$-\mathbf{S}=\mathbf{T}\cdot\mathbf{u}=\frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}=\frac{\alpha}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}=\alpha\mathbf{u}=(\alpha,\overrightarrow{0})$$

Таким образом, пространственная часть потока энергии равна нулю, а α-измеренная наблюдателем плотность энергии (взятая со знаком минус).

Верно и обратное утверждение: если по измерениям наблюдателя, движущегося в 4-скоростью u, пространственная часть потока энергии равна нулю, то $-\mathbf{S}=\mathbf{T}\cdot\mathbf{u}=\alpha\mathbf{u}$ при некотором α и $\mathbf{u}$ - времениподобный собственный вектор тензора энергииимпульса T.

Решение 5.17.

а) Если отбросить члены второго порядка по скорости, то для общего преобразования Лоренца получим

$$\Lambda^0_{0'}=1,\quad \Lambda^0_{i'}=v^i,\quad \Lambda^{ii'}=\delta^{i''}.$$

Если $T^{\mu'v'}$ - компоненты тензора энергии-импульса в системе покоя жидкости, то $T^{0'i'}=0$ и

$$g^j\equiv T^{0j}=\Lambda^0{}_{\mu'}\Lambda''T^{\mu'v'}=\Lambda_{0^0}{}'\Lambda_{0'}\cdot T^{0'0'}+\Lambda^0{}_{k'}\Lambda_i\cdot T^{i'k'}=$$
$$=v'T^{0'0'}+v^kT^{i'k'}=v^k\left(T^{0'\theta'\delta'^k}+T^{j'k'}\right).$$

Для идеальной жидкости $T'0'=\rho$ и $T''k'=p\delta'^k$, поэтому «инерциальная масса, приходящаяся на единицу объема», равна

б) Поскольку

$$m^{jk}=\delta^{jk}(\rho+p).$$

$$M^{ij}\equiv\delta^{ij}\int T^{00}dxdydz+\int T^{ij}dxdydz,$$

то необходимо лишь доказать, что второе слагаемое в правой части равно нулю. Заметим, что 3-дивергенция тензора T^{ik} обращается в нуль:

ИИ

$$T^{jk}{}_{,k}=T^{j\mu}{}_{,\mu}-T^{j0}{}_{,0}=0-0$$

$$\left(x^kT'^i\right)_{,l}=8^k{}_lT^{ji}+x^kT^{ji},i=T^{jk}.$$

Из теоремы Гаусса следует

$$\int T^{jk}dxdydz=\int\left(x^kT^{ji}\right)_{,l}dxdydz=\int\limits_S x^kT^{ji}n^idS,$$

где S - любая поверхность вне напряженного тела, а $\vec{n}$ - направление внешней нормали к S. Поскольку интеграл по поверхности равен нулю, то утверждение задачи доказано.

Решение 5.18. Нетрудно видеть, что если воспользоваться определениями 2-формы $\sigma_{\alpha\beta}$ и тензора $\omega_{\alpha\beta}$, то остается лишь проверить уравнение

$$u_{\alpha;\beta}=u_{\alpha;\mu}P^\mu_\beta-a_\alpha u_\beta.$$

Для этого удобнее всего вспомнить определение $P^\mu{}_\beta$. Однако мы изберем другой, более поучительный подход, спроектировав это уравнение на вектор u и на ортогональное ему подпространство (при помощи тензора P). Заметим, что

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{P}=0,\quad \mathbf{P}\cdot\mathbf{P}=\mathbf{P}.$$

Проекции на подпространство, ортогональное вектору u, и на вектор и имеют соответственно следующий вид:

$$u_{\alpha;\beta}P^{\beta}_{\gamma} = u_{\alpha;\mu}P^{\mu}_{\beta}P^{\beta}_{\gamma} - a_{\alpha}u_{\beta}P^{\beta}_{\gamma} = u_{\alpha;\mu}P^{\mu}_{\gamma} - 0$$

II

$$u_{\alpha;\beta}u^{\beta} = u_{\alpha;\mu}P^{\mu}u^{\beta} - a_{\alpha}u_{\beta}u^{\beta} = 0 + a_{\alpha}.$$

Нетрудно проверить, что оба соотношения правильны. Поскольку проекции уравнения на вектор и и на ортогональное ему подпространство не приводят к противоречию, то и само уравнение непротиворечиво.

Solution

5.19. Если жидкость характеризуется плотностью массы-энергии ρ, давлением P, температурой T и энтропией S, то закон сохранения массы-энергии в элементе объема жидкости V можно представить в виде

$$d(\rho V) = -PdV + TdS,$$

где S - энтропия в объеме V. Это соотношение отличается от нерелятивистского закона сохранения лишь тем, что плотность энергии мы заменили плотностью массы-энергии, поскольку в специальной теории относительности масса не сохраняется. Число барионов сохраняется, и поэтому первое начало термодинамики часто записывают через плотность барионов n и энтропию S, приходящуюся на один барион [$V \equiv$ (число барионов/ n) исключается]:

$$d(\rho/n) = -Pd(1/n) + Tds$$

ИЛИ

$$d\rho = (\rho + P)dn/n + nTds.$$

Решение 5.20. Для идеальной жидкости

$$T^{\mu\nu} = (P + \rho)u^{\mu}u^{\nu} + Pg^{\mu\nu}$$

поэтому в системе покоя жидкости нулевая компонента уравнения движения имеет вид

$$u_{\mu}T^{\mu\nu}_{iv} = T^{0v}_{;v} = P_{iv}g^{0v} + Pg^{0\nu}_{iv} + (P + \rho), vu^{v}u^{0} + \\ +(P + \rho)\left[u^{v}; vu^{0} + u^{0}{}_{;v}u^{v}\right] = 0.$$

Соотношения

$$g^{\mu v}; v = 0, u^{0} = 1 \text{ и } u^{0}_{;v} = u_{\alpha}u^{\alpha}; = \frac{1}{2}\left(u_{\alpha}u^{\alpha}\right)_{;v} = 0$$

позволяют преобразовать уравнение к виду

$$0 = -\frac{d}{dt}P + \frac{d}{dt}(P + \rho) + (P + \rho)u^{\nu}; v.$$

Если n-плотность барионов в системе покоя жидкости, то вектор потока барионов n и сохраняется. Следовательно, в системе покоя

$$\left(nu^{v}\right)_{:v} = 0 = n_{,v}u^{v} + nu^{v}_{iv} = \frac{dn}{dt} + nu^{v}_{;v}$$

Если для исключения $u^{v} : v$ воспользоваться этим соотношением, то уравнение движения запишется в виде

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{(P + \rho)}{n}\frac{dn}{dt}$$

Сравнив его с первым началом термодинамики (см. задачу 5.19), получим

$$ds/dt = 0$$

Следовательно, течение жидкости изэнтропическое.

Solution

5.21.
Из первого начала термодинамики, записанного для идеальной жидкости (см. задачу 5.20) с уравнением состояния $\rho = \rho(n)$, следует
поэтому

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\rho + P}{\rho}\frac{dn}{n}$$

$$d\ln\rho / d\ln n = (\rho + P)/\rho$$

Таким образом, $\rho > 3P$ в том и только в том случае, если $d\ln\rho/d\ln n < 4/3$. Поскольку для идеальной жидкости

$$T^{\mu}_{\mu} = (\rho + P)u^{\mu}u_{\mu} + pg^{\mu}{}_{\mu} = -(\rho + P) + 4P = 3P - \rho,$$

то утверждение задачи доказано.

Solution

5.22.
Предположим, что звуковая волна представляет собой (изэнтропическое) возмущение в однородной статической жидкости с параметрами ρ_0, P_0 и n_0. Пусть ρ_1, P_1 и n_1 - возмущения, а $\mathbf{u} \approx (1, \vec{v}_1)$ - скорость жидкости в системе покоя невозмущенной жидкости. Члены первого порядка по возмущениям в уравнении $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ приводят к соотношениям
при $\mu = 0 \quad \nabla \cdot \vec{v}_1 = -\frac{\partial\rho_1}{\partial t}(\rho_0 + P_0)^{\mathbf{1}}$;
при $\mu = 1, 2, 3 \partial\vec{v}_1/\partial t = -\nabla P_1/(\rho_0 + P_0)$,
которые можно объединить в уравнение

$$\partial^2\rho_1/\partial t^2 - \nabla^2 P_1 = 0$$

Поскольку в изэнтропическом потоке P_1 и ρ_1 связаны соотношением

$$P_1 = \partial P/\,\partial\rho|_s\,\rho_1$$

то выведенное уравнение переходит в волновое уравнение

$$\nabla^2\rho_1 - \frac{1}{v^2_{\text{ЗВК}}}\frac{\partial^2\rho_1}{\partial t^2} = 0$$

с характеристической скоростью $v_{\text{зуук.}}$ При уравнении состояния $\rho \approx 3P$

$$v^2_{\text{ЗВук}} = \partial P/\partial\rho = 1/3$$

поэтому в сильно релятивистском газе $v_{3\text{ вук}} \approx 3^{-1/2}$.

Solution

5.23.
Из первого начала термодинамики (см. задачу 5.19) при $ds = 0$ следует

$$dn/d\rho = n/(\rho + P)$$

Пользуясь определением показателя адиабаты Γ_1 и выражением для $v^2_{3\text{ в}}$ из задачи 5.21, получаем

$$\frac{v^2_{3\text{ вук}}}{\Gamma_1} = \frac{dP/d\rho}{(ndP)/(Pdn)} = \frac{P}{n}\frac{dn}{d\rho} = \frac{P}{\rho + P}.$$

Решение 5.24. При нулевой температуре все энергетическиесостояния в фермн-газе вплоть до уровня Ферми $E = E_{\text{F}}$ заполнены. Поскольку для фермионов существуют два спиновых состояния, то плотность фермионов в фазовом пространстве равна $2/h^3$ и

$$dn/V = \left(2/h^3\right)d^3p$$

$$\rho = \int_0^{P_{\text{F}}} \left(p^2 + m^2\right)^{1/2}\left(2/h^3\right)4\pi p^2 dp,$$

$$P = \int_0^{P_{\text{F}}1/3} p^2\left(p^2 + m^2\right)^{-1/2}\left(2/h^3\right)4\pi p^2 dp,$$

где P_{F} - импульс, соответствующий энергии Ферми. Как показано в задаче 5.22, $v_{3\mathrm{sy}} = dP/d\rho$, откуда

$$v_{3\ \text{В ук}}^2 = \frac{dP}{d\rho} = \frac{dP/dP_{\mathrm{F}}}{d\rho/dP_{\mathrm{F}}} = \frac{1}{3}\left(\frac{P_{\mathrm{F}}}{E_{\mathrm{F}}}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{m^2}{E_{\mathrm{F}}^2}\right).$$

Заметим, что для сильно релятивистского ферми-газа $v_{38} \to 3^{-1/2}$.

Решение 5.25. Релятивистское уравнение Бернулли, выражающее сохранение энергии вдоль линий тока идеальной жидкости (задача 14.7), имеет вид

$$\left(1 - v^2\right)^{-1/2} = \left(\frac{n}{P+\rho}\right) \times \text{ const.}$$

[У равнение Бернулли следует из уравнений $T^{0v}, \nu = 0, (nu^{\mu}), \mu = 0$, и первого начала термодинамики $d\rho/(P+\rho) = dn/n$.] Поскольку газ начинает вытекать из баллона с нулевой скоростью, то const $==$ $(P_0 + \rho_0)/n_0$. Верхняя граница для $n/(P+\rho)$, задающая верхнюю границу $v_{\text{макс}}$ для v, достигается при $P \to 0$ (и, следовательно, $\rho \to mn$), откуда

$$\left(1 - v_{\text{МаКс}}^2\right)^{-1/2} = \frac{1}{m}\left(\frac{P_0 + \rho_0}{n_0}\right).$$

Попытаемся выразить правую часть этого равенства через a - скорость звука в газе с параметрами P_0, ρ_0, n_0. Постоянная K в уравнении состояния $P = Kn^{\nu}$ указывает, какой адиабате соответствует состояние газа. Первое начало термодинамики запишем в виде дифференциального уравнения

$$\frac{dp}{dn} = \frac{Kn\gamma + \rho}{n}$$

Интегрируя его (с граничным условием $\rho \to mn$ при $n \to 0$), получаем

$$\rho = mn + \frac{K}{\gamma - 1} n^{\gamma}$$

Скорость звука a определяется уравнением

$$a^2 = \frac{dP}{d\rho} = \frac{dP/dn}{d\rho/dn} = \frac{\gamma K n^{\gamma-1}}{m + \gamma K n^{\gamma-1}/(\gamma-1)},$$

а из первого начала термодинамики получаем

$$\frac{P+\rho}{n} = \frac{d\rho}{dn} = \left(\frac{dP}{dn}\right)\left(\frac{d\rho}{d\overline{P}}\right) = \left(\gamma K n^{\gamma-1}\right)\left(1/a^2\right)$$

Но уравнение (1) содержит ту же самую комбинацию $\gamma K n^{\gamma-1}$. Следовательно, уравнение (1) можно разрешить относительно
и получить

$$\gamma K n^{\gamma-1} = ma^2/\left[1 - a^2/(\gamma-1)\right]$$

откуда

$$\frac{1}{m}\left(\frac{P_0+\rho_0}{n_0}\right) = \frac{1}{1 - a^2/(\gamma-1)}$$

$$v_{\text{макс}}^2 = 1 - \left[1 - a^2/(\gamma-1)\right]^2.$$

(Заметим, что в пределе сильно релятивистского газа, для которого $\gamma \to 4/3$ и $a^2 \to 1/3, v_{\text{макс}} \to 1$.)

Решение 5.26. В системе покоя жидкости лишь компоненты тензора энергии-импульса $T^{0j} = T^{i0} = q^j$ связаны с вектором q. Поскольку в системе покоя жидкости $\mathbf{u} = (1, \overrightarrow{0})$, то соотношение

$$T^{\alpha\beta} = u^{\alpha} q^{\beta} + u^{\beta} q^{\alpha}$$

выполняется в этой системе отсчета и, следовательно, справедливо в любой другой системе отсчета.

Solution

5.27.
В системе покоя жидкости

$$S^0 \text{ (плотность энтропии) } = ns,$$

$$S^j \text{ (поток энтропии) } = \text{поток тепла } /T = q^j/T.$$

Поскольку в системе покоя жидкости $q^0 = 0, u^0 = 1$, то соотно- шение $\mathbf{S} = nsu + q/T$ выполняется в этой и, следовательно, в любой другой системе отсчета.

Solution

5.28.
Тензор энергии-импульса рассматриваемой системы удобно записать в виде

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\text{жндк}} + \mathbf{T}_{\text{теп }\pi} = [(P+\rho)\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} + Pg] + [\mathbf{q}\otimes\mathbf{u} + \mathbf{u}\otimes\mathbf{q}]$$

Запишем уравнение, выражающее сохранение энергии вдоль линии тока:

$$0 = (\nabla\cdot\mathrm{T})\cdot\mathbf{u} = (\nabla\cdot\mathrm{T}_{\text{жидк}})\cdot\mathbf{u} + (\nabla\cdot\mathrm{T}_{\text{тепл}})\cdot\mathbf{u}.$$

В результате несложных преобразований (см. решение 5.20) первое слагаемое в правой части приводится к виду

$$-d\rho/d\tau + (dn/d\tau)(P+\rho)/n$$

Из первого начала термодинамики следует, что это выражение равно - $nTds/d\tau$ (см. задачу 5.19). Второе слагаемое равно

$$(\nabla\cdot\mathbf{T}_{\text{Ten}})\cdot\mathbf{u} = (q^\mu u^\nu + u^\mu q^\nu)_{;\,\nu} u_\mu$$

Поскольку $q^\alpha u_\alpha = 0$ (поток тепла пространственноподобен в сопутствующей системе отсчета) и $u^\alpha u_\alpha = -1$, то

$$0 = (q^\mu u_\mu)_{;v} = q^\mu : v u_\mu + q^\mu u_{\mu;v},$$
$$0 = (u^\mu u_\mu)_{;v} = 2u^\mu; v u_\mu$$

и второе слагаемое сводится к $-\mathbf{q}\cdot\mathbf{a} - \nabla\cdot\mathbf{q}$. После всех преобразований уравнение (1) переходит в уравнение

$$0 = -nTds/d\tau - \mathbf{q}\cdot\mathbf{a} - \nabla\cdot\mathbf{q}$$

Наконец, обращаясь к определению 4-вектора потока плотности энтропии $\mathbf{S} = ns\mathbf{q} + \mathbf{q}/T$, получаем

$$\nabla\cdot\mathbf{S} = s\nabla\cdot(n\mathbf{u}) + n(\nabla s\cdot\mathbf{u}) + \frac{1}{T}\nabla\cdot\mathbf{q} - \frac{\nabla T}{T^2}\cdot\mathbf{q} =$$
$$= n\frac{ds}{d\tau} + \frac{1}{T}\nabla\cdot\mathbf{q} - \frac{\nabla T\cdot\mathbf{q}}{T^2} = -\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}}{T} - \frac{\nabla T}{T^2}\cdot\mathbf{q}.$$

Второе слагаемое показывает, что, как и в нерелятивистской термодинамике, тепловой поток производит энтропию из-за наличия температурного градиента. Первое слагаемое означает, что поток тепла производит энтропию в направлении 4-вектора ускорения. Этот эффект «красного смещения» возникает по той причине, что в системе, движущейся с ускорением, постоянная температура не характеризует равновесное состояние: частота фотонов, идущих «спереди», по мере продвижения их «назад» претерпеват смещение к голубому концу спектра, тем самым создается нескомпенсированный поток тепла.

Solution

5.29.
Равновесное состояние достигается, когда прекращается производство энтропии, поэтому соотношение

$$-\mathbf{q}\cdot\mathbf{a} = \frac{\nabla T}{T}\cdot\mathbf{q}$$

должно выполняться для любого потока тепла q (см. задачу 5.28). Оно означает, что $\mathbf{a} = -\nabla\ln T$. Решение этого уравнения имеет вид

$$\ln T = -\vec{a}\cdot\vec{x} + \text{ const},$$

или

$$T = T_0\exp(-\vec{a}\cdot\vec{x}).$$

Решение 5.30. Поскольку

$$T^{\alpha\beta}u_\alpha = -\rho u^\beta$$

то члены, соответствующие потоку энергии, отсутствуют. Следовательно, $\mathbf{q} = 0$ и $\boldsymbol{S} = ns\mathbf{u}$. Таким образом, скорость производства энтропии равна

$$S^\alpha_{;\alpha} = (nu^\alpha)^s_{;\alpha} + n\frac{ds}{d\tau} = n\frac{ds}{d\tau}$$

[второе равенство получено из закона сохранения числа барионов $\nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0$]. Используя первое начало термодинамики

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \frac{\rho + p}{n}\frac{dn}{d\tau} + nT\frac{ds}{d\tau}$$

и закон сохранения барионов

$$(nu^{\alpha})_{;} = \frac{dn}{d\tau} + n\vartheta$$

скорость производства энтропии можно представить в виде

$$S^{\alpha}_{;\alpha} = \frac{1}{T}\left[\frac{d\rho}{d\tau} + \vartheta(\rho + p)\right].$$

Чтобы выразить правую часть через коэффициенты вязкости, возьмем дивергенцию вектора $T^{\alpha\beta}u_{\alpha}$:

$$-\left(\rho u^{\beta}\right)_{;\beta} = -\frac{d\rho}{d\tau} - \rho\vartheta = \left(T^{\alpha\beta}u_{\alpha}\right)_{;\beta} = T^{\alpha\beta}u_{\alpha;\beta}.$$

Величину $T^{\alpha\beta}u_{\alpha;\beta}$ можно вычислить, используя тензор энергииимпульса для вязкой жидкости и разложение для $u_{\alpha;\beta}$, приведенное в задаче 5.18. Член $T^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta}$ обращается в нуль вследствие симметрии, а член $T^{\alpha\beta}a_{\alpha}u_{\beta}$-вследствие того, что $T^{\alpha\beta}u_{\beta} \sim u^{\alpha}$. Остается лишь член

$$T^{\alpha\beta}u_{\alpha;\beta} = \left[\rho u^{\alpha}u^{\beta} + (p - \zeta\vartheta)P^{\alpha\beta} - 2\eta\sigma^{\alpha\beta}\right]\left[\sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\vartheta P_{\alpha\beta}\right] =$$
$$= -2\eta\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} + \vartheta(p - \zeta\vartheta).$$

[Здесь мы воспользовались легко проверяемыми соотношениями
Итак,

$$u^{\alpha}\sigma_{\alpha\beta} = 0, \quad P_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} = 0, \quad P_{\alpha\beta}P^{\alpha\beta} = 3\Big]$$

$$\frac{d\rho}{d\tau} + \vartheta(\rho + p) = 2\eta\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} + \zeta\vartheta^2$$

Подставляя это соотношение в выведенную выше формулу для $S^{\alpha};\alpha$, получаем требуемое выражение.

Solution

5.3I.
Как известно, проектирование $T^{\alpha\beta},\beta$ на u_{α} приводит к уравнению локального закона сохранения энергии. Чтобы получить уравнение движения жидкости, спроектируем тот же тензор на подпространство, ортогональное вектору u_{α}:

$$0 = P^{\gamma}{}_{\alpha}T^{\alpha\beta},{}_{\beta} = P^{\gamma}{}_{\alpha}\left(\rho,{}_{\beta}u^{\alpha}u^{\beta} + \rho u^{\alpha},{}_{\beta}u^{\beta} + \rho u^{\alpha}u^{\beta},\beta + p,{}_{\beta}p\alpha\beta + \right.$$
$$\left. + pP^{\alpha\beta},{}_{\beta} - 2\eta,{}_{\beta}\sigma^{\alpha\beta} - 2\eta\sigma^{\alpha\beta},{}_{\beta} - \zeta,{}_{\beta}\vartheta P^{\alpha\beta} - \zeta\vartheta{}_{\beta}P^{\alpha\beta} - \zeta\vartheta P^{\alpha\beta},{}_{\beta}\right).$$

Воспользуемся следующими тождествами:

$$P^{\gamma}{}_{\alpha}u^{\alpha} = 0,$$
$$P\gamma_{\alpha}u^{\alpha},\beta = u^{\gamma},\beta + u^{\gamma}u_{\alpha}u^{\alpha},\beta = u^{\gamma},\beta,$$
$$P^{\gamma}P^{\alpha\beta} = P^{\gamma\beta},$$
$$P\gamma_{\alpha}P^{\alpha\beta},\beta = P_{\alpha}\left(u^{\alpha}u^{\beta}\right),\beta = u^{\gamma},\beta u^{\beta},$$
$$P\gamma_{\alpha}\sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{\gamma\boldsymbol{\beta}},$$
$$P^{\gamma}{}_{\alpha}\sigma^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = \sigma^{\nu\beta}{}_{,\beta} + u^{\gamma}u_{\alpha}\sigma^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = \sigma^{\gamma\beta}{}_{,\beta} - u^{\gamma}u_{\alpha,\beta}\sigma^{\alpha\beta} =$$
$$= \sigma^{\gamma\beta}{}_{,\beta} - u^{\gamma}\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}$$

в результате спроектированные уравнения движения примут вид

$$0 = (\rho + p)u^{\gamma}{}_{,\beta}u^{\beta} + p_{,\beta}P^{\alpha\beta} - 2\left(\eta\sigma^{\gamma\beta} + \zeta\vartheta P^{\nu\beta}\right)_{,\beta} +$$
$$+ 2\eta u^{\gamma}\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} + \zeta\vartheta^2 u^{\gamma}.$$

В нерелятивистском пределе

$$u^t \approx 1, u' \approx v^j, p = \Theta\left(v^2\right), \rho = \mathscr{O}(1).$$

Разлагая j-ю компоненту уравнения (1) в ряд и сохраняя лишь члены порядк $\mathscr{O}\left(v^2\right)$, получаем уравнение

$$0 = \rho\left(v', t + v'_{,k}v^k\right) + p_{,l} - \\ - \left[\eta\left(v_{1,k} + v_{k,l} - \frac{2}{3}\delta_{fk}v^m{}_{,m}\right)\right]_{,k} + \left(\zeta v^m{}_{,m}\right),$$

(уравнение Навье-Стокса).
Решение 5.32. Для идеального газа Максвелла - Больцмана

$$p = nkT,$$
$$\rho/n = U(T).$$

Уравнение (2) означает, что энергия, приходящаяся на одну частицу, зависит лишь от температуры. Из первого начала релятивистской термодинамики
следует, что

$$Tds = d(\rho/n) + pd(1/n) = \\ = \frac{dU}{dT}dT + pd\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$c_v = \frac{dU}{dT}$$

Запишем уравнение (1) в дифференциальной форме:

$$pd\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}dp = kdT$$

тогда уравнение (3) примет вид
и мы получим

$$Tds = \left(\frac{dU}{dT} + k\right)dT - \frac{1}{n}dp$$

$$c_p = \frac{dU}{dT} + k = c_v + k$$

Показатель адиабаты Γ_1 найдем из уравнения (1):

$$\Gamma_1 = \left.\frac{\partial \ln p}{\partial \ln n}\right|_s = 1 + \left.\frac{n}{T}\frac{dT}{dn}\right|_s$$

Из уравнения (3) мы заключаем, что при $s = \text{const}$

$$c_v\frac{dT}{dn} = \frac{p}{n^2} = k\frac{T}{n} = (c_p - c_v)\frac{T}{n}.$$

Наконец, подставляя соотношение (9) в (8), находим

$$\Gamma_1 = 1 + \frac{(c_p - c_v)}{c_v} = \gamma$$

Solution

5.33.
Из задачи 5.32 известно, что

$$\gamma = \Gamma_1 = \left.\frac{\partial \ln p}{\partial \ln n}\right|_s$$

поэтому если $\gamma = \text{const}$, то

$$p = Kn^\gamma.$$

Для адиабатического процесса первое начало термодинамики можно записать в виде
или

$$d\rho = \frac{\rho + p}{n}dn = \left(\frac{\rho}{n} + Kn^{\gamma-1}\right)dn$$

$$\frac{a}{dn}\begin{pmatrix} p \\ \vdots \end{pmatrix} = Kn^{\gamma-2}$$

Этому дифференциальному уравнению удовлетворяет функция

$$\frac{\rho}{n} = \frac{Kn^{\gamma-1}}{\gamma-1} + \text{ const.}$$

Но $\rho/n \to m$ при $n \to 0$, поэтому

$$\rho = mn + \frac{Kn^{\nu}}{\gamma-1}.$$

Ретение 5.34.

а) Скалярные интегралы мы получим, вычислив скалярные произведения различных комбинаций u^{α} и векторного и тензорного интегралов для J^{μ} и $T^{\mu v}$. Например,

$$n = -J^{\mu}u_{\mu} = \int \vartheta d^3P = \frac{g}{h^3}\int^{\infty} \frac{4\pi P^2 dP}{\exp\left[\left(P^2+m^2\right)^{1/2}/kT - \vartheta\right] - \varepsilon},$$

где $g = 2J+1$. Произведя подстановку $P = msh\chi$, получим

$$n = \frac{4\pi g m^3}{h^3}\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^2\chi \operatorname{ch}\chi dx}{\exp(\beta \operatorname{ch} x - \theta) - 8}$$

где $\beta = m/kT$. Аналогично

$$p = \frac{1}{3}\left(u_{\mu}u_{\nu} + g_{\mu v}\right)T^{\mu\nu} = \frac{1}{3}\int \mathfrak{P}\frac{P^2}{\left(P^2+m^2\right)^{\frac{1}{2}}}d^3p =$$

$$= \frac{4\pi g m^4}{3h^3}\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^4\chi d\chi}{\exp(\beta \operatorname{ch}\chi - \theta) - 8}$$

и, наконец,

$$\rho - 3p = -g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = m^2\int \mathfrak{R}\frac{d^3P}{\left(P^2+m^2\right)^{1/2}} =$$

$$= \frac{4\pi g m^4}{h^3}\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^2\chi dx}{\exp(\beta \operatorname{ch}\chi - \vartheta) - \varepsilon}.$$

б) Из соотношения (2) следует

$$dp = \frac{4\pi g m^4}{3h^3}\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^4\chi d\chi(\beta \operatorname{ch}\chi dT/T + d\vartheta)\exp(\beta \operatorname{ch}\chi - \vartheta)}{[\exp(\beta \operatorname{ch}\chi - \vartheta) - \varepsilon]^2}.$$

Интегрируя по частям, дифференцируя члены $\operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch}\chi$ и ${}^{33}\chi$, получаем

$$dp = \frac{4\pi g m^4}{3h^3}\frac{1}{\beta}\int_0^{\infty} \frac{dx\left[\left(3\operatorname{sh}^2\chi + 4\operatorname{sh}^4\chi\right)\beta dT/T + 3\operatorname{sh}^2\chi \operatorname{ch}\chi d\vartheta\right]}{\exp(\beta \operatorname{ch}\chi - \vartheta) - 8}.$$

Подставляя вместо интегралов в правую часть их выражения (1) - (3), находим

$$dp = (\rho+p)dT/T + nkTd\vartheta$$

в) Из определения химического потенциала μ следует

$$d\mu = d\rho/n + dp/n - (\rho+p)dn/n^2 - sdT - Tds$$

Но

$$d\rho = (\rho+p)dn/n + nTds$$

поэтому

$$d\mu = dp/n - sdT = dp/n - (\rho + p)dT/(nT) + \mu dT/T$$

Последнее равенство мы получили, выразив s через μ. Сравнивая найденное соогношение с (4), имеем
г) При $\varepsilon = 0$

$$\mu = kT\theta$$

$$\frac{p}{n} = \frac{\frac{m}{3}\int\limits_0^\infty \mathrm{sh}^4\, x e^{-\beta\,\mathrm{ch}\,x} dx}{\int\limits_0^\infty \mathrm{sh}^9\,\chi\,\mathrm{ch}\,x e^{-\beta\,\mathrm{ch}\,x} d\chi},$$

НО

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{sh}^4\,\chi \exp(-\beta\,\mathrm{ch}\,\chi)d\chi = -\frac{1}{\beta}\,\mathrm{sh}^3\,\chi \exp(-\beta\,\mathrm{ch}\,\chi)\Big|_0^\infty + \\ + \frac{3}{\beta}\int\limits_0^\infty \mathrm{sh}^3\,\chi\,\mathrm{ch}\,\chi \exp(-\beta\,\mathrm{ch}\,\chi)d\chi.$$

Первое слагаемое в правой части обращается в нуль, и

$$p = nkT.$$

д) При $\varepsilon = 0$ интегралы (1) - (3) можно выразить через модифицированные функции Ганкеля, поскольку

$$K_n(\beta) = \frac{\beta^n}{(2n-1)!}\int\limits_0^\infty d\chi\,\mathrm{sh}^{2n}\,\chi \exp(-\beta\,\mathrm{ch}\,\chi) = \\ = \frac{\beta^{n-1}}{(2n-3)!!}\int\limits_0^\infty d\chi\,\mathrm{sh}^{2n-2}\,\chi\,\mathrm{ch}\,\chi e^{-\beta\,\mathrm{ch}\,\chi}.$$

Таким образом, при $\alpha = 4\pi g m^3 e^\vartheta h^{-3}$

$$n = aK_2(\beta)/\beta,$$
$$p = amK_2(\beta)/\beta^2,$$
$$\rho - 3p = amK_1(\beta)/\beta^2.$$

Для ρ/n точное выражение имеет следующий вид:

$$\rho/n = m\left[K_1(\beta)/K_2(\beta) + 3/\beta\right]$$

Заметим, что $\beta \to \infty$ при $kT \ll m$. В этом пределе
поэтому

$$K_n(\beta) \to \left(\frac{\pi}{2\beta}\right)^{1/2} e^{-\beta}\left[1 + \frac{4n^2-1}{8\beta} + \ldots\right]$$
$$\rho/n \to m\left[\frac{1 + 3/(8\beta)}{1 + 15/(8\beta)} + \frac{3}{\beta}\right] = m\left(1 + \frac{3}{2}\frac{kT}{m}\right).$$

Поскольку $\beta \to 0, K_1(\beta)/K_2(\beta) \to 0$ при $kT \gg m$, то $\rho/n \to 3kT$.Чϕ !
Решение 5.35. Из задачи 5.32 известно, что
где

$$p = (c_v + k)/c_v = 1 + \frac{k}{dU/dT}$$

$$U(T) = m\left\{K_1(\beta)/K_2(\beta) + 3/\beta\right\}, \quad \beta = m/kT$$

(см. задачу 5.34).
Это позволяет нам дать точный ответ на вопрос задачи. Заметим, что при $kT \ll m$
а при $kT \gg m$

$$U = m + 3kT/2 \text{ и } \gamma = 5/3,$$

$$U = 3kT \text{ и } \gamma = 4/3.$$

13.2 Problems on the Mathematical Foundations of GR

13.2.1 Problems about Metric

Solution 6.I

а) По аналогии с полярными координатами введем гиперболические координаты
Тогда

$$\begin{aligned} x &= v\,\mathrm{ch}\,u, \quad x^2 - t^2 = v^2, \\ t &= v\,\mathrm{sh}\,u, \qquad x/t = \mathrm{cth}\,u. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dx^2 &= (dv\,\mathrm{ch}\,u + duv\,\mathrm{sh}\,u)^2, \\ dt^2 &= (dv\,\mathrm{sh}\,u + duv\,\mathrm{ch}\,u)^2, \\ dx^2 - dt^2 &= dv^2 - v^2 du^2. \end{aligned}$$

б) Разрешив уравнения (1) относительно du и dv_r получим

$$\begin{aligned} dv &= dx\,\mathrm{ch}\,u - dt\,\mathrm{sh}\,u, \\ du &= v^{-1}(dt\,\mathrm{ch}\,u - dx\,\mathrm{sh}\,u), \end{aligned}$$

откуда для частицы с единичной массой

$$P_u = g_{uu}P^u = -v^2\frac{du}{d\tau} = -v\,\mathrm{ch}\,u\frac{dt}{d\tau} + v\,\mathrm{sh}\,u\frac{dx}{d\tau} = -x\frac{dt}{d\tau} + t\frac{dx}{d\tau}.$$

Для свободно движущейся частицы $x = \mathrm{const} + \frac{dx}{dt}t$ и обе производные $dt/d\tau, dx/d\tau$ постоянны, поэтому

$$P_u = \ \mathrm{const}\ - t\frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau} + t\frac{dx}{d\tau} = \ \mathrm{const}.$$

Для вычисления P_v воспользуемся соотношением

$$-m^2 = \mathbf{P}\cdot\mathbf{P} = g^{vv}\left(P_v\right)^2 + g^{uu}\left(P_u\right)^2 = \left(P_v\right)^2 - \left(P_u\right)^2/v^2$$

и получим

$$P_v^2 = P_u^2/v^2 - m^2$$

Правая часть этого выражения не постоянна, поскольку в общем случае v изменяется вдоль траектории частицы. Можно показать (см. задачу 7.13 или книгу [1], т. 2, стр. 319), что если какой-нибудь коэффициент метрики не зависит оот некоторой координаты (в данном случае от u), то соответствующая этой координате компонента ковариантного импульса (в рассматриваемом случае P_u) сохраняется. Решение 6.2. Запишем метрику в 4-мерном евклидовом пространстве:

$$ds^2 = dx^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

и уравнение гиперсферы радиуса R:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1^2 = R^2$$

По аналогии с 3-мерным случаем введем координаты на гиперсфере:

$$\begin{aligned} x_4 &= R\cos\alpha, \\ x_3 &= R\sin\alpha\cos\vartheta, \\ x_2 &= R\sin\alpha\sin\vartheta\cos\varphi, \\ x_1 &= R\sin\alpha\sin\vartheta\sin\varphi. \end{aligned}$$

Уравнение (2) выполняется автоматически. Дифференцируя координаты (3) с постоянным радиусом R и подставляя в (1), получаем метрику гиперсферы.
Решение 6.3. а) Введем на поверхности цилиндра (фиг. 12) координаты x и y:

$$\begin{aligned} x &= \varphi, \\ y &= a\,\mathrm{tg}\,\lambda. \end{aligned}$$

Метрика сферы в этих координатах имеет следующий вид:

$$ds^2 = \frac{a^4 dy^2}{\left(a^2 + y^2\right)^2} + \frac{a^4 dx^2}{a^2 + y^2}$$

Сравнивая с метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2$, нетрудно заметить, что наименьшему искажению подвергается окрестность линии $y = 0$, т. е. полоса вблизи экватора.

б) При стереографической проекции (фиг.13) рассмотрение несколько облегчается, если ввести обычный полярный угол $\vartheta = 90^\circ - \lambda$. Пусть (ϑ, φ) - координаты точки на сфере, а (ϑ_0, φ_0) - сферические координаты спроектированной точки. Ясно, что $\varphi_0 = \varphi$. Расстояние от оси до спроектированной точки равно $\rho = 2a\,\mathrm{tg}(\vartheta/2)$, поэтому удобно ввести координаты

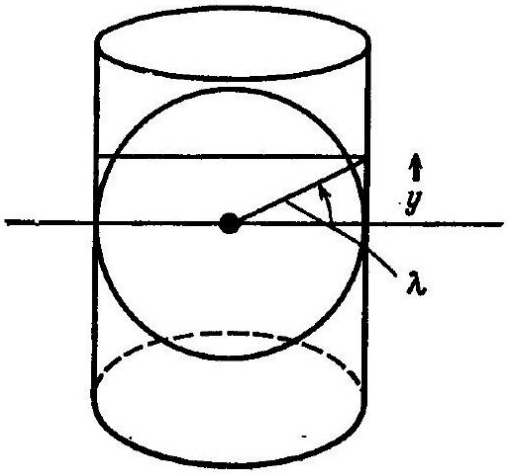
$$x = \rho\cos : p = 2a\,\mathrm{tg}\,\frac{\vartheta}{2}\cos\varphi,$$

$$y = \rho\sin\varphi = 2a\,\mathrm{tg}\,\frac{\vartheta}{2}\sin\varphi.$$

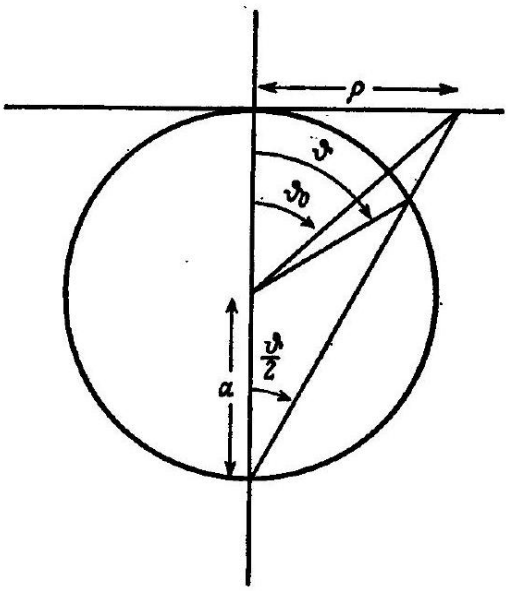
Нетрудно проверить, что

$$ds^2 = a^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right) = \cos^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\left(dx^2 + dy^2\right)$$

Наименьшему искажению подвергается окрестность северного полюса $\vartheta = 0$. Описанная нами проекция называется конформной,



ur. 12.



Dur. 13.

поскольку $\left(ds^2\right)_{\text{сфера}} = g\left(ds^2\right)_{\text{карта,}}$ где g - некоторая функция [в рассмотренном случае $g = \cos^4(\vartheta/2)$]. Конформная проекция сохраняет углы (см. задачу 6.7).

Решение 6.4.

а) Предположим, что мы передвигаемся по поверхности земного шара вдоль некоторой кривой $\varphi = \varphi(\vartheta)$. Стрелка компаса образует а направлением движения угол ψ, определяемый соотношением

$$\operatorname{tg}\psi = \sin\vartheta\frac{d\varphi}{d\vartheta}$$

(Угол ψ измеряется от оси y по часовой стрелке.) На карте мы получим

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\psi}$$

Из соотношений (1) и (2) следует

$$\sin\vartheta\frac{d\varphi}{d\vartheta} = -\frac{dx/d\vartheta}{dy/d\vartheta} = -\frac{\frac{\partial x}{\partial\vartheta} + \frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{d\vartheta}}{\frac{\partial y}{\partial\vartheta} + \frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{d\vartheta}}$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial\vartheta} + \frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{d\vartheta}\right)\frac{d\varphi}{d\vartheta}\sin\vartheta = -\frac{\partial x}{\partial\vartheta} - \frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{d\vartheta}.$$

Поскольку соотношение (3) должно выполняться в рассматриваемой точке при любом значении $d\varphi/d\vartheta$, то, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях производной $d\varphi/d\vartheta$ в правой и левой частях, получим

$$\begin{aligned}
&\partial y/\partial\varphi = 0, \quad y = y(\vartheta)\\
&\partial x/\partial\vartheta = 0, \quad x = x(\varphi)\\
&-\sin\vartheta\partial y/\partial\vartheta = \partial x/\partial\varphi.
\end{aligned}$$

Из (4) и (5) следует, что левая часть соотношения (6) зависит только от ϑ, в то время как правая зависит только от φ, поэтому каждая часть этого соотношения должна быть постоянной, которую мы полагаем равной 1. Таким образом, в проекции Меркатора отображение осуществляется по формулам

$$x = \varphi, \quad y = -\int\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} = \ln\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}.$$

б) Выберем для удобства радиус равным 1. Тогда

$$\begin{aligned}
ds^2 &= d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2 =\\
&= \sin^2\vartheta\left(dx^2 + dy^2\right) =\\
&= \operatorname{sech}^2 y\left(dx^2 + dy^2\right).
\end{aligned}$$

в) Дуги больших кругов являются геодезическими на 2-сфере. Уравнения геодезических решить нетрудно, поскольку известны два первых интеграла. Пусть точка сверху означает дифференцирование d/ds. Тогда соотношение (8) можно записать в виде

$$\operatorname{sech}^2 y\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = 1.$$

Поскольку x - циклическая координата в метрике (8), то $g_{xx}\dot{x} = \text{const}$ (см. решение 7.13), т. е.

$$\left(\operatorname{sech}^2 y\right)\dot{x} = \gamma$$

Если ни $\dot{x}$, ни $\dot{y}$ не обращаются в нуль, то из уравнений (9) и (10) можно исключить параметр s:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2} = \frac{\lambda^2 - \operatorname{ch}^2 y}{\operatorname{ch}^2 y}$$

где $\lambda = 1/\gamma$. Уравнение (11) легко интегрируется, если положить $z = \operatorname{sh} y$. Решение его имеет вид

$$\operatorname{sh} y = \alpha\sin(x + \beta)$$

где $\alpha = \left(\lambda^2 - 1\right)^{1/2}$, а β - еще одна постоянная интегрирования.

Рещение 6.5.

Выяснить, трехмерно ли пространсто, мы сможем, вычислив 3-объем, натянутый на $dxdydz$:
$dV = g^{1/2}dxdydz =$

$$= \left|\begin{array}{ccc}
1 - \left(\frac{3}{13}\right)^2 & -\left(\frac{3}{13}\right)\left(\frac{4}{13}\right) & -\left(\frac{12}{13}\right)\left(\frac{3}{13}\right)\\
-\left(\frac{3}{13}\right)\left(\frac{4}{13}\right) & 1 - \left(\frac{4}{13}\right)^2 & -\left(\frac{4}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right)\\
-\left(\frac{12}{13}\right)\left(\frac{3}{13}\right) & -\left(\frac{4}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right) & 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2
\end{array}\right|^{t/2} dxdydz = 0.$$

Поскольку объем dV тождественно равен нулю при любых x, y, z, то эти кооординаты всегда линейно-зависимы. Следовательно, рассматриваемое нами пространство либо 2-мерное, либо 1-мерное. Одну координату, например z, всегда можно отбросить, положив $z = \text{const}$. Такая операция допустима, поскольку z - «циклическая координата", т. е. коэффициенты метрики не зависят от z. После исключения z остается метрика

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - \left(\frac{3}{13}dx + \frac{4}{13}dy\right)^2$$

Она действительно 2-мерная, а не 1-мерная, поскольку

$$g = \det \begin{pmatrix} 1 - \left(\frac{3}{13}\right)^2 & -\left(\frac{3}{13}\right)\left(\frac{4}{13}\right) \\ \left(\frac{3}{13}\right)\left(\frac{4}{13}\right) & 1 - \left(\frac{4}{13}\right)^2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Нетрудно найти преобразование координат (например, ортогонализуя исходную систему по Граму - Шмидту)

$$\xi = \frac{12}{5}\left(\frac{3}{13}x + \frac{4}{13}y\right),$$
$$\eta = \frac{13}{5}\left(-\frac{4}{13}x + \frac{3}{13}y\right),$$

приводящее к метрике $ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2$ (простейшего вида). Более искушенный читатель заметит, что исходную метрику можно представить в виде

$$g_{a\beta} = \delta_{\alpha\beta} - V_\alpha V_\beta$$

где V_α - евклидов единичный вектор $\left(\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}\right)$. Эта метрика проектирует 3-мерное евклидово пространство на 2-мерное подпространство, ортогональное вектору $\mathbf{V}$, поэтому существование координат ξ и η, в которых исходная метрика вырождается в метрику 2-мерного плоского пространства, очевидно.

Solution

6.6. Пусть A - произвольный вектор. Требуется проверить, ортогональна ли его проекция P.A вектору и, т. е. выполняется ли равенство $.\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = 0$. Производя несложные преобразования, получаем

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = u^\alpha \left(g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta\right) A^\beta = u^\alpha A_\alpha + \left(u^\alpha u_\alpha\right) u_\beta A^\beta = u_\alpha A^\alpha - u_\beta A^\beta = 0$$

Кроме того, нетрудно видеть, что если $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$, то $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$, т. е. вектор A при проектировании не изменяется. Если $\mathbf{n}$ - единичный пространственноподобный вектор, то

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} &= n^\alpha \left(g_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta\right) A^\beta = \\ &= n^\alpha A_\alpha - \left(n^\alpha n_\alpha\right) n_\beta A^\beta = \\ &= n_\alpha A^\alpha - n_\beta A^\beta = 0. \end{aligned}$$

Вектор, ортогональный вектору n, также не изменяется при проектировании. Предположим теперь, что P - оператор проектирования на подпространство, ортогональное изотропному вектору k, т. е. что $\mathbf{k} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = 0$ для всех A. Нетрудно видеть, что $\mathbf{P}$ - + const $\times \mathbf{k} \otimes k$ - оператор, проектирующй на то же самое подпространство ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 0$), поэтому оператор $\mathbf{p}$ не едннствен. (МноЖество операторов, проектирующих на подпространство, ортогональное изотропному вектору, непусто. В этом легко убедиться, поскольку для любого 4-вектора $\mathbf{w}$ оператор $\mathbf{P} = \mathbf{g} - \mathbf{w} \otimes \mathbf{k}/\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}$ осуществляет проектирование на ортогональное подпространство. Но если w - изотропный вектор, то симметричные проекционные операторы не существуют.)

pewenue 6.7. Пусть A и B-два вектора в метрическом пространстве. Ясно, что угол между A и B должен быть каким-то образом связан со скалярным произведением A.B. Кроме того, угол не должен зависеть от длин векторов A и B. Естественнее всего считать мерой угла выражение $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}/(|\mathbf{A}||\mathbf{B}|$. В евклидовом пространстве оно совпадает с cos. Под действием преобразования $g_{\alpha\beta} \to f\left(x^\mu\right) g_{\alpha\beta}$ это выражение переходит в следуюыцее:

$$\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{||\mathbf{A}||\mathbf{B}\,|)} = \frac{g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta}{\left(g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu g_{\rho\sigma} B^\rho B^\sigma\right)^{1/3}} \to \frac{f\left(x^\nu\right) g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta}{\left[f\left(x^\nu\right) g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu f\left(x^\nu\right) g_{\rho\sigma} B^\rho B^\sigma\right]^{1/3}},$$

но функции f сокращаются, поэтому новое выражение не отличается от исходного. Изотропные кривые остаются изотропными. поскольку скалярный квадрат касательного вектора, равный нулю до преобразования, после преобразования также равен нуліо:

$$0 = l \cdot l = g_{\mu\nu} \ell\mu\ell v \to f\left(x^\gamma\right) g_\mu \ell\mu l v = 0$$

Решение 6.8. Относительная скорость ds между двумя скcростями $\vec{v}$ и $\vec{v}+d\vec{v}$ (см. задачу 1.3) определяется соотнопением

$$ds^2 = \frac{(dv)^2 - (\vec{v}\times d\vec{v})^2}{\left(1-v^2\right)^2}$$

при этом

$$(\vec{v}\times d\vec{v})^2 = v^2(d\vec{v})^2 - (\vec{v}\cdot d\vec{v})^2$$

Пусть & и φ - полярный и азимутальный углы вектора $\vec{v}$ (т. е. $v_z = v\cos\vartheta, v_x = v\sin\vartheta\cos\varphi, v_y = v\sin\vartheta\sin\varphi)\cdot$ Тогда

$$(d\vec{v})^2 = (dv)^2 + v^2\left(dv^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right),$$
$$\vec{v}\cdot d\vec{v} = \frac{1}{2}d(\vec{v}\cdot\vec{v}) = vdv,$$

отКуда

$$ds^2 = \frac{dv^2}{\left(1-v^2\right)^2} + \frac{v^2}{1-v^2}\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)$$

Введем «параметр быстроты» $v = \text{th}\ \chi$ и запишем метрику в виде

$$ds^2 = d\chi^2 + \text{sh}^2\,\chi\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)$$

Заметим, что при малых v в ньютоновском пределе $\text{sh}\,\chi \sim \chi \sim v$ и пространство скоростей, как и следовало ожидать, плоское.

Решение 6.9. Если бы вместо $\left(\vartheta - \vartheta^3\right)$ коэффициент при $d\chi^2$ был равен $\sin^2\vartheta$, то мы получили бы метрику евклидовой 2-сферы. Приведенная в условиях задачи метрика принадлежит «деформированной» аксиально симметричной 2-сфере, возможно, с особенностями при $\vartheta = 0, \pm 1$. Поскольку в условии задачи указано значение $\boldsymbol{\theta} = 1/2$, то область допустимых значений координаты $\mathbf{0}$ можно расширить до $0 < \vartheta < 1$. Значения $\vartheta = 0$ и $= 1$ требуют болсе подробного рассмотрения и необходимы для того, чтобы мы могли - установить область допустимых значений координаты χ. При этих экстремальных значениях ϑ метрика периодична по χ, поскольку каждый из двух наборов координат ($\vartheta = 0, \chi$ - любое значение) и ($v = 1, \chi$ - любое значение) задает лишь одну точку.

При $\vartheta \approx 0$ исходная метрика переходит в следующую:

$$ds^2 \approx d\vartheta^2 + \vartheta^2 d\chi^2$$

Если эта вырожденная метрика периодична по χ с периодом P, то длина окружности надлежащим образом проведенного малого круга радиуса $\Delta\vartheta$ равна

$$\int (\Delta\vartheta)dX = (\Delta\vartheta)P$$

Чтобы отсекаемая плоскостью круга «шапочка» не содержала Конической особенности, длина окружности должна быть равна $2\pi\Delta\vartheta$, т. е. $P = 2\pi$. Но если перейти К$\vartheta \approx 1$, то метрика выродится в метрику

$$ds^2 \approx d\vartheta^2 + (\vartheta - 1)^2(2)^2 d\chi^2$$

и условие отсутствия конической особенности будет иметь вид

$$\int_0^P 2(\Delta\vartheta)d\chi = 2\pi(\Delta\vartheta)$$

из него следует, что $P = \pi$. Таким образом, либо $P = 2\pi$ и коническая особенность расположена в точке $\vartheta = 1$, либо $P = \pi$ и коническая особенность расположена в точке $\vartheta = 0$. Таким образом, многообразие, локально заданное метрикой

$$ds^2 = d\vartheta^2 + \left(\vartheta - \vartheta^3\right)d\chi^2$$

допускает два различных глобальных расширения. (Эту задачу предложил Джильберт Миллер.)

Решение 6.10. Геометрический объект обладает той или иной группой симметрии, если его вид не изменяется под действием преобразований группы. Если ξ - бесконечно малое возмущение, то, как нетрудно показать, под действием бесконечно малого преобразования координат $x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}$ метрика получит приращение

$$\bar{\delta}g_{\mu\nu} \equiv g'_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) = -g_{\mu\rho}\xi^{\rho}, v - g_{\rho v}\xi^{\beta}, \mu - g_{\mu v,0}\xi^{\rho}$$

(см. задачу 13.12). Если метрика сферически симметрична и возмущение вызвано действием группы вращений, то $\bar{\delta}g_{\mu v}$ должно обращаться в нуль. Воспользуемся частной реализацией группы вращений на генераторах

$$\xi^0 = 0, \quad \xi^i = \varepsilon^{ij} x^l$$

где $\varepsilon^{ij} = -\varepsilon^{ji}$ - три произвольные бесконечно малые постоянные. Подставляя выражения (2) генераторов ξ^μ в (1) и приравнивая $\bar{\delta} g_{\mu v}$ нулю, получаем

а) $\mu = \boldsymbol{v} = 0$

$g_{00,i}\varepsilon^{ij}x^j = 0$, или $g_{00,i}x^j = g_{00,j}x^i$

и, следовательно,

$$g_{00} = g_{00}\left(x^0, r^2\right),$$
$$r^2 \equiv \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2$$

б) при $\mu = 0, v \neq 0$

$$g_{0i}\varepsilon^{lj} + g_{0j,i}\varepsilon^{ik}x^k = 0$$
$$g_{0j} = \Gamma_1\left(r^2, x^0\right)x^J$$

где Γ_1 - произвольная функция;

в) при $\mu \neq 0, v \neq 0$

$$g_{ik}\varepsilon^{kj} + g_{lj}\varepsilon^{li} + g_{ij,l}\varepsilon^{lk}x^k = 0,$$
$$g_{ij} = \Gamma_2\left(r^2, x^0\right)\delta_{lj} + \Gamma_3\left(r^2, x^0\right)\cdot x^i x^j,$$

где Γ_2 и Γ_3 - произвольные функции.

Из соотношений (2) нетрудно видеть, что приведенная выше система координат $\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$ «декартовоподобна". Однакотеоретико-групповое определение сферической симметрии не зависит от выбора системы координат, и для того, чтобы найти метрический тензор $g_{\mu v}$ в любой другой системе координат, необходимо лишь подвергнуть метрику, заданную соотношениями (3). обычным преобразованиям.

13.2.2 Problems about Covariant Differentiation and Geodesics

Решекие 7.1.

Пусть заданный базис $\mathrm{e}_{\mu'}$ преобразован так, что $\mathbf{e}_{\mu'} = L^{\sigma}{}_{\mu'}\mathbf{e}_\sigma$. Тогда

$$\nabla_{\mathrm{e}_\beta}\mathbf{e}'_\alpha = \Gamma^{\tau'}\alpha', \mathbf{e}_{\tau'} = \nabla_{(L^\lambda{}_{\beta'}\mathrm{e}_\ell)}\left(L^\mu\alpha'\mathbf{e}_\mu\right) = L^{\lambda_\beta}, \nabla_{\mathrm{e}_\lambda}\left(L^\mu{}_{\alpha'}\mathrm{e}_\mu\right) =$$
$$= L^{\lambda_{\beta'}}\left(L^{\mu',\lambda 2}e_\mu + L^\mu{}_{\alpha'}\Gamma^\tau{}_{\mu\lambda}e_\tau\right) =$$
$$= L^{\lambda'}\left(L^\mu{}_{\alpha',\lambda}L^{\tau'}\mu_\mu\mathbf{e}^{\tau'} + L^\mu{}_{\lambda'}L^{\tau'\prime}\Gamma^{\gamma^\nu}{}_{\mu\lambda'}\mathbf{e}_{\tau'}\right)$$

и, следовательно,

$$\Gamma^{\tau'}{}_{\alpha'\beta'} = L^{\lambda_\beta}\cdot L^\mu{}_{\alpha'}L^{\tau'}{}_\gamma\Gamma^\gamma{}_{\mu\lambda} + L^{\lambda_\beta}L^{\tau'}{}_\mu L^\mu{}_{\alpha',\lambda}.$$

Если бы коэффициенты связности преобразовывались как тензоры, то второе слагаемое в правой части отсутствовало бы.

Решение 7.2.

а) Рассмотрим сначала линию $\vartheta = 0, r = s$, где s - аффинный параметр (длина дуги). Из уравнения геодезической

получаем

$$d^2x^\mu/dr^2 + \Gamma^\mu{}_{rr} = 0$$

$$\Gamma_{rr} = \Gamma^\theta_{rr} = 0.$$

Для нераднальных линий запишем уравнение геодезических, кспользуя как новый неаффинный параметр:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\vartheta^2} + \frac{d^2\vartheta/ds^2}{(d\vartheta/d)^2}\frac{dx^\mu}{d\vartheta} + \frac{dx^\alpha}{d\vartheta}\frac{dx^\beta}{d\vartheta}\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = 0.$$

Уравненне прямой общего положения имеет вид

$$r\cos(\vartheta - \alpha) = R_0,$$

где α и R_0-произвольные постоянные. Из этого уравнения н соотношения $ds = dr^2 + r^2 d\vartheta^2$ получаем

$$ds/d\vartheta = R_0/\cos^2\psi$$

где $\psi \equiv \vartheta - \alpha$, откуда в свою очередь следует

$$\frac{d^2\vartheta}{ds^2} \Big/ \left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)^2 = -2\,\mathrm{tg}\,\psi.$$

Уравнение геодезических можно записать в виде

$$\frac{d^2x^\mu}{d\vartheta^2} - 2\,\mathrm{tg}\,\psi\frac{dx^\mu}{d\vartheta} + \frac{dx^\alpha}{d\vartheta}\frac{dx^\beta}{d\vartheta}\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = 0$$

Рассмотрим на геодезической точку $\vartheta = \alpha$ (т. е. $\psi = 0$) и $r = R_0$. В этой точке уравнение (3) вырождается в более простое уравнение

$$\frac{d^2x^\mu}{d\vartheta^2} + \Gamma^\mu_{\vartheta\vartheta} = 0$$

из которого мы находим

$$\Gamma^\dagger_{\theta\theta} = 0$$

и [используя уравнение прямой (2)]

$$\Gamma^r + \theta = -r$$

Поскольку значения α и R_0 произвольные, полученные выражения для коэффициентов свлзности остаются справедливыми и в общем случае.

Наконец, рассмотрим произвольную точку на кривой и запишем уравнение геодезической во всей его красе, используя уже известные коэффициенты связности Γ. Компонента $\mu = r$ этого уравнения позволит нам получить

$$\Gamma^r_{r\theta} = 1/r$$

б) Из уравнения окружности $r^2 = x^2 + y^2$ и соотношения $\mathrm{ctg}\,\vartheta = x/y$ получаем матрицу преобразования и обратную ей матрицу

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\mu} = y \\ L^{\alpha'}_{\mu} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \frac{-\sin\vartheta}{r} & \frac{\cos\vartheta}{r} \end{bmatrix} & \\ \beta' = r & \beta' = \vartheta \\ L^{\mu}_{\beta'} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta \end{bmatrix}. & \end{array}$$

(Первую строку обратной матрицы мы получили, например, взяв дифференциал от $x = r\cos\vartheta \Rightarrow dx = dr\cos\vartheta - r\sin\vartheta d\vartheta$.)

Коэффициенты связности Γ (см. задачу 7.1) преобразуются по. закон у

$$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = L^{\alpha'}_{\rho} L^{\mu'}_{\beta'} L^{\nu}_{\gamma'} \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + L^{\alpha'}_{\mu'} L^{\mu}_{\beta',\gamma'}$$

Поскольку в декартовых координатах $\Gamma^\rho_{\mu\nu} = 0$, то вклад дает лишь второе слагаемое. Продифференцировав и умножив соответствующие матрицы, мы получим коэффициенты связности в полярных координатах. в) Воспользуемся тем, что

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu}\left(g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}\right).$$

Для метрики $ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2$ от нуля отлична лишь производная $g_{\diamond\bullet,r} = 2r$. Следовательно, коэффициенты связности $\Gamma_{\beta\gamma\beta\gamma}$ не обращаются в нуль лишь в том случае, если два индекса равны ϑ, а один индекс равен r:

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = g^{rr}\left(-\frac{1}{2} g_{\vartheta\theta,r}\right) = -r,$$
$$\Gamma^\theta_{r\theta} = g^{\theta\theta}\left(\frac{1}{2} g_{\theta\theta,r}\right) = \frac{1}{r}.$$

Solution 7.3.

а) У равнение геодезических имеет вид

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \Gamma^{rr}\left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)^2 = 0, \quad \frac{d^2\vartheta}{ds^2} + 2\Gamma^{\theta_r}_{r\vartheta}\left(\frac{dr}{ds}\right)\left(\frac{d\vartheta}{ds}\right) = 0.$$

Используя результаты, полученные в решении 7.2, получаем

$$\frac{d^2r}{ds^2} = r\left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)^2$$
$$\frac{d^2\vartheta}{ds^2} + \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{ds}\right)\left(\frac{d\vartheta}{ds}\right) = 0$$

Поскольку из метрики следует, что

$$(dr/ds)^2 + r^2(d\vartheta/ds)^2 = 1$$

То

$$\frac{dR_0}{ds} = \frac{d}{ds}\left[r^2\frac{d\vartheta}{ds}\right] = r^2\frac{d^2\vartheta}{ds^2} + 2r\left(\frac{dr}{ds}\right)\left(\frac{d\vartheta}{ds}\right) =$$
$$= r^2\left[\frac{d^2\vartheta}{ds^2} + \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{ds}\right)\left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)\right] = 0,$$

и, таким образом,

$$R_0 \equiv r^2\frac{d\vartheta}{ds} = \text{ const}$$

б) Из найденного в п. «а» первого интеграла получаем

$$\left(\frac{dr}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)^2 = 1.$$

Подставляя $d\vartheta/ds = R_0/r^2$ (R_0 - некоторая постоянная), приходим к уравнению

$$\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 + r^2 = r^4/R_0^4$$

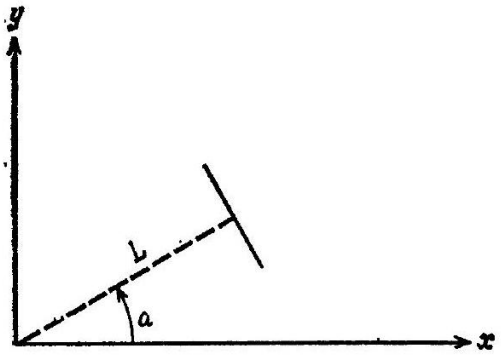
в) Поскольку уравнение прямой (фиг. 14) имеет вид

$$r = L/\cos(\vartheta - \alpha)$$

ТО

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{\sin(\vartheta-\alpha)}{\cos^2(\vartheta-\alpha)}L$$
$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 = L^2\left[\frac{\sin^2(\vartheta-\alpha)}{\cos^4(\theta-\alpha)} + \frac{1}{\cos^2(\theta-\alpha)}\right] =$$
$$= \frac{L^2}{\cos^4(\theta-\alpha)} = \frac{r^4}{L^2}$$

Таким образом, все прямые удовлетворяют уравнению геодезических.



ur. 14.

Рещеяие 7.4. Отличны от нуля лишь производные метрического тензора $g_{xx,t} = -g_{tt,t} = -2/t^3$. Следовательно, в нуль не обращаются лишь коэффициенты связности

$$\Gamma_{ttt} = 1/t^3, \Gamma_{xxt} = \Gamma_{xtx} = -\Gamma_{txx} = -1/t^3$$

Чтобы найти геодезические, проще всего воспользоваться их определением как кривых экстремальной длины. Пусть $x(t)$ - геодезическая. Тогда (точка означает дифференцирование d/dt)

$$0 = \delta \int \left(ds^2\right)^{1/2} = \delta \int \left(1 - \dot{x}^2\right)^{1/2} \frac{dt}{t}$$

Уравнение Эйлера - Лагранжа для отыскания этого экстремума имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{x}}{t\left(1-\dot{x}^2\right)^{1/3}}\right] = 0$$

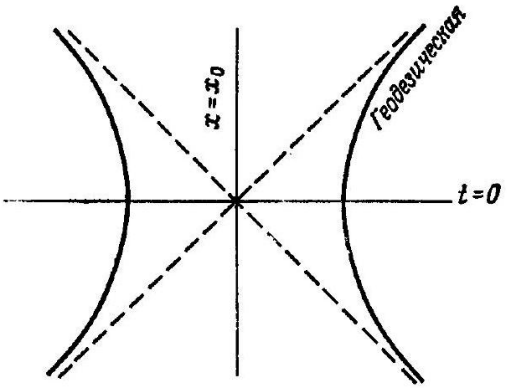
Оно легко решается, если положить $\operatorname{th} \vartheta \equiv \dot{x}$:

$$\frac{\operatorname{sh} \vartheta}{t} = \text{const}$$

откуда

$$(x - x_0)^2 = t^2 + a^2$$

Таким образом, геодезическими служат гиперболы, асимптотически стремящиеся к световому конусу (фиг. 15).



Фur. 15.

Solution

7.5. Вычислим $g_{\alpha\beta;}$ в координатном репере:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta;\nu} &= g_{\alpha\beta,\gamma} - g_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma} = \\ &= g_{\alpha\beta,\gamma} - 2\Gamma_{(\beta\alpha)\gamma} = \\ &= g_{\alpha\beta,\gamma} - g_{\alpha\beta,\gamma} = 0. \end{aligned}$$

Solution

7.6. В координатном репере

$$\Gamma^{\mu}_{v\lambda} = \frac{1}{2}\left(g_{\alpha v,\lambda} + g_{\alpha\lambda,v} - g_{v\lambda,\alpha}\right) g^{\mu\alpha}.$$

а) Если метрика диагональна, то индекс α должен быть равен индексу μ. Но поскольку $\mu \neq v \neq \lambda$, то в (1) все члены в круглых скобках обращаются в нуль.

Полагая в (1) $v = \lambda$, находим

$$\Gamma^{\mu}_{\lambda\lambda} = \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\lambda,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\lambda} - g_{\lambda\lambda,\alpha}\right) g^{\mu\alpha}$$

откуда

$$\Gamma^{\mu}_{\lambda\lambda} = -\frac{1}{2} g_{\lambda\lambda,\alpha} g^{\mu\alpha} = -\frac{1}{2} g_{\lambda\lambda,\alpha} \left(g_{\mu\alpha}\right)^{-\mathbf{1}} = -\frac{1}{2} \left(g_{\mu\mu}\right)^{-\mathbf{1}} g_{\lambda\lambda,\mu}$$

Здесь мы дважды воспользовались диагональностью метрики [т. е. тем, что $g^{\mu\alpha} = \left(g_{\mu\alpha}\right)^{-1}$].

В) $\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} \left(g_{\alpha\mu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\mu} - g_{\mu\lambda,\alpha}\right) \left(g_{\mu\alpha}\right)^{-1} =$

$$= \frac{1}{2} \left(g_{\mu\mu}\right)^{-1} \left(g_{\mu\mu,\lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \left(\ln\left(\left|g_{\mu\mu}\right|^{1/2}\right)\right).$$

г) Полагая в п. «в» $\lambda = \mu$, получаем

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\ln\left(\left|g_{\mu\mu}\right|^{2/2}\right)\right)$$

Solution 7.7.

а) $g_{\alpha\beta.\gamma} = \nabla_{\gamma} \left(\mathbf{e}_{\alpha} \cdot \mathbf{e}_{\beta}\right) = \left(\nabla_{\gamma} \mathbf{e}_{\alpha}\right) \cdot \mathbf{e}_{\beta} + \mathbf{e}_{\alpha} \cdot \left(\nabla_{\gamma} \mathbf{e}_{\beta}\right) =$

$$= \Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma} \mathbf{e}_{\mu} \cdot \mathbf{e}_{\beta} + \Gamma_{\beta\gamma\beta\gamma} \mathbf{e}_{\mu} \cdot \mathbf{e}_{\alpha} =$$

$$= \Gamma_{\beta\alpha\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma}.$$

6) $g_{\alpha\mu} g^{\mu\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha}$, $g_{\alpha\mu,\gamma} g^{\mu\beta} + g_{\alpha\mu} g^{\mu\beta},\gamma = 0$ $g_{\alpha\mu} g^{\mu\beta},_{\nu} = -g_{\alpha\mu,\gamma} g^{\mu\beta}$. в) $g^{\alpha\beta},\nu = -g_{\lambda\mu,\gamma} g^{\mu\beta} g^{\lambda\alpha} = -\left(\Gamma_{\lambda\mu\gamma} + \Gamma_{\mu\lambda\gamma}\right) g^{\mu\beta} g^{\lambda\alpha} = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} g^{\mu\beta} - \Gamma^{\beta}_{\lambda\gamma} g^{\lambda\alpha}$.

(Здесь мы воспользовались результатом, полученным в п. «а».) г) Для любой матрицы $\|g_{\alpha\boldsymbol{\beta}}|$ поэтому

$$\left(\ln \det \|g_{\alpha\beta}\|\right)_{,\alpha} = \mathrm{Sp} \|g_{\alpha\beta}\|^{-1} \|g_{\mu v,\alpha}\|,$$

u

$$\left(\ln g\right)_{,\alpha} = g^{\mu\nu v} g_{\mu v,\alpha}$$

$$\frac{g_{,\alpha}}{g} = g^{\mu v} g_{\mu v,\alpha}$$

Наконец, используя соотношение, доказанное в п. «б», получаем

$$g_{,\alpha} = g g^{\mu v} g_{\mu v,\alpha} = -g g_{\mu v} g^{\mu\nu},\alpha.$$

д) В координатном репере

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(g_{v\alpha,\beta} + g_{v\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,v}\right)$$

а поскольку два последних члена компенсируются, то

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha v} {}_{v\alpha,\beta}$$

Заменяя сумму в правой части на $g_{,\beta}/g$ (см. соотношение, выведенное в П. «Г), находим

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g_{,\beta}/g = \frac{1}{2} (\ln|g|)_{,\beta} = \left(\ln|g|^{1/2}\right)_{,\beta}$$

е) $g^{\mu v} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = -g^{\alpha\beta},\beta - \Gamma^{\beta}_{\lambda\beta} g^{\lambda\alpha} =$ (полагая в п. «в» $\beta = \gamma$ суммируя)

$$= -g^{\alpha\beta}{}_{,\beta} - \left(\ln|g|^{1/2}\right),\lambda g^{\lambda\alpha} =$$

(по доказанному в п. "д»)

$$= -g\alpha v, v - \left(\ln|g|^{1/2}\right), v g^{\alpha v} = \text{ (заменяя немые индексы)}$$

$$= -g^{\alpha v}, v - |g|^{1/2}, v g^{\alpha v} |g|^{-1/2} = -\frac{1}{|g|1/s} \left(g\alpha\nu|g|1/2\right), v$$

ж) $A^{\alpha};\alpha = A^{\alpha},\alpha + \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} A^{\beta} = A^{\alpha},\alpha + \frac{1}{|g|^{1/2}} \left(|g|^{1/2}\right)_{,\beta} A^{\beta} =$ (по доказанному в П. д») $= \frac{1}{|g|^{1/2}} \left(|g|^{1/2} A^{\alpha}\right)_{,\alpha}$

$A^{\beta}_{\alpha;\beta} = A^{\beta}_{\alpha},\beta + \Gamma^{\beta}_{\mu\beta} A^{\mu}_{\alpha} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} A^{\beta}_{\lambda} = A_{\alpha}{}^{\beta},_{\beta} + \frac{1}{|g|^{1/s}} \left(|g|^{1/2}\right)_{,\mu} A_{\alpha}{}^{\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} A_{\lambda^{\mu}} = \frac{1}{|g|^{1/2}} \left(|g|^{1/2} A^{\beta}_{\alpha}\right)_{,\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} A^{\mu}_{\lambda}$.

и) $A^{\alpha\beta}_{;\beta} = A^{\alpha\beta}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}A^{\mu\beta} + \Gamma^{\beta}_{\mu\beta}A^{\alpha\mu} =$

$$= A^{\alpha\beta}{}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}A^{\mu\beta} + \frac{1}{|g|^{1/2}}\left(|g|^{1/2}\right)_{,\mu}A^{\alpha\mu} =$$

$$= \frac{1}{|g|^{1/2}}\left(A^{\alpha\beta}|g|^{1/2}\right)_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}A^{\mu\beta}.$$

Но в координатном репере $\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} = \Gamma^{\alpha}_{(\mu\beta)}$, поэтому если $A^{\mu\beta} = A[\mu\beta]$, то последний член обращается в нуль и

$$A^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \frac{1}{|g|^{1/2}}\left(|g|^{1/2}A^{\alpha\beta}\right)_{,\beta}.$$

к) $\Box S = \left(S_{,\alpha}g^{\alpha\beta}\right)_{;\beta} = \frac{1}{|g|^{1/2}}\left(|g|^{1/2}S_{,\alpha}g^{\alpha\beta}\right)_{,\beta}.$

(Здесь мы воспользовались соотношением, доказанным в п. «ж».)

Solution

7.8. При преобразовании координат тензор $A_{\mu v}$ переходит в тензор

$$A_{\bar{\mu}\bar{v}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\bar{\mu}}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\bar{v}}}A_{\mu v}$$

поэтому

$$\bar{A} = \det\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\bar{\mu}}}\right)\det\left(A_{\mu\nu}\right)\det\left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\bar{v}}}\right)^{T} = J^2 A,$$

где $J = \det\left(\partial x^{\mu}/\partial x^{\bar{\mu}}\right)$ - якобиан преобразования, а верхний индекс T означает транспонированную матрицу. Мы хотим, чтобы ковариантная производная $A_{;x}$ преобразовывалась как векторный аналог закона преобразования величины A (называемой «плотностью веса 2»). Поскольку ковариантная производная $A_{;\alpha}$ должна быть линейна по A, то

$$A_{;\alpha} = A_{,\alpha} + K_{\alpha}A$$

где K_{α} - неопределенные коэффициенты. Найти их мы можем, потребовав, чтобы определитель метрического тензора g имел нулевую ковариантную производную:

$$0 = g_{;\alpha} = g_{.\alpha} + K_{\alpha}g = 2g\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha} + K_{\alpha}g$$

(последнее равенство следует из задачи 7.7). Тогда

$$K_{\alpha} = -2\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha}.$$

Обобщение для плотностей веса W (приобретающих под действием преобразования координат множитель J^W) можно получить, рассматривая степени определителя g. Оно имеет вид

$$K_{\alpha} = -W\Gamma^{\beta}_{\beta\alpha}$$

Реиение 7.9. Геодезическая с касательным вектором и пространственноподобна, изотропна или времениподобна в зависимости от того, положителен, равен нулю или отрицателен скалярный квадрат $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$. Но $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$ сохраняется вдоль геодезической, поскольку уравнение геодезической можно представить в виде $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0$, и поэтому

$$\nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) = 2\mathbf{u}\cdot\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0$$

Решемие 7.10. Длина дуги равна интегралу

$$\int ds = \int\left(-g_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds}\right)^{1/2}ds.$$

Чтобы экстремизировать ее, вычислим вариацию $\delta\int ds = 0$. Из уравнений йлера - Лагранжа следует

$$\frac{d}{ds}\left(g_{\alpha\beta}u^{\alpha}\right) = \frac{1}{2}g_{\alpha\gamma,\beta}u^{\alpha}u^{\gamma}$$

(при выводе уравнения (1) мы использовали соотношение

$$\left(-g_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds}\right) = 1$$

и ввели обозначение $u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{ds}$). Поскольку

$$\frac{d}{ds}\left(g_{\alpha\beta}u^\alpha\right) = g_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{ds} + \frac{dx^\gamma}{ds}g_{\alpha\beta,\gamma}u^\alpha = g_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{ds} + u^\gamma u^\alpha g_{\alpha\beta,\gamma},$$

уравнение (1) преобразуется к виду

$$g_{\alpha\beta}\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + u^\alpha u^\gamma\left(g_{\alpha\beta,\nu} - \frac{1}{2}g_{\alpha\nu,\beta}\right) = 0$$

Пользуясь тем, что

$$u^\alpha u^\gamma g_{\alpha\beta,\nu} = u^\alpha u^\gamma \cdot \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\beta,\nu} + g_{\gamma\beta,\alpha}\right)$$

и умножая уравнение (2) на $g^{\beta\tau}$, получаем

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^\tau}{ds^2} + \frac{1}{2}g^{\beta\tau}\left(g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\psi\beta,\alpha} - g_{\alpha\nu,\beta}\right)u^\alpha u^\nu = \\ = \frac{d^2x^\tau}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\nu}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds} = 0.\end{aligned}$$

Рещение 7.Il. Определим новую параметризацию кривой функциональным соотношением $s = f(\lambda)$. Тогда производные по s и λ будут связаны между собой следующим образом:

$$\frac{d}{d\lambda} = f'\frac{d}{ds}, \quad \frac{d^2}{d\lambda^2} = f''\frac{d}{ds} + f'^2\frac{d^2}{ds^2}$$

где $f' \equiv df/d\lambda$. В новой параметризации уравнение геодезических запишется в виде

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \frac{p''}{f'^2}\frac{dx^\alpha}{ds} + \Gamma\Gamma_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds} = 0$$

Уравнение (2) имело бы «стандартную форму» (а параметр s был бы аффинным), если бы не второй член в левой части. Следовательно, чтобы параметр s был аффинным, вторая производная f'' должна быть равна 0, т. е. зависимость между паваметрами s и λ должна быть линейной.

Рещекие 7.12. Компоненты выражения ∇_p р можно представить в виде

$$\left(\nabla_p \mathbf{p}\right)^\beta = mu^\alpha\left(p^{\boldsymbol{\beta}}, \alpha + \Gamma^\beta_{\sigma\alpha}p^\sigma\right) = m\left(\frac{\cdot dp^\beta}{d\tau} + u^\alpha p^\sigma \Gamma^\beta \alpha\alpha\right).$$

В плоском пространстве-времени всегда можно найти глобальную систему координат (координаты Минковского), в которой все символы Кристоффеля равны нулю. Пользуясь соотношениями (1), закон сохранения 4-импульса ($d\mathbf{p}/d\tau = 0$) в этой системе координат можно записать в виде

$$\nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{p} = 0$$

но уравнение (2) - тензорное и поэтому должно давать правильное выражение для закона сохранения импульса в любой системе координат. Для частиц с массой вектор импульса пропорционален 4-скорости. Для таких частиц $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = -m^2$, и поэтому геодезические времениподобны.

Рещение 7.13. Пусть λ-аффинный параметр, так что $p^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$. Тогда для движения частицы по геодезической имеем

$$0 = \left(\nabla_p p\right)\cdot\mathbf{e}_1 = p_{1;\alpha}p^\alpha = \frac{dp_1}{d\lambda} - p_\sigma\Gamma^0_{\alpha 1}p^\alpha$$

К пОэТОМу

$$\frac{dp_1}{d\lambda} = p^\sigma p^\alpha \Gamma_{(\sigma\alpha)1} = p^\sigma p^\alpha \frac{1}{2}g_{\sigma\alpha,1} = 0$$

Решение 7.14. Примем за исходное уравнение геодезических

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\lambda}\frac{dx\gamma}{d\lambda} = 0$$

Переходя от аффинного параметра λ к координатному времени t и используя соотношение

$$0 = dt^2 + \left(g_{ij}/g_{00}\right)dx^i dx^k$$

получаем уравнение

$$g_{jk}\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma_{ik\ell}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^\ell}{dt} - \Gamma_{100}\frac{g_{k\ell}}{g_{00}}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^\ell}{dt} + \frac{d^2t/d\lambda^2}{(dt/d\lambda)^2}g_{jk}\frac{dx^k}{dt} = 0$$

Комбинируя его с временной частью уравнения геодезических

$$\frac{\left(d^2t/d\lambda^2\right)}{(dt/d\lambda)^2} = -2\Gamma_{0k0}\frac{dx^k/dt}{g_{00}}$$

и выражая коэффициенты связности Γ через компоненты метрического тензора, преобразуем новое уравнение к виду

$$\gamma_{jk}\frac{d^2x^k}{dt^2} + \frac{1}{2}\left(\gamma_{jk,\ell} + \gamma_{i\ell,k} - \gamma_{k\ell,i}\right)\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^\ell}{dt} = 0$$

где $\gamma_{jk} \equiv -g_{jk}/g_{00}$. Уравнение (2) представляет собой не что иное, как уравнение геодезических с аффинным параметром t на 3-мерном многообразии с метрикой γ_{jk}. Из соотношения (1) ясно, что экстремум функционала $\int dt$ достигается на решениях уравнения (2). Следовательно, принцип Ферма (в обобщенном варианте) выполняется. [См. также Moller C., The Theory of Relativity (Oxford University Press, 2nd ed., 1972), p. 308.]

Pemerue 7.15.

а) Геодезическая - это путь между двумя достаточно близкими точками пространства скоростей с минимальной длиной дуги. Но длина дуги в пространстве скоростей представляет собой не что иное, как абсолютную величину небольшого изменения скорости. Поскольку при работе двигателей, необходимой для изменения скорости, ракета расходует топливо монотонно, то геодезические в пространстве скоростей являются кривыми, вдоль которых расход топлива минимален.

б) Необходимо найти геодезическую в пространстве скоростей, соединяющую точки $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$. Разумеется, можно было бы написать уравнение геодезических для метрики из задачи 6.8, но такое решение весьма громоздко. Более простое решение мы получим, если воспользуемся соображениями симметрии и заметим, что геодезическая, проходящая через начало координат в пространстве скоростей, имеет вид $\vartheta = \varphi = \text{const}$, $\chi = s$ (где s - аффинный параметр). Чтобы получить геодезическую более общего положения, рассмотрим эту геодезическую из движущейся системы координат. Поскольку $\chi = \operatorname{Arth}\bar{V}$-монотонная функция параметра $\rho = \gamma\bar{V}$ [где $\gamma \equiv \left(1-\bar{V}^2\right)^{-1/2}$, то на геодезической можно ввести неаффинный параметр $\rho(s)$. При такой параметризации $\gamma = \left(1+\rho^2\right)^{1/2}$, и если мы выберем геодезическую в направлении оси x, то

$$\mathbf{u} = \left[\left(1+\rho^2\right)^{1/2}, \rho, 0, 0\right], -\infty < \rho < +\infty.$$

Буст в направлении оси x лишь отображает геодезическую на себя, поэтому необходимо только найти преобразование геодезической под действием буста в перпендикулярном направлении, например в направлении оси y. Под действием буста на величину β в направлении оси y 4-скорость $\mathbf{u}$ переходит в 4-скорость

$$\mathbf{u}' = \left[\gamma'\left(1+\rho^2\right)^{1/2}, \rho, \left(1+\rho^2\right)^{1/2}\gamma'\beta, 0\right]$$

где $\gamma' = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2}$.

4-скорость $\mathbf{u}'$ в уравнении (1) можно выразить через соответствующую 3-скорость

$$\vec{V}/\left(1-V^2\right)^{1/s} = \rho\vec{n} + \left(1+\rho^2\right)^{1/2}\gamma'\beta\vec{m}$$

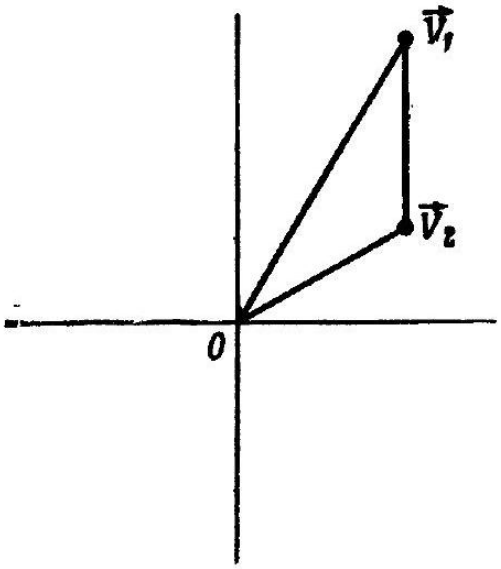
где $\vec{n}$ и $\vec{m}$ - ортогональные единичные векторы, с которыми можно обращаться как с векторами в обычном координатном пространстве. Разрешив соотношение (2) относительно V^2, запишем его в виде

$$\vec{V} = \left[\frac{1-\beta^2}{1+\rho^2}\right]^{1/2}\rho\vec{n} + \beta\vec{m}.$$

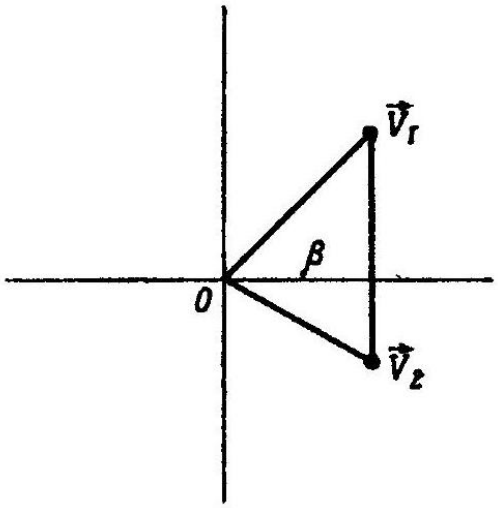
Это - уравнение геодезической общего положения в пространстве скоростей. Стоит лишь задать значение $\beta(\exists\beta\ |< 1)$ и выбрать два ортогональных единичных вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$, как мы получим геодезическую, параметризованную переменной $\rho(-\infty < \rho < < +\infty)$. Из уравнения (3) видно, что геодезическая общего положения в пространстве скоростей представляет собой «прямую» (это отнюдь не свидетельствует о том, что пространство скоростей плоское!).

Могут представиться 2 различных случая (фиг. 16). В случае 1 (либо угол OV_1V_2, либо угол OV_2V_1 тупой) наименьшее расстояние между геодезической (прямой), проходящей через $\vec{V}_2$ и $\vec{V}_2$, и началом координат O равно либо $\left|\vec{V}_1\right|$, либо $\left|\vec{V}_2\right|$. В случае 2 (оба угла OV_1V_2 и OV_2V_1 острые) наименьшее расстояние между геодезической и началом координат O, как сле- дует из элементарных геометрических соображений, равно

$$\beta = \frac{\left|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\right|}{\left|\vec{V}_1 - \vec{V}_2\right|}$$



1



2

Фиг. 16.

Реиение 7.16. Вектор А подвергается параллельному переносу вдоль координатной линии φ (т. е. $\vartheta =$ const), поэтому

$$0 = A^{\alpha}; \varphi = A^{\alpha}, \varphi + \Gamma^{\alpha}_{\beta\varphi} A^{\beta}$$

Поскольку отличны от нуля лишь символы Кристоффеля

$$\Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta \text{ и } \Gamma^{\Phi}\theta\varphi = \operatorname{ctg}\vartheta$$

то из уравнения (1) получаем

$$A^{\vartheta}, \varphi - \sin\vartheta\cos\vartheta A^{\Phi} = 0,$$
$$A^{\Phi}, \varphi + \operatorname{ctg}\vartheta A^{\vartheta} = 0.$$

В этой задаче координата ϑ остается постоянной (равной ϑ_0). У равнения (2) и (3) легко решаются. Например, дифференцируя уравнение (2) по φ, находим

откуда

$$A^{\vartheta}, \varphi\varphi = \sin\vartheta\cos\vartheta A^{\varphi}, \varphi = -\cos^2\vartheta A^{\vartheta},$$

$$A^{\theta} = \alpha\cos(\varphi\cos\vartheta) + \beta\sin(\varphi\cos\vartheta)$$

где α и β-постоянные. Из уравнения (2) получаем

$$A^{\varphi} = -\alpha\sin(\varphi\cos\vartheta)/\sin\vartheta + \beta\cos(\varphi\cos\vartheta)/\sin\vartheta$$

При $\varphi = 0$ вектор A совпадает с $\mathbf{e}_\vartheta$, т. е. $A^\vartheta = 1, A^\Phi = 0$. Следо- вательно, $\alpha = 1, \beta = 0$ и

$$A^\vartheta = \cos(\varphi\cos\vartheta),$$
$$A^\varphi = -\sin(\varphi\cos\vartheta)/\sin\vartheta.$$

При $\varphi = 2\pi$ (после переноса по окружности) вектор A переходит в вектор

$$a = \cos(2\pi\cos\vartheta)\mathbf{e}_\vartheta - \sin(2\pi\cos\vartheta)/\sin\vartheta\mathbf{e}_\varphi \neq \mathbf{e}_\theta$$

но величина его остается неизменной:

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})_{2\pi} = \cos^2(2\pi\cos\vartheta)\mathbf{e}_\vartheta\cdot\mathbf{e}_\vartheta +$$
$$+\sin^2(2\pi\cos\vartheta)/\sin^2\vartheta\mathbf{e}_\varphi\cdot\mathbf{e}_\varphi = 1 = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})_0.$$

Рещение 7.I7.
$\nabla_\mathbf{u}(\eta_{\alpha\beta}) = \nabla_\mathbf{u}(\mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{e}_\beta) = (\nabla_\mathbf{u}\mathbf{e}_\alpha)\cdot\mathbf{e}_\beta + \mathbf{e}_\alpha\cdot(\nabla_\mathbf{u}\mathbf{e}_\beta) =$

$$= A_\alpha\mathbf{e}_\gamma\cdot\mathbf{e}_\beta + A_\beta\mathbf{e}_\gamma\cdot\mathbf{e}_\alpha = A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}.$$

Тензор A должен быть антиснмметричным.
В этом случае закон переноса удобно записать в виде

$$\nabla_\mathbf{u}\mathbf{e}_\alpha = A^\beta_\alpha\mathbf{e}_{\boldsymbol{\beta}} = \left(A^{\gamma\beta}\mathbf{e}_\beta\otimes\mathbf{e}_\gamma\right)\cdot\mathbf{e}_\alpha \equiv -\Omega\cdot\mathbf{e}_\alpha,$$

где $\Omega^{\beta v} = A^{\beta\gamma}$ – 4-мерный аналог 3-мерной антисимметричной матрицы поворота.
Поскольку вектор $\mathbf{u} = \mathbf{e}_0$ выделен, разложим $\boldsymbol{\Omega}$ по $\mathbf{u}$ и ортогонально u:

$$\Omega^{\alpha\beta} = \tau^\alpha u^\beta - u^\alpha v^\beta + \omega^{\alpha\beta}$$

тде $\omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha}, \omega^{\alpha\beta}u_\beta = 0$, а компонента v^α еще не определена. Не ограничивая общности, можно считать, что $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = 0$. Из уравнения (1) получаем

$$\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{u} = -\nabla_\mathbf{u}\mathbf{u} = -\mathbf{a}$$

где $\mathbf{a}$ – 4-ускорение наблюдателя. Но из уравнения (2) следует

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{u} = -\mathbf{v}$$

поэтому $\mathbf{v} = \mathbf{a}$ и

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{a}\otimes\mathbf{u} - \mathbf{u}\otimes\mathbf{a} + \omega.$$

Тензор $\omega^{\alpha\beta}$ обладает лишь тремя независимыми компонентами и является пространственным, поскольку $\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{u} = 0$. Следовательно, тензор $\omega^{\alpha\beta}$ представляет собой чисто пространственный поворот базисных векторов и обращается в нуль, если пространственные векторы остаются неподвижными.

Часто три независимые компоненты тензора $\omega^{\alpha\beta}$ объединяют в вектор угловой скорости $\omega(\omega\cdot\mathbf{u} = 0)$. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ и тензор $\omega^{\alpha\beta}$ связаны соотношением

$$\omega^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta\lambda\sigma}u_\lambda\omega_\sigma, \omega^\alpha = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\mu\lambda\sigma}u_\mu\omega_{\lambda\sigma}$$

Заметим, что для не вращающейся в пространстве системы координат ($\omega = 0$) справедливо соотношение

$$\nabla_\mathbf{u}\mathbf{e}_\alpha = (\mathbf{u}\otimes\mathbf{a} - \mathbf{a}\otimes\mathbf{u})\cdot\mathbf{e}_\alpha.$$

Любой вектор $\mathbf{e}_\alpha$, удовлетворяющий этому соотношению, называется перенесенным по Ферми - Уокеру.

Solution

7.18. Пусть x и y-два произвольно выбранных вектора. Подвергнем их переносу Ферми - Уокера

$$\nabla_\mathbf{u}\mathbf{x} = (\mathbf{u}\otimes\mathbf{a} - \mathbf{a}\otimes\mathbf{u})\cdot\mathbf{x},$$
$$\nabla_\mathbf{u}\mathbf{y} = (\mathbf{u}\otimes\mathbf{a} - \mathbf{a}\otimes\mathbf{u})\cdot\mathbf{y},$$

где $\mathbf{u}$ - касательный вектор к кривой $\mathscr{C}, \mathbf{aa} = \nabla_\mathbf{u}\mathbf{u}$. Пользуясь правилом дифференцирования скалярного произведения, вычислим изменение скалярного произведения $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ вдоль кривой $\mathscr{C}$:

$$\nabla_\mathbf{u}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) = (\nabla_\mathbf{u}\mathbf{x})\cdot\mathbf{y} + \mathbf{x}\cdot(\nabla_\mathbf{u}\mathbf{y}) =$$
$$= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{y}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{y})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{x}) + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{x})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{y}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{x})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{y}) = 0$$

Следовательно, скалярное произведение любых двух векторов инвариантно относительно переноса Ферми - Уокера.

Реиение 7.19. Дифференциальное уравнение переноса ФермиУокера имеет вид

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{x} = (\mathbf{u}\otimes\mathbf{a} - \mathbf{a}\otimes\mathbf{u})\cdot\mathbf{x}$$

где $\mathbf{u}$ - касательный вектор к кривой, а $\mathbf{a} = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} \equiv D\mathbf{u}/d\tau$. Если кривая геодезическая, то она удовлетворяет уравнению геодезических $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0$, и поэгому при переносе Ферми - Уокера любой вектор $\mathbf{x}$ преобразуется по закону

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{x} = 0$$

т. е. перенос Ферми - Уокера вдоль геодезической совпадает с параллельным переносом.

Solution

7.20.
а) $U_{\alpha;\beta}U^{\beta}U^{\alpha} = U^{\alpha};\beta U^{\beta}U_{\alpha} = (\nabla_{\mathrm{U}}\mathrm{U})\cdot\mathrm{U}$.
б) $V^{a};U^{\beta} - U^{a};\beta V^{\beta} = \nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{V} - \nabla_{\mathbf{V}}\mathbf{U} \equiv [\mathbf{U},\mathbf{V}]$.
в) $T_{\alpha\beta;\gamma}V^{\alpha}W^{\beta}U^{\gamma} = \mathrm{V}\cdot(\nabla_{\mathrm{U}}\mathrm{T})\cdot\mathbf{W}$.
г) $W^{\alpha;\beta}V_{\beta;\gamma}U^{\gamma} = W^{\alpha}{}_{;\beta}\left(V^{\beta}_{;\gamma}U^{\gamma}\right) = \nabla_{(\nabla_U v)}W$.
д) Объединяя в выражении, приведенном в условиях задачи, два первых члена, получаем $(W^{\alpha};U^{\gamma})_{;\beta}U^{\beta} - U^{\alpha};\beta\left(W^{\beta};\gamma U^{\gamma}\right) = \nabla_U(\nabla_U\mathbf{W}) - \nabla_{(V_U\mathbf{W})}U = [U,\nabla_U\mathbf{W}]$.

Solution

7.21. Траектории световых лучей можно получить. из уравнений Максвелла $F^{\alpha\beta};\beta = 0$ в пределе геометрической оптихи. С помощью тождества из задачи 7.7(1) эти уравнения. можно представить в виде

$$\left[g^{\alpha\tau}g^{\beta\mu}F_{\uparrow\mu}(-g)^{1/2}\right]_{,\beta} = 0$$

Используя пространственно-изотропную диагональную форму метрики и замечая, что $E_l = F_{0l}, B_k = \varepsilon^{ki\ell}F_{i\ell}$, преобразуем уравнения к виду

$$\nabla\cdot(\varepsilon\vec{E}) = 0,$$
$$\nabla\times\left(\mu^{-1}\vec{B}\right) = \partial(\varepsilon\vec{E})/\partial t,$$

где $\varepsilon = \mu = (f/g_{00})^{1/2}$. Следовательно, свет распрсстраняется так, как если бы среда обладала эффективным показателем преломления

$$n = (\varepsilon\mu)^{-1/2} = (g_{00}/f)^{1/2}$$

Рещенае 7.22. Для определенности рассмотрим сначала ньютоновский случай. Пусть $P(\vec{v},n)$ - вероятность того, что скорость космического корабля после n импульсных включений двигателей равна $\vec{v}$. Выведем для P дифференциальное уравнение. Для этого заметим, что если после n-го включения двигателей космический корабль удалось разогнать до скорости $\vec{v}$, то после$(n-1)$-го включения его скорость должна находиться в пространстве скоростей на расстоянии Δv от скорости $\vec{v}$. Из соображений симметрии ясно, что все точки сферы радиуса Δv, описанной вокруг $\vec{v}$, должны давать одинаковый вклад в $P(\vec{v},n)$, поэтому $P(\vec{v},n)$ можно приравнять изотропно усредiенной по сфере вероятности P после $(n-1)$-го включения двигателей:

$$P(\vec{v},n) = \langle P(\vec{v}+\Delta v,n-1)\rangle_{c\Phi\mathrm{e_p}} =$$
$$= \frac{1}{6}\left[P\left(\vec{v}+\Delta v\vec{e}_x,n-1\right) + P\left(\vec{v}+\Delta v\vec{e}_y,n-1\right) + P\left(\vec{v}+\Delta v\vec{e}_z,n-1\right) + \right.$$
$$\left. + P\left(\vec{v}-\Delta v\vec{e}_x,n-1\right) + P\left(\vec{v}-\Delta\vec{e}_y,n-1\right) + P\left(\vec{v}-\Delta v\vec{e}_z,n-1\right)\right] \approx$$
$$\approx P(\vec{v},n-1) + (\Delta v)^2\nabla^2 P/6.$$

Следовательно, P удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{(\Delta v)^2}{6}\nabla^2 P$$

т. е. обычному уравнению диффузии. Решение этого уравнения. с начальным условием $P(\vec{v},0) = \delta^3(\vec{v})$ имеет вид

$$P(\vec{v},n) = (4\pi)^{-3/2}\left(n\Delta v^2/6\right)^{-s/2}\exp\left(\frac{-3v^2}{2n\Delta v^2}\right)$$

Те же самые рассуждения применимы и в случае релятивистской задачи, за исключением того, что сложение скоростей перестает быть линей ным: при сложении скоростей приходится обращаться к более сложным релятивистским формулам. Но поскольку $\Delta v \ll c$, в системе отсчета, мгновенно сопутствующей космическому кораблю, собственную скорость Δv можно рассматривать как (линейную) аддитивную добавку. Это означает, что в пространстве скоростей локально выполняется уравнение диффузии (2). Необходимо лишь учесть, что глобальная мегрика релятивистского пространства скоростей отлична от метрики нерелятивистского пространства скоростей. Для этого оператор ∇^2 в уравнении (2) следует понимать как лапласиан в искривленном пространстве скоростей с метрикой (см. задачу 6.8):

$$dv^2_{\text{собств}} = d\psi^2 + \operatorname{sh}^2\psi\left(dv^2_\theta + \sin^2\vartheta dv^2_\varphi\right)$$

где ψ - параметр быстроты, т. е. $\operatorname{th}\psi \equiv |\vec{v}|$. Соотношение [см. задачу 7.7(к)

$$P_{:\alpha};\alpha = g^{-\frac{1}{2}}\left(g^{\frac{1}{2}}g^{\alpha\beta}P_{,\beta}\right)_{,\alpha}$$

и то, что вследствие сферической симметрии

$$\frac{\partial P}{\partial v_\varphi} = \frac{\partial P}{\partial v_\vartheta} = 0$$

позволяет нам записать уравнение

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\Delta v^2}{6}\left[\frac{1}{\operatorname{sh}^2\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\operatorname{sh}^2\psi\frac{\partial P}{\partial\psi}\right)\right]$$

Нетрудно проверить, что его решением служит распределение вероятности

$$P(\vec{v},n) = (4\pi)^{-3/2}e^{-t}t^{-2/2}\frac{\psi}{\operatorname{sh}\psi}e^{-\left(\psi^2/4t\right)}$$

тде $t \equiv n\Delta v^2/6$. Оно согласуется с ньютоновским решением (3) при $t \ll 1, \psi \ll 1$ (на отношение $\psi^2/4t$ никаких ограничений не налагается).

Вероятность того, что значение параметра ψ заключено между ψ $\psi + d\psi$ [в метрике пространства скоростей (4)], равна $4\pi\operatorname{sh}^2\psi P d\psi$. В пределе при $t \gg 1, \psi \gg 1$ она обладает асимптотикой

$$\frac{dP}{d\psi} \approx (4\pi)^{-1/1}\frac{\psi}{t^{3/2}}e^{-\psi^2/4t-t+\psi} = (4\pi)^{-1/2}\frac{\psi}{t^{2/2}}e^{-1\left(1-\frac{\psi}{2t}\right)^2}$$

-Существенна лишь экспонента. Из нее следует, что ψ имеет математическое ожидание $\langle\psi\rangle \approx 2t$ и дисперсию $\Delta\psi \sim \sqrt{2t}$, поэтому $\lim_{t\to\infty}\Delta\psi/\langle\psi\rangle = 0$. С увеличением числа включений средняя быстрота $\langle\vec{\psi}\rangle$ возрастает линейно, но среднее приращение скорости за одно включение составляет $\Delta v^2/3$. Трезвый астронавт при каждом включеиии двигателей увеличивает быстроту на Δv, т. е. в $3c/\Delta v$ раза. У дивительно, что пьяный астронавт все же может разогнатьсвой корабль до релятивистских скоростей (в ньютоновском случае скорость или быстрота возрастаег лишь как $n^{1/2}$, а не как n). Причина этого кроется в свойствах преобразований Лоренца: если удаляющийся от вас наблюдатель стреляет, целясь наугад, то вам будет казаться, будто некоторым направлениям он отдает предпочтение перед другими (эффект «фары»).

Solution 7.23.

а) Если гиперповерхности заданы уравненнями $f = \text{const}$, то.
и, следовательно,

$$\mathbf{k} \sim \nabla f, \quad k_\mu = h f_{,\mu}$$

$$k_{\mu;v} = h, v f_{,\mu} + h f_{,\mu;v}$$
$$k_{[\mu;v}k_{\lambda]} = h_{,[v,\mu,\mu}hf_{,\lambda]} + h^2 f_{,[\mu;v}f,\lambda\big] .$$

Ясно, что первое слагаемое в правой части соотношения (2) равнонулю. Второе слагаемое также равно нулю, поскольку $f_{,\mu;v} = f, v;\mu$ Обратное утверждение (о том, что из условия $k_{[\mu;v}k_{\lambda]} = 0$ следует гиперповерхностная ортогональность векторного поля k) называется теоремой Фробениуса.

б) Нз соотношения (1) видно, что дополнительное условие$k_{[\mu;v]} = 0$ эквивалентно существованию такой скалярной функции f, для которой $\mathbf{k} = \nabla f$.

Solution

7.24. Пусть $\mathbf{k}$ - вектор, касательный к конгруэнции изотропных кривых. Поскольку вектор $\mathbf{k}$ гиперповерхностно ортогонален, то

$$k_\alpha = h f_{,\alpha}$$

где f и h-некоторые скалярные функции (см. задачу 7.23), а поскольку $\mathbf{k}$ - изотропный вектор, то

$$f_{,\alpha f} f, \alpha = 0.$$

Из этих двух соотношений получаем

$$k_{\alpha;\beta} k^\beta = \left(h_{,\beta} f_{,\alpha} + h f_{,\alpha;\beta}\right) h\dot{f}, \beta$$
$$f_{,\alpha;\beta} f^\beta \beta = f_{,\beta;\alpha} f^\beta = \frac{1}{2}\left(f_{,\beta} f, \beta\right)_{;\alpha} = 0$$

и, следовательно,

$$k_{\alpha;\beta} k^\beta = (h, \beta f, \beta) k_\alpha$$

Тем самым уравнение геодезических $\nabla_{\mathbf{k}}\mathbf{k} \sim \mathbf{k}$ удовлетворено. Если $k^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$, то можно ввести аффинный параметр $\lambda' = \lambda'(\lambda)$ и. записать это уравнение в обычном виде:
тде $\bar{k}^\alpha = dx^\alpha/d\lambda'$

$$\nabla_{\bar{\mathbf{k}}}\bar{\mathbf{k}} = 0$$

Решение 7.25. Запишем уравнение Эйлера - Лагранжа В общем виде:

$$0 = \frac{d^2F}{dy^2}\frac{dy}{ds}\frac{\partial y}{\partial \dot{x}} + \frac{dF}{dy}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial y}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial y}{\partial x}\right)\right]$$

Поскольку $dy/ds = 0$ (s-аффинный параметр) и $dF/dy \neq 0$, то Это уравнение совпадает с уравнением Эйлера-Лагранжа для $.8 \int y ds = 0$.

Leuven-2023. Геодезическая в 1D пространстве

In a flat, 1 d spacetime with $ds^2 = dx^2$ if we make an arbitrary coordinate transformation

$$x = f\left(x'\right),$$

Compute the Christoffel symbols and find the geodesic equation.
Find also the Riemann tensor?

Solution

Нужно просто аккуратно найти метрику и кристоффеля по самым обычным формулами, ничего особенного.
We have $dx = \frac{\partial x}{\partial x'} dx' = f'\left(x'\right) dx'$, so the metric is

$$ds^2 = f'\left(x'\right)^2 dx'^2.$$

That is, $g_{x'x'} = f'\left(x'\right)^2$, and correspondingly $g^{x'x'} = \frac{1}{f'(x')^2}$. Since the only coordinate is x' in this new frame, the only Christoffel symbol is

$$\Gamma^{x'}_{x'x'} = \frac{1}{2} g^{x'x'}\left(\partial_{x'} g_{x'x'} + \partial_{x'} g_{x'x'} - \partial_{x'} g_{x'x'}\right) = \frac{1}{2} g^{x'x'}\left(\partial_{x'} g_{x'x'}\right)$$
$$= \frac{1}{2f'\left(x'\right)^2} \cdot \partial_{x'}\left(f'\left(x'\right)^2\right) = \frac{1}{2f'\left(x'\right)^2} \cdot 2f'\left(x'\right) f''\left(x'\right) = \frac{f''\left(x'\right)}{f'\left(x'\right)}.$$

Since this is the only Christoffel symbol, the geodesic equation is very simple:

$$0 = \frac{d^2x'}{d\lambda^2} + \Gamma^{x'}_{x'x'}\left(\frac{dx'}{d\lambda}\right)^2 = \frac{d^2x'}{d\lambda^2} + \frac{f''\left(x'\right)}{f'\left(x'\right)}\left(\frac{dx'}{d\lambda}\right)^2.$$

Since the only coordinate is x', the only component of the Riemann tensor is $R_{x'x'x'x'}$ must be zero in order to retain its antisymmetry in the first and second pairs of indices.

13.2.3 Other Problems on Differential Geometry

Ремение 8.1.

а) Ключевые соотношения:
$\left\langle \widetilde{\mathrm{d}x^\alpha}, \partial/\partial x^\beta \right\rangle \equiv \widetilde{\mathrm{d}x^\alpha} \cdot \partial/\partial x^\beta = \delta^\alpha_\beta, (\partial/\partial x^\alpha) \cdot \left(\partial/\partial x^\beta\right) = g_{\alpha\beta}$ и $\widetilde{\mathrm{d}}x^\alpha \cdot \widetilde{\mathrm{d}x^\beta} = g^{\alpha\beta}$
Ответы:

$$1, 0, g_{01}, g^{01}, g^{00}$$

б) Вектор $g^{1\alpha}\partial/\partial x^\alpha \equiv g^{1\alpha}\mathbf{e}_\alpha$ соответствует $\widetilde{\mathbf{d}}^1$, поскольку для любого вектора $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} \cdot g^{1\alpha}\mathbf{e}_\alpha = v^\mu \mathbf{e}_\mu \cdot g^{1\alpha}\mathbf{e}_\alpha = v^\mu g_{\mu\alpha} g^{1\alpha} = v^\mu \delta^{\mathrm{t}}_\mu = v^1 = \left\langle \widetilde{dx}^1, v \right\rangle$$

Ремение 8.2.

Нетрудно видеть, что $f = r$, т. е. $\widetilde{\mathrm{d}}f = \widetilde{\mathrm{d}r}$, поскольку

$$\langle \widetilde{\mathbf{dr}}, \qquad \mathbf{e}_{\hat{r}} \rangle = \left\langle \widetilde{\mathbf{dr}}, \mathbf{e}_r \right\rangle = 1,$$
$$\left\langle \widetilde{\mathbf{dr}}, \quad \mathbf{e}_{\hat{\vartheta}} \right\rangle = r^1 \left\langle \widetilde{\mathbf{dr}}, \quad \mathbf{e}_{\mathfrak{v}} \right\rangle = 0.$$

Пусть существует функция g, такая, что $\widetilde{\mathrm{d}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}\hat{\boldsymbol{v}}$. Тогда

$$0 = \left\langle \widetilde{\mathbf{d}g}, \mathbf{e}_{\hat{r}} \right\rangle = \left\langle \widetilde{\mathbf{d}g}, \mathbf{e}_r \right\rangle = \partial g/\partial r,$$
$$1 = \left\langle \widetilde{\mathbf{d}g}, \mathbf{e}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \right\rangle = r^{-1} \left\langle \widetilde{\mathbf{d}g}, \mathbf{e}_{\hat{\vartheta}} \right\rangle = r^{-1}\partial g/\partial \boldsymbol{v}.$$

Ясно, что условия $\partial g/\partial r = 0$ и $\partial g/\partial \vartheta = r$ несовместимы.
Решекие 8.3. В декартовом координатном репере это условие сводится к равенству $\sigma_{i,j} = \sigma_{j,l}$. Оно эквивалентно не зависящему от выбора базиса требованию обращения в нуль ротора поля (векторного эквивалента поля $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$).
Решение 8.4. Выберем базис $\tilde{\omega}_1, ..., \tilde{\omega}_N$. Любую p-форму можно представить в виде суммы

$$\sum_{i,j} A_{ij...} \left(\tilde{\omega}_i \wedge \tilde{\omega}_j ...\right)$$

где в каждом слагаемом член в скобках содержит ровно p базисных форм. Поскольку внешнее умножение и сложение дифференциальных форм дистрибутивны, то тождество достаточно доказать для мономиальных p- и q-форм и вычислить, например, произведение

$$\left(\tilde{\omega}_1 \wedge \hat{\omega}_2 \wedge ... \wedge \tilde{\omega}_p\right) \wedge \left(\tilde{\omega}_1, \wedge \tilde{\omega}_{2'} \wedge ... \wedge \tilde{\omega}_{q'}\right)$$

Поскольку внешнее умножение ассоциативно, то скобки можно опустить. Переставляя последовательно дифференциальную форму $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1$, с формой, стоящей слева от нее, переведем $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1$, на крайнее слева место. аждая перестановка приводит к появлению одного знака минус, поэтому после выполнения всех перестановок возникнет множитель $(-1)^p$. Затем переведем дифференциальную форму $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2$ на второе место слева. Это приведет к появлению еще p знаков минус. Продолжая переставлять дифференциальные формы $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{q'}$, мы в конце концов дойдем до множителя $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{q'}$. Когда эта форма займет q-е место слева, знак изменится- pq раз. Тем самым требуемое гождество доказано.

Solution

8.5. Эквивалентность обоих определений дифференциала p-формы мы докажем, если установим, что в произвольном координатном репере компоненты дифференциальной формы $\mathrm{d}\Omega$, вычисленные на основе обоих определений, совпадают. Запишем каждое из определений при помощи ковариантной производной. Пусть компоненты формы Ω равны

$$\Omega_{\alpha\beta...\gamma} = \Omega_{[\alpha\beta...\nu]} (p \text{ индексов })$$

Тогда компоненты дифференциальной формы $d\Omega$ равны

$$\Omega_{[\alpha\beta...\gamma;0]} = \Omega_{[\alpha\beta...\gamma,0]} - \Gamma_{e[\alpha\delta}\Omega^{\varepsilon}_{\beta}..., \gamma]$$
$$- \Gamma_{\varepsilon[\beta\delta}Q^e\alpha_{\alpha.\nu]} - ... - \Gamma_{\varepsilon[\gamma\delta}\Omega_{\alpha\beta....\ell]} = \Omega_{[\alpha\beta...\gamma,\delta]}.$$

(Члены с символами Кристоффеля Γ обращаются в нуль, поскольку в координатном репере $\Gamma_{\mu[v\sigma]} = 0$.) Обратимся теперь к другому определению:

$$\Omega = \Omega_{\alpha\beta\ldots\gamma}\widetilde{dx}^{\alpha} \wedge \widetilde{\mathrm{dx}}^{\beta} \wedge \ldots \wedge \widetilde{\mathrm{d}}^{\gamma}.$$

По свойству 2 внешнее дифференцирование d не нарушает соглашения о суммировании по повторяющимся индексам, поэтому

$$d\Omega = (d\Omega_{\alpha\beta\ldots.}) \wedge \left(\widetilde{d}^{\alpha} \wedge \widetilde{d}^{\beta} \wedge \ldots \wedge \widetilde{d}^{\gamma}\right) +$$
$$+ \Omega_{\alpha\beta\ldots\gamma} d\left(\widetilde{dx}^{\alpha} \wedge \widetilde{dx}^{\beta} \wedge \ldots \wedge \widetilde{dx}^{\gamma}\right)$$

(мы воспользовались здесь свойством 4 при $p = 0$, поскольку $\Omega_{\alpha\beta\ldots.\gamma}$ представляет собой скалярную функцию (0-форму)]. Из свойства 1 известно, что для любой 0 -формы f
а из свойства 3 следует

$$\widetilde{df} = f, \alpha\widetilde{dx}^{\alpha}$$

$$\left\langle \widetilde{\mathbf{d}f}, \partial/\partial x^{\beta} \right\rangle = \left\langle f, \alpha\widetilde{\mathrm{d}}^{\alpha}, \partial/\partial x^{\beta} \right\rangle = f, \beta,$$

откуда

$$\widetilde{d}_{\alpha\beta\ldots\gamma} = \Omega_{\alpha\beta\ldots\gamma,\delta}\widetilde{d}^{\delta}.$$

Второе слагаемое в правой части соотношения (2) обращается в нуль: по свойству 4 его можно разложить в сумму членов, каждый из которых содержит $\mathrm{d}\mathrm{d}x$, а по свойству $5 \mathrm{d}\mathrm{d}x = 0$. Следовательно, соотношение (2) преобразуется к виду

$$\mathrm{d}\Omega = \Omega_{\alpha\beta\ldots\nu,\sigma}\widetilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{x}^{\delta} \wedge \widetilde{\mathrm{d}}^{\alpha} \wedge \widetilde{\mathrm{d}}^{\beta} \wedge \ldots \wedge \widetilde{\mathrm{d}}^{\gamma}.$$

Поскольку $\mathbf{d}\Omega$ есть $(p + 1)$-форма (свойство 1) и внешнее произведение антисимметрично, то компоненты d Ω равны $\Omega_{[\alpha\beta\ldots.\psi,\delta]}$, т. е. совпадают с компонентами, заданными соотношением (1).
Решение 8.6. Пусть
Тогда $\tilde{\boldsymbol{\beta}} = g\tilde{d}^2$ и

$$g \equiv \left[x^1 \int_0^1 f\left(\xi x^1, x^2, \ldots, x^n\right) d\xi\right]$$

Но

$$\mathbf{d}\tilde{\beta} = g_{,l}\widetilde{\mathrm{d}x^l} \wedge \widetilde{\mathrm{d}x^2} = g_{,1}\widetilde{\mathrm{d}x^1} \wedge \widetilde{\mathbf{d}x^2} + g_{,3}\widetilde{\mathrm{d}x^3} \wedge \widetilde{\mathrm{d}x^2} + \ldots$$

$$g_{,1} = \left[\int_0^1 f\left(\xi x^1, x^2, \ldots, x^n\right) d\xi\right] + \left[x^1 \int_0^1 \xi f'\left(\xi x^1, x^2, \ldots, x^n\right) d\xi\right],$$

где f' означает производную по первому аргументу. Второе слагаемое в правой части, интегрируя по частям, можно преобразовать следующим образом:

$$\int_0^1 x^1 \xi f'\left(\xi x^1, x^2, \ldots, x^n\right) d\xi = \int_0^1 \xi \frac{\partial}{\partial \xi} f\left(\xi x^1, x^2, \ldots, x^n\right) d\xi =$$

$$= \xi f\left(\xi x^1, x^2, \ldots, x^n\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 f\left(\xi x^1, x^2, \ldots, x^n\right) d\xi,$$

поэтому

$$g_{.1} = \xi f\left(\xi x^1, x^2, \ldots, x^n\right)\Big|_0^1 = f\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right).$$

Поскольку $d\alpha = 0$, то

$$\mathrm{d}\alpha = f_{.8}\ \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 + f_{.4}\ \mathrm{d}x^4 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 + \ldots = 0$$

Это равенство может выполняться лишь в том случае, если $f_{.8} = f_{,4} = f_{,5} = \ldots = f_{,n} = 0$, поэтому

$$g_{.8} = \left[x^1 \int_0^1 f_{.8}\left(\xi x^1, x^2, \ldots, x^n\right) d\xi\right] = 0$$

Аналогичным образом доказывается цепочка $g_{,4} = g_{,5} = ... = g_{.n} = 0$. Окончательно получаем

$$\mathbf{d}\tilde{\beta} = g_{,1}\widetilde{\mathrm{d}x^1} \wedge \widetilde{d^2} = f\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)\widetilde{\mathrm{d}x^1} \wedge \widetilde{d^2} = \alpha$$

Решение 8.7. Тензору Максвелла соответствует 2-форма

$$\mathbf{F} = F_{\mu\nu}\widetilde{\mathbf{d}\boldsymbol{x}^{\mu}} \wedge \widetilde{\mathbf{d}}^{v}$$

поэтому равенство нулю ее внешнего дифференциала

$$0 = \mathbf{dF} = F_{\mu v,\lambda}\widetilde{\mathbf{d}x^{\lambda}} \wedge \widetilde{\mathbf{d}x^{\mu}} \wedge \widetilde{\mathbf{d}}^{\nu}$$

дает уравнения Максвелла

$$F_{[\mu v;\lambda]} = 0$$

Аналогично из $\mathbf{d} * \mathbf{F} = 0$ получаем

$$*F_{[\lambda\sigma;v]} = 0.$$

Последние равенства эквивалентны (см. задачу 3.25) следующим:

$$0 = \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} * F_{\lambda\sigma;v} = 2 * *F^{\mu\nu}; v = -2F^{\mu\nu}; v$$

и мы приходим к недостающим уравнениям Максвелла

$$F^{\mu v}; v = 0$$

Solution

8.8. Построим в произвольной точке 3-поверхности локально ортонормированный базис $\mathbf{e}_{\hat{t}}, \mathbf{e}_{\hat{x}}, \mathbf{e}_{\hat{y}}, \mathbf{e}_{\hat{z}}$. Если 3-поверхность пространственноподобна, то базис можно выбрать так, чтобы вектор e $_{\hat{t}}$ совпадал с единичным вектором нормали k ней. Тогда три ортогональных (и, следовательно, линей но-независимых) вектора $(\mathbf{e}_{\hat{x}}, \mathbf{e}_{\hat{y}}, \mathbf{e}_{\hat{z}})$ будут принадлежать 3-поверхности и, следовательно, будут пространсгвенноподобными. К любому другому ортонормированному базису мы можем перейти, выполнив соответствующее преобразование Лоренца, которое оставляет пространст венноподобные векторы пространственноподобными и непространственноподобные векторы - непространственноподобными. Следовательно, если 3-поверхность пространственноподобна, то всегда можно выбрать три принадлежащих ей ортонормированных протранственноподобных вектора.

Если 3-поверхность изотропна, то выберем локально ортонормированный базис так, чтобы сумма $\mathbf{e}_{\hat{t}} + \mathrm{e}_{\hat{x}}$ совпадала с нормалью к 3-поверхности. Изотропный вектор ортогонален самому себе, поэтому 3-поверхности принадлежат три ортогональных вектора: Iгространственноподобные векторы $\mathbf{e}_{\hat{y}}$ и $\mathbf{e}_{\hat{z}}$ и изотропный вектор $\mathbf{e}_{\hat{t}} + \mathbf{e}_{\hat{x}}$. Наконец, если 3-поверхность времениподобна, то выберем вектор $\mathbf{e}_{\hat{x}}$ так, чтобы он совпадал с нормалью к поверхно- сти. Тогда 3-поверхности будут принадлежать времениподобный вектор e $\hat{\imath}$ и пространственноподобные векторы $\mathbf{e}_{\hat{y}}$ и $\mathbf{e}_{\hat{2}}$. ак и в случае пространственноподобной 3-поверхности, полученные результаты останутся в силе, если на рассмотренный базис подействовать произвольным преобразованием Лоренца.

Solution

8.9. Запишем элемент объема

$$d^3\Sigma_{\mu}(a,b,c) = \frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\beta\sigma}\frac{\partial\left(x^{\nu}, x^{\beta}, x^{\sigma}\right)}{\partial(a,b,c)}dadbdc.$$

Если от параметров a, b, c перейти к параметрам α, β, γ, то

$$dad\beta dc \to \left|\frac{\partial(a,b,c)}{\partial(\alpha,\beta,\gamma)}\right| d\alpha d\beta d\gamma.$$

Если параметры (α, β, γ) задают ту же ориентацию, что и параметры (a, b, c), то якобиан положителен (по определению одинаковой ориентации), поэтому знак абсолютной величины можно отбросить и записать

$$\begin{aligned} d^3\Sigma_{\mu}(a,b,c) &\to \frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu v\rho\sigma}\frac{\partial\left(x^{v}, x^{\rho}; x^{\sigma}\right)}{\partial(a,b,c)}\frac{\partial(a,b,c)}{\partial(\alpha,\beta,\gamma)}d\alpha d\beta d\gamma = \\ &= \frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu v\rho\sigma}\frac{\partial\left(x^{v}, x^{\rho}, x^{\sigma}\right)}{\partial(\alpha,\beta,\gamma)}d\alpha d\beta d\gamma = \\ &= d^3\Sigma_{\mu}(\alpha,\beta,\gamma). \end{aligned}$$

Утверждение задачи доказано.

На языке дифференциальных форм инвариантность интеграла очевидна, поскольку $d^3\Sigma_\mu$ можно рассматривать как 3-форму:

$$d^3\Sigma_\mu = \frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\widetilde{dx^\mu}\wedge\widetilde{\mathrm{d}}x^\rho\wedge\widetilde{dx^\sigma}.$$

Решение 8.10.

а) Запишем 2-форму ϑ и ее дифференциал do:

$$\boldsymbol{\vartheta} = f^k\mathbf{d}^2\mathbf{S}_k = f^k\frac{1}{2}\varepsilon_{klm}\widetilde{\mathbf{d}x^l}\wedge\widetilde{\mathbf{d}}',$$

$$\mathrm{d}\vartheta = f^k{}_n\frac{1}{2}\varepsilon_{klm}\widetilde{dx^n}\wedge\widetilde{\mathrm{d}x^1}\wedge\widetilde{dx^m} + f^k\frac{1}{2}(\,\mathrm{d}\varepsilon_{klm})\wedge\widetilde{\mathrm{d}x^1}\wedge\widetilde{dx^m}.$$

Пусть по определению $[klm] = +1$, если klm - четная переста. новка чисел $1, 2, 3$, [klm] $= -1$, если klm - нечетная перестановка чисел $1, 2, 3$, и $[klm] = 0$ во всех остальных случаях. Тогда

$$\mathbf{d}\varepsilon_{klm} = \mathbf{d}\left(|g|^{1/2}[klm]\right) = [klm]\frac{1}{2}g_{,n}\widetilde{d^n}/|g|^{1/2} = \varepsilon_{klm}\frac{1}{2}g_{,n}\widetilde{d^n}/g.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\mathbf{d}\boldsymbol{\theta} &= \frac{1}{2}\left(f^k,n+\frac{1}{2}g_{,n}/g\right)\varepsilon_{klm}\widetilde{\mathbf{d}x^n}\wedge\widetilde{\mathbf{d}x^l}\wedge\widetilde{\mathbf{d}x^m} = \\ &= \frac{1}{2}|g|^{-1/2}\left(|g|^{1/2}f^k\right)_n\varepsilon_{klm}\widetilde{\mathbf{d}x^n}\wedge\widetilde{\mathrm{d}x^l}\wedge\widetilde{\mathbf{d}x^m}.\end{aligned}$$

Но в 3-мерном пространстве

$$\widetilde{\mathbf{d}x^n}\wedge\widetilde{\mathbf{d}x^1}\wedge\widetilde{\mathbf{d}x^m} = |g|^{1/2}\varepsilon^{nlm}\widetilde{\mathbf{d}x^1}\wedge\widetilde{\mathrm{d}x^2}\wedge\widetilde{\mathrm{d}x^3}\quad\text{и}\quad\varepsilon_{klm}\varepsilon^{nlm} = 2\delta^n{}_k,$$

поэтому

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\vartheta} = f^k_{:k}|g|^{1/2}\widetilde{\mathbf{d}x^1}\bigwedge\widetilde{\mathbf{d}x^2}\bigwedge\widetilde{\mathbf{d}x}^3.$$

Следовательно, в обычных векторных обозначениях обобщенную теорему Стокса можно записать в виде

$$\int\limits_V\nabla\cdot\vec{f}dV = \int\limits_{\partial V}\vec{f}\cdot\vec{dS}$$

б) $\forall = f^\mu d^3\Sigma_\mu = f^\mu\frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\widetilde{dx}^\alpha\wedge\widetilde{dx}^\beta\wedge\widetilde{dx^\gamma}$;

$$\begin{aligned}\mathbf{d}\vartheta &= \frac{1}{3!}\left(f^\mu,\lambda\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\widetilde{\mathrm{d}x^\lambda} + f^\mu\mathbf{d}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\right)\wedge\widetilde{\mathrm{d}x^\alpha}\wedge\widetilde{dx}^\beta\wedge\widetilde{dx}^\gamma = \\ &= \frac{1}{3!}\left(f^\mu{}_{,\lambda}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\upsilon}\widetilde{dx}^\lambda + f^\mu\frac{1}{2}\frac{g.\lambda}{g}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\upsilon}\widetilde{dx}^\lambda\right)\wedge\widetilde{d}^\alpha\wedge\widetilde{d}^\beta\wedge\widetilde{dx}^\gamma = \\ &= \frac{1}{3!}|g|^{-1/2}\left(|g|^{1/2}f^\mu\right),\lambda\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\widetilde{d}^\lambda\wedge\widetilde{d}^\alpha\wedge\widetilde{d}^\beta\wedge\widetilde{dx}^\gamma = \\ &= \frac{-1}{\frac{1}{2}}\left(|g|^{1/2}f\right)_{,\lambda}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\varepsilon}\varepsilon^{\lambda\alpha\beta\gamma}|g|^{1/2}\widetilde{d}^0\wedge\widetilde{dx}^1\wedge\widetilde{dx^2}\wedge\widetilde{dx}^3 = \\ &3!|g|^{\overline{2}} \\ &= \frac{1}{1}\left(|g|^{3/2}f^\mu\right),\lambda\delta^{\delta^n}_\mu 3!|g|^{1/2}\widetilde{dx}^0\wedge\widetilde{dx}^{\,1}\wedge\widetilde{dx^2}\wedge\widetilde{dx^3} = \\ &3!|g|^2 \\ &= f^\mu_{;\mu}|g|^{x/2}\widetilde{dx}^0\wedge\widetilde{dx}^1\wedge\widetilde{dx}^2\wedge\widetilde{dx}^3.\end{aligned}$$

Таким образом, обобщенную теорему Стокса можно записать в виде

$$\int\limits_\Omega\nabla\cdot f|g|^{1/s}d^4x = \int\limits_{\partial\Omega}f^\mu d^3\Sigma_\mu$$

В) $\vartheta = F^{\mu\nu}d^2\Sigma_{\mu\nu} = F^{\mu\nu}\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\widetilde{d}^\alpha\bigwedge\widetilde{d}^\beta,$

$$\mathbf{d}v = \frac{1}{2}\mathbf{d}\left(F^{\mu v}\varepsilon_{\mu v\alpha\beta}\right)\wedge\widetilde{d}^{\alpha}\wedge\widetilde{d}^{\beta} = \\ = \frac{1}{2}|g|^{-1/2}\left(|g|^{1/2}F^{\mu v}\right)_{,\lambda}\varepsilon_{\mu v\alpha\beta}\widetilde{dx}^{\lambda}\wedge\widetilde{dx}^{\alpha}\wedge\widetilde{dx}^{\beta},$$

где дифференциал $d\varepsilon_{\mu v\alpha\beta}$ выбран так же, как и в п. «б». Но

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\widetilde{d}^{\lambda}\wedge\widetilde{d}^{\alpha}\wedge\widetilde{d}^{\beta} = \varepsilon_{\mu v\alpha\beta}(1/6)\delta^{\lambda\alpha\beta}_{x\sigma\tau}\widetilde{d}^{x}\wedge\widetilde{dx}^{\sigma}\wedge\widetilde{dx}^{\tau} = \\ = -(1/6)\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon^{\nu\lambda\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\kappa\sigma\tau}\widetilde{dx}^{x}\wedge\widetilde{dx}^{\sigma}\wedge dx^{\tau} = \\ = -\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}e^{\nu\lambda\alpha\beta}d^3\Sigma_{\psi} = 2\delta^{\nu\lambda}_{\mu\nu}d^3\Sigma_{\gamma}$$

а из задачи 7.7 (и) известно, что

$$\mathrm{d}\theta = |g|^{-1/2}\left(|g|^{1/2F^{\mu\nu}}\right)_{,\lambda}\delta\lambda_{\mu v}d^3\Sigma_{\gamma} = 2F^{\mu\nu};\mathrm{d}^8\Sigma_{\mu}$$

и, наконец,

$$\int\limits_{\partial\Omega}F^{\mu v}\ \mathrm{d}^2\Sigma_{\mu v} = 2\int\limits_{\Omega}F^{\mu v}iv\ \mathrm{d}^3\Sigma_{\mu}$$

г) Пусть $\theta = A_k dx^k = \vec{A}\cdot\overrightarrow{dl}$ и поверхность Ω 2-мерна. Тогда дифференциал d преобразуется к виду

$$\mathrm{d}0 = A_{k,1}\widetilde{\mathrm{d}}x'\wedge\widetilde{\mathrm{d}x^k} = A_{k,j}\delta^{[k}_{m}\delta^{j]}_{n}\widetilde{\mathrm{d}}x^m\wedge\widetilde{\mathrm{d}}x^n = \\ = \frac{1}{2}A_{k,\varepsilon^{rk}}\varepsilon_{rmn}\widetilde{\mathrm{d}x^m}\wedge\widetilde{\mathrm{d}x^n} = (\nabla\times\vec{A})^r\ \mathrm{d}^2S_r$$

что и требовалось доказать.

решение 8.II. Предположим, что такой тензор существует. Чему были бы равны его компоненты в произвольно выбранной точке свободно падающей локально ортонормированной системы координат? В этой системе координат все $g_{\alpha\beta.\mu}$ равны нулю (поскольку рав ны нулю все $\Gamma_{a\beta\mu}$) и $g_{a\beta} = \eta_{\alpha\beta}$. Следовательно, наш гипотетический тензор должен был бы быть некоторой алгебраической комбннацней нулевого тензора $\eta_{\alpha\beta}$ и, быть может, $\delta_{\beta}\alpha_{\beta}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma 6}$. Нетрудно убедиться, что единственная нетривиальная комбинация равна $\boldsymbol{\eta}\otimes\boldsymbol{\eta}\otimes\ldots\otimes\eta$ (δ только кпереименовывает» индексы, например, $\delta^{\alpha}_{\beta}\eta_{\alpha v} = \eta_{\beta v}$, а $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma 0}$ либо обращает соответствуюиий член в нуль в силу своей антиснмметричности, либо опускает индексы). Поскольку мы выбрали пройзвольную точку, то доказанное нами утверждение справедливо во всех точках.

pewerue 8.I2. феля Γ :

а) Воспользуемся обиим определением символов Кристоф-

В координатном репере

$$\Gamma_{\mu\alpha\beta} = \mathbf{e}_{\mu}\cdot\nabla_{\beta}\mathbf{e}_{\alpha}$$

$$\Gamma_{\mu\alpha\beta} - \Gamma_{\mu\beta\alpha} = \mathbf{e}_{\mu}\cdot(\nabla_{\beta}\mathbf{e}_{\alpha} - \nabla_{\alpha}\mathbf{e}_{\beta}) = \mathbf{e}_{\mu}\cdot[\mathbf{e}_{\beta},\mathbf{e}_{\alpha}] = 0$$

поскольку векторы координатного репера коммутируют.

б) В ортонормированном репере

$$\Gamma_{\mu a\beta} + \Gamma_{\alpha\mu\beta} = e_{\mu}\cdot\nabla_{\beta}\mathbf{e}_{\alpha} + e_{\alpha}\cdot\nabla_{\beta}\mathbf{e}_{\mu} = \nabla_{\beta}\left(\mathbf{e}_{\mu}\cdot\mathbf{e}_{\alpha}\right) = \nabla_{\beta}\left(\eta_{\mu\alpha}\right) = 0.$$

Pewerue 8.13.

а) Воспользуемся тем (иобычное правило дифференцирования»), что для любого вектрного поля v

$$\mathscr{L}_x\langle\tilde{A},v\rangle = \left\langle\mathscr{E}_x\tilde{A},v\right\rangle + \left\langle\tilde{A},\mathscr{L}_x,v\right\rangle$$

Для компонент 1-формы $\mathscr{L}_x\tilde{\mathbf{A}}$ получим следующие выражения:

$$\left(\mathscr{L}_{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{A}}\right)_{\alpha}\equiv\mathscr{L}_{\mathbf{x}}A_{\alpha} = \left\langle\mathscr{L}_{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{A}},\mathbf{e}_{\alpha}\right\rangle = \mathscr{L}_{\mathbf{x}}\left\langle\tilde{\mathbf{A}},\mathbf{e}_{\alpha}\right\rangle - \left\langle\tilde{\mathbf{A}},\mathscr{L}_{\mathbf{x}}\mathbf{e}_{\alpha}\right\rangle = \\ = A_{\alpha,\beta}x^{\beta} - \left\langle\tilde{\mathbf{A}},[\mathbf{x},\mathbf{e}_{\alpha}]\right\rangle = \\ = A_{\alpha,\beta}x^{\beta} - A_{\gamma}\left\langle\tilde{\boldsymbol{\omega}},\left[x^{\beta}\mathbf{e}^{\mathbf{e}},\mathbf{e}_{\alpha}\right]\right\rangle = \\ = A_{\alpha,\beta^{\beta}}x^{\beta} - A_{\gamma}\left\langle\tilde{\omega^{\gamma}},\left(x^{\beta}c_{\beta\alpha}{}^{\beta}\mathbf{e}_{\alpha} - x^{\beta}{}_{,\alpha}\mathbf{e}_{\beta}\right)\right\rangle = \\ = A_{\alpha,\beta}x^{\beta} + x^{\beta}{}_{,\alpha}A_{\beta} - A_{\gamma}x^{\beta}c_{\beta\alpha}{}^{\gamma}.$$

В координатном репере последний член обращается в нуль. Соотношение (1) позволяет записать производную Ли иначе:

$$\left(\mathscr{L}_{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{A}}\right)_{\alpha} = \nabla_{\mathrm{x}}\left\langle\tilde{\mathbf{A}},\mathbf{e}_{\alpha}\right\rangle - \left\langle\tilde{\mathbf{A}},\left(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{e}_{\alpha} - \nabla_{\mathrm{e}_{\alpha}}\mathbf{x}\right)\right\rangle = \left\langle\nabla_{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{A}},\mathbf{e}_{\alpha}\right\rangle + \left\langle\tilde{\mathbf{A}},\quad \nabla_{\mathrm{e}_{\alpha}}\mathbf{x}\right\rangle =$$
$$= A_{\alpha;\beta}x^{\beta} + x^{\beta}{}_{;\alpha}A_{\beta}.$$

Коэффициенты связности в действительности не входят в определение производной Ли. Они выпадают, и соотношение (3) переходит в соотношение (2).

б) Для простоты будем производить вычисления в координатном репере:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathbf{x}}\mathbf{T} &= \mathscr{L}_{\mathbf{x}}\left(T^{\alpha}{}_{\beta}\mathbf{e}_{\alpha}\otimes\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\beta}\right) = \\ &= \left(\mathscr{L}_{\mathbf{x}}T^{\alpha}{}_{\beta}\right)\mathbf{e}_{\alpha}\otimes\tilde{\omega}^{\beta} + T^{\alpha}{}_{\beta}\left(\mathscr{L}_{\mathbf{x}}\mathbf{e}_{\alpha}\right)\otimes\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\beta} + T^{\alpha}{}_{\beta}\mathbf{e}_{\alpha}\otimes\left(\mathscr{L}_{\mathbf{x}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\beta}\right) = \\ &= T^{\beta,\gamma}x^{\gamma}\mathbf{e}_{\alpha}\otimes\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\beta} - T^{\alpha_{\beta}}x^{\gamma},\alpha\mathbf{e}_{\gamma}\otimes\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\beta} + T^{\alpha}{}_{\beta}x^{\beta},\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\alpha}}\mathbf{e}_{\alpha}\otimes\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\gamma} = \\ &= \left(T^{\alpha}{}_{\beta,\gamma}x^{\gamma} - T^{\mu}x^{\alpha}x^{\alpha} + T^{\alpha}{}_{\mu}x^{\mu},\beta\right)\mathbf{e}_{\alpha}\otimes\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\beta}.\end{aligned}$$

Производную Ли тензора T^{α}_{β} часто записывают в виде

$$\mathscr{L}_{\mathbf{x}}T^{\alpha_{\beta}}_{\beta} = T^{\alpha}_{\beta,\gamma}x^{\gamma} - T^{\mu}{}_{\beta}x^{\alpha}\cdot\mu + T^{\alpha}_{\mu}x^{\mu}\cdot\beta.$$

Как и в п. «а», запятые можно заменить точками с запятой.

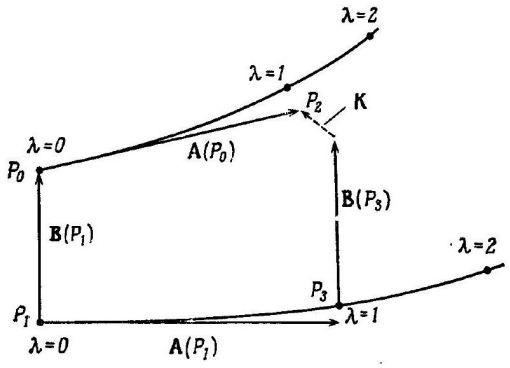
Реиение 8.14. В точках P_0 и P_1 рассмотрим два касательных вектора $\mathbf{A}(P_0)$ и $\mathbf{A}(P_1)$ с началом в точке $\lambda = 0$ и концом в точке $\lambda = \Delta\lambda = \mathscr{O}(\varepsilon)$. [Примечание. На фиг. 17 приращение параметра $\Delta\lambda$ выбрано равным 1, поэтому векторы $\mathbf{A}$ достаточно велики и «вектор разности» К для наглядности показан преувеличенно большим.] Предположим, что в точке P_1 построен вектор $\mathbf{B}(P_1)$, соединяющий точку P_1 с точкой P_0. Вычислим, сколько «не хватает» векторному полю В, чтобы его векторы соединяли точки с равными значениями λ вдоль конгруэнции А, т. е. вычислим вектор К:

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= \left[\mathbf{B}(P_1) + \mathbf{A}(P_0)\right] - \left[\mathbf{A}(P_1) + \mathbf{B}(P_3)\right] = \\ &= \left[\mathbf{B}(P_1) - \mathbf{B}(P_3)\right] - \left[\mathbf{A}(P_1) - \mathbf{A}(P_0)\right] = \\ &= A^{\tau}B^{\gamma},\tau\mathbf{e}_{\boldsymbol{\gamma}} + \mathscr{O}\left(\mathbf{A}^2\mathbf{B}\right) - B^{\tau}A^{\gamma},\tau\mathbf{e}_{\mathbf{v}} + \mathscr{O}\left(\mathbf{B}^2\mathbf{A}\right) = \\ &= [\mathbf{A},\mathbf{B}] + \mathscr{O}\left(\varepsilon^3\right),\ \text{если } |\mathbf{A}| \sim \mathscr{O}(\varepsilon) \sim |\mathbf{B}|.\end{aligned}$$

Следовательно, в пределе, если векторы А и В бесконечно малы, То

$$\mathbf{K} = [\mathbf{A},\mathbf{B}] = \mathscr{L}_{\mathbf{A}}\mathbf{B}$$

Таким образом, вектор К обращается в нуль, если $\mathscr{L}_{\mathbf{A}}\mathbf{B} = 0$, т. е. если вектор В «пернесен по Ли» вдоль векторного поля А.



Фиг. 17.

Solution

8.15. Свертку можно рассматривать как умножение. на постоянжый тензор δ^{μ}_{v} (дельта-символ Кронекера). Но производная Ли тензора $\delta^{\mu}{}_{v}$ равна нулю, что нетрудно доказать в координатном репере:

$$\mathscr{L}_{\mathbf{x}}\left(\delta^{\mu}{}_{v}\right) = \delta^{\mu}{}_{v,\lambda}x^{\lambda} + \delta^{\mu}{}_{\lambda}x^{\lambda},v - \delta^{\lambda}x^{\mu},\lambda = 0 + x^{\mu},v - x^{\mu},v = 0.$$

Следовательно, оператор свертки $\delta^{\mu}{}_{v}$ коммутирует с оператором $\mathscr{L}_{\mathrm{x}}$.

Решение 8.16. Если операторное тождество выполняется для скалярных функций и для векторных полей, то оно выполняется и для произвольных тензоров, поскольку действие производной Ли на любые тензоры однозначно определяется ее действием на скаляры и векторы (см. задачу 8.13). Если f-скалярная функция, то

$$\mathscr{L}_{\mathbf{u}}\mathscr{L}_{\mathbf{v}}f - \mathscr{L}_{\mathbf{v}}\mathscr{L}_{\mathbf{u}}f = \mathscr{L}_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{v}}f - \mathscr{L}_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}f = [\mathbf{u},\mathbf{v}]f = \mathscr{L}_{[\mathbf{u},\mathbf{v}]}f$$

Если же $\mathbf{w}$ - векторное поле, то
$\mathscr{L}_{\mathbf{u}}\mathscr{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{w} - \mathscr{L}_{\mathbf{v}}\mathscr{L}_{\mathbf{u}}\mathbf{w} - \mathscr{L}_{[\mathbf{u},\mathbf{v}]}\mathbf{w} = [\mathbf{u},[\mathbf{v},\mathbf{w}]] - [\mathbf{v},[\mathbf{u},\mathbf{w}]] - [[\mathbf{u},\mathbf{v}],\mathbf{w}] = 0.$

Равенство нулю последнего выражения (тождество Якоби для коммутаторов) проверяется без труда (например, в этом можно убедиться, выписав все члены). Таким образом, тождество, приведенное в условии задачи, доказано для скаляров и векторов, а тем самым и для произвольноto тензора.

Ретение 8.17.

Рассмотрим сначала скалярное поле:

$$\Phi\left(P_N\right) = \Phi\left(P_0\right) + \left[x^{\mu}\left(P_N\right) - x^{\mu}\left(P_0\right)\right]\Phi,\mu\left(P_0\right) + \ldots = \Phi\left(P_0\right) - \xi^{\mu}\Phi_{,\mu}.$$

Поскольку Φ - скаляр, то $\bar{\Phi}\left(P_N\right) = \Phi\left(P_N\right)$ и, следовательно,
Так как

$$\mathscr{L}_{\xi}\Phi = \Phi,\mu\xi^{\mu}$$

$$\bar{x}^{\mu}\left(P_N\right) = x^{\mu}\left(P_0\right) = x^{\mu}\left(P_N\right) + \xi^{\mu},$$

то для векторных полей

$$\dot{A}_{\mu}\left(P_N\right) = \left(\partial x^{\alpha}/\partial\bar{x}^{\mu}\right)A_{\mu}\left(P_N\right) = \left(\delta^{\alpha} - \xi^{\alpha},\mu\right)A_{\mu}\left(P_N\right)$$

Учитывая, что
получаем

$$A_{\mu}\left(P_N\right) = A_{\mu}\left(P_0\right) - A_{\mu,\beta}\xi^{\beta}$$

$$\mathscr{L}\xi A\mu = A_{\mu}\left(P_0\right) - \dot{A}\mu\left(PN\right) = A_{\mu}\left(P_0\right) - \left(\delta_{\mu}\alpha - \xi\alpha,\mu\right)\left(A_{\alpha}\left(P_0\right) - A_{\alpha,\beta}\xi\beta\right) = A_{\mu,\beta}\xi^{\beta} + A_{\alpha}\xi^{\alpha},\mu$$

Аналогичным образом можно рассмотреть и случай, когда геометрический объект обладает свойствами тензора:

$$\begin{aligned}\bar{T}^{\mu}{}_{v}\left(P_N\right) &= \left(\partial\bar{x}^{\mu}\partial x^{\alpha}\right)\left(\partial x^{\beta}/\partial\bar{x}^{v}\right)T^{\alpha}{}_{\beta}\left(P_N\right) = \\ &= \left(\delta^{\mu}{}_{\alpha} + \xi^{\mu},\alpha\right)\left(\delta^{\beta}{}_{v} - \xi^{\beta},v\right)\left[T^{\alpha}{}_{\beta}\left(P_0\right) - T^{\alpha}{}_{\beta,\gamma}\xi\xi^{v}\right] = \\ &= T^{\mu}{}_{v}\left(P_0\right) - T^{\mu}{}_{v,\gamma}\xi^{\nu} - T^{\mu}{}_{\beta}\xi^{\beta}{}_{\nu} + T^{\alpha}{}_{v}\xi^{\mu},\alpha, \\ &\mathscr{L}_{\xi}T^{\mu}{}_{v} = T^{\mu}{}_{v,\gamma}\xi^{\nu} + T^{\mu}{}_{\beta}\xi^{\beta},v - T^{\alpha}{}_{v}\xi^{\mu},\alpha.\end{aligned}$$

Реиение 8.18. Для задания параллельного переноса

$$u^{\alpha}v^{\beta} : \alpha = 0$$

необходимо знать лишь коэффициенты аффинной связности $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$.
Чтобы задать перенос Ферми - Уокера

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \mathbf{u}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}) - \mathrm{a}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}), \quad a \equiv \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u},$$

требуется, кроме того, указать метрику (она необходима для скалярного произведения). Чтобы задать перенос Ли

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = 0$$

мы должны определить не только касательные векторы вдоль кривой, но и векторное поле вне кривой, поскольку нам необходим градиент $\mathbf{u}$ в направлении $\mathbf{v}$, а вектор $\mathbf{v}$, вообще говоря, не касателен к кривой, вдоль которой производится перенол. Хотя в определение переноса Ли входит оператор ∇, в действительности оно не зависит от коэффициентов аффинной связности, поскольку вследствие антисимметричности тождества $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ все Γ исчезают. Ясно, что для задания производной Ли метрика не требуется.
Решекие 8.19. Если вектор $\vec{u}$ по возвращении в точку $\boldsymbol{A}$ совпадает с исходным вектором, то его можно продолжить до векторного поля, для которого параллельный перенос из A в B совпадает с переносом Ли из A в B. Пусть $\vec{u} = (u^x, u^y, u^z)$. Рассмотрим тождество

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = [\vec{u},\vec{v}] = \mathscr{L}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = -\mathscr{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$$

Полагая соответствующие члены в (1) равными нулю, т. е. $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \mathscr{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = 0$, и замечая, что символы Кристоффеля равны нулю, получаем

$$\begin{aligned}&\nabla_{\mathrm{u}}\mathrm{v} = 0 = u^i v^k, i = 0, \\ &-u^y = u^x = \alpha u^z z^{\alpha-1} = 0.\end{aligned}$$

Следовательно, вектор $\vec{u}$ может быть ненулевым (и иметь $u^z \neq 0$) лишь в том случае, если

$$\alpha = 0.$$

Реиение 8.20. Пусть $\mathbf{u}(p)$ - векторное поле, которое требуется найти. Если оно допускает параллельный перенос вдоль самого себя, то $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0$. Это не что иное, как уравнение геодезических. Следовательно, u (p) должно быть полем векторов, касательных к конгруэнции геодезических, заполняющей пространство.

Если поле $\mathbf{u}(p)$ допускает перенос Ферми - Уокера, то

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = (\mathbf{u}\otimes\mathbf{a} - \mathbf{a}\otimes\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}$$

где $\mathbf{a} = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}$. Следовательно,

$$\mathbf{a} = \mathbf{u}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}) - \mathbf{a}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})$$

Умножив скалярно правую и левую части равенства (2) на $\mathbf{u}$, получим

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{u} = u^2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})u^2 = 0$$

Подставив в (2) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{u} = 0$, найдем, что $u^2 = -1$ либо $\mathbf{a} = 0$. Первый случай $\left(u^2 = -1\right)$ означает, что любое поле подходящим образом нормированных 4-скоростей допускает перенос Ферми - Уокера вдоль себя. Второй случай означает, что векторы, касательные к любой конгруэнции геодезических, также допускают параллельный перенос Ферми - Уокера, даже если они не нормированы на -1. Правилу переноса Ли

$$\mathbf{0} = \mathscr{L}_{\mathbf{u}}\mathbf{u} \equiv [\mathbf{u},\mathbf{u}]$$

удовлетворяет любое векторное поле.

Реuекие 8.21. Рассмотрим 1-форму $\tilde{\mathrm{U}} = U_\alpha \mathrm{d}\widetilde{x}^\alpha$. Вычислим сначала $\mathrm{d}\mathscr{L}_{\mathrm{x}}\tilde{U}$:

$$\mathscr{L}_{\mathrm{x}}\tilde{\mathrm{U}} = \left(x^\alpha U_{\beta,\alpha} + U_\alpha x^\alpha{}_{,\beta}\right)\widetilde{\mathrm{d}x^\beta},$$
$$\mathrm{d}\left(\mathscr{L}_{\mathrm{x}}\tilde{\mathrm{U}}\right) = \left(x^\alpha U_{\beta,\alpha} + U_\alpha x^\alpha{}_{,\beta}\right), \gamma\widetilde{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}^\gamma \wedge \widetilde{\mathrm{d}}^\beta.$$

Затем вычислим $\mathscr{L}_{\mathbf{x}}(\mathbf{dU})$:

$$\mathrm{d}\tilde{\mathrm{U}} = U_{\alpha,\gamma}\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{x}^v \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^\alpha,$$

$$\mathscr{L}_x(\,\mathrm{d}\tilde{\mathbf{U}}) = \mathscr{L}_{\mathbf{x}}\left(U_{a,\gamma}\right)\widetilde{\mathrm{d}x^\gamma}\wedge\widetilde{\mathrm{d}x^\alpha} + U_{a,\gamma}\mathscr{L}_{\mathbf{x}}\left(\widetilde{\mathrm{d}x^\gamma}\right)\wedge\widetilde{\mathrm{d}x^\alpha} +$$

$$+ U_{a,\gamma}\widetilde{\mathbf{d}}^\gamma \wedge \mathscr{L}_{\mathbf{x}}\left(\widetilde{\mathbf{d}}^\alpha\right) =$$
$$= x^\tau U_{\alpha,\gamma\tau}\widetilde{\mathrm{d}}^\gamma \wedge \widetilde{\mathrm{d}}_\alpha + U_{\alpha,\gamma}x^\gamma{}_{,\tau}\widetilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{x}^\tau \wedge \widetilde{\mathrm{d}}x^\alpha +$$
$$+ U_{\alpha,xx^\alpha,\tau}\widetilde{\mathrm{d}x^\gamma}\wedge\widetilde{\mathrm{d}x^\tau} = \Big[\left(x^\tau U_{\beta,\tau} + U_\alpha x^\alpha{}_{,\beta}\right)_{,\gamma} -$$
$$-U_\alpha x^\alpha{}_{,\,,\beta\gamma}\Big]\,\widetilde{\mathbf{d}x^\gamma}\wedge\widetilde{\mathbf{d}}^\beta.$$

Переход от предпоследней строки к последней достигается простой заменой индексов. В силу симметричности частных производных и антисимметричности внешнего умножения последний член в скобках, стоящих в правой части соотношения (2), обращается в нуль. Сравнивая соотношения (1) и (2), для 1-форм получаем

$$\mathbf{d}\left(\mathscr{L}_{\mathbf{x}}\tilde{U}\right) = \mathscr{L}_{\mathbf{x}}(\mathbf{dU})$$

Примененный нами метод доказательства допускает непосредственное обобщение на случай p-форм.

Решение 8.22.

$(\nabla S)^{\hat{i}} = \tilde{\omega}^{\hat{i}}\cdot\nabla S = h_i\widetilde{\mathrm{d}}x^l\cdot\nabla S = h_l\partial S/\partial x^l$

Общее выражение для ротора должно иметь следующий вид:

$$(\nabla\times\mathbf{V})^i = |g|^{-1/2}\varepsilon^{i/k}V_{k;i} = |g|^{-1/2}\varepsilon^{i/k}V_{k,j},$$

поскольку это соотношение ковариантно и выполняется в локально плоском (декартовом) координатном репере. (Соответствующие свойства полностью антисимметричного тензора $\varepsilon^{i/k}$ см. в задачах 3.20 и 3.21). В ортонормированном репере

$(\nabla\times\mathbf{V})^{\hat{i}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}\hat{i}\cdot(\nabla\times\mathbf{V}) = h_i(\nabla\times\mathbf{V})^i = h_i\left(h_1h_2h_3\right)^{-\mathbf{1}}\varepsilon^{i/k}\partial\left(h_kV_{\hat{k}}\right)/\partial x^j$

Из решения задачи 7.7(ж) получаем

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = |g|^{-1/2}\left[|g|^{1/2}V^i\right]_{,\ell} = \left(h_1h_2h_3\right)^{-1}\left[\left(h_1h_2h_3\right)h_i^{-1}V_{\hat{i}}\right]_{,\ell}$$

Из решения задачи 7.7 (к) следует, что $\nabla^2 S$ можно представить в виде

$$\nabla^2 S = |g|^{-1/2}\left(|g|^{1/2}g^{\alpha\beta}S_{,\beta}\right)_{,\alpha} = \left(h_1h_2h_3\right)^{-1}\left[h_1h_2h_3h_i^{-2}S_{,l}\right]_{,l}.$$

Solution

8.23. Воспользуемся результатами, полученными в п. 2 и 3 решения 8.22, и применим их к $x^1 = r, x^2 = \vartheta, x^3 = \varphi$ и $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r\sin\vartheta$. (Для простоты мы будем придерживаться обычных обозначений и опустим знак -, указывающий физические компоненты.) Итак, имеем

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \overrightarrow{\mathrm{A}} &= \left(r^2\sin\vartheta\right)^{-1}\left[r^2\sin\vartheta h_l^{-1}A_i\right]_{,l} = \\
&= \left(r^2\sin\vartheta\right)^{-1}\left[\left(r^2\sin\vartheta A_r\right), r + \left(r\sin\vartheta A_\vartheta\right)_{,\theta} + rA_{\varphi,\varphi}\right], \\
(\nabla\times\mathbf{A})^r &= (r\sin\vartheta)^{-1}\left[\left(\sin\vartheta A_\varphi\right)_{,\theta} - A_{\theta,\varphi}\right], \\
(\nabla\times\mathbf{A})^\vartheta &= (r\sin\vartheta)^{-1}\left[A_{r,\varphi} - \left(r\sin\vartheta A_\varphi\right), r\right], \\
(\nabla\times\mathbf{A})^\varphi &= r^{-1}\left[\left(rA_\theta\right), r - A_{r,\theta}\right].
\end{aligned}$$

Л-8.24. О тензоре электромагнитного поля

Доказать, что если $F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;v}$, то $F_{[\mu v;\lambda]} = 0$.

Solution

8.24. Если воспользоваться дифференциальными формами и внешним дифференцированием, то задача становится тривиальной. Из первого соотношения получаем $\mathbf{F} = \mathbf{d}\tilde{\mathbf{A}}$, поэтому $\mathbf{dF} = \mathbf{dd}\tilde{A} = 0$ (оператор **dd** любую форму переводит в 0). Величины $F_{[\mu v;\lambda]}$ представляют собой не что иное, как компоненты дифференциала dF. Тем самым утверждение задачи доказано. Вся «Хитрость» состоит в том, что полная антисимметричность, присущая оператору d, «изгоняет» из задачи коэффициенты аффинной связности. «Покомпонентное» доказательство проводится без особого труда, но более громоздко.

L-8.25.

В произвольном пространственно-временно́м многообразии (не обязательно однородном или изотропном) выберем начальную пространственноподобную гиперповерхность S_I, зададим на ней произвольную координатную сетку $\left(x^1, x^2, x^3\right)$, выпустим из точек гиперповерхности ортогональные ей геодезические мировые линии и параметризуем их так, что $\left(x^1, x^2, x^3\right) = \text{const}$, $x^0 \equiv t = t_I + \tau$, где τ - собственное время вдоль каждой мировой линии (гиперповерхность S_l соответствует $\tau = 0$).

Доказать, что в этой системе координат («гауссовы нормальные координаты») метрика принимает синхронную форму:

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j.$$

Solution 8.25.

В произвольной системе координат

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta.$$

Поскольку вдоль любой геодезической $x^i = \text{const}$, то вдоль любой геодезической $ds^2 = g_{00}dt^2$. Но для геодезических $ds^2 = -d\tau^2$, поэтому равенство $g_{00} = -1$ выполняется всюду. Пусть $\mathbf{e}_\alpha$ - векторы координатного репера и $\mathbf{u} = d/d\tau$ - поле векторов, касательных к геодезическим (т. е. $\mathbf{u} = \mathbf{e}_0$). Поскольку вектор $\mathbf{u}$ ортогонален гиперповерхности S_I, то при $\tau = 0$

и

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_0\cdot\mathbf{e}_l = g_{0t} = 0$$

$$d\left(\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_i\right)/d\tau = \nabla_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_l\right) = 0 + \mathbf{u}\cdot\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_l = \mathbf{u}\cdot\nabla_{\mathrm{e}_i}\mathbf{u}.$$

Здесь мь воспользовались тем, что кривые геодезические ($\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0$), .а $\mathbf{e}_l$ и $\mathbf{u}$ образуют координатный репер ($[\mathrm{e}_l, \mathbf{u}] = 0$). Но скаляр- ное произведение $\mathbf{u}\cdot\nabla_{\mathbf{e}_i}\mathbf{u}$ равно нулю, т. е.

$$\mathbf{u}\cdot\nabla_{\mathrm{e}_i}\mathbf{u} = \frac{1}{2}\nabla_{\mathrm{e}_l}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) = 0$$

поэтому всюду $\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_l = g_{0l} = 0$.

L-8.26.

а) Доказать, что если $g_{\mu\nu}$ и $\bar{g}_{\mu\nu}$ - компоненты двух симметричных тензоров, то

$$S^{\lambda}_{\mu\nu} = \bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$$

- компоненты тензора (Γ и $\bar{\Gamma}$ - символы Кристоффеля, построенные из компонент тензоров $\mathbf{g}$ и $\overline{\mathbf{g}}$, как обычно).

б) Предположим, что тензоры $g_{\mu\nu}$ и $\bar{g}_{\mu\nu}$ обладают одними и теми же геодезическими. Доказать, что в этом случае

$$S^{\lambda}_{\mu\nu} = \delta^{\lambda}_{\mu}\psi_v + \delta^{\lambda}{}_{\nu}\psi_{\mu},$$

где ψ_{μ} - компоненты некоторого вектора.

Ретение 8.26.

а) С точки зрения современной дифференциальной геометрии коэффициенты аффинной связности $\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$ и $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ позволяют покомпонентно описать действие «механизмов», отображающих два вектора и 1-форму в число, т. е.

$$(\text{число}) \ = \Gamma^{\lambda}_{\mu v}\sigma_{\lambda}u^{\mu}\boldsymbol{v}^{v} \equiv \langle\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u}\rangle$$

где ковариантная производная взята по той метрике, в которой вычислены коэффициенты аффинной связности Γ. Тензор соответствует «механизму", линей ному по всем индексам (т. е. по всем его аргументам). Сами по себе коэффициенты аффинной связности Γ или $\bar{\Gamma}$ не являются тензорами, поскольку

$$f\langle\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u}\rangle \neq \langle\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \nabla_{\mathbf{v}}(f\mathbf{u})\rangle = f\langle\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u}\rangle + \langle\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}\rangle\nabla_{\mathbf{v}}f$$

(для $\bar{g}$ справедливы аналогичные формулы, в которых операторы ∇ заменены операторами $\bar{\nabla}$). Однако если из соотношения для f вычесть соотношение для $\bar{g}$, то член $\langle\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{u}\rangle\left(\nabla_{\mathbf{v}} - \bar{\nabla}_{\mathbf{v}}\right)f$, нарушающий линей ность, обращается в нуль, поскольку все ковариантные производные, действуя на скалярную функцию, приводят к одному и тому же результату, т. е. их можно рассматривать как производные по направлению. Следовательно, $S^{\lambda}_{\mu v}$ - тензор.

б) Мы не можем сравнивать уравнения геодезических для $\mathbf{g}$ и $\overline{\mathrm{g}}$ непосредственно, поскольку они содержат различные аффинные параметры τ и $\bar{\tau}$. Если t-произвольная функция от τ, то в результате замены переменных уравнение геодезических принимает вид

$$\frac{d^2x^{\lambda}}{dt^2} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{dx^{\mu}}{dt}\frac{dx^{\nu}}{dt} - \frac{dx^{\lambda}}{dt}\frac{d^2\tau}{dt^2}\frac{dt}{d\tau} = 0$$

Чтобы исключить $d\tau/dt$, умножим это уравнение на dx^{α}/dt и. антисимметризовав по α и λ, получим

$$u^{\alpha}\frac{du^{\lambda}}{dt} - u^{\lambda}\frac{du^{\alpha}}{dt} + \left(\Gamma^{\lambda}_{\mu v}u^{\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu v}u^{\lambda}\right)u^{\mu}u^{v} = 0$$

где $u^{\alpha} \equiv dx^{\alpha}/dt$. Если мировые линии $u^{\alpha}(t)$ являются геодезическими и для g, и для $\bar{g}$, то это уравнение должно выполняться и при замене Γ на $\vec{\Gamma}$. Вычитая из первого уравнения второе. находим

$$\left(\delta^{\alpha}_{\sigma}S^{\lambda}_{\mu v} - \delta^{\lambda}_{\sigma}S^{\alpha}_{\mu v}\right)u^{\sigma}u^{\mu}u^{v} = 0$$

отКуда

$$\delta^{\alpha}_{(\sigma}S^{\lambda}_{\mu)v} - \delta_{(\sigma^{\lambda}}S_{\mu)v} = 0$$

Свернув это тензорное уравнение по α и v, получим

$$S^{\lambda}_{\alpha\mu} = \delta^{\lambda}_{\sigma}\Phi_{\mu} + \delta^{\lambda}_{\mu}\Phi_{\alpha}$$
$$\Phi_{\alpha} \equiv \frac{1}{5}S_{\alpha\mu\alpha}.$$

ТСМ. также Eisenhart L. P., Riemannian Geometry (Princeton University Press, 1962), Sec. 40.]$^{1)}$

Решение 8.27. Вычисление коэффициентов связности в координатном репере приводит к громоздкому решению. Мы воспольвуемся методом «l-форм вращения» (подробности см. в разделе 14.5 книги [1]). Выберем ортонормированый репер следующим образ0М:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{t}} = e^{\tilde{\alpha}\mathrm{d}t},$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{r}} = e^{\hat{\beta}}\widetilde{\mathbf{d}r},$$
$$\tilde{\omega}\hat{\theta} = e^{v}\widetilde{\boldsymbol{\vartheta}},$$
$$\tilde{\omega}^{\hat{\varphi}} = e^{\gamma}\sin\ d.$$

Ключевыми формулами служат определение $\tilde{\omega}\hat{\alpha}\hat{\beta}$,

$$d\tilde{\omega}\hat{\alpha} = -\tilde{\omega}\hat{\omega}_{\hat{\beta}}^{\hat{\beta}} \bigwedge \tilde{\omega}\hat{\beta}$$

ж соотношение, задающее связь дифференциальных форм $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ с символами Кристоффеля,

$$\Gamma\hat{\boldsymbol{\nu}}\hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\lambda}^{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}\hat{\boldsymbol{\nu}}\hat{\boldsymbol{\mu}}$$

Запишем эти формулы в заданной метрике. Пусть точка ознаqает $\partial/\partial t$, а штрих - $\partial/\partial r$:

$$\mathrm{d}\tilde{\omega}^{\hat{t}} = e^{\alpha}\alpha'\tilde{\mathrm{d}}r \wedge \tilde{\mathrm{d}}t = \alpha' e^{-\beta}\tilde{\omega}^{\hat{r}} \wedge \tilde{\omega}^{t},$$

$$\mathbf{d}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{r}} = e^{\beta}\dot{\boldsymbol{\beta}}\widetilde{\boldsymbol{d}}t \wedge \widetilde{\boldsymbol{d}}r = e^{-\alpha}\dot{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{t}} \wedge \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{r}},$$

$$\mathrm{d}\tilde{\omega}^{\hat{\theta}} = e^{\gamma}\dot{\gamma}\widetilde{\mathrm{d}t} \bigwedge \widetilde{\mathrm{d}\vartheta} + e^{\gamma}\gamma'\widetilde{\mathrm{d}r} \wedge \widetilde{\mathrm{d}} =$$
$$= e^{-\alpha}\dot{\gamma}\tilde{\omega}^{\hat{t}} \bigwedge \tilde{\omega}^{\hat{\theta}} + e^{-\boldsymbol{\beta}}\gamma'\tilde{\omega}^{\hat{r}} \bigwedge \tilde{\omega}\hat{\theta}$$

$$\mathbf{d}\tilde{\omega}\hat{\varphi} = e^{\gamma}\dot{\gamma}\sin\vartheta\widetilde{\mathbf{d}t} \wedge \widetilde{\mathbf{d}\varphi} + e^{\gamma}\gamma'\sin\vartheta\widetilde{d\vartheta} \wedge \widetilde{\mathbf{d}\varphi} +$$

$$+e^{\gamma}\cos\hat{\vartheta}\widetilde{d\vartheta} \wedge \widetilde{d\varphi} = e^{-\alpha}\dot{\gamma}\tilde{\omega}\hat{t} \wedge \tilde{\omega}\hat{\Phi} +$$

$$+ e^{-\beta}\gamma'\tilde{\omega}^{\hat{r}} \wedge \tilde{\omega}\hat{\varphi} + \operatorname{ctg}\vartheta e^{-}\tilde{\omega}\hat{\hat{\theta}} \wedge \hat{\omega}\hat{\omega}.$$

Имеется перевод: Эйзенхарт Л. П. Риманова геометрия, -, . ИЛ, 1948, \$40, $-Прим.$ перев. Но

$$\mathbf{d}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\alpha}} = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\hat{\beta}}^{\hat{\alpha}} \bigwedge \tilde{\tilde{\omega}}\hat{\boldsymbol{\beta}} \quad \text{и} \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\hat{\beta}\hat{\alpha}},$$

где подъем и опускание индексов производится при помощи тензора $\eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$. При $\hat{\alpha} = \hat{t}$ получаем

$$\mathbf{d}\tilde{\omega}^{\hat{t}} = -\tilde{\omega}^{\hat{t}}\hat{r} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{r}} - \tilde{\omega}^{\hat{t}}\hat{\vartheta} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\vartheta}} - \tilde{\omega}^{\hat{t}}\hat{\varphi} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\varphi}}.$$

Сравнивая это соотношение с соотношением (1), можно высказать предположение о том, что

$$\tilde{\omega}^{\hat{t}}\hat{r} = \tilde{\omega}^{\hat{r}}\hat{t} = \alpha' e^{-\beta}\tilde{\omega}^{\hat{t}} + K_1\tilde{\omega}^{r_r},$$
$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{t}}\hat{\boldsymbol{v}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\vartheta}}\hat{t} = K_z\tilde{\boldsymbol{\omega}}\hat{\theta},$$
$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\imath}}{}_{\hat{\Phi}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\varphi}}\hat{\boldsymbol{t}} = K_{\mathbf{3}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\varphi}},$$

где K_1, K_2, K_3 - функции, которые требуется найти. Аналогичным образом из соотношения (2) следует

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}\hat{r}_{\hat{t}} = e^{-\alpha\dot{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{r}} + K_4\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{t}},$$
$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{r}}\hat{\vartheta} = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}\hat{\vartheta}_{\hat{r}} = K_5\tilde{\boldsymbol{\omega}}\hat{\vartheta},$$
$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{r}}\hat{\varphi}' = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}\hat{\varphi}_{\hat{r}} = K_6\tilde{\boldsymbol{\omega}}\hat{\varphi}.$$

Из соотношения (3) получаем

$$\tilde{\omega}\hat{\omega}_{\hat{\imath}} = e^{-\alpha}\dot{\gamma}\tilde{\omega}\hat{\vartheta},$$
$$\tilde{\omega}\hat{\vartheta}_{\hat{r}} = e^{-\beta}\gamma'\tilde{\omega}\hat{\vartheta},$$
$$\tilde{\omega}\hat{\vartheta}_{\hat{\varphi}} = -\tilde{\omega}\hat{\varphi}_{\hat{v}} = K_7\tilde{\omega}\hat{\omega},$$

а из соотношения (4) -

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}\hat{\varphi}\hat{\imath} = e^{-\alpha}\dot{\boldsymbol{\gamma}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\hat{\varphi},$$
$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}\hat{\varphi}\hat{r}' = e^{-\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\gamma}'\tilde{\boldsymbol{\omega}}\hat{\varphi},$$
$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}\hat{\varphi}\hat{\vartheta}^{=\mathrm{ctg}}\boldsymbol{\vartheta}e^{-\boldsymbol{\nu}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\hat{\varphi}.$$

Сравнивая соотношения (5) - (16), находим

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{t}}\hat{r} = \alpha' e^{-\beta}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\hat{t} + \dot{\beta}e^{-\alpha}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\hat{r},$$
$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{t}}\hat{\theta} = e^{-\alpha}\dot{\gamma}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\hat{\theta},$$
$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{t}}\hat{\varphi} = e^{-\alpha}\dot{\gamma}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\hat{\varphi},$$
$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{r}}\hat{\theta} = -e^{-\beta}\gamma'\tilde{\boldsymbol{\omega}}\hat{\boldsymbol{\theta}},$$
$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{r}}\hat{\varphi} = -e^{-\beta}\gamma'\tilde{\boldsymbol{\omega}}\hat{\varphi},$$
$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\vartheta}}\hat{\varphi} = -\operatorname{ctg}\vartheta e^{-\psi}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\hat{\varphi}.$$

Но

$$\Gamma^{\hat{\lambda}}_{\hat{\boldsymbol{u}}\hat{\omega}}\hat{\lambda} = \tilde{\omega}\hat{\boldsymbol{v}}\hat{\imath}$$

поэтому от нуля отличны лишь коэффициенты связности

$$\Gamma^{\hat{t}}_{\hat{t}}\hat{t} = \Gamma^{\hat{r}}\hat{t}\hat{t} = \alpha' e^{-\beta},$$
$$\Gamma^{\hat{r}}_{\hat{t}} = \Gamma^{\hat{t}\hat{r}}_{\hat{r}} = \dot{\beta}e^{-\alpha},$$
$$\Gamma_{\hat{t}\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}} = \Gamma_{\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}} = \Gamma_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = \Gamma^{\hat{\varphi}}{}_{\hat{t}\hat{\varphi}} = \dot{\gamma}e^{-\alpha},$$

(??? перепишу формулу, она не совсем верная)

$$\Gamma_{\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}} = -\Gamma^{\hat{\theta}}_{\hat{r}\hat{\theta}} = \Gamma^{\hat{r}}\hat{\varphi}\hat{\varphi} = -\Gamma\hat{\varphi}_{\hat{r}\hat{\varphi}} = -\gamma' e^{-\beta},$$

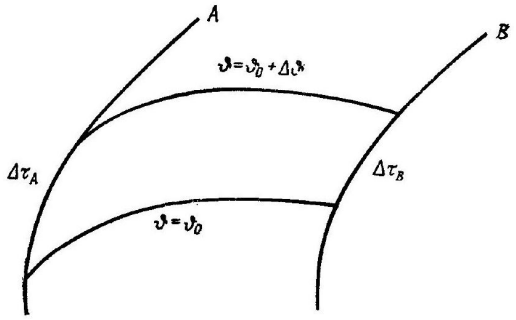
(эту тоже перепишу потом)

$$\Gamma\hat{\vartheta}_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = -\Gamma\hat{\varphi}_{\hat{\vartheta}\hat{\varphi}} = -\operatorname{ctg}\vartheta e^{-\gamma}.$$

Решение 8.28. Примем за исходное соотношение

$$1 + z = \Delta\tau_A/\Delta\tau_B$$

Чтобы доказать эквивалентность этого и другого способа измерения красного смещения, напомним, что 4-импульс $\mathbf{p}$ пропорцио-



Фur. 18.

нален волновому вектору k - градиенту поверхностей постоянной фазы:

$$\mathbf{k} = \nabla\vartheta$$

Поскольку $\mathbf{k}$ - изотропный вектор, то

$$0 = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\nabla\vartheta = \nabla_{\mathbf{k}}\vartheta$$

где фаза ϑ постоянна вдоль лучей. Рассмотрим два луча, отличающихся по фазе на $\Delta\vartheta$. Наблюдатель A (фиг. 18) вычисляет $\Delta\boldsymbol{\vartheta}$ следующим образом:

$$\Delta\vartheta = \vartheta(\tau + \Delta\tau_A) - \vartheta(\tau) = (\Delta\tau_A)\,\nabla_{\mathbf{u}_A}\vartheta = (\Delta\tau_A)\,\mathbf{u}_A\cdot\mathbf{k}$$

Наблюдатель B вычисляет ту же разность фаз $\Delta\vartheta$ иначе:

$$\Delta\vartheta = (\Delta\tau_B)\,\mathbf{u}_B\cdot\mathbf{k}$$

(волновой вектор $\mathbf{k}$ взят в точке B). Поскольку наблюдатели A и B получают одну и ту же разность фаз $\Delta\vartheta$, то

$$\frac{\Delta\tau_A}{\Delta\tau_B} = \frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{k})_B}{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{k})_A} = \frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{p})_B}{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{p})_A}$$

Тем самым эквивалентность обоих способов измерения красного смещения доказана.

13.2.4 Problems about Curvature

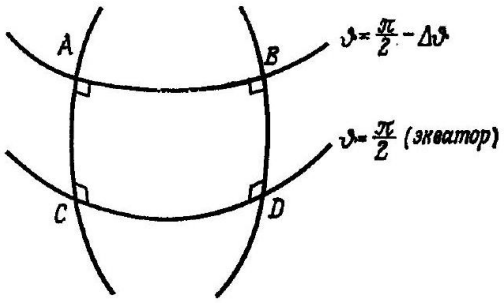
L-9.1. О сферической геометрии

На сфере радиуса a локальную декартову систему координат можно попытаться построить двумя способами: а) из геодезических, б) из (ортогональных) линий постоянной долготы и широты. Оба способа приводят к отклонениям от хорошей декартовой системы координат (например, сумма углов «прямоугольника», образованного линиями координат, отлична от 2π, а разности длин «параллельных» сторон не равны нулю).

Доказать, что эти отклонения по порядку величины сравнимы с отношением (площадь прямоугольника) $/a^2$.

Решение 9.1.

Если координатный «прямоугольник» построен из геодезических, то, проведя геодезическую диагональ, его можно разбить на два геодезических треугольника. Угловой избыток треугольника, образованного дугами больших кругов, равен $\pi \cdot [$ площадь $/a^2]$. Поскольку сумма внутренних углов координатного «прямоугольника» равна сумме внутренних углов двух треугольников, то угловой избыток координатного «прямоугольника» равен $\pi \cdot [$ площадь $/a^2]$.



Фиг. 19.

Координатный «прямоугольник» из параллелей (линий широты) и меридианов (линий долготы) удобнее всего строить вблизи экватора (фиг. 19). Угловой избылок там равен нулю и $\overline{AC} = \overline{BD}$, но поэтому

$$\overline{CD} - \overline{AB} = a\Delta\varphi - a\Delta\varphi \sin\left(\frac{\pi}{2} - \Delta\vartheta\right) \approx a\Delta\varphi \frac{1}{2}(\Delta\vartheta)^2,$$

$$\frac{\overline{CD} - \overline{AB}}{\overline{AC}} \approx \frac{1}{2}\Delta\varphi\Delta\vartheta \approx \frac{1}{2}\frac{\text{площадь}}{a^2}.$$

В обоих примерах отклонение от плоскости измеряется кривизной сферы $1/a^2$.

L-9.2. Об n-мерном тензоре Римана

Сколько независимых компонент имеет тензор Римана в n-мерном пространстве?

Solution 9.2.

Антисимметричность тензора Римана $R_{\alpha\beta\gamma}$ по индексам $(\alpha\beta)$ и $(\gamma\delta)$ означает, что существует $M = n(n-1)/2$ способов выбора нетривиальных пар $(\alpha\beta)$ и аналогично M способов выбора нетривиальных пар $(\gamma\delta)$.

Поскольку тензор Римана симметричен относительно перестановки пар индексов $(\alpha\beta)$ и $(\gamma\delta)$, то с учетом этого набор индексов $\alpha\beta\gamma\delta$ можно выбрать $M(M+1)/2$ способами.

Кроме того, тензор Римана обладает циклической симметрией:

$$A_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} = 0.$$

Симметричность тензора Римана относительно перестановок пар индексов гарантирует, что сумма $A_{\alpha\beta\gamma 8}$ полностью антисимметрична, поэтому условие $A_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ нетривиально только в том случае, если все индексы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ различны. Число дополнительных условий совпадает с числом сочетаний из n объектов по 4, т. е. $= n!/(n-4)!4!$. (При $n < 4$, когда симметричность тензора Римана относительно перестановок пар индексов не налагает дополнительных ограничений, эта формула дает 0 и поэтому остается верной.)

Итак, число независимых компонент тензора Римана равно

$$\frac{1}{2}M(M+1) - n!/(n-4)!4! = n^2\left(n^2-1\right)/12.$$

L-9.3. Вычисление тензора Римана (!?!??!?)

Математические манипуляции с тензором Римана нередко проводят при помощи ЭВМ. Вместо того чтобы производить вычисления с компонентами $R(i,j,k,l)$, где каждый из индексов i,j,k,l принимает значения $0,1,2,3$, и вводить в память машины $4^4 = 256$ компонент тензора, можно воспользоваться симметриями тензора Римана и существенно уменьшить размеры вводимого в машинную память массива. Написать подпрограмму, в которой все компоненты тензора Римана вводятся в машинную память в виде массива, содержащего не более 21 элемента.

Solution 9.3.

Для решения задачи необходимо каким-нибудь способом канонически упорядочить 21 независимую компоненту тензора Римана и каждому набору из 4 индексов I,J,K,L присвоить номер $N \leqslant 21$. Именно это и выполняет приводимая ниже программа, которая присваивает очередной компоненте тензора Римана $R(I,J,K,L)$ вычисленное значение $R(N)$, где $1 \leqslant N \leqslant \leqslant 21$.

```
READ I, J, K, L
SET SIGN = I
IF I = J OR K = L SET RIEMANN = 0 AND RETURN
IF I > J EXCHANGE I, J AND SET SIGN = — I
IF K > L EXCHANGE K, L AND SET SIGN = — SIGN
SET NI = (5 * I — I * I)/2 + J
SET N2 = (5 * K — K * K)/2 + L
IF NI > N2 EXCHANGE NI, N2
SET N = (13 * NI — NI * NI — I2)/2 + N2
SET RIEMANN = R (N) * SIGN
RETURN
```

(тут отдельно нужно будет подумать про прогу!!! когда-то потом займусь этим.)

L-9.4. геометрия 2-сферы

Вычислить все не обращающиеся в нуль компоненты тензора Римана $R_{ijkl}(i,j,k,l = \vartheta,\varphi)$ для метрики 2-сферы:

$$ds^2 = r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)$$

Solution

В 2-мерном пространстве (см. задачу 9.2) существует лишь одна независимая компонента тензора Римана. В качестве нее можно выбрать

$$R_{\vartheta\varphi\vartheta\varphi} = g_{\vartheta\vartheta}R^{\vartheta}_{\varphi\vartheta\varphi} = g_{\vartheta\vartheta}\left\{\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi},\vartheta - \Gamma^{\vartheta}_{\vartheta},\varphi + \Gamma^{\vartheta}_{\vartheta\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\varphi\varphi} - \Gamma^{\vartheta}_{\varphi\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\varphi\vartheta}\right\}.$$

Поскольку для заданной метрики $g_{\ominus\bullet} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2\sin^2\vartheta$, то в нуль не обращаются лишь символы Кристоффеля:

$$\Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta, \Gamma_{\vartheta\varphi} = \operatorname{ctg}\vartheta$$

и, следовательно,

$$R_{\vartheta\varphi\theta\varphi} = r^2\sin^2\vartheta = R_{\varphi\vartheta\varphi\vartheta} = -R_{\vartheta\varphi\varphi\vartheta} = -R_{\varphi\vartheta\theta\varphi}$$

L-9.5. Двумерное пространство-время

Найти символы Кристоффеля и компоненты тензора кривизны Римана в 2-мерном пространстве-времени:

$$ds^2 = dv^2 - v^2du^2.$$

Рещежие 9.5.

В нуль не обращаются только символы Кристоффеля $\Gamma^{v}_{uu} = v$ и $\Gamma^{u}_{uv} = \Gamma^{u}_{vu} = v^{-1}$, поэтому

$$\begin{aligned} R_{vuvu} = R^{v}_{uvu} &= \Gamma^{v}_{uu,v} - \Gamma^{v}_{vu,u} + \Gamma^{v}_{v\alpha}\Gamma^{\alpha}_{uu} - \Gamma^{v}_{u\alpha}\Gamma^{\alpha}_{uv} = \\ &= 1 - 0 + 0 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Поскольку в 2-мерном пространстве тензор Римана имеет лишь одну независимую компоненту, то $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ и пространство-время плоское (в задаче 6.1 это было доказано при помощи преобразования координат).

L-9.6. Кривизна на торе

Ввести систему координат на торе (2-мерной поверхности «бублика» в 3-мерном евклидовом пространстве). Вычислить все компоненты $g_{\mu\nu}, \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ и $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Solution

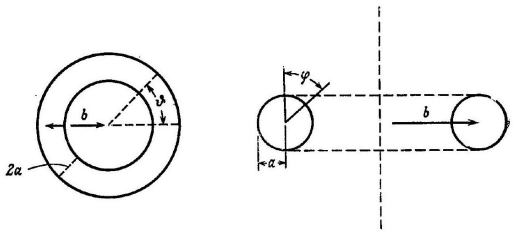
9.6. Из фиг. 20 видно, что два ортогональных бесконечно малых перемещения имеют величину $ad\varphi$ и $(b+ +a\sin\varphi)d\vartheta$, поэтому
или

$$ds^2 = a^2 d\varphi^2 + (b + a\sin\varphi)^2 d\vartheta^2$$

$$g_{\vartheta\vartheta} = (b + a\sin\varphi)^2, \quad g_{\varphi\varphi} = a^2, g_{\partial\varphi} = g_{\varphi\vartheta} = 0.$$

Не обращающиеся в нуль символы Кристоффеля Γ находим поформулам.

$$\Gamma_{\vartheta\vartheta} = -a^{-1}(b + a\sin\vartheta)\cos\varphi,$$
$$\Gamma_{\theta\varphi} = \Gamma_{\varphi\vartheta} = a\cos\varphi(b + a\sin\varphi)^{-1}.$$



Фиг. 20.
В 2-мерном пространстве тензор Римана имеет лишь одну независимую компоненту. Выбрав в качестве нее $R_{\varphi 0\varphi\theta}$, по стандартной формуле получим

$$R_{\varphi\theta\varphi\theta} = a\sin\varphi(b + a\sin\varphi)$$

L-9.7.

В пространстве с размерностью, меньшей 4, тензор Римана удается записать весьма просто.
а) Найти тензор Римана в 1-мерном пространстве.
б) Выразить тензор Римана в 2-мерном пространстве через метрический тензор и скаляр Риччи.
в) Выразить тензор Римана в 3-мерном пространстве через метрический тензор и скаляр Риччи.

реиение 9.7.

а) В 1-мерном пространстве тензор Римана может иметь лишь одну хомпоненту R_{111}. Из симметрий тензора Римана следует, что эта компонента должна быть равна нулю.
б) В 2-мерном пространстве соотношения симметрии между компонентами тензора Римана в любой системе координат можно записать в виде
Но

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = (g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})\, f$$

$$R = R^{\alpha\beta}_{\alpha\beta} = \left(g^{\alpha}_{\alpha}g^{\beta}_{\beta} - g^{\alpha}_{\beta}g^{\beta}_{\alpha}\right) f = (4-2)f = 2f,$$

поэтому в любой системе координат

$$R_{\alpha\beta\gamma 8} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})\, R$$

в) В 3-мерном пространстве тензор Римана имеет шесть незавнсимых компонент Поскольку шесть независимых компонент тензора Риччи можно представить в виде шести независимых линейных комбинаций компонент тензора Римана, то, обратив эти комбинации, мы выразим независимые компоненты тензора Римана через компоненты тензора Риччи.
Чтобы тензор Римана имел правильные симметрии, должно Выполняться соотношение

$$R_{\mu\upsilon\lambda\sigma} = a\,(g_{\mu\lambda}R_{\upsilon\sigma} - g_{\upsilon\lambda}R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\upsilon\lambda} + g_{\upsilon\sigma}R_{\mu\lambda}) + b\,(g_{\mu\lambda}g_{\upsilon\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda})\, R.$$

Коэффициенты a и b мы найдем, свернув тензор Римана:

$$R_{v\sigma} = a\left(3R_{v\sigma} - R_{v\sigma} - R_{v\sigma} + g_{v\sigma}R\right) + b\left(3g_{v\sigma} - g_{v\sigma}\right)R$$

откуда

$$a = 1, \quad b = -\frac{1}{2}$$

Для проверки произведем еще одну свертку:

$$R = a(R + 3R) + b \cdot 6R = (4 - 3)R.$$

L-9.8. Знакомое соотношение

Доказать соотношение

$$2V_{\alpha;[vx]} \equiv V_{\alpha;vx} - V_{\alpha;xv} = V_\sigma R^\sigma_{\alpha vx}$$

и обобщить его для коммутатора вторых производных тензора произвольного ранга $T_{\alpha\ldots\ldots\ldots}$.

Solution 9.8.

Докажем соотношение для тензора произвольного ранга. Выберем локально плоскую систему координат так, чтобы в некоторой точке все символы Кристоффеля (но не их производные!) обращались в нуль. В этой точке

$$R^\lambda{}_{\gamma vx} = \Gamma^\lambda_{\gamma x,v} - \Gamma^\lambda_{\gamma v,x} = -2\Gamma^\lambda{}_{\gamma[v,k]}$$

и

$$\left(T_{\alpha\ldots}{}^{\beta\ldots}\right)_{;vx} = \left(T_{\alpha\ldots\ldots\ldots,v} + T_{\alpha\ldots}{}^{\sigma}{}_{\ldots}\Gamma^\beta{}_{\sigma v} + \ldots - T_{\sigma\ldots}{}^{\beta}{}_{\ldots}\Gamma^\sigma{}_{\alpha v} - \ldots\right)_{,x} =$$

$$= T_{\alpha\ldots}{}^{\beta}\cdots_{,vx} + T_{\alpha\ldots}{}^{\sigma}\cdots^{\beta}\,\Gamma_{\sigma v,x} + \ldots - T_{\sigma\ldots}{}^{\beta}\cdot\Gamma^\sigma_{\alpha v,x} - \ldots\ldots$$

Следовательно,

$$2\left(T_{\alpha\ldots}{}^{\beta}{}_{\cdot}\right)_{;[vx]} = -T_{\alpha\ldots}{}_{\cdot}{}^{\sigma}\cdot R^\beta_{\sigma vx} - \therefore + T_{\sigma\ldots}{}^{\beta}{}_{\ldots}R^\sigma_{\alpha vx} + \ldots$$

Поскольку это соотношение ковариантно, то оно выполняется в любой системе координат.

Solution

9.9. Вторые производные скаляра можно представить в виде

$$S_{;\alpha\beta} = (S_{,\alpha})_{;\beta} = S_{,\alpha\beta} - S_{,\sigma}\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}$$

это выражение симметрично по α и β.
Чтобы исследовать третьи производные, воспользуемся (как и в задаче 9.8) локально плоскими координатами. В них

$$S_{;\alpha\beta\gamma} = \left(S_{,\alpha\beta} - S_\sigma\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\right)_{,\psi} = S_{,\alpha\beta\gamma} - S_\sigma\Gamma^\sigma_{\alpha\beta,\gamma} = S_{;(\alpha\beta)\gamma}$$

Из этого выражения и из задачи 9.8 мы также получаем

$$S_{;\alpha[\beta\gamma]} = \frac{1}{2}S_{;\sigma}R^\sigma_{\alpha\beta\gamma}$$

Solution

9.10. Образуем тензор

$$C^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} \equiv A^{\alpha\beta}_{;\mu\nu} - A^{\alpha\beta}{}_{iv\mu}$$

Пользуясь решением задачи 9.8, запишем его в виде
(??????)
откуда

$$C^{\alpha\beta}_{\mu v} = -A^{\sigma\beta}R^\alpha_{\sigma\mu\nu} - A^{\alpha\sigma}R^\beta{}_{\sigma\mu v}$$

$$C^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = -A^{\sigma v}R^\mu_{\sigma\mu\nu} - A^{\mu\sigma}R^v_{\sigma\mu\nu} = -A^{\sigma v}R_{\sigma v} + A^{\mu\sigma}R_{\sigma\mu} = 0$$

Решение 9.11. Выберем в исходной точке P локально плоские координаты. Тогда в точке P символы Кристоффеля $\Gamma_{\beta\psi} = 0$, но после перемещения на вектор $\mathbf{u}$

$$\Gamma^{\alpha_{\beta\gamma}}_{\beta Y} = \Gamma_{\beta\gamma,8} u^{\delta}$$

Когда мы параллельно переносим вектор A из точки P на вектор u (фиг. 21), то компоненты вектора A принимают следующие значения:
[A (смещенный на $\mathbf{u}$) $]^{\alpha} = A^{\alpha} + A^{\alpha}{}_{,} u^{\beta} =$

$$= A^{\alpha} + A^{\alpha}_{;\beta} u^{\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} A^{\gamma^{\beta}} u^{\beta} = A^{\alpha}.$$

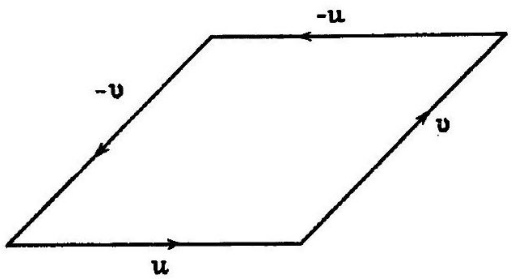
После параллельного переноса на вектор $\mathbf{v}$ компоненты вектора A становятся равными
[A (смещенный на $\mathbf{u}$, а затем на $\mathbf{v}$)$]^{\alpha} =$

$$= A^{\alpha} + A^{\alpha} : \boldsymbol{\beta}^{\beta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta} A^{\gamma\,\beta} =$$
$$= A^{\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta} A^{\gamma_{\vartheta}\beta} = A^{\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta,\delta} A^{\gamma^{\beta}} u^{\delta}.$$

В ту же самую точку мы могли бы прийти, обойдя две другие стороны параллелограмма, при этом
[A (смещенный на-v, а затем на-u) $]^{\alpha} =$

$$= A^{\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta,\delta} A^{\gamma} u^{\beta} v^{\delta}.$$

Полное приращение вектора A при обходе по замкнутому контуру



иг. 21.
равно разности между первым и вторым выражением:

$$\delta A^{\alpha} = -\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta,\delta} A^{\gamma} v^{\beta} u^{\delta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta,\delta} A^{\gamma} u^{\beta} v^{\delta} = -R^{\alpha}{}_{\gamma\delta\beta} A^{\gamma} \vartheta^{\beta} u^{\delta}$$

Реиение 9.12.
а) Рассмотрим сначала линейность по A. Ясно, что
Кроме того,

$$\mathbf{R}\,(A_1 + A_2, B)\,C = R\,(A_1, B)\,C + R\,(A_2, B)\,C.$$

$$\nabla_{fA}\nabla_B - \nabla_B\nabla_{fA} - \nabla_{[f\mathbf{A},\mathbf{B}]} =$$
$$= f\nabla_A\nabla_B - f\nabla_B\nabla_A - (\nabla_B f)\,\nabla_A - \nabla_{f[A,B]} - \mathbf{A}\nabla_{BF}.$$

Два «лишних» члена компенсируются, и мы получаем

$$R(fA, B)C = fR(A, B)C.$$

Нетрудно доказать, что оператор $\mathbf{R}(\mathbf{A}, \mathbf{B})\mathbf{C}$ в точке P зависит лишь от значения, принимаемого аргументом A в точке P, а не от характера изменения A в окрестности точки P. Пусть $f(P) = 0$. Из соотношения (2) следует, что если в точке P аргумент A оператора $\mathbf{R}$ равен нулю, то и сам оператор равен нулю. Пусть $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A}_2$ - два векторных поля, совпадающих в точке P, но отличающихся в каких-нибудь других точках. Из соотношения (1) получаем $\mathbf{R}\,(\mathbf{A}_1,\ \mathrm{B})\ \mathrm{C} - \mathrm{R}\,(\mathrm{A}_2\ \mathrm{B})\ C = R\,(A_1 - A_2\ \mathrm{B})\ \mathrm{C} = 0$ Тем самым доказано, что оператор $\mathbf{R}$ зависит лишь от значения, принимаемого аргументом A в точке P (по симметрии доказательство распространяется и на аргумент B). Зависимость оператора $\mathbf{R}$ от значения, принимаемого аргументом $\mathbf{C}$ в точке P, доказывается аналогично.
б) Поскольку существенны лишь значения, принимаемые аргументами $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ в точке P, то все три аргумента можно произвольно выбрать ковариантно постоянными в окрестности точки P. Тогда

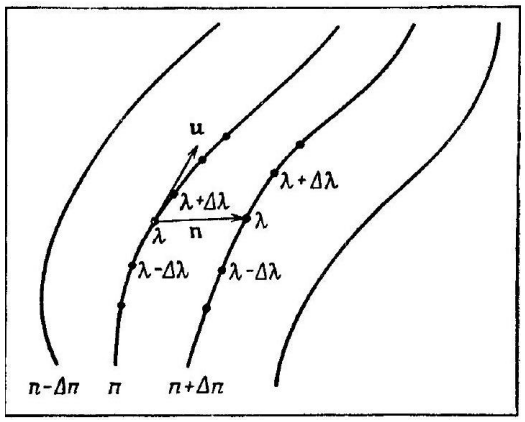
$$(\mathrm{R(A}, \mathbf{B})\mathrm{C})^{\alpha} = (\nabla_{\mathbf{A}}\nabla_{\mathbf{B}}\mathrm{C} - \nabla_{\mathbf{B}}\nabla_{\mathbf{A}}\mathbf{C})^{\alpha} =$$
$$= 2A^{[\sigma}\left(B^{\lambda]}C^{\alpha}; \lambda\right)_{;\sigma} = 2A^{\sigma}B^{\lambda}C^{\alpha}; [\lambda; \sigma]\cdot$$

По доказанному в решении 9.8 это выражение равно

$$R^{\alpha}{}_{\mu\lambda\sigma} C^{\mu} A^{\lambda} B^{\sigma}.$$

Тем самым утверждение задачи полностью доказано.

Решение 9.13. Пусть $x^\mu = x^\mu(\lambda, n)$ - семейство геодезических с аффинным параметром λ (фиг. 22). Параметр n нумерует отдельные геодезические. Вектор, касательный к геодезической, имеет компоненты $u^\alpha \equiv \partial x^\alpha/\partial\lambda$, а компоненты бесконечно малого



Фиг. 22.

вектора, соединяющего точки с равными значениями аффинного параметра на соседних кривых, равны

$$n^\alpha = \partial x^\alpha/\partial n$$

Решение задачи особенно наглядно в абстрактных обозначениях. Пусть

$$\mathbf{u} = \partial/\partial\lambda, \quad \mathbf{n} = \partial/\partial n$$

Поскольку частные производные коммутируют, то $[\mathbf{u}, \mathbf{n}] = 0$. [В действительности обращение в нуль коммутатора $[\mathbf{u}, \mathbf{n}]$ служит определением вектора $\mathbf{n}$, соединяющего точки бесконечноблизких кривых с одикнаовыми значениями аффинного параметра (см. задачу 8.14).] Воспользуемся оператором Римана (см. задачу 9.12):

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(\mathbf{u}, \mathbf{n})\mathbf{u} \equiv \nabla_\mathbf{u}\nabla_\mathbf{n}\mathbf{u} - \nabla_\mathbf{n}\nabla_\mathbf{u}\mathbf{u} - \nabla_{[\mathbf{u},\mathbf{n}]}\mathbf{u} = \\ = \nabla_\mathbf{u}\nabla_\mathbf{n}\mathbf{u} = \nabla_\mathbf{u}\nabla_\mathbf{u}\mathbf{n}\end{aligned}$$

(последнее равенство следует из того, что коммутатор $[\mathbf{u}, \mathbf{n}]$ обращается в нуль). Записывая полученный результат покомпонентно. [см. задачу 9.12 (б)], находим

$$\frac{D^2 n^\alpha}{d\lambda^2} = (\nabla_\mathbf{u}\nabla_\mathbf{u}\mathbf{n})^\alpha = -R^\alpha_{\beta\gamma\delta}u^\beta n^\gamma u^\delta$$

Solution

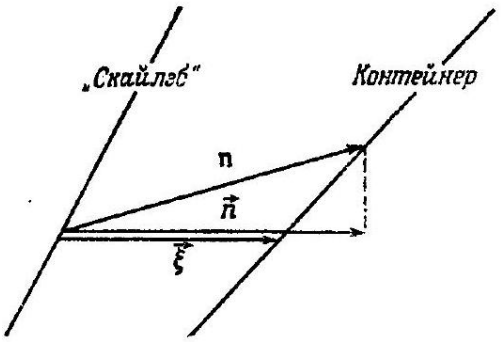
9.14. Удобно перейти от декартовой системы пространственных координат к полярным координатам и записать метрику в виде

$$ds^2 = -(1 - 2M/r)dt^2 + (1 + 2M/r)\left(dr^2 + r^2\left[d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right]\right)$$

Для круговой экваториальной орбиты $u^r = u^\vartheta = 0$, поэтому
и

$$Du^r/d\tau = 0 = u^\alpha\Gamma^r_{\alpha\beta}u^\beta = \left(u^0\right)^2\Gamma^r_{00} + \left(u^\varphi\right)^2\Gamma^r_{\varphi\varphi}$$

$$(d\varphi/dt)^2 = \omega^2 = -\Gamma^r{}_{00}/\Gamma^r{}_{\varphi\varphi}$$



ur. 23.
Символы Кристоффеля вычисляются без труда, и мы находим

$$\omega^2 = (2\pi/ \text{ период })^2 = M/r^3.$$

Нетрудно видеть, что полученный результат совпадает с результатом, вычисленным в ньютоновском случае. В задаче 9.13 было. выведено уравнение дв нжения для вектора $\mathbf{n}$, соединяюего точки на двух соседних геодезических с одинаковым собственным временем. В этой задаче мы рассматриваем вектор $\vec{\xi}$, соединяющий точки на двух соседних геодезических с заданным значением координатного времени. Из фиг 23, однако, ясно, что разность векторов $\vec{n}$ и $\vec{\xi}$ пропорциональна относительной скорости контейнера с. мусором и «Скайлэба», и, следовательно, в низшем порядке ее можно не принимать во внимание.

Поскольку в системе координат t, x, y, z все символы Кристоффеля имеют порядок M/r^2, а $d/d\tau \sim \omega \sim (M/r)^{\frac{1}{2}} r^{-1}$, то приближенно можно считать, что

$$\frac{D}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} + \Gamma u \approx \frac{d}{d\tau}$$

Кроме того

$$\frac{d}{d\tau} = u^0 \frac{d}{dt} = \left[1 + O\left(\frac{M}{r}\right)\right] \frac{d}{dt}$$

ПоэТОМу

$$D^2/d\tau^2 \approx d^2/dt^2$$

В этом приближении уравнение расхождения геодезических имеет вид

$$\frac{d^2\xi^i}{dt^2} + R^i_{0/0} \left(u^0\right)^2 \xi = 0, \quad i = x, y, z$$

а низшие члены компонент тензора Римана равны

$$R^i_{0j0} \approx \Gamma^i_{00,f} - \Gamma_{0j,0} = -\frac{1}{2} g_{00,\ell} = \frac{M}{r^3}\left(\delta_{lj} - \frac{3x^i x f}{r^2}\right).$$

Если орбиту «Скайлэба» мы условимся описывать параметрическими уравнениями

$$x = r\cos\omega t, \quad y = r\sin\omega t$$

то уравнения движения для вектора $\vec{\xi}$ будут иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{\xi} z + \omega^2 \xi^z &= 0, \\ \ddot{\xi} x + \omega^2 \xi^x &= 3\omega^2 \cos\omega t \left(\cos\omega t \xi^x + \sin\omega t \xi^y\right). \\ \ddot{\xi}^y + \omega^2 \xi^y &= 3\omega^2 \sin\omega t \left(\cos\omega t \xi^x + \sin\omega t \xi^y\right). \end{aligned}$$

Компонента ξ относительного движения вдоль оси z, очевидно, пропорциональна $\sin\ \omega t$, если контейнер с мусором был выброШен пр $t = 0$.

Чтобы найти относительное движение в плоскости xy, введем новые переменные η^1, η^2, определяемые соотношениями

$$\xi^x = \eta^1 \cos\omega t + \eta^2 \sin\omega t, \quad \xi^y = \eta^1 \sin\omega t - \eta^2 \cos\omega t$$

Уравнения движения в новых координатах запишутся в виде

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}^2 - 2\omega\dot{\eta}^1 &= 0, \\ \ddot{\eta}^1 + 2\omega\dot{\eta}^2 - 3\omega^2\eta^1 &= 0. \end{aligned}$$

Нетрудно найти четыре линейно-независимых решения этих уравнений:

$$\left[\eta^1, \eta^2\right] = \left[1, \frac{3}{2}\omega t\right], \quad [0,1], \quad [\cos\omega t, 2\sin\omega t],$$
$$[\sin\omega t, -2\cos\omega t].$$

Линейная комбинация решений, соответствующая контейнеру с мусором, выкинутому при $t = 0$ (т. е. $\xi^x = \xi^y = 0$ при $t = 0$), имеет следующий вид:

$$\xi^x = A[\cos 2\omega t - 3 + 2\cos\omega t + 3\omega t\sin\omega t] + B\left[4\sin\omega t - \sin 2\omega t_{\lrcorner}\right.$$
$$\xi^y = A[\sin 2\omega t + 2\sin\omega t - 3\omega t\cos\omega t] + B^{-}\cos 2\omega t + 3 - 4\cos\omega t\big].$$

Постоянные A и B зависят от параллельных осям x и y компонент скорости, с которой выброшен контейнер. Непериодические члены решения связаны с тем, что периоды движения по орбитам «Скай лэба» и контейнера с мусором незначительно отличаются, поэтому зависимость относительного расстояния от времени содержит вековой член.

чтобы

Solution

9.15. Выберем локально плоские координаты так,

В этих координатах

$$R_{\beta\gamma\delta} = 2\Gamma^{\alpha}_{\beta[\delta,v]}$$

$$R^{\alpha}_{[\beta\gamma\delta]} = 2\Gamma^{\alpha_{[\beta}}_{[\beta[\delta,\gamma]]} = 2\Gamma^{\alpha}_{[\beta\delta,v]}.$$

Поскольку символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам, то правая часть должна обратиться в нуль, и, опуская первый индекс, получаем

$$R_{\alpha[\beta\vartheta\delta]} = 0$$

Тензор Римана антисимметричен по двум последним индексам, и поэтому это соотношение эквивалентно циклическому тождеству.

Из задачи 9.8 известно, что для любого вектора U^{α} справедливо соотношение

$$2U^{\alpha} : [\beta v] = -U^{\sigma}R^{\alpha}_{\sigma\beta\gamma}.$$

Зададим вектор U^{α} в некоторой точке и перенесем его параллельно вдоль геодезической во все точки некоторой ее окрестности. Тогда в выбранной точке $U^{\alpha};\beta = 0$ при всех β. Следовательно,

$$2U^{\alpha};[\beta v]\delta = -U^{\sigma}R^{\alpha}_{o\beta\gamma;\delta}$$

И

$$2U^{\alpha};[[\beta\gamma]\delta] = 2U^{\alpha};[\beta\gamma\delta] = -U^{\sigma}R_{\alpha[\beta\gamma;\delta]}$$

ИЗ той же задачи 9.8 известно, что для тензора $U^{\alpha};\beta$ справедливо, соОтношение

$$2U^{\alpha};\beta[\gamma\delta] = -U^{\sigma};{}_{\beta}R^{\alpha}_{\sigma\gamma\delta} + U^{\alpha}_{;\sigma}R^{\sigma}{}_{\beta\gamma\delta}$$

Поскольку в выоранной точке $U^{\alpha};\beta = 0$, то

$$U^{\alpha};\beta[\gamma\delta] = 0$$

и, следовательно,

$$U^{\alpha} : [\beta\gamma\delta] = 0$$

Направление вектора U^{α} в выбранной точке моко задать про-. извольно, поЭтому

$$R^{\alpha}_{\sigma[\beta\gamma;\delta]} = 0$$

Поскольку тензор Римана антисимметричен по двум последним индексам, то это соотношение эквивалентно тождествам Бианки. (Разумеется, тождества Бианки можно вывести более простым, но громоздким способом, дифференцируя и преобразуя формулу, выражаюную компоненты тензора Римана через символы Кристоффеля. При таком подходе вычисления удобнее всего проводить в локально плоских координатах.)

Решение 9.16. Свертывая тождества Бианки

$$R'_{\beta\gamma;\varepsilon} + R^{\alpha}_{\beta\varepsilon\gamma;\delta} + R^{\alpha}_{\beta\delta\varepsilon;\gamma} = 0$$

сначала по α и γ, а затем по β и δ, получаем

$$R_{\beta\varepsilon;\varepsilon} + R_{\beta\varepsilon;\delta} + R_{\beta\delta\varepsilon\alpha} = 0,$$
$$R_{;\varepsilon} - R^{\beta}_{\varepsilon;\beta} - R^{\alpha}_{\varepsilon;} = 0.$$

Следовательно, дивергенция тензора Эйнштейна

$$G^{v}_{\varepsilon;v} = \left(R^{v}_{\varepsilon} - \frac{1}{2}\delta^{v}_{\varepsilon}R\right)_{;v} = R^{v}_{\varepsilon;v} - \frac{1}{2}R;\varepsilon$$

должна обрацаться в нуль.

Pewerue 9.17. Выберем векторы A, B, C, D так, чтобы они были взаимно ортогональными в точке P и удовлетворяли условиям $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = -1, \mathbf{B}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{C} = \mathrm{D}\cdot\mathbf{D} = 1$. Поскольку пространствовремя плоское по Риману, то параллельный перенос по замкнутому контуру не изменяет вектор и в точках, отличных от точки P, векторы A, B, C, D можно задать пря помоши параллельного. переноса. Выполнив эту операцию для вектора A, получим

$$\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = -\Gamma\gamma_{\alpha\beta}A_{\gamma}$$

откуда

$$\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial A_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}$$

так что компоненты вектора A можно выбрать в виде $A_{\alpha} = \varphi$, . Аналогичные соотношения справедливы и для компонент векторов B, C и D. Полученные результаты мы объединим, задав векторы A, B, C, D в виде

$$a = \mathbf{W}^{(0)}, \quad B = \mathbf{W}^{(1)}, \quad C = \mathbf{W}^{(2)}, \quad D = \mathbf{W}^{(3)}$$

и определив функции $\Phi^{(0)}, \Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \Phi^{(3)}$ следующим образом:

$$\mathbf{W}^{(\mu)} = \nabla^{(\mu)}.$$

Поскольку скалярное произведение векторов сохраняется при параллельном переносе, то из соотношения

$$\mathbf{W}^{(\mu)}\cdot\mathbf{W}^{(v)} = \left[\mathbf{W}^{(\mu)}\cdot\mathbf{W}^{(v)}\right]_{P} = \eta^{\mu v}$$

мы заключаем, что

$$g^{\mu\nu v}\frac{\partial\Phi(\alpha)}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial D^{(\beta)}}{\partial x^{v}} = \eta^{\alpha\beta}$$

Следовательно, существует преобразование координат

$$\bar{x}^{\mu} = \Phi^{(\mu)}\left(x^{\mu}\right)$$

переводящее исходную метрику в метрику Минковского.

Решение 9.18.

Если тензор Вейля равен нулю, то метрику можно представить в конформно-плоском виде

$$ds^2 = e^{2\varphi}ds_i^{\circ} = e^{2\varphi}\eta_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$$

где φ-функция от χ^{α}. Изотропные ггодезические

$$dt = \vec{n}\cdot\vec{dx}, \quad \vec{n}\cdot\vec{n} = 1$$

в метрике ds_0^2 остаются изотропными кривыми в метрике ds^2. Если удастся доказать, что эти кривые совпадают с геодезическими в метрике ds^2, то конус изотропных геодезических при переходе от ds_0^2kds^2 останется конусом и не будет предпочтительного направления сжатия поперечного сечения.

Докажем, что кривые $dt = \vec{n}\cdot\vec{dx}$ - геодезические. Для этого необходимо лишь убедиться в том, что для изотропных геодезических

$$\frac{d^2x^{\alpha}}{d\lambda^2} = \frac{dp^{\alpha}}{d\lambda} = 0$$

Заметим, что символы Кристоффеля равны
поэтому

$$\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} = \eta^{\alpha\mu}\left[-\varphi,\mu\eta_{\gamma\beta} + \varphi,\beta\eta_{\gamma\mu} + \varphi,\gamma\eta_{\mu\beta}\right]$$

$$p^{\gamma}p^{\beta}\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} = 2p^{\alpha}(\nabla\varphi\cdot\mathbf{p})$$

И

$$0 = \frac{dp^{\alpha}}{d\lambda} + \Gamma_{\beta\gamma}p^{\beta}p^{\gamma} = \frac{dp^{\alpha}}{d\lambda} + 2p^{\alpha}(\nabla\varphi\cdot\mathbf{p})$$

Следовательно, при надлежаще выбранном масштабе по λ первый член обрашается в нуль ($dp^{\alpha}/d\lambda = 0$) и изотропные прямые в метрике ds_0^2 служат изотропными геодезическими в метрике ds^2.

Необходимо иметь в виду, что, хотя форма поперечного сечения светового пучка остается неизменной, плопадь поперечного сечения, как и все площади, умножается на $e^{2\varphi}$. Поскольку функция φ, вообще говоря, анизотропна, то скорость, с которой увеличивается площадь поперечного сечения, зависит от того, в какомнаправлении распространяется пучок света.

Pewerue 9.19. В конформно-плоском пространстве тензор. Вейля равен нулю и компоненты тензора Римана нетрудно выцис.. лить по компонентам тензора Ричци:

$$R_{\mu v} = -\left(\ln|g|^{1/\kappa}\right)_{,\mu v} + \Gamma_{\mu v,\alpha} + \left(\ln|g|^{17}\right)_{,\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu v} - \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma_{v\beta.}$$

Для вычисления нам понадобятся следуюие выражения:

$$\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} = -\varphi^{,\alpha}\eta_{\gamma\beta} + \varphi,\beta\delta^{\alpha}{}_{\gamma} + \varphi,\gamma\delta^{\alpha}_{\beta},$$
$$\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta,\alpha} = -\nabla^2\varphi\eta_{\gamma\beta} + 2\varphi,\beta\psi,$$
$$\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\alpha} = 6\varphi,\mu\varphi,\beta - 2(\nabla\varphi)^2\eta_{\mu\beta},$$
$$-g = e^{8\varphi},\ln|g|^2/4 = 4\varphi,$$
$$\left(\ln|g|^{1/2}\right)_{,\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta} = -4(\nabla\varphi)^2\eta_{\gamma\beta} + 8\varphi,\beta\varphi,\gamma,$$
$$\left(\ln|g|^{1/2}\right)_{,\gamma\beta} = 4\varphi,\gamma\beta.$$

Поднятие и опускание индексов в этих выражениях производи-лось при помочи тензора $\eta_{\mu v}$, например,

$$\varphi^{,\alpha} \equiv \eta^{\mu\alpha}\varphi,\mu;\quad \nabla^2\varphi \equiv \eta^{\mu\alpha}\varphi,\mu\alpha;\quad (\nabla\varphi)^2 \equiv \eta^{\mu\alpha}\varphi,\mu\varphi,\alpha\cdot$$

Тензор Рнччи и скалярная кривизна соответственно равны

$$R_{\mu v} = -2\varphi,\mu v + 2\varphi,\mu\varphi,\nu - \eta_{\mu\nu}\left[\nabla^2\varphi + 2(\nabla\varphi)^2\right],$$
$$R \equiv R^{\mu}_{\mu} = e^{-2\varphi}\eta^{\mu v}R_{\mu\nu} = -6e^{-2\varphi}\left[\nabla^2\varphi + (\nabla\varphi)^2\right],$$

а тензор Римана -

$$\begin{aligned}
&R_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} + \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\gamma}R_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}R_{\beta\gamma} - g_{\beta\gamma}R_{\alpha\delta} + g_{\beta\delta}R_{\alpha\gamma}\right) - \\
&- \frac{1}{6}\left(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}\right)R = \\
&= \frac{1}{2}e^{2\varphi}\left(\eta_{\alpha\gamma}R_{\beta\delta} - \eta_{\alpha\delta}R_{\beta\gamma} - \eta_{\beta\gamma}R_{\alpha\delta} + \eta_{\beta\delta}R_{\alpha\gamma}\right) \\
&- \frac{1}{6}e^{\pm\varphi}\left(\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta} - \eta_{\alpha\delta}\eta_{\beta\gamma}\right)R = \\
&= e^{2\varphi}\left[\eta_{\alpha\nu}\left(\varphi,_{\beta}\varphi,8 - \varphi,\beta\delta\right) - \eta_{\alpha,\delta}(\varphi,\beta\varphi,\gamma - \varphi,\beta\gamma) - \right. \\
&- \eta_{\beta\nu}(\varphi,\alpha\varphi,\delta - \varphi,\alpha\delta) + \eta_{\beta\delta}\left(\varphi,_{\alpha}\varphi,\gamma - \varphi,\alpha\gamma\right) + \\
&\left. + (\nabla\varphi)^2\left(-\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta} + \eta_{\alpha\delta}\eta_{\beta\gamma}\right)\right]
\end{aligned}$$

Решение 9.20. Воспользуемся таким же ортонормированным репером, как в задаче 8.27:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{t}} = e^{\alpha}\widetilde{\mathbf{d}t},\quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{r}} = e^{\beta}\widetilde{\mathbf{d}r},\quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\vartheta}} = e^{\gamma}\widetilde{\mathbf{d}}\tilde{\vartheta},\quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\varphi}} = e^{\gamma}\sin\vartheta\widetilde{\mathbf{d}\varphi}.$$

В задаче 8.27 мы вычислили шесть 1-форм связности $\tilde{\omega}^{\hat{\mu}}{}_{\hat{v}}$ из соотношений

$$\mathbf{d}\tilde{\omega}^{\hat{\mu}} = -\tilde{\omega}^{\hat{\mu}}_{\hat{v}}\tilde{\omega}^{\hat{v}},\quad \tilde{\omega}_{\hat{\mu}\hat{v}} = -\tilde{\omega}_{\hat{v}\hat{\mu}}$$

Тензор Римана проще всего найти из шести 2-форм кривизны $\mathscr{R}^{\hat{v}}_{\hat{v}}$:

$$e\mathscr{R}^{\hat{\mu}}{}_{\hat{v}} = \mathbf{d}\tilde{\omega}^{\hat{\mu}}\hat{v}^2 + \tilde{\omega}^{\hat{\mu}}\hat{\alpha}_{\hat{\alpha}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\alpha}}\hat{v},$$
$$e\mathscr{R}^{\hat{\mu}}\hat{v} = \frac{1}{2}R^{\hat{\mu}}{}_{\hat{v}\hat{\alpha}}\hat{\beta}^{\hat{\omega}}\tilde{\alpha}^{\alpha} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\beta}}$$

Преимущество этого метода состоит в том, что вычисляются лишь ненулевые компоненты тензора Римана. Подставляя в соотношение (3) вычисленные в решении 8.27 1-формы $\tilde{\infty}$, находим

$$\mathscr{R}^{\hat{t}}_{\hat{t}\hat{t}} = \mathbf{d}\left(\alpha' e^{(\alpha-\beta)}\widetilde{\mathbf{d}t} + \dot{\beta}e^{\beta-\alpha}\widetilde{\mathbf{d}r}\right) + \tilde{\omega}^{\hat{t}}_{\hat{\vartheta}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\vartheta}}_{\hat{\vartheta}\hat{r}} + \tilde{\omega}^{\hat{t}}_{\hat{\varphi}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\varphi}}_{\hat{r}} =$$

$$= \left[\alpha'' + (\alpha')^2 - \alpha'\beta'\right] e^{\alpha-\beta}\widetilde{\mathbf{d}r} \wedge \widetilde{\mathbf{d}t} + \left(\ddot{\beta} + \dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}\dot{\beta}\right) e^{\beta-\alpha}\widetilde{\mathbf{d}t} \wedge \widetilde{\mathbf{d}r} =$$
$$= \left[e^{-2\alpha}\left(\ddot{\beta} + \dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}\dot{\beta}\right) - e^{-2\beta}\left(\alpha'' + \alpha'^2 - \alpha'\beta'\right)\right] \tilde{\boldsymbol{\omega}}\hat{\boldsymbol{t}} \wedge \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{r}}$$

(точка означает $\partial/\partial t$, а штрих $-\partial/\partial r$). Член $\mathbf{d}\omega_{\hat{r}}\hat{r}^{\text{выислеп в ко-}}$ ординатном репере с учетом того, что $\mathbf{dd} = 0$. Остальные 2-формы хривизны имеют следующий вид:

$$e\hat{\mathscr{R}}_{\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}} = \mathbf{d}\left(e^{\gamma}\alpha_{\dot{\gamma}}\widehat{\mathbf{d}}_{\vartheta}\right) + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\hat{r}\hat{r}} \wedge \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\hat{\vartheta}}\hat{\vartheta} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\hat{\varphi}}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \wedge \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}} =$$

$$= \left[e^{-2\alpha}\left(\ddot{\gamma} + \dot{\gamma}^2 \llcorner \dot{\alpha}\dot{\gamma}\right) - e^{-2\beta}\alpha'\gamma'\right] \tilde{\omega}^{\hat{t}} \wedge \tilde{\boldsymbol{\omega}}\hat{\vartheta} +$$
$$+ e^{-(\alpha+\beta)}\left(\dot{\gamma}\gamma' - \alpha'\dot{\gamma} + \dot{\gamma}' - \gamma'\dot{\beta}\right) \tilde{\omega}\hat{r} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\hat{H}}}$$

$$\mathscr{R}_{\hat{\varphi}}\hat{\imath}_{\hat{\varphi}} = \mathbf{d}\left(e^{\gamma-\alpha}\dot{\gamma}\sin\vartheta\widetilde{d}_{\varphi}\right) + \tilde{\omega}_{\hat{r}}\hat{\imath}_{\hat{r}} \wedge \tilde{\omega}_{\hat{\varphi}}\hat{f}_{\hat{\varphi}} + \tilde{\omega}_{\hat{\vartheta}} \wedge_{\hat{\vartheta}} \wedge \tilde{\omega}_{\hat{\varphi}} =$$

$$= \left[e^{-2\alpha}\left(\ddot{\gamma} + \dot{\gamma}^2 - \dot{\alpha}\dot{\gamma}\right) - e^{-2\beta}\alpha'\gamma'\right] \tilde{\omega}^{\hat{t}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\varphi}} +$$
$$+ e^{-(\alpha+\beta)}\left(\dot{\gamma}\gamma' - \alpha'\dot{\gamma} + \dot{\gamma}' - \gamma'\dot{\beta}\right) \tilde{\omega}^{\hat{r}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\varphi}}$$

$$\mathscr{C}^{\hat{\hat{r}}}_{\hat{\boldsymbol{r}}} = -\mathbf{d}\left(e^{\gamma-\beta}\boldsymbol{\gamma}'\mathbf{d}\hat{\vartheta}\right) + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{r}}_{\hat{t}} \wedge \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{t}}_{\hat{\theta}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{r}}_{\hat{\varphi}} \wedge \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\varphi}}_{\hat{\hat{\vartheta}}} =$$

$$= \left[e^{-2\beta}\left(\gamma'' + \gamma'^2 - \beta'\gamma'\right) - e^{-2\alpha}\dot{\boldsymbol{\beta}}\dot{\boldsymbol{\gamma}}\right] \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\vartheta}} \wedge \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{r}} +$$

$$+ e^{-(\alpha+\beta)}\left(\dot{\gamma}\gamma' - \alpha'\dot{\gamma} + \dot{\gamma}' - \gamma'\dot{\beta}\right) \tilde{\omega}^{\hat{\theta}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{t}}$$

$$\mathscr{R}^{\hat{r}}_{\hat{\varphi}} = -\mathbf{d}\left(e^{\gamma-\beta}\gamma'\sin\vartheta\tilde{\mathbf{d}}\varphi\right) + \tilde{\omega}^{\hat{r}}_{\hat{i}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{t}}_{\hat{\varphi}} + \tilde{\omega}^{\hat{r}}_{\hat{\theta}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\theta}}_{\hat{\theta}} =$$

$$= \left[e^{-2\beta}\left(\gamma'' + \gamma'^2 - \beta'\gamma'\right) - e^{-2\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}\right] \tilde{\omega}^{\hat{\varphi}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{r}} +$$

$$+ e^{-(\alpha+\beta)}\left(\dot{\gamma}\gamma' - \alpha'\dot{\gamma} + \dot{\gamma}' - \gamma'\dot{\beta}\right) \tilde{\omega}\hat{\varphi} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{t}};$$

$$\mathscr{C}^{\hat{\varphi}}_{\mathscr{R}\hat{\vartheta}} = -\mathbf{d}(\cos\hat{\vartheta}\widetilde{d\varphi}) + \tilde{\omega}^{\hat{\theta}}_{\hat{\vartheta}\hat{i}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{t}}_{\hat{\varphi}} + \tilde{\omega}^{\hat{\theta}}_{\hat{\vartheta}\hat{\imath}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{}}_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} =$$

$$= \left(e^{-2\gamma} + e^{-2\alpha}\dot{\gamma}^2 - e^{-2\beta}\gamma'^2\right) \tilde{\omega}^{\hat{\theta}}, \dot{\omega}^{\dot{\varphi}}.$$

Ненулевые компоненты тензора Римана мы найдем из соотношения (4):

$$R^{\hat{t}\hat{r}_{\hat{t}}} = A$$
$$R\hat{t}^{\hat{\theta}}_{\hat{t}}\hat{\vartheta} = R\hat{t}_{\hat{t}\hat{t}\hat{\varphi}} = B$$

$$R^{\hat{t}\hat{\theta}}{}_{\hat{r}\hat{\theta}} = R^{\hat{t}\hat{\varphi}}{}_{\hat{r}\hat{\varphi}} = -R^{\hat{r}\hat{\theta}}{}_{\hat{t}\hat{\theta}} = -R^{\hat{r}\hat{\varphi}}{}_{\hat{t}\hat{\varphi}} = C,$$

$$R\hat{\vartheta}^{\hat{\vartheta}}{}_{\hat{\varphi}}\hat{\varphi} = D$$

$$R^{\hat{r}}{}_{\hat{\varphi}\hat{r},\hat{\varphi}} = R^{\hat{r}}{}_{\hat{v}\hat{r}\hat{\theta}} = E,$$

где

$$\begin{aligned}
a &= e^{-2\alpha}\left(\ddot{\beta} + \dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}\dot{\beta}\right) - e^{-2\beta}\left(\alpha'' + \alpha'^2 - \alpha'\beta'\right), \\
B &= e^{-2\alpha}\left(\ddot{\gamma} + \dot{\gamma}^2 - \dot{\alpha}\dot{\gamma}\right) - e^{-2\beta}\alpha'\gamma', \\
C &= e^{-(\alpha+\beta)}\left(\dot{\gamma}' + \dot{\gamma}\gamma' - \alpha'\dot{\gamma} - \dot{\beta}\gamma'\right) \\
D &= e^{-2\gamma} + e^{-2\alpha}\dot{\gamma}^2 - e^{-2\beta}\gamma'^2,
\end{aligned}$$

$$E = e^{-2\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma} - e^{-2\beta}\left(\gamma'' + \gamma'^2 - \beta'\gamma'\right).$$

Тензор Риччи мы получим, свернув тензор Римана.

$$R^{\hat{\beta}}_{\hat{\beta}} = R\hat{\gamma}\hat{\alpha}_{\hat{\gamma}\hat{\beta}}$$

Компоненты тензора Риччи равны

$$\begin{aligned}
R^{\hat{t}}_{\hat{t}} &= A + 2B \\
R\hat{t}_{\hat{r}} &= 2C \\
R^{\hat{r}_r}_{\hat{r}} &= A + 2E \\
R^{\hat{\vartheta}}_{\hat{\theta}} &= R^{\hat{\varphi}}_{\hat{\varphi}} = B + D + E,
\end{aligned}$$

$$R^{\hat{t}\,\hat{\theta}}_{\hat{\theta}} = R^{\hat{t}\,\hat{\varphi}}_{\hat{\varphi}} = R^{\hat{r}\,\hat{\theta}}_{\hat{\vartheta}} = R^{\hat{r}\,\hat{\varphi}}_{\hat{\varphi}} = R^{\hat{\vartheta}}_{\hat{\varphi}} = 0.$$

Зная их, находим скалярную кривизну

$$R = R^{\hat{\alpha}}_{\hat{\alpha}} = 2A + 4B + 2D + 4E.$$

Тензор йнштейна определяется соотношением
Его компоненты равны

$$G^{\hat{\alpha}} = R^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}} - \frac{1}{2}\delta^{\hat{\alpha}}\,\hat{\beta}R.$$

$$\begin{aligned}
G\hat{t}_{\hat{i}} &= -(D + 2E) \\
G_{\hat{t}} &= 2C, \\
G_{\hat{r}}\hat{r} &= -(D + 2B) \\
G^{\hat{\vartheta}}_{\hat{\vartheta}} &= G^{\hat{\varphi}'}_{\hat{\varphi}} = -(A + B + E),
\end{aligned}$$

$$G^{\hat{t}\,\hat{\vartheta}}_{\hat{\vartheta}} = G^{\hat{t}\,\hat{\varphi}}_{\hat{\varphi}} = G^{\hat{r}\,\hat{\vartheta}}_{\hat{\vartheta}} = G^{\hat{r}\,\hat{\varphi}}_{\hat{\varphi}} = G^{\hat{\vartheta}}_{\hat{\varphi}} = 0.$$

Решение 9.21.

Выберем ортонормированный базис $\mathrm{e}_{\hat{\alpha}}$ и построим репер из комплексных изотропных векторов, ориентированный так, чтобы волновой вектор $\nabla u \equiv \mathbf{k}$ был одним из его базисных векторов:

$$\mathbf{k} = (2)^{-\frac{1}{2}} \left(\mathbf{e}_{\hat{t}} + \mathbf{e}_{\hat{z}}\right),$$
$$l = (2)^{-\frac{1}{2}} \left(\mathbf{e}_{\hat{t}} - \mathbf{e}_{\hat{z}}\right),$$
$$\mathbf{m} = (2)^{-\frac{1}{2}} \left(\mathbf{e}_{\hat{x}} + i\mathbf{e}_{\hat{y}}\right),$$
$$\overline{\mathbf{m}} = (2)^{-\frac{1}{2}} \left(\mathbf{e}_{\hat{x}} - i\mathbf{e}_{\hat{y}}\right),$$

затем рассмотрим компоненты тензора Римана в этом репере, например $R_{lm\overline{ml}} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} l^{\alpha} m^{\beta} m^{\gamma} l^{\delta}$ и т. д. Поскольку тензор Римана зависит только от запаздывающего времени и в соотношениях (1) от нуля отличны лишь скалярные произведения базисных векторов

$$-\mathbf{k} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{m} \cdot \bar{m} = 1$$

То

$$R_{abcd,p} = 0$$

где индексы (a, b, c, d) пробегают значения (k, l, m, n), а индексы $(p, q, r, ...)$ - значения (k, m, m). Рассмотрим для тензора Римана часть тождеств Бианки

$$R_{ab[pq,l]} = 0$$

где индекя l соответствует вектору I в соотношении (1). Пользуясь соотношением (3), из соотношения (4) получаем

$$R_{abpq,l} = 0$$

а объединяя соотношения (3) и (5), с точностью до тривиальной «неволнообразной» постоянной находим

$$R_{abpq} = R_{pqab} = 0$$

Следовательно, все отличные от нуля компоненты тензора Римана должны иметь вид R_{plql}. Учитывая симметрии тензора Римана, нетрудно понять, что число независимых компонент равно лишь шести. Эти шесть компонент соответствуют числу степеней свободы нанболее общей гравитацнонной волны в метрической теории гравитации. В эйнштейновской теории гравитационная волна обладает лишь двумя степенями свободы. Реиение 9.22. В локально лоренцевской системе отсчета ускорение любой частицы связано с $F^{\mu\nu}$ уравнением для силы Лоренца:

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{d\tau^2} = \frac{e}{m} F_{\beta} u^{\beta}$$

Шесть компонент F^{α}_{β} удобно представлять себе как векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$. В сопутствующей системе отсчета частица имеет нулевую скорость и не «ощущает» действия магнитного поля. Измеряя три компоненты ускорения частицы, находим вектор $\vec{E}$. Измеряя в той же системе отсчета ускорение другой частицы, мы можем определить лишь две компоненты вектора $\vec{B}$, поскольку его компонента, параллельная направлению движения, не создает ускорения. Следовательно, для измерения всех компонент F^{α}_{β} необходимы по крайней мере три частицы.

Предоставляем читателю самостоятельно ответить на вопрос задачи о тензоре Римана, пользуясь уравнением расхождения геодезических:

$$\frac{D^2 \xi^{\alpha}}{d\tau^2} = -R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} u^{\beta} \xi \xi^{\gamma} u^{\delta}$$

Solution

9.23. Выберем систему координат, связанную с поверхностью. Пусть на поверхности координаты $x^{\mathbf{1}}, x^2$ изменяются, а координаты x^3, x^4 постоянны. Из компонент векторов A и **B** контравариантны лишь компоненты 1 и 2. Следовательно, для нас представляют интерес только компоненты тензора Римана с индексами 1 и 2, но среди них существует лишь одна независимая компонента: R_{1212}. Отличные от нуля компоненты тензора Римана этого типа связаны между собой соотношениями симметрии, которые можно представить в виде

$$R_{ljkl} \sim \left(g_{ik} g_{il} - g_{il} g_{jk}\right), \quad i, j, k, l = 1, 2.$$

Отсюда непосредственно следует, что в выбранной нами системе координат скалярная кривизна K не зависит от векторов A и B, а поскольку K не зависит и от координат, то тем самым утверждение задачи доказано во всей общности.

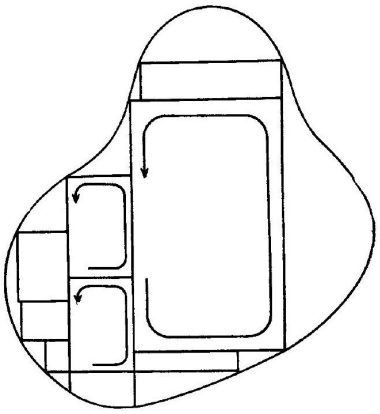
Решение 9.24. Разделим внутренность контура (фиг. 24) на бесконечно малые прямоугольники и рассмотрим, как изменяется угол между векторами A и B при параллельном переносе их по контуру одного такого прямоугольника. Пусть u и v-стороны прямоугольника. Как показано в решениях 9.23 и 9.11, при параллельном переносе по контуру такого прямоугольника вектор A получает приращение:

$$\delta^{\alpha} A_{\alpha} = -R_{\alpha\beta\mu\nu} A^{\beta} u^{\mu} v^{v} = K \left(g_{\alpha\mu} g_{\beta v} - g_{\alpha v} g_{\beta\mu} \right) A^{\beta} u^{\mu} v^{v}$$

Заметим, что

$$A^{\alpha} \delta A_{\alpha} = \frac{1}{2} \delta (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = 0,$$

поэтому длина вектора A остается неизменной. Изменение угла ϑ



Фиг. 24.

между векторами A и B можно вычислить из соотношений

$$B^{\alpha} \delta A_{\alpha} = \delta \left(A^{\alpha} B_{\alpha} \right) = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \delta (\cos \vartheta) = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \sin \vartheta \delta \vartheta$$

и

$$B^{\alpha} \delta A_{\alpha} = K[(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{u})].$$

Выбрав на поверхности локально плоскую систему координат с $\mathbf{u} \sim \mathbf{e}_1, \mathbf{v} \sim \mathbf{e}_2$, получим

$$\|A\| B| \sin \vartheta \delta \vartheta| = K \left(B^1 A^2 - B^2 A^1 \right) uv = K |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| uv = K \sin \vartheta |A||B|$$

(Площадь участка 2 -мерной поверхности, заключенного внутри контура).

Итак, при параллельном переносе по контуру бесконечно малого прямоугольника

$$|\delta \vartheta| = K \delta \Sigma.$$

Если рассмотреть контур более общего вида, то приращение вектора A при параллельном переносе вдоль контура будет равно приращению вектора $\mathbf{A}$ при переносе по всем прямоугольникам, на которые разбит этот контур, а площадь заключенной внутри него поверхности равна сумме площадей прямоугольников. Следовательно,

$$|\Delta \vartheta| = K \Delta \Sigma$$

Решение 9.25.

Пусть

$$W_{\alpha\gamma\beta\delta} \equiv K \left(g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} \right) - R_{\alpha\gamma\beta\delta}.$$

Заметим, что $W_{\alpha\gamma\beta\delta}$ обладает теми же симметриями, как и $R_{\alpha\gamma\beta\delta}$. Если в заданной точке риманова кривизна K не зависит от векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, то по определению K (задача 9.23) при любых $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$

и, следовательно,

$$W_{\alpha\gamma\beta\delta} A^{\alpha} A^{\beta} B^{\gamma} B^{\delta} = 0$$

$$W_{\alpha\gamma\beta\delta} + W_{\beta\delta\alpha\gamma} + W_{\alpha\delta\beta\gamma} + W_{\beta\gamma\alpha\delta} = 0.$$

Симметрии $W_{\alpha\gamma\beta\delta}$ позволяют записать соотношение (3) в виде

$$W_{\alpha\gamma\beta\delta} = W_{\alpha\delta\gamma\beta}$$

При циклической перестановке индексов $(\gamma\beta\delta)$ получаем еще одно соотношение:

$$W_{\alpha\delta\gamma\beta} = W_{\alpha\beta\delta\gamma}$$

Подставляя соотношения (4) и (5) в циклическое тождество
находим

$$W_{\alpha\gamma\beta\delta} + W_{\alpha\delta\gamma\beta} + W_{\alpha\beta\delta\gamma} = 0,$$

$$W_{\alpha\gamma\beta\delta} = 0$$

что и требовалось доказать.
Решение 9.26. Поскольку метрика всегда ковариантно постоянна, то

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta;\lambda} = K, \lambda \left(g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}\right)$$

Подставляя это выражение в тождества Бианки:

$$0 = R_{\alpha\beta\gamma\delta;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\gamma;\delta} + R_{\alpha\beta\delta\lambda;\gamma}$$

и свертывая по $\alpha, \boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\beta}, \delta$, получаем

$$K, \lambda = 0$$

т. е. кривизна K постоянная.

Solution

9.27. Свертывая тензор Римана, находим

$$\begin{aligned} R_{\mu x} &= 3K g_{\mu x}, \\ R &= 12K. \end{aligned}$$

По определению тензор Вейля равен

$$\begin{aligned} C_{\lambda\mu\nu\alpha} = R_{\lambda\mu\nu x} - \frac{1}{2}\left(g_{\lambda v} R_{\mu x} - g_{\lambda x} R_{\mu v} - g_{\mu v} R_{\lambda x} + g_{\mu x} R_{\lambda v}\right) + \\ + \frac{1}{6}\left(g_{\lambda v} g_{\mu x} - g_{\lambda x} g_{\mu\nu}\right) R, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} C_{\lambda\mu v\alpha} = K\left(g_{\lambda v} g_{\mu x} - g_{\lambda\mu} g_{v\alpha}\right) - \frac{1}{2}\cdot 3K\left(2 g_{\lambda v} g_{\mu \varkappa} - 2 g_{\lambda\mu} g_{v\alpha}\right) + \\ + \frac{1}{6}\cdot 12K\left(g_{\lambda v} g_{\mu x} - g_{\lambda x} g_{\mu v}\right) = 0 \end{aligned}$$

Реиение 9.28. Поскольку $\mathrm{u}\cdot\mathrm{n} = 0$, то

$$\begin{aligned} u^{\alpha}\left(n^{\beta} u_{\beta}\right)_{\alpha\alpha} &= 0 = n^{\beta}; \alpha \\ &= -u^{\alpha} u_{\beta} + n^{\beta} u_{\beta;\alpha} u^{\alpha} = \\ & u^{\alpha} u^{\beta} + 2\mathbf{n}\cdot\xi. \end{aligned}$$

Solution

9.29. Метрика имеет вид
где

$$ds^2 = -d\tau^2 + g_{ij} dx^i dx^t$$

$$g_{ij} = a^2(\tau)\gamma_{ij}\left(x^k\right)$$

Нормальный вектор к поверхностям $\tau = \mathrm{const}$ есть $\mathbf{n} = \partial/\partial\tau$. Следовательно,

$$K_{ij} = -\mathbf{e}_j \cdot \nabla_i \mathbf{n} = \mathbf{n}\cdot\nabla_l \mathbf{e}_j = \Gamma_{nji} = -\frac{1}{2} g_{ij,n} = \frac{-a_{,\tau}}{a} g_{ij}$$

L-9.30. Кривизна через проекционный тензор

Доказать, что внешняя кривизна времениподобной гиперповерхности с единичным вектором нормали $\mathbf{n}$ равна -1/2 $\mathscr{L}_{\mathrm{n}} P_{\alpha\beta}$, где $P_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta$ - проекционный тензор (проектирующий на эту гиперповерхность).

Solution 9.30.

По определению производной Ли (задача 8.13) имеем

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathbf{n}} P_{\alpha\beta} &= P_{\alpha\beta;\gamma} n^\gamma + P_{\gamma\beta} n^\gamma; \alpha + P_{\alpha\gamma} n_{;\beta} = \\ &= \left(g_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta\right)_{;\gamma} n^\gamma + \left(g_{\gamma\beta} - n_\gamma n_\beta\right) n^\gamma; \alpha + \left(g_{\alpha\gamma} - n_\alpha n_\gamma\right) n^\gamma; \beta = \\ &= -\left(n_\alpha n_\beta\right)_{;\gamma} n^\gamma + n_{\beta;\alpha} + n_{\alpha;\beta},\end{aligned}$$

где, производя преобразования, мы воспользовались тем, что

$$n_\gamma n^\gamma : \alpha = \frac{1}{2}\left(n_y n^\gamma\right)_{;\alpha} = 0$$

Если $\mathbf{e}_i$ - три базисных вектора, принадлежащих гиперповерхности, то с учетом симметричности тензора K_{ij} получаем

$$K_{ij} = -\mathbf{e}_j \cdot \nabla_i \mathrm{n} = -n_{i;j} = -\frac{1}{2}\left(n_{i;j} + n_{j;i}\right).$$

Переходя к общей системе координат (в которой базисные векторы $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_j$ не принадлежат гиперповерхности), соотношение (2) можно преобразовать к виду

$$K_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left(n_{\gamma;\delta} + n_{\delta;\gamma}\right) P_\alpha P^\delta_\beta$$

Т. е. записать как проекцию на гиперповерхность симметризованной ковариантной пронзводной вектора n. Используя явный вид проекционных тензоров Pv_α в соотношении (3) и сравнивая полученное выражение с соотношением (1), находим

$$K_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\mathscr{L}_{\mathbf{n}} P_{\alpha\beta}$$

L-9.31. Кривизна мыльной пленки (!??!?)

Если пренебречь силой тяжести, то потенциальная энергия, обусловленная поверхностным натяжением мыльной пленки, пропорциональна площади пленки. Следовательно, мыльная пленка, натянутая на некоторый контур, в состоянии равновесия принимает форму, соответствующую минимальной площади. Доказать, что отсюда следует равенство нулю «средней кривизны» ($K \equiv K^i{}_t$) мыльной пленки в состоянии равновесия.

Solution 9.31.

Пусть $x^3 = 0$ - уравнение поверхности, где x^1, x^2, x^3 - введенные на ней гауссовы нормальные координаты (см. задачу 8.25). Тогда площадь поверхности равна

$$a = \int g^{1/2} dx^1 dx^2$$

где g - определитель 2-мерной метрики g_{lj} на поверхности. Проварьируем площадь, сместив элементы поверхности на δx^3 по нормали $\mathbf{n} = \partial/\partial x^3$:

$$\delta a = \int \delta g^{1/2} dx^1 dx^2$$

В задаче 21.1 будет доказано, что

$$\delta g^{1/2} = \frac{1}{2} g^{1/2} g^{ij} \delta g_{lj} = \frac{1}{2} g^{1/2} g^{ij} g_{lj,3} \delta x^3$$

Поскольку мы ввели гауссовы нормальные координаты, то

$$\begin{aligned}K_{lj} &= -\frac{1}{2} g_{ij,3}, \\ \delta a &= -\int g^{i/} K_{lj} g^{1/} dx^1 dx^2 dx^3.\end{aligned}$$

Площадь A минимальна, поэтому $\delta a = 0$ при всех δx^3 и должно выполняться равенство

$$K = g^{il} K_{lj} = 0$$

Решение 9.32.

Пусть e_t - координатный репер на гиперповерхности Σ. Уравнения Гаусса-Кодацци представляют собой тензорные уравнения и выполняются независимо от того, какой репер был использован при их выводе. Векторы $\mathrm{e}_{\ t}$ вместе с вектором $\mathbf{n}$ образуют базис в пространстве-времени, поэтому

$$(4)\ \nabla_i \mathbf{e}_j = \alpha_{ij}\mathbf{n} + \beta^k{}_{ij}\mathbf{e}_k$$

Коэффициенты в уравнении (1) можно найти, умножая его скалярно на n и $\mathbf{e_k}$ ($\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_l = 0$):

$$\varepsilon\alpha_{ij} = \mathrm{n}\cdot {}^{(\notin)}\nabla_i \mathbf{e}_j = {}^{(\notin)}\nabla_i(\mathbf{n}\cdot\mathrm{e}_j) - \mathrm{e}_j\cdot {}^{(\notin)}\nabla_i \mathrm{n} = 0 + K_{lj},$$
$$\boldsymbol{\beta}_{kij} = \mathrm{e}_k\cdot {}^{(4)}\nabla_i \mathrm{e}_j = {}^{(4)}\Gamma_{kji} = {}^{(3)}\Gamma_{kji}.$$

Последнее равенство следует из того, что символ Кристоффеля можно вычислить непосредственно по ${}^{(3)}g_{ij}$. С этими коэффициен- тами уравнение (1) переходит в уравнение Гаусса - Вейнгартена:

$${}^{(4)}\nabla_i \mathbf{e}_j = \varepsilon K_{ij}\mathbf{n} + {}^{(3)}\Gamma^k_{ii}\mathbf{e}_k.$$

Тензор Римана можно вычислить по производным от символов Кристоффеля Г; используя оператор кривизны (см. задачу 9.12), можно несколько сократить выкладки:
где

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{R}(\mathbf{e}_\gamma,\mathbf{e}_\delta)\mathbf{e}_\beta,$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{e}_\psi,\mathbf{e}_\delta) = [\nabla_\psi,\nabla_\delta] - \nabla_{[\mathbf{e}_\gamma,\mathbf{e}_\delta]}$$

Запишем уравнение (4) для векторов $\mathbf{e}_j$ и $\mathbf{e}_k$. Последний член в правой части обратится в нуль, поскольку в координатном репере $[\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k] = 0$, и

$$\begin{aligned}\nabla_j {}^{(4)}\nabla_k \mathbf{e}_i &= {}^{(4)}\nabla_j\left(\varepsilon K_{lk}\mathbf{n} + {}^{(3)}\Gamma^m{}_{ik}\mathbf{e}_m\right) = \\ (4)\qquad &= \varepsilon K_{ik,j}\mathbf{n} - \varepsilon K_{ik}K_i{}^m\mathbf{e}_m + {}^{(3)}\Gamma^m{}_{lk,j}\mathbf{e}_m + \\ &+ {}^{(3)}\Gamma^m{}_{lk}\left(\varepsilon K_{im}\mathbf{n} + {}^{(3)}\Gamma^n{}_{mj}\mathbf{e}_n\right).\end{aligned}$$

Переставим индексы j и k в уравнении (5) и вычтем новое уравнение из старого. Мы получим

$$\mathrm{R}(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k)\,\mathrm{e}_i = \varepsilon\left(K_{ik|j} - K_{lj|k}\right)\mathrm{n} + \mathbf{e}_m\left[\varepsilon\left(K_{ij}K^m_k - K_{ik}K_j{}^m\right) + {}^{(3)}R^m{}_{ijk}\right].$$

Умножая уравнение (6) на $\mathbf{n}$ и $\mathbf{e}_n$, получаем уравнения Гаусса Кодащци.
Компоненты тензора Римана с двумя индексами $\mathbf{n}$ можно найти из $\mathbf{R}(\mathbf{e}_k,\mathbf{n})\mathbf{n}$. Поскольку вектор $\mathbf{n}$ входит в число базисных векторов координатного репера, то $[n,\mathbf{e}_k] = 0$; следовательно, последний член в правой части уравнения (4) обращается в нуль и

$$\mathbf{R}(\mathbf{e}_k,\mathbf{n})\,\mathrm{n} = {}^{(4)}\nabla'^{(4)}_k\nabla_{\mathrm{n}}\mathbf{n} - {}^{(4)}\nabla_{\mathrm{n}}{}^{(4)}\nabla_k\mathbf{n}$$

Но (4) $\nabla_{\mathbf{n}}\mathbf{n} = 0$, ибо $\mathbf{n}$ - вектор, касательный к геодезической (гауссовы нормальные координаты), в силу чего

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{R}(\mathbf{e}_k,\mathbf{n})\,\mathbf{n} = \mathbf{e}_i\cdot {}^{(4)}\nabla_{\mathbf{n}}\left(K_k{}^m\mathbf{e}_m\right) = K_{kl,n} - K_k{}^m\mathbf{e}_m\cdot\nabla_{\mathbf{n}}\mathbf{e}_i$$

Так как $[e,n_- = 0$, то
откуда

$$(4)\ \nabla_{\mathrm{n}}\mathrm{e}_l = {}^{(4)}\nabla_l \mathrm{n} = -K_l\mathrm{e}_j$$

$$R_{inkn} = \varepsilon R^n{}_{ink} = K_{kl,n} + K_l{}^j K_{lk}$$

Solution 9.33.

Компоненты тензора Римана были вычислены в задаче 9.32. Свертывая, получаем

$$(4)\ R^l_j = g^{ik}\left({}^{(4)}R^n_{knj} + {}^{(4)}R^m_{kmi}\right) =$$
$$= {}^{(3)}R^i{}_j + \varepsilon\left(g^{ik}K_{kj,n} + 2K^i_m K^m j - K^i{}_j K\right),$$

где $K \equiv K_i$. Но $g^{ik}{}_{,n} = -g^{im}g^{ks}g_{ms,n}$ (см., например, задачу 21.1), и в гауссовых нормальных координатах $-g_{ms,n} = 2K_{ms}$, поэтому

$$g^{ik}, n = 2g^{im}g^{ks}K_{ms} = 2K^{ik}$$

У равнение (1) теперь можно представить в виде

$$(4)\quad \begin{aligned} R^i &= {}^{(3)}R^i_j + \varepsilon\left(g^{ik}K_{kj,n} + g^{ik}{}_{,n}K_{kj} - K^i{}_j K\right) = \\ &= {}^{(3)}R^i_j + \varepsilon\left(K^i{}_{j,n} - K^i{}_j K\right). \end{aligned}$$

Для других компонент тензора Риччи получаем

$${}^{(4)}R^n{}_j = \boldsymbol{\varepsilon}{}^{(4)}R^\alpha_{n\alpha j} = -{}^{(4)}R^n i_j = \varepsilon\left(K_{!j} - K^i{}_{jil}\right),$$
$${}^{(4)}R^n_n = \varepsilon{}^{(4)}R^i_{nin} = \varepsilon g^{ij}\left(K_{ij,n} + K_{im}K^m{}_j\right) = \varepsilon\left(K_{,n} - K_{im}K^{mi}\right)$$

Таким образом, скаляр Риччи равен

$$(4)\ R = {}^{(4)}R^n_n + {}^{(4)}R_{ii} = {}^{(3)}R + \varepsilon\left(2K_{,n} - K_{im}K^{im} - K^2\right)$$

а компоненты тензора Эйнштейна -

$$G^n_n = {}^{(4)}R^n_n - \frac{1}{2}{}^{(4)}R = -\frac{1}{2}{}^{(3)}R + \frac{1}{2}\varepsilon\left(K^2 - K_{lm}K^{im}\right),$$
$${}^{(4)}G^n{}_j = {}^{(4)}R^n j = \varepsilon\left(K_{|j} - K^i{}_{j|l}\right),$$

$(4)\ G^i_j = {}^{(4)}R^i_j - \frac{1}{2}\delta^{ii}{}^{(4)}R =$

$$= {}^{(3)}G^i_j + \varepsilon\left[K^i{}_{j,n} - K^i_j K - \frac{1}{2}\delta_{jj}\left(2K_{,n} - K_{im}K^{im} - K^2\right)\right]$$

Приравнивая выражения (6) и (7) соответствующим компонентам тензора энергии-импульса, получаем «уравнения с начальными значениями» для гравитационного поля.

Pewenue 9.34.

Поскольку на сферической поверхности не существует выделенного направления, то в ортонормированном репере тензор внешней кривизны $K_{ij} \sim \delta_{ij}$. Таким образом, любой вектор является его собственным вектором. Из определения тензора $\mathbf{K}$ как скорости изменения вектора нормали $\mathbf{n}$ следует, что собственное значение равно $-1/($ радиус сферы$) = -1/a$.

Подкрепим эти интуитивные соображения вычислениями. Для удобства перейдем к обычным сферическим координатам r, ϑ, φ. Для сферы они совпадают с гауссовыми нормальными координатами и

Поскольку

$$ds^2 = {}^{(2)}g_{ik}dx^t dx^k = r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)$$

$$K_{lj} = -\frac{1}{2}g_{lj,n} = -\frac{1}{2}g_{lj,r}$$

ТО

$$K_{\hat\theta\hat\theta} = \frac{1}{g_{\vartheta\vartheta}}K_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r^2}\left(-\frac{1}{2}r^2\right)_{,r} = -\frac{1}{a},$$
$$K_{\hat\varphi\hat\varphi} = \frac{1}{g_{\varphi\varphi}}K_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\left(-\frac{1}{2}r^2\sin^2\vartheta\right)_{,r} = -\frac{1}{a}.$$

К на этот раз можно воспользоваться интуитивными соображениями. «Выделены» 2 направления: осевое и по окружности цилиндра. По определению тензора К кривизны (скорости изменения вектора нормали п) по этим направлениям должны быть равйы 0 и $-1/a$.

ГПроведем теперь строгий вывод тех же результатов. Цилиндрнческие координаты совпадают с гауссовыми нормальными координатами, и 2-геометрия определяется метрикой

$$ds^2 = r^2 d\varphi^2 + dz^2$$

Ортонормированные компоненты тензора K запишем в виде

$$K_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = \frac{1}{g_{\varphi\varphi}}\left(-\frac{1}{2}g_{\varphi\varphi,r}\right) = -\frac{1}{a},$$
$$K_{\hat{z}\hat{z}} = \frac{1}{g_{zz}}\left(-\frac{1}{2}g_{zz,r}\right) = 0.$$

Таким образом, вычисления подтверждают правильность решения, найденного из интуитивных соображений.

В декартовых координатах

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

а поверхность задана уравнением
где

$$f(x, y, z) = 0$$

$$f = -\frac{1}{2}\left(ax^2 + 2bxy + cy^2\right) + z$$

Единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ определяется формулой

$$\mathbf{n} = \nabla f/|\nabla f = \frac{1}{N}\left[-(ax + by)\mathbf{e}_x - (bx + cy)\mathbf{e}_y + (\mathbf{e}_z)\right]$$

где

$$N \equiv \left[(ax + by)^2 + (bx + cy)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}}$$

Заметим, что поскольку в иачале координат $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$, то векторы $\mathbf{e}_x$ If $\mathbf{e}_y$ можно выбрать в качестве базисных векторов, принадлежайих поверхности (в начале координат). Тогда

$$K_j = -\mathbf{e}_j \cdot \nabla_i \mathbf{n} = -n_{i,i} = -n_{i,l}$$

поскольку в метрике (3) коэффициенты аффинной связности обращаются в нуль. Учитывая, что в начале координат $N_{,x} = N_{,y} = 0$, получаем

$$K_{lj} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$0 = \det\left(K_{ij} - Kg_{ij}\right) = \begin{vmatrix} a - K & b \\ b & c - K \end{vmatrix}$$

где g_{ij} мы найдем, рассматривая сужение метрики (3) на поверхности (5). Поскольку в начале координат $dz = 0$, то в этой же точке $g_{ij} = \delta_{ij}$. Главные кривизны, най денные из уравнения (8), оказываются равными

$$K_{\pm} = \frac{c + a}{2} \pm \frac{c - a}{2}\left[1 + \frac{4b^2}{(c - a)^2}\right]^{1/2}.$$

Им соответствуют собственные векторы

$$\begin{bmatrix} a - K_{\pm} & b \\ b & c - K_{\pm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{\pm}^x \\ V_{\pm}^y \end{bmatrix} = 0.$$

Решая уравнения, находим

$$V_{\pm} = \left(\mathbf{e}_x + \alpha_{\pm}\mathbf{e}_y\right)/\beta_{\pm},$$
$$\alpha_{\pm} \equiv \gamma\left[1 \pm \left(1 + \gamma^{-2}\right)^{1/2}\right],$$
$$\beta_{\pm} \equiv \left(1 + \alpha_{\pm}^2\right)^{1/2},$$
$$\gamma \equiv (a - c)/2b.$$

Решение 9.35. Из уравнения Гаусса - Кодацци (задача 9.32) получаем

$$(3)\ R^{m}{}_{ljk} = {}^{(2)}R^{m}{}_{ljk} + \varepsilon\left(K_{lj}K_k{}^m - K_{lk}K_j{}^m\right).$$

Свертывая по m, j и по i, k и подставляя ${}^{(3)}R^{m_{ljk}} = 0$ (3-пространство плоское), находим скалярную кривизну

$$(2)\ R = -\varepsilon \left({K_t}^j K_j i - {K_l}^i {K_j}' \right)$$

В произвольной очке P на Σ выберем оси координат так, чтобы они совпадали с главными направлениями кривизны, и условимся считать координатой x^i расстояние от точки P, измеряемое вдоль i-й оси. Тогла в точке P (начале координат) ${}^{(2)}g_{it} = \delta_{ij}$ и тензор кривизны K_{lj} диагональный, причем на его главной диа- гонали стоят главные кривизны. Следовательно,

$$(2)\ R = -\varepsilon \left[\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} - \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)^2 \right] = \frac{2}{\rho_1 \rho_2},$$

где мы положили $\varepsilon = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = +1$.

Для 3-мерной гиперповерхности Σ в плоском 4-пространстве из уравнения (1) получаем

$$(3)\quad \begin{aligned} R &= -\varepsilon \left[\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{1}{\rho_8^2} - \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3} \right)^2 \right] = \\ &= \varepsilon \left(\frac{2}{\rho_1 \rho_2} + \frac{2}{\rho_2 \rho_3} + \frac{2}{\rho_1 \rho_3} \right). \end{aligned}$$

Leuven-2023. Римановы нормальные координаты 1 (!?!!??!?)

Consider an arbitrary Lorentzian spacetime manifold. We will not prove it, but it turns out that at any point P on the spacetime manifold, there exists a coordinate system such that the metric locally looks flat. By this, I mean that

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(P) &= \eta_{\mu\nu}, \\ \partial_\rho g_{\mu\nu}(P) &= 0. \end{aligned}$$

The coordinates that accomplish this are known as Riemann normal coordinates. They are incredibly useful because the relative simplicity of the metric makes many calculations simpler. In this problem, we will explore various aspects of Riemann normal coordinates.

Leuven-2023. Римановы нормальные координаты 1 (!?!!??!?)

9. Once we are in such a Riemann normal coordinate frame, what happens to the Christoffel symbols $\Gamma^\rho_{\mu\nu}(P)$, evaluated at P? Can you say anything about $\partial_\sigma \Gamma^\rho_{\mu\nu}(P)$, i.e. derivatives of the Christoffel symbol?

Leuven-2023. Римановы нормальные координаты 1 (!?!!??!?)

10. Use this result to show that the Riemann tensor, evaluated at P, is given by

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}(P) = \frac{1}{2} \left(\partial_\sigma \partial_\mu g_{\nu\rho}(P) - \partial_\rho \partial_\mu g_{\nu\sigma}(P) + \partial_\rho \partial_\nu g_{\mu\sigma}(P) - \partial_\sigma \partial_\nu g_{\mu\rho}(P) \right).$$

That is, the Riemann tensor is determined entirely by second derivatives of the metric at the point P. Importantly, the Riemann tensor is not necessarily zero! So, even though our metric looks locally like Minkowski space at the point P, the underlying manifold can still be curved and thus the Riemann tensor is non-trivial at the point P.

You should immediately appreciate how simple the expression (??) is, especially when compared to the fully general expression. This simplicity makes many properties of the Riemann tensor immediately obvious. For example, you should be able to easily see that the Riemann tensor satisfies the following (anti-)symmetry properties:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho} = R_{\rho\sigma\mu\nu}.$$

Additionally, you can (with a just a little bit more work) prove that

$$R_{\mu[\nu\rho\sigma]} = 0.$$

Of course, we have derived these properties in our nice Riemann normal coordinate system. However, these are all covariant expressions that involve only tensors. We can do coordinate transformations on these covariant expressions, and the result will be true in arbitrary coordinate frames. Thus Riemann normal coordinates provide a very easy way to prove the symmetry properties of the Riemann tensor.

Leuven-2023. Римановы нормальные координаты 1 (!?!!??!?)

11.) Bonus: use Riemann normal coordinates to prove the Bianchi identity:

$$\nabla_{[\lambda} R_{\mu\nu]\rho\sigma},$$

where by square brackets we mean the fully antisymmetric combination of all indices inside the brackets.

Another reason to use Riemann normal coordinates is that the metric remains relatively simple within some small neighborhood of the point P. This can help us understand geodesics and distances, even on very complicated spacetimes. In the next few problems, we will see this simplicity explicitly.

Leuven-2023. Римановы нормальные координаты 1 (!?!!??!?)

12.) Without loss of generality, we can choose the point P to be at the coordinate $x^\mu = 0$. Show that any geodesic that goes through P must locally take the form

$$x^\mu(\lambda) = c^\mu \lambda$$

for some set of constants c^μ. 13.) Now, differentiate the geodesic equation with respect to λ. Combine this new equation with the result (??) from problem 12 to show that the Christoffel symbols must satisfy

$$\partial_\nu \Gamma^\mu_{\rho\sigma}(P) + \partial_\rho \Gamma^\mu_{\sigma\nu}(P) + \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho}(P) = 0.$$

Leuven-2023. Римановы нормальные координаты 1 (!?!!??!?)

14.) Bonus: prove that any number of (fully symmetrized) derivatives of the Christoffel symbol vanishes at P. That is, prove that

$$\partial_{(\nu_1} \partial_{\nu_2} ... \partial_{\nu_n} \Gamma^\mu_{\rho\sigma)}(P) = 0.$$

Leuven-2023. Римановы нормальные координаты 1 (!?!!??!?)

15.) Use the result (??) from problem 13 to prove that

$$\partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu}(P) = -\frac{1}{3}\left(R_{\mu\rho\nu\sigma}(P) + R_{\mu\sigma\nu\rho}(P)\right).$$

Leuven-2023. Римановы нормальные координаты 1 (!?!!??!?)

16.) Finally, consider a new point P' that is at a coordinate x^μ in our Riemann normal coordinate frame. Do a Taylor expansion of the metric around the point P (which we set earlier to be at the origin $x^\mu = 0$) and then use the result (??) from problem 15 to show that

$$g_{\mu\nu}\left(P'\right) = \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{3} R_{\mu\rho\nu\sigma}(P) x^\rho x^\sigma + \mathcal{O}\left(x^3\right),$$

where by $\mathcal{O}\left(x^3\right)$ we mean terms that contain at least three powers of the coordinate x^μ of the point P'.

As long as P' is sufficiently close to P such that we can ignore these higher-order terms, we have a very simple expression that tells us that the Riemann tensor is precisely related to how much the metric deviates from the Minkowski metric as we move away from P. So, even though we started with something that is locally flat at P, the underlying curvature of the manifold forces the metric to change as we move away from P.

Решения (!! удалю много воды и разделю на разные задачи!!!)

9. Remember, the Christoffel symbols are determined by the first derivative of the metric:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma}\left(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right).$$

Since all of these derivatives vanish at P, we conclude that $\Gamma^\rho_{\mu\nu}(P) = 0$. However, this does not mean that $\partial_\sigma \Gamma^\rho_{\mu\nu}(P)$ is zero! We only know that the first derivatives of the metric vanish at a single point; we know nothing about the second derivatives yet at that point. As is standard in calculus, a function can have its first derivative but not its second derivative vanish at a particular point. 10. We can write out the first derivative of the Christoffel symbol more explicitly:

$$\begin{aligned}
\partial_\sigma \Gamma^\rho_{\mu\nu} =& \partial_\sigma \left(\frac{1}{2} g^{\rho\lambda}\left(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\right)\right) \\
=& \frac{1}{2}\left(\partial_\sigma g^{\rho\lambda}\right)\left(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\right) \\
&+ \frac{1}{2} g^{\rho\lambda}\left(\partial_\sigma \partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\sigma \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\sigma \partial_\lambda g_{\mu\nu}\right).
\end{aligned}$$

If we evaluate this at the point P, all first derivatives of the metric vanish, and so this simplifies to

$$\partial_\sigma \Gamma^\rho_{\mu\nu}(P) = \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda}\left(\partial_\sigma\partial_\mu g_{\nu\lambda}(P) + \partial_\sigma\partial_\nu g_{\mu\lambda}(P) - \partial_\sigma\partial_\lambda g_{\mu\nu}(P)\right).$$

Now, recall that the Riemann tensor is in general given by

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho\Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \partial_\sigma\Gamma^\mu_{\nu\rho} + \Gamma^\mu_{\rho\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\rho}.$$

We have shown that $\Gamma^\mu_{\nu\rho}(P) = 0$, and we know from equation (0.32) what derivatives of the Christoffel symbol are, and so this whole equation taken at the point P becomes

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}(P) = \partial_\rho\Gamma^\mu_{\nu\sigma}(P) - \partial_\sigma\Gamma^\mu_{\nu\rho}(P)$$

$$\begin{aligned}
=&\frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}(\partial_\rho\partial_\nu g_{\sigma\lambda}(P) + \underbrace{\partial_\rho\partial_\sigma g_{\nu\lambda}(P)}_{\text{(cancels)}} - \partial_\rho\partial_\lambda g_{\nu\sigma}(P)) \\
&- \frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}(\partial_\sigma\partial_\nu g_{\rho\lambda}(P) + \underbrace{\partial_\sigma\partial_\rho g_{\nu\lambda}(P)}_{\text{(cancels)}} - \partial_\sigma\partial_\lambda g_{\nu\rho}(P)) \\
=&\frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\left(\partial_\rho\partial_\nu g_{\sigma\lambda}(P) - \partial_\rho\partial_\lambda g_{\nu\sigma}(P) - \partial_\sigma\partial_\nu g_{\rho\lambda}(P) + \partial_\sigma\partial_\lambda g_{\nu\rho}(P)\right).
\end{aligned}$$

Note that we used the fact that partial derivatives commute to cancel out the two indicated terms. From here, we can immediately see that the corresponding expression where all indices are lowered is

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{1}{2}\left(\partial_\rho\partial_\nu g_{\sigma\mu}(P) - \partial_\rho\partial_\mu g_{\nu\sigma}(P) - \partial_\sigma\partial_\nu g_{\rho\mu}(P) + \partial_\sigma\partial_\mu g_{\nu\rho}(P)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_\sigma\partial_\mu g_{\nu\rho}(P) - \partial_\rho\partial_\mu g_{\nu\sigma}(P) + \partial_\rho\partial_\nu g_{\mu\sigma}(P) - \partial_\sigma\partial_\nu g_{\mu\rho}(P)\right),
\end{aligned}$$

where in the last equality we moved terms around and used the fact that the metric is symmetric. This is the result we wanted to prove.

11. Bonus: We will prove the Bianchi identity $\nabla_{[\lambda}R_{\mu\nu]\rho\sigma} = 0$ by first proving that, in our Riemann normal coordinate frame, $\nabla_{[\lambda}R_{\mu\nu]\rho\sigma}(P) = 0$, and then arguing that this result generalizes. First, we note that since the Christoffel symbols vanish at the point P in Riemann normal coordinates, the covariant derivative acting on the Riemann tensor reduces simply to an ordinary derivative, and thus

$$\nabla_\lambda R_{\mu\nu\rho\sigma}(P) = \partial_\lambda R_{\mu\nu\rho\sigma}(P).$$

Now, if we plug in the result (0.35) from problem 10, we can write the Riemann tensor in terms of derivatives acting on the metric, leaving us with

$$\nabla_\lambda R_{\mu\nu\rho\sigma}(P) = \frac{1}{2}\left(\partial_\lambda\partial_\sigma\partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\lambda\partial_\rho\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\lambda\partial_\rho\partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\lambda\partial_\sigma\partial_\nu g_{\mu\rho}\right)(P),$$

where all terms in the right-hand side are evaluated at the point P. Similarly, rearranging the λ, μ, and ν indices in this expression also tells us that

$$\nabla_\mu R_{\nu\lambda\rho\sigma}(P) = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\partial_\sigma\partial_\nu g_{\lambda\rho} - \partial_\mu\partial_\rho\partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \partial_\mu\partial_\rho\partial_\lambda g_{\nu\sigma} - \partial_\mu\partial_\sigma\partial_\lambda g_{\nu\rho}\right)(P),$$

and

$$\nabla_\nu R_{\lambda\mu\rho\sigma}(P) = \frac{1}{2}\left(\partial_\nu\partial_\sigma\partial_\lambda g_{\mu\rho} - \partial_\nu\partial_\rho\partial_\lambda g_{\mu\sigma} + \partial_\nu\partial_\rho\partial_\mu g_{\lambda\sigma} - \partial_\nu\partial_\sigma\partial_\mu g_{\lambda\rho}\right)(P).$$

My claim now is that if we add up (0.37), (0.37), and (0.39) and use fact that partial derivatives commute ($\partial_\alpha\partial_\beta = \partial_\beta\partial_\alpha$), then the result is zero. I have highlighted the individual terms that cancel in the same colors as one another, hopefully for clarity. You should go through and agree that everything does cancel against one another, leaving us with:

$$\nabla_\lambda R_{\mu\nu\rho\sigma}(P) + \nabla_\mu R_{\nu\lambda\rho\sigma}(P) + \nabla_\nu R_{\lambda\mu\rho\sigma}(P) = 0.$$

My claim now is that if we add up (0.37), (0.37), and (0.39) and use fact that partial derivatives commute ($\partial_\alpha\partial_\beta = \partial_\beta\partial_\alpha$), then the result is zero. I have highlighted the individual terms that cancel in the same colors as one another, hopefully for clarity. You should go through and agree that everything does cancel against one another, leaving us with:

$$\nabla_\lambda R_{\mu\nu\rho\sigma}(P) + \nabla_\mu R_{\nu\lambda\rho\sigma}(P) + \nabla_\nu R_{\lambda\mu\rho\sigma}(P) = 0.$$

With this in mind, we can now prove that the Bianchi identity holds at the point P. Remember, the bracket notation $[\lambda\mu\nu]$ means the fully antisymmetric combination of those three indices, weighted overall by a factor of 1/3 !. That is, the definition is such that

$$\nabla_{[\lambda}R_{\mu\nu]\rho\sigma} \equiv \frac{1}{3!}\left(\nabla_\lambda R_{\mu\nu\rho\sigma} + \nabla_\mu R_{\nu\lambda\rho\sigma} + \nabla_\nu R_{\lambda\mu\rho\sigma} \right.$$
$$\left. -\nabla_\lambda R_{\nu\mu\rho\sigma} - \nabla_\mu R_{\lambda\nu\rho\sigma} - \nabla_\nu R_{\mu\lambda\rho\sigma}\right).$$

Since the Riemann tensor is antisymmetric in its first pair of indices, the second line turns out to actually just be identical to the first line, and thus we are left with

$$\nabla_{[\lambda}R_{\mu\nu]\rho\sigma} = \frac{1}{3}\left(\nabla_\lambda R_{\mu\nu\rho\sigma} + \nabla_\mu R_{\nu\lambda\rho\sigma} + \nabla_\nu R_{\lambda\mu\rho\sigma}\right).$$

Combining this with our result from (0.40) thus immediately tells us that

$$\nabla_{[\lambda}R_{\mu\nu]\rho\sigma}(P) = 0.$$

So, the Bianchi identity is true at the point P in our Riemann normal coordinate frame. But, since this is a tensor equation, it holds irrespective of the coordinate frame we are in. Additionally, since there was nothing special about the point P we picked for our Riemann normal coordinate frame, the same result should hold at all points on our spacetime manifold. Hence the Bianchi identity will also be true at all points in any arbitrary coordinate frame.

12. Since the Christoffel symbols vanish at P, the geodesic equation at the point P simply becomes

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} = 0.$$

This is in general solved by $x^\mu(\lambda) = c^\mu\lambda + d^\mu$, for some constants c^μ and d^μ. Without loss of generality, we can choose the point P (which is chosen to be the origin of our spacetime) to correspond to $\lambda = 0$, which in turn sets $d^\mu = 0$. Thus, $x^\mu(\lambda) = c^\mu\lambda$ near P for any geodesic that goes through the point P. If we were to solve this far from P, we would need to know the Christoffel symbols away from P, but locally this suffices. 13. Differentiating the geodesic equation and applying the chain rule tells us that

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}\right) \\
&= \frac{d^3x^\mu}{d\lambda^3} + \frac{d}{d\lambda}\left(\Gamma^\mu_{\rho\sigma}\right)\frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\left(\frac{d^2x^\rho}{d\lambda^2}\frac{dx^\sigma}{d\lambda} + \frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{d^2x^\sigma}{d\lambda^2}\right) \\
&= \frac{d^3x^\mu}{d\lambda^3} + \frac{dx^\nu}{d\lambda}\left(\partial_\nu\Gamma^\mu_{\rho\sigma}\right)\frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\left(\frac{d^2x^\rho}{d\lambda^2}\frac{dx^\sigma}{d\lambda} + \frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{d^2x^\sigma}{d\lambda^2}\right).
\end{aligned}$$

At the point P, we know that geodesics take the form $x^\mu(\lambda) = c^\mu\lambda$, so their second and third derivatives with respect to λ vanish, and additionally that $\Gamma^\mu_{\rho\sigma}(P) = 0$. Thus, this equation at the point P simply reduces to

$$0 = \left(\partial_\nu\Gamma^\mu_{\rho\sigma}(P)\right)c^\nu c^\rho c^\sigma.$$

Since $c^\nu c^\rho c^\sigma$ is fully symmetric in the three indices, this can also be written as

$$0 = \left(\partial_{(\nu}\Gamma^\mu_{\rho\sigma)}(P)\right)c^\nu c^\rho c^\sigma.$$

This equation holds true for arbitrary constants c^μ, since for any such set of constants we can construct the corresponding geodesic. Thus, the only way to solve this is to demand that $\partial_{(\nu}\Gamma^\mu_{\rho\sigma)}(P) = 0$. Lastly, the Christoffel symbols are symmetric in their lower indices, and thus this is equivalent to demanding that

$$\partial_\nu\Gamma^\mu_{\rho\sigma}(P) + \partial_\rho\Gamma^\mu_{\sigma\nu}(P) + \partial_\sigma\Gamma^\mu_{\nu\rho}(P) = 0.$$

14. Bonus: Consider taking n derivatives of the geodesic equation with respect to λ:

$$0 = \frac{d^{n+2}x^\mu}{d\lambda^{n+2}} + \frac{d^n}{d\lambda^n}\left(\Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}\right).$$

Near the point P, we know that $x^\mu(\lambda) = c^\mu\lambda$, and so the first term clearly vanishes, since taking $n+2$ derivatives on a single instance of λ will yield zero. The remaining second term in the geodesic equation becomes (using the chain rule):

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d^n}{d\lambda^n}\left(\Gamma_{\rho\sigma}(P)^\mu c^\rho c^\lambda\right) \\
&= \frac{dx^{\nu_1}}{d\lambda}\partial_{\nu_1}\left(\frac{dx^{\nu_2}}{d\lambda}\partial_{\nu_2}\left(...\frac{dx^{\nu_n}}{d\lambda}\partial_{\nu_n}\left(\Gamma^\mu_{\rho\sigma}(P)c^\rho c^\sigma\right)...\right)\right) \\
&= \partial_{\nu_1}\partial_{\nu_2}...\partial_{\nu_n}\left(\Gamma^\mu_{\rho\sigma}(P)\right)c^{\nu_1}c^{\nu_2}...c^{\nu_n}c^\rho c^\sigma.
\end{aligned}$$

That is, the only term that survives is the one where all derivatives act on the Christoffel symbols, since the c^μ are constants. Then, we once again note that $c^{\nu_1}c^{\nu_2}...c^{\nu_n}c^\rho c^\sigma$ is fully symmetric in all of its indices, and so we can write this as

$$\partial_{(\nu_1}\partial_{\nu_2}...\partial_{\nu_n}\Gamma^\mu_{\rho\sigma)}(P) = 0.$$

15. First, recall from equation (0.34) that since all Christoffel symbols vanish at P, the Riemann tensor at P is simply

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}(P) = \partial_\rho\Gamma^\mu_{\nu\sigma}(P) - \partial_\sigma\Gamma^\mu_{\nu\rho}(P).$$

From this, it immediately follows that

$$R^\mu_{\rho\nu\sigma}(P) + R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}(P) = \partial_\rho\Gamma^\mu_{\nu\sigma}(P) + \partial_\nu\Gamma^\mu_{\rho\sigma}(P) - 2\partial_\sigma\Gamma^\mu_{\nu\rho}(P).$$

Our result from problem 13 then tells us that, using the symmetry of the Christoffel symbols, the first two terms on the right-hand side of the above equation satisfy

$$\partial_\rho\Gamma^\mu_{\nu\sigma}(P) + \partial_\nu\Gamma^\mu_{\rho\sigma}(P) = -\partial_\sigma\Gamma^\mu_{\nu\rho}(P),$$

and thus we find that

$$R^\mu_{\rho\nu\sigma}(P) + R^\mu_{\nu\rho\sigma}(P) = -3\partial_\sigma\Gamma^\mu_{\nu\rho}(P).$$

We can easily rewrite this as

$$\partial_\sigma\Gamma^\mu_{\nu\rho}(P) = -\frac{1}{3}\left(R^\mu_{\rho\nu\sigma}(P) + R^\mu_{\nu\rho\sigma}(P)\right).$$

This proves the intermediate step listed in the problem.

Armed with this, let's explicitly write out $\partial_\sigma\Gamma^\mu_{\nu\rho}(P)$ in terms of derivatives of the metric, keeping in mind that first derivatives vanish:

$$\partial_\sigma\Gamma^\lambda_{\nu\rho}(P) = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\mu}\left(\partial_\sigma\partial_\nu g_{\rho\mu}(P) + \partial_\sigma\partial_\rho g_{\nu\mu}(P) - \partial_\sigma\partial_\mu g_{\nu\rho}(P)\right),$$

which in turn means that

$$\eta_{\mu\lambda}\partial_\sigma\Gamma^\lambda_{\nu\rho}(P) = \frac{1}{2}\left(\partial_\sigma\partial_\nu g_{\mu\rho}(P) + \partial_\sigma\partial_\rho g_{\mu\nu}(P) - \partial_\sigma\partial_\mu g_{\nu\rho}(P)\right)$$

Notice that the last two terms are antisymmetric under $\mu \leftrightarrow \rho$, and thus we can add the symmetric part to cancel them and solve for $\partial_\sigma\partial_\nu g_{\mu\rho}(P)$:

$$\partial_\sigma\partial_\nu g_{\mu\rho}(P) = \eta_{\mu\lambda}\partial_\sigma\Gamma^\lambda_{\nu\rho}(P) + \eta_{\rho\lambda}\partial_\sigma\Gamma^\lambda_{\nu\mu}(P).$$

Lastly, if we use the intermediate result (0.56) to express the right-hand side of this in terms of the Riemann tensor, we find that

$$\begin{aligned}\partial_\sigma\partial_\nu g_{\mu\rho}(P) &= -\frac{1}{3}\eta_{\mu\lambda}\left(R^\lambda_{\rho\nu\sigma}(P) + R^\lambda_{\nu\rho\sigma}(P)\right) - \frac{1}{3}\eta_{\rho\lambda}\left(R^\lambda{}_{\mu\nu\sigma}(P) + R^\lambda{}_{\nu\mu\sigma}(P)\right)\\ &= -\frac{1}{3}(\underbrace{R_{\mu\rho\nu\sigma}(P)}_{\text{cancels}} + R_{\mu\nu\rho\sigma}(P) + \underbrace{R_{\rho\mu\nu\sigma}(P)}_{\text{cancels}} + R_{\rho\nu\mu\sigma}(P))\\ &= -\frac{1}{3}\left(R_{\mu\nu\rho\sigma}(P) + R_{\rho\nu\mu\sigma}(P)\right).\end{aligned}$$

Rearranging the indices slightly, and using commutativity of partial derivatives, we find the desired result:

$$\partial_\rho\partial_\sigma g_{\mu\nu}(P) = -\frac{1}{3}\left(R_{\mu\rho\nu\sigma}(P) + R_{\mu\sigma\nu\rho}(P)\right).$$

16. The metric at the point P', expressed in terms of a Taylor expansion around the point P, is in general exactly what you would expect:

$$g_{\mu\nu}(P') = g_{\mu\nu}(P) + \partial_\rho g_{\mu\nu}(P)x^\rho + \frac{1}{2!}\partial_\rho\partial_\sigma g_{\mu\nu}(P)x^\rho x^\sigma + \frac{1}{3!}\partial_\rho\partial_\sigma\partial_\lambda g_{\mu\nu}(P)x^\rho x^\sigma x^\lambda + ...$$

Note that we used the fact that P' is at coordinate x^μ and P at the origin, so the coordinate distance between the points really is just x^μ. From here on out, assume x^μ is small so we can neglect the terms that are $\mathcal{O}\left(x^3\right)$ or higher. Then, plug in $g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu}, \partial_\rho g_{\mu\nu}(P) = 0$, and the result from the previous problem:

$$g_{\mu\nu}(P') = \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{6}\left(R_{\mu\rho\nu\sigma}(P) + R_{\mu\sigma\nu\rho}(P)\right)x^\rho x^\sigma + \mathcal{O}\left(x^3\right).$$

Since $x^\rho x^\sigma$ is symmetric under $\rho \leftrightarrow \sigma$, we can immediately see that $R_{\mu\rho\nu\sigma}x^\rho x^\sigma = R_{\mu\sigma\nu\rho}x^\rho x^\sigma$, i.e. when contracted with $x^\rho x^\sigma$ we can simply take the part of $R_{\mu\rho\nu\sigma}$ that is symmetric under $\rho \leftrightarrow \sigma$. Thus, we are finally left with

$$g_{\mu\nu}(P') = \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{3}R_{\mu\rho\nu\sigma}(P)x^\rho x^\sigma + \mathcal{O}\left(x^3\right).$$

13.2.5 Problems about Killing Vectors and Symmetries

L-10.1. Поля Киллинга для 2-сферы

Решив уравнения Киллинга, найти векторные поля Киллинга для 2-сферы

$$ds^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2.$$

Solution

10.1. На 2-сфере задана метрика

$$ds^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2$$

от нуля отличны лишь коэффициенты аффинной связности

$$\Gamma^{\varphi}\vartheta\varphi = \Gamma_{\varphi\vartheta} = \operatorname{ctg}\vartheta, \quad \Gamma_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta.$$

Из уравнений Киллинга
получаем

$$\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = \xi_{\alpha,\beta} + \xi_{\beta,\alpha} - 2\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\xi_{\mu} = 0$$

при $\alpha = \beta = \varphi$ $\quad \xi_{\varphi,\varphi} = -\xi_{\theta}\sin\vartheta\cos\vartheta$;
при $\alpha = \beta = \vartheta$ $\quad \xi_{\theta,\theta} = 0$, следовательно, $\xi_{\vartheta} = f(\varphi)$;
при $\alpha = \vartheta, \beta = \varphi$ $\quad \xi_{\theta,\varphi} + \xi_{\varphi,\theta} = 2\operatorname{ctg}\vartheta\xi_{\varphi}$.

Подставляя (2) в (1), находим
откуда

$$\xi_{\varphi,\varphi} = -f(\varphi)\sin\vartheta\cos\vartheta$$

$$\xi_{\Phi} = -F(\varphi)\sin\vartheta\cos\vartheta + g(\vartheta)$$

где $F(\varphi) \equiv \int f d\varphi$. Подставляя затем (4) и (2) в соотношение (3), преобразуем его к виду
или

$$\frac{df}{d\varphi} + \frac{dg}{d\vartheta} - F\left(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta\right) = 2\operatorname{ctg}\vartheta g - 2\cos^2\vartheta F$$

$$\frac{df}{d\varphi} + F(\varphi) = -\left(\frac{dg}{d\vartheta} - 2\operatorname{ctg}\vartheta g(\vartheta)\right)$$

Поскольку левая часть зависит только от φ, а правая-только от $\boldsymbol{\vartheta}$, каждая часть должна быть постоянной:

$$\frac{df}{d\varphi} + \int f d\varphi = b,$$
$$\frac{dg}{d\vartheta} - 2\operatorname{ctg}\vartheta g = -b.$$

У равнение (6) имеет интегрирующий множитель

$$\exp\left[-2\int \operatorname{ctg}\vartheta d\vartheta\right] = \sin^{-2}\vartheta$$

поэтому его можно представить в виде
(??????)
откуда

$$\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{g}{\sin^2\vartheta}\right) = \frac{-b}{\sin^2\vartheta}$$

$$g(\theta) = (b\operatorname{ctg}\theta + c)\sin^2\theta$$

У равнение (5) легко решается после однократного дифференцирования:

$$\frac{d^2 f}{d\varphi^2} + f = 0,$$
$$f = d\cos\varphi + e\sin\varphi,$$
$$F = d\sin\varphi - e\cos\varphi.$$

[Постоянная интегрирования включена в $g(\vartheta)$.]
Подстановка решений в (5), т. е.
$-d\sin\varphi + e\cos\varphi + d\sin\varphi - e\cos\varphi = b$
показывает, что $b = 0$. Но тогда из уравнений (2) и (7) получаем

$$\xi_\theta = d\cos\varphi + e\sin\varphi = \xi\theta,$$
$$\xi_\varphi = c\sin^2\vartheta - \sin\vartheta\cos\vartheta(d\sin\varphi - e\cos\varphi) = \sin^2\vartheta\xi^\varphi.$$

Запишем, таким образом, вектор Киллинга наиболее общего вида:

$$\xi = (d\cos\varphi + e\sin\varphi)\frac{\partial}{\partial\vartheta} + [c - \operatorname{ctg}\vartheta(d\sin\varphi - e\cos\varphi)]\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

Заметим, что он является линейной комбинацией трех векторов Киллинга:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi},$$
$$-\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \operatorname{ctg}\vartheta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$
$$\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \operatorname{ctg}\vartheta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

представляющих собой не что иное, как генераторы группы вращений - обычные операторы моментов количества движения L_z, L_x и L_y.

То же самое условие-КУЛевен-2023.

1. Start with the familiar metric on S^2

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2,$$

where we have set the radius of the sphere to one. Argue physically using the form of this metric that the vector $a = \partial_\phi$ should be a Killing vector. Then, prove this explicitly. 2. Prove that the vector

$$C = -\sin\phi\partial_\theta - \cot\theta\cos\phi\partial_\phi$$

is also a Killing vector. 3. We'll prove in a later problem that in general the commutator of any two Killing vectors is also a Killing vector. For now, just compute the vector B defined by

$$B = [C, A],$$

where $[C, A] = CA - AC$ is the usual commutator. (Bonus: show explicitly that B is a Killing vector.) 4. Show that the Killing vectors A, B, and C have the following commutation relations:

$$[A, B] = C,$$
$$[B, C] = A,$$
$$[C, A] = B.$$

This should be familiar; it is the Lie algebra of the rotation group $SO(3)$, the elements of which are all rotations about the origin of a 3D Euclidean space. Explain why it makes sense for the Killing vectors of S^2 to obey this algebra.

Решения-КУЛевен-2023.

(!!!! тут очень много воды, удалю потом ее, x2 сократится решение!!!)
(тут решение нескольких вопросов, потом сгруппирую)
For this problem, we will need the non-zero Christoffel symbols

$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot\theta.$$

Also, note that we use the convention

$$V = V^\mu\partial_\mu,$$

for all vectors below. 1. The metric tensor is independent of the coordinate ϕ, which means that coordinate changes that are rotations of the form $\phi \to \phi + c$, for some constant c, leave the metric invariant. This is an

isometry of S^2, and intuitively the vector $a = \partial_\phi$ should be a Killing vector that generates this isometry. Let's prove this. First, we note that the Killing vector equation $\nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0$ for a general Killing vector K on S^2 has the following three independent components labelled by (μ, ν):

$$\begin{aligned}
(\theta,\theta): \quad & = \nabla_\theta K_\theta \\
& = \partial_\theta K_\theta - \Gamma^\mu_{\theta\theta} K_\mu \\
& = \partial_\theta K_\theta \\
(\phi,\phi): \quad 0 &= \nabla_\phi K_\phi \\
& = \partial_\phi K_\phi - \Gamma^\mu_{\phi\phi} K_\mu \\
& = \partial_\phi K_\phi - \Gamma^\theta_{\phi\phi} K_\theta \\
& = \partial_\phi K_\phi + \sin\theta\cos\theta K_\theta \\
(\theta,\phi): \quad 0 &= \nabla_\theta K_\phi + \nabla_\phi K_\theta \\
& = \partial_\theta K_\phi + \partial_\phi K_\theta - 2\Gamma^\mu_{\theta\phi} K_\mu \\
& = \partial_\theta K_\phi + \partial_\phi K_\theta - 2\Gamma^\phi_{\theta\phi} K_\phi \\
& = \partial_\theta K_\phi + \partial_\phi K_\theta - 2\cot\theta K_\phi
\end{aligned}$$

If we express our coordinates by $x^\mu = (\theta, \phi)$, then the vector A has components $A^\mu = (0, 1)$, and so $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu = \left(0, \sin^2\theta\right)$. Since $A_\theta = 0$ and $\partial_\phi A_\phi = 0$, the (θ,θ) and (ϕ,ϕ) Killing vector equation components are trivially satisfied. The (θ,ϕ) component is as follows:

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{!}{=} \partial_\theta A_\phi + \partial_\phi A_\theta - 2\cot\theta A_\phi \\
&= \partial_\theta\left(\sin^2\theta\right) + 0 - 2\cot\theta\left(\sin^2\theta\right) \\
&= 2\sin\theta\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta \\
&= 0,
\end{aligned}$$

and thus A is a Killing vector.

2. $C^\mu = (-\sin\phi, -\cot\theta\cos\phi)$, and so $C_\mu = (-\sin\phi, -\sin\theta\cos\theta\cos\phi)$. The three Killing vector equation components are as follows:

$$\begin{aligned}
(\theta,\theta): \quad 0 &\stackrel{!}{=} \partial_\theta C_\theta \\
&= \partial_\theta(-\sin\phi) = 0 \\
(\phi,\phi): \quad 0 &\stackrel{!}{=} \partial_\phi C_\phi + \sin\theta\cos\theta C_\theta \\
&= \partial_\phi(-\sin\theta\cos\theta\cos\phi) + \sin\theta\cos\theta(-\sin\phi) \\
&= \sin\theta\cos\theta\sin\phi - \sin\theta\cos\theta\sin\phi = 0 \\
(\theta,\phi): \quad 0 &\stackrel{!}{=} \partial_\theta C_\phi + \partial_\phi C_\theta - 2\cot\theta C_\phi \\
&= \partial_\theta(-\sin\theta\cos\theta\cos\phi) + \partial_\phi(-\sin\phi) - 2\cot\theta(-\sin\theta\cos\theta\cos\phi) \\
&= \left(-\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\cos\phi - \cos\phi + 2\cos^2\theta\cos\phi \\
&= \left(-\cos^2\theta + \sin^2\theta - 1 + 2\cos^2\theta\right)\cos\phi \\
&= \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta - 1\right)\cos\phi \\
&= (1-1)\cos\phi = 0
\end{aligned}$$

They are all satisfied, and thus C is a Killing vector. 3. First, we compute that

$$\begin{aligned}
CA &= \left(-\sin\phi\partial_\theta - \cot\theta\cos\phi\partial_\phi\right)\left(\partial_\phi\right) \\
&= -\sin\phi\partial_\theta\partial_\phi - \cot\theta\cos\phi\partial_\phi^2.
\end{aligned}$$

The opposite is a little more involved, since A can act on the components of C directly:

$$\begin{aligned}
AC &= \left(\partial_\phi\right)\left(-\sin\phi\partial_\theta - \cot\theta\cos\phi\partial_\phi\right) \\
&= -\cos\phi\partial_\theta + \cot\theta\sin\phi\partial_\phi - \sin\phi\partial_\theta\partial_\phi - \cot\theta\cos\phi\partial_\phi^2.
\end{aligned}$$

Notice that the terms in (0.6) and (0.7) that have two partial derivatives are the same, and so they will cancel when we take the difference. (You should be able to see that this is true in general when computing these commutators, since partial derivatives commute, and so in the future we will simply suppress these terms and only keep the terms where one free derivative is left.) The commutator is thus simply:

$$B = [C, A] = CA - AC = \cos\phi\partial_\theta - \cot\theta\sin\phi\partial_\phi.$$

In components, $B_\mu = (\cos\phi, -\sin\theta\cos\theta\sin\phi)$. One can easily check that this satisfies the Killing vector equation:

$$\begin{aligned}
(\theta,\theta): \quad 0 &\overset{!}{=} \partial_\theta B_\theta \\
&= \partial_\theta(\cos\phi) = 0 \\
(\phi,\phi): \quad 0 &\overset{!}{=} \partial_\phi B_\phi + \sin\theta\cos\theta B_\theta \\
&= \partial_\phi(-\sin\theta\cos\theta\sin\phi) + \sin\theta\cos\theta(\cos\phi) \\
&= -\sin\theta\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\cos\theta\cos\phi = 0 \\
(\theta,\phi): \quad 0 &\overset{!}{=} \partial_\theta B_\phi + \partial_\phi B_\theta - 2\cot\theta B_\phi \\
&= \partial_\theta(-\sin\theta\cos\theta\sin\phi) + \partial_\phi(\cos\phi) - 2\cot\theta(-\sin\theta\cos\theta\sin\phi) \\
&= \left(-\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\sin\phi - \sin\phi + 2\cos^2\theta\sin\phi \\
&= \left(-\cos^2\theta + \sin^2\theta - 1 + 2\cos^2\theta\right)\sin\phi \\
&= \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta - 1\right)\sin\phi \\
&= (1-1)\sin\phi = 0
\end{aligned}$$

4. We've already shown that $[C, A] = B$. Now, let's compute $[A, B]$:

$$\begin{aligned}
[A,B] &= \partial_\phi\left(\cos\phi\partial_\theta - \cot\theta\sin\phi\partial_\phi\right) - \left(\cos\phi\partial_\theta - \cot\theta\sin\phi\partial_\phi\right)\partial_\phi \\
&= \left(\partial_\phi\cos\phi\right)\partial_\theta - \cot\theta\left(\partial_\phi\sin\phi\right)\partial_\phi \\
&= -\sin\phi\partial_\theta - \cot\theta\cos\phi\partial_\phi \\
&= C
\end{aligned}$$

Now, for $[B, C]$:

$$\begin{aligned}
[B,C] =& \left(\cos\phi\partial_\theta - \cot\theta\sin\phi\partial_\phi\right)\left(-\sin\phi\partial_\theta - \cot\theta\cos\phi\partial_\phi\right) \\
&- \left(-\sin\phi\partial_\theta - \cot\theta\cos\phi\partial_\phi\right)\left(\cos\phi\partial_\theta - \cot\theta\sin\phi\partial_\phi\right) \\
=& \cos\phi\partial_\theta\left(-\sin\phi\partial_\theta - \cot\theta\cos\phi\partial_\phi\right) \\
&- \cot\theta\sin\phi\partial_\phi\left(-\sin\phi\partial_\theta - \cot\theta\cos\phi\partial_\phi\right) \\
&+ \sin\phi\partial_\theta\left(\cos\phi\partial_\theta - \cot\theta\sin\phi\partial_\phi\right) \\
&+ \cot\theta\cos\phi\partial_\phi\left(\cos\phi\partial_\theta - \cot\theta\sin\phi\partial_\phi\right) \\
=& \cos\phi\left(\csc^2\theta\cos\phi\partial_\phi\right) \\
&- \cot\theta\sin\phi\left(-\cos\phi\partial_\theta + \cot\theta\sin\phi\partial_\phi\right) \\
&+ \sin\phi\left(\csc^2\theta\sin\phi\partial_\phi\right) \\
&+ \cot\theta\cos\phi\left(-\sin\phi\partial_\theta - \cot\theta\cos\phi\partial_\phi\right) \\
=& \left(\csc^2\theta\cos^2\phi + \csc^2\theta\sin^2\phi - \cot{}^2\theta\sin^2\phi - \cot^2\theta\cos^2\phi\right)\partial_\phi \\
&+ \left(\cot^2\theta\sin^2\cos\phi\partial_\theta - \cot^\theta\sin\phi\cos\phi\right)\partial_\theta \\
=& \left(\csc^2\theta - \cot^2\theta\right)\partial_\phi \\
=& \partial_\phi \\
=& A
\end{aligned}$$

Thus, we find that the Killing vectors satisfy the $SO(3)$ algebra. The group $SO(3)$ describes rotations in 3D; the three generators of the group are rotations in the $x-y$ plane, the $y-z$ plane, and the $x-z$ plane. The Killing vectors we find here are precisely these generators. S^2 should be invariant under such rotations, i.e. they are isometries of the spacetime, and so it is only natural for the isometry group of S^2 to be $SO(3)$.

L-10.2. вектор Киллинга и производная Ли (??)

Доказать, что уравнение Киллинга эквивалентно уравнению

$$\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0$$

$$\mathscr{L}_{\mathbf{g}} = 0,$$

где $\mathbf{g}$ - метрический тензор. Выяснить геометрический смысл этого утверждения.

Solution 10.2.

Утверждение задачи можно доказать непосредственно, если воспользоваться покомпонентной записью уравнений. Другой подход состоит в том, чтобы свернуть $\mathscr{L}_{\mathrm{g}}$ слева справа с двумя произвольными векторными полями A и B:

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{A}\cdot\mathscr{L}_\xi\cdot\mathrm{B} &= \mathscr{L}_\xi(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}) - \mathrm{B}\cdot\mathscr{L}_\xi\mathrm{A} - \mathrm{A}\cdot\mathscr{L}_\xi\mathrm{B} = \\ &= \nabla_\xi(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}) - \mathrm{B}\cdot(\nabla_\xi\mathrm{A} - \nabla_{\mathrm{A}}\xi) - \mathrm{A}\cdot(\nabla_\xi\mathrm{B} - \nabla_{\mathrm{B}}\xi) = \\ &= \mathrm{B}\cdot\nabla_{\mathrm{A}}\xi + \mathrm{A}\cdot\nabla_{\mathrm{B}}\xi = 2A^\alpha B^\beta \xi_{(\alpha;\beta)}. \end{aligned}$$

Поскольку векторные поля A и B выбраны произвольно, величины $\xi_{(\alpha;\beta)}$ должны обратиться в нуль. Геометрический смысл этого утверждения станет ясен, если вспомнить, что производная Ли любой геометрической величины φ_A представляет собой функ«иональное изменение этой величины,

$$\delta\varphi_A \equiv \varphi_A^{\text{новая}}\ (x^\alpha) - \varphi_A^{\text{старая}}\ (x^\alpha)\,,$$

под действием смещения координат на ξ, эквивалентное изменению φ_A при перемещении на ξ по многообразию. Следовательно, если мы хотим, чтобы производная и метрического тензора $\mathbf{g}$ вдоль & обратилась в нуль, то геометрия многообразия не должна изменяться при движении в направлении, задаваемом вектором ξ, т. е. вектор ξ должен указывать направление симметрии пространства-времени.

L-10.3 Обычные свойства векторов Киллинга

а) Доказать, что коммутатор двух векторных полей Киллинга является векторным полем Киллинга.
б) Доказать, что линейная комбинация векторов Киллинга с постоянными коэффициентами является вектором Киллинга.

Solution 10.3.

а) Воспользуемся отношением эквивалентности, доказанным B задаче 10.2. Если $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ - векторы Киллинга, то $\mathscr{L}_{\mathbf{u}}\mathrm{g} = \mathscr{L}_{\mathrm{v}}g = 0$ и, используя полученное в задаче 8.16 соотношение для $\mathscr{L}_{[u,v]}$, находим

$$\mathscr{L}_{[u,v]}g = \left(\mathscr{L}_{\mathbf{u}}\mathscr{L}_{\mathbf{v}} - \mathscr{L}_{\mathbf{v}}\mathscr{L}_{\mathbf{u}}\right)g = 0$$

Следовательно, $[u, v]$ - вектор Киллинга.
б) Если a и b - постоянные, то

$$(au_\alpha + bv_\alpha)_{;\beta} = au_{\alpha;\beta} + bv_{\alpha;\beta}.$$

Следовательно, если векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ удовлетворяют уравнению Киллинга, то их линейная комбинация $a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$ также удовлетворяет этому уравнению.

То же самое условие-КУЛевен-2023.

5. Show that arbitrary linear combinations of Killing vectors are also Killing vectors.
6. given any two Killing vectors K_1 and K_2, show that their commutator $[K_1, K_2]$ is also a Killing vector. That is, if we define $K_3 \equiv [K_1, K_2]$, then you have to show that K_3 satisfies the Killing vector equation. You'll need to use the fact that

$$[\nabla_\rho, \nabla_\sigma]\, V_\mu = -R^\nu_{\mu\rho\sigma} V_\nu,$$

for any arbitrary vector field V.
7. Suppose that you have a collection of matter fields in an arbitrary spacetime for which the corresponding stress-energy tensor $T^{\mu\nu}$ is conserved, i.e. $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. And, assume K is a Killing vector. Then, if we define the current

$$J^\mu \equiv T^{\mu\nu} K_\nu,$$

prove that this current is conserved, i.e. $\nabla_\mu J^\mu = 0$.
8. Consider a geodesic, parameterized by an affine parameter λ, in an arbitrary spacetime, and define $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$. And, let K be a Killing vector in this spacetime. Show that along the geodesic, $K^\mu U_\mu$ is a constant.
(!!!! тут очень много воды, удалю потом ее, x2 сократится решение!!!)

Solution 5

The ∇_μ is a linear operator, so it is obvious.

Solution 6

Let K and L be two Killing vectors, and define M to be their commutator:

$$\begin{aligned} M = [K, L] &= [K^\mu \partial_\mu, L^\nu \partial_\nu] \\ &= K^\mu \partial_\mu L^\nu \partial_\nu - L^\nu \partial_\nu K^\mu \partial_\mu \\ &= K^\mu \left(\partial_\mu L^\nu\right) \partial_\nu - L^\nu \left(\partial_\nu K^\mu\right) \partial_\mu \\ &= \left(K^\nu \left(\partial_\nu L^\mu\right) - L^\nu \left(\partial_\nu K^\mu\right)\right) \partial_\mu . \\ \implies M^\mu &= K^\nu \left(\partial_\nu L^\mu\right) - L^\nu \left(\partial_\nu K^\mu\right) . \end{aligned}$$

Now, note that $\partial_\nu L^\mu = \nabla_\nu L^\mu - \Gamma^\mu_{\nu\rho} L^\rho$, and thus

$$\begin{aligned} M^\mu &= K^\nu \left(\nabla_\nu L^\mu - \Gamma^\mu_{\nu\rho} L^\rho\right) - L^\nu \left(\nabla_\nu K^\mu - \Gamma^\mu_{\nu\rho} K^\rho\right) \\ &= K^\nu \left(\nabla_\nu L^\mu\right) - L^\nu \left(\nabla_\nu K^\mu\right) + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \left(L^\nu K^\rho - K^\nu L^\rho\right) . \end{aligned}$$

The Christoffel symbols $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ are symmetric in their lower indices, while $L^\nu K^\rho - K^\nu L^\rho$ is antisymmetric in ν and ρ, and thus their contraction is zero. We are left with

$$M^\mu = K^\nu \left(\nabla_\nu L^\mu\right) - L^\nu \left(\nabla_\nu K^\mu\right) ,$$

and thus

$$M_\mu = K^\nu \nabla_\nu L_\mu - L^\nu \nabla_\nu K_\mu .$$

We now need to prove that $\nabla_{(\mu} M_{\nu)}$ vanishes. To do this, we first expand it explicitly:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu M_\nu + \nabla_\nu M_\mu =& \nabla_\mu \left(K^\rho \nabla_\rho L_\nu - L^\rho \nabla_\rho K_\nu\right) + \nabla_\nu \left(K^\rho \nabla_\rho L_\mu - L^\rho \nabla_\rho K_\mu\right) \\ =& \underbrace{\nabla_\mu K^\rho \nabla_\rho L_\nu}_{(A)} + K^\rho \nabla_\mu \nabla_\rho L_\nu - \underbrace{\nabla_\mu L^\rho \nabla_\rho K_\nu}_{(B)} - L^\rho \nabla_\mu \nabla_\rho K_\nu \\ &+ \underbrace{\nabla_\nu K^\rho \nabla_\rho L_\mu}_{(C)} + K^\rho \nabla_\nu \nabla_\rho L_\mu - \underbrace{\nabla_\nu L^\rho \nabla_\rho K_\mu}_{(D)} - L^\rho \nabla_\nu \nabla_\rho K_\mu . \end{aligned}$$

Since K and L are both Killing vectors, we know that

$$\begin{aligned} \nabla_\rho K_\mu &= -\nabla_\mu K_\rho , \\ \nabla_\nu L^\rho &= -\nabla^\rho L_\nu , \end{aligned}$$

i.e. we can swap the indices when a single derivative acts on them, at the cost of a minus sign. Thus, we find that

$$(D) = \nabla_\nu L^\rho \nabla_\rho K_\mu = \nabla^\rho L_\nu \nabla_\mu K_\rho = \nabla_\rho L_\nu \nabla_\mu K^\rho = \nabla_\mu K^\rho \nabla_\rho L_\nu = (A),$$

so (A) and (D) cancel out in (0.17). Similarly, (B) and (C) cancel out in (0.17). We are left with

$$\nabla_\mu M_\nu + \nabla_\nu M_\mu = \underbrace{K^\rho \nabla_\mu \nabla_\rho L_\nu}_{(E)} - \underbrace{L^\rho \nabla_\mu \nabla_\rho K_\nu}_{(F)} + \underbrace{K^\rho \nabla_\nu \nabla_\rho L_\mu}_{(G)} - \underbrace{L^\rho \nabla_\nu \nabla_\rho K_\mu}_{(H)} .$$

To deal with the remaining terms, our strategy will be to use the commutator identity

$$\nabla_\mu \nabla_\rho = [\nabla_\mu, \nabla_\rho] + \nabla_\rho \nabla_\mu ,$$

in order to swap the order of derivatives on all terms appearing in (0.20). Once we do this, there will be a number of terms that will look like the Killing vector equation and will thus automatically vanish. So, let's begin:

$$\begin{aligned} (E) &= K^\rho \nabla_\mu \nabla_\rho L_\nu = K^\rho \left[\nabla_\mu, \nabla_\rho\right] L_\nu + K^\rho \nabla_\rho \nabla_\mu L_\nu , \\ (G) &= K^\rho \nabla_\nu \nabla_\rho L_\mu = K^\rho \left[\nabla_\nu, \nabla_\rho\right] L_\mu + K^\rho \nabla_\rho \nabla_\nu L_\mu , \\ (F) &= L^\rho \nabla_\mu \nabla_\rho K_\nu = L^\rho \left[\nabla_\mu, \nabla_\rho\right] K_\nu L^\rho \nabla_\rho \nabla_\mu K_\nu , \\ (H) &= L^\rho \nabla_\nu \nabla_\rho K_\mu = L^\rho \left[\nabla_\nu, \nabla_\rho\right] K_\mu L^\rho \nabla_\rho \nabla_\nu K_\mu . \end{aligned}$$

Clearly, $(E) + (G)$ will have a term proportional to $\nabla_\mu L_\nu + \nabla_\nu L_\mu$, which vanishes. Similarly, a term like $\nabla_\mu K_\nu + \nabla_\nu K_\mu$ will vanish inside of $(F) + (H)$. Therefore, (0.20) becomes:

$$\nabla_\mu M_\nu + \nabla_\nu M_\mu = K^\rho \left(\left[\nabla_\mu, \nabla_\rho\right] L_\nu + \left[\nabla_\nu, \nabla_\rho\right] L_\mu\right) - L^\rho \left(\left[\nabla_\mu, \nabla_\rho\right] K_\nu + \left[\nabla_\nu, \nabla_\rho\right] K_\mu\right) .$$

Now, using the fact that the commutator acting on a vector is $[\nabla_\rho, \nabla_\sigma] V_\mu = -R^\nu{}_{\mu\rho\sigma} V_\nu$, we can write this as

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu M_\nu + \nabla_\nu M_\mu &= -K^\rho \left(R^\lambda{}_{\nu\mu\rho} + R^\lambda{}_{\mu\nu\rho}\right) L_\lambda + L^\rho \left(R^\lambda{}_{\nu\mu\rho} + R^\lambda{}_{\mu\nu\rho}\right) K_\lambda \\
&= -K^\rho L^\lambda \left(R_{\lambda\nu\mu\rho} + R_{\lambda\mu\nu\rho}\right) + K^\lambda L^\rho \left(R_{\lambda\nu\mu\rho} + R_{\lambda\mu\nu\rho}\right) \\
&= K^\rho L^\lambda \left(-R_{\lambda\nu\mu\rho} - R_{\lambda\mu\nu\rho} + R_{\rho\nu\mu\lambda} + R_{\rho\mu\nu\lambda}\right) \\
&= K^\rho L^\lambda \left(-R_{\lambda\nu\mu\rho} - R_{\lambda\mu\nu\rho} + R_{\mu\lambda\rho\nu} + R_{\nu\lambda\rho\mu}\right) \\
&= K^\rho L^\lambda \left(-R_{\lambda\nu\mu\rho} - R_{\lambda\mu\nu\rho} + R_{\lambda\mu\nu\rho} + R_{\lambda\nu\mu\rho}\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

In words, what we did was relabel dummy indices so that we can pull out the same factor of $K^\rho L^\lambda$ on all terms, and then we used the symmetries of the Riemann tensor to show that everything ends up cancelling. Thus, we conclude that

$$\nabla_\mu M_\nu + \nabla_\nu M_\mu = 0,$$

and thus $M = [K, L]$ is a Killing vector. Thus, the commutator of any two Killing vectors is another Killing vector.

Solution 7

7. The covariant derivative ∇_μ satisfies the product rule, much in the same way that the ordinary derivative ∂_μ does. Therefore,

$$\nabla_\mu J^\mu = \nabla_\mu \left(T^{\mu\nu} K_\nu\right) = \left(\nabla_\mu T^{\mu\nu}\right) K_\nu + T^{\mu\nu} \left(\nabla_\mu K_\nu\right)$$

Since the stress-energy tensor is conserved, the first term on the far right-hand side of this expression is zero, and we are left with $\nabla_\mu J^\mu = T^{\mu\nu} \nabla_\mu K_\nu$. Then, since the stress-energy tensor is, by definition, symmetric, we can re-write this as

$$\nabla_\mu J^\mu = T^{\mu\nu} \nabla_\mu K_\nu = T^{\mu\nu} \nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0,$$

where the last equality comes from the Killing vector equation $\nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0$.

Solution 8

8. Using the chain rule, we know that

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda} \left(K_\mu U^\mu\right) &= \frac{dx^\nu}{d\lambda} \nabla_\nu \left(K_\mu U^\mu\right) \\
&= U^\nu \nabla_\nu \left(K_\mu U^\mu\right) \\
&= U^\mu U^\nu \nabla_\nu K_\mu + K_\mu U^\nu \nabla_\nu U^\mu.
\end{aligned}$$

Since $U^\mu U^\nu$ is symmetric, the first term is equivalent to $U^\mu U^\nu \nabla_{(\nu K_{\mu)}}$, which vanishes by the Killing vector equation $\nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0$. The second term vanishes along a geodesic because the geodesic equation is simply $U^\nu \nabla_\nu U^\mu = 0$. Thus, both terms are zero and we are left with $K_\mu U^\mu$ is conserved along a geodesic.

L-10.4.

Доказать, что в евклидовом 3-пространстве три вектора Киллинга, описывающие повороты вокруг осей x, y и z, линейно независимы в любой заданной точке, но ни одна линейная комбинация их с постоянными коэффициентами не равна нулю. Доказать, что в силу этого генераторы группы вращений O (3) порождают 2-мерную поверхность, хотя сама группа 3-мерна. Объяснить, почему так происходит.

Solution

10.4. Тремя векторами Киллинга, описывающими вращения, служат операторы момента количества движения $J_z = x\partial_y - y\partial_x$ и т. д. (см. задачу 10.1). В точке (x_0, y_0, z_0)

$$\begin{aligned}
J_z &= (-y_0, x_0, 0), \\
J_y &= (z_0, 0, -x_0), \\
J_x &= (0, -z_0, y_0),
\end{aligned}$$

поэтому $J_y = -(z_0/y_0) J_z - (x_0/y_0) J_x$ и линейнье комбинации трех векторов в точке порождают лишь 2-мерное пространство.

Предположим, что при некоторых постоянных a и b соотношение

$$aJ_x + bJ_y + J_z = 0$$

выполняется во всех точках. Тогда

$$a\,[J_x, J_y] + b\,[J_y, J_y] + [J_z, J_y] = 0,$$

откуда $J_z \sim J_x$, что, очевидно, невозможно. Следовательно, на всей сфере линейная оболочка векторов J_x, J_y, J_z представляет собой 3-мерное пространство. Кажущееся противоречие объясняется тем, что 2-сферы 2-мерны, но ориентации 2-сфер 3-мерны (чтобы задать ориентацию 2-сферы, необходимо указать, например, 3 угла Эйлера).

L-10.5

. Метрика для аксиально симметричной вращающейся звезды допускает 2 вектора Киллинга $\xi_{(t)}$ и $\xi_{(\varphi)}$. Предположим, что других независимых векторов Киллинга не существует. Доказать, что $\xi_{(t)}$ и $\xi_{(\varphi)}$ коммутируют.

Solution

10.5. Как показано в задаче 10.3, коммутатор двух векторных полей Киллинга является векторным полем Киллинга. По предположению любой вектор Киллинга можно представить в виде суммы (с постоянными коэффициентами) векторов $\boldsymbol{\xi}_{(t)}$ и $\boldsymbol{\xi}_{(\varphi)}$:

$$\left[\xi_{(\varphi)}, \xi_{(t)}\right] = a\xi_{(\Phi)} + b\xi_{(t)}$$

На бесконечности $\xi_{(\varphi)} \to \partial/\partial\varphi$ и $\xi_{(t)} \to \partial/\partial t$, поэтому коммутатор $\left[\xi_{(\varphi)}, \xi_{(t)}\right] \to 0$. Это озна чает, что постоянные a и b должны быть равны нулю, т. е. что коммутатор векторов Киллинга $\boldsymbol{\xi}_{(\varphi)}$ и $\xi_{(t)}$ тождественно равен нулю. (Картер [Carter B., Comm. Math. Phys., 17, 233, (1970)] доказал, что $\left[\xi_{(\varphi)}, \xi_{(t)}\right] = 0$ при весьма общих условиях, даже когда существуют другие векторы Киллинга.)

L-10.6.

Доказать, что любой вектор Киллинга является решением уравнения

$$\xi^{v;\lambda} : \lambda + R^v{}_\sigma \xi^\sigma = 0.$$

Найти вариационный принцип, аналогичный принципу Гамильтона, из которого можно вывести это уравнение. Задача 10.7. Пусть ξ-вектор Киллинга. Доказать, что

$$\xi_{\mu;\alpha\beta} = R_{\gamma\beta\alpha\mu}\xi^\gamma.$$

Solution

10.6. Коммутируя вторые производные любого вектора, получаем

$$\xi_{\mu:v\lambda} - \xi_{\mu;\lambda v} = R_{\mu\sigma\lambda v}\xi^\sigma$$

Воспользуемся уравнением Киллинга

$$\xi_{\mu;v} = -\xi_{v;\mu}$$

и свернем это тензорное соотношение по μ и λ:

$$\xi^{v:\lambda} : \lambda + R^v\xi^\sigma = -\left(\xi^\mu : \mu\right); v.$$

Правая часть обращается в нуль, поскольку в силу уравнения Киллинга $\xi^\mu_{;\mu} = 0$, а левая часть совпадает с левой частью уравнения, приведенного в условиях задачи. Вариационный принцип выписывается без труда, если заметить, что тензор $\xi_{\mu:v}$ антисимметричен, так же как и тензор электромагнитного поля $F_{\mu v}$. Известно, что если $F_{\mu\nu}$ представить в виде

$$F_{\mu\nu} = A_{v;\mu} - A_{\mu;v} = A_{v,\mu} - A_{\mu,v}$$

и проварьировать A_μ, то функция Лагранжа $1k_4F_{\mu v}F^{\mu\nu}$ породит член $F^{\mu\nu} : v$. Следовательно, плотность лагранжиана можно взять равной

$$\mathscr{L} = \xi_{\mu;v}\xi^{\mu;v} - \frac{1}{2}R_{\mu v}\xi^\mu\xi^v,$$

и вариационный принцип

$$\delta \int \mathscr{L}|g|^{1/2} d^4x = 0$$

даст правильное уравнение. В этом нетрудно убедиться, если записать уравнения Эйлера - Лагранжа для найденного лагранжиана.

Дальше другие

Решекие 10.7.

По определению $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ для любого вектора выполняется соотношение

$$\xi_{\sigma;\rho\mu} - \xi_{\sigma;\mu\rho} = R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu}\xi_{\lambda}$$

Добавив к нему еще два соотношения, получающиеся при перестановках индексов, и воспользовавшись циклическим тождеством для тензора Римана
найдем тождество

$$R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu} + R^{\lambda}_{\mu\sigma\rho} + R^{\lambda}_{\rho\mu\sigma} = 0$$

$$0 = \xi_{\sigma;\rho\mu} - \xi_{\sigma;\mu\rho} + \xi_{\mu;\sigma\rho} - \xi_{\mu;\rho\sigma} + \xi_{\rho;\mu\sigma} - \xi_{\rho;\sigma\mu}.$$

Для вектора иллинга оно упрощается и принимает следующий вид:

$$0 = \xi_{\sigma;\rho\mu} - \xi_{\sigma;\mu\rho} - \xi_{\mu;\rho\sigma}$$

Подставляя (3) в (1), получаем

$$\xi_{\mu;\rho\sigma} = R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu}\xi_{\lambda}$$

Solution

10.8. Прежде всего докажем, что «стационарность» эквивалентна существованию временной координаты, для которой $g_{\alpha\beta,t} = 0$. Выберем временную координату так, чтобы $\xi = \partial/\partial t$. Тогда (см. задачи 10.2, 8.3) $\mathscr{L}_{\mathrm{g}}\mathrm{g} = 0$, или

$$g_{\alpha\beta,\gamma}\xi^{\gamma} + g_{\alpha\gamma}\xi^{\gamma},\beta + g_{\beta\gamma}\xi^{\gamma},\alpha = 0.$$

Поскольку $\xi^{\vee} = (1,0,0,0)$, то отсюда следует, что $g_{\alpha\beta,t} = 0$.
Инвариантность относительно обращения времени (определение 1) означает, что метрика $g_{\alpha\beta}$ не зависит от t и

$$g_{ti} = 0.$$

Эквивалентность обоих определений будет доказана, если мы установим, что равенство $g_{tl} = 0$ эквивалентно гиперповерхностной ортогональности вектора $\xi = \partial/\partial t$.
Если $g_{ti} = 0$, то при $\alpha \neq t$

$$\xi_a = g_{ab}\xi^{\beta} = g_{\alpha t} = 0$$

и, следовательно, $\xi_{\alpha} \sim t_{,\alpha}$, т. е. вектор ξ ортогонален поверхностям $t = \mathrm{const}$.
Если вектор & гиперповерхностно ортогонален (см. задачу 7.23), То

$$\xi_{[\alpha;\beta}\xi_{\gamma]} = 0$$

Пользуясь уравнением Киллинга

$$\xi_{(\alpha;\beta)} = 0,$$

преобразуем это соотношение к виду

$$\xi_{\alpha:\beta}\xi_{\gamma} + \xi_{\gamma;\alpha}\xi_{\beta} + \xi_{\beta;\gamma}\xi_{\alpha} = 0$$

Свертывая с ξ^{α} и используя уравнение Киллинга для преобразования первого и третьего членов, получаем
Т. е.

$$\frac{1}{2}\left(\xi_{\alpha;\beta} - \xi_{\beta;\alpha}\right)\xi^2 + \frac{1}{2}\xi^2,\alpha\xi_{\beta} - \frac{1}{2}\xi^2,\beta\xi_{\alpha} = 0,$$
$$\xi^2 \equiv \xi \cdot \xi,$$

$$\left(\xi^{-2},\xi_\beta\right)_{i\alpha}-\left(\xi^{-2}\xi_\alpha\right)_{;\beta}=0.$$

Следовательно, $\xi^{-2\xi_\alpha}$ - градиент, и гри некоторой функции h

$$\xi_\alpha=\xi^2 h,\alpha.$$

Поскольку $\xi^2=g_{tt}$ и $\xi_\alpha=g_{\alpha t}$, то $g_{\alpha t}=g_{tt}h,\alpha$. Полагая $\alpha=t$, получаем $h_{,t}=1$, или $h=t+f\left(x^i\right)$. Выбирая новую временную координату $t'=t+f\left(x^i\right)$, находим
и

$$g_{it'}=g_{tt}h,l=g_{tt'}{}',l=0$$

$$\xi^{\alpha'}=\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta}\xi^\beta=\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial t}=(1,0,0,0)$$

Таким образом, $g_{\alpha\beta}$ по-прежнему не зависит от t'.
Решение 10.9. Выберем систему координат, в которой метрика совпадает с метрикой пространства Минковского $\eta_{\mu\nu}$ (все символы Кристоффеля равны нулю). В этой метрике уравнениеКиллинга для вектора Киллинга ξ имеет вид

$$2\xi_{(\mu;v)}=\xi_{\mu,v}+\xi_{v,\mu}=0.$$

Перечислим линейно-независимые решения уравнения (1) и приведем их классификацию:
Векторы Киллинга, порождающие трансляции:

$$\xi^\mu_t=a^\mu_i,\quad i=1,2,3,4$$

где a_l - постоянные векторы.
Векторы Киллинга, порождающие повороты:

$$\xi^n_k=0,\quad \xi^l_k=\varepsilon^{lkm}x_m,\quad k=1,2,3$$

Проверка:

$$\xi_{k(\mu,v)}=\xi_{k(i,j)}=x_{m,(j}\varepsilon_{i)km}=\delta_{m(j}\varepsilon_{i)km}=-\varepsilon_{k(ij)}=0$$

Векторы Киллинга, порождающие бусты:
Проверка:

$$\xi^k_\mu=\delta^{[0}_\mu x^{k]},\quad k=1,3.$$

$$\xi^k(\mu,v)=\frac{1}{2}\left[\delta^{[0}_\mu\delta^{k]}_v+\delta^{[0}_v\delta^{k]}_\mu\right]=0.$$

Соотношения (2)-(4) задают 10 векторов Киллинга в системе координат, в которой $g_{\mu v}=(-1,1,1,1)$. В любой другой системе координат компоненты ξ^μ_t для $i=1,2,...,10$ можно найти, преобразуя их как векторы.
Решеение 10.10. Изменение скалярного произведения $\mathrm{u}\cdot\xi$ вдоль геодезической определяется выражением

$$\nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}\cdot\xi)=(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\xi}+\mathbf{u}\cdot(\nabla_{\mathbf{u}}\xi).$$

Но $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}=0$, поскольку $\mathbf{u}$ - вектор, касательный к геодезической, а $\mathbf{u}\cdot\nabla_u\xi=0$, так как ξ-вектор Киллинга. В покомпонентной записи получаем

$$\mathbf{u}\cdot\nabla_u\xi=u^\alpha u^\beta\xi_{\alpha;\beta}=u^\alpha u^\beta\xi_{(\alpha;\beta)}=0.$$

Следовательно, вдоль геодезической $\mathbf{u}\cdot\xi=\mathrm{const}$.
Решекие 10.11. Дивергенция вектора J равна

$$J^\mu{}_{;\mu}=\left(T^{\mu v}\xi_v\right)_{;\mu}=T^{\mu v};\mu\xi_v+T^{\mu v}\xi_{v;\mu}=0+T^{\mu v\xi_{(v;\mu)}}=0.$$

Если $\xi=\partial/\partial t$, то на бесконечности, где $g_{00}=-1,J^\mu=T^\mu{}_0=-T^{\mu 0}$. Следовательно, для стационарного наблюдателя $\mathbf{J}$ совпадает с вектором потока энергии, но имеет знак минус.

Solution

10.12. Согласно задаче 10.11, подынтегральное выражение $J^\alpha \equiv T^\alpha \xi^\beta$ представляет собой сохраняющуюся величину: $J^\alpha : \alpha = 0$. Этот результат следует из тождества

$$J^\alpha : \alpha = \left(|g|^{1/2} J^\alpha\right), \alpha |g|^{-1/\Omega}$$

ф теоремы Гаусса:

$$0 = \int J^\alpha; \alpha |g|^{1/2} d^4x = \int \left(|g|^{1/2} J^\alpha\right), \alpha^{d^4x} = \oint J^\alpha d^3\Sigma_\alpha =$$
$$= \int\limits_{F_3} J^\alpha d^3\Sigma_\alpha - \int\limits_{F_1} J^\alpha d^3\Sigma_\alpha.$$

Мы предполагаем, что на бесконечности **J** стремится к нулю достаточно быстро и влиянием краев гиперповерхности можно пренебречь. Следовагельно, интеграл, приведенный в условиях задачи, не зависит от выбора пространственноподобной поверхности F.

Solution

10.13. Из задачи 10.11 известно, что для любого вектора Киллинга ξ вектор $J^\mu \equiv T^{\mu v} \xi_v$ сохраняется, т. е.

$$J^\mu_{;\mu} = |g|^{-1/3} \left(|g|^{1/2} J^\alpha\right), \alpha = 0.$$

Из задачи 10.9 мы знаем, что в плоском пространстве-времени существуют 10 линей но-независимых векторов Киллинга $\xi_{(t)}$, $i = 1, 2, ..., 10$. Им соответствуют 10 сохраняющихся векторов:

$$J^\mu_{(l)} = T^{\mu v} \xi_{(l)\, v}$$

Соотношения (1) и (2) позволяют построить 10 глобально сохраняющихся величин:
поскольку

$$Q_{(i)} \equiv \int |g|^{1/2} J^0{}_{(l)} d^3x, \quad i = 1, 2, ..., 10,$$

$$\frac{dQ_{(l)}}{dt} = \int \left(|g|^{2/2} J^0_{(l)}\right), {}_0 d^3x = -\int \left(|g|^{1/3} J_{(l)^k}\right), {}_k d^3x =$$
$$= -\int |g|^{1/2} J_{(l)^k} d^2\Sigma_k.$$

Последнее выражение имеет простой физический смысл: это поток вектора $J_{(l)}$ через (2-мерную) поверх ность, ограничивающую объем, по которому производится интегрирование. Если тензор энергияимпульса **T** на больших расстояниях спадает достаточно быстро и объем, по которому производится интегрирование, бесконечен, то поток обращается в нуль и $dQ_{(i)}/dt = 0$. [Другое доказательство использует решение 10.12.]

Векторы Киллинга, порождающие трансляции, приводят к четырем величинам Q, соответствующим сохранению энергии и импульса. Векторы Киллинга, порождающие повороты, позволяют составить три величины Q, соответствующие сохранению момента количества движения. Физический смысл трех величин Q, к которым приводят векторы Киллинга, порождающие бусты, станет ясен, если их записать (например, в плоских декартовых координатах с $\xi_v = [x, -t, 0, 0]$) следующим образом:

$$Q = \int T^{0v} \xi_v dxdydz =$$
$$= \int x T^{00} dxdydz - t \int T^{0x} dxdydz =$$
$$= x_{\text{u.M.}} M_{\text{u.M.}} - t P_{x_{\text{u,M}}} = M_{\text{u,M.}} \left(x_{\text{u,M.}} - v_{\text{u.m.}}!\right).$$

Это не что иное, как компоненты сохраняющегося «первоначального равномерного движения» центра масс (ц. м.) системы. (По определению

$$x_{\text{п. м.}} = \int x T^{00} dxdydz / \int T^{00} dxdydz.\Big)$$

Решение 10.14.

Компоненты 4-скорости и равны

$$u_\alpha = \xi_\alpha / \left(-\xi_\gamma \xi^\psi\right)^{1/2}$$

(знак минус выбран для того, чтобы член в скобках был положителен), поэтому

$$a_\alpha = u_{\alpha;\beta} u^\beta = \left[\frac{\xi_{\alpha;\beta}}{\left(-\xi_\gamma \xi^\gamma\right)^{1/2}} + \frac{\xi_\alpha \xi_{\gamma;\beta} \xi^\gamma}{\left(-\xi_\tau \xi^\tau\right)^{2/2}}\right] \frac{\xi^\beta}{\left(-\xi_\mu \xi^\mu\right)^{1/2}}.$$

Второй член в квадратных скобках обращается в нуль, так как

$$\xi_{\gamma;\beta} \xi^{\gamma \xi^\beta} = \xi(\gamma;\beta) \xi^\xi \xi^\beta = 0$$

Поскольку $\xi_{\alpha;\beta} = -\xi_{\beta;\alpha}$, то первый член дает

$$a_\alpha = \frac{\xi_{\beta;} \xi^\beta}{+\xi_\gamma \xi^\gamma} = \frac{1}{2} \frac{\left(\xi_\beta \xi^\beta\right)_{;\alpha}}{\left(\xi_\gamma \xi^\gamma\right)} = \frac{1}{2} \left[\ln\left(-\xi_\beta \xi^\beta\right)\right], \alpha$$

Решение 10.15. Рассмотрим частицу с массой покоя μ и сохраняющейся энергией $E = -\mathbf{p} \cdot \xi$, где $\mathbf{p} - 4$ - импульс, а ξ - времениподобный вектор Киллинга. Для траекторий, проходящих через заданную точку пространства-времени, допустимы не все значения E/μ. Например, если радиус стремится к бесконечности, то должно выполнятья неравенство $E/\mu \geqslant 1$. Чтобы найти верхнюю и нижнюю грани значений E/μ для произвольной точки, Построим в этой точке ортонормированный репер. Пусть 4-скорость частицы u обладает компонентами $(\gamma, \gamma\vec{v})$, где $\vec{v} - 3$-вектор и $\gamma = \left(1 - v^2\right)^{-1/2}$,

а времениподобный вектор Киллинга ξ-компонентами $\left(\xi_0, \bar{\xi}\right)$, где $\vec{\xi}$ - 3-вектор. Отношение энергии частицы к ее массе покоя определяется выражением

$$\frac{E}{\mu} = -\mathbf{u} \cdot \xi_{(t)} = \gamma\left(\xi_0 - \vec{v} \cdot \vec{\xi}\right)$$

где точка означает скалярное произведение в локально евклидовом 3-пространстве. Необходимым (но не достаточным) условием экстремума (задающим верхнюю и нижнюю грани допустимых значений E/μ) служит соотношение

$$\vec{v} \cdot \vec{\xi} = \pm v\xi$$

где $v \equiv |\vec{v}|, \xi \equiv |\vec{\xi}|$. Необходимо различать 2 случая.

Если ξ - пространственноподобный вектор (например, в эргосфере черной дыры Керра), то $\xi_0 < \xi$. В этом случае, как следует из соотношения (1), допустимы любые значения E/μ, т. е. $-\infty < E/\mu < +\infty$. Эти неравенства дают ответ на вопрос задачи для областей, в которых ξ - пространственноподобный вектор. Бесконечные пределы соответствуют $v \to 1$ с двумя знаками, приведенными в соотношении (2).

Если же -времениподобный вектор (например, при радиусе, стремящемся к бесконечности), так что $\xi_0 > \xi$, то правая частв соотношения (1) всегда положительна и суествует конечная нижняя грань значений, принимаемых отношением E/μ. Подставля в (1) соотношение (2) с верхним знаком, получаем

$$\left(\xi^2 + E^2/\mu^2\right) v^2 - 2\xi\xi_0 v + \left(\xi_0^2 - E^2/\mu^2\right) = 0.$$

Экстремум отношения E/μ мы находим, полагая равным нулю дискриминант этого уравнения, квадратичного по v :

$$0 = (E/\mu)^2 \left[(E/\mu)^2 - \xi^2 + \xi_0^2\right]$$

Корень $E/\mu = 0$ ложный. Отбрасывая его, получаем нижнюю грань отношения E/μ:

$$(E/\mu)^2 = \xi_\theta^2 - \xi^2 = -\xi \cdot \xi$$

Итак, область допустимых значений E/μ в произвольно выбранной точке для времениподобных векторов ξ зависит от нормы вектора Киллинга в этой точке:

$$(-\xi \cdot \xi)^{\frac{1}{2}} \leqslant E/\mu < +\infty.$$

Solution 10.16.

Для пробного электромагнитного поля необходимо лишь проверить, что в заданной исходной метрике выполняются уравнения Максвелла. Если векторный потенциал A^μ - вектор Киллинга, то

$$A^\mu; \mu = 0$$

т. е. соблюдено условие Лоренца, и, пользуясь результатом, доказанным в задаче 10.6, и тем, что в пустом пространстве $R^\mu{}_v = 0$, можно записать волновое уравнение

$$A^{\mu;v}{}_v - R^\mu{}_v A^v = 0$$

Если в пространстве Минковского введены сферические координаты и $\mathbf{A} \sim \partial/\partial\varphi$, т. е. отлична от нуля лишь компонента векторного потенциала $A^\varphi = \text{const}$, то $A^{\hat{\varphi}} \sim r\sin\vartheta$, или в обычных 3-мерных обозначения
Следовательно,

$$\vec{A} = \text{arsin}\,\vec{\vartheta}_{\hat{\varphi}} \quad (a - \text{ постоянная})$$

$$\vec{E} = 0 \text{ и } \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = 2a\left(\cos\vartheta\vec{e}_{\hat{r}} - \sin\vec{\hat{\theta}}_{\hat{\theta}}\right) = 2a\vec{e}_{\hat{z}}.$$

Это означает, что существует однородное магнитное поле, параллельное оси z.
(Эту задачу предложил Роберт М. Вальд.)

Leuven-ex.2023 Killing Tensors

For $K_{\mu\nu} = K_{(\mu\nu)}$ Such that

$$\nabla_{(\mu}K_{\nu\rho)} = 0$$

1) Prove that $K_{\mu\nu}U^\mu U^\nu$ is conserved along geodesics.
2) Prove that $K^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\nabla^\nu K$, where $K \equiv K^\nu_\nu$. (?? мб тут индексы я не так вспомнил, напишу потом)
(потом точнее напишу условие)

Solutions

(напишу потом, лень, все тут получается спокойно, просто не нужно тупить.)

13.2.6 Problems about Angular Momentum (?????)

Solution 11.1.

$$1)\ \frac{d\mathbf{J}}{d\tau} = \frac{d(\Delta\mathbf{x})}{d\tau}\otimes\mathbf{p} + \Delta\mathbf{x}\otimes\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} - \frac{d\mathbf{p}}{d\tau}\otimes\Delta\mathbf{x} - \mathbf{p}\otimes\frac{d(\Delta\mathbf{x})}{d\tau} =$$
$$= \mathbf{u}\otimes\mathbf{p} - \mathbf{p}\otimes\mathbf{u} = \frac{1}{m}\mathbf{p}\otimes\mathbf{p} - \mathbf{p}\otimes\frac{1}{m}\mathbf{p} = 0.$$

Рассмотрим моменты времени непосредственно до столкновения и сразу же после столкновения. Поскольку все частицы при столкновении находятся в одной и той же точке, то

$$\Delta\mathbf{x}_{(k)}\big|_{\text{zo}} = \Delta\mathbf{x}_{(k)}\big|_{\text{nocse}} = \Delta\text{x}$$

(где Δx - смещение в точку столкновения) и, следовательно,

$$\sum_{(k)}\mathbf{J}_{(k)}\Big|_{\text{после}} = \Delta\mathbf{x}\otimes\sum_{(k)}\mathbf{p}_{(k)}\Big|_{\text{после}} - \left(\sum_{(k)}\mathbf{p}_{(k)\,\text{после}}\right)\otimes\Delta\mathbf{x} =$$
$$= \Delta\text{x}\otimes\sum_{(k)}\mathbf{p}_{(k)}\Big|_{\text{до}} - \left(\sum_{(k)}\mathbf{p}_{(k)}\Big|_{\text{Io}}\right)\otimes\Delta\mathbf{x} = \sum_{(k)}\mathbf{J}_{(k)}\Big|_{\text{до}},$$

поскольку полный импульс $\sum\limits_{(k)}\mathbf{p}_{(k)}$ при столкновении сохраняется.

Решение 11.2.

а) «Глотность момента количества движения» $J^{\alpha\beta\gamma}$, определяемая соотношением

$$J^{\alpha\beta\gamma} = 2x^{[\alpha}T^{\beta]\gamma} = x^{\alpha}T^{\beta\gamma} - x^{\beta}T^{\alpha\gamma},$$

удовлетворяет уравнению

$$J^{\alpha\beta\gamma},\nu = \delta^{\alpha}{}_{\gamma}T^{\beta\gamma} + x^{\alpha}T^{\beta\nu},{}_{\nu} - \delta^{\beta}{}_{\gamma}T^{\alpha\nu} - x^{\beta}T^{\alpha\nu},\nu = T^{\beta\alpha} - T^{\alpha\beta} = 0.$$

Следовательно, по теореме Гаусса

$$J^{\alpha\beta} \equiv \int J^{\alpha\beta\gamma}d^3\Sigma_{\gamma}$$

сохраняющаяся величина.
б) $J^{\alpha\beta}\left(x^{\alpha}+a^{\alpha}\right) = \int\left(a^{\alpha}T^{\beta\gamma} - a^{\beta}T^{\alpha\gamma}\right)d^3\Sigma_{\gamma} + J^{\alpha\beta}\left(x^{\sigma}\right)$.
Таким образом, величина $J^{\alpha\beta}$ не инвариантна относительно трансляций (моменты количества движения относительно разных точек различны). в) Рассмотрим производную спина по времени:

$$\frac{dS_{\alpha}}{dt} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\left(\frac{dJ^{\beta\gamma}}{dt}u^{\delta} + J^{\beta\psi}\frac{du^8}{dt}\right)$$

По доказанному в п. «а»первый член в правой части обращается в нуль. Второй член также равен нулю, поскольку на систему не действуют никакие силы $\left(du^8/dt = 0\right)$. Следовательно, $dS^{\alpha}/dt = 0$.
г) По доказанному в п. «б»
поэтому

$$J^{\alpha\beta}\left(x^{\sigma}+a^{\sigma}\right) = a^{\alpha}P^{\beta} - a^{\beta}P^{\alpha} + J^{\alpha\beta}\left(x^{\sigma}\right)$$

$$S_{\alpha}\left(x^{\sigma}+a^{\sigma}\right) = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\left(a^{\alpha}P^{\beta} - a^{\beta}P^{\alpha}\right)P^8/|P| + S_{\alpha}\left(x^{\sigma}\right)$$

Поскольку первый член в правой части обращается в нуль (пслностью антисимметричный тензор, а P^{μ} входит квадратично), го $S_{\alpha}\left(x^{\sigma}+a^{\sigma}\right) = S_{\alpha}\left(x^{\sigma}\right)$.

Solution

11.3. Из определения внутреннего спина S_{α}, пользуясь полной антисимметричностью тензора & и симметричностью произведений $u^{\delta}u^{\alpha}$, получаем

$$u^{\alpha}S_{\alpha} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}J^{\beta\gamma}u^{\delta}u^{\alpha} = 0$$

Решение 11.4. Рассмотрим наблюдателя в локальной инерциальной системе отсчета, сопутствующей центру масс гироскопа. Поскольку к гироскопу не приложены никакие моменты, то с точки зрения этого наблюдателя ось спина не прецессирует и поэтому $d\vec{S}/dt = 0$. Но в той же системе отсчета 4-скорость гироскопа равна $\mathbf{u} = (1, \overrightarrow{0})$, поэтому условие равенства нулю суммарного момента, приложенного к гироспопу, можно записать в виде

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{S} = g\mathrm{u}$$

где g - некоторый постоянный коэффициент пропорциональности. Величину g мы найдем из соотношения ортогональности $\mathbf{S}\cdot\mathbf{u} = 0$:

$$0 = \nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{S}\cdot\mathbf{u}) = (\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{S})\cdot\mathbf{u} + \mathbf{S}\cdot(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}) = g\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{S}\cdot\mathbf{a} = -g + \mathbf{S}\cdot\mathbf{a}.$$

Следовательно,

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{S} = (\mathbf{S}\cdot\mathbf{a})\mathbf{u}$$

Это соотношение представляет собой не что иное, как перенос Ферми - Уокера:
при $\mathbf{S}\cdot\mathbf{u} = 0$.

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{S} = (\mathbf{S}\cdot\mathbf{a})\mathbf{u} - (\mathbf{S}\cdot\mathbf{u})\mathbf{a}$$

Ретение I1.5.

а) При вычисленни момента количества движения относительно центра масс в системе центра масс следует иметь в виду, что

$$\int x^i T^{00} d^3x = 0$$

т. е. начало координат совмещено с центром масс, и

$$\int T^{i0} d^3x = 0$$

т. е. суммарный момент количества движения относительно центра масс равен нулю. Таким образом,

$$J^{i0} = \int d^3x \left(x^i T^{00} - tT^{i0}\right) = 0$$

или в обозначениях, не зависящих от выбора системы отсчета,

$$J^{\alpha\beta} u_\beta = 0.$$

б) По определению 4-вектора спина S_8 имеем

$$-\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} S_\gamma u_\delta = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\gamma\mu\nu\sigma} J^{\mu v} u^\sigma u_\delta.$$

Суммируя по γ (см. задачи 3.27, 3.28), получаем

$$-\frac{1}{2}\delta^{\alpha\beta\delta}_{\mu v\sigma} J^{\mu v} u^\sigma u_\delta = -J^{\alpha\beta} u^\delta u_\delta = J^{\alpha\beta} \equiv S^{\alpha\beta}.$$

[В сумме сохраняются лишь члены $J^{\alpha\beta}$. По доказанному в п. а J не содержит индекс δ, поскольку умножается на u_8.]

Решение I1.6. Вычислим сначала полный момент количества движения. Выберем систему центра масс и примем за начало отсчета $\boldsymbol{O}$ столкновение тел A и B. Относительно события $\boldsymbol{O}$ тела A и B обладают лишь внутренним моментом количества движения (см. задачу 11.5), поэтому

$$\underset{A+B}{J\alpha,\beta}(\boldsymbol{O}) = \underset{A}{S^{\alpha\beta}} + \underset{B}{S^{\alpha\beta}} = -\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\left(S_{AA} u_v + S_B S_B u_v\right)$$

По закону сохранения момента количества движения выражение, стоящее в правой части, равно $J_c^{\alpha\beta}(O)$. Подставляя его в соотношение для вектора спина, получаем

$$S_C = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\sigma\alpha\beta\lambda C} J_C^{\alpha\beta} u^\lambda =$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon_{\sigma\alpha\beta\lambda}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\left(\left(S_A u_A u_\nu + \underset{B}{S_\mu u_B} u_v\right) u_C u^\lambda.\right.$$

Как доказано в задаче 3.28 (см. также задачу 3.27),

$$\varepsilon_{\sigma\alpha\beta\beta\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}} = -2\delta^{\mu\nu}_{\sigma\lambda}$$

Следовательно,

$$S_C = -\delta^{\mu v}_{\sigma\lambda}\left(S_A u_A u_v + S_B S_B u_v\right) u_C^\lambda =$$

$$= -\underset{S_\sigma}{A}(\underset{A}{\mathbf{u}} \cdot \underbrace{C}\, \mathbf{u}) - S_B(\underset{B}{\mathbf{u}} \cdot \underbrace{C}\, \mathbf{u}) + \underset{A}{u_\sigma}(\underset{A}{\mathbf{S}} \cdot \underset{C}{\mathbf{u}}) + \underset{B}{u_\sigma}(\underset{B}{\mathbf{S}} \cdot \underset{C}{\mathbf{u}}).$$

Подставляя $((\underset{A}{\mathbf{P}} + \underset{B}{\mathbf{P}})/\mathbf{P}_A + \frac{\mathbf{P}}{B}$ | вместо $\underset{C}{}$, получаем выражение для S, которое требовалось найти.

Решекие 11.7. У равнение томасовой прецескии (см. sa.тачу 11.4) имеет вид

$$\frac{d3}{d\tau} = \mathbf{u}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{S})$$

В лабораторной системе отсчета мировая линия частицы описывается уравнениями

$$x = r\cos\omega t,$$
$$y = r\sin\omega f$$

(ω и r - постоянные). Следовательно,

$$u^0 = \gamma, u^x = \gamma\frac{dx}{dt} = -\omega r\gamma\sin\omega t, u^y = \gamma\omega r\cos\omega t, u^z = 0,$$

где $\gamma \equiv \left(1 - r^2\omega^2\right)^{-1/2}$. Но $\mathbf{a} = d\mathbf{u}/d\tau$, поэтому

$$a^0 = 0(\gamma = \text{ const }), \quad a^x = \gamma\frac{du^x}{dt}, \quad a^y = -\gamma^2\omega^2 r\sin\omega t, \quad a^z = 0$$

Н

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{a} = S^x a^x + S^y a^y = -\omega^2 r\gamma^2\cos\omega t S^x - \omega^2 r\gamma^2\sin\omega t S^y.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\frac{dS^0}{d\tau} &= \gamma\frac{dS^0}{dt} = u^0(\mathbf{a}\cdot\mathbf{S}) = \gamma(\mathbf{a}\cdot\mathbf{S}),\\
\frac{dS^x}{d\tau} &= \gamma\frac{dS^x}{dt} = u^x(\mathrm{a}\cdot\mathbf{S}) = -\omega r\gamma\sin\omega t(\mathbf{a}\cdot\mathbf{S}),\\
\frac{dS^y}{d\tau} &= \gamma\frac{dS^y}{dt} = u^y(\mathrm{a}\cdot\mathbf{S}) = \omega r\gamma\cos\omega t(\mathbf{a}\cdot\mathbf{S}),\\
\frac{dS^z}{d\tau} &= 0.
\end{aligned}$$

Введем радиальную и тангенциальную компоненту вектора спина:

$$\begin{aligned}
S^x &= S^r\cos\omega t - S^\dagger\sin\omega t,\\
S^y &= S^r\sin\omega t + S^\theta\cos\omega t.
\end{aligned}$$

Из уравнений (2) и (3) получаем

$$\begin{aligned}
\frac{dS^r}{dt} &= \omega S^\diamond,\\
\frac{dS^\vartheta}{dt} &= -\omega\gamma^2 S^r.
\end{aligned}$$

Уравнения (5) и (6) можно записать в виде одного уравнения второго порядка и, решив его, найти S^r:

$$\frac{d^2S^r}{dt^2} = -\omega^2\gamma^2 S^r \Rightarrow S^r = A\cos(\omega\gamma t + \alpha)$$

где A, α - постоянные. Тангенциальную компоненту спина получим из уравнения (5):

$$S^\vartheta = -\gamma A\sin(\omega\gamma t + \alpha)$$

Компоненты вектора спина S в декартовых координатах определим из уравнений (4), (7) и (8):

$$\begin{aligned}
S^x &= A[\cos\omega t\cos(\omega\gamma t + \alpha) + \gamma\sin\omega t\sin(\omega\gamma t + \alpha)],\\
S^y &= A[\sin\omega t\cos(\omega\gamma t + \alpha) - \gamma\cos\omega t\sin(\omega\gamma t + \alpha)],\\
S^z &= \text{ const}.
\end{aligned}$$

Запишем начальные условия

$$S^x = \hbar(2)^{-1/2}, S^y = 0, S^z = \frac{1}{2}\hbar$$

(Мы не рассматриваем здесь квантовомеханический смысл спина электрона, но тем не менее считаем желательным, чтобы выполнялось соотношение $S^2 = 3\hbar^2/4$.) Из этих условий следует, что $\alpha = 0, a = \hbar(2)^{-1/2}$, и соотношения (9) можно представить в виде

$$S^x + iS^y = 2^{-1/2}\hbar\left[e^{-i(\gamma-1)\omega t} + i(1-\gamma)\sin(\omega\gamma t)e^{i\omega t}\right]$$

Первый член в правой части соотношений (10) и (9в) указывает на прецессию вокруг оси z с угловой скоростью

$$\omega_{\text{Toac}} = (\gamma - 1)\omega \approx \frac{1}{2}v^2\omega$$

в то время как второй член в правой части соотиошения (10) для электрона в атоме мал $\left(1 - \gamma \approx -\frac{1}{2}v^2\right)$.

Solution

11.8. Воспользуемся для вычислени й локально лоренцевской системой отсчета, сопутствующей центру масс тела. Рассматривая центр масс как исходную точку в у равнении расхождения геодезических, запишем относительное ускорение элемента массы в положении $x^{\hat{j}}$:

$$\frac{d^2x^{\}}{dt^2} = -R^{\hat{j}}{}_{\hat{k}\hat{l}\hat{k}}x^{\hat{k}}$$

Тогда i-я компонента момента, приходящегося на единицу объема, равна $-\varepsilon_{\hat{i}}{}^{\hat{i}\hat{j}}x^{\hat{l}}\rho R^{\hat{j}}{}_{\hat{o}\hat{k}\hat{o}}x^{\hat{k}}$, где ρ - плотность массы в точке пространства $x^{\hat{j}}$. Полный момент, представляющий собой не что иное, как производную по времени от внутреннего момента количества движения, имеет вид

$$\frac{dS_{\hat{i}}}{dt^-} = -\varepsilon_{\hat{i}\hat{i}\hat{j}}R^{\hat{j}}{}_{\hat{k}\hat{l}\hat{k}}\int \rho x^{\hat{l}}x^{\hat{k}}d^3x$$

если сцитать, что тензор Римана $R^{\hat{k}\hat{k}\hat{0}}_{\hat{0}}$ приближенно постоянен в пределах тела. Вследствие симметрии произведения $\varepsilon_{\hat{i}\hat{i}}^{\hat{j}}R^{\hat{j}}{}_{\hat{o}\hat{k}\hat{o}}$ уравнение (2) эквивалентно уравнению

$$\frac{dS_{\hat{i}}}{dt} = -\varepsilon_{\hat{i}\hat{l}}{}^{\hat{j}}I_{\hat{l}\hat{k}}R_{\hat{j}\hat{o}\hat{k}\hat{0}}$$

где

$$t_{\hat{l}\hat{k}} \equiv \int \rho\left(x^{\hat{l}}x^{\hat{k}} - \frac{1}{3}r^2\delta^{\hat{l}\hat{k}}\right)d^3x$$

Если тензор квадрупольного момента $t^{\alpha\beta}$ определить так, чтобы $t^{\alpha}\beta u_{\beta} = 0$, т. е. чтобы в локально сопутствующей системе отсчета он имел лишь пространственные компоненты, то инвариантная тензорная запись уравнения (3) будет иметь вид

$$\frac{DS^{\varkappa}}{d\tau} = \varepsilon^{\alpha\beta\alpha\mu}u_{\mu}u^{\sigma}u^{\lambda}t_{\beta\eta}R_{\sigma\alpha\lambda}$$

Заметим, что в случае сферического тела или тела достаточн малых размеров, когда прнближенно выполняется равенство

(Тензор Римана) $\times$ (Размеры тела)$^2 \approx 0$,

уравнение (4) вырождается в уравнение

$$DS^{\varkappa}/d\tau = 0$$

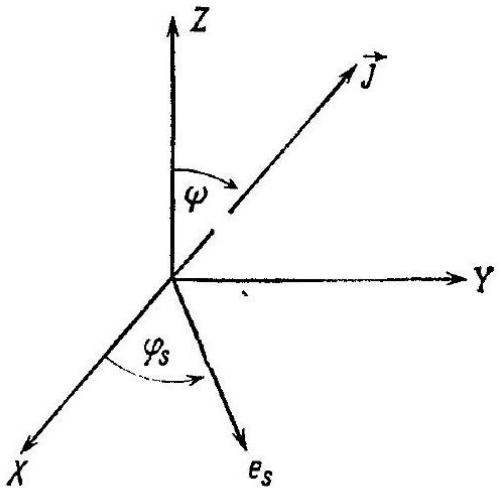
(См. задачу 11.4 при a = 0.)

Solution

11.9. Воспользуемся двумя системами координат. Пусть XYZ - пространственные координаты локально лоренцевской системы с пространственным началом, совмещенным с центром масс Земли. Плоскоьть эклиптики совпадает с плоскостью XY. Условимся предполагать, что с точки зрения земного наблюдателя Солнце и Луна движутся в этой плоскости по круговым орбитам. Пусть xyz - пространственные координаты аналогичной лоренцевской системы отсчета, но с осью z, параллельной моменту количества движения J Земли. Выберем ось x параллельно оси X. Базиснве векторы двух систем координат связаны между собой. соотношениями (фиг. 25)

$$\begin{aligned}\vec{e}_x &= \vec{e}_X,\\ \vec{e}_y &= \cos\overrightarrow{\psi e_Y} - \sin\psi\vec{e}_Z,\\ \vec{e}_z &= \sin\vec{e}_Y + \cos\psi\vec{e}_Z.\end{aligned}$$

Здесь $\psi \approx 23\frac{1}{2}^{\circ}$ - угол между $\vec{J}$ и оьью Z, который остается постоянным, если пренебречь небольиой нутацией. Вектор $\vec{J}$ прецессирует вокруг оси Z с периодом T, который требуется определить.



Фиг. 25.

Пусть $\vec{e}$ - единичный вектор, направленный на Солнце. Если: в системе координат xyz Солнце имеет сферические координаты
$(r_\odot, \vartheta, \varphi\odot)$, а в системе XYZ - сферические координаты $\left(r_{\underline{\cdot}}, \pi/2,\ \varphi\ominus\right)$, то

$$\begin{aligned}\cos\vartheta &= \vec{e}_z \cdot \vec{e}_{\cdot} = \\ &= (\sin\psi\vec{e}_Y + \cos\psi\vec{e}_Z)\cdot(\cos\varphi_{\cdot}\vec{e}_X + \sin\varphi\cdot\vec{e}_Y) = \\ &= \sin\psi\sin\varphi_{\cdot}\end{aligned}$$

и аналогнчно

$$\begin{aligned}\sin\vartheta\sin\varphi &= \vec{e}_y\cdot\vec{e}_\odot = \cos\psi\sin\varphi.\\ \sin\vartheta\cos\varphi &= \vec{e}_x\cdot\vec{e}_\odot = \cos\varphi..\end{aligned}$$

Мз задачи 11.8 известно, что движение вектора собственного момента колиества цвижения Земли $\vec{J}$ во внешнем гравитационном поле описывается уравнением

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{N}$$

тде компоненты момента $\vec{N}$ равны

$$N_t = -\varepsilon_{ijk}t_{jm}R_{k0m0}$$

а тензор приведенного квадрупольного момента определяется выраъкением

$$t_{jm} = \int\rho\left(x^jx^m - \frac{1}{3}r^2\delta^{jm}\right)d^3x.$$

Іредположим, что Земля имеет сфероидальную форму с моментом инерции C относительно оси вращения и моментом инерции A относительно экваториальной оси. Тогда в координатах xyz имеем

$$C = \int\rho\left(x^2+y^2\right)d^3x,$$

$$a = \int\rho\left(x^2+z^2\right)d^3x = \int\rho\left(y^2+z^2\right)d^3x.$$

Из компонент тензора t_{jm} от нуля отличны лишь
в силу чего

$$\begin{aligned}t_{zz} &= -\frac{2}{3}(C-A),\\ t_{xx} &= t_{yy} = \frac{1}{2}(C-A),\\ N_x &= -(C-A)R_{z0y0},\\ N_y &= (C-A)R_{z0x0},\\ N_z &= 0.\end{aligned}$$

В слабом поле (в пределе медленных движений)

$$R_{z0\iota 0} = \frac{\partial^{2\Phi}}{\partial z \partial x^l}$$

где - ньютоновский гравитационный потенциал:
Поскольку

$$\Phi = \Phi_{\text{Солнце}} + \Phi_{\text{луна}}$$

$$\Phi_{\text{Солнце}}\,(x,y,z) = \frac{M_\odot}{\left[(x-x_\odot)^2 + (y-y_\odot)^2 + (z-z_\odot)^2\right]^{1/2}}$$

го

$$\left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x}\right|_0 = -\frac{3M_O \sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi}{r_\odot^3},$$
$$\left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial y}\right|_0 = -\frac{3M_{\partial\rho}\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi}{r_\odot^\delta}.$$

Следовательно, $\vec{N}_{\text{Солнце}}$ имеет в системе xyz компоненты

$$\begin{aligned}\vec{N}_{\text{Солнце}} &= 3a(C-A)\sin\vartheta\cos\vartheta(\sin\varphi, -\cos\varphi, 0) = \\ &= 3a(C-A)\sin\psi\sin\varphi\,(\cos\psi\sin\varphi_\odot, -\cos\varphi_\odot, 0)\,,\end{aligned}$$

где $a \equiv M = /r_\ominus^3$. Учитывая, что угловая скорость обращения Солнца вокруг Земли во много раз превышает угловую скорость прецессии, которую требуется найти, $\vec{N}$ Солнце можно усреднить по орбите Солнца. При усреднении член $\sin^2\varphi$ дает $1/2$, а $\sin\varphi\rho\cos\varphi$; переходит в 0. Следовательно, из компснент момента $\vec{N}_{\text{солнце от нуля}}$ отлична лишь компонента

$$N_x^{\text{Солние}} = N_X^{\text{Солнце}} = \frac{3}{2}a(C-A)\sin\psi\cos\psi$$

Аналогичное выражение получается и для усредненного момента, создаваемого Луной (необходимо лишь вместо a взять $b \equiv M_D/r_{\text{D}}^3$). Следовательно, при $t=0$ в направлении оси X существует момент величиной

$$N = \frac{3}{2}(a+b)(C-A)\sin\psi\cos\psi$$

Это означает, что за бесконечно малый промежуток времени dt вектор J получает приращение $dJ = Ndt$ в перпендикулярном направлении и, таким образом, поворачивается вокруг оси Z наугол

$$d\chi = \frac{dJ}{J\sin\psi} = \frac{Ndt}{J\sin\psi}$$

Период прецессии - э10 промежугок времени, за который угол χ изменяется на 2π:

$$T = \frac{2\pi J\sin\psi}{N}$$

Пусть $J = C\omega$, где ω - угловая скорость вращения Земли вокрут собственной оси. Тогда

$$T = \frac{4\pi}{3}\frac{C}{C-A}\frac{1}{\cos\psi}\frac{\omega}{a+b}.$$

Подставляя численные значения
находим

$$\begin{aligned}C/(C-A) &= 305,3,\\ \psi &= 23,45^\circ,\\ \omega &= 7,292\cdot 10^{-5}\text{с}^{-1},\\ M_\odot &= 1,989\cdot 10^{33}\Gamma,\\ r_\odot &= 1,496\cdot 10^{13}\text{ cm},\\ M_D &= 7,349\cdot 10^{25}\Gamma,\\ r_D &= 3,844\cdot 10^{10}\text{ cm},\end{aligned}$$

$T = 25600$ лет Согласие с данными наблюдений лучше 1%. Некоторую ошибку в вычисления мы внесли, предположив, что для земного наблюдателя Солнце и Луна движутся по круговым орбитам. Кроме того, орбита Луны несколько отклоняется от плоскости эклиптики.

Решение 11.10.

Наблюдатели обладают 4-скоростями $\mathbf{u} = \xi/|\xi|$, где $|\xi| = (-\xi \cdot \xi)^{1/2}$. Следовательно, если учесть, что $[\xi, \xi] = 0$, то

$$\mathscr{L}_\xi \mathrm{e}_{\hat{0}} = \mathscr{L}_{\hat{k}} \mathbf{u} = [\xi, \mathbf{u}] = \left[\nabla_\xi (-\xi \cdot \xi)^{-1/x}\right] \xi.$$

Но поскольку ξ удовлетворяет уравнению Киллинга $\xi_{(\alpha;\beta)} = 0$, то

$$\nabla_\xi (\xi \cdot \xi) = (\xi^\alpha \xi_\alpha)_{;\beta} \xi^\beta = 2\xi_{\alpha;\beta} \xi^\alpha \xi^\beta = 0.$$

Таким образом,
Кроме того,

$$\mathscr{L}_\xi \mathrm{e}_{\hat{0}} = 0$$

$$\mathscr{L}_\xi \mathbf{e}_{\hat{j}} = 0$$

так как векторы $\mathbf{e}_{\hat{j}}$ соединяют точки с равными значениями t на мировой линии любого наблюдателя (см. задачу 8.14).

$$\mathscr{L}_\xi \mathbf{Q} = \mathscr{L}_\xi \left(\mathbf{Q}^{\hat{\alpha}\ldots\hat{\beta}} \mathbf{e}_{\hat{\alpha}} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{\hat{\beta}} \right) =$$

$$= \left(\mathscr{L}_\xi \hat{Q}^\alpha \ldots \hat{\beta} \right) \mathbf{e}_{\hat{\alpha}} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{\hat{\beta}} + Q^{\hat{\alpha}\ldots\hat{\beta}} \left(\mathscr{L}_{\hat{\xi}} \mathbf{e}_{\hat{\alpha}} \right) \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{\hat{\beta}} + \ldots$$

$$\ldots + Q^{\hat{\alpha}\ldots\hat{\beta}_{\hat{\alpha}}} \mathbf{e}_{\hat{\alpha}} \otimes \ldots \otimes \left(\mathscr{L}_{\mathrm{k}} \mathbf{e}_{\hat{\beta}} \right).$$

По доказанному в п. 1 в нуль не обращается только первый член в правой части, поэтому

$$(\mathscr{L}_\xi \mathbf{Q})^{\hat{\alpha}} \ldots \hat{\beta} = \mathscr{L}_\xi \left(Q^{\hat{\alpha}\cdots\hat{\beta}} \right) = \nabla_\xi Q^{\hat{\alpha}\ldots\hat{\beta}} \Big) = \frac{d}{dt} Q^{\hat{\alpha}\ldots\hat{\beta}}$$

(напомним, что $Q\hat{\alpha}\ldots\hat{\beta}$ - лишь скалярная функция). В единицах собственного времени скорость изменения тензорной величины $\mathbf{Q}$ равна

$$\frac{d}{dt} Q^{\hat{\alpha}\ldots\hat{\beta}} = \nabla_{\mathrm{u}} Q^{\hat{\alpha}\ldots\hat{\beta}} = \frac{1}{|\xi|} \nabla_\xi Q^\alpha \ldots \hat{\beta} = \frac{1}{|\xi|} \frac{d}{dt} Q^{\hat{\alpha}\ldots\hat{\beta}}.$$

В локальной системе покоя наблюдателя уравнение прецессии имеет вид

$$\frac{dS_{\hat{j}}}{d\hat{t}} = \varepsilon_{\hat{i}\hat{k}\hat{l}} \omega^{\hat{k}} \hat{S}_l$$

где $\mathbf{S}$-вектор спина гироскопа. Но $\boldsymbol{\varepsilon}_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\hat{0}\hat{j}\hat{k}\hat{l}} = u^{\hat{\alpha}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\hat{\alpha}\hat{j}\hat{k}\hat{l}}$, поэтому 4-мерный вариант уравнения прецессии можно записать следующим образом:

$$\frac{dS^{\hat{\beta}}}{d\hat{t}} = u_{\hat{\alpha}} \varepsilon^{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}_{\omega\hat{\gamma}}} S_{\hat{\delta}}$$

или, что то же,

$$\frac{dS^{\hat{\beta}}}{dt} = \xi_{\hat{\alpha}} e^{\hat{\alpha}\boldsymbol{\hat{\beta}}\hat{\gamma}\hat{\delta}} \hat{\omega}_{\hat{\gamma}} S_{\hat{\delta}}$$

Мы хотим вывести уравнение вида (1) и определить a. Мзвестно (см. задачу 11.4), что S допускает перенос Ферми - Уокера, Т. е.

$$\nabla_u S = (S \cdot \mathbf{a}) \mathbf{u}$$

Н

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{1} = 0$$

Уравнение (2) преобразуется к виду

$$\nabla_\xi S = (S \cdot \nabla_\xi \xi)\, \xi / |\xi|^2$$

а из уравнения (3) следует

$$S \cdot \xi = 0$$

Мз (2) получаем

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathscr{L}_\xi \mathbf{S} = \nabla_\xi \mathbf{S} - \nabla_{\mathbf{S}} \boldsymbol{\xi}$$

Поскольку вектор & выступает как (ненормированная) 4-скорость, то $\nabla\xi$ удобно разложить так же, как $\nabla\mathbf{u}$ (см. задачу 5.18). Так как ξ - вектор Киллинга, то величина $\nabla\xi$ антисимметрична, и поэтому ее можно представить в виде

$$\nabla\xi = \omega + A \otimes \xi - \xi \otimes A$$

где ω - антисимметричная величина, причем $\omega \cdot \xi = 0$. Так как

$$(\nabla\xi) \cdot \xi = \nabla_\xi \xi = -\xi \cdot (\nabla\xi)$$

ТО

$$a = (\nabla_{\xi\xi}\xi)\,(\xi \cdot \xi)^{-1}$$

Чтак, из уравнений (6) и (4) находим

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = -\left(\mathbf{S} \cdot \nabla_{\xi\xi}\xi\xi(\xi \cdot \xi)^{-1} + \mathbf{S} \cdot \nabla\xi = S \cdot \omega\right.$$

[в первом равенстве мы воспользовались тем, что $\nabla_{\mathbf{s}}\boldsymbol{\xi} = (\nabla\xi) \cdot \mathbf{S} = -S \cdot \nabla\xi$]. Теперь. Необходимо выразить через некоторый вектор так же, как это сделано в уравнении (1). Чтобы проследить, как изменяется при свертке по тем или иным индексам первоначальный набор индексов, вычисления удобнее вести покомпонентно. Уравнение (7) в подробной записи принимает вид

$$\xi_{\alpha;\beta} = \omega_{\alpha\beta} + A_\alpha \xi_\beta - \xi_\alpha A_\beta$$

что позволяет нам построить вектор, не зависящий от А:

$$B^\lambda \equiv \varepsilon^{\lambda\alpha\beta\gamma}\xi_{\alpha;\beta}\xi_\gamma = \varepsilon^{\lambda\alpha\beta\gamma}\omega_{\alpha\beta}\xi_\gamma.$$

Выразим $\omega_{\alpha\beta}$ через В:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda\rho\sigma\varkappa}B^\lambda = -\omega_{\alpha\beta}\xi_\gamma\delta^{\alpha\beta\gamma}_{\rho\sigma\varkappa},$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda\rho\sigma\varkappa}B^{i\kappa}\xi^\varkappa = -\omega_{\alpha\beta}\xi_\gamma\delta^{\alpha\beta\gamma\xi}_{\rho\sigma\varkappa}.$$

Поскольку $\omega_{\alpha\beta}\xi^\beta = 0$, отличные от нуля члены встречаются лишь при $\gamma = x$:

$$\varepsilon_{\lambda\rho\sigma x}B^\lambda\xi^x = -2\omega_{\rho\sigma}\xi_x\xi^*.$$

Подставляя в уравнение (8), преобразуем его к виду

$$\frac{dS^{\hat\beta}}{dt} = S_{;}\omega^{\hat\alpha\hat\beta} = -\frac{1}{2}S_{\hat\alpha}e^{\hat\gamma\hat\alpha\hat\beta\hat\varkappa}B_{\hat\gamma}\xi_{\hat\varkappa}\left(\xi_{\hat\delta}\xi^{\hat\delta}\right)^{-1}.$$

Новое уравнение аналогично уравнению (1) с

$$\omega^\gamma = \frac{1}{2}B^\gamma\,(\xi_\alpha\xi^\alpha)^{-1}$$

В силу соотношения (9) правая часть этого выражения равна

$$\varepsilon^{\gamma\alpha\beta\sigma}\xi_{\alpha;\beta}\xi_\sigma/2\xi_\alpha\xi^\alpha.$$

Из п. 3 следует, что $\omega = 0$ в том и только в том случае, если $\xi^\beta_{[\alpha;\beta}\xi_{\sigma]} = 0$. Но именно это и есть условие гиперповерхностной ортогональности вектора ξ (задача 7.23), т. е. статичности метрик (см. задачу 10.8). вид

Solution

11.11. У равнение переноса для спина гироскспа имеет

$$\frac{dS^a}{d\tau} = (S \cdot a)u^\alpha, \quad S^\alpha u_\alpha = 0$$

Локально измеренная производная j-й компоненты (относительно локально лоренцевской системы отсчета) вектора спина по времени равна

$$\frac{d}{d\tau}S_{\hat{j}} = \frac{d}{d\tau}\left(\mathbf{S}\cdot\mathbf{e}_{\hat{j}}\right) = \frac{D}{d\tau}\left(\mathbf{S}\cdot\mathbf{e}_{\hat{j}}\right) = \mathbf{S}\cdot\frac{D}{d\tau}\mathbf{e}_{\hat{i}} =$$
$$= \mathbf{S}\cdot\Gamma^{\hat{\alpha}}\hat{\gamma}_{\hat{j}\hat{0}}\mathbf{e}_{\hat{\alpha}} = \Gamma^{\hat{\alpha}\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}\hat{0}}\mathbf{S}_{\hat{\alpha}} = \Gamma_{\hat{i}\hat{j}\hat{0}}\mathbf{S}^{\hat{l}}.$$

(в этих преобразованиях мы использовали уравнение (1) и определение символов Кристоффеля). Пользуясь тем, что в ортонормированном репере символы Кристоффеля антисимметричны по двум первым индексам, уравнение (2) можно преобразовать к виду

$$\frac{dS^{\hat{l}}}{dt} = \varepsilon_{\hat{j}\hat{k}\hat{l}}\Omega_{\hat{k}}S_{\hat{i}}$$

где

$$\Omega_{\hat{k}} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\hat{k}\hat{l}\hat{j}}\mathrm{l}'\,\hat{l}\hat{j}\hat{0}$$

Необходимо вычислить символы Кристоффеля $\Gamma^{\hat{j}\hat{0}}_{\hat{i}}$. Метрику на поверхности Земли приближенно можно записать в виде
ге

$$ds^2 = -(1+2\varphi)dt^2 + (1-2\varphi)\delta_{jk}dx^i dx^k - 4h_j dx' dt$$

$$\varphi = -M/r = \mathscr{O}\left(\varepsilon^2\right),$$
$$\vec{h} = \frac{\vec{J}\times\vec{r}}{r^3} = \mathscr{O}\left(\varepsilon^3\right)$$

и $\vec{J}$ - момент количества движения Земли. Мы проводим вычисления в ньютоновском пределе, где скорости по порядку величины равны $\mathscr{O}(\varepsilon)$, и сохраняем члены порядка ε^3. У наблюдателя со стационарными координатами в метрике (4) имеется ортонормированный базис 1-форм:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\bar{0}} = (1+\varphi)\widehat{\mathrm{d}\tilde{t}} + 2h_j\widetilde{\mathrm{d}}x^j, \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\bar{j}} = (1-\varphi)\widetilde{\mathrm{d}}x^j$$

Векторы дуального базиса, определяемые соотношением
имеют вид

$$\left\langle\tilde{\omega}^{\bar{\alpha}}, \mathbf{e}_{\bar{\beta}}\right\rangle = \delta^{\bar{\beta}'}$$

$$\mathbf{e}_{\bar{0}} = (1-\varphi)\partial/\partial t, \quad \mathbf{e}_{\bar{i}} = (1+\varphi)\frac{\partial}{\partial x^j} - 2h_j\partial/\partial t$$

Если гироскоп обладает 3-скоростью v_i, связанной с 4-скоростью соотношениями

$$w^j = v_1 u^0, \quad u^0 = 1 - \varphi + \frac{1}{2}v^2 \quad (\text{из } \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = -1),$$

то в системе отсчета стационарного наблюдателя

$$\boldsymbol{v}_{\bar{i}} = \frac{u^{\bar{j}}}{u^{\bar{0}}} = \langle\tilde{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{u}\rangle / \left\langle\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\bar{0}}, \mathbf{u}\right\rangle = (1-2\varphi)v_\gamma$$

Базисные векторы в ортопормированном репере, сопутствующем гироскопу, получаются из базисных векторов (7) под действием преобразования Лоренца - буста - v_i:
где

$$\mathbf{e}_{\hat{\alpha}} = \Lambda_{\hat{\alpha}}\mathbf{e}_{\bar{\alpha}}$$

$$\Lambda^{\vec{0}}_{\hat{0}} = \gamma \equiv 1 + \frac{1}{2}v^2, \quad \Lambda^{\bar{j}}_{\hat{j}} \equiv \gamma v_{\bar{i}} = \Lambda_{\hat{0}},$$
$$\Lambda^{\bar{j}}_{\hat{k}} = \delta^{jk} + (\gamma-1)v^{\bar{l}}v^{\bar{k}}/v^2.$$

Они оказываются равными

$$\mathbf{e}_{\hat{0}} = \left(1-\varphi+\frac{1}{2}v^2\right)\partial/\partial t + \left(1-\varphi+\frac{1}{2}v^2\right)v^k\partial/\partial x^k,$$
$$\mathbf{e}_{\hat{j}} = \left[\left(1-3\varphi+\frac{1}{2}v^2\right)v_l - 2h_j\right]\partial/\partial t + \left[\delta_{ik}(1+\varphi)+\frac{1}{2}v_jv_k\right]\partial/\partial x^k.$$

Символы Кристоффеля в ортонормированном репере можно найти по формуле

$$\Gamma_{\hat{\mu}\hat{v}\hat{\alpha}} = \frac{1}{2}\left(c_{\hat{\mu}\hat{v}\hat{\alpha}} + c_{\hat{\mu}\hat{\alpha}\hat{v}} - c_{\hat{v}\hat{\alpha}\hat{\mu}}\right),$$
$$c_{\hat{\mu}\hat{v}\hat{\alpha}} = [\mathbf{e}_{\hat{\mu}}, \mathbf{e}_{\hat{v}}]\cdot\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}.$$

Подставляя базисные векторы (11) и удерживая члены порядка O $\left(\varepsilon^3\right)$, находим

$$\left[\mathrm{e}_{\hat{j}}, \mathrm{e}_{\hat{0}}\right] = \left(-\varphi_{,j} + \frac{1}{2}v_{,j}^2 - v_{l,t} - \frac{1}{2}v^2v_{f,t} - v_kv_{l,k}\right)\partial/\partial t +$$
$$+\left[v_{k,j} - \varphi_{,,}v_k + \frac{1}{2}v_{,j}^2v_k + \frac{1}{2}v^2v_{k,j} + v_jv_{k,t} +\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}v_jv_mv_{k,m} - \frac{1}{2}\left(v_jv_k\right)_{,t} - v_m\varphi,m\delta_{jk} - v_m\frac{1}{2}\left(v_jv_k\right)_{,m}\right]\partial/\partial x^k$$

Поскольку
То

$$\left(\partial/\partial x^{\alpha}\right)\cdot\left(\partial/\partial x^{\beta}\right) = g_{\alpha\beta}$$

$$\left[\mathrm{e}_{\hat{i}}, \mathrm{e}_{\hat{\theta}}\right]\cdot\mathrm{e}_{\hat{k}} = \left(1-\varphi+\frac{1}{2}v^2\right)v_{k,1} + v_kv_{1,t} + v_{,}v_{k,t} + \frac{1}{2}v_jv_mv_{k,m} +$$
$$+ v_mv_kv_{1,m} + \frac{1}{2}v_mv_kv_{m,,} - \frac{1}{2}\left(v_1v_k\right)_{,t} - v_m\varphi_{,m}\delta_{jk} - v_m\frac{1}{2}\left(v_1v_k\right)_{,m}.$$

Следовательно,

$$\left[\mathbf{e}_{\hat{l}}, \mathbf{e}_{\hat{0}}\right]\cdot\mathbf{e}_{\hat{k}} - \left[\mathbf{e}_{\hat{k}}, \mathbf{e}_{\hat{0}}\right]\cdot\mathbf{e}_{\hat{j}} = \left(1-\varphi+\frac{1}{2}v^2\right)\left(v_{k,1} - v_{j,k}\right) +$$
$$+\frac{1}{2}v_m\left(v_kv_{f,m} - v_{,}v_{k,m} + v_kv_{m,1} - v_{,}v_{m,k}\right)$$

I
откуда

$$\left[\mathbf{e}_{\hat{j}}, \mathbf{e}_{\hat{k}}\right] = \left[\left(1-2\varphi+\frac{1}{2}v^2\right)v_{k,j} + v_{,}v_{k,t} - 3\varphi_{,,}v_k +\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}v_{,j}^2v_k - 2h_{k,j} + \frac{1}{2}v_jv_mv_{k,m}\right]\partial/\partial t +$$
$$+\left[\varphi, \delta_{km}\ +\frac{1}{2}\left(v_kv_m\right)_{,} + \frac{1}{2}v_{,}\left(v_kv_m\right)_{,t}\right]\partial/\partial x^m - \{j\leftrightarrow k\},$$

$$\left[\mathrm{e}_{\hat{j}}, \mathrm{e}_{\hat{k}}\right]\cdot\mathrm{e}_{\hat{0}} = \left(1-\varphi+\frac{1}{2}v_{,}^2\right)\left(v_{i,k} - v_{k,j}\right) + 4\left(\varphi, jv_k - \varphi_{,k}v_{\gamma}\right) +$$
$$+2\left(h_{k,j} - h_{1,k}\right) + v_kv_{,,t} - v_{,}v_{k,t} +$$
$$+\frac{1}{2}v_m\left(v_1v_{m,k} - v_kv_{m,j} + v_kv_{1,m} - v_jv_{k,m}\right).$$

Таким образом, символы Кристоффеля имеют вид

$$\Gamma_{\hat{i}\hat{k}\hat{0}} = \frac{1}{2}\left(\left[\mathbf{e}_{\hat{i}}, \mathbf{e}_{\hat{k}}\right]\cdot\mathbf{e}_{\hat{0}} + \left[\mathbf{e}_{\hat{i}}, \mathbf{e}_{\hat{0}}\right]\cdot\mathbf{e}_{\hat{k}} - \left[\mathbf{e}_{\hat{k}}, \mathbf{e}_{\hat{0}}\right]\cdot\mathbf{e}_{\hat{j}}\right) =$$
$$= 2\left(\varphi_{,}v_k - \varphi_{,k}v_j\right) + h_{k,j} - h_{i_{,}k} + \frac{1}{2}\left(v_k\frac{\partial v_{\hat{\gamma}}}{\partial\tau} - v_{\gamma}\frac{\partial v_k}{\partial\tau}\right)$$

где

$$\frac{\partial v_j}{\partial\tau} \equiv \frac{\partial v_j}{\partial t} + v_m\frac{\partial v_j}{\partial x^m} = -\varphi.\nu + a_f$$

Здесь $\vec{a}$ означает ускорение, создаваемое неинерциальными силами. Для движения по геодезическим $\vec{a} = 0$. Таким образом,

$$\Gamma_{\hat{i}\hat{k}\hat{0}} = \frac{3}{2}\left(\varphi_{,j}v_k - \varphi, kv_j\right) + h_{k,j} - h_{j,k}$$

и соотношение (36) можно представить в виде

$$\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{h} + \frac{3}{2}\vec{\nabla}_\varphi \times \vec{v}$$

Если бы $\vec{a} \neq 0$, то в (18) появился бы лицний член $1/2\vec{a} \times \vec{v}$, соответствующий томасовой прецессии.

Член $//2\vec{\nabla}\varphi \times \vec{v}$ называется «геодезнческой прецессией». Для частицы, движущейся по круговой орбите радиуса r,

$$\Omega_{\text{геодезич}} = -\frac{3}{2}\frac{M}{r^2}\left(v_-\mathbf{e}_{\bar{\varphi}} - v_{\bar{\varphi}}^-\mathbf{e}_{\bar{\theta}}\right)$$

где

$$v_- = \left(\frac{M}{r}\right)^{1/2}\frac{\left(\sin^2\vartheta - \sin^2\alpha\right)^{1/2}}{\sin\vartheta},$$
$$v_{\bar{\varphi}} = \left(\frac{M}{r}\right)^{1/3}\frac{\sin\alpha}{\sin\vartheta}$$

компоненты скорости частицы в сферической системе координат, а α-угол наклона плоскости орбиты к полярной оси. В рассматриваемом нами порядке теории возмущений по 8 не имеет значения, какие индексы мы используем: со знаком "или без него. Геодезическая прецессия по порядку величины составляет

$$\Omega_{\text{геодезич}} \sim \frac{3}{2}\left(\frac{M}{R}\right)^{1/2}\frac{M}{R^2} \sim 8'' \text{ В ГОД},$$

где R - радиус Земли. Член, не зависящий от v, называется прецессией Лензе - Тирринга:

$$\Omega_{\pi-1} = \frac{1}{r^3}\left(-\vec{J} + \frac{3(\vec{J}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^2}\right) \sim \frac{J}{R^3} \sim 0,1'' \text{ В год.}$$

Этот член можно было бы также получить из задачи 11.10, поскольку с точностью до ε^3
Поскольку

$$\Omega\hat{i} \sim \Omega' \approx \frac{8^{j0kl}\xi_0\xi_{[k,l]}}{2\xi^Y\xi_\gamma}.$$

ТО

$$\xi^0 = 1, \quad \xi_0 = -(1-2\varphi), \quad \xi_j = -2h_j,$$

$$\Omega\hat{j} = \varepsilon_{jkl}h_{l,k}, \quad \vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{h}.$$

13.3 Typical Formalism and Laws of Gravity

13.3.1 Problems about Gravitational Field Equations and Their Linearization

Решение 13.1.

Согласно тождествам Бианки, дивергенция тензора Эйнштейна равна нулю.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

Поэтому, беря дивергенцию от обеих частей нашего обобщенного уравнения поля, получаем

$$\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)R_{,\mu} = 8\pi T_\mu{}^v; v$$

С другой стороны, если сначала свернуть полевые уравнения, а затем продифференцировать их, то найдем

$$(1-4\alpha)R_{,\mu} = 8\pi T_{,\mu}$$

откуда следует, что уравнения движения должны иметь вид
где

$$T^{\nu}_{\mu}; v = xT_{,\mu}$$

$$x \equiv \frac{\frac{1}{2}-\alpha}{1-4\alpha}.$$

Для жидкости с плотностью ρ и пренебрежимо малыми давлениями это уравнение в ньютоновском пределе при $\mu = 0$ можно запнсать следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = x\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

где $\vec{v}$-скорость потока жидкости. Если χ не равно нулю (т. е. $\alpha \neq \frac{1}{2}$), то последнее уравнение не совпадает с ньютоновским уравнен ием непрерывности - иначе говоря, уже в ньютоновском приближении мы сталкиваемся с нарушением закона сохранения массы.

Решение 13.2. Равенство нулю тензора Вейля позволяет нам записать метрику в конформно-плоском виде:

$$g_{\mu\nu} = e^{2\varphi}\eta_{\mu\upsilon}$$

где в нbютоновском пределе $\varphi \ll 1$ (почти плоское пространствовремя). Тогда (см. задачу 9.19) будем иметь

$$R \approx -6\nabla^2\varphi$$

Для нерелятивистских значений компонент тензора энергинмпульса

$$T^{\mu}_{\mu} \approx T^{0}_{0} \approx -\rho$$

и уравнения поля приобретают вид

$$-6\varphi, \alpha\beta\eta^{\alpha\beta} = xT = -x\rho.$$

В ньютоновском пределе производные по времени малы по сравнению с производными по пространственным координатам (в системе единиц, где $c = 1$), так что мы можем записать

$$6\varphi, tj\delta^{ij} = x\rho$$

Для $x = 24\pi$ это будет обычное уравнение ньютоновской теорин для ньютоновского гравитационного потенциала φ. Из решения задачи 12.11 следует, что ньютоновские траектории являются геодезическими в метрике с $g_{00} \approx -(1+2\varphi)$. Следовательно, в ньютоновском пределе предлагаемая теория согласуется с ньютоновской, а φ играет роль ньютоновского потенциала.

Для метрики массивного объекта, например Солнца, функция φ должна убывать до нуля вдали от объекта, где пространствовремя становится плоским. Чтобы заметить, что в данной теории отсутствует отклонение световых лучей, достаточно (см. задачу 9.18) обратить внимание на тот факт, что изотропные геодезические для метрики $g_{\mu\nu} = e^{2\varphi}\eta_{\mu\nu}$ совпадают с изотропными геодезическими для плоского пространства ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\upsilon}$), которые, как известно, не отклоняются в поле массивного объекта. Таким образом, если сравнить в удаленных, асимптотически-плоских областях пространства направления движения фотона до и после его взаимодействия с массивным объектом, отклонения наблюдаться не будет.

Вблизи земной поверхности рассматриваемая метрика имеет вид

$$ds^2 = e^{2\varphi(z)}\left(-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2\right)$$

где координата z соответствует высоте над поверхностью Земли. Для получения правильного значения ускорения свободного падения частиц необходимо, чтобы $\varphi \approx -gz$. Из уравнения геодезнческой находим, что энергия фотона, движущегося вертикально вверх, меняется по закону

$$\frac{dp^0}{dz} = -\Gamma^0_{0z}p^0 = -\varphi, zp^0$$

Следовательно, фотон теряет энергию с той же скоростью, что и частица вещества, и предлагаемая теорня согласуется с результатами экспериментов Паунда - Ребки, как, впрочем, оно и должно быть для любой теории, основанной на принципе движения по геодезическим.

Solution

13.3. Для статического случая уравнение скаляра поля в теории Бранса - Дикке имеет вид

$$\nabla^2\varphi = \frac{8\pi T}{(3+2\omega)}$$

Далее, для сферической оболочки массы M и радиуса R

$$T = -\rho = \frac{M\delta(r-R)}{4\pi r^2}$$

так что выражения для потенциала φ внутри и вне оболочки суть соответственно

$$\varphi_{\rm I} = \varphi_1, \quad r < R,$$
$$\varphi_{\rm II} = \varphi_\infty + \frac{2}{3+2\omega}\frac{M}{r}, \quad r > R,$$

где φ_1 и φ_∞ - постоянные. Сшивая φ_1 и φ_{11} при $r = R$, получаем

$$\varphi_1 = \varphi_\infty + \frac{2}{3+2\omega}\frac{M}{R}.$$

Наконец, из теории Бранса - Дикке нам известно также, как выражается через φ локальная гравитационная «постоянная» [см. Вейнберг, уравнение (9.9.11)]:
Следовательно,

$$G = \varphi^{-1}\left(\frac{4+2\omega}{3+2\omega}\right)$$

$$\varphi_\infty = \frac{4+2\omega}{3+2\omega}\frac{1}{G_\infty}$$

$$G_1 = \varphi_1^{-1}\left(\frac{4+2\omega}{3+2\omega}\right) \approx \left(\frac{4+2\omega}{3+2\omega}\right)\varphi_\infty^{-1}\left[1 - \frac{2M}{\varphi_\infty R(3+2\omega)}\right]$$

и окончательно

$$G_1 = G_\infty\left[1 - \frac{G_\infty M}{R}\frac{1}{(2+\omega)}\right]$$

Это решение справедливо с точностью лишь до членов низшего порядка по M/R, и не только из-за членов, которыми мы пренебрегли, но и потому, что в более высоком порядке нужно было бы учитывать изменения в метрике $g_{\mu\nu}$, обусловленные присутствием массы, и использовать в уравнении (1) вместо «плоского» лапласиана. оператор Лапласа в искривленном пространстве.

Solution

13.4. Если не должно существовать выделенной системы отсчета, связанной с вакуумом, то тензор энергин-нмпульса вакуума должен иметь один и тот же вид в любой лоренцевской системе отсчета. Тензор η_{uv} выглядит одинаково в любой лоренцевской системе отсчета, так что тензор энергии-импульса вида $\rho\eta_{\mu\nu}$ (или, в общих координатах, $\rho g_{\mu\nu}$) не выделяет ни одну систему. [Единственность $g_{\mu\nu}$ можно показать следующим образом: если не существует выделенной системы отсчета, то нет и выделенных векторов и, следовательно, нет выделенных собственных векторов. Это возможно лишь тогда, когда все векторы являются собственными, но если $S^\nu_\mu V_\nu = KV_\mu$ для всех K, то это значит, что S^ν_μ должно быть пропорционально $\delta_\mu{}^\nu$.
Уравнения поля, включающие в качестве источников как тензор материи, так и тензор энергии-импульса вакуума, имеют вид

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 8\pi\left(T^{\mu\nu}_{\text{материн}} + g^{\mu\nu}\rho_{\text{вик}}\right)$$

Если сравнить их с полевыми уравнениями, содержащими космологический член

$$R^{\mu v} - \frac{1}{2}g^{\mu v}R + \Lambda g^{\mu v} = 8\pi T^{\mu\nu}_{\text{материи}}$$

то легко видеть, что мы можем отождествить космологическую постоянную Λ с пло1 ностью энергии вакуума, полагая $\Lambda = 8\pi\rho_{\text{вак}}$.
Если бы вакуум состоял из частиц с массой m, среднее рас. стояние между которыми равнялось бы $\lambda \sim \hbar/mc$, то его плотность энергии была бы порядка $m(mc/\hbar)^3$. Соответствующие значения порядка 10^4г/см^3 для электронов и 10^{17}Г/см^3 для протонов; оба они несообразно велики.

Если считать, что энергия вакуума обусловлена гравитационным взаимотействием близлежащих частиц (соответствующие энергии имеют порядок величины $G\frac{m^2}{\lambda}\Big)$, то эквнвалентная плотность массы должна равняться

$$c^{-2}\left(Gm^2/\lambda\right)/\lambda^3 = Gm^6c^2/\hbar^4$$

что дает порядок 10^{-22}г/см^3 для протонов и 10^{-41}г/cm^3 для электронов. Средняя плотность вещества в нашей Галактике составляет 10^{-23}Г/см^3, так что наличие плотности «протонного» вакуума, равной 10^{-22} г/см ^{3}, привело бы к заметным постедствням вплоть до влияния на динамику Галактики. С другой стороны, плотность «электронного» вакуума, равная 10^{-41}Г/см^3, мала даже по сравнению с космологическими плотностями $\left(10^{-31}\right.$ г/см $\left.^8\right)$, так что она не проявилась бы ни в каких измеримых зффектах.

Все эти соображения нужно рассматривать лишь как наводящие и в определенной степени изобретенные специально для дан- ного случая. Из соображений размерности следует, что плотность энергии вакуума должна иметь вид

$$\frac{m^4c^3}{\hbar^3}\left(\frac{Gm^2}{c\hbar}\right)^n$$

При этом для $n = 1$ мы получаем довольно-таки разумные с некоторой точки зрения значения плотности; рассуждение Зельдовича как раз и представляет собой попытку дать физическое обоснование выбору $n = 1$.

Solution

13.5. Если свернугь уравнения поля Эйнштейна, мы получим соотношение между следом $T_{\mu\nu}$ и скалярной кривиз. нОЙ Рнччи:

$$R = -8\pi T_\mu^\mu$$

В локально лоренцевской системе отсчета, где тензор $T_\mu{}^\nu$ диагонален,

$$T_\mu^\mu = -\rho + p_x + p_y + p_z,$$

здесь p_x, p_y, p_z - главные напряжения (численно равные давлению). Для всех известных уравнений состояния $\rho \geqslant 3p$, поэтому скалярная кривизна Риччи R должна быть положительно определенной, а тензор T_μ^μ - отрицательно определенным.

След тензора энергин-німпульса электромагнитного поля равен нулю (см. задачу 4.16), так что если тензор энергии-импульса в данном объеме пространства-времени имеет чисто электромагнитную природу, то $R = 0$.

Реиение 13.6. Зная компоненты $T_\alpha{}^\beta$ в своей собственной ортонормированной системе, наш наблюдатель может найти для этого тензора четыре собственных значения и четыре собственных вектора:

$$T_\alpha^\beta W_\beta = \lambda W_\alpha$$

Нам известно, что один из собственных векторов времениподобен. Нормируем его таким образом, чтобы $W_\alpha W^\alpha = -1$. Если его компоненты равны $W^\alpha = \left(\gamma, \gamma\gamma^j\right)$, выполним преобразование Лоренца со скоростью v' и перейдем к системе отсчета, покоящейся относительно $W.B$ этой системе $W^{\hat\alpha} = (1, \overrightarrow{0})$ и уравнение (1) дает

$$T^{\hat0\hat0} = -\lambda_{\text{врешенипод}} \equiv \rho \quad \text{и} \quad T^{\hat0\hat k} = 0.$$

Квадратная матрица 3-го порядка $T_{\hat j\hat k}$ может быть диагонализована с помощью пространственного поворота, и из уравнения (1) видно, что ее диагональные элементы как раз и представляют собой остальные собственные значения $\lambda_t = p_i$, где $i = 1, 2, 3$. Пусть теперь и будет некоторой произвольной 4-скоростью с ком- понентами $u^{\hat\alpha} = \left(\bar\gamma, \bar\gamma, \bar v^j\right)$ в системе отсчета наблюдателя, для которого тензор $T^{\alpha\beta}$ диагонален. «Слабое энергетическое условие» требует, чтобы $T^{\alpha\beta}u_\alpha u_\beta \geqslant 0$, так что

$$\rho + \bar v_1^2 p_1 + \bar v_2^2 p_2 + \bar v_3^2 p_3 \geqslant 0$$

где скорости $\approx'$ произвольны, а $\bar v^2 \leqslant 1$. Необходимое и достаточное условие справедливости неравенства (2) гласит:

$$\rho \geqslant 0, \quad \rho + p_i \geqslant 0$$

что может проверить наш наблюдатель после того, как он решил уравнение (1). Случай, когда тензор $T^{\alpha\beta}$ не имеет ни одного времениподобного собственного вектора, разобран в книге [6], стр. 102 и далее.

Solution

13.7. Для $n = 0$ указанное утверждение сводится $\mathbf{ku} \cdot \mathbf{u} \leqslant 0$ и является тривиальным. Для $n = 1$ оно гласит: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} \geqslant 0$ для всех времениподобных $\mathbf{u}$; это как раз и есть слабое энергетическое условие. Для $n = 2$ мы имеем ус ловие (u.T) $\cdot(\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}) \leqslant 0$, т. е. вектор $\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}$ не должен быгь пространственноподобным. Однако для наблюдателя с 4-скоростью $\mathbf{u}$ имеем

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{T} = \left(-\rho, [\text{ плотность потока энергин }]^i\right)$$

и, согласно условию энергодоминантности,

$$|\rho| > |\text{ плотности потока энергии }|,$$

так что вектор $\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}$ действительно не является пространственноподобным.

Рассмотрим теперь произвольное число n и утверждение

$$(-1)^n \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \cdots \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} \leqslant 0.$$

Поскольку вектор u.T не является пространственноподобным, это утверждение для любого числа n эквивалентно аналогичному утверждению для $n-2$. Но мы показали, что из условия энергодоминантности вытекает справедливость этой формулы для $n = 1$ и $n = 2$, т. е. из условия энергодоминантности вытекает справедливость ее для любого n. Из сказанного немедленно следует справедливость и обратного утвержденил: любой тензор энергииимпульса, для которого справедлива рассматриваемая формула при $n = 1$ и $n = 2$, удовлетворяет всем требованиям, содержащимся в условии энергодоминантности.

Решение 13.8. Да, возможно. Возьмем метрику $g_{\mu v}$, такую, что $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ для $t < 0$ (ясно, что это пустое пространство), а для $t \geqslant 0$ пусть $g_{\mu\nu}$ - произвольно выбранные функции. Единственное требование **К** этим произвольным функциям, чтобы они были дважды дифференцируемы и гладко сшивались с соответствующими значениями метрики пустого пространства на гиперповерхности $t = 0$. Теперь. для этой метрики $g_{\mu v}$ можно вычислить тензор Риччи и его свертку (скалярпую кривизну), а затем ввести по определению тензор

$$T_{\mu v} \equiv (8\pi)^{-1} \left(R_{\mu v} - \frac{1}{2} g_{\mu v} R \right)$$

Очевидно, что этот тензор симметричен, а в силу свернутых тождеств Бианки дивергенция его равна нулю. Если пространствовремя будет заполнено материей, распределение которой описывается этим тензором, то метрика $g_{\mu v}$ выбранного нами вида будет решением уравнений поля Эй нштей на. (Необходимо заметить, однако, что для того, чтобы решение было физически осмысленным, тензор $T_{\mu v}$ должен подчиняться некоторым дальнейшим ограничениям: например, плотность энергии должна быть всюду неотрицательной. Это требование, вообще говоря, не обязательно -удовлетворяется в рамках рассмотренной нами процедуры.)

Реuение 13.9. Используем уравнение Киллинга $\xi_{(\alpha;\beta)} = 0$ и определение статической метрики с помощью условия «стационарности и ортогональносги» вектора Киллинга & к семейству гиперповерхностей (см. задачу 10.8). Получим

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\xi_{[\alpha;\beta}\xi_{\gamma]}\right); \gamma = \\ &= \frac{1}{3} \left(\xi_{\alpha;\beta}\xi_{\gamma} + \xi_{\gamma;\alpha}\xi_{\beta} + \xi_{\beta;\gamma}\xi_{\alpha}\right); \gamma = \\ &= \frac{1}{3} \left(R_{\lambda\gamma\beta\alpha}\xi^{\lambda\xi}\xi + R_{\lambda}\gamma_{\alpha\gamma}; \lambda\xi_{\beta} + R_{\lambda\gamma\beta\beta}\xi^{\lambda}\xi_{\alpha}\right), \end{aligned}$$

где мы воспользовались результатом $\xi_{\mu;\alpha\beta} = R_{\gamma\beta\alpha\mu}\xi^{\gamma}$ (из задачи 10.7). Первый член в приведенном выше выражении равен нулю из соображений симметрии, а оставшиеся члены представляют собой компоненты тензора Риччи; таким образом, мы имеем

$$\begin{aligned} 0 = \xi^{\lambda} R_{\lambda[\alpha}\xi_{\beta]} &= 8\pi\xi^{\lambda} \left(T_{\lambda[\alpha} - \frac{1}{2} g_{\lambda[\alpha} T \right) \xi_{\beta]} = \\ &= 8\pi\xi^{\lambda} \left((\rho + p) u_{\lambda} u_{[\alpha} + \frac{1}{2}(\rho - p) g_{\lambda[\alpha} \right) \xi_{\beta]} \end{aligned}$$

Последний член равен нулю тождественно, откуда следует, что $u_{[\alpha}\xi_{\beta]} = 0$, т. е. п параллельно ξ.

Менее строгое доказательство получается при использовании эквивалентного определения статической метрики с помощью условия «стационарности и обратимости времени» (см. задачу 10.8). В этом случае мы немедленно замечаем: если и не параллельно, то $T^{0i} \neq 0$ в «системе отсчета с обратимым временем». Отсюда, однако, следует, что $G^{0l} \neq 0$, а это несовместимо с условием инвариантности метрики относительно обращения времени.

Решение 13.10. Из тождеств Бианки $G^{v\mu}; \mu \equiv 0$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} G^{v0} \equiv -G^{vt}, l - G^{\sigma\mu}\Gamma^{v}_{\sigma\mu} - G^{v\sigma}\Gamma^{\mu}{}_{\sigma\mu}.$$

Члены в правой части этого тождества не могут содержать третьих производных or метрики по времени, и, таким образом, в G^{v0} не могут входить вторые производные по времени. Отсюда следует, что четыре уравнения $G^{v0} = 8\pi T^{v0}$ играют роль уравнений для начальных данных, или, иначе говоря, связей, налагаемых на данные, задаваемые на гиперповерхности Коши, тогда как $G^{ij} = 8\pi T^{ij}$ являются динамическими уравнениями.

Исследование упомянутых выше связей, налагаемых на начальные данные, затруднено ввиду произвола в метрике, связанного с произвольностью выбора координатной системы. Чтобы устранить эту запутанность, мы можем прежде всего выбрать четыре координатных условия, налагаемых на метрику; удобно, например, выбрать в качестве исходных нормальные гауссовы координаты, соответствующие $g_{00} = -1$ и $g_{0i} = 0$. В результате мы будем иметь для шести полевых переменных g_{ij} шесть динамических уравнений $G^{ij} = 8\pi T^{ij}$, которые можно разрешить относительно $\partial^2 g_{ij}/\partial t^2$, а также четыре уравнения для начальных данных $G^{v0} = 8\pi T^{v0}$, приводящие к соотношениям между начальными данными g_{ij} и $\partial g_{ij}/\partial t$ на начальной гиперповерхности.

Теперь, чтобы избавиться от членов вида $\partial^2 g_{ij}/\partial t^2$, можно продифференцировать по времени четыре уравнения для начальных данных и затем воспользоваться динамическими уравнениями. В результате мы получим четыре новых соотношения между начальными данными. [Легко видеть, что эти новые соотношения должны отличаться от четырех прежних, поскольку $\partial G^{v0}/\partial t = 8\pi\partial T^{v0}/\partial t$, а мы можем выбрать конкретный вид $\partial T^{v0}/\partial t$ независимо от любых учитывавшихся ранее связей.]

Итак, мы имеем теперь восемь уравнений, связывающих двенадцать функций g_{ij} и $\partial g_{ij}/\partial t$ на начальной гиперповерхности Коши. Следовательно, на этой гиперповерхности мы можем еще выбрать независимо четыре произвольные функции.

Если рассматривать четыре произвольные функции как начальные данные для двух полевых переменных и их производных по времени на гиперповерхности Коши, тогда общая картина эволюции во времени гравитационного поля будет описываться динамикой двух полей. Именно по этой причине обычно говорят, что гравитационное поле обладает двумя динамическими степенями свободы.

Solution

13.11. Компоненты псевдотензора Ландау - Лифшица задаются с помощью довольно-таки устрашающего выражения:

где $\xi\alpha\beta \equiv (-g)^{1/2} g^{\alpha\beta}$.

$$
\begin{aligned}
&(-g)t^{\alpha\beta}{}_{\pi-\Omega} = (16\pi)^{-1}[\xi\alpha\beta, \lambda\xi\lambda\mu, \mu - \xi\alpha\lambda, \lambda\xi\beta\mu, \mu + \\
&+ \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\lambda\mu} \xi\lambda\nu, \beta^{\xi\rho\mu}, v - g^{\alpha\lambda} g_{\mu v} \xi\beta v, \rho\xi\mu\rho, \lambda - \\
&- g^{\beta\lambda} g_{\mu\nu} \xi\alpha v, \rho\mu\mu\rho, \lambda + \\
&+ g_{\lambda\mu} g^{v\rho g\alpha\lambda}, v\xi\beta\mu + \frac{1}{8}\left(2g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} - g^{\alpha\beta} g^{\lambda\mu}\right) \times \\
&\underline{\times \left(2g_{v\rho} g_{\sigma\tau} - g_{\sigma\rho} g_{v\tau}\right) \xi v\tau, \lambda g\rho\sigma, \mu]}
\end{aligned}
$$

Для рассматриваемой нами метрики

$$\xi^{00} = -(1-2\Phi)^{3/2}(1+2\Phi)^{-1/2}, \xi\xi^{ij} = \left(1-4\Phi^2\right)^{1/2}\delta^{ij}, \quad \xi 0i = 0.$$

Отметим, что все члены в выражении для $t^{\alpha\beta}$ л-л включают произведение двух производных от ξ, и поэтому в первом неисчезающем порядке по выражение для $t^{\alpha\beta}$ будет содержать произведения первых производных от Ф. Следовательно, при вычисленин производных от & нам нужно удержать только члены, пропорциональные $\Phi_{,l}$:

$$\xi 00, l \approx 4\Phi, i, \xi\xi_{,k} \approx -4\Phi\Phi_{,k}\,\delta^{ij} \approx 0.$$

Если далее сохранииь только члены вида $\xi 00, l$, то в выражении для $t^{\alpha\beta}$ − уцелеют только подчеркнутые члены и мы будем иметь

$$t^{\alpha\beta}\pi - \pi = (16\pi)^{-1}\left[-g^{ijg\alpha 0}, i^{\xi\beta 0}, i + \frac{1}{8}\left(2g^{\alpha l} g^{\beta m} - g^{\alpha\beta} g^{lm}\right)\xi^{00}, l^{\xi 00}, m\right].$$

Отсюда, если положить $g^{\alpha\beta} \approx \eta^{\alpha\beta}$ и $\xi 00, t = 4$, $^{\iota}$, легко можно получить

$$
\begin{aligned}
&t^{00}\pi - \pi = (16\pi)^{-1}\left[-\delta^{ij\xi}\xi^{00,j}_{,l\ ,\xi 00} + \frac{1}{8}\delta^{lm}\xi_{,l}{}^{\xi 00}{}_{,\,,m}\right] = \frac{-7}{8\pi}\delta^{ij}\Phi_{,l}, \Phi_{,j}, \\
&t^{0i}\pi - \pi = 0, \\
&t^{ij}\pi - \pi = (16\pi)^{-1}\left[\frac{1}{8}\left(2\delta^{il}\delta^{jm} - \delta^{ij}\delta^{lm}\xi^{00}, \xi^{00}, m\right] = \right. \\
&= (4\pi)^{-1}\left(\Phi_{,i}\Phi_{,j} - \frac{1}{2}\delta_{ii}\Phi_{,m}\Phi, m\right).
\end{aligned}
$$

Обратите внимание, что пространственные компоненты $t^{ij}\pi - \pi$ совпадают с компонентами тензора напряжений из задачи 12.8.

Решение 13.12. Значение скаляра в некоторой заданной точке не изменяется при калибровочном преобразовании, так что

$$\varphi''\left(\mathbf{x}''(P)\right) = \varphi'\left(\mathbf{x}'(P)\right) = \varphi'\left(\mathbf{x}''(P) - \xi(P)\right),$$
$$\varphi''\left(\mathbf{x}''\right) \approx \varphi'\left(\mathbf{x}''\right) - \xi^{\alpha}\varphi_{,\alpha}.$$

Для векторного поля имеем

$$V''_{\mu} = \frac{\partial\left(x'\right)^{v}}{\partial\left(x''\right)^{\mu}} V'_{v}\left(\mathbf{x}'\right) = \left(\delta^{v}{}_{\mu} - \xi^{\nu}, \mu\right)\left(V'_{v}\left(x''\right) - V'_{v,\sigma}\xi^{\sigma}\right) \approx$$
$$\approx V'_{\mu}\left(x''\right) - V_{v}\xi^{v}, \mu - V_{\mu,\sigma}\xi^{\sigma}.$$

Аналогично для тензорного поля получаем

$$T''_{\mu v}\left(\mathbf{x}''\right) = \frac{\partial\left(x'\right)^{\alpha}}{\partial\left(x''\right)^{\mu}} \frac{\partial\left(x'\right)^{\beta}}{\partial\left(x''\right)^{v}} T'_{\alpha\beta}\left(\mathbf{x}'\right) =$$
$$= \left(\delta^{\alpha} - \xi^{\alpha}, \mu\right)\left(\delta^{\beta}{}_{v} - \xi^{\beta}, v\right)\left(T'_{\alpha\beta}\left(\mathbf{x}''\right) - T_{\alpha\beta,\sigma\xi^{\sigma})}\right) \approx$$
$$\approx T'_{\mu v} - T_{\mu\beta}\xi^{\beta}, v - T_{\beta v}\xi^{\beta}, \mu - T_{\mu v,\sigma\xi^{\sigma}}.$$

Заметим, что
и что

$$\xi_{\mu;v} = g_{\mu\sigma}\xi^{\sigma}; v = g_{\mu\sigma}\left(\xi^{\sigma}, v + \xi^{\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\alpha v}\right) = g_{\mu\sigma}\xi^{\sigma}, v + \xi^{\alpha}\Gamma_{\mu\alpha v}$$

$$\xi_{(\mu,v)} = g_{\sigma(\mu\xi^{\sigma},v)} + \xi^{\alpha}\left(\frac{1}{2}g_{\mu v,\alpha}\right)$$

Тогда для метрического тензора получим

$$g^{*}_{\mu\nu}\left(\mathrm{x}''\right) = g'_{\mu v}\left(\mathrm{x}''\right) - g_{\mu v,\xi^{\circ}} - 2g_{\sigma(\mu\xi^{\circ},v)} = g'_{\mu v}\left(\mathrm{x}''\right) - 2\xi_{(\mu;v)} =$$
$$= \eta_{\mu v} + h'_{\mu v}\left(\mathbf{x}''\right) - 2\xi_{(\mu;v)}$$

и окончательно

$$h''_{\mu v}\left(\mathrm{x}''\right) = h'_{\mu v}\left(\mathrm{x}''\right) - 2\xi_{(\mu;v)}.$$

Поскольку в первом порядке метрика является метрикой Минковского, можно считать, что

$$\xi_{(\mu;v)} = \xi_{(\mu,v)} + \Theta(\xi h).$$

Solution

13.13. Поскольку символы Кристоффеля

$$\Gamma_{\alpha\mu\beta} = \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\beta,\mu} + h_{\alpha\mu,\beta} - h_{\beta\mu,\alpha}\right)$$

имеют порядок малости h, в формуле, выражающей компоненты тензора Римана через Γ, можно пренебречь членами, содержащими произведения символов Кристоффеля. В результате будем иметь

$$R_{\alpha\mu\beta v} \approx g_{\alpha\lambda}\left(\Gamma^{\lambda}_{\mu v,\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta,v}\right) \approx 2\Gamma_{\alpha\mu[v,\beta]} = \left(h_{\alpha[v,\beta],\mu} - h_{\mu[v,\beta],\alpha}\right),$$

что и требовалось доказать.

При калибровочном преобразовании $h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} - 2\xi_{(\mu,v)}$ и

$$R_{\alpha\mu\beta v} \to R_{\alpha\mu\beta v} - \xi_{\alpha[,v,\beta],\mu} + \xi_{\mu[,v,\beta],\alpha} - \xi_{v[,\alpha,\beta],\mu} + \xi_{v[,\mu,\beta],\alpha}.$$

Поскольку частные производные коммутируют, добавочные члены взаимно сокращаются и вид тензора Римана остается неизменным.

Solution

13.14. При калибровочном преобразовании (см: задачу 13.12) возмущения метрики принимают следующий вид:

$$h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - 2\xi_{(\alpha,\beta)}.$$

Если свернуть это равенство, то легко заметить, что при калибровочном преобразовании след $\left(h \equiv h_\sigma{}^\sigma \equiv \eta^{\sigma\lambda}h_{\sigma\lambda}\right)$ изменяется по формуле

$$h' = h - 2\xi^\sigma, \sigma,$$

где $\xi^\sigma \equiv \eta^{\sigma\lambda}\xi_\lambda$. Тогда закон преобразования для $\bar{h}_{\alpha\beta}$ имеет вид
H

$$\begin{aligned}\bar{h}'_{\alpha\beta} &= h'_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h' = h_{\alpha\beta} - 2\xi_{(\alpha,\beta)} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\left(h - 2\xi^\sigma, \sigma\right) = \\ &= \bar{h}_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} + \eta_{\alpha\beta}\xi^\sigma, \sigma\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{h}'_{\alpha\beta}, \beta &= \eta^{\lambda\beta}\dot{h}'_{\alpha\beta,\lambda} = \bar{h}_{\alpha\beta}, \beta - \xi_{\alpha,\beta^{,}\beta} - \xi_{\beta,\alpha'\beta} + \xi_{\sigma'}, , \alpha = \\ &= \bar{h}_{\alpha\beta}, \beta - \xi_{\alpha,\beta}, \beta = \bar{h}_{\alpha\beta}, \beta - \Box\xi_\alpha.\end{aligned}$$

Теперь нам нужно только так выбрать четыре функции ξ_α, чтобы они удовлетворяли обычному волновому уравнению $\Box\xi_\alpha = \bar{h}_{\alpha\beta}, \beta$.

Такое решение всегда можно найти (например, можно взять решение с запаздывающими потенциалами из классической теории электромагнитных волн), но оно, разумеется, не единственное: мы всегда можем добавить к ξ_α любое решение уравнения $\Box\xi_\alpha = 0$.

Solution

13.15. В задаче 13.13 мы нашли выражение для линеаризованного тензора Римана; если свернуть его, то можно получить линеаризованный тензор Риччи

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(h_{v\alpha,}{}^\alpha, \mu + h_{\mu\alpha}{}^\alpha, v - \Box h_{\mu\nu} - h_{,\mu v}\right)$$

где $h \equiv h_\sigma{}^\sigma$. В лоренцевской калибровке из $\bar{h}_{\alpha\beta}{}^{\beta\beta} = 0$ следует

$$h_{\alpha\beta}, \beta = \frac{1}{2}h, \alpha$$

так что

$$R_{\mu v} = \frac{1}{2}\left(h_{\mu\nu} - \Box h_{\mu v} - h_{,\mu v}\right) = -\frac{1}{2}\Box h_{\mu v}$$

и, сворачивая еще раз, получаем $R = -\frac{1}{2}\Box$. Следовательно, уравнения поля будут иметь вид

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu v}R = -\frac{1}{2}\left(\Box h_{\mu v} - \frac{1}{2}\eta_{\mu v}\Box h\right) = -\frac{1}{2}\Box\bar{h}_{\mu v}$$

откуда и находим

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu v}$$

Solution

13.16. Чтобы $\tilde{h}_{\mu v}$ удовлетворяло как условию лоренцевской калибровки (см. задачу 13.14), так и линеаризованным уравнениям поля, мы должны иметь

$$\begin{aligned}0 &= \bar{h}_{\mu v}, v = \mathrm{Re}\left[ik^v A_{\mu v}e^{ik_\alpha x^\alpha}\right], \\ 0 &= \bar{h}_{\mu v,\sigma^\circ} = \mathrm{Re}\left[-k_\sigma k^\sigma A_{\mu v}e^{ik}\alpha^{x^\alpha}\right].\end{aligned}$$

Следовательно, 4-вектор k должен быть изотропным и ортогональным A.

В задаче 13.14 приведен закон калибровочного преобразования от $\bar{h}'_{\mu\nu}$ к $\bar{h}''_{\mu v}$

$$\bar{h}''_{\mu v} = \bar{h}'_{\mu v} - 2\xi_{(\mu,v)} + \eta_{\mu v}\xi^\sigma, \sigma$$

Ясно, что калибровочное преобразование должно быть таким, чтобы ξ имело вид плоской волны $e^{ik\alpha^{x^\alpha}}$. Положим
тогда получим

$$\xi_\mu = -iC_\mu e^{ik^{x^\alpha}}$$

$$A''_{\mu v} = A'_{\mu v} - (C_\mu k_v + C_v k_\mu) + \eta_{\mu v} C^\alpha k_\alpha.$$

Если свернуть это уравнение с k^μ, то найдем

$$A''_{\mu\nu} k^\mu = -k^v C_\mu k^\mu + k^v C^\alpha k_\alpha = 0$$

так что A остается ортогональным k. Теперь мы можем применить к нашему уравнению условие поперечно-бесследовой калибровки $(A'')^\mu_\mu = 0$ и $A''_{\mu_0} = 0$ и в результате получить

$$0 = (A')_\mu{}^\mu + 2\mathbf{C}\cdot\mathbf{k},$$
$$0 = A'_{\mu_0} - (C_0 k_\mu + C_\mu k_0) + \eta_{\mu 0}\mathbf{C}\cdot\mathbf{k}.$$

Из этих двух уравнений можно найти одно:

$$0 = A'_{\mu_0} - (C_0 k_\mu + C_\mu k_0) - \frac{1}{2}\eta_{\mu 0} A'^\mu_\mu$$

Полагая $\mu = 0$, будем иметь

$$C_0 = (2k_0)^{-1}\left(A'_{00} + \frac{1}{2}(A')^\mu_\mu\right)$$

пространственные компоненты после этого легко получить из соотношения

$$0 = A'_{\ell_0} - (C_0 k_i + C_i k_0)$$

Реиение 13.17. Для светового луча, движущегося в направлении оси x, ненулевые компоненты тензора энергии-импульса суть $T_{00} = T_{xx} = -T_{0x}$. Из вида линеаризованных уравнений поля

$$\Box\bar{h}_{\alpha\beta} \equiv \bar{h}_{\alpha\beta,^p,} = -16\pi T_{\alpha\beta}$$

и из того факта, что все компоненты $h_{\alpha\beta}$ представляют собой интегралы типа запаздывающих потенциалов, где под знаком интеграла стоит функция источника, следует, что между решениями должно существовать такое же соотношение, как и между источНККаМК:

$$\bar{h}_{00} = \bar{h}_{xx} = -\bar{h}_{0x}$$

пр ичем все остальные компоненты равны нулю. Поскольку след $\bar{h}_{\alpha\beta}$ равен нулю, то $\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta,}$ и приведенное выне соотношение справедливо также для компонент h «без черты».
Для фотона, движущегося в направлении оси x вдоль траектории с аффинным параметром λ,

$$\frac{d^2y}{d\lambda^2} = -\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda}\Gamma^{y'}_{\alpha\beta} = -\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2(\Gamma^{y_0}_{00} + \Gamma^y{}_{xx} + 2\Gamma^y_{0x}).$$

Легко видеть, однако, что правая часть уравнения равна нулю

$$2\Gamma^{y_0}_{0x} + \Gamma^{y_{00}}_{00} + \Gamma^y{}_{xx} = -\frac{1}{2}(h_{00,y} + h_{xx,y} - 2h_{0x,y}) = 0$$

так что $d^2y/d\lambda^2 = 0$ и аналогично $d^2z/d\lambda^2 = 0$. Иначе говоря, фотон будет продолжать свое движение параллельно световому лучу, и, следовательно, два уаких световых луча, двигавшихся первоначально параллельно, не будут притягиваться друг к другу в первом порядке по массе-энергии каждого из них. (В действительности, как можно показать, прнтяжение будет отсутствовать даже в более высоких порядках.)

Решение 13.18.

Из линеаризованной теории известно, что в лоренцевской калибровке

$$\Box\bar{h}_{\alpha\beta} = -16\pi T_{\alpha\beta}$$

Поскольку распределение источников - а, следовательно, и поле стационарны, это уравнение сводится к уравнению Пуассона

$$\nabla^2\bar{h}_{\alpha\beta} = -16\pi T_{\alpha\beta}$$

Чтобы вычислить $\bar{h}_{0y}$, нам необходимо знать T_{0y}. Для массивной сферической конфигурации, имеющей плотность массы ρ и вращающейся (в положительном направлении вокруг оси z) с угловой сКоростью Ω, имеем

$$T_{0y} = r\Omega\rho \sin\vartheta \cos\varphi$$

Заметим, что поскольку компонента T_{0y} пропорциональна действительной части сферической гармоники вида $Y_{11}(\vartheta, \varphi)$, то же самое будет относитьс и к $\bar{h}_{0y}$. Следовательно, можно записать

$$\bar{h}_{0y} = f(r) \sin\vartheta \cos\varphi, \text{ и уравнение Пуассона примет вид}$$
$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2 \frac{d}{dr} f(r)\right] - \frac{2f(r)}{r^2} = 16\pi r\Omega\rho.$$

Если распределение источников представляет собой сферическую оболочку массы M и радиуса R, то

$$\rho = M\delta(r - R)/4\pi R^2$$

и это уравнение легко интегрируется; в результате получаем функцию

$$f(r) = -\frac{4M\Omega}{3} \times \begin{cases} \frac{r}{R} \text{ для } r < R, \\ \left(\frac{R}{r}\right)^2 \text{ для } r > R. \end{cases}$$

Следовательно, внутри оболочки

$$g_{0y} \approx h_{0y} = \bar{h}_{0y} = -\frac{4\Omega}{3} M \frac{r}{R} \sin\vartheta \cos\varphi.$$

Из соображений симметрии следует

$$g_{\hat{0}\hat{\varphi}} = g_{0y}|_{\varphi=0} = -\frac{4}{3}\Omega M \left(\frac{r}{R}\right) \sin\vartheta$$

и

$$\omega = -\frac{g_{0\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} = -\frac{g^{\hat{\lambda}}_{\hat{0}\hat{\varphi}}}{(g_{\varphi\varphi})^{\frac{1}{2}}} = \frac{g_{0\hat{\varphi}}}{r\sin\vartheta} = \frac{4\Omega M}{3R}.$$

Локально инерциальные системы отсчета внутри оболочки будут вращаться относительно удаленных инерциальных систем со скоростью ω. Принцип Маха утверждает, что инерциальные свойства пространства-времени зависят от движения удаленного вещества; увлечение инерциальных систем отсчета, несомненно, является именно таким примером влияния вещества на инерциальные свойства пространства-времени. Постоянство ω подсказывает нам, что влияние удаленного вещества на инерциальные свойства должно было бы, по-видимому, описываться законом $1/r$, что означало бы в свою очередь, что инерциальные свойства определяются в основном не близлежащим веществом, - правильнее было бы учитывать влияние всей материи, содержащейся во Вселенной. (Заметим, что, если не считать нескольких идеализированных примеров, подобных только что рассмотренному, никому пока еще не удалось достичь более или менее заметных успехов в «выводе» принципа Маха из уравнений полуобщей теории относительности.)

Solution

13.19. Уравнения движения $T^{\mu v}{}_{;v} = 0$ явно калибровочно инвариантны; в лоренцевской калибровке, однако (см. за. дачу 13.15), справедливо соотношение

$$T^{\mu v}_{;v} = -(16\pi)^{-1} \Box \bar{h}^{\mu v}{}_{,v} = 0$$

а не $T_{\mu v}; v = 0. T^{\mu v}$; и $T^{\mu v}{}_{,v}$ отличаются на величину порядка $T\Gamma$. Поскольку же как T, так и Γ порядка $h_{\alpha\beta}$, то несовпадающие члены будут второго порядка по отклонению метрики от плоской.

Solution

13.20. Согласно принципу эквивалентности, ускорение тела не зависит от величины его массы, а зависит лишь or других масс, с которыми оно взаимодействует через гравитационное поле. Отсюда следует, что тело с положительной массой притягивает и положительные, и отрицательные массы, а тело с отрицательной массой отталкивает как те, так и другие.

Таким образом, в нашем случае ускорение отрицательной массы направлено к положительной массе и равно GM/ℓ^2. (Поскольку $\ell \geqslant M$, мы работаем в ньютоновском пределе.) Ускорение положительной массы совпадает с ускорением отрицательной массы как по величине, так и по направлению: обе массы как бы стараются угнаться друг за другом.

Как только мы начинаем рассматривать частицы в движении, проблема усложняется, ибо каждая частица испытывает запаздывающее воздействие поля другой частицы.

Так как по условию задачи $M \ll \ell$, мы будем искать решение с помощью линеаризованной теории, применение которой будет оправданно до тех пор, пока расстояние между частицами, измеренное в сопутствующей системе, связанной с любой из них, будет намного больше M. Уравнение

$$\Box \bar{h}_{\mu v} = -16\pi T_{\mu v}$$

обладает решением в виде запаздывающего“ интеграла:

$$\bar{h}_{\mu v}(t, \vec{x}) = 4 \int \frac{T_{\mu v}\left(t', \vec{x}'\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta\left(t' + |\vec{x} - \vec{x}'| - t\right) d^3 x' dt'$$

В линеаризованной теории справедлив принцип суперпозиции для $T_{\mu v}$ (1. е. и для $h_{\mu v}$) каждой частицы. Для частицы массы m, движущейся вдоль мировой линии имеем

$$x^{\mu} = z^{\mu}(\tau)$$

$$T_{\mu v}(t, \vec{x}) = m \int u_{\mu} u_{v} \delta^4(\mathrm{x} - \mathrm{z}(\tau)) d\tau = m u_{\mu} u_{v} \delta^3(\vec{x} - \vec{z}(t)) / u^0$$

где при интегрировании мы использовали замену $d\tau = dt/u^0$. Подставляя формулу (4) в (2), получаем

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu v}(t, \vec{x}) &= 4m \int \frac{u_{\mu} u_{v} \delta^3\left[\vec{x}' - \vec{z}\left(t'\right)\right] \delta\left(t' + |\vec{x} - \vec{x}'| - t\right) d^3 x' dt'}{u^0\left(t'\right) |\vec{x} - \vec{x}'|} = \\ &= 4m \int \frac{u_{\mu}\left(t'\right) u_{v}\left(t'\right) \delta\left(t' + |\vec{x} - \vec{z}\left(t'\right)| - t\right) dt'}{u^0\left(t'\right) |\vec{x} - \vec{z}\left(t'\right)|}. \end{aligned}$$

Из соображений симметрии ясно, что в это выражение входит зависимость только от одной пространственной координаты -скажем, для определенности, x. Пусть

$$R\left(t'\right) = |x - z\left(t'\right)| = \varepsilon\left[x - z\left(t'\right)\right],$$

где $\varepsilon = \pm 1$ для $x \gtrless z$. Тогда

$$\bar{h}_{\mu v}(t, x) = 4m \int \frac{u_{\mu} u_{v} \delta\left(t' + R - t\right) dt'}{u^0 R}.$$

4-скорость $\mathbf{u}$ находим из уравнения движения

$$du^{\mu}/d\tau = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta}$$

или в нашем случае

$$du^{\mu}/d\tau + \eta^{\mu r} u^{\alpha} u^{\beta}\left(h_{r\alpha,\beta} + h_{r\beta,\alpha} - h_{\alpha\beta,r}\right)/2 = 0$$

Легко видеть, что величина $h_{\alpha\beta}$ для 2-й частицы, измеренная в точке нахождения 1-й частицы, используется для определения u_{μ} для 1-й частицы, и наоборот. Далее, из соображений симметрии следует

$$u^y = u^z = 0$$

для обеих частиц. Выпишем уравнение (8) для $\mu = 0$ и $\mu = x$, используя соотношение $h_{00} = h_{xx}$ [непосредственно вытекающее из уравнения (7)]:

$$\begin{aligned} du^0/d\tau &= \frac{1}{2} h_{00,0}\left(u^{0^2} - u^{x^2}\right) + h_{00,x} u^0 u^x + h_{0x,x} u^{x^2}, \\ du^x/d\tau &= \frac{1}{2} h_{00,x}\left(u^{0^2} - u^{x^2}\right) + h_{0x,0} u^{02} - h_{00,0} u^0 u^x. \end{aligned}$$

Найдем теперь производные от $h_{\alpha\beta}$, вновь прибегнув к уравнению (7):

$$\bar{h}_{00,0} = 4m \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{u^0\left(t'\right) \delta\left(t' + R\left(t'\right) - t\right) dt'}{R\left(t'\right)} = -4m \int \frac{u^0 \delta'\left(t' + R - t\right) dt'}{R},$$

где δ' означает дифференцирование по аргументу δ-функции. Пусть

$$\begin{aligned} f\left(t'\right) &= t' + R\left(t'\right), \\ \frac{df}{dt'} &= 1 - \varepsilon v\left(t'\right), \quad v = \frac{dz}{dt'}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\bar{h}_{00,0} &= -4m\int \frac{u^0}{R}\left[\frac{d}{df}\delta(f-t)\right]\frac{dt'}{df}df = \\ &= 4m\int \frac{d}{df}\left[\frac{u^0}{R}\frac{dt'}{df}\right]\delta(f-t)df = \\ &= 4m\left[\frac{dt'}{df}\frac{d}{dt'}\left(\frac{u^0}{R}\frac{dt'}{df}\right)\right]_{f=t} = \\ &= 4m\left[\frac{1}{1-\varepsilon 0}\frac{d}{dt'}\frac{u^0}{(1-\varepsilon v)R}\right]_{t'} = t - R\left(t'\right).\end{aligned}$$

Поскольку $du^0/dt' \approx m$, то в пределах точности до первого порядка по m нам нет необходимости дифференцировать u^0 и v в уравнении (12). Таким образом,

$$\bar{h}_{00,0} = 4m\left[\frac{\varepsilon v u^0}{(1-\varepsilon v)^2 R^2}\right]_{\text{запазд}},$$

где индекс «запазд» означает значение, взятое в «запаздывающий» момент времени $t' = t - R\left(t'\right)$. С другой стороны, можно написать для $v\left(t'\right)$ разложение

$$\begin{aligned}v\left(t'\right) &= v(t) + \left(dv/dt\right)\left(t'-t\right) + \ldots = \\ &= v(t) + \mathscr{O}(m)\end{aligned}$$

и аналогичное разложение для $u^0 = \left(1-v^2\right)^{-1/2}$. Далее,

$$\begin{aligned}R\left(t'\right) &= \varepsilon\left[x - z\left(t'\right)\right] = \\ &= \varepsilon\left[x - z(t) - v(t)\left(t'-t\right)\right] + \mathscr{O}(m) = \\ &= \varepsilon\left[x - z(t) + v(t)R\left(t'\right)\right],\end{aligned}$$

откуда имеем

$$R\left(t'\right)\left(1-\varepsilon v\right) = \varepsilon[x - z(t)]$$

Поскольку $\bar{h}_{00,0}$ определяется в точке местоположения другой частицы, можно записать

$$\bar{h}_{00,0} = 4m\frac{\varepsilon v u^0}{\left(z_1 - z_2\right)^2},$$

где значения всех величин определяются в один и тот же момент времени t. Аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned}\bar{h}_{0x,0} &= \frac{-u^x}{u^0}\bar{h}_{00,0}, \\ \bar{h}_{xx,0} &= \left(\frac{u^x}{u^0}\right)^2\bar{h}_{00,0}.\end{aligned}$$

Производные по пространственным координатам можно найти, если заметить, что x входит только в R из уравнения (7). Отсюда

$$\vec{h}_{00,x} = 8\frac{\partial}{\partial R}4m\int\frac{u^0\delta\left(t'+R-t\right)dt'}{R} = 4m\varepsilon\left[-\int\frac{u^0\delta\left(t'+R-t\right)dt'}{R^2} + \int\frac{u^0\delta'\left(t'+R-t\right)dt'}{R}\right] =$$

$$\begin{aligned}&= 4m\varepsilon\left[-\int\frac{u^0}{R^2}\delta(f-t)\frac{dt'}{df}df + \int\frac{u^0}{R}\frac{dt'}{df}\frac{d}{df}\delta(f-t)df\right] = \\ &= -4m\varepsilon\left[\frac{u^0}{(1-\varepsilon v)R^2} + \frac{1}{(1-\varepsilon v)}\frac{d}{dt'}\left\{\frac{u^0}{(1-\varepsilon v)R}\right\}\right]_{\text{запазд}} = \\ &= -4m\varepsilon\left[\frac{u^0}{(1-\varepsilon v)R^2} + \frac{u^0\varepsilon v}{(1-\varepsilon v)^2R^2}\right]_{\text{запазд}} = \\ &= -\frac{4m\varepsilon u^0}{\left(z_1-z_2\right)^2}.\end{aligned}$$

Аналогично

$$\bar{h}_{0,x} = -\frac{u^x}{u^0}\bar{h}_{00,x},$$
$$\bar{h}_{xx,x} = \left(\frac{u^x}{u^0}\right)^2 \bar{h}_{00,x}.$$

Отметим, что уравнения (14)-(19) удовлетворяют условию калибровочной инвариантности $h_\mu{}^\alpha{}_{,\alpha} = 0$. Выпишем теперь уравнения движения (10) и (11) для 1-й частицы, полагая $u^0 = \gamma, u^x = \gamma v$ и $g = m/\left(z_1 - z_2\right)^2$. Примем за 1-ю частиу положительной массы с координатой $z_1 > z_2$, так что $\varepsilon = +1$, а масса, играющая роль источника в уравнениях (14) -(19), является отрицательной. Будем иметь

$$d\gamma_1/d\tau = -g\gamma_2 v_2\left(1+v_2^2\right) + 2g\gamma_2\left(1+v_2^2\right)\gamma_1^2 v_1 - 4g\gamma_2 v_2\gamma_1^2 v_1^2,$$
$$d\left(\gamma_1 v_1\right)/d\tau = g\gamma_2\left(1+v_2^2\right) - 4g\gamma_2 v_2^2\gamma_1^2 + 2g\gamma_2 v_2\left(1+v_2^2\right)\gamma_1^2 v_1.$$

В такой записи уравнения для $d\gamma_2/d\tau_2$ и $d\left(\gamma_2 v_2\right)/d\tau_2$ обладают точно такими же правыми частями, что и уравнения (20) и (21), отличаясь лишь заменой v_2 на v_1 и наоборот (знак произведения εm не меняется). Так как $v_1 = v_2$ при $t = 0$, то $v_1 = v_2$ для всех t. Следовательно, разность $z_1 - z_2$ постоянна для всех t, т. е. $z_1 - z_2 = \ell$. Наконец, мы можем опустить индексы 1 и 2 в уравнениях (20) и (21) и после некоторых упрощений получить

$$d\gamma/d\tau = gv/\gamma,$$
$$d(\gamma v)/d\tau = g/\gamma.$$

Эти уравнения не являются независимыми, поскольку $\gamma = (1 - -v^2)^{-1/2}$. Отсюда находим, что дифференциальное уравнение движения имеет вид
откуда

$$dv/d\tau = g\left(1-v^2\right)^2$$

$$2g\tau = v/\left(1-v^2\right) + \operatorname{Arth} v$$

где $\tau = 0$ при $v = 0$. Далее, поскольку
Находим

$$\frac{dz}{dv} = \frac{dz}{dt}\frac{dt}{d\tau}\frac{d\tau}{dv} = \frac{v}{g}\left(1-v^2\right)^{-\frac{5}{2}}$$

$$z_2 = \frac{1}{3g}\left[\left(1-v^2\right) - 3/2 - 1\right],$$
$$z_1 = z_2 + \ell$$

н аналогично из

$$\frac{dt}{dv} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d\tau}{dv} = \frac{1}{g}\left(1-v^2\right) - 5/2$$

получаеМ

$$t = \frac{v}{g}\left[\left(1-v^2\right)^{-1/2} + \frac{v^2}{3}\left(1-v^2\right)^{-3/2}\right].$$

У равнения (26) и (28) представляют собой параметрические уравнения траекторий, где роль параметра играет v. Заметим, что, в то время как разность координат частиц остается постоянной, расстояние между ними («собственное расстояние»), измеренное наблюдателем, движущимся вместе с одной из частиц, увеличивается приблизительно как $\gamma\ell$. Действительно, предположим, что 1-я частица в некоторый момент времени t_1 находится в точке с координатой $z_1\left(t_1\right)$ и обладает скоростью v. Преобразование Лоренца к локально сопутствующей инерциальной системе отсчета дает

$$x' = \gamma\left[x - z_1\left(t_1\right) - v\left(t - t_1\right)\right],$$
$$t' = \gamma\left[t - t_1 - v\left\{x - z_1\left(t_1\right)\right\}\right].$$

Тогда в этих координатах траектория 2 -й частицы есть $z_2'\left(t_2'\right)$ где

$$z_2' = \gamma\left[z_2\left(t_2\right) - z_1\left(t_1\right) - v\left(t_2 - t_1\right)\right],$$
$$t_2' = \gamma\left[t_2 - t_1 - v\left\{z_2\left(t_2\right) - z_1\left(t_1\right)\right\}\right].$$

Расстояние до 2-й частицы равно $-z_2'\left(t_2' = 0\right)$. Введем величину
Из $t_2' = 0$ следует

$$\beta = z_2\left(t_2\right) - z_1\left(t_1\right).$$

откуда

$$t_2 = t_1 + v\beta$$

$$\begin{aligned}\beta &= z_2\left(t_1 + v\beta\right) - z_1\left(t_1\right) \approx \\ &\approx z_2\left(t_1\right) + v\beta dz_2/\left.dt\right|_{t=t_1} + \left.\frac{v^2\beta^2}{z}\frac{d^2z_2}{dt^2}\right|_{t=t_1} - z_1\left(t_1\right) = \\ &= -\ell + v^2\beta + \mathcal{O}(m/L).\end{aligned}$$

Решая относительно β, получаем
Следовательно,

$$\beta = \frac{-\ell}{(1-v^2)}.$$

$$-z_2'\left(t_2' = 0\right) = -\gamma\left(\beta - v^2\beta\right) \approx \gamma l.$$

13.3.2 Problems about Schwarzschild Geometry

Leuven-2023.HW1.1/2 Analysis of AdS_3 (?)

The following is the metric for AdS_3:

$$ds^2_{AdS_3} = \frac{1}{4}\left(-\cosh^2 r dt^2 + dr^2 + (dz + \sinh r dt)^2\right).$$

1.) Calculate the Christoffel symbol, $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$, for this metric.
2.) Calculate the Riemann tensor, Ricci tensor, and Ricci scalar. [1]
3.) Show that the following two identities are obeyed:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = c_1\left(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma}\right), \quad R_{\mu\nu} = c_2 g_{\mu\nu},$$

and find the real constants c_1 and c_2. Comment on your results.
4.) Now consider the metric of the three-sphere S^3:

$$ds^2_{S^3} = \frac{1}{4}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 + (d\psi + \cos\theta d\phi)^2\right),$$

where $\theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi)$, and $\psi \in [0, 4\pi)$ are the coordinate ranges. Compute the volume of this sphere:

$$V = \int \sqrt{g} d^3x$$

where g is the determinant of the S^3 metric.

Solution

1.) (3 points) In matrix form, with entries indexed by (t, r, z), the metric is

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 0 & \sinh(r) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(r) & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverting this matrix yields

$$g^{\mu\nu} = 4\begin{pmatrix} -\operatorname{sech}^2(r) & 0 & \tanh(r)\operatorname{sech}(r) \\ 0 & 1 & 0 \\ \tanh(r)\operatorname{sech}(r) & 0 & \operatorname{sech}^2(r) \end{pmatrix}$$

Since the metric components depend only on r, all non-zero Christoffel symbols must have at least one index equal to r. Moreover, since g_{rr} is constant and $g^{r\mu}$ and $g_{r\mu}$ are both non-zero only when $\mu = r$, any symbol with two or three instances of r will automatically be zero. So only Christoffel symbols with exactly

one r index can be non-zero. We can also argue that Γ^r_{zz} and Γ^r_{tt} vanish automatically, since g_{zz} and g_{tt} are constant and thus independent of r. We are left with the following six independent components to calculate:

$$\Gamma^r_{tz}, \Gamma^t_{rt}, \Gamma^t_{rz}, \Gamma^z_{rt}, \Gamma^z_{rz}$$

The formula for the Christoffel symbols is

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu} \right).$$

We plug in and are left with these non-zero symbols - making sure that we take into account correctly the effects of having a non-diagonal metric:

$$\begin{aligned}
\Gamma^r_{tz} &= \Gamma^r_{zt} = -\frac{\cosh(r)}{2} \\
\Gamma^t_{tr} &= \Gamma^t_{rt} = \frac{\tanh(r)}{2} \\
\Gamma^z_{tr} &= \Gamma^z_{rt} = \frac{\operatorname{sech}(r)}{2} \\
\Gamma^t_{rz} &= \Gamma^t_{zr} = -\frac{\operatorname{sech}(r)}{2} \\
\Gamma^z_{rz} &= \Gamma^z_{zr} = \frac{\tanh(r)}{2}
\end{aligned}$$

2.) (5 points) The Riemann tensor $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ has the following (anti-)symmetry properties:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho} = R_{\rho\sigma\mu\nu}.$$

The antisymmetry in the first and second pairs of indices mean that the Riemann tensor vanishes whenever an index appears more than twice. Then, accounting for the exchange symmetry of the first and second pairs, we conclude that the following six components are independent and not automatically zero:

$$R_{trtr}, R_{tztz}, R_{rzrz}, R_{trtz}, R_{rtrz}, R_{ztzr}.$$

To compute these, we need to first calculate the relevant components of the $(1,3)$ version of the Riemann tensor

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho} + \Gamma^\mu_{\rho\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\rho},$$

and then lower indices appropriately. We compute that This gives us enough information to calculate the six independent components of the Riemann tensor:

$$\begin{aligned}
R_{rzrz} &= g_{r\mu} R^\mu{}_{zrz} = -\frac{1}{16} \\
R_{trtr} &= g_{t\mu} R^\mu{}_{rtr} = \frac{1}{16} \\
R_{trtz} &= g_{t\mu} R^\mu{}_{rtz} = 0 \\
R_{ztzr} &= g_{z\mu} R^\mu{}_{rzr} = 0 \\
R_{rtrz} &= g_{r\mu} R^\mu{}_{trz} = -\frac{\sinh(r)}{16} \\
R_{tztz} &= g_{t\mu} R^\mu{}_{ztz} = \frac{\cosh^2(r)}{16}
\end{aligned}$$

Notes: Note here that we need more than six components of $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$ to calculate the six independent components of $R_{\mu\nu\rho\sigma}$. (Note that some perhaps 'counterintuitive' components like R^t_{tzt} are not vanishing here, since the metric is off-diagonal.) It's very dangerous to only give components of $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$ - how do you argue or know that you have all of them? Much better is to start with the six components of $R_{\mu\nu\rho\sigma}$, and figure out which $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$ components this implies you need to calculate. Now, we want to compute the Ricci tensor $R_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\rho\mu\sigma\nu}$. The Ricci tensor is symmetric, there are six components that we need to compute:

$$R_{tt}, R_{rr}, R_{zz}, R_{tr}\,(= R_{rt}), R_{rz}\,(= R_{zr}), R_{tz}\,(= R_{zt}).$$

Using our independent Riemann tensor components, we compute these to be as follows:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sinh(r) \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sinh(r) & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Finally, we need to compute the Ricci scalar $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$. Note that since $g^{\mu\nu}$ has offdiagonal elements, the Ricci scalar will also involve the off-diagonal elements of $R_{\mu\nu}$. We find that

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{tt}R_{tt} + g^{rr}R_{rr} + g^{zz}R_{zz} + 2g^{tz}R_{tz} = -6$$

3.) (2 points) Now, let us define

$$G_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}.$$

Notice that this tensor satisfies the following (anti-)symmetry properties:

$$G_{\mu\nu\rho\sigma} = -G_{\nu\mu\rho\sigma} = -G_{\mu\nu\sigma\rho} = G_{\rho\sigma\mu\nu}.$$

These are precisely the same properties that the Riemann tensor obeys, and so both $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ and $G_{\mu\nu\rho\sigma}$ can in principle be proportional. Since they obey the same symmetries, it suffices to compare only their few independent components to see if the tensors are proportional. Explicitly, we compute that

$$\begin{aligned}
G_{trtr} &= g_{rr}g_{tt} = -\frac{1}{16}, \\
G_{tztz} &= -\frac{\cosh^2(r)}{16}, \\
G_{rzrz} &= \frac{1}{16}, \\
G_{rtrz} &= \frac{\sinh(r)}{16}.
\end{aligned}$$

Upon comparison with the four independent components of the Riemann tensor, we can see that all independent components of $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ and $G_{\mu\nu\rho\sigma}$ are exactly equal up to a sign. Therefore, we conclude that

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -\left(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}\right),$$

and so $c_1 = -1$.

Notes: It's very important to talk about the symmetries of $G_{\mu\nu\rho\sigma}$ to argue that you only need to check the six independent components of the Riemann against it, AND that you also check all six of these independent components! To show that $R_{\mu\nu} = c_2 g_{\mu\nu}$ for some constant c_2, we could in principle demonstrate that the symmetries match and then compare the independent components. An easier method is to simpy use our result (1.25) and contract with the metric tensor:

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} &= g^{\rho\sigma}R_{\rho\mu\sigma\nu} \\
&= -g^{\rho\sigma}\left(g_{\rho\sigma}g_{\mu\nu} - g_{\rho\nu}g_{\mu\sigma}\right) \\
&= -\delta^{\sigma}_{\sigma}g_{\mu\nu} - \delta^{\sigma}_{\nu}g_{\mu\sigma} \\
&= -3g_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \\
&= -2g_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Thus, $R_{\mu\nu} = c_2 g_{\mu\nu}$ with $c_2 = -2$. Note that we are considering a three-dimensional manifold, and thus $\delta^{\mu}_{\mu} = 3$, the number of spacetime dimensions. 4.) (2 point) First, we must compute the determinant g of the metric:

$$\begin{aligned}
g &= \det\left[\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta + \lambda^2\cos^2\theta & \lambda^2\cos\theta \\ 0 & \lambda^2\cos\theta & \lambda^2 \end{pmatrix}\right] = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta + \lambda^2\cos^2\theta & \lambda^2\cos\theta \\ 0 & \lambda^2\cos\theta & \lambda^2 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times 1 \times \det\begin{pmatrix} \sin^2\theta + \lambda^2\cos^2\theta & \lambda^2\cos\theta \\ \lambda^2\cos\theta & \lambda^2 \end{pmatrix} = \frac{\lambda^2}{64}\sin^2\theta.
\end{aligned}$$

Thus, the square root of the determinant is

$$\sqrt{g} = \frac{\lambda}{8}\sin\theta.$$

The volume is then the integral:

$$V = \int d^3x\sqrt{g} = \frac{\lambda}{8}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{4\pi} d\psi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta = 2\lambda\pi^2.$$

This is linearly increasing in λ, and for $\lambda = 1$ we recover the round three-sphere $\left(S^3\right)$ result of $V_{S^3} = 2\pi^2$.

L-15.1

Решение 15.1.

Когда частица движется в экваториальной плоскости, квадрат момента количества движения $L^2 = p_\varphi^2$. Очевидно, что это сохраняющаяся величина, так как сохраняется p_φ. (Действительно, $\xi = \partial/\partial\varphi$ есть вектор Киллинга, и из задачи 10.10 следует, что $\xi \cdot p$ сохраняется.) Однако в силу сферической симметрии движение всегда происходит в экваториальной плоскости некоторой координатной системы, получающейся из исходной путем поворота. Тогда, если бы мы смогли записать p_φ^9 как величину, инвариантную по отношению к поворотам, а затем определить этот инвариант в исходной системе, наша цель была бы достигнута.

В некоторый момент времени, когда радиальная координата частицы равна r, компоненты ковариантной 4-скорости $\tilde{\mathbf{p}}$ суть $(p_t, p_r, p_\vartheta, p_\varphi)$. Рассмотрим теперь «приведенную» 4-скорость $\tilde{p}_\alpha^{\text{прив}} = (0, 0, rp_\vartheta, rp_\varphi)$, которая получается из $\tilde{p}_\alpha$ путем преобразования, не зависящего от ϑ и φ (например, путем проектирования). Тогда, если движение будет происходить в экваториальной плоскости, мы будем иметь $p_\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi/2$, откуда $L^2 = g^{\alpha\beta}\tilde{p}_\alpha^{\text{прив}}\,\tilde{p}_\beta^{\text{прив}} = g^{\varphi\varphi}r^2p_\varphi^2 = p_\varphi^{\pm}$−интеграл движения.

Но в общем случае

$$L^2 = g^{\theta\vartheta}r^2p_\vartheta^2 + g^{\varphi\varphi\varphi}r^2p_\varphi^2 = p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\vartheta}.$$

Следовательно, эта величина должна сохраняться и в общем случае, что и требовалось доказать.

Solution 15.2.

а) Воспользовавшись сферической симметрией метрики, ориентируем координатные оси таким образом, чтобы частица при $\tau = 0$ имела $\vartheta = \pi/2$ и $\dot{\vartheta} = 0$. Тогда единственным решением уравнения геодезической

$$\frac{d}{d\tau}\left(r^2\dot{\vartheta}\right) = r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\varphi}^2$$

является $\vartheta = \pi/2$ для всех τ, б) Вопольвовавшись интегралом движения L^2 из задачи 15.1, получим

$$\left(\frac{d\vartheta}{d\lambda}\right)^2 = \left(g^{\vartheta\vartheta}p_\vartheta\right)^2 = \frac{1}{r^4}\left(L^2 - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\vartheta}\right)$$

Предположим, что невозмущенная орбита обладает параметрами $\vartheta = \pi/2, L = p_\varphi = K$. Пусть частица испытывает возмущение, выводящее ее из плоскости орбиты, т. е. $\vartheta = \pi/2 + \delta\vartheta, L = K + \delta L$, $p_\varphi = K + \delta p_\varphi$. С точностью до первого порядка по δL и δp_φ и до второго порядка по $\delta\theta$ уравнение (1) дает

откуда

$$\left[\frac{d(\delta\vartheta)}{d\lambda}\right]^2 = \frac{1}{r^4}\left[2K\delta L - 2K\delta p_\varphi - K^2(\delta\vartheta)^2\right]$$

$$\frac{d^2(\delta\vartheta)}{d\lambda^2} = -\frac{K^2}{r^4}\delta\vartheta$$

Из этого уравнения видно, что возмущение $\delta\vartheta$ осциллирует вблизи $\vartheta = \pi/2$ и не растет со временем, т. е. орбиты являются устойчиво плоскими.

Решение 15.3. В случае радиального падения у нас есть два интеграла движения:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 1 \quad \text{и} \quad \mathbf{u}\cdot\partial/\partial t = u_0 = -(1-2M/r)u^0.$$

Отсюда получаем

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = -1 = -(1-2M/r)\left(u^0\right)^2 + (1-2M/r)^{-1}\left(u^r\right)^2 =$$

$$= \left[-(1-2M/r) + (1-2M/r)^{-1}(dr/dt)^2\right]\left(u^0\right)^2 =$$

$$= \left[-(1-2M/r) + (1-2M/r)^{-1}(dr/dt)^2\right](u_0)^2\,(1-2M/r)^2.$$

Решая относительно $(dr/dt)^2$, находим

$$(dr/dt)^2 = (1-2M/r)^2\left[1 - (1-2M/r)\,(u_0)^{-2}\right].$$

Неподвижный наблюдатель измеряет временные интервалы

$$d\hat{t} = (1-2M/r)^{1/2}dt$$

и радиальные расстояния

$$d\hat{r} = (1 - 2M/r)^{-1/2} dr$$

так что измеряемая им скорость есть

$$\frac{d\hat{r}}{d\hat{t}} = (1 - 1M/r)^{-1} \frac{dr}{dt}$$

Заметим, что эта локально измеряемая скорость независимо от значения u_0 приближается к скорости света по мере того, как r приближается к $2M$. Реиение 15.4. Первые интегралы уравнения движения по геодезической (см. задачу 15.3) суть

откуда полуучае

$$u_0 = -\tilde{E} = \text{ const},$$
$$g^{00} u_0^2 + g_{rr} (u^r)^2 = -1,$$
$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} = \frac{\tilde{E}}{1 - 2M/r},$$
$$u^r = \frac{dr}{d\tau} = -\left(\tilde{E}^2 - 1 + 2M/r\right)^{1/2}.$$

Знак минус перед квадратным корнем в уравнении (2) соответствует частице, падающей на центр.
Случай 1. Для этого случая из условия $dr/d\tau = 0$ при $r = R$ следует

$$2M/R = 1 - \tilde{E}^2$$

т. е. $\tilde{E} < 1$. Тогда уравнение (2) можно записать следующим образом:

$$d\tau = \frac{dr}{\left(\frac{2M}{r} - \frac{2M}{R}\right)^{1/2}}.$$

Это уравнение можно проинтегрировать в конечном виде. Получим

$$\tau = \left(\frac{R^3}{8M}\right)^{1/2} \left[2\left(\frac{r}{R} - \frac{r^2}{R^2}\right)^{1/2} + \arccos\left(\frac{2r}{R} - 1\right)\right],$$

где постоянная интегрирования выбрана таким образом, чтобь $\tau = 0$ при $r = R$. Удобно переписать уравнение (4) в параметрическом виде, вводя «параметр циклоиды»

Будем иметь

$$\eta = \arccos\left(\frac{2r}{R} - 1\right)$$
$$r = \frac{1}{2} R(1 + \cos\eta) \quad (\eta = 0 \text{ при } r = R),$$
$$\tau = \left(\frac{R^3}{8M}\right)^{1/2} (\eta + \sin\eta).$$

Из уравнения (1) следует

$$t = \int \frac{\tilde{E} d\tau}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} = \tilde{E} \int \frac{d\tau}{d\eta} \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} d\eta =$$
$$= \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} \int \frac{\left(\frac{R^3}{8M}\right)^{1/2} (1 + \cos\eta) d\eta}{1 - 4M[R(1 + \cos\eta)]^{-1}}.$$

По таблице интегралов находим

$$\frac{t}{2M} = \ln\left|\frac{\left(\frac{R}{2M} - 1\right)^{1/2} + \operatorname{tg}\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\left(\frac{R}{2M} - 1\right)^{1/2} - \operatorname{tg}\left(\frac{\eta}{2}\right)}\right| + \left(\frac{R}{2M} - 1\right)^{1/2} \left[\eta + \frac{R}{4M}(\eta + \sin\eta)\right],$$

где постоянная интегрирования выбрана таким образом, чтобы $t = 0$ при $\eta = 0$, т. е. при $r = R$. Отметим, что $t \to \infty$, когда $\operatorname{tg}(\eta/2) \to (R/2M - 1)^{1/2}$, т. е. когда $r \to 2M$.

Случай 2. В этом случае $\tilde{E} = 1$ и уравнение (2) дает

$$\tau = -\frac{2}{3}\left(\frac{r^3}{2M}\right)^{1/2} + \text{ const}$$

и, поскольку
мы получаем

$$\frac{dt}{dr} = \frac{dt/d\tau}{dr/d\tau}$$

$$t = -\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{r^3}{2M}\right)^{1/3} - 4M\left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2} + 2M\ln\left|\frac{\left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2}+1}{\left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2}-1}\right| + \text{ const.}$$

чтобы
Случай 3 Аналогично случаю 1 выберем R таким образом,

$$\frac{2M}{R} = \tilde{E}^2 - 1 = \left(1 - v_\infty^2\right)^{-1} - 1 = \frac{v_\infty^8}{1 - v_\infty^2}.$$

Тогда перемена знака R в уравнении (4) дает

$$\tau = -\left(\frac{R^3}{8M}\right)^{1/2}\left[2\left(\frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2}\right)^{1/2} - \operatorname{Arch}\left(\frac{2r}{R}+1\right)\right].$$

Заметим, что $\tau = 0$ при $r = 0$ и $\tau = -\infty$ при $r = \infty$. Вводя переменную
получаем

$$\eta = \operatorname{Arch}\left(\frac{2r}{R}+1\right)$$

$$r = \frac{R}{2}(\operatorname{ch}\eta - 1) \quad (r = 0 \text{ при } \eta = 0),$$

$$\tau = -\left(\frac{R^3}{8M}\right)^{1/2}(\operatorname{sh}\eta - \eta).$$

Уравнение, соответствующее уравнению (7), имеет вид

$$\frac{t}{2M} = \ln\left|\frac{\left(\frac{R}{2M}+1\right)^{1/2} + \operatorname{cth}\frac{\eta}{2}}{\left(\frac{R}{2M}+1\right)^{1/2} - \operatorname{cth}\frac{\eta}{2}}\right| - \left(\frac{R}{2M}+1\right)^{1/2}\left[\eta + \frac{R}{4M}(\operatorname{sh}\eta - \eta)\right].$$

Заметим, что, когда r изменяется от ∞ до $2M, t$ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$.

Solution

15.5. Выберем экваториальную плоскость так, чтобы $\vartheta = \pi/2$. Тогда $u^\vartheta = 0$. Одним из первых интегралов движения является нормировка 4 -скорости, откуда следует

$$g^{00}u_0^2 + g^{\varphi\varphi}u_\varphi^2 + g_{rr}u^{r2} = -1.$$

Еще два первых интеграла дают нам векторы Киллинга $\partial/\partial t$ и $\partial/\partial\varphi$:

$$u_\Phi = \tilde{L} = \text{ const },$$
$$u_0 = -\tilde{E} = \text{ const},$$

где $\tilde{L}$ и $\tilde{E}$ - соответственно момент количества движения на единицу массы покоя и энергия на единицу массы поооо. Тогда из уравнения (1) получаем

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{-1 - g^{00}\tilde{E}^2 - g^{\varphi\varphi}\tilde{L}^2}{g_{rr}}$$

или, подставляя в явном виде метрические коэффициенты,

$$dr/d\tau = \pm\left\{\left[-1 + \tilde{E}^2\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} - \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right]\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\right\}^{1/2}$$

Из $u^\varphi = g^{\varphi\varphi}\tilde{L}$ следует

$$d\varphi/d\tau = \tilde{L}/r^2$$

Подставляя это соотношение в уравнение (3), окончательно получаем

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{r^2}{\tilde{L}}\left\{\left[-1 + \tilde{E}^2(1 - 2M/r)^{-1} - \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right](1 - 2M/r)\right\}^{1/2}$$

Solution

15.6. Выберем $\vartheta = \pi/2$ и $p^{\vartheta} = 0$. Если λ - некоторый аффинный параметр, такой, для которого
То

$$p^r = dr/d\lambda \quad \text{и} \quad p^{\varphi} = d\varphi/d\lambda = r^{-2}p_{\varphi}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{p^r}{p^{\varphi}}$$

Соот ношение $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = 0$ дает нам уравнение, связывающее p^r, p^{φ} и p^0; его можно решить относительно $dr/d\varphi$:

$$(dr/d\varphi)^2 = r^4(1-2M/r)\left[\gamma(1-2M/r)^{-1} - 1/r^2\right],$$

где $\gamma \equiv p_0^2/p_{\varphi}^2 = \text{const}$. Если теперь ввести переменную $u \equiv M/r$, уравнение (1) примет вид

$$(u')^2 = (1-2u)\left[\gamma M^2(1-2u)^{-1} - u^2\right] = \gamma M^2 - u^2 + 2u^3$$

здесь штрих означает обычное дифференцирование по φ. Продиф- ференцировав это уравнение, мы получим весьма простое уравнение 2-го порядка:

$$u'' + u = 3u^2$$

В предельном случае $M/b \ll 1$ за нулевое приближение к решению можно выбрать решение типа «прямой линии» $r\sin\varphi = b$ или

$$u_0 = (M/b)\sin\varphi.$$

Запишем теперь $u = u_0 + u_1 + ...$, где $u_1 \ll 1$, так что уравнение (3) можно приближенно записать так:

$$u_1'' + u_1 \approx 3u_0^2 = 3\left(\frac{M}{b}\right)^2 \sin^2\varphi = \frac{3}{2}\left(\frac{M}{b}\right)^2 (1-\cos 2\varphi)$$

Это уравнение можно решить методом подбора; решение имеет вид

$$u \approx \left(\frac{M}{b}\right)\sin\varphi + \frac{1}{2}\left(\frac{M}{b}\right)^2 (3+\cos 2\varphi).$$

Теперь мы можем найти полный угол отклонения, вычисляя значения двух углов, при которых $r = \infty (u = 0)$. Эти углы должны удовлетворять уравнению
откуда получаем

$$2\sin\varphi \approx -(M/b)(3+\cos 2\varphi)$$

$$\varphi \approx -2(M/b) \quad \text{и} \quad \varphi \approx \pi + 2(M/b).$$

Таким образом, полный угол отклонения составляет $4M/b$.
Решение 15.7.
а) Уравнение орбиты было получено в задаче 15.5. Если теперь ввести новую переменную $u \equiv M/r$ и два новых параметра ε и u_0, заменяющих $\tilde{E}$ и $\tilde{L}$, то уравнение орбиты можно будет переписать в виде

$$(du/d\varphi)^2 + (u-u_0)^2 - \varepsilon^2 u_0^2 = 6u_0(u-u_0)^2 + 2(u-u_0)^3.$$

[См. также [1], т. 2, уравнение (25.47) и [2], уравнение (8.4.29).] Члены в правой части представляют собой релятивистские поправки; в ньютоновской теории гравитации правая часть была бы равна нулю.
Нулевым приближением к решению является ньютоновское решение, т. е.

$$u = u_0(1+\varepsilon\cos\varphi)$$

где -эксцентриситет. Заметим теперь, что первый поправочный член имеет вид

$$6u_0(u-u_0)^2 = \overline{O}\left(u_0^3\varepsilon^2\right) = \odot\left(\frac{m^3}{r_0^2}\varepsilon^2\right),$$

а второй поправочный член есть

$$(u-u_0)^3 = \theta\left(\frac{m^3}{r_0^8}\varepsilon^3\right)$$

так что мы можем им просто пренебречь! Следовательно, поправки первого порядка можно найти из уравнения

$$(du/d\varphi)^2 + (1-6u_0)(u-u_0)^2 = u_0^2\varepsilon^2$$

Сделаем теперь замену переменных

$$\psi = (1-6u_0)^{1/2}\varphi, \quad \mu = u - u_0$$

тогда уравнение при мет вид

$$(du/d\psi)^2 + \mu^2 = u_0^2\varepsilon^2/(1-6u_0)$$

Заметим, что решение периодично по ψ; это значит, что и r периодично по $\psi = (1-6u_0)^{2/2}\varphi$. Следовательно, одна полная орбита соответствует $\psi = 2\pi$ или $\varphi = 2\pi(1-6M/r_0)^{-1/1}$, поэтому смещение периастрия дается формулой

$$\left.\frac{\delta\varphi}{2\pi}\right|_{\text{за одно обращенне}} = \frac{3M}{r_0}.$$

[Другой способ вычисления смещения, более подходящий для случая больших эксцентриситетов, см. в книге Эддингтона [Eddington A. S., The Mathematical Theory of Relativity (Cambridge University Press, 1922, Sec. 40) [1]).

Из классических ньютоновских уравнений орбиты получаем

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 + \frac{2\Phi(u)}{L^2} = \frac{2E_\infty}{L^2}$$

После подстановки потенциала

$$\Phi = -M/r - AM/r^8$$

это уравнение принимает вид

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 - \frac{2mu}{L^2} - \frac{2Amu^3}{L^2} = \frac{2E_\infty}{L^2}.$$

Перепишем его следующим образом:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + (1-c)(u-u_0)^2 - \frac{2Am}{L^2}(u-u_0)^3 = \text{ const.}$$

Сравнивая коэффициенты при u^2, приходим **k** выводу, что $c = 6Au_0m/L^2$. Для почти круговых орбит $L^2 \approx mr$, поэтому $c = 6A/r$. Из рассмотрения случая «а» нам известно, что решение

Имеется перевод: Эддингтон А. С. Математическая теория относительности, Харьков - Киев: ГНТИ Украины, 1933, гл. 3, 40. -Прим.перев. периодично по переменной $(1+c)^{1/2}\varphi$, так что полное угловое отклонение от периастрия к периастрию составляет

Отсіода

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{(1-c)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\pi}{\left(1-\frac{6A}{r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\left.\frac{\delta\varphi}{2\pi}\right|_{\text{эа одно обращенне}} = \frac{3A}{r_0^2}.$$

Периастрий совершает опережающее движение в случае сплюснутости звезды $A > 0$ и отстает, если звезда вытянута $A < 0$.

в) В системе единиц, где $c = G = 1, M_\odot = 1,5$ км. Для Меркурия $r_0 = 0,58 \cdot 10^8$ км. Так как период орбитального обращения Меркурия составляет 0,241 года, релятивистское смещение перигелия равно

$$\delta\varphi = 0,105 \text{ дуговой секунды за одно обращение } = \\ = 42 \text{ дуговым секундам за столетие.}$$

Если бы это смещение было обусловлено сплюснутостью Солнца, мы имели бы для других планет смещение

$$\delta\varphi = \left(42 \text{ сек/столетие}\right)\ (r_{\text{Мерк}}/r)^2\,(T_{\text{орбнты Мерк}}/T_{\text{орб}}) = \\ = (42 \text{ сек/столетие})\,(r_{\text{Мерк}}/r)^{\frac{7}{2}}.$$

Числовые значения смещений тогда составляли бы

$r_{\text{Мерк}}\ /\boldsymbol{r}$	Общая теория относительностн, сек/столетие	Сплюонутость, сек/столетне
1	42	42
$\mathbf{0,536}$	$\mathbf{8,8}$	$4,7$
$\mathbf{0,386}$	$3,9$	$1,51$
$0,245$	$1,25$	$0,3$

Реиение 15.8. Мы будем решать задачу в два этапа. Вначале вычислим частоту лазерного излучения, измеренную наблюдателем, покоящимся при значении радиальной координаты $r()$, а затем вычислим красное смещение между этим наблюдателем и наблюдателем, покоящимся на бесконечности («НПБ»).

Пусть $\mathbf{u}_{\text{Р}}$ – 4-скорость ракеты «Р» и $\mathbf{p}_P$ - импульс фотона при значении радиальной координаты r. Тогда

$$\frac{v_{\text{НПР}}}{v_0} = \frac{u_{HПP} \cdot p_P}{u_P \cdot p_P}$$

Если v-собственная относительная скорость ракеты и НПРнаблюдателя, то в системе отсчета ракеты уравнение (1) можно переписать в виде
откуда

$$\frac{v_{\text{НРР}}}{v_0} = \frac{\gamma v_0(1 + v\cos\alpha)}{v_0},$$

$$v_{\text{НПР}} = \gamma v_0(1 + v\cos\alpha),$$

где $\gamma \equiv \left(1 - v^2\right)^{-1/2}$. Чтобы вычислить v, вспомним, что на круговых орбитах угловая скорость

$$\Omega \equiv \frac{d\varphi}{dt}$$

в точности равна скорости, даваемой третьим законом Кеплера
в ньютоновской теории тяготения:

$$\Omega = \left(\frac{M}{r^3}\right)^{1/1}$$

(см. задачу 17.4). Следовательно,

$$v = \frac{d\hat{\varphi}}{d\hat{t}} = \frac{r d\varphi}{(1 - 2M/r)^{1/3} dt} = \left[\frac{M}{r(1 - 2M/r)}\right]^{1/3}.$$

Тогда наблюдатель на бесконечности будет измерять частоту
или

$$v_{\text{НП}} = \frac{v_{\text{НПР}}}{u^0_{\text{НПР}}} = v_{\text{НПР}}(1 - 2M/r)^{1/2},$$

$$v_{\text{НПS}} = \gamma v_0(1 + v\cos\alpha)(1 - 2M/r)^{1/2},$$

где v определяется уравнением (4).

Solution 15.9.

а) Первый интеграл движения дает нам уравнение

$$(dr/dt)^2 + V^2(r) = \tilde{E}^2$$

где V определено в задаче 15.11. Если теперь воспользоваться соотношением

$$d\varphi/d\tau = p^{\varphi} = \tilde{L}/r^2$$

и ввести новую переменную $u \equiv M/r$, то можно получить уравнение, связывающее u и φ:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\tilde{E}^2 - (1 - 2u)\left(1 + \bar{L}^2u^2\right)}{\bar{L}^2}$$

где $L \equiv \tilde{L}/M$. Продифференцируем уравнение (3) по φ:

$$2u'u'' = -\left(2u\bar{L}^2 - 2 - 6\bar{L}^2u^2\right)u'\bar{L}^{-2}$$

ИЛИ

$$u'' + u = \frac{1}{\dot{L}^2} + 3u^2$$

Для больших прицельных параметров правая часть уравнения (4) мала. Положим $u = u_0 + \varepsilon v$; в этом случае правая часть уравнения (4) имеет порядок $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Соответствующим образом выбирая оси x и y, Можно добиться, чтобы

$$u_0 = A\cos\varphi, \quad a = \text{ const.}$$

Подставляя u_0 в уравнение (4), получаем

$$v'' + v = \bar{L}^{-2} + 3A^2\cos^2\varphi = \bar{L}^{-2} + \frac{3}{2}A^2(1 + \cos 2\varphi)$$

Решение уравнения (6) имеет вид

$$v = \bar{L}^{-2} + \frac{3}{2}A^2 - \frac{A^2}{2}\cos 2\varphi = \bar{L}^{-2} + 2A^2 - A^2\cos^2\varphi$$

откуда следует

$$u = A\cos\varphi - A^2\cos^2\varphi + L^{-2} + 2A^2$$

Асимптоты орбиты даются уравнением $u = 0$, т. е.
где

$$A^2\cos^2\varphi - A\cos\varphi - B = 0$$

$$B \cong \frac{1}{L^2} + 2A^2,$$
$$\cos\varphi = \frac{A - \left(A^2 + 4A^2B\right)^{\frac{1}{2}}}{2A^2} \approx -\frac{B}{A}.$$

Поскольку отношение B/A - малая величина, решение уравнения (8) имеет простой вид:

$$\varphi \approx \pi/2 - B/A$$

Так как обеим асимптотам соответствует одинаковый угол отклонения (для $\varphi \approx \pi/2$ и $\varphi \approx -\pi/2$), то полный угол отклонения составляет

$$\Delta\varphi = 2B/A$$

Если b-минимальное расстояние, на которое приближается частица к рассеивающему центру, то из определения (5) для A следует

$$a = M/b$$

Dasee,

$$L^2 = \frac{L^2}{M^2m^2} = \frac{b^2\left(E^2 - m^2\right)}{M^2m^2} = \frac{b^2\beta^2}{M^2\left(1 - \beta^2\right)}$$
$$B = \frac{M^2\left(1 - \beta^2\right)}{b^2\beta^2} + \frac{2M^2}{b^2} = \frac{M^2\left(1 + \beta^2\right)}{b^2\beta^2}$$

Из соотношений (10) - (12) окончательно получаем

$$\Delta\varphi_{\text{грав}} = \frac{2M\left(1 + \beta^2\right)}{b\beta^2}$$

б) Дифференциальное уравнение, описывающее траекторию, запишем следующим образом:

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\dot{r}) = \gamma mr\omega^2 - \frac{Ze^2}{r^2},$$
$$m\gamma r^2\omega \equiv L = \text{ const},$$
$$m\gamma - \frac{Ze^2}{r} \equiv E = \text{ const.}$$

Из уравнения (14б) имеем

$$d/dt = \left(L/m\gamma r^2\right)d/d\varphi$$

так что уравнение (14а) принимает вид

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}u + \left(1 - \frac{Z^2e^4}{L^2}\right)u = \frac{Ze^2E}{L^2}$$

где $u \equiv 1/r$. Запишем решение уравнения (15):

$$u = \frac{1}{b}\cos\tau\varphi + \frac{Ze^2E}{L^2 - Z^2e^4},$$
$$\tau \equiv \left(1 - \frac{Z^2e^4}{L^2}\right)^{1/2};$$

оно для больших L сводится к выражению

$$u = \frac{1}{b}\cos\varphi + \frac{Ze^2E}{L^2}.$$

Наконец, асимптоты даются уравнением

$$0 = \frac{1}{b}\cos\varphi + \frac{Ze^2E}{L^2}$$

или

$$\varphi \approx \frac{bZe^2E}{L}$$

так что полный угол отклонения есть

$$\Delta\varphi_{\text{лектромаг}} = \frac{2bZe^2E}{L}$$

Воспользовавшись соотношениями

$$E = m\left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$
$$L^2 = \frac{b^2m^2\beta^2}{1-\beta^2}$$

перепишем формулу (18) в виде

$$\Delta\varphi_{9\ \text{лектромвг}} = \frac{2Ze^2\left(1-\beta^2\right)^{1/3}}{mb\beta^2}$$

Формулы (13) и (19) отличаются друг от друга потому, что гравитационное поле тензорное, а электромагнитное-векторное: эти поля изменяются по-разному при преобразованиях Лоренца, что приводит к различной зависимости угла отклонения от $\boldsymbol{\beta}$, когда β не мало.

Solution

15.10. Для решения этой задачи удобно использовать «излучательные координаты Эддингтона - Финкельштейна»: определим r^* посредством соотношения

$$dr^*/dr = (1 - 2M/r)^{-1}$$

Т. е.

$$r^* = r + 2M\ln(r/2M - 1) + \text{ const},$$

и введем запаздывающую временную координату

$$u = t - r^*$$

Метрика Шварцшильда в этих координатах записывается в виде

$$ds^2 = -(1 - 2M/r)du^2 - 2dudr + r^2d\Omega^2.$$

Полагая $ds = 0$, мы видим, что в этой метрике фотоны, излучаемые в радиальном направлении от центра, распространяются вдоль линий u =const. Красное смещение вычисляется путем сравнения промежутков времени между приемом и излучением фотонов для различных наблюдателей:

$$\frac{\Lambda_\infty}{\Lambda_{\text{иэл}}} = \frac{(\Delta t)_\infty}{(\Delta\tau)_{\text{изл}}} = \frac{(\Delta u)_\infty}{(\Delta\tau)_{\text{изл}}} = \frac{(\Delta u)_{\text{пвл}}}{(\Delta\tau)_{\text{пзл}}} = \left.\frac{du}{d\tau}\right|_{\text{изл}}.$$

Обратите внимание, что мы можем установить соотношение между временными интервалами на бесконечности и временными интервалами в месте нахождения излучателя, воспользовавшись тем фактом, что u = const вдоль траектории световых лучей (фиг. 28). Теперь мы должны найти компоненту $du/d\tau = U^u$4-скорости излучателя U как функцню времени t.

Поскольку u и t являются циклическими координатами, то из соотношений

$$U_t = U_\alpha = \text{ const } = -\tilde{E}$$

и $\mathbf{U}\cdot\mathbf{U} = 1$ имеем

$$U_r = \frac{-\tilde{E} - \left(\tilde{E}^2 - 1 + 2M/r\right)^{1/2}}{1 - 2M/r}$$

Следовательно,

$$U^u = g^{uuu}U_u + g^{ur}U_r = 0 + \left[\tilde{E} + \left(\tilde{E}^2 - 1 + 2M/r\right)^{2/2}\right](1 - 2M/r)^{-1}$$

и

$$Ur = g^{ur}U_u + g^{rr}U_r = \tilde{E} + \left[-\tilde{E} - \left(\tilde{E}^2 - 1 + 2M/r\right)^{1/2}\right] =$$
$$= -\left(\tilde{E}^2 - 1 + 2M/r\right)^{1/2}.$$

Таким образом,

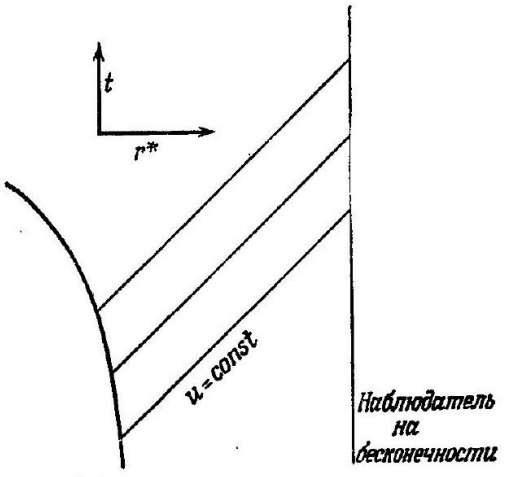
$$\frac{dr}{du} = \frac{U^r}{U^{ut}} = \frac{-\left(\tilde{E}^2 - 1 + 2M/r\right)^{1/2}(1 - 2M/r)}{\tilde{E} + \left(\tilde{E}^2 - 1 + 2M/r\right)^{1/2}}.$$

Вблизи $r = 2M$ из уравнения (7) получаем

$$du \approx -2(1 - 2M/r)^{-1}dr \approx -2(r/2M - 1)^{-1}dr,$$
$$u \approx -4M\ln(r/2M - 1) + \text{const},$$
$$1 - 2M/r \approx \exp(-u/4M).$$

Подставляя все эти выраженння в уравнение (5), приходим к выводу, что при $r \to 2M$

$$U^u \approx e^{+u/4M}.$$



Наблюдатель,
падатоцций sдоль
$r = r(\tau)$

Фur. 28.

Но для наблюдателя, находящегося на фиксированном (и большом расстоянии r), $u = t+$ const, так что окончательно имеем

$$\lambda_{\text{нза}}\,/\lambda_\infty \approx \exp(-t/4M).$$

Solution

15.11. При движении частиц сохраняющимися величинами являются $u_t \equiv \tilde{E}$ и $u_\varphi \equiv \tilde{L}$, так что из $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=1$ получаем

$$(dr/d\tau)^2 + V^2(r) = \tilde{E}^2$$
$$V \equiv \left[(1-2M/r)\left(1+\tilde{L}^2/r^2\right)\right]^{1/2}.$$

[См. также [1], уравнение (25.15) или [2], уравнение (8.4.13)]. Полагая $\partial V^2/\partial r = 0$, мы можем найти максимум V^2:

$$V^2_{\text{макс}} = \frac{L^2+36+\left(\bar{L}^2-12\right)\left(1-12/\bar{L}^2\right)^{1/2}}{54},$$
$$\bar{L} \equiv \tilde{L}/M.$$

Если для частицы $\tilde{E} > V_{\text{макс}}$, то она захватывается. Таким образом, предельное значение $\bar{L}$, при котором еще происходит захват, находим, приравнивая

$$\tilde{E}^2 = V^2_{\text{макс}}$$

а) Для больших E (больших L) уравнение (2а) сводится к уравнению

$$V^2_{\text{макс}} = \frac{\bar{L}^2+36+\left(\bar{L}^2-12\right)\left(1-6/\bar{L}^2\right)}{54} = \frac{\bar{L}^2+9}{27}$$

и уравнение (3) принимает вид

$$\bar{L}^{\mathbf{3}}_{\text{крит}} = 27\tilde{E}^2 - 9.$$

Аналогично $L_{\text{крит}}$ можно ввести критический прицельный параметр $b_{\text{крит,}}$, который задается соотношением

$$b_{\text{КриТ}} = \frac{L_{\text{КриТ}}}{p} = \frac{L_{\text{Кр}}{}^{\underline{\text{uT}}}}{\left(E^2-m^2\right)^{1/2}},$$

где m - масса частицы. Захват происходит для прицельных параметров, удовлетворяющих неравенству $b < b_{\text{крит}}$. Тогда сечение захвата можно записать в виде

$$\sigma_{3a\times\text{B}} = \pi b^2_{\text{КриТ}} = \frac{\pi L^2_{\text{КрQ}}}{\left(E^2-m^2\right)} = \frac{\pi M^2 \widetilde{L}^2_{\text{КриТ}}}{\left(\tilde{E}^2-1\right)} \approx$$
$$\approx \frac{\pi M^2}{\tilde{E}^2}\left(1+\frac{1}{\tilde{E}^2}\right)\left(27\tilde{E}^2-9\right)$$

ИЛИ

$$\pi b^2_{\text{K}} \approx 27\pi M^2\left(1+\frac{2}{3\tilde{E}^2}\right).$$

Для $\tilde{E}\approx 1$ (малые значения β) имеем

$$\tilde{E}^2 \approx 1+\beta^2$$

и уравнение (3) можно приближенно записать в виде

$$18+54\beta^2 \approx \bar{L}^2 + \left(\bar{L}^2-12\right)^{3/2}/\bar{L}$$

Решая это уравнение относительно $\bar{L}^2$ с точностью до первого порядка по β^2, находим

$$\bar{L}^2_{\text{kPuT}} = 16\left(1+2\beta^2\right) + \mathscr{O}\left(\beta^4\right)$$

и

$$\sigma_{\text{3aB}} = \pi b^2_{\text{K}} = \frac{\pi M^2 \bar{L}^2_{\text{KphT}}}{\left(\tilde{E}^2-1\right)} \approx \frac{16\pi M^2}{\beta^2}.$$

Реиение 15.12. Будем считать, что орбита Джона расположена в плоскости $\vartheta = \pi/2$. Поскольку орбита круговая, то $u^r = 0$, и из r-компоненты уравнения геодезической $Du^r/d\tau = 0$ получаем

$$\Gamma^r_{tt}\left(u^t\right)^2 + \Gamma^r_{\varphi\varphi}\left(u^\varphi\right)^2 = 0$$

и, следовательно, для орбиты Джона

$$\omega^2 \equiv \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{u^\varphi}{u^t}\right)^2 = -\frac{\Gamma^r t}{\Gamma^r_{\varphi\varphi}} = \frac{M}{r^3} = \frac{1}{64M^2}.$$

Поскольку $d\varphi/dt = 1/8M$, а между встречами Джон проходит угловое расстояние в 20π радиан, это соответствует промежутку координатного времени, равному
Из соотношения

$$\Delta t = 160\pi M$$

$$g_{tt}\left(u^t\right)^2 + g_{\varphi\varphi}\left(u^\varphi\right)^2 = -1$$

для орбиты Джона получаем

$$u^t \equiv \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{-1/2} = 2.$$

Следовательно, измеренный Джоном промежуток собственного времени между встречами равен

$$\Delta\tau_{\text{джои}} = \frac{1}{2}\Delta t = 80\pi M \approx 251,5M.$$

Для описания траектории Питера мы используем уравнения радиального падения (задача 15.4). Время, в течение которого Питер падает от R до $r = 4M$, должно. равняться

$$\frac{1}{2}\Delta t = 80\pi M.$$

Нам необходимо найти значения R и η, соответствующие интервалу времени t, равному $80\pi M$, и тогда мы сможем определить соответствующий интервал собственного времени для Питера из уравнения (6) в решении задачи 15.4:

$$\Delta\tau_{\text{Питер}} = 2\left(\frac{R^3}{8M}\right)^{1/2}(\eta + \sin\eta)$$

Уравнения для R и η-это уравнения (7) и (5) из решения задачи 15.4:

$$40\pi = \ln\left[\frac{(X-1)^{1/2} + \operatorname{tg}\frac{1}{2}\eta}{(X-1)^{1/2} - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\eta}\right] + (X-1)^{1/2}\left[\eta + \frac{1}{2}X(\eta + \sin\eta)\right],$$
$$4 = X(1 + \cos\eta)$$

где $X \equiv R/2M$.
Обратимся теперь к физической интуиции: для Питера путешествие в направлении от звезды занимает довольно значительное время, за которое Джон успевает совершить несколько обращений по орбите. Поэтому и расстояние X должно быть весьма велико, и, следовательно, $\eta \approx \pi$. Поскольку логарифмическая функция меняется медленно, мы пренебрежем логарифмическим членом и напишем приближенно:

$$40\pi \approx X^{1/2}\left(\pi + \frac{1}{2}X\pi\right)$$

Отсюда получаем $X^{3/2} \approx 80$, т. е. $X \approx 18,5$. Тогда из уравнения (3) находим $1 + \cos\eta \approx 0,216$ и соответственно $\eta = 2,47$. Более точно,
откуда

$$\eta = 2,46029 \quad \text{и} \quad X = \frac{R}{2M} = 17,91737$$

$$\Delta\tau_{\text{Питер}} = 468,72M$$

Таким образом, по часам Джона пройдет гораздо меньший (примерно вдвое) интервал собственного времени, чем по часам Питера. Это и понятно: ведь Джон все время находится на ультрарелятивнстской орбите, оставаясь в то же время глубоко в гравитационной яме, и оба эти фактора «замедляют» ход его часов, тогда как Питер проводит большую часть этого времени, путешествуя со сравнительно небольшими скоростями не очень глубоко в гравитационной яме (вспомним, что $R/2M \sim 18$).
Реиение 15.13. Очевидно, нам необходимо такое преобразование, чтобы

$$r^2 = e^{2\mu}\Gamma^2,$$
$$e^{2\Lambda}dr^2 = e^{2\mu}d\bar{r}^2.$$

Кспользуя оба эти условия, мы получаем дифференциальное уравнение для $\Gamma = r(r)$, выраженное через известную функцию Λ:

$$\frac{d\vec{r}}{P} = e^{\Lambda}\frac{dr}{r}$$

Оно легко интегрируется, и решение записывается в виде

$$\dot{r} = \text{ const } \cdot \exp\left(\int \frac{e^{\Lambda}}{r}dr\right),$$
$$e^{2\mu} = r^2/\bar{r}^2.$$

Для шварцшильдовской метрики

$$e^{\Lambda} = (1 - 2M/r)^{-1/2}$$

и из уравнения (2а) получаем
откуда

$$r = \text{ const } \cdot \exp\left(\int \frac{dr}{(r^2 - 2Mr)^{1/8}}\right)$$
$$r = \bar{r}(1 + M/2F)^2$$

если мы выберем постоянную интегрирования так, чтобы $r \to F$ при $r \to \infty$. Соотношение (3) можно также обратить:

$$F = \frac{1}{2}\left[r - M \pm (r(r-2M))^{1/2}\right]$$

Из уравнения (2б) имеем

$$e^{2:4} = (1 + M/2\bar{r})^4$$

Отсюда следует, что площадь поверхности сферы с постоянными r и t дается формулой

$$a = (1 + M/2\bar{r})^4\bar{r}^2\int d\vartheta \sin\vartheta d\varphi = 4\pi\bar{r}^2(1 + M/2\bar{r})^4.$$

Для построения диаграммы погружения заметим, что 1) согласно уравнению (4), отображение r в P является двузначным и 2). координата P описывает лишь ту область шварцшильдовской геометрии, где $r \geqslant 2M$ [в уравнении (4) $\rightleftharpoons$ становится комплексным для $r < 2M\rfloor$.

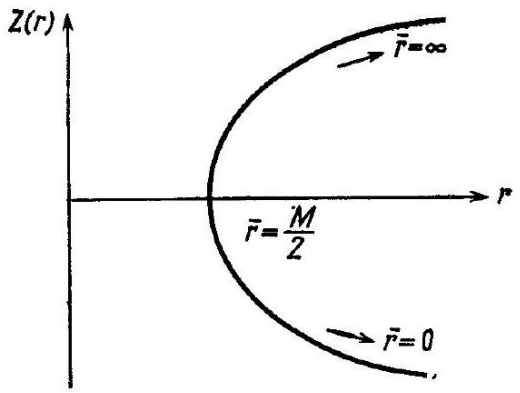
Для построения диаграммы погружения поверхности с постоянными t и r необходимо найти фу нкцию $z(r)$ такую, для которой

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2d\varphi^2 = \left[1 + (dz/dr)^2\right]dr^2 + r^2d\varphi^2 =$$
$$= (1 - 2M/r)^{-1}dr^2 + r^2d\varphi^2.$$

Решение имеет вид

$$z = [8M(r - 2M)]^{1/2}$$

Парабола, являющаяся графиком этой функции, изображена на фиг. 29. Поверхность погружения представляет собой параболоид, полученный путем вращения параболы вокруг оси r.



иг. 29.

Solution 15.14.

а) Рассмотрим буст в направлении $\mathbf{e}_{\hat{x}}$. Для параметра скорости $\psi = \operatorname{Arth}\beta$ преобразование определяется формулами

$$\Lambda^{\hat{t}}_{\hat{t}'} = \Lambda^{\hat{x}}_{\hat{x}'} = \operatorname{ch}\psi, \quad \Lambda^{\hat{t}}_{\hat{x}'} = \Lambda^{\hat{x}}_{\hat{t}'} = \operatorname{sh}\psi,$$

откуда

$$\begin{aligned} R_{\hat{t}'\hat{x}'\hat{t}'} &= \Lambda^{\alpha}_{\hat{t}'}\Lambda^{\beta}_{\hat{x}'}, \Lambda\gamma_{\hat{t}'}\Lambda_{\hat{x}'}R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}} = \operatorname{ch}^4\psi R_{\hat{t}\hat{x}\hat{t}\hat{j}} + \operatorname{ch}^2\psi\operatorname{sh}^2\psi R_{\hat{t}\hat{x}\hat{x}\hat{j}} + \\ &+ \operatorname{sh}^2\psi\operatorname{ch}^2\psi R_{\hat{x}\hat{t}\hat{t}\hat{x}} + \operatorname{sh}^4\psi R_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}\hat{j}} = \\ &= \left(\operatorname{ch}^4\psi - 2\operatorname{sh}^2\psi\operatorname{ch}^2\psi + \operatorname{sh}^4\psi\right) R_{\hat{t}\hat{x}\hat{x}\hat{x}} = \\ &= \left(\operatorname{ch}^2\psi - \operatorname{sh}^2\psi\right)^2 R_{\hat{t}\hat{t}_{\hat{x}\hat{x}}\hat{x}} = R_{\hat{t}\hat{x}\hat{\hat{x}}\hat{x}}. \end{aligned}$$

б) В геометрии Шварцшильда неисчезающие физические компоненты тензора Римана суть

$$\begin{aligned} R_{\hat{t}\hat{i}\hat{i}\hat{r}} &= R_{\hat{\hat{\theta}}\hat{\varphi}\hat{\hat{\theta}}\hat{\varphi}} = -2M/r^3, \\ R_{\hat{t}\hat{i}\hat{t}\hat{\upsilon}} &= R_{\hat{t}\hat{\varphi}\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = -R_{\hat{r}\hat{\upsilon}\hat{\upsilon}\hat{r}} = -R_{\hat{r}\hat{\varphi}\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = M/r^3 \end{aligned}$$

плюс компоненты, сопряженные перечисленным в силу симметрии. Чтобы показать, что все физические компоненты являются инвариантными по отношению к бусту в радиальном направлении, мы можем непосредственно вычислить в явном виде 20 независимых компонент, подвергшихся бусту. Другой способ состоит в том, чтобы ввести в шварцшильдовской геометрии векторы

$$1 = e_{\hat{\imath}} + \mathrm{e}_{\hat{r}}, \quad n \equiv e_{\hat{t}} - \mathrm{e}_r, \quad m \equiv e_{\hat{\jmath}} + i\hat{e}_{\hat{\varphi}}.$$

Легко видеть, что теизор Римана можно представить как сумму произведений этих векторов:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = \frac{1}{2}\frac{M}{r^3}\{&-(\mathbf{n}\wedge\mathbf{1})(\mathbf{n}\wedge\mathbf{1}) + (\mathbf{m}\wedge\mathbf{m}^*)(\mathbf{m}\wedge\mathbf{m}^*) + \\ &+ \operatorname{Re}\left[(\mathbf{n}\wedge\mathbf{m})(\mathbf{1}\wedge\mathbf{m}^*) + (\mathbf{l}\wedge\mathbf{m}^*)(\mathbf{n}\wedge\mathbf{m})\right]\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что компоненты вектора m инвариантны по отношению к бусту в направлении r с параметром скорости ψ. Из соотношений
откуда

$$\mathbf{e}_{\hat{t}} = \operatorname{ch}\psi\mathbf{e}_{\hat{\imath}} - \operatorname{sh}\psi\mathbf{e}_{\hat{r}}, \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_{\hat{r}} = \operatorname{ch}\psi\mathbf{e}_{\hat{r}}, -\operatorname{sh}\psi\mathbf{e}_{\hat{t}'}$$

следует:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \mathbf{e}_{\hat{t}} + \mathbf{e}_{\hat{r}} = e^{-\psi}\left(\mathbf{e}_{\hat{t}'} + \mathbf{e}_{\hat{r}'}\right), \\ \mathbf{n} &= \mathbf{e}_{\hat{t}} - \mathbf{e}_{\hat{r}} = e^{\psi}\left(\mathbf{e}_{\hat{t}'} + \mathbf{e}_{\hat{r}'}\right), \end{aligned}$$

$$l_{\hat{\mu}'}n_{\hat{\upsilon}'} = l_{\hat{\mu}}n_{\hat{\upsilon}}$$

Тогда из вида тензора $\mathbf{R}$ ясно, что все компоненты инвариантны. Чтобы убедиться, что такой вывод несправедлив по отношению к бустам в других направлениях, заметим, что для буста в φ-направлении с параметром скорости ψ будем иметь

$$\begin{aligned} R_{\hat{r}'\hat{\imath}_{\hat{r}}\hat{\varphi}'} &= \Lambda^{\alpha}_{\hat{r}}\Lambda^{\beta}_{\hat{\psi}'}R_{\hat{r}\hat{r}\beta} = \\ &= \operatorname{sh}\psi\operatorname{ch}\psi\left(R_{\hat{r}\hat{\imath}\hat{r}\hat{t}} + R_{\hat{r}\hat{\varphi}\hat{r}\hat{\varphi}}\right) = \\ &= -\left(M/r^3\right)\operatorname{sh}\psi\operatorname{ch}\psi \neq R_{\hat{r}\hat{r}\hat{r}\hat{\varphi}} \end{aligned}$$

Реиение 15.15. В координатах Крускала шварцшильдовская метрика записывается в виде

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r}e^{-r/2M}\left(-dv^2 + du^2\right) + r^2d\Omega^2$$

где

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right)e^{r/2M} = u^2 - v^2$$

Полагая в выражении (la) $v = \text{const}$ и $\vartheta = \pi/2$ и записывая затем линей ный элемент в виде некоторой евклидовой поверхности вращения, будем иметь

$$\frac{32M^2}{r}e^{-r/2M}du^2 + r^2d\varphi^2 = \left[1 + (dz/dr)^2\right]dr^2 + r^2d\varphi^2$$

или

$$1+\left(\frac{dz}{dr}\right)^2=\frac{32M^3}{r}e^{-r/2M}\left(\frac{du}{dr}\right)^2$$

Вычисляя du/dr из уравнения (1б), получаем

$$1+\left(\frac{dz}{dr}\right)^2=\frac{r}{2M}\frac{e^{r/2M}}{(r/2M-1)e^{r/2M}+v^2}$$

Чтобы погружение было возможным, z должна быть дейсгвительной функцией, т. е. должно выполняться неравенство

$$\frac{r/2Me^{r/2M}}{(r/2M-1)e^{r/2M}+v^2}\geqslant 1$$

Отсюда следует условие

$$r/2M\geqslant \ln v^2$$

Таким образом, для; $v\ |>\ 1$ должно существовать минимальное значение r, выделяющие область, внутри которой погружение не удается.

С геометрической точки зрения необходимым условием погружения является выполнение неравенства

$$\frac{d\text{ (периметр)}}{d\text{ (собственный радиус)}}\leqslant 2\pi.$$

Рассмотрим теперь общее условие, налагаемое на dv/du, допускающее евклидово погружение. Пусть мы имеем некоторое сечение, описываемое функцией $v(u)$. Тогда

$$ds^2=\frac{32M^3}{r}e^{-r/2M}\left[1-\left(\frac{dv}{du}\right)^2\right]du^2+r^2d\varphi^2=$$
$$=\frac{32M^3}{r}e^{-r/2M}\left[1-\left(\frac{dv}{du}\right)^2\right]\left[\frac{\left(r/8M^2\right)e^{r/2M}}{\left(u-v\frac{dv}{du}\right)}\right]^2dr^2+r^2d\varphi^2,$$

и погружение допустимо, если

$$\frac{r}{2M}e^{r/2M}\left[1-\left(\frac{dv}{du}\right)^2\right]\geqslant\left(u-v\frac{dv}{du}\right)^2$$

для любого r.

Решение 15.16. Чтобы избежать гипнотического воздействия привычных координатных обозначений, переобозначим r и следующим образом: $r\to z, t\to\omega$. Тогда рассматриваемая метрика примет вид

$$ds^2=-dw^2+\frac{4}{9}\left[\frac{(9/2)M}{z-w}\right]^{1/3}dz^2+\left[(9/2)M(z-w)^2\right]^{\frac{2}{3}}d\Omega^2$$

Введем теперь новую координату r, определив ее соотношением

$$r=\left[\frac{9}{2}M(z-w)^2\right]^{1/3}$$

[Мы пришли к этой мысли, потому что выражение (1) явно сферически-симметрично, и, следовательно, коэффициент при $d\Omega^2$ обладает геометрическим смыслом радиуса кривизны.] Введя таким образом, получим

$$-\left(\frac{2r^3}{9M}\right)^{1/2}+z=w,$$
$$dw=dz-\left(\frac{r}{2M}\right)^{1/3}dr.$$

Подставляя равенства (2) и (3) в выражение (1), будем иметь

$$ds^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dz^2+2\left(\frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}}dzdr-\frac{r}{2M}dr^2+r^2d\Omega^2.$$

Теперь нам хотелось бы попытаться диагонализовать члены с dz^2, $dzdr$ и dr^2. Введем для этого координату t и функцию $F(r)$ согласно определению

$$z=t+F(r)$$

и подставим в выражение (4):

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(dt^2+2F'dtdr+F'^2dr^2\right)+$$
$$+2\left(\frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}}dr\left(dt+F'dr\right)-\frac{r}{2M}dr^2+r^2d\Omega^2.$$

Выберем теперь F таким образом, чтобы метрика была диагональна, Т. е.

$$\left(1-\frac{2M}{r}\right)F' = \left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2}$$

При таком выборе F' линейный элемент (6) принимает вид
или

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{r}{2M}\right)dr^2+$$
$$+2\left(\frac{r}{2M}\right)\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2-\frac{r}{2M}dr^2+r^2d\Omega^2,$$
$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2+r^2d\Omega^2.$$

Перед нами метрика Шварцшильда в координатах кривизны, которая соответствует, разумеется, статистическому пространству-времени. Исходные координаты (1) называются «координатами Леметра». В них временная координата w измеряет собственное время наблюдателей, свободно падающих на центр; каждый такой наблюдатель движется вдоль линии $z = \text{const}$.

Solution

15:17. В метрике задачи 15.16 для наблюдателя, покоящегося в данной системе координат, справедливо соотношейе $z = \text{const}$ (см. peuenue 15.16). Согласно определению (5) из решения 15.16, это означает, что

$$dt = -F'dr = -\left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr$$

где мы использовали также условие (7) из решения 15.16. Из уравнения (1) получаем

$$(dr/dt)^2 = (2M/r)\left(1-\frac{2M}{r}\right)^2$$

Сравнивая уравнение (2) с уравнением (2) из решения 15.3 (где для частицы, падающей из состояния покоя на бесконечности, $u_0 = 1$), видим, что наше уравнение (2) соответствует радиально падающей частице, обладающей на бесконечности значением энергии, равным массе покоя.

Solution

15.18. Релятивистское уравнение Бернулли (см. задачу 14.7)

$$u_0 = \left(\frac{n}{\rho+p}\right)\left(\frac{n_\infty}{p_\infty+\rho_\infty}\right)^{\mathbf{-1}}$$

можно записать через собственную радиальную скорость жидкости

$$v = (1-2M/r)dr/dt$$

с помощью соотношения между u_0 и dr/dt:

$$g_{00}\left(u^0\right)^2+g_{rr}\left(u^r\right)^2 = --1$$

В результате получим

$$v^2 = 1-\frac{\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{\rho+p}{n}\right)^2}{\left(\frac{\rho_\infty+p_\infty}{n_\infty}\right)^2}.$$

Если теперь воспользоваться законом сохранения массы покоя

$$\left(u^{\alpha} n|g|^{1/2}\right), \alpha = 0$$

то можно найти (предварительно вновь выразйв $u^{\top}$ через v)

$$\frac{v(1-2M/r)^{\frac{1}{2}} n\dot{r}^2}{(1-v^2)^{\frac{1}{2}}} = \text{const} \equiv \frac{\dot{M}}{4\pi}.$$

Обратите внимание, что в этом решении мы обозначаем через n плотность массы покоя, а не плотность числа частиц, как обычно:

$$n_{\text{3 зесс}} \equiv m_p n_{\text{обычн}}$$

Теперь было бы желательно выразить n через скорость звука a с помощью уравнения $p = Kn^{\vee}$ (ср.

Solution

5.25):
Отсюда следует:

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{\gamma K n \gamma - 1}{1 + \gamma K n^{\gamma-1/(\gamma-1)}}$$

и, далее,

$$\gamma K n^{\gamma-1} = \frac{a^2}{1 - a^2/(\gamma-1)} = \frac{a^2(\rho+p)}{n}$$

$$n = \left[\frac{a^2}{\gamma K \left(1 - a^2/(\gamma-1)\right)}\right]^{\frac{1}{\gamma}-1}.$$

Если мы хотим найти самосогласованное решение для некоторого постоянного $\dot{M}$ и некоторого $v(r)$, то соотношения (2), (3) и (5) можно рассматривать как систему уравнений, определяющую $\dot{M}$ как функцию r и v. Тогда мы сможем найти радиус, при котором течение становится сверхзвуковым, полагая $v = a$ и $d\dot{M} = 0$. Сначала мы должны выразить r через a. Используя уравнения (3) и (4) (при $v = a$), получаем

$$r = \frac{2M}{1 - \left(1 - a^2/(\gamma-1)\right)^2 \left(1 - a^2\right) \tau_{\infty}}$$

где

$$\tau_{\infty} \equiv \left(\frac{\rho + p}{n}\right)_{\infty}$$

Подставляя соотношения (6) и (5) в уравнение (3), будем иметь

$$\frac{\dot{M}}{4\pi} = \frac{4M^2 a \left(1 - \frac{a^2}{\gamma-1}\right) \left[\frac{a^2}{\gamma K (1 - a^2/(\gamma-1))}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}}{\left[1 - \left(1 - a^2\right)\left(1 - a^2/(\gamma-1)\right)^2 \tau_{\infty}\right]^2}$$

Разлагая уравнение (4) в ряд, находим

$$\tau_{\infty} \approx 1 + \frac{a_{\infty}^2}{\gamma - 1}$$

и затем продолжаем вычисления с точностью до низшего порядка по a. Из равенства $d \ln M/da = 0$ получаем
u

$$a^2 = \frac{2a_{\infty}^2}{5 - 3\gamma}, \quad \text{если} \quad \gamma \neq 5/3$$

$$a^2 = 2 \cdot 3 - 1/a_{\infty}, \text{ если } \gamma = 5/3.$$

Используя уравнения (8) и уравнение 6), окончательно находим, что радиус, при котором течение становится сверхзвуковым, дается формулами

$$r_s = \left(\frac{5 - 3\gamma}{8}\right) \frac{2M}{a_{\infty}^2}, \text{ если } \gamma \neq 5/3,$$

H

$$r_s = \frac{3^{1/2}M}{4a_\infty}, \quad \text{если} \quad \gamma = 5/3$$

Решение 15.19. Для диагональной метрики □ Φ имеет вид

$$\Box\Phi = \nabla\cdot(\nabla\Phi) = (-g)^{-1/2}\left[(-g)^{1/2}g^{\alpha\beta}\Phi,\beta\right],\alpha$$
$$\Box\Phi = (-g)^{-1/2}\left[\left\{(-g)^{1/2}g^{00}\mathrm{D},0\right\},0+\left\{(-g)^{1/2}g^{rr(\mathrm{D}},r\right\},r+\right.$$
$$\left.+\left\{(-g)^{1/3}g^{\vartheta\vartheta},\vartheta\right\},\vartheta+\left\{(-g)^{1/2}g^{\varphi\Phi\Phi},\varphi\right\},\varphi\right\}$$

В шварцшильдовской метрике, записанной в координатах кривизны,

$$g^{00} = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}, \quad g^{rr} = \left(1-\frac{2M}{r}\right)$$

а $g^{\vartheta\vartheta}$ и $g^{\Phi\varphi}$ имеют тот же вид, что и в плоском пространстве. Легко можно обнаружить, что третий и четвертый члены в уравнении (2) имеют тот же вид, что и в плоском пространстве (вместе с «плоским» оператором момента количества движения L^2), и, следовагельно, уравнение (2) можно записать следующим обра30М:

$$\Box\Phi = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\Phi_{,00}+\frac{1}{r^2}\left[r^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)\Phi,r\right],+\frac{L^2\Phi}{r^2}$$

Тогда из уравнений поля $\Box\Phi = 0$ следует:

$$0 = \omega_{,00}-\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left[r^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)\Phi,r\right]_{,r}-\frac{L^2}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\Phi$$

Предположим, что Φ можно представить в виде

$$\Phi = \frac{1}{r}\psi(r,t)Y_{\ell_m}(\dot\theta,\varphi)$$

Подставляя (6) в уравнение (5), получаем
где

$$\psi,00-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)\psi,r\right],r+V_\ell(r)\psi = 0$$
$$V_\ell(r) = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left[\frac{2M}{r^3}+\frac{\ell(l+1)}{r^2}\right]$$

Решение 15.20.

Уравнения поля Бранса-Дикке можно представить в виде

$$G^{\mu v}+F^{\mu v}\left(\Phi;x,\Phi_{;\alpha\beta}\right) = T^{\mu v},$$
$$\Box\Phi = T^{\mu}_{\mu}$$

где каждый член, входяций в $F^{\mu v}$, пропорционален пронзводным от скалярного поля . В пустоте решение уравнения (1б) есть

$$\Phi = \text{ const.}$$

Подставляя решение (2) в уравнение (1а), находим

$$G^{\mu v} = 0$$

т. е. уравнения Эйнштейна в пустом пространстве. Следовательно, шварцшильдовская метрика является решением уравнений поля Бранса - Дикке в пустоте. (Статическая сферически-симметричная вакуумная метрика наиболее общего вида в теории Бранса - Дикке содержит два произвольных параметра, соответствующих массе и скалярному заряду. Сферическая черная дыра обладает нулевым скалярным зарядом и описывается решением типа Шварцшильда.)

Leuven-2023.s?/9 A First Look at AdS_2 (!?!!??!?)

1. Consider an AdS_2 manifold, i.e. a manifold with the metric:

$$ds^2 = -\cosh^2\eta d\tau^2 + d\eta^2, \qquad \tau,\eta \in \mathbb{R}.$$

Find all three Killing vectors of this spacetime.

2. Show that a suitable linear combinations of Killing vectors gives three Killing vectors (which we can name L_+, L_0, and L_-) that satisfy the Lie algebra $SL(2,\mathbb{R})$ commutation relations

$$[L_0, L_\pm] = \pm L_\pm, \qquad [L_+, L_-] = L_0.$$

3. Prove that the Ricci scalar for this spacetime is $R = -2$ at all coordinates (τ, η).

Hint: We can obtain AdS_2 from the S^2 metric $ds^2_{S^2} = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$, if we let $\theta \to i\eta + \frac{\pi}{2}$ and $\phi \to \tau$, then the S^2 metric transforms as

$$ds^2_{S^2} \to \cosh^2\eta d\tau^2 - d\eta^2 = -ds^2_{\mathrm{AdS}_2},$$

i.e. it becomes the AdS_2 metric, albeit with an overall minus sign.

Note.

We have not done a true coordinate transformation! The coordinate θ is supposed to be real, as is the coordinate η, and so setting $\theta = i\eta + \frac{\pi}{2}$ clearly violates one of those two assumptions. Additionally, ϕ is only supposed to take values on the interval $[0, 2\pi)$, while τ can take values on the whole real line, which is inconsistent with setting $\phi = \tau$. We have therefore not done a good coordinate transformation; instead, we have done an analytic continuation, which is a technique used in complex analysis to extend the domain of a function. In our case, we are extending the domains of the coordinates to the full complex plane and then noticing that there is a particular identification between the S^2 and AdS_2 coordinates that yields the relation (0.6) between the S^2 and AdS_2 metrics.

Solution про вектора Киллинга

The obvious first Killing vector, which we will denote by K_0, is

$$K_0 = \partial_\tau,$$

since all metric components are independent of τ. To find the remaining Killing vectors, we need to look at the Killing vector equation.

The non-zero Christoffel symbols are

$$\Gamma^\eta_{\tau\tau} = \cosh\eta\sinh\eta, \quad \Gamma^\tau_{\eta\tau} = \Gamma^\tau_{\tau\eta} = \tanh\eta.$$

The most general Killing vector on this background will take the form

$$K = f(\eta,\tau)\partial_\eta + g(\eta,\tau)\partial_\tau,$$

for some functions f and g. In component form, this means that

$$K_\eta = f(\eta,\tau), \quad K_\tau = -\cosh^2\eta g(\eta,\tau).$$

The Killing vector equation $\nabla_{(\mu}K_{\nu)} = \partial_{(\mu}K_{\nu)} - \Gamma^\rho_{\mu\nu}K_\rho = 0$ has three independent components:

$$\begin{array}{ll}(\eta,\eta): & 0 = \partial_\eta K_\eta \\ (\tau,\tau): & 0 = \partial_\tau K_\tau - \Gamma^\eta_{\tau\tau}K_\eta \\ (\eta,\tau): & 0 = \partial_\tau K_\eta + \partial_\eta K_\tau - 2\Gamma^\tau_{\eta\tau}K_\tau.\end{array}$$

Writing these out explicitly and simplifying as much as possible, they give us the following three equations: (1) $0 = \partial_\eta f(\eta,\tau)$, (2) $0 = \partial_\tau g(\eta,\tau) + \tanh\eta f(\eta,\tau)$, (3) $0 = \partial_\tau f(\eta,\tau) - \cosh^2\eta\partial_\eta g(\eta,\tau)$.

The first equation is easily solved; we simply have to set

$$f(\eta,\tau) = f(\tau),$$

i.e. we have to demand that f depends only on τ, not η. Plugging this into the second equation then tells us that

$$\partial_\tau g(\eta,\tau) = -\tanh\eta f(\tau),$$

which can be solved by the ansatz

$$g(\eta,\tau) = \tanh\eta h(\tau), \quad h'(\tau) = -f(\tau).$$

Plugging this into the third equation, we find that

$$0 = f'(\tau) - \cosh^2\eta\partial_\eta(\tanh\eta h(\tau)) = f'(\tau) - h(\tau).$$

Then, since $h'(\tau) = -f(\tau)$, we also know that $h''(\tau) = -f'(\tau)$. The third and final equation thus boils down to the simple condition

$$h''(\tau) = -h(\tau).$$

This is a second-order differential equation with two linearly independent solutions $h_1(\tau)$ and $h_2(\tau)$, which we can pick to be

$$h_1(\tau) = e^{i\tau}, \quad h_2(\tau) = e^{-i\tau}.$$

Plugging these back into the ansatz (0.10), we find that the corresponding solutions for f and g are given by:

$$f_1(\tau) = -ie^{i\tau}, \quad g_1(\eta,\tau) = \tanh\eta e^{i\tau},$$

and

$$f_2(\tau) = ie^{-i\tau}, \quad g_2(\eta,\tau) = \tanh\eta e^{-i\tau}.$$

Therefore the two remaining Killing vectors can thus be taken as

$$K_1 = e^{i\tau}\left(-i\partial_\eta + \tanh\eta\partial_\tau\right),$$
$$K_2 = e^{-i\tau}\left(i\partial_\eta + \tanh\eta\partial_\tau\right).$$

Now, if we compute the commutation relations between the Killing vectors explicitly, we find that

$$[K_0, K_1] = iK_1,$$
$$[K_0, K_2] = -iK_2,$$
$$[K_1, K_2] = -2iK_0.$$

These look very similar to the $SL(2,\mathbb{R})$ commutation relations, except with some extra numerical factors off. If we identify

$$L_0 = -iK_0, \quad L_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}K_1, \quad L_- = \frac{1}{\sqrt{2}}K_2$$

then the commutation relations are exactly the $SL(2,\mathbb{R})$ ones. Therefore the Killing vectors

$$L_0 = -i\partial_\tau,$$
$$L_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\pm i\tau}\left(\mp i\partial_\eta + \tanh\eta\partial_\tau\right),$$

of AdS_2 yield the isometry group $SL(2,\mathbb{R})$.

Solution про скаляр Риччи

4. Bonus: to compute the Ricci scalar for the spacetime, we first need to calculate the Christoffel symbols, which then let us compute the Riemann tensor, the Ricci tensor, and finally the Ricci scalar. As we established earlier in (0.3), the non-zero Christoffel symbols are given by

$$\Gamma^\eta_{\tau\tau} = \cosh\eta\sinh\eta, \quad \Gamma^\tau_{\eta\tau} = \Gamma^\tau_{\tau\eta} = \tanh\eta.$$

For the Riemann tensor, the symmetries of the Riemann tensor tell us that the only independent, non-trivial component is $R_{\eta\tau\eta\tau}$, which is easily written as

$$R_{\eta\tau\eta\tau} = g_{\eta\eta}R^\eta_{\tau\eta\tau} = R^\eta{}_{\tau\eta\tau},$$

since the metric is diagonal and $g_{\eta\eta} = 1$. So, we need to compute $R^\eta_{\tau\eta\tau}$. The formula for the Riemann tensor in terms of Christoffel symbols tells us that

$$R^\eta_{\tau\eta\tau} = \partial_\eta\Gamma^\eta_{\tau\tau} - \partial_\tau\Gamma^\eta_{\eta\tau} + \Gamma^\eta_{\eta\lambda}\Gamma^\lambda_{\tau\tau} - \Gamma^\eta_{\tau\lambda}\Gamma^\lambda_{\eta\tau}.$$

The second term and the third term vanish, since we have established that $\Gamma^\eta_{\eta\mu} = 0$ for any μ. For the fourth term, only the $\lambda = \tau$ component will contribute in the sum over λ, and we are left with

$$\begin{aligned} R^\eta_{\tau\eta\tau} &= \partial_\eta\Gamma^\eta_{\tau\tau} - \Gamma^\eta_{\tau\tau}\Gamma^\tau_{\eta\tau} \\ &= \partial_\eta(\cosh\eta\sinh\eta) - \cosh\eta\sinh\eta\tanh\eta \\ &= \cosh^2\eta + \sinh^2\eta - \sinh^2\eta \\ &= \cosh^2\eta \end{aligned}$$

Combining (0.21) and (0.23), we thus find that $R_{\eta\tau\eta\tau} = \cosh^2\eta$ is the only non-trivial independent component of the Riemann tensor. From here, we can contract over indices to compute the Ricci tensor components:

$$\begin{aligned}
R_{\tau\tau} &= g^{\mu\nu}R_{\tau\mu\tau\nu} = g^{\eta\eta}R_{\tau\eta\tau\eta} = R_{\eta\tau\eta\tau} = \cosh^2\eta, \\
R_{\eta\eta} &= g^{\mu\nu}R_{\eta\mu\eta\nu} = g^{\tau\tau}R_{\eta\tau\eta\tau} = -\frac{1}{\cosh^2\eta}\times\cosh^2\eta = -1, \\
R_{\eta\tau} &= g^{\mu\nu}R_{\eta\mu\tau\nu} = -g^{\mu\nu}R_{\eta\mu\nu\tau} = -g^{\tau\eta}R_{\eta\tau\eta\tau} = 0.
\end{aligned}$$

Note that the Ricci tensor is symmetric so $R_{\tau\eta} = R_{\eta\tau} = 0$. Finally, contracting over the indices of the Ricci tensor will give us the Ricci scalar, and since the off-diagonal pieces of the Ricci tensor vanish this contraction is easy:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\eta\eta}R_{\eta\eta} + g^{\tau\tau}R_{\tau\tau} = 1\times -1 + \left(-\frac{1}{\cosh^2\eta}\right)\times\cosh^2\eta = -1-1 = -2.$$

Therefore we have proven that $R = -2$ for our AdS_2 metric.

Now, for the analytic continuation part of the problem. First, let's consider what happens when we set $\theta = i\eta + \frac{\pi}{2}$. Since constant shifts don't matter for computing differentials, this means that $d\theta = id\eta$, and thus $d\theta^2 = -d\eta^2$. Then, using a standard trig identity for shifts by $\pi/2$, we have

$$\sin\theta = \sin\left(i\eta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(i\eta).$$

Importantly, hyperbolic trig functions are such that $\cos(i\eta) = \cosh\eta$, and thus we have that $\sin^2\theta = \cosh^2\eta$. Finally, setting $\phi = \tau$ doesn't do anything except change the coordinate range on the variable, and so $d\phi^2 = d\tau^2$. Putting this all together, the analytic continuation of the S^2 metric is therefore given by:

$$\begin{aligned}
ds^2_{S^2} &= d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \\
&\to \left(-d\eta^2\right) + \cosh^2\eta d\tau^2 \\
&= -\left(d\eta^2 - \cosh^2\eta d\tau^2\right) \\
&= -ds^2_{\mathrm{AdS}_2}.
\end{aligned}$$

Therefore the analytic continuation proposed in the problem sends the line element on S^2 to the line element on AdS_2, with an overall minus sign. In fact, the relation between the two line elements is exactly what causes the Ricci scalar $R = 2$ on S^2 to get mapped to $R = -2$ on AdS_2, though the full details of this are beyond the scope of what we want to do in this problem. For now, just think of this as a neat coincidence.

Leuven-2023.HW2.1 Symmetrical cosmology (!?!!??!?)

Consider Einstein's equation in vacuum with a non-zero cosmological constant Λ (work in fourdimensional space-time)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0.$$

1. Show that the Einstein equations are equivalent to the following set of equations

$$R_{\mu\nu} = c\Lambda g_{\mu\nu}$$

Find the real constant c.

2. Solve for the most general spherically symmetric metric (in the same coordinates (t, r, θ, ϕ) we used for the Schwarzschild solution) that reduces to the ordinary Schwarzschild solution for $\Lambda = 0$.

3. Write down the equation of motion for radial geodesics for your metric with $\Lambda \neq 0$ in terms of an effective potential. Sketch the effective potential for massive particles and briefly compare your results for $\Lambda > 0$ and $\Lambda < 0$ with the ones for vanishing Λ.

Solution 1

(!!!! отработаю скоро, чтобы решать такое без проблем!!! это важно дотренировать!)
(!!! удалю отовсюду воду!)
The Einstein equation in the presence of a cosmological constant Λ, but with no additional matter, is

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = 0.$$

Assuming that we are in a four-dimensional spacetime, the trace of this Einstein equation yields

$$R = 4\Lambda.$$

We can plug this into the original Einstein equation to eliminate R in favor of Λ. The result is simply

$$R_{\mu\nu} = \left(\frac{1}{2}R - \Lambda\right) g_{\mu\nu} = (2\Lambda - \Lambda) g_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}.$$

Thus we find a relation of the form given in the problem, with

$$c = 1.$$

Solution 2

We remember that for $ds^2 = -e^{2\alpha(t,r)}\mathrm{d}t^2 + e^{2\beta(t,r)}\mathrm{d}r^2 + r^2 d\Omega^2$ there are

$$\begin{aligned}
R_{tt} =& \left[\partial_t^2\beta + (\partial_t\beta)^2 - \partial_t\alpha\partial_t\beta\right] + e^{2(\alpha-\beta)}\left[\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{2}{r}\partial_r\alpha\right] \\
R_{rr} =& -\left[\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta - \frac{2}{r}\partial_r\beta\right] \\
&+ e^{2(\beta-\alpha)}\left[\partial_t^2\beta + (\partial_t\beta)^2 - \partial_t\alpha\partial_t\beta\right] \\
R_{tr} =& \frac{2}{r}\partial_t\beta \\
R_{\theta\theta} =& e^{-2\beta}\left[r\left(\partial_r\beta - \partial_r\alpha\right) - 1\right] + 1 \\
R_{\phi\phi} =& R_{\theta\theta}\sin^2\theta
\end{aligned}$$

Our goal in this problem is to solve the Einstein equation $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$ from the previous problem for this spherically symmetric metric in order to determine the functions α and β. First, we note that the metric is diagonal and so the (t, r) component of the Einstein equation tells us that $R_{tr} = 0$, and thus

$$\partial_t\beta = 0.$$

Then, we take the (θ, θ) component of the Einstein equation, which tells us that

$$e^{-2\beta}\left(r\partial_r\beta - r\partial_r\alpha - 1\right) + 1 = \Lambda r^2.$$

If we differentiate this entire expression with respect to t and use the earlier-derived fact that $\partial_t\beta = 0$, we find simply that

$$\partial_t\partial_r\alpha = 0.$$

Note that we used the fact that partial derivatives commute in deriving this, so that $\partial_t\partial_r\beta = \partial_r\partial_t\beta = 0$. Our results (1.7) and (1.9) can be solved by writing the functions α and β as

$$\alpha(t, r) = f(r) + g(t), \quad \beta(t, r) = h(r),$$

for some functions f, g and h.

Plugging this into our metric (1.5), this means that our metric takes the form

$$ds^2 = -e^{2f(r)}e^{2g(t)}dt^2 + e^{2h(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

The time dependence in this can be simplified by means of a coordinate transformation. In particular, we will choose a new time coordinate $\tilde{t}$ defined such that

$$d\tilde{t} = e^{g(t)}dt$$

which in turn lets us write the metric as

$$ds^2 = -e^{2f(r)}d\tilde{t}^2 + e^{2h(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

We can then simply relabel the time coordinate $\tilde{t} \to t$, as well as relabelling the metric functions by $f \to \alpha$ and $h \to \beta$. We therefore have by means of a coordinate transformation of (1.11) that the metric can always be written as

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + e^{2\beta(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

This is precisely the same as our starting metric (1.5), except the functions α and β no longer have time dependence. Therefore the Einstein equation demands that the metric is in fact static, and hence equipped with a timelike Killing vector. The components of the Ricci tensor hence simplify drastically:

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= e^{2(\alpha-\beta)}\left[\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{2}{r}\partial_r\alpha\right] \\
R_{rr} &= -\left[\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta - \frac{2}{r}\partial_r\beta\right] \\
R_{\theta\theta} &= e^{-2\beta}\left(r\partial_r\beta - r\partial_r\alpha - 1\right) + 1 \\
R_{\phi\phi} &= \sin^2\theta R_{\theta\theta}
\end{aligned}$$

with all other components vanishing. Now, we need to solve the remaining components of the Einstein equation. First, we will take a particular linear combination of the (t,t) and (r,r) components:

$$e^{2(\beta-\alpha)}R_{tt} + R_{rr} = \Lambda e^{2(\beta-\alpha)}g_{tt} + \Lambda g_{rr}.$$

The particular combination we chose makes the left-hand side simplify drastically, and we are left with the relationship

$$\frac{2}{r}\left(\partial_r\alpha + \partial_r\beta\right) = \Lambda e^{2(\beta-\alpha)}\left(-e^{2\alpha}\right) + \Lambda\left(e^{2\beta}\right) = 0.$$

That is, the left-hand side becomes proportional to a single derivative, and the right-hand side vanishes. We thus find that $\alpha'(r) = -\beta'(r)$, which in turn can be solved by setting $\alpha(r) = -\beta(r) + c$ for some constant c. We can without loss of generality choose $c = 0$, though, because c will simply correspond to a constant rescaling of the time coordinate, and we can always remove such a scaling by doing a coordinate transformation (make sure you mention this explicitly!). We can therefore, without loss of generality, set

$$\beta(r) = -\alpha(r),$$

leaving us with only one function $\alpha(r)$ left to determine.

To determine it, we will look at the (θ,θ) component of the Einstein equation $R_{\theta\theta} = \Lambda g_{\theta\theta}$, which can now be written explicitly as

$$-e^{2\alpha}\left(2r\partial_r\alpha + 1\right) + 1 = \Lambda r^2.$$

This is a first order differential equation that we can rewrite as

$$\frac{d}{dr}\left(re^{2\alpha}\right) = 1 - \Lambda r^2.$$

This is easily integrated to find that the most general solution is

$$e^{2\alpha} = 1 + \frac{C}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2$$

where C is some integration constant. In the $\Lambda = 0$ limit, this should match the Schwarzschild solution, which fixes the integration constant to be $C = -2GM$, where G is Newton's constant and M is the black hole mass. The end result is that the most general spherically symmetric solution in the presence of a cosmological constant Λ is

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Solution 3

This calculation pretty much just follows section 5.4 in Carroll, except with the additional cosmological constant term in the metric above.

The time-like Killing vector $K = \partial_t$ associated with energy conservation has components

$$K^\mu = (1,0,0,0), \quad K_\mu = \left(-\left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right), 0, 0, 0\right).$$

The conserved energy is

$$E = -K_\mu\frac{dx^\mu}{d\lambda} = \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)\frac{dt}{d\lambda}.$$

The Killing vector $R = \partial_\phi$ associated with conservation of the z-component of the angular momentum has components

$$R^\mu = (0,0,0,1), \quad R_\mu = \left(0,0,0,r^2\sin^2\theta\right).$$

We will judiciously choose our coordinates such that the geodesic is fixed at $\theta = \frac{\pi}{2}$. We are allowed to do this without loss of generality due to the presence of two other Killing vectors on our background that correspond to conservation of the x - and y-components of the angular momentum as well. Thus, the magnitude L of the angular momentum is given by

$$L = R_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}.$$

With the conserved quantities E and L written down, we now recall that the quantity

$$\epsilon = -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$$

is also conserved along geodesics. We choose the affine parameter λ such that ϵ is normalized to be $\epsilon = 1$ for time-like geodesics and $\epsilon = 0$ for null gedoesics. Thus, massive particle trajectories and massless partile trajectories will have $\epsilon = 1$ and $\epsilon = 0$, respectively.

Writing ϵ out explicitly and recalling that θ is fixed to $\frac{\pi}{2}$, we find

$$\epsilon = \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2.$$

We can use (1.24) and (1.26) to replace $\frac{dt}{d\lambda}$ and $\frac{d\phi}{d\lambda}$ with E and L, respectively, along with some functions of r. The result of this is that we can rewrite this expression as

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V(r) = \mathcal{E}$$

where the effective potential $V(r)$ is given by

$$V(r) = \frac{\epsilon}{2} - \epsilon \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3} - \epsilon \frac{\Lambda}{6} r^2 - \frac{\Lambda}{6} L^2,$$

and the effective "energy" $\mathcal{E}$ is given by

$$\mathcal{E} = \frac{E^2}{2}.$$

The discussion up to now was fully general for geodesics in this spacetime. For radial geodesics, of course, $L = 0$.

Potential

(тут еще можно разные графики нарисовать, потом мб добавлю их, по идее если формулы даны, то никаких проблем с этим нет?)

A Spherical Symmetry and Coordinate Transformations

In four dimensions, the most general spherically symmetric metric takes the form

$$ds^2 = -e^{2\alpha(t,r)} dt^2 + e^{2\beta(t,r)} dr^2 + e^{2\gamma(t,r)} d\Omega^2,$$

for some functions α, β, and γ, and some coordinates $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$. Of course, we are free to make coordinate transformations to simplify this metric. In particular, we will show in this appendix that there exists a series of coordinate transformations through which the metric can always be rewritten as

$$ds^2 = -e^{2\alpha(t,r)} dt^2 + e^{2\beta(t,r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

for some functions α and β, though we should note that these are not necessarily the same functions as in (A.1).

The first step is to define a new coordinate R by

$$R \equiv e^{\gamma(t,r)}.$$

Using the chain rule, this then tells us that the differentials dR, dt, and dr are related by

$$dR = (\partial_t \gamma(t,r))\, e^{\gamma(t,r)} dt + (\partial_r \gamma(t,r))\, e^{\gamma(t,r)} dr.$$

Assuming that $\partial_r \gamma(t,r) \neq 0$,[2] we can solve for dr explicitly as

$$dr = -\left(\frac{\partial_t \gamma(t,r)}{\partial_r \gamma(t,r)}\right) dt + \left(\frac{e^{-\gamma(t,r)}}{\partial_r \gamma(t,r)}\right) dR.$$

We can use this to eliminate dr in the metric (A.1) in favor of dt and dR, as well as trade the $e^{2\gamma(t,r)}$ term in front of the S^2 metric for R^2. The result of this procedure is

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(e^{2\alpha(t,r)} - \left(\frac{\partial_t \gamma(t,r)}{\partial_r \gamma(t,r)}\right)^2 e^{2\beta(t,r)}\right) dt^2 + \left(\frac{e^{2\beta(t,r)-2\gamma(t,r)}}{\left(\partial_r \gamma(t,r)\right)^2}\right) dR^2 \\ &- 2\left(\frac{\partial_t \gamma(t,r) e^{2\beta(t,r)-\gamma(t,r)}}{\left(\partial_r \gamma(t,r)\right)^2}\right) dt dR + R^2 d\Omega^2. \end{aligned}$$

Notice that the coordinate r is implicitly a function of R and t via equation (A.3), which in turn means that all three terms in parentheses in (A.6) are implicitly functions of t and R. Thus, there exist some functions A, B, and C of the coordinates t and R such that this metric can be written as

$$ds^2 = -e^{2A(t,R)} dt^2 + e^{2B(t,R)} dR^2 - 2e^{2C(t,R)} dt dR + R^2 d\Omega^2.$$

Notice that this form of the metric is not diagonal, due to the cross-terms proportional to $dtdR$. Our goal now is to find a new coordinate $T(t,R)$ such that we eliminate t in favor of T and end up with a diagonal metric. That is, we want the metric to take the form

$$ds^2 = -e^{2f(T,R)} dT^2 + e^{2g(T,R)} dR^2 + R^2 d\Omega^2,$$

for some new functions $f(T,R)$ and $g(T,R)$. The chain rule tells us that dT is given in terms of dt and dR by

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt + \frac{\partial T}{\partial R} dR$$

and thus our goal metric (A.8) can be written as

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^2 e^{2f(T,R)} dt^2 - 2\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial R}\right) e^{2f(T,R)} dt dR \\ &+ \left(e^{2g(T,R)} - \left(\frac{\partial T}{\partial R}\right)^2 e^{2f(T,R)}\right) dR^2 + R^2 d\Omega^2. \end{aligned}$$

If we want this goal metric (A.10) to be equal to our actual metric (A.7), we can compare the coefficients of dt^2, dR^2, and $dtdR$ to obtain the following three conditions:

$$\begin{aligned} e^{2A(t,R)} &= \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^2 e^{2f(T,R)}, \\ e^{2B(t,R)} &= e^{2g(T,R)} - \left(\frac{\partial T}{\partial R}\right)^2 e^{2f(T,R)}, \\ e^{2C(t,R)} &= \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial R}\right) e^{2f(T,R)}. \end{aligned}$$

That is, we need some new functions T, f, and g that are related to the old functions A, B, and C in precisely the way prescribed in (A.11). This must always be possible, though, because we have precisely three constaints and we want three new functions, and so we have exactly as many unknowns as we do constaint equations. Thus it must always be possible to find some functions T, f, and g to solve (A.11). Thus we will inevitably be able to put our metric in the form of (A.8).

The upshot of this discussion is that, through a series of coordinate transformations, we can take our starting spherically symmetric spacetime (A.1) and always end up with a metric of the form (A.8). Finally, since T and R are just labels for coordinates, while f and g are just labels for functions, there is nothing stopping us from renaming them. In particular, we can now make the following redefinitions:

$$\begin{aligned} T &\to t, \\ R &\to r, \\ f &\to \alpha, \\ b &\to \beta. \end{aligned}$$

With these redefinitions, the metric will take the form

$$ds^2 = -e^{2\alpha(t,r)} dt^2 + e^{2\beta(t,r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

This is exactly what we wrote in (A.2), and is of the same form as the starting metric (A.1), except the function $e^{2\gamma(t,r)}$ has been replaced with r^2. Thus, we have established that there is a coordinate transformation from the original metric (A.1) to (A.2) that fixes the function in front of the S^2 metric to just be the usual r^2, which makes our work in problem 1 easier.

Эта задача очень хорошая для проверки знаний, самая типичная по первым темам.

Leuven-ex-2023 Damour-Solodukhin Wormhole

For

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \lambda\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

1) Find circular null geodesics. They should depend on M, λ
2) Find Killing horizon. Use $\varkappa^2 = -\frac{1}{2}(\nabla_\mu K_\nu)(\nabla^\nu K^\mu)$

Solution 1

(типичная на метрику шв, см. сем 8 ото Левена, еще дотренирую, это важно! напишу потом решение)

Solution 2

(по идее нет проблем с этим, но нужно еще потренироваться. напишу точнее, в чем смысл этого горизонта???)

13.3.3 Problems from Lashkevich 1

Геометрия и физика специальной теории относительности

В решении задач лекции 1 положим скорость света $c = 1$.

Задача

Покажите, что прямой мировой линии отвечает именно минимум (а не максимум) действия $S = -m\int\limits_A^B ds$, то есть максимум собственного времени $s = \int\limits_A^B ds$. Приведите примеры мировых линий, отвечающих наименьшему собственному времени. Чему равно это время?

Solution

Будем считать, что все элементы ds вдоль мировых линий времениподобны. Прямая мировая линия соответствует равномерному прямолинейному движению. Перейдём в инерциальную систему отсчёта, движущуюся с такой скоростью, чтобы ось времени прошла через AB (это возможно, если A и B разделены времениподобным интервалом). При движении по прямой тело будет неподвижным, а по кривой будет двигаться ненулевой промежуток времени. Покоящиеся часы показывают всегда больший промежуток времени t (в данном случае оно является собственным вдоль прямой), чем движущиеся τ:

$$\tau = \int\limits_A^B dt\sqrt{1 - v(t)^2}$$

Таким образом, действие $S = -m\int\limits_A^B ds$ имеет минимальное значение, если оно берётся по прямой мировой линии, соединяющей A и B.
Наименьшее собственное время достигается на световой мировой линии ($|\vec{r}_B - \vec{r}_A| = t_{AB}$):

$$s = \sqrt{t_{AB}^2 - (x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 - (z_B - z_A)^2} = \sqrt{t_{AB}^2 - |\vec{r}_B - \vec{r}_A|^2} = 0$$

Перейдём в какую-либо плоскость, содержащую A и B. Существует траектория, собственное время движения по которой 0: движение по ломаной, состоящей из 2 отрезков, скорость движения по которым 1 и -1. Любые 2 точки можно соединить этими 2 отрезками, поскольку векторы, параллельные им, образуют ортогональный базис на плоскости. Меньшего собственного времени быть не может, поскольку оно неотрицательно.

Задача

В случае системы нескольких свободных частиц момент импульса равен сумме их моментов:

$$J^{\mu\nu} = \sum_s (x_s^\mu p_s^\nu - x_s^\nu p_s^\mu)$$

Покажите, что сохранение компонент J^{0i} эквивалентно тому, что центр инерции системы

$$\vec{R} = \frac{\sum\limits_s E_s \vec{r}_s}{\sum\limits_s E_s}$$

движется с постоянной скоростью.

Solution

Компоненты J^{0i} сохраняются ($i \in \{1,2,3\}$, поскольку $J^{ii} = 0$ из кососимметричности):

$$J^{0i} = \sum_s (x_s^0 p_s^i - x_s^i p_s^0) = \sum_s (t_s p_s^i - x_s^i E_s)$$

Следовательно, сохраняется и вектор:

$$\sum_s (t_s \vec{p}_s - \vec{r}_s E_s) = t \sum_s \vec{p}_s - \vec{R} \sum_s E_s = \text{const}$$

Полный импульс $\sum\limits_s \vec{p}_s$ и энергия $\sum\limits_s E_s$ сохраняются, поэтому

$$\sum_s \vec{p}_s - \vec{V} \sum_s E_s = 0$$

$$\boxed{\vec{V} = \frac{\sum\limits_s \vec{p}_s}{\sum\limits_s E_s} = \text{const}}$$

Задача

Покажите, что при калибровочном преобразовании

$$A \to A + d\chi$$

где $\chi(x)$ — произвольное скалярное поле, действие $S = \int\limits_A^B (-mds - eA)$ преобразуется как

$$S \to S + e(\chi(x_A) - \chi(x_B))$$

Объясните, почему отсюда следует, что уравнение движения частицы не меняется при калибровочных преобразованиях.

Solution

$$S = \int_A^B (-mds - e(A + d\chi)) = \int_A^B (-mds - eA)) + e(\chi(x_A) - \chi(x_B))$$

Т.е. действие преобразуется как

$$S \to S + e(\chi(x_A) - \chi(x_B))$$

При вариации действия $\delta S = 0$ значения функции χ в точках A и B закреплены:

$$\delta\chi(x_A) = \delta\chi(x_B) = 0$$

Следовательно, уравнения движения никак не изменятся.

Задача

Выведите уравнение $m\frac{du^\mu}{ds} = eF^\mu{}_\nu u^\nu$.

Solution

Запишем действие частицы в электромагнитном поле:

$$S[x] = \int_A^B (-mds - eA_\mu dx^\mu)$$

Распишем ds:

$$ds = \sqrt{dx_\mu dx^\mu} = d\tau\sqrt{\frac{dx_\mu}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau}} = d\tau\sqrt{u_\mu u^\mu}$$

$$S[x] = -\int_A^B d\tau(m\sqrt{u_\mu u^\mu} + eA_\mu u^\mu) \to L = -(m\sqrt{u_\mu u^\mu} + eA_\mu u^\mu)$$

Действие расписано таким образом, поскольку параметром эволюции является собственное время τ. Выбор параметра эволюции фиксируют в виде определённого условия (связи). В действие необходимо внести вклад с множителем Лагранжа λ:

$$S[x] = -\int_A^B d\tau(m\sqrt{u_\mu u^\mu} + eA_\mu u^\mu) + \lambda\int_A^B d\tau(u_\mu u^\mu - 1)$$

$$\frac{\delta S}{\delta\lambda} = u_\mu u^\mu - 1 = 0$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа (выберем $\lambda = 0$):

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial u^\mu} = \frac{\partial L}{\partial x^\mu}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u^\mu} = -m\frac{2u_\mu}{2\sqrt{u_\rho u^\rho}} - eA_\mu(x(\tau)) \to \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial u^\mu} = -m\frac{du_\mu}{\sqrt{u_\rho u^\rho}d\tau} - e\partial_\nu A_\mu\frac{dx^\nu}{d\tau}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = -eu^\nu\partial_\mu A_\nu$$

Подставим в (13.3.3):

$$m\frac{du_\mu}{ds} = eu^\nu\partial_\mu A_\nu - eu^\nu\partial_\nu A_\mu$$

$$m\frac{du_\mu}{ds} = eu^\nu(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = eu^\nu F_{\mu\nu}$$

$$m\frac{du^\mu}{ds} = eF^\mu{}_\nu u^\nu$$

Задача

* Рассмотрите незаряженную частицу во внешнем скалярном поле, которое описывается зависящей от точки массой $m(x)$ в действии $S[x^\mu(\tau)] = \int_A^B(-m(x)ds - eA_\mu dx^\mu)$, зависящей от точки в пространстве-времени. Получите уравнения движения такой частицы. Найдите гамильтониан и обобщенные импульсы. Покажите, что если $m(x) = m_0 + U(x)$, $U(x) \ll m_0$ и если $U(x)$ меняется со временем x_0 достаточно (насколько?) медленно, то в нерелятивистском пределе эти уравнения описывают частицу во внешнем потенциальном поле $U(x)$.

Solution

Поскольку частица не заряжена, то $e = 0$ и её действие:

$$S[x] = -\int\limits_A^B m(x)ds = -\int\limits_A^B d\tau m(x)\sqrt{u_\mu u^\mu} \to L = -m(x)\sqrt{u_\mu u^\mu}$$

Действие записано в аналогичном задаче 1.4 виде.

$$\frac{\partial L}{\partial u^\mu} = -\frac{m(x)u_\mu}{\sqrt{u_\mu u^\mu}} \to \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial u^\mu} = -m(x)\frac{du_\mu}{\sqrt{u_\mu u^\mu}d\tau} - \partial_\nu m(x)\frac{dx^\nu}{\sqrt{u_\mu u^\mu}d\tau}u_\mu$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = -\partial_\mu m(x)\sqrt{u_\mu u^\mu}$$

Подставим в (13.3.3) и получим уравнение движения:

$$m(x)\frac{du_\mu}{ds} = \partial_\mu m(x) - u_\mu u^\nu \partial_\nu m(x)$$

Перепишем действие через координатное время:

$$S[x] = -\int\limits_A^B m(\vec{r},t)ds = -\int\limits_A^B dtm(\vec{r},t)\sqrt{1-\vec{v}^2} \to L = -m(\vec{r},t)\sqrt{1-\vec{v}^2}$$

Обобщённый импульс:

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m(\vec{r},t)\vec{v}}{\sqrt{1-\vec{v}^2}}$$

Гамильтониан:

$$H(\vec{r},\vec{P},t) = \vec{v}\vec{P} - L = \frac{m(\vec{r},t)}{\sqrt{1-\vec{v}^2}} = \sqrt{m(\vec{r},t)^2 + P^2}$$

Подставим $m(x) = m_0 + U(x)$, $U(x) \ll m_0$ в уравнение движения (13.3.3):

$$m_0\frac{du_\mu}{ds} = \partial_\mu U(x) - u_\mu u^\nu \partial_\nu U(x)$$

Перейдём к нерелятивистскому пределу. Для временной компоненты $\mu = 0$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v^2}{2}\right) = \partial_0 U(x) - \frac{1}{1-v^2}(\partial_0 U(x) + v^\alpha \partial_\alpha U(x)), \quad \alpha \in \{1,2,3\}$$

В нерелятивистском пределе все $v^\mu \ll 1$. Получим закон сохранения энергии:

$$\frac{dT}{dt} = -v^\alpha \partial_\alpha U(x)$$

Для пространственной компоненты $\mu \in \{1,2,3\}$:

$$-\frac{m_0}{1-v^2}\frac{dv^\mu}{dt} = \partial^\mu U(x) + \frac{v^\mu}{1-v^2}(\partial_0 U(x) + v^\alpha \partial_\alpha U(x)), \quad \alpha \in \{1,2,3\}$$

Последнее слагаемое $v^\alpha \partial_\alpha U(x)\frac{v^\mu}{1-v^2} \ll \partial^\mu U(x)$. Второе слагаемое можно не учитывать в случае:

$$v^\mu \partial_0 U(x) \ll \partial^\mu U(x)$$

Внешнее поле создают некоторые тела. Условие (13.3.3) соответствует тому, что скорость этих тел не должна превышать скорости света. Если оно выполняется во время всего движения, то получим II закон Ньютона:

$$m_0\frac{dv^\mu}{dt} = -\partial^\mu U(x)$$

Основные понятия дифференциальной геометрии и пространство-время

Задача

Рассмотрим две системы координат $\{x^\mu\}$ и $\{x'^\nu = f^\nu(x^\mu)\}$ в некоторой области многообразия M. Пусть $a = a^\mu \partial_\mu = a'^\mu \partial'_\mu \in TM_{x_0}$. Получите закон преобразования компонент вектора

$$a'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} a^\nu$$

Частные производные здесь понимаются в следующем смысле: $\partial_\nu x'^\mu = f^\mu{}_{,\nu}(x^\nu)|_{x^\nu = x_0^\nu}$.
Пусть $\omega = \omega_\mu dx^\mu = \omega'_\mu dx'^\mu \in T^*M_{x_0}$. Получите закон преобразования компонент формы

$$\omega'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \omega_\nu$$

Частные производные здесь понимаются в смысле $\partial'_\mu x^\nu = (f^{-1})^\nu{}_{,\mu}(f^\kappa(x^\lambda))|_{x^\lambda = x_0^\lambda}$. Наконец, напишите закон преобразования компонент произвольного тензора $a \in T^m_n M_{x_0}$.

Solution

Производная сложной функции:

$$\partial_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \partial'_\mu$$

$$a^\nu \partial_\nu = a^\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \partial'_\mu = a'^\mu \partial'_\mu$$

$$a'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} a^\nu$$

Посчитаем значение формы на векторе $a = a^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda}$:

$$\omega(a) = \omega_\nu dx^\nu(a) = \omega_\nu dx^\nu \left(a^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \right) = \omega_\nu a^\nu = \omega'_\mu a'^\mu$$

$$\omega'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \omega_\nu$$

Произвольный тензор $a = a^{\kappa_1 \ldots \kappa_m}_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} \partial_{\kappa_1} \ldots \partial_{\kappa_m} dx^{\lambda_1} \ldots dx^{\lambda_n} = a'^{\mu_1 \ldots \mu_m}_{\nu_1 \ldots \nu_n} \partial'_{\mu_1} \ldots \partial'_{\mu_m} d'x^{\nu_1} \ldots d'x^{\nu_n}$. Его закон преобразования:

$$a'^{\mu_1 \ldots \mu_m}_{\nu_1 \ldots \nu_n} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\kappa_1}} \ldots \frac{\partial x'^{\mu_m}}{\partial x^{\kappa_m}} \frac{\partial x^{\lambda_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \ldots \frac{\partial x^{\lambda_n}}{\partial x'^{\nu_n}} a^{\kappa_1 \ldots \kappa_m}_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$$

13.3.4 Problems from Lashkevich 2

Задача

Рассмотрим двумерное аффинное пространство. На этом пространстве имеется естественная связность, в которой $\nabla_\mu = \partial_\mu$ в линейных координатах. Найдите символы Кристоффеля этой связности в полярных координатах $r, \varphi : x^1 = r\cos\varphi, x^2 = r\sin\varphi$.

Solution

$$(\nabla_\sigma a)^\kappa = \partial_\sigma a^\kappa + \Gamma'^\kappa_{\rho\sigma} a^\rho$$

Учтём естественную связность в линейных координатах:

$$\Gamma'^\kappa_{\rho\sigma} = 0$$

Частные производные:

$$\frac{\partial x^1}{\partial r} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi, \quad \frac{\partial x^2}{\partial r} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} = r\cos\varphi$$

$$\partial_r = \partial_1 \frac{\partial x^1}{\partial r} + \partial_2 \frac{\partial x^2}{\partial r} = \cos\varphi \partial_1 + \sin\varphi \partial_2, \quad \partial_\varphi = \partial_1 \frac{\partial x^1}{\partial \varphi} + \partial_2 \frac{\partial x^2}{\partial \varphi} = r(-\sin\varphi \partial_1 + \cos\varphi \partial_2)$$

$$\partial_1 = \partial_r \cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{r}\partial_\varphi, \quad \partial_2 = \sin\varphi \partial_r + \frac{\cos\varphi}{r}\partial_\varphi$$

$$\frac{\partial^2 x^1}{\partial r^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 x^1}{\partial r \partial \varphi} = -\sin\varphi, \quad \frac{\partial^2 x^1}{\partial \varphi^2} = -r\cos\varphi, \quad \frac{\partial^2 x^2}{\partial r^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 x^2}{\partial r \partial \varphi} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial^2 x^2}{\partial \varphi^2} = -r\sin\varphi$$

Определим 8 символов Кристоффеля, используя закон их преобразования при преобразовании координат $x^\mu = x^\mu(x'^\kappa)$:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma'^\kappa_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 x'^\kappa}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa} = \frac{\partial^2 x'^\kappa}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa}$$

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{\partial^2 x^1}{\partial r^2}\partial_1 r + \frac{\partial^2 x^2}{\partial r^2}\partial_2 r = 0$$

$$\Gamma^r_{r\varphi} = \Gamma^r_{\varphi r} = \frac{\partial^2 x^1}{\partial r \partial \varphi}\partial_1 r + \frac{\partial^2 x^2}{\partial r \partial \varphi}\partial_2 r = -\sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi\sin\varphi = 0$$

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 x^1}{\partial \varphi^2}\partial_1 r + \frac{\partial^2 x^2}{\partial \varphi^2}\partial_2 r = -r\cos^2\varphi - r\sin^2\varphi = -r$$

$$\Gamma^\varphi_{rr} = \frac{\partial^2 x^1}{\partial r^2}\partial_1 \varphi + \frac{\partial^2 x^2}{\partial r^2}\partial_2 \varphi = 0$$

$$\Gamma^\varphi_{r\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{\partial^2 x^1}{\partial r \partial \varphi}\partial_1 \varphi + \frac{\partial^2 x^2}{\partial r \partial \varphi}\partial_2 \varphi = \frac{\sin^2\varphi}{r} + \frac{\cos^2\varphi}{r} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 x^1}{\partial \varphi^2}\partial_1 \varphi + \frac{\partial^2 x^2}{\partial \varphi^2}\partial_2 \varphi = \cos\varphi\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi = 0$$

$$\Gamma^r_{rr} = \Gamma^r_{r\varphi} = \Gamma^r_{\varphi r} = \Gamma^\varphi_{rr} = \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} = 0, \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r, \quad \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{1}{r}$$

Задача

Проверьте эквивалентность определений кручения:

$$T(a,b) = \nabla_a b - \nabla_b a - [a,b] \ (\forall a, b \in C^1(TM)) \Leftrightarrow T^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}$$

Solution

Разложим a, b и $T(a,b)$ по базису:

$$a = a^\mu \partial_\mu, \quad b = b^\nu \partial_\nu, \quad T(a,b) = a^\mu b^\nu T^\lambda_{\mu\nu}\partial_\lambda$$

$$\begin{aligned} T(a,b) = \nabla_a b - \nabla_b a - [a,b] = \nabla_{a^\mu\partial_\mu} b - \nabla_{b^\nu\partial_\nu} a - [a^\mu\partial_\mu, b^\nu\partial_\nu] = a^\mu\nabla_\mu b - b^\nu\nabla_\nu a - \\ - a^\mu\partial_\mu(b^\nu\partial_\nu) + b^\nu\partial_\nu(a^\mu\partial_\mu) = a^\mu(\nabla_\mu b)^\lambda\partial_\lambda - b^\nu(\nabla_\nu a)^\lambda\partial_\lambda - a^\mu(\partial_\mu b^\nu)\partial_\nu - a^\mu b^\nu\partial_\mu\partial_\nu + \\ + b^\nu(\partial_\nu a^\mu)\partial_\mu + b^\nu a^\mu\partial_\nu\partial_\mu = a^\mu(\partial_\mu b^\lambda)\partial_\lambda + a^\mu\Gamma^\lambda_{\nu\mu}b^\nu\partial_\lambda - b^\nu(\partial_\nu a^\lambda)\partial_\lambda - b^\nu\Gamma^\lambda_{\mu\nu}a^\mu\partial_\lambda - \\ - a^\mu(\partial_\mu b^\nu)\partial_\nu + b^\nu(\partial_\nu a^\mu)\partial_\mu = a^\mu b^\nu(\Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu})\partial_\lambda \end{aligned} \quad (13.1)$$

Как видно,

$$T^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}$$

Задача

Получите символы Кристоффеля для связности Леви-Чивиты.

Solution

Для согласованной со связностью метрикой $g_{\mu\nu}$ выполняется:

$$(\nabla_\lambda g)_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} g_{\kappa\nu} - \Gamma^\kappa_{\nu\lambda} g_{\mu\kappa} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\nu\mu\lambda} - \Gamma_{\mu\nu\lambda} = 0$$

$$\partial_\mu g_{\kappa\nu} = \Gamma_{\nu\kappa\mu} + \Gamma_{\kappa\nu\mu}, \quad \partial_\nu g_{\kappa\mu} = \Gamma_{\mu\kappa\nu} + \Gamma_{\kappa\mu\nu}, \quad \partial_\kappa g_{\mu\nu} = \Gamma_{\nu\mu\kappa} + \Gamma_{\mu\nu\kappa}$$

Для связности без кручения выполняется:

$$\Gamma^\lambda_{\nu\mu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \to \Gamma_{\lambda\nu\mu} = \Gamma_{\lambda\mu\nu}$$

$$\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu} = \Gamma_{\nu\kappa\mu} + \Gamma_{\kappa\nu\mu} + \Gamma_{\mu\kappa\nu} + \Gamma_{\kappa\mu\nu} - \Gamma_{\nu\mu\kappa} - \Gamma_{\mu\nu\kappa} = 2\Gamma_{\kappa\mu\nu}$$

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{g^{\lambda\kappa}}{2}(\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu})$$

Задача

* Выведите закон преобразования символов Кристоффеля.

Solution

Определение символов Кристоффеля:

$$\nabla_\mu \partial_\nu = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \partial_\lambda$$

Пусть произошло преобразование координат:

$$x^\mu = x^\mu(x'^\nu)$$

$$\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial x'^\sigma} = \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}\partial'_\sigma$$

$$\nabla_\mu \partial_\nu = \nabla_\mu \left(\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}\partial'_\sigma\right) = \partial_\mu\left(\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}\right)\partial_{\sigma'} + \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}\nabla_\mu \partial'_\sigma = \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\partial'_\sigma + \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}\nabla_{\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\partial'_\rho}\partial'_\sigma =$$

$$= \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\sigma}\partial_\lambda + \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\nabla'_\rho \partial'_\sigma = \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\sigma}\partial_\lambda + \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\Gamma'^\kappa_{\rho\sigma}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa}\partial_\lambda \quad (13.2)$$

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma'^\kappa_{\rho\sigma}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 x'^\kappa}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa}$$

Риманова кривизна. Преобразования тензорных полей

Задача

Выведите $f^{\kappa\mu} = \varepsilon^2(b^\kappa c^\mu - b^\mu c^\kappa)$ и покажите, что тензор $f^{\mu\nu}$ определяет площадь этого параллелограмма.

Solution

$$f^{\kappa\mu} = \int\limits_0^1 d\tau \delta\varphi^k(\tau)\delta\dot{\varphi}^\mu(\tau)$$

$$\delta\varphi^\kappa = x^\kappa, \quad \delta\dot{\varphi}^\mu d\tau = dx^\mu$$

где x^κ – координаты кривой. По теореме Стокса:

$$f^{\kappa\mu} = \int\limits_{\partial S} x^\kappa dx^\mu = \int\limits_S dx^\kappa \wedge dx^\mu$$

где $S = \{\beta\varepsilon\vec{b} + \gamma\varepsilon\vec{c} : \beta, \gamma \in [0,1]\}$ – параллелограмм со сторонами εb^κ и εc^κ и $f^{\kappa\mu}$ – проекции его площади на соответствующие плоскости.

$$x^\kappa = \varepsilon\beta b^\kappa + \varepsilon\gamma c^\kappa$$

$$f^{\kappa\mu} = \varepsilon^2 \int\limits_S (b^\kappa d\beta + c^\kappa d\gamma) \wedge (b^\mu d\beta + c^\mu d\gamma) = \varepsilon^2 \int\limits_S (b^\kappa c^\mu - c^\kappa b^\mu) d\beta \wedge d\gamma = \varepsilon^2 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (b^\kappa c^\mu - c^\kappa b^\mu) d\beta d\gamma$$

$$f^{\kappa\mu} = \varepsilon^2 (b^\kappa c^\mu - c^\kappa b^\mu)$$

Задача

Получите $R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} - \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} + \Gamma^\kappa_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu}$ из $R(b,c)a = [\nabla_b, \nabla_c]a - \nabla_{[b,c]}a$. Покажите, что риманов тензор кривизны действительно является тензором.

Solution

Разложим a, b и $R(b,c)a$ по базису:

$$a = a^\lambda \partial_\lambda, \quad b = b^\mu \partial_\mu, \quad c = c^\nu \partial_\nu, \quad R(b,c)a = a^\lambda b^\mu c^\nu R^\kappa_{\lambda\mu\nu} \partial_\kappa$$

$$R(b,c)a = [\nabla_b, \nabla_c]a - \nabla_{[b,c]}a = \nabla_{b^\mu\partial_\mu}\nabla_{c^\nu\partial_\nu}a - \nabla_{c^\nu\partial_\nu}\nabla_{b^\mu\partial_\mu}a - \nabla_{[b^\mu\partial_\mu, c^\nu\partial_\nu]}a =$$
$$= b^\mu\nabla_\mu(c^\nu\nabla_\nu a) - c^\nu\nabla_\nu(b^\mu\nabla_\mu a) - b^\mu(\partial_\mu c^\nu)\nabla_\nu a + c^\nu(\partial_\nu b^\mu)\nabla_\mu a \quad (13.3)$$

$$\nabla_\nu a = (\nabla_\nu a)^\kappa \partial_\kappa = (\partial_\nu a^\kappa)\partial_\kappa + \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} a^\lambda \partial_\kappa, \quad \nabla_\mu a = (\nabla_\mu a)^\kappa \partial_\kappa = (\partial_\mu a^\kappa)\partial_\kappa + \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} a^\lambda \partial_\kappa$$

$$b^\mu\nabla_\mu(c^\nu\nabla_\nu a) = b^\mu(\nabla_\mu(c^\nu\nabla_\nu a))^\kappa\partial_\kappa = b^\mu\partial_\mu((c^\nu\nabla_\nu a)^\kappa)\partial_\kappa + b^\mu\Gamma^\kappa_{\rho\mu}(c^\nu\nabla_\nu a)^\rho\partial_\kappa =$$
$$= b^\mu\partial_\mu c^\nu(\nabla_\nu a)^\kappa\partial_\kappa + b^\mu c^\nu\partial_\mu(\partial_\nu a^\kappa + \Gamma^\kappa_{\lambda\nu}a^\lambda)\partial_\kappa + b^\mu c^\nu\Gamma^\kappa_{\rho\mu}\partial_\nu a^\rho\partial_\kappa + a^\lambda b^\mu c^\nu\Gamma^\kappa_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\lambda\nu}\partial_\kappa =$$
$$= b^\mu\partial_\mu c^\nu(\nabla_\nu a)^\kappa\partial_\kappa + b^\mu c^\nu\partial_\mu(\partial_\nu a^\kappa) + a^\lambda b^\mu c^\nu\partial_\mu\Gamma^\kappa_{\lambda\nu}\partial_\kappa + b^\mu c^\nu(\Gamma^\kappa_{\rho\nu}\partial_\mu + \Gamma^\kappa_{\rho\mu}\partial_\nu)a^\rho\partial_\kappa + a^\lambda b^\mu c^\nu\Gamma^\kappa_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\lambda\nu}\partial_\kappa$$

По аналогии запишем $c^\nu\nabla_\nu(b^\mu\nabla_\mu a)$:

$$c^\nu\nabla_\nu(b^\mu\nabla_\mu a) = c^\nu\partial_\nu c^\mu(\nabla_\mu a)^\kappa\partial_\kappa + b^\mu c^\nu\partial_\nu(\partial_\mu a^\kappa) + a^\lambda b^\mu c^\nu\partial_\nu\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}\partial_\kappa +$$
$$+ b^\mu c^\nu(\Gamma^\kappa_{\rho\mu}\partial_\nu + \Gamma^\kappa_{\rho\nu}\partial_\mu)a^\rho\partial_\kappa + a^\lambda b^\mu c^\nu\Gamma^\kappa_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu}\partial_\kappa \quad (13.4)$$

$$R(b,c)a = a^\lambda b^\mu c^\nu(\partial_\mu\Gamma^\kappa_{\lambda\nu} - \partial_\nu\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} + \Gamma^\kappa_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu})\partial_\kappa$$

Как видно,

$$R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\kappa_{\lambda\nu} - \partial_\nu\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} + \Gamma^\kappa_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu}$$

Риманов тензор по определению зависит только от точки (но не от её окрестности). Для доказательства того, что риманов тензор им является, покажем, что $R(b,c)a$ линеен по a, b и c:

$$R(b,c)(fa) = [\nabla_b, \nabla_c](fa) - \nabla_{[b,c]}(fa) = \nabla_b(f\nabla_c a + a\nabla_c f) - \nabla_c(f\nabla_b a + a\nabla_b f) - f\nabla_{[b,c]}a - a\nabla_{[b,c]}f =$$
$$= (f\nabla_b\nabla_c + \nabla_b f\nabla_c + \nabla_c f\nabla_b + \nabla_b\nabla_c f - f\nabla_c\nabla_b - \nabla_c f\nabla_b - \nabla_b f\nabla_c - \nabla_b\nabla_c f - f\nabla_{[b,c]} - \nabla_{[b,c]})a =$$
$$= f([\nabla_b, \nabla_c] - \nabla_{[b,c]})a = fR(b,c)a \quad (13.5)$$

$$R(fb,c)a = [\nabla_{fb}, \nabla_c]a - \nabla_{[fb,c]}a = f\nabla_b\nabla_c a - \nabla_c(f\nabla_b a) - \nabla_{f[b,c]-c(f)b}a = (f\nabla_b\nabla_c - f\nabla_c\nabla_b -$$
$$- \nabla_c f\nabla_b - f\nabla_{[b,c]} + c(f)\nabla_b)a = f([\nabla_b, \nabla_c] - \nabla_{[b,c]})a = fR(b,c)a \quad (13.6)$$

Линейность по c проверяется аналогично.

13.3.5 Problems from Lashkevich 3

Задача

Выведите алгебраические тождества $R^1_{234} = -R^1_{243}$, $R^1_{234} + R^1_{342} + R^1_{423} = 0$. Докажите, что для связности Леви-Чивиты выполняется тождество $R_{1234} = R_{3412}$.

Solution

$$R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu} + \Gamma^{\kappa}_{\rho\mu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} = -R^{\kappa}_{\lambda\nu\mu}$$

$$R^{1}_{234} = -R^{1}_{243}$$

$$R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu} + R^{\kappa}_{\mu\nu\lambda} + R^{\kappa}_{\nu\lambda\mu} = \partial_\mu \Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu} + \Gamma^{\kappa}_{\rho\mu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} + \partial_\nu \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} - \partial_\lambda \Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\kappa}_{\rho\lambda}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} + \partial_\nu \Gamma^{\kappa}_{\nu\lambda} - \partial_\mu \Gamma^{\kappa}_{\nu\lambda} + \Gamma^{\kappa}_{\rho\lambda}\Gamma^{\rho}_{\nu\mu} - \Gamma^{\kappa}_{\rho\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \quad (13.7)$$

В случае связности без кручения:

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} = \Gamma^{\kappa}_{\nu\mu}$$

Таким образом, получаем *алгебраическое тождество Бьянки*:

$$R^{1}_{234} + R^{1}_{342} + R^{1}_{423} = 0$$

$$R_{\alpha\lambda\mu\nu} = g_{\alpha\kappa} R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu} = g_{\alpha\kappa}(\partial_\mu \Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu} + \Gamma^{\kappa}_{\rho\mu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu})$$

Для связности Леви-Чивиты выполняется (см. 13.3.4):

$$\Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu} = \frac{g^{\kappa\alpha}}{2}(\partial_\lambda g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\lambda} - \partial_\alpha g_{\lambda\nu})$$

Символы Кристоффеля I рода:

$$\Gamma_{\mu,\lambda\nu} = g_{\mu\kappa}\Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\mu g_{\lambda\nu})$$

$$\Gamma_{\mu,\lambda\nu} + \Gamma_{\nu,\lambda\mu} = \frac{1}{2}(\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\mu g_{\lambda\nu}) + \frac{1}{2}(\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}) = \partial_\lambda g_{\mu\nu}$$

$$\begin{aligned} R_{\alpha\lambda\mu\nu} &= \partial_\mu(g_{\alpha\kappa}\Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu}) - \Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu}\partial_\mu g_{\alpha\kappa} - \partial_\nu(g_{\alpha\kappa}\Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu}) + \Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu}\partial_\nu g_{\alpha\kappa} + g_{\alpha\kappa}\Gamma^{\kappa}_{\rho\mu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} - g_{\alpha\kappa}\Gamma^{\kappa}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} = \\ &= \partial_\mu \Gamma_{\alpha,\lambda\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu}(\Gamma_{\alpha,\mu\kappa} + \Gamma_{\kappa,\mu\alpha}) - \partial_\nu \Gamma_{\alpha,\lambda\mu} + \Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu}(\Gamma_{\alpha,\nu\kappa} + \Gamma_{\kappa,\nu\alpha}) + \Gamma_{\alpha,\rho\mu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} - \Gamma_{\alpha,\rho\nu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} = \\ &= \partial_\mu \Gamma_{\alpha,\lambda\nu} - \partial_\nu \Gamma_{\alpha,\lambda\mu} - \Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu}\Gamma_{\kappa,\mu\alpha} + \Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu}\Gamma_{\kappa,\nu\alpha} \end{aligned} \quad (13.8)$$

$$R_{\alpha\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\mu(\partial_\lambda g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\lambda} - \partial_\alpha g_{\lambda\nu}) - \frac{1}{2}\partial_\nu(\partial_\lambda g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\alpha\lambda} - \partial_\alpha g_{\lambda\mu}) + g_{\kappa\rho}(\Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\alpha} - \Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\alpha})$$

$$R_{\alpha\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\lambda g_{\alpha\nu} - \partial_\mu\partial_\alpha g_{\lambda\nu} - \partial_\nu\partial_\lambda g_{\alpha\mu} + \partial_\nu\partial_\alpha g_{\lambda\mu}) + g_{\kappa\rho}(\Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\alpha} - \Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\alpha})$$

Отсюда видно, что

$$R_{1234} = R_{3412}$$

Задача

Покажите, что в случае связности без кручения в окрестности любой точки x_0 многообразия можно выбрать систему координат, в которой все символы Кристоффеля в этой точке обращаются в нуль: $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x_0) = 0$. Затем докажите, что в точке x_0 выполняется дифференциальное тождество Бьянки $R^{1}_{234;5} + R^{1}_{245;3} + R^{1}_{253;4} = 0$.

Solution

Пусть точка x_0 – начало координат и символы Кристоффеля в нём:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x_0) = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$$

Выберем в окрестности x_0 систему координат:

$$x'^{\lambda} = x^{\lambda} + \frac{1}{2}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu}$$

$$\frac{\partial^2 x'^\kappa}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa} = \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\delta^\lambda_\kappa = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}$$

Из закона преобразования символов Кристоффеля (см. 13.3.4)

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma'^\kappa_{\rho\sigma}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa}\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 x'^\kappa}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa}$$

следует, что все $\Gamma'^\kappa_{\rho\sigma} = 0$.
Перейдём в систему координат, в которой все $\Gamma^\kappa_{\rho\sigma} = 0$. Продифференцируем тензор кривизны Римана (см. 13.3.4):

$$\nabla_\rho R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = \partial_\rho R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = \partial_\rho(\partial_\mu\Gamma^\kappa_{\lambda\nu} - \partial_\nu\Gamma^\kappa_{\lambda\mu})$$
$$\nabla_\mu R^\kappa_{\lambda\nu\rho} = \partial_\mu R^\kappa_{\lambda\nu\rho} = \partial_\mu(\partial_\nu\Gamma^\kappa_{\lambda\rho} - \partial_\rho\Gamma^\kappa_{\lambda\nu})$$
$$\nabla_\nu R^\kappa_{\lambda\rho\mu} = \partial_\nu R^\kappa_{\lambda\rho\mu} = \partial_\nu(\partial_\rho\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} - \partial_\mu\Gamma^\kappa_{\lambda\rho})$$
$$\nabla_\rho R^\kappa_{\lambda\mu\nu} + \nabla_\mu R^\kappa_{\lambda\nu\rho} + \nabla_\nu R^\kappa_{\lambda\rho\mu} = 0$$
$$R^1_{234;5} + R^1_{245;3} + R^1_{253;4} = 0$$

Задача

* Докажите тождества $\delta_\xi(t\otimes s) = \delta_\xi t\otimes s + t\otimes\delta_\xi s$ и $[\delta_\xi,\delta_\eta]t = \delta_{[\xi,\eta]}t$.

Solution

Производная Ли:

$$\delta_\xi t = t'(x'^\bullet) - t(x'^\bullet), \quad \delta_\xi s = s'(x'^\bullet) - s(x'^\bullet)$$

$$\delta_\xi(t\otimes s) = t'\otimes s'(x'^\bullet) - t\otimes s(x'^\bullet) = t'(x'^\bullet)\otimes s'(x'^\bullet) - t(x'^\bullet)\otimes s'(x'^\bullet) + t(x'^\bullet)\otimes s'(x'^\bullet) - t(x'^\bullet)\otimes s(x'^\bullet) =$$
$$= (t'(x'^\bullet) - t(x'^\bullet))\otimes s'(x'^\bullet) + t(x'^\bullet)\otimes(s'(x'^\bullet) - s(x'^\bullet)) = \delta_\xi t\otimes s(x'^\bullet) + t\otimes\delta_\xi s(x'^\bullet) \quad (13.9)$$

$$\delta_\xi(t\otimes s) = \delta_\xi t\otimes s + t\otimes\delta_\xi s$$

Покажем выполнение $[\delta_\xi,\delta_\eta]t = \delta_{[\xi,\eta]}t$ для функции $t = f$:

$$\delta_\xi f = \xi^\mu\partial_\mu f, \quad \delta_\eta f = \eta^\mu\partial_\mu f$$
$$\delta_\xi\delta_\eta f = \delta_\xi(\eta^\mu\partial_\mu f) = \xi^\nu\partial_\nu(\eta^\mu\partial_\mu f) = \xi^\nu\partial_\nu\eta^\mu\partial_\mu f + \xi^\nu\eta^\mu\partial_\nu\partial_\mu f$$
$$[\delta_\xi,\delta_\eta]f = (\xi^\nu\partial_\nu\eta^\mu\partial_\mu - \xi^\mu\partial_\mu\eta^\nu\partial_\nu)f = \delta_{[\xi,\eta]}f$$

Покажем выполнение $[\delta_\xi,\delta_\eta]t = \delta_{[\xi,\eta]}t$ для векторного поля $t = a = a^\mu\partial_\mu$:

$$\delta_\xi a^\mu = \partial_\lambda a^\mu\xi^\lambda - a^\lambda\partial_\lambda\xi^\mu \to \delta_\xi a = [\xi, a]$$

$$[\delta_\xi,\delta_\eta]a = \delta_\xi[\eta,a] - \delta_\eta[\xi,a] = [\xi,\eta a - a\eta] - [\eta,\xi a - a\xi] = \xi\eta a - \xi a\eta - \eta a\xi + a\eta\xi -$$
$$- \eta\xi a + \eta a\xi + \xi a\eta - a\xi\eta = [\xi,\eta]a - a[\xi,\eta] = [[\xi,\eta],a] = \delta_{[\xi,\eta]}a \quad (13.10)$$

Покажем выполнение $[\delta_\xi,\delta_\eta]t = \delta_{[\xi,\eta]}t$ для формы $t = \alpha = \alpha_\mu dx^\mu$:

$$\delta_\xi a_\mu = \partial_\lambda a_\mu\xi^\lambda + a_\lambda\partial_\mu\xi^\lambda$$

$$[\delta_\xi,\delta_\eta]\alpha_\mu = \delta_\xi(\partial_\lambda a_\mu\eta^\lambda + \alpha_\lambda\partial_\mu\eta^\lambda) - \delta_\eta(\partial_\lambda a_\mu\xi^\lambda + \alpha_\lambda\partial_\mu\xi^\lambda) = \partial_\kappa(\partial_\lambda a_\mu\eta^\lambda + \alpha_\lambda\partial_\mu\eta^\lambda)\xi^\kappa +$$
$$+ (\partial_\lambda a_\kappa\eta^\lambda + \alpha_\lambda\partial_\kappa\eta^\lambda)\partial_\mu\xi^\kappa - \partial_\kappa(\partial_\lambda a_\mu\xi^\lambda + \alpha_\lambda\partial_\mu\xi^\lambda)\eta^\kappa - (\partial_\lambda a_\kappa\xi^\lambda + \alpha_\lambda\partial_\kappa\xi^\lambda)\partial_\mu\eta^\kappa =$$
$$= \partial_\lambda a_\mu\partial_\kappa\eta^\lambda\xi^\kappa + a_\lambda\partial_\kappa\partial_\mu\eta^\lambda\xi^\kappa + a_\lambda\partial_\kappa\eta^\lambda\partial_\mu\xi^\kappa - \partial_\lambda a_\mu\partial_\kappa\xi^\lambda\eta^\kappa - a_\lambda\partial_\kappa\partial_\mu\xi^\lambda\eta^\kappa - a_\lambda\partial_\kappa\xi^\lambda\partial_\mu\eta^\kappa =$$
$$= \partial_\lambda a_\mu(\partial_\kappa\eta^\lambda\xi^\kappa - \partial_\kappa\xi^\lambda\eta^\kappa) + a_\lambda\partial_\mu(\partial_\kappa\eta^\lambda\xi^\kappa - \partial_\kappa\xi^\lambda\eta^\kappa) = \delta_{[\xi,\eta]}a_\mu \quad (13.11)$$

Покажем выполнение правила Лейбница $[\delta_\xi,\delta_\eta]$ (для $\delta_{[\xi,\eta]}$ равенство уже показано):

$$[\delta_\xi,\delta_\eta](t\otimes s) = \delta_\xi\delta_\eta(t\otimes s) - \delta_\eta\delta_\xi(t\otimes s) = \delta_\xi(\delta_\eta t\otimes s + t\otimes\delta_\eta s) - \delta_\eta(\delta_\xi t\otimes s + t\otimes\delta_\xi s) =$$
$$= \delta_\xi\delta_\eta t\otimes s + \delta_\eta t\otimes\delta_\xi s + \delta_\xi t\otimes\delta_\eta s + t\otimes\delta_\xi\delta_\eta s - \delta_\eta\delta_\xi t\otimes s - \delta_\xi t\otimes\delta_\eta s - \delta_\eta t\otimes\delta_\xi s - t\otimes\delta_\eta\delta_\xi s =$$
$$= \delta_\xi\delta_\eta t\otimes s + t\otimes\delta_\xi\delta_\eta s - \delta_\eta\delta_\xi t\otimes s - t\otimes\delta_\eta\delta_\xi s = [\delta_\xi,\delta_\eta]t\otimes s + t\otimes[\delta_\xi,\delta_\eta]s \quad (13.12)$$

Любой тензор можно представить как сумму тензорных произведений векторных полей и ковекторных полей и верно правило Лейбница, следовательно утверждение верно для любого тензора t (по индукции).

$$[\delta_\xi,\delta_\eta]t = \delta_{[\xi,\eta]}t$$

Частицы в искривленном пространстве-времени

Задача

Получите $\ddot{x}^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \frac{e}{m}F^\lambda{}_\kappa\dot{x}^\kappa$ из действия $S[x] = \int\limits_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau(-m\sqrt{g(\dot{x},\dot{x})} - eA(\dot{x}))$ при условии $\frac{d}{d\tau}(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu) = 0$. В обратную сторону покажите, что на любых решениях уравнения $\ddot{x}^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \frac{e}{m}F^\lambda{}_\kappa\dot{x}^\kappa$ выполняется условие $\frac{d}{d\tau}(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu) = 0$.

Solution

Наложим калибровочное условие

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = C^2 = 1$$

В действие необходимо внести вклад с множителем Лагранжа λ:

$$S[x] = \int\limits_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau(-m\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} - eA_\mu\dot{x}^\mu) + \lambda\int\limits_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu - 1)$$

$$\frac{\delta S}{\delta\lambda} = \int\limits_{\tau_A}^{\tau_B} d\tau(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu - 1) = 0 \to g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 1$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа (выберем $\lambda = 0$):

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\alpha} = -m\frac{g_{\alpha\nu}\dot{x}^\nu}{\sqrt{g_{\rho\sigma}\dot{x}^\sigma\dot{x}^\rho}} - eA_\alpha = -m\dot{x}_\alpha - eA_\alpha \to \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\alpha} = -m\ddot{x}_\alpha - e\dot{x}^\kappa\partial_\kappa A_\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = -\frac{m\dot{x}^\nu\dot{x}^\mu}{2\sqrt{g_{\rho\sigma}\dot{x}^\sigma\dot{x}^\rho}}\partial_\alpha g_{\mu\nu} - e\dot{x}^\kappa\partial_\alpha A_\kappa = -\frac{m\dot{x}^\nu\dot{x}^\mu}{2}\partial_\alpha g_{\mu\nu} - e\dot{x}^\kappa\partial_\alpha A_\kappa$$

$$m\ddot{x}_\alpha - m\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\frac{\partial_\alpha g_{\mu\nu}}{2} = eF_{\alpha\kappa}\dot{x}^\kappa$$

$$\ddot{x}_\alpha = \frac{d(g_{\alpha\mu}\dot{x}^\mu)}{d\tau} = g_{\alpha\mu}\ddot{x}^\mu + \dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\partial_\nu g_{\alpha\mu}$$

$$g_{\alpha\mu}\ddot{x}^\mu + \dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\left(\partial_\nu g_{\alpha\mu} - \frac{\partial_\alpha g_{\mu\nu}}{2}\right) = \frac{e}{m}F_{\alpha\kappa}\dot{x}^\kappa$$

$$\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\partial_\nu g_{\alpha\mu} = \dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\partial_\mu g_{\alpha\nu}$$

$$\delta^\lambda_\mu\ddot{x}^\mu + \dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\frac{g^{\alpha\lambda}}{2}(\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) = \frac{e}{m}F^\lambda{}_\kappa\dot{x}^\kappa$$

Для связности Леви-Чивиты выполняется (см. 13.3.4):

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{g^{\lambda\kappa}}{2}(\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu})$$

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \frac{e}{m}F^\lambda{}_\kappa\dot{x}^\kappa$$

Покажем, что на любых решениях этого уравнения выполняется условие $\frac{d}{d\tau}(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu) = 0$:

$$\frac{d}{d\tau}(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu) = 2g_{\mu\nu}\ddot{x}^\mu\dot{x}^\nu + \dot{x}^\lambda\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\partial_\lambda g_{\mu\nu}$$

Подтавим $\ddot{x}^\mu$ из уравнения:

$$\frac{d}{d\tau}(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu) = 2g_{\mu\nu}\left(\frac{e}{m}F^\mu{}_\kappa\dot{x}^\kappa - \Gamma^\mu_{\lambda\sigma}\dot{x}^\lambda\dot{x}^\sigma\right)\dot{x}^\nu + \dot{x}^\lambda\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\partial_\lambda g_{\mu\nu}$$

Заметим, что

$$g_{\mu\nu}F^{\mu}{}_{\kappa}\dot{x}^{\kappa}\dot{x}^{\nu}=0$$

как свёртка симметричного и антисимметричного тензоров.

$$\frac{d}{d\tau}(g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu})=-2g_{\mu\nu}\Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma}\dot{x}^{\lambda}\dot{x}^{\sigma}\dot{x}^{\nu}+\dot{x}^{\lambda}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}\partial_{\lambda}g_{\mu\nu}$$

Для связности Леви-Чивиты выполняется (см. 13.3.4):

$$\Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma}=\frac{g^{\mu\kappa}}{2}(\partial_{\lambda}g_{\kappa\sigma}+\partial_{\sigma}g_{\kappa\lambda}-\partial_{\kappa}g_{\lambda\sigma})$$

$$\frac{d}{d\tau}(g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu})=-2g_{\mu\nu}\frac{g^{\mu\kappa}}{2}(\partial_{\lambda}g_{\kappa\sigma}+\partial_{\sigma}g_{\kappa\lambda}-\partial_{\kappa}g_{\lambda\sigma})\dot{x}^{\lambda}\dot{x}^{\sigma}\dot{x}^{\nu}+\dot{x}^{\lambda}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}\partial_{\lambda}g_{\mu\nu}=$$
$$=-\delta^{\kappa}_{\nu}(\partial_{\lambda}g_{\kappa\sigma}+\partial_{\sigma}g_{\kappa\lambda}-\partial_{\kappa}g_{\lambda\sigma})\dot{x}^{\lambda}\dot{x}^{\sigma}\dot{x}^{\nu}+\dot{x}^{\lambda}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}\partial_{\lambda}g_{\mu\nu}=-(\partial_{\lambda}g_{\nu\sigma}+\partial_{\sigma}g_{\nu\lambda}-\partial_{\nu}g_{\lambda\sigma})\dot{x}^{\lambda}\dot{x}^{\sigma}\dot{x}^{\nu}+\dot{x}^{\lambda}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}\partial_{\lambda}g_{\mu\nu}=$$
$$=(\partial_{\nu}g_{\lambda\sigma}-\partial_{\sigma}g_{\nu\lambda})\dot{x}^{\lambda}\dot{x}^{\sigma}\dot{x}^{\nu}=0 \quad (13.13)$$

Задача

Найдите матрицу $A_{\mu\nu}=\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^{\mu}\partial\dot{x}^{\nu}}\right)$ для действия $S[x]=\int\limits_{\tau_A}^{\tau_B}d\tau(-m\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}}-eA_{\mu}\dot{x}^{\mu})$ и покажите, что она вырождена в направлении вектора $\dot{x}: A_{\mu\nu}\dot{x}^{\nu}=0$.

Solution

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^{\mu}}=-m\frac{g_{\mu\nu}\dot{x}^{\nu}}{\sqrt{g_{\rho\sigma}\dot{x}^{\sigma}\dot{x}^{\rho}}}-eA_{\mu}$$

$$A_{\mu\nu}=\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^{\mu}\partial\dot{x}^{\nu}}=-m\frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{g_{\rho\sigma}\dot{x}^{\sigma}\dot{x}^{\rho}}}+m\frac{g_{\mu\kappa}\dot{x}^{\kappa}g_{\lambda\nu}\dot{x}^{\lambda}}{(g_{\rho\sigma}\dot{x}^{\sigma}\dot{x}^{\rho})^{\frac{3}{2}}}=-m\frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{g_{\rho\sigma}\dot{x}^{\sigma}\dot{x}^{\rho}}}+m\frac{\dot{x}_{\mu}\dot{x}_{\nu}}{(g_{\rho\sigma}\dot{x}^{\sigma}\dot{x}^{\rho})^{\frac{3}{2}}}$$

$$A_{\mu\nu}=\frac{m}{(g_{\rho\sigma}\dot{x}^{\sigma}\dot{x}^{\rho})^{\frac{3}{2}}}(\dot{x}_{\mu}\dot{x}_{\nu}-g_{\mu\nu}\dot{x}_{\rho}\dot{x}^{\rho})$$

$$A_{\mu\nu}\dot{x}^{\nu}=\frac{m}{(g_{\rho\sigma}\dot{x}^{\sigma}\dot{x}^{\rho})^{\frac{3}{2}}}(\dot{x}_{\mu}\dot{x}_{\nu}\dot{x}^{\nu}-\dot{x}_{\mu}\dot{x}_{\rho}\dot{x}^{\rho}))=0$$

6 Т.е. матрица $A_{\mu\nu}$ вырождена в направлении вектора $\dot{x}$.

Задача

Покажите, что при $\alpha=\text{const}$ из $\dot{P}_{\mu}=-\frac{\partial H_{\alpha}}{\partial x^{\mu}}=-\alpha(\partial_{\mu}g^{\lambda\nu}(P_{\lambda}+eA_{\lambda})+2eg^{\lambda\nu}\partial_{\mu}A_{\lambda})(P_{\nu}+eA_{\nu})$, $\dot{x}^{\mu}=\frac{\partial H_{\alpha}}{\partial P_{\mu}}=2\alpha g^{\mu\nu}(P_{\nu}+eA_{\nu})$ следует уравнение $\ddot{x}^{\lambda}+\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}=\frac{e}{m}F^{\lambda}{}_{\kappa}\dot{x}^{\kappa}$.

Solution

$$\ddot{x}^{\mu}=2\alpha\dot{x}^{\lambda}\partial_{\lambda}g^{\mu\nu}(P_{\nu}+eA_{\nu})+2\alpha g^{\mu\nu}(\dot{P}_{\nu}+e\dot{x}^{\lambda}\partial_{\lambda}A_{\nu})$$

Подставим $\dot{x}^{\lambda}=2\alpha(P^{\lambda}+eA^{\lambda})$ и $\dot{P}_{\nu}=-\alpha(\partial_{\nu}g^{\lambda\kappa}(P_{\lambda}+eA_{\lambda})+2eg^{\lambda\kappa}\partial_{\nu}A_{\lambda})(P_{\kappa}+eA_{\kappa})$:

$$\ddot{x}^{\mu}=\dot{x}_{\nu}\dot{x}^{\lambda}\partial_{\lambda}g^{\mu\nu}+2\alpha g^{\mu\nu}(-\partial_{\nu}g^{\lambda\kappa}\frac{\dot{x}_{\lambda}\dot{x}_{\kappa}}{4\alpha}-eg^{\lambda\kappa}\partial_{\nu}A_{\lambda}\dot{x}_{\kappa}+e\dot{x}^{\lambda}\partial_{\lambda}A_{\nu})=\dot{x}_{\nu}\dot{x}^{\lambda}\partial_{\lambda}g^{\mu\nu}+2\alpha g^{\mu\nu}(-\partial_{\nu}g^{\lambda\kappa}\frac{\dot{x}_{\lambda}\dot{x}_{\kappa}}{4\alpha}+e\dot{x}^{\lambda}F_{\lambda\nu})$$

$$\ddot{x}^{\mu}=\dot{x}^{\kappa}\dot{x}^{\lambda}g_{\kappa\nu}\partial_{\lambda}g^{\mu\nu}-\frac{\dot{x}^{\lambda}\dot{x}^{\kappa}}{2}g^{\mu\nu}\partial_{\nu}g_{\lambda\kappa}-2\alpha e\dot{x}^{\lambda}F^{\mu}{}_{\lambda}$$

$$\ddot{x}^{\mu}=\dot{x}^{\kappa}\dot{x}^{\lambda}\partial_{\lambda}(g_{\kappa\nu}g^{\mu\nu})-\dot{x}^{\kappa}\dot{x}^{\lambda}g^{\mu\nu}\partial_{\lambda}g_{\kappa\nu}-\frac{\dot{x}^{\lambda}\dot{x}^{\kappa}}{2}g^{\mu\nu}\partial_{\nu}g_{\lambda\kappa}-2\alpha eg^{\mu\nu}e\dot{x}^{\lambda}F^{\mu}{}_{\lambda}$$

$$\ddot{x}^\mu = -\dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda(-g^{\mu\nu}\partial_\lambda g_{\kappa\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\nu g_{\lambda\kappa}) - 2\alpha e \dot{x}^\lambda F^\mu{}_\lambda$$

$$\ddot{x}^\mu = -\dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda \frac{g^{\mu\nu}}{2}(-\partial_\lambda g_{\kappa\nu} - \partial_\nu g_{\kappa\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\kappa}) - 2\alpha e \dot{x}^\lambda F^\mu{}_\lambda$$

Выберем $\alpha = -\frac{1}{2m}$.

$$\ddot{x}^\mu = -\dot{x}^\kappa \dot{x}^\lambda \Gamma^\mu_{\kappa\lambda} + \dot{x}^\lambda F^\mu{}_\lambda \frac{e}{m}$$

Задача

Рассмотрим двумерную поверхность в пространстве-времени, заданную гладкой функцией $x = \varphi(\tau, \sigma)$ двух вещественных параметров. При каждом данном значении σ функция φ задает кривую $\varphi(\cdot, \sigma)$, а при каждом значении τ – кривую $\varphi(\tau, \cdot)$. Обозначим через $\dot{\varphi}(\tau,\sigma) = \frac{\partial \varphi^\mu(\tau,\sigma)}{\partial \tau}$, $\varphi'(\tau,\sigma) = \frac{\partial \varphi^\mu(\tau,\sigma)}{\partial \sigma}\partial_\mu$ касательные к двум семействам кривых – при данных σ и при данных τ. Покажите, что для связности Леви-Чивиты

$$\nabla_{\dot{\varphi}}\varphi' = \nabla_{\varphi'}\dot{\varphi}$$

Solution

Гладким образом продолжим векторы: выберем в окрестности точки систему координат $x_0 = \tau$, $x_1 = \sigma$, $x_2 = ... = x_{d-1} = 0$. Распишем $\nabla_{\dot{\varphi}}\varphi'$ и $\nabla_{\varphi'}\dot{\varphi}$. Воспользуемся обозначениями в условии:

$$\nabla_{\dot{\varphi}}\varphi' = \nabla_{\frac{\partial\varphi^\mu}{\partial\tau}\partial_\mu}\left(\frac{\partial\varphi^\nu}{\partial\sigma}\partial_\nu\right) = \frac{\partial\varphi^\mu}{\partial\tau}\left(\nabla_\mu\frac{\partial\varphi^\nu}{\partial\sigma}\right)\partial_\nu + \frac{\partial\varphi^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial\varphi^\nu}{\partial\sigma}\nabla_\mu\partial_\nu = \frac{\partial\varphi^\mu}{\partial\tau}\partial_\mu\left(\frac{\partial\varphi^\nu}{\partial\sigma}\right)\partial_\nu + \\ + \frac{\partial\varphi^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial\varphi^\nu}{\partial\sigma}\Gamma^\lambda_{\nu\mu}\partial_\lambda \quad (13.14)$$

$$\nabla_{\varphi'}\dot{\varphi} = \nabla_{\frac{\partial\varphi^\nu}{\partial\sigma}\partial_\nu}\left(\frac{\partial\varphi^\mu}{\partial\tau}\partial_\mu\right) = \frac{\partial\varphi^\nu}{\partial\sigma}\left(\nabla_\nu\frac{\partial\varphi^\mu}{\partial\tau}\right)\partial_\mu + \frac{\partial\varphi^\nu}{\partial\tau}\frac{\partial\varphi^\mu}{\partial\sigma}\nabla_\nu\partial_\mu = \frac{\partial\varphi^\nu}{\partial\sigma}\partial_\nu\left(\frac{\partial\varphi^\mu}{\partial\tau}\right)\partial_\mu + \\ + \frac{\partial\varphi^\nu}{\partial\tau}\frac{\partial\varphi^\mu}{\partial\sigma}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\partial_\lambda \quad (13.15)$$

Покажем, что выражения (13.14) и (13.15) равны.

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$$

$$\frac{\partial\varphi^\nu}{\partial\sigma}\partial_\nu\left(\frac{\partial\varphi^\mu}{\partial\tau}\right)\partial_\mu = \frac{\partial\varphi^\mu}{\partial\sigma}\partial_\mu\left(\frac{\partial\varphi^\nu}{\partial\tau}\right)\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial\varphi^\nu}{\partial\tau}\right)\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\varphi^\nu}{\partial\sigma}\right)\partial_\nu = \frac{\partial\varphi^\mu}{\partial\tau}\partial_\mu\left(\frac{\partial\varphi^\nu}{\partial\sigma}\right)\partial_\nu$$

Таким образом,

$$\nabla_{\dot{\varphi}}\varphi' = \nabla_{\varphi'}\dot{\varphi}$$

13.3.6 Problems from Lashkevich 4

Задача

* Приливные силы. В условиях предыдущей задачи предположим, что кривые первого сорта являются геодезическими с собственным временем $\tau : \nabla_{\dot{\varphi}}\dot{\varphi} = 0$. Можно сказать, что вектор $\varphi'(\tau,\sigma)d\sigma$ соединяет две соседние геодезические в данный момент собственного времени τ. Таким образом, вторая ковариантная производная по τ будет давать относительное ускорение соответствующих материальных точек. Докажите, что

$$\nabla^2_{\dot{\varphi}}\varphi' = R(\dot{\varphi}, \varphi')\dot{\varphi}$$

Solution

Распишем $R(\dot{\varphi}, \varphi')\dot{\varphi}$:

$$R(\dot{\varphi}, \varphi')\dot{\varphi} = [\nabla_{\dot{\varphi}}, \nabla_{\varphi'}]\dot{\varphi} - \nabla_{[\dot{\varphi},\varphi']}\dot{\varphi} = \nabla_{\dot{\varphi}}\nabla_{\varphi'}\dot{\varphi} - \nabla_{\varphi'}\nabla_{\dot{\varphi}}\dot{\varphi} - \nabla_{[\dot{\varphi},\varphi']}\dot{\varphi}$$

$$[\dot{\varphi}, \varphi'] = \left[\frac{\partial\varphi^\mu}{\partial\tau}\partial_\mu, \frac{\partial\varphi^\nu}{\partial\sigma}\partial_\nu\right] = 0$$

Воспользуемся предыдущей задачей:

$$R(\dot{\varphi}, \varphi')\dot{\varphi} = \nabla^2_{\dot{\varphi}}\varphi'$$

Поля в гравитационном поле. Тензор энергии-импульса

Задача

Покажите, что из симметричности тензора энергии-импульса $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ следует сохранение момента импульса $\dot{J}^{\mu\nu} = 0$.

Solution

Момент импульса:

$$J^{\mu\nu} = \int d^{d-1}x(x^\mu T^{\nu 0} - x^\nu T^{\mu 0})$$

$$\dot{J}^{\mu\nu} = \partial_0 \left(\int d^{d-1}x(x^\mu T^{\nu 0} - x^\nu T^{\mu 0}) \right) = \int d^{d-1}x(\delta_0^\mu T^{\nu 0} - \delta_0^\nu T^{\mu 0} + x^\mu \partial_0 T^{\nu 0} - x^\nu \partial_0 T^{\mu 0})$$

Рассмотрим несколько случаев:

1. $\mu = 0$, $\nu = 0$:
$$J^{00} = \int d^{d-1}x(x^0 T^{00} - x^0 T^{00}) = 0$$

2. $\mu \neq 0$, $\nu = 0$:
$$\dot{J}^{\mu 0} = \int d^{d-1}x(-T^{0\mu} + x^\mu \partial_0 T^{00} - x^0 \partial_0 T^{\mu 0})$$
Воспользуемся тем, что $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$:
$$\partial_0 T^{00} = -\partial_i T^{0i}, \quad i \in \{x^1, ..., x^{d-1}\}$$
$$-\int d^{d-1}x(x^\mu \partial_i T^{0i}) = -\int d^{d-1}x \partial_i (x^\mu T^{0i}) + \int d^{d-1}x(\partial_i x^\mu T^{0i}) = \int d^{d-1}x T^{0\mu}$$
Первое слагаемое обращается в 0, поскольку на бесконечности тензор энергии-импульса обращается в 0.
$$\dot{J}^{\mu 0} = -x^0 \partial_0 P^\mu = 0$$
где в последнем равенстве воспользовались законом сохранения импульса.

3. $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$: Воспользуемся тем, что $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$:
$$\partial_0 T^{\nu 0} = -\partial_i T^{\nu i}, \quad i \in \{x^1, ..., x^{d-1}\}$$

$$\dot{J}^{\mu\nu} = -\int d^{d-1}x(x^\mu \partial_i T^{\nu i} - x^\nu \partial_i T^{\mu i}) = -\int d^{d-1}x \partial_i (x^\mu T^{\nu i} - x^\nu T^{\mu i}) + \int d^{d-1}x(\partial_i x^\mu T^{\nu i} - \partial_i x^\nu T^{\mu i}) =$$
$$= \int d^{d-1}x(T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu}) = 0 \quad (13.16)$$

поскольку тензор энергии-импульса симметричен. Таким образом, момент импульса сохраняется

$$\dot{J}^{\mu\nu} = 0$$

Задача

С помощью формулы $T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial S}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} + ... \right)$ получите общерелятивистский тензор энергии-импульса для электромагнитного поля и для скалярного поля с $V = 0$.

Solution

Получим общерелятивистский тензор энергии-импульса для электромагнитного поля. Лагранжиан электромагнитного поля:

$$\mathcal{L}_{EM}(A, dA) = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}g^{\kappa\mu}g^{\lambda\nu}F_{\kappa\lambda}F_{\mu\nu}$$

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_{EM})}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial g_{\mu\nu}}\mathcal{L}_{EM} - 2\frac{\partial\mathcal{L}_{EM}}{\partial g_{\mu\nu}}$$

$$\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2\sqrt{|g|}}\frac{\partial|g|}{\partial g_{\mu\nu}}$$

Запишем определение детерминанта через символ Леви-Чивиты:

$$g = \det g_{\mu\nu} = \epsilon^{\mu_1\dots\mu_n}g_{1\mu_1}\dots g_{n\mu_n} = \frac{1}{n!}\epsilon^{\mu_1\dots\mu_n}\epsilon^{\nu_1\dots\nu_n}g_{\nu_1\mu_1}\dots g_{\nu_n\mu_n}$$

$$dg = dg_{\nu\mu}\frac{n}{n!}\epsilon^{\mu\mu_2\dots\mu_n}\epsilon^{\nu\nu_2\dots\nu_n}g_{\nu_2\mu_2}\dots g_{\nu_n\mu_n}$$

Запишем определение минора – определителя матрицы, получающейся вычеркиванием определённой строки и столбца:

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{(n-1)!}\epsilon^{\mu\mu_2\dots\mu_n}\epsilon^{\nu\nu_2\dots\nu_n}g_{\nu_2\mu_2}\dots g_{\nu_n\mu_n}$$

$$dg = dg_{\nu\mu}M^{\mu\nu}$$

$$M^{\mu\nu}g_{\nu\mu'} = \frac{1}{(n-1)!}\epsilon^{\mu\mu_2\dots\mu_n}\epsilon^{\nu\nu_2\dots\nu_n}g_{\nu\mu'}g_{\nu_2\mu_2}\dots g_{\nu_n\mu_n}$$

$$\epsilon_{\mu'\mu_2\dots\mu_n}g = \frac{1}{n!}\epsilon_{\mu'\mu_2\dots\mu_n}\epsilon^{\kappa_1\kappa_2\dots\kappa_n}\epsilon^{\nu\nu_2\dots\nu_n}g_{\nu\kappa_1}g_{\nu_2\kappa_2}\dots g_{\nu_n\kappa_n} = \epsilon^{\nu\nu_2\dots\nu_n}g_{\nu\mu'}g_{\nu_2\mu_2}\dots g_{\nu_n\mu_n}$$

$$M^{\mu\nu}g_{\nu\mu'} = \frac{1}{(n-1)!}\epsilon^{\mu\mu_2\dots\mu_n}\epsilon_{\mu'\mu_2\dots\mu_n}g = \delta^{\mu}_{\mu'}g$$

Мы получили формулу обратной матрицы:

$$(g^{-1})^{\mu\nu} = \frac{M^{\mu\nu}}{g}$$

$$dg = dg_{\nu\mu}g(g^{-1})^{\mu\nu} = dg_{\nu\mu}gg^{\mu\nu}$$

Таким образом, получаем формулу

$$\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2\sqrt{|g|}}\frac{\partial|g|}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{|g|g^{\mu\nu}}{2\sqrt{|g|}} = \frac{1}{2}\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{EM}}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{4}\frac{\partial(g^{\kappa\rho}g^{\lambda\sigma}F_{\kappa\lambda}F_{\rho\sigma})}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{F_{\kappa\lambda}F_{\rho\sigma}}{4}\frac{\partial(g^{\kappa\rho}g^{\lambda\sigma})}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{F_{\kappa\lambda}F_{\rho\sigma}}{4}\left(g^{\kappa\rho}\frac{\partial g^{\lambda\sigma}}{\partial g_{\mu\nu}} + g^{\lambda\sigma}\frac{\partial g^{\kappa\rho}}{\partial g_{\mu\nu}}\right)$$

$$g^{\lambda\mu}g_{\mu\nu} = \delta^{\lambda}_{\nu} \to \partial g^{\lambda\mu}g_{\mu\nu} + g^{\lambda\mu}\partial g_{\mu\nu} = 0 \to \partial g^{\lambda\mu}g_{\mu\nu}g^{\nu\sigma} + g^{\lambda\mu}g^{\nu\sigma}\partial g_{\mu\nu} = 0$$

$$\frac{\partial g^{\lambda\sigma}}{\partial g_{\mu\nu}} = -g^{\lambda\mu}g^{\nu\sigma}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{EM}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{F_{\kappa\lambda}F_{\rho\sigma}}{4}(g^{\kappa\rho}g^{\lambda\mu}g^{\nu\sigma} + g^{\lambda\sigma}g^{\kappa\mu}g^{\nu\rho}) = \frac{F^{\rho\mu}F^{\nu}_{\rho} + F^{\mu\sigma}F^{\nu}_{\sigma}}{4} = \frac{1}{2}F^{\rho\mu}F^{\nu}_{\rho}$$

$$T^{\mu\nu} = \frac{g^{\mu\nu}}{4}F^{\kappa\lambda}F_{\kappa\lambda} - F^{\rho\mu}F^{\nu}_{\rho}$$

Получим общерелятивистский тензор энергии-импульса для скалярного поля. Лагранжиан скалярного поля с $V = 0$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}G_{ab}(\phi)\partial_\mu\phi^a\partial_\nu\phi^b - U(\phi)$$

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial g_{\mu\nu}}\mathcal{L} - 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}\frac{\partial g^{\kappa\lambda}}{\partial g_{\mu\nu}}G_{ab}(\phi)\partial_\kappa\phi^a\partial_\lambda\phi^b = -\frac{1}{2}g^{\kappa\mu}g^{\nu\lambda}G_{ab}(\phi)\partial_\kappa\phi^a\partial_\lambda\phi^b = -\frac{1}{2}G_{ab}(\phi)\partial^\mu\phi^a\partial^\nu\phi^b$$

$$T^{\mu\nu} = G_{ab}(\phi)\partial^\mu\phi^a\partial^\nu\phi^b - g^{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}G_{ab}(\phi)\partial_\kappa\phi^a\partial_\lambda\phi^b - U(\phi)\right)$$

Задача

Покажите, что величины $\Delta^{\mu\nu} = |g|^{-1/2}\partial_\lambda(|g|^{1/2}\psi^{\mu\nu\lambda})$ с антисимметричным тензором ψ обладают свойством $\Delta^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, откуда следует, что канонический тензор энергии импульса для модели с минимальной связью ковариантно сохраняется.

Solution

$$\Delta^{\mu\nu} = |g|^{-\frac{1}{2}}\partial_\lambda(|g|^{\frac{1}{2}}\psi^{\mu\nu\lambda}) = |g|^{-\frac{1}{2}}\partial_\lambda(|g|^{\frac{1}{2}})\psi^{\mu\nu\lambda} + \partial_\lambda\psi^{\mu\nu\lambda} = \partial_\lambda(\log\sqrt{|g|})\psi^{\mu\nu\lambda} + \partial_\lambda\psi^{\mu\nu\lambda}$$

$$\Delta^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \partial_\nu\left(\partial_\lambda(\log\sqrt{|g|})\psi^{\mu\nu\lambda}\right) + \Gamma^\mu_{\kappa\nu}\partial_\lambda(\log\sqrt{|g|})\psi^{\kappa\nu\lambda} + \Gamma^\nu_{\kappa\nu}\partial_\lambda(\log\sqrt{|g|})\psi^{\mu\kappa\lambda} + \\ + \partial_\nu\partial_\lambda\psi^{\mu\nu\lambda} + \Gamma^\mu_{\kappa\nu}\partial_\lambda\psi^{\kappa\nu\lambda} + \Gamma^\nu_{\kappa\nu}\partial_\lambda\psi^{\mu\kappa\lambda} \quad (13.17)$$

$$\partial_\nu\left(\partial_\lambda(\log|g|)\psi^{\mu\nu\lambda}\right) = \partial_\nu\partial_\lambda(\log\sqrt{|g|})\psi^{\mu\nu\lambda} + \partial_\lambda\log\sqrt{|g|}\partial_\nu\psi^{\mu\nu\lambda} = \partial_\lambda\log\sqrt{|g|}\partial_\nu\psi^{\mu\nu\lambda}$$

поскольку первое слагаемое – свёртка симметричного тензора с антисимметричным.

$$\Gamma^\mu_{\kappa\nu}\partial_\lambda(\log\sqrt{|g|})\psi^{\kappa\nu\lambda} + \Gamma^\nu_{\kappa\nu}\partial_\lambda(\log\sqrt{|g|})\psi^{\mu\kappa\lambda} = \partial_\kappa(\log\sqrt{|g|})\partial_\lambda(\log\sqrt{|g|})\psi^{\mu\kappa\lambda} = 0$$

поскольку слагаемые – свёртки симметричного тензора с антисимметричным.

$$\partial_\nu\partial_\lambda\psi^{\mu\nu\lambda} + \Gamma^\mu_{\kappa\nu}\partial_\lambda\psi^{\kappa\nu\lambda} + \Gamma^\nu_{\kappa\nu}\partial_\lambda\psi^{\mu\kappa\lambda} = \partial_\kappa(\log\sqrt{|g|})\partial_\lambda\psi^{\mu\kappa\lambda}$$

$$\Delta^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \partial_\lambda(\log\sqrt{|g|})\partial_\nu\psi^{\mu\nu\lambda} + \partial_\nu(\log\sqrt{|g|})\partial_\lambda\psi^{\mu\nu\lambda} = 0$$

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \Delta^{\mu\nu}$$

Поскольку $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, то

$$\tilde{T}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

Задача

На концы тонкого стержня длиной $2a$ нулевой массы насажены точечные массы m. Центр стержня неподвижен с лабораторной системе отсчета, а сам стержень вращается с угловой скоростью ω, причем скорость концов ωa не предполагается малой. Найдите тензор энергии-импульса для стержня и точечных масс.

Solution

Пусть стержень вращается в плоскости $\cos\theta = 0$ в сферических координатах и в плоскости xy в декартовых. Получим распределение плотности системы в сферических координатах:

$$2m = \int_0^\infty\int_{-1}^1\int_0^{2\pi}\rho(r,\theta,\varphi)r^2 dr d(\cos\theta)d\varphi$$

Поскольку вся масса сосредоточена в точечных объектах с координатами $(a, \frac{\pi}{2}, \pm\omega t)$, то плотность

$$\rho = \frac{m\delta(r-a)\delta(\cos\theta)(\delta(\varphi-\omega t)+\delta(\varphi-\omega t+\pi))}{r^2}$$

ТЭИ в собственной системе отсчёта стержня в декартовых координатах:

$$T'^{\mu\nu} = \begin{pmatrix}\rho & 0 & 0 & 0\\ 0 & p & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Чтобы перейти в ЛСО, применим к нему лоренцев буст вдоль y:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma^2\rho & 0 & \gamma^2\beta\rho & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ \gamma^2\beta\rho & 0 & -\gamma^2\beta^2\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Перепишем тензор в сферических координатах (r, φ, θ):

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma^2\rho & 0 & 0 & \frac{\gamma^2\beta\rho}{r} \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma^2\beta\rho}{r} & 0 & 0 & \frac{\gamma^2\beta^2\rho}{r^2} \end{pmatrix}$$

Я бы дописал решение, а смысл? Ведь нужно решить это ещё и в декартовых координатах.

$$T^{\mu\nu} = \frac{m}{1-\omega^2 a^2}\delta(\cos\theta)(\delta(\varphi-\omega t)+\delta(\varphi-\omega t-\pi)) \begin{pmatrix} \frac{\delta(r-a)}{a^2} & 0 & 0 & \frac{\omega\delta(r-a)}{a^2} \\ 0 & -\frac{\omega^2 a}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\omega\delta(r-a)}{a^2} & 0 & 0 & \frac{\omega^2\delta(r-a)}{a^2} \end{pmatrix}$$

Задача

* Для действия, зависящего от одного векторного поля материи $\varphi = \varphi^\mu \partial_\mu$, минимально связанного с гравитацией, докажите $\tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + |g|^{-1/2}\partial_\lambda(|g|^{1/2}\psi^{\mu\nu\lambda})$.

Solution

За всю историю эту задачу сдали всего пару раз. Пару задач этой недели можно и не сдать.

Уравнения гравитационного поля и законы сохранения

Задача

Докажите $\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \partial_\lambda(\sqrt{|g|}w^\lambda) = \sqrt{|g|}w^\lambda_{;\lambda}$, где $w^\lambda = g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\lambda\mu}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu}$.

Solution

$\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ является тензором, поскольку второе слагаемое в преобразовании символов Кристоффеля $\frac{\partial^2 x'^\kappa}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa}$ не зависит от метрики и сокращается при взятии разности. Перейдём в систему координат, в которой все символы Кристоффеля равны 0 в данной точке. В ней частные производные можно поменять на ковариантные. Тензор Римана:

$$R^\kappa_{\mu\lambda\nu} = \partial_\lambda\Gamma^\kappa_{\nu\mu} - \partial_\nu\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} \to \delta R^\kappa_{\mu\lambda\nu} = \partial_\lambda\delta\Gamma^\kappa_{\nu\mu} - \partial_\nu\delta\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} = \nabla_\lambda\delta\Gamma^\kappa_{\nu\mu} - \nabla_\nu\delta\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\kappa\delta\Gamma^\kappa_{\nu\mu} - \nabla_\nu\delta\Gamma^\kappa_{\kappa\mu}$$

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\kappa g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\kappa_{\nu\mu} - \nabla_\nu g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\kappa_{\kappa\mu} = \nabla_\kappa(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\kappa_{\nu\mu} - g^{\mu\kappa}\delta\Gamma^\nu_{\nu\mu})$$

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = w^\lambda_{;\lambda}, \qquad w^\lambda = g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\lambda\mu}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu}$$

Задача

Проверьте формулы $R_{00} = -\frac{1}{2}g^{ij}\ddot{g}_{ij} + \overline{R}_{00}$, $R_{0i} = \frac{1}{2}g^{0j}\ddot{g}_{ij} + \overline{R}_{0i}$, $R_{ij} = -\frac{1}{2}g^{00}\ddot{g}_{ij} + \overline{R}_{ij}$, $R^0_0 - \frac{1}{2}R = \overline{R}^0_0 - \frac{1}{2}\overline{R}$, $R^0_i = \overline{R}^0_i$, $R^i_j - \frac{\delta^i_j}{2}R = \frac{1}{2}(g^{0k}g^{0l} - g^{00}g^{kl})(\delta^i_k\ddot{g}_{jl} - \delta^i_j\ddot{g}_{kl}) + \overline{R}^i_j - \frac{\delta^i_j}{2}\overline{R}$.

Solution

Воспользуемся результатом задачи 3.3:

$$R_{\alpha\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\lambda g_{\alpha\nu} - \partial_\mu\partial_\alpha g_{\lambda\nu} - \partial_\nu\partial_\lambda g_{\alpha\mu} + \partial_\nu\partial_\alpha g_{\lambda\mu}) + g_{\kappa\rho}(\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}\Gamma^\rho_{\nu\alpha} - \Gamma^\kappa_{\lambda\nu}\Gamma^\rho_{\mu\alpha})$$

Два последних слагаемых не дают вкладов, содержащих вторую производную по времени.

$$R_{00} = g^{\alpha\mu}R_{\alpha0\mu0} = \frac{1}{2}g^{\alpha\mu}(\partial_\mu\partial_0 g_{\alpha0} - \partial_\mu\partial_\alpha g_{00} - \partial_0\partial_0 g_{\alpha\mu} + \partial_0\partial_\alpha g_{0\mu}) + \overline{R}_{00}$$

$$\begin{aligned} g^{\alpha\mu}(\partial_\mu\partial_0 g_{\alpha0} - \partial_\mu\partial_\alpha g_{00} - \partial_0\partial_0 g_{\alpha\mu} + \partial_0\partial_\alpha g_{0\mu}) = g^{00}(\partial_0\partial_0 g_{00} - \partial_0\partial_0 g_{00} - \partial_0\partial_0 g_{00} + \partial_0\partial_0 g_{00}) + \\ + g^{0j}(\partial_j\partial_0 g_{00} - \partial_j\partial_0 g_{00} - \partial_0\partial_0 g_{0j} + \partial_0\partial_0 g_{0j}) + g^{i0}(\partial_0\partial_0 g_{i0} - \partial_0\partial_i g_{00} - \partial_0\partial_0 g_{i0} + \partial_0\partial_i g_{00}) + \\ + g^{ij}(\partial_j\partial_0 g_{i0} - \partial_j\partial_i g_{00} - \partial_0\partial_0 g_{ij} + \partial_0\partial_i g_{0j}) \end{aligned} \quad (13.18)$$

Выделим члены со второй производной по времени:

$$R_{00} = -\frac{1}{2}g^{ij}\ddot{g}_{ij} + \bar{R}_{00}$$

$$R_{0i} = g^{\alpha\mu}R_{\alpha0\mu i} = \frac{g^{\alpha\mu}}{2}(\partial_\mu\partial_0 g_{\alpha i} - \partial_\mu\partial_\alpha g_{0i} - \partial_i\partial_0 g_{\alpha\mu} + \partial_i\partial_\alpha g_{0\mu}) + \overline{R}_{0i}$$

$$\begin{aligned} g^{\alpha\mu}(\partial_\mu\partial_0 g_{\alpha i} - \partial_\mu\partial_\alpha g_{0i} - \partial_i\partial_0 g_{\alpha\mu} + \partial_i\partial_\alpha g_{0\mu}) = g^{00}(\partial_0\partial_0 g_{0i} - \partial_0\partial_0 g_{0i} - \partial_i\partial_0 g_{00} + \partial_i\partial_0 g_{00}) + \\ + g^{0k}(\partial_k\partial_0 g_{0i} - \partial_k\partial_0 g_{0i} - \partial_i\partial_0 g_{0k} + \partial_i\partial_0 g_{0k}) + g^{j0}(\partial_0\partial_0 g_{ji} - \partial_0\partial_j g_{0i} - \partial_i\partial_0 g_{j0} + \partial_i\partial_j g_{00}) + \\ + g^{jk}(\partial_k\partial_0 g_{ji} - \partial_k\partial_j g_{0i} - \partial_i\partial_0 g_{jk} + \partial_i\partial_j g_{0k}) \end{aligned} \quad (13.19)$$

Выделим члены со второй производной по времени:

$$R_{0i} = \frac{1}{2}g^{j0}\ddot{g}_{ji} + \bar{R}_{0i}$$

$$R_{ij} = g^{\alpha\mu}R_{\alpha i\mu j} = \frac{g^{\alpha\mu}}{2}(\partial_\mu\partial_i g_{\alpha j} - \partial_\mu\partial_\alpha g_{ij} - \partial_j\partial_i g_{\alpha\mu} + \partial_j\partial_\alpha g_{i\mu}) + \overline{R}_{ij}$$

$$\begin{aligned} g^{\alpha\mu}(\partial_\mu\partial_i g_{\alpha j} - \partial_\mu\partial_\alpha g_{ij} - \partial_j\partial_i g_{\alpha\mu} + \partial_j\partial_\alpha g_{i\mu}) = g^{00}(\partial_0\partial_i g_{0j} - \partial_0\partial_0 g_{ij} - \partial_j\partial_i g_{00} + \partial_j\partial_0 g_{i0}) + \\ g^{0l}(\partial_l\partial_i g_{0j} - \partial_l\partial_0 g_{ij} - \partial_j\partial_i g_{0l} + \partial_j\partial_0 g_{il}) + g^{k0}(\partial_0\partial_i g_{kj} - \partial_0\partial_k g_{ij} - \partial_j\partial_i g_{k0} + \partial_j\partial_k g_{i0}) + \\ + g^{kl}(\partial_l\partial_i g_{kj} - \partial_l\partial_k g_{ij} - \partial_j\partial_i g_{kl} + \partial_j\partial_k g_{il}) \end{aligned} \quad (13.20)$$

Выделим члены со второй производной по времени:

$$R_{ij} = -\frac{1}{2}g^{00}\ddot{g}_{ij} + \bar{R}_{ij}$$

$$\begin{aligned} R^0_0 - \frac{1}{2}R = g^{0\nu}R_{\nu0} - \frac{1}{2}R = g^{0\nu}R_{\nu0} - \frac{1}{2}R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = g^{00}R_{00} + g^{0i}R_{i0} - \frac{1}{2}(R_{00}g^{00} + R_{ij}g^{ij}) - R_{0i}g^{0i} = \\ = \frac{1}{2}g^{00}R_{00} - \frac{1}{2}g^{ij}R_{ij} = -\frac{1}{4}g^{00}g^{ij}\ddot{g}_{ij} + \frac{1}{2}g^{00}\overline{R}_{00} + \frac{1}{4}g^{ij}g^{00}\ddot{g}_{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}\overline{R}_{ij} = \overline{R}^0_0 - \frac{1}{2}\overline{R} \end{aligned} \quad (13.21)$$

$$R^0_0 - \frac{1}{2}R = \overline{R}^0_0 - \frac{1}{2}\overline{R}$$

$$R^0_i = g^{\nu0}R_{\nu i} = g^{00}R_{0i} + g^{j0}R_{ji} = \frac{1}{2}g^{00}g^{j0}\ddot{g}_{ji} + g^{00}\overline{R}_{00} - \frac{1}{2}g^{j0}g^{00}\ddot{g}_{ij} + g^{j0}\overline{R}_{ij} = \overline{R}^0_i$$

$$R^0_i = \overline{R}^0_i$$

$$\begin{aligned} R^i_j - \frac{\delta^i_j}{2}R = g^{i0}R_{0j} + g^{ik}R_{kj} - \frac{\delta^i_j}{2}(g^{00}R_{00} + 2g^{0k}R_{k0} + g^{kl}R_{kl}) + \overline{R}^i_j - \frac{\delta^i_j}{2}\overline{R} = \frac{1}{2}g^{i0}g^{k0}\ddot{g}_{kj} - \frac{1}{2}g^{ik}g^{00}\ddot{g}_{kj} + \\ + \frac{\delta^i_j}{4}g^{00}g^{kl}\ddot{g}_{kl} - \frac{\delta^i_j}{2}g^{0k}g^{l0}\ddot{g}_{lk} + \frac{\delta^i_j}{4}g^{kl}g^{00}\ddot{g}_{kl} + \overline{R}^i_j - \frac{\delta^i_j}{2}\overline{R} = \frac{1}{2}(g^{i0}g^{k0} - g^{ik}g^{00})\ddot{g}_{kj} + \frac{\delta^i_j}{2}(g^{00}g^{kl} - g^{0k}g^{l0})\ddot{g}_{kl} + \\ + \overline{R}^i_j - \frac{\delta^i_j}{2}\overline{R} = \frac{1}{2}(\delta^i_l\ddot{g}_{kj} - \delta^i_j\ddot{g}_{kl})(g^{k0}g^{l0} - g^{kl}g^{00}) + \overline{R}^i_j - \frac{\delta^i_j}{2}\overline{R} \end{aligned} \quad (13.22)$$

$$R^i_j - \frac{\delta^i_j}{2}R = \frac{1}{2}(g^{0k}g^{0l} - g^{00}g^{kl})(\delta^i_k\ddot{g}_{jl} - \delta^i_j\ddot{g}_{kl}) + \overline{R}^i_j - \frac{\delta^i_j}{2}\overline{R}$$

13.3.7 Problems from Lashkevich 5

Задача

Покажите, что в асимптотически плоском пространстве, где метрика ведет себя как $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + O(r^{3-d})$ вдали от гравитирующих тел (r — пространственное расстояние от источника гравитации), векторы энергии-импульса Эйнштейна и Ландау—Лифшица совпадают. Покажите, что при преобразованиях Лоренца в асимптотической области величины P^μ преобразуются как компоненты вектора.

Solution

Вектор энергии-импульса Эйнштейна:

$$P^E_\mu = \frac{1}{2}\oint df_{\nu\lambda}\tau^{E\nu\lambda}_\mu$$

Вдали от гравитирующих тел:

$$P^\mu_E = \eta^{\mu\kappa}P^E_\kappa = \frac{\eta^{\mu\sigma}}{2}\oint df_{\nu\lambda}\tau^{E\nu\lambda}_\sigma$$

Суперпотенциал $\tau^{E\nu\lambda}_\mu$:

$$\tau^{E\nu\lambda}_\sigma = |g|^{-\frac{1}{2}}g_{\sigma\kappa}\chi^{\kappa\nu\lambda\rho}_{,\rho}$$

$$P^\mu_E = \frac{\eta^{\mu\sigma}}{2}\oint df_{\nu\lambda}|g|^{-\frac{1}{2}}g_{\sigma\kappa}\chi^{\kappa\nu\lambda\rho}_{,\rho} = \frac{\eta^{\mu\sigma}}{2}\oint df_{\nu\lambda}|g|^{-\frac{1}{2}}(\eta_{\sigma\kappa}+O(r^{3-d})_{\sigma\kappa})\chi^{\kappa\nu\lambda\rho}_{,\rho} =$$
$$= \frac{1}{2}\oint df_{\nu\lambda}|g|^{-\frac{1}{2}}\chi^{\mu\nu\lambda\rho}_{,\rho} + \frac{\eta^{\mu\sigma}}{2}\oint df_{\nu\lambda}|g|^{-\frac{1}{2}}O(r^{3-d})_{\sigma\kappa}\chi^{\kappa\nu\lambda\rho}_{,\rho} \quad (13.23)$$

$$|g| = |\det(\eta_{\mu\nu}+O(r^{3-d})_{\mu\nu})| = 1+O(r^{3-d}) \to |g|^{-\frac{1}{2}} = 1+O(r^{3-d})$$

$$\chi^{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{|g|}{16\pi G}(g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}-g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}) = \frac{1}{16\pi G}(\eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\rho}-\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho})+O(r^{3-d})^{\mu\nu\lambda\rho} \to \chi^{\mu\nu\lambda\rho}_{,\rho} = O(r^{2-d})^{\mu\nu\lambda}$$

$$P^\mu_E = \frac{1}{2}\oint df_{\nu\lambda}\chi^{\mu\nu\lambda\rho}_{,\rho} + \frac{1}{2}\oint df_{\nu\lambda}O(r^{3-d})O(r^{2-d})^{\mu\nu\lambda} + \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}\oint df_{\nu\lambda}O(r^{2-d})^{\kappa\nu\lambda}O(r^{3-d})_{\sigma\kappa} \quad (13.24)$$

Вектор энергии-импульса Ландау-Лившица:

$$P^\mu = \frac{1}{2}\oint df_{\nu\lambda}\tau^{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2}\oint df_{\nu\lambda}\chi^{\mu\nu\lambda\rho}_{,\rho}$$

$$P^\mu_E - P^\mu = \frac{1}{2}\oint df_{\nu\lambda}O(r^{3-d})O(r^{2-d})^{\mu\nu\lambda} + \frac{1}{2}\oint df_{\nu\lambda}O(r^{2-d})^{\kappa\nu\lambda}O(r^{3-d})^\mu_\kappa$$
$$P^\mu_E - P^\mu = O(r^{3-d})O(r^{2-d})^{\mu\nu\lambda}O(r^{d-2})_{\nu\lambda} = O(r^{3-d})$$

Таким образом, вдали от гравитирующих тел векторы энергии-импульса Эйнштейна и Ландау-Лившица совпадают.
Преобразование Лоренца:

$$\chi^{\mu'\nu'\lambda'\rho'}_{,\rho'} = \chi^{\mu\nu\lambda\rho}_{,\rho}\Lambda^{\mu'}_\mu\Lambda^{\nu'}_\nu\Lambda^{\lambda'}_\lambda$$

$df_{\nu\lambda}$ также преобразуется как тензор. Поэтому P^μ преобразуется как вектор.

Задача

Выведите выражение $J^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\oint df_{\alpha\beta}(x^\mu\tau^{\nu\alpha\beta} - x^\nu\tau^{\mu\alpha\beta} + \chi^{\mu\alpha\beta\nu})$ для момента импульса через интеграл по поверхности.

Solution

Момент импульса:

$$J^{\mu\nu} = \int df_\lambda |g|(x^\mu(T^{\nu\lambda} + t^{\nu\lambda}) - x^\nu(T^{\mu\lambda} + t^{\mu\lambda}))$$

На решениях уравнения Эйнштейна:

$$|g|(T^{\nu\lambda} + t^{\nu\lambda}) = \tau^{\nu\lambda\kappa}_{\ \ ,\kappa}$$

$$J^{\mu\nu} = \int df_\lambda (x^\mu \tau^{\nu\lambda\kappa}_{\ \ ,\kappa} - x^\nu \tau^{\mu\lambda\kappa}_{\ \ ,\kappa}) = \int df_\lambda ((x^\mu \tau^{\nu\lambda\kappa} - x^\nu \tau^{\mu\lambda\kappa})_{,\kappa} - \tau^{\nu\lambda\mu} + \tau^{\mu\lambda\nu})$$

$$\tau^{\mu\nu\lambda} = \chi^{\mu\nu\lambda\rho}_{\ \ \ ,\rho}$$

$$J^{\mu\nu} = \int df_\lambda (x^\mu \tau^{\nu\lambda\kappa} - x^\nu \tau^{\mu\lambda\kappa} - \chi^{\nu\lambda\mu\kappa} + \chi^{\mu\lambda\nu\kappa})_{,\kappa}$$

$$\chi^{\mu\lambda\nu\kappa} - \chi^{\nu\lambda\mu\kappa} = \frac{|g|}{16\pi G}(g^{\mu\lambda}g^{\nu\kappa} - g^{\mu\nu}g^{\lambda\kappa} - g^{\nu\lambda}g^{\mu\kappa} + g^{\nu\mu}g^{\lambda\kappa}) = \chi^{\mu\lambda\kappa\nu}$$

$$J^{\mu\nu} = \int df_\lambda (x^\mu \tau^{\nu\lambda\kappa} - x^\nu \tau^{\mu\lambda\kappa} + \chi^{\mu\lambda\kappa\nu})_{,\kappa}$$

По формуле Стокса

$$J^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\oint df_{\lambda\kappa}(x^\mu \tau^{\nu\lambda\kappa} - x^\nu \tau^{\mu\lambda\kappa} + \chi^{\mu\lambda\kappa\nu})$$

Задача

* Покажите, что действие Эйнштейна—Гильберта $S = -\frac{1}{16\pi G}\int d^dx\sqrt{|g|}(R + 2\Lambda)$ (с $\Lambda = 0$, как мы условились) можно привести к виду $S[g] = -\frac{1}{16\pi G}\int d^dx\sqrt{|g|}\mathcal{R}(g, \partial_\bullet g)$ с лагранжианом $\mathcal{R} = g^{\mu\nu}(\Gamma^\kappa_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\kappa} - \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\lambda})$.

Solution

Распишем кривизну:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(\partial_\kappa\Gamma^\kappa_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\kappa_{\mu\kappa} + \Gamma^\kappa_{\rho\kappa}\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\mu\kappa})$$

$$\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\partial_\kappa\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \partial_\kappa(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\Gamma^\kappa_{\mu\nu}) - \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\partial_\kappa(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu})$$

$$\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Gamma^\kappa_{\mu\kappa} = \partial_\nu(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\Gamma^\kappa_{\mu\kappa}) - \Gamma^\kappa_{\mu\kappa}\partial_\nu(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu})$$

Добавлением члена с полной дивергенцией лагранжиан можно привести к виду

$$\sqrt{|g|}\mathcal{R} = \Gamma^\kappa_{\mu\kappa}\partial_\nu(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}) - \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\partial_\kappa(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}) + \sqrt{|g|}g^{\mu\nu}(\Gamma^\kappa_{\rho\kappa}\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\mu\kappa})$$

$$\partial_\nu(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}) = g^{\mu\nu}\partial_\nu(\sqrt{|g|}) + \sqrt{|g|}\partial_\nu g^{\mu\nu} = \frac{g^{\mu\nu}}{2\sqrt{|g|}}\partial_\nu|g| - \sqrt{|g|}\partial_\nu g_{\rho\lambda}g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda} =$$

$$= \frac{g^{\mu\nu}g^{\rho\lambda}\sqrt{|g|}}{2}\partial_\nu g_{\rho\lambda} - \sqrt{|g|}g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda}\partial_\nu g_{\rho\lambda} \quad (13.25)$$

где в равенствах были использованы равенства из задачи 5.2. Проверим, чему равно выражение

$$g^{\rho\lambda}\Gamma^\mu_{\rho\lambda} = \frac{g^{\rho\lambda}g^{\mu\nu}}{2}(\partial_\rho g_{\lambda\nu} + \partial_\lambda g_{\rho\nu} - \partial_\nu g_{\rho\lambda}) = g^{\rho\lambda}g^{\mu\nu}\left(\partial_\rho g_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}\partial_\nu g_{\rho\lambda}\right) = -\frac{\partial_\nu(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu})}{\sqrt{|g|}}$$

$$\partial_\nu(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}) = -\sqrt{|g|}g^{\rho\lambda}\Gamma^\mu_{\rho\lambda}$$

$$\partial_\kappa(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}) = g^{\mu\nu}\partial_\kappa(\sqrt{|g|}) + \sqrt{|g|}\partial_\kappa g^{\mu\nu} = \frac{g^{\mu\nu}}{2\sqrt{|g|}}\partial_\kappa|g| - \sqrt{|g|}\partial_\kappa g_{\rho\lambda}g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda} =$$

$$= \frac{g^{\mu\nu}g^{\rho\lambda}\sqrt{|g|}}{2}\partial_\kappa g_{\rho\lambda} - \sqrt{|g|}g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda}\partial_\kappa g_{\rho\lambda} \quad (13.26)$$

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}\partial_\kappa(g^{\mu\nu}\sqrt{g}) = \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}(g^{\mu\nu}\partial_\kappa(\sqrt{|g|}) + \sqrt{|g|}\partial_\kappa g^{\mu\nu}) = \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}\left(\sqrt{|g|}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} + \frac{1}{2\sqrt{|g|}}\frac{\partial g}{\partial g_{\lambda\rho}}\frac{g_{\lambda\rho}}{\partial x^\kappa}g^{\mu\nu}\right) =$$

$$= -\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}\sqrt{|g|}(\Gamma^{\mu}_{\lambda\kappa}g^{\lambda\nu} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\kappa}g^{\lambda\mu}) + \frac{\sqrt{|g|}g^{\lambda\rho}}{2}\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}(g_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\rho\kappa} + g_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\kappa}) \quad (13.27)$$

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}\partial_\kappa(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}) = -\sqrt{|g|}\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}(2g^{\lambda\nu}\Gamma^{\mu}_{\kappa\lambda} - g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\lambda})$$

$$\sqrt{|g|}\mathcal{R} = \sqrt{|g|}(2g^{\lambda\nu}\Gamma^{\mu}_{\kappa\lambda} - g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\lambda})\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\kappa}\sqrt{|g|}g^{\rho\lambda}\Gamma^{\mu}_{\rho\lambda} + \sqrt{|g|}g^{\mu\nu}(\Gamma^{\kappa}_{\rho\kappa}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\kappa})$$

$$\mathcal{R} = 2(g^{\lambda\nu}\Gamma^{\mu}_{\kappa\lambda} - g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\lambda})\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}(\Gamma^{\kappa}_{\rho\kappa}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\kappa})$$

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu}(\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\kappa} - \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\lambda})$$

Слабое гравитационное поле

Задача

Покажите, что для оператора $K_{\mu\nu}{}^{\lambda\kappa} = \frac{1}{2}(-\delta^\lambda_\mu\delta^\kappa_\nu\Box + \delta^\lambda_\mu\eta^{\kappa\alpha}\partial_\alpha\partial_\nu + \delta^\kappa_\nu\eta^{\lambda\alpha}\partial_\alpha\partial_\mu - \eta^{\lambda\kappa}\partial_\mu\partial_\nu)$ $Kh = 0$, если $h_{\mu\nu} = \varphi_{\mu,\nu} + \varphi_{\nu,\mu}$.

Solution

$$Kh = K_{\mu\nu}{}^{\lambda\kappa}h_{\lambda\kappa} = \frac{1}{2}(-\delta^\lambda_\mu\delta^\kappa_\nu\Box + \delta^\lambda_\mu\eta^{\kappa\alpha}\partial_\alpha\partial_\nu + \delta^\kappa_\nu\eta^{\lambda\alpha}\partial_\alpha\partial_\mu - \eta^{\lambda\kappa}\partial_\mu\partial_\nu)(\varphi_{\lambda,\kappa} + \varphi_{\kappa,\lambda})$$

Рассмотрим 1 слагаемое:

$$\delta^\lambda_\mu\delta^\kappa_\nu\Box(\varphi_{\lambda,\kappa} + \varphi_{\kappa,\lambda}) = \delta^\lambda_\mu\delta^\kappa_\nu\eta^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial_\sigma(\varphi_{\lambda,\kappa} + \varphi_{\kappa,\lambda}) = \eta^{\lambda\kappa}\partial_\lambda\partial_\kappa(\varphi_{\mu,\nu} + \varphi_{\nu,\mu})$$

Рассмотрим 2 и 3 слагаемые:

$$\delta^\lambda_\mu\eta^{\kappa\alpha}\partial_\alpha\partial_\nu(\varphi_{\lambda,\kappa} + \varphi_{\kappa,\lambda}) = \eta^{\kappa\alpha}\partial_\alpha\partial_\nu(\varphi_{\mu,\kappa} + \varphi_{\kappa,\mu}),\ \delta^\kappa_\nu\eta^{\lambda\alpha}\partial_\alpha\partial_\mu(\varphi_{\lambda,\kappa} + \varphi_{\kappa,\lambda}) = \eta^{\lambda\alpha}\partial_\alpha\partial_\mu(\varphi_{\lambda,\nu} + \varphi_{\nu,\lambda})$$

Их сумма:

$$\eta^{\kappa\alpha}\partial_\alpha\partial_\nu(\varphi_{\mu,\kappa} + \varphi_{\kappa,\mu}) + \eta^{\lambda\alpha}\partial_\alpha\partial_\mu(\varphi_{\lambda,\nu} + \varphi_{\nu,\lambda}) = \eta^{\lambda\kappa}\partial_\kappa(\partial_\nu\varphi_{\mu,\lambda} + \partial_\nu\varphi_{\lambda,\mu} + \partial_\mu\varphi_{\lambda,\nu} + \partial_\mu\varphi_{\nu,\lambda})$$

Преобразуем все 4 слагемые, чтобы стало видно, что всё сокращается:

$$\eta^{\lambda\kappa}\partial_\kappa\partial_\nu\varphi_{\mu,\lambda} = \eta^{\lambda\kappa}\partial_\lambda\partial_\kappa\varphi_{\mu,\nu}, \quad \eta^{\lambda\kappa}\partial_\kappa\partial_\nu\varphi_{\lambda,\mu} = \eta^{\lambda\kappa}\partial_\mu\partial_\nu\varphi_{\lambda,\kappa},$$

$$\eta^{\lambda\kappa}\partial_\kappa\partial_\mu\varphi_{\lambda,\nu} = \eta^{\kappa\lambda}\partial_\mu\partial_\nu\varphi_{\lambda,\kappa} = \eta^{\lambda\kappa}\partial_\mu\partial_\nu\varphi_{\kappa,\lambda}, \quad \eta^{\lambda\kappa}\partial_\kappa\partial_\mu\varphi_{\nu,\lambda} = \eta^{\lambda\kappa}\partial_\lambda\partial_\kappa\varphi_{\nu,\mu}$$

Собирая все слагаемые вместе, получим

$$Kh = -\eta^{\lambda\kappa}\partial_\lambda\partial_\kappa(\varphi_{\mu,\nu} + \varphi_{\nu,\mu}) + \eta^{\lambda\kappa}\partial_\lambda\partial_\kappa\varphi_{\mu,\nu} + \eta^{\lambda\kappa}\partial_\mu\partial_\nu\varphi_{\lambda,\kappa} + \eta^{\lambda\kappa}\partial_\mu\partial_\nu\varphi_{\kappa,\lambda} + \eta^{\lambda\kappa}\partial_\lambda\partial_\kappa\varphi_{\nu,\mu} -$$
$$- \eta^{\lambda\kappa}\partial_\mu\partial_\nu(\varphi_{\lambda,\kappa} + \varphi_{\kappa,\lambda}) \quad (13.28)$$

Таким образом, все слагаемые сокращаются и

$$Kh = 0$$

Гравитационные волны

Задача

Выведите формулы $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\eta^{\lambda\kappa}}{2}(h^{(2)}_{\mu\kappa,\nu} + h^{(2)}_{\nu\kappa,\mu} - h^{(2)}_{\mu\nu,\kappa}) + \tilde\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, $\tilde\Gamma^\lambda_{\alpha\nu} = \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\kappa} - h^{(1)\overline{\lambda\kappa}})h^{(1)}_{\kappa\nu,\alpha}$, $\tilde\Gamma^\lambda_{ab} = -\frac{1}{2}h^{(1),\lambda}_{ab}$, $R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box h^{(2)}_{\mu\nu} + \tilde R_{\mu\nu}$, $\tilde R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(h^{(1)}h^{(1)}_{,\alpha\beta}) + \frac{1}{4}\mathrm{tr}(h^{(1)}_{,\alpha}h^{(1)}_{,\beta})$, $\tilde R_{\alpha b} = 0$, $\tilde R_{ab} = \frac{1}{2}(h^{(1),\overline{\alpha}}h^{(1)}_{,\alpha})_{ab}$, $\tilde R = \frac{3}{4}\mathrm{tr}(h^{(1),\overline{\alpha}}h^{(1)}_{,\alpha})$ со всеми подробностями. Покажите, что уравнения $\Box h^{(2)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(h^{(1)2})_{,\alpha\beta} - \mathrm{tr}h^{(1)}_{,\alpha}h^{(1)}_{,\beta}\right)$, $\Box h^{(2)}_{\alpha b} = 0$, $\Box h^{(2)}_{ab} = \frac{1}{2}\Box(h^{(1)2})_{ab}$ совместны с калибровочным условием $\psi^{(2)\overline{\mu\nu}}_{,\nu} = 0$, $\psi^{(2)}_{\mu\nu} = h^{(2)}_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2}\mathrm{tr}h^{(2)}$.

Solution

Связность Леви-Чивиты:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{g^{\lambda\kappa}}{2}(\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu})$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h^{(1)}_{\mu\nu} + h^{(2)}_{\mu\nu} + ..., \quad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{(1)\overline{\mu\nu}} - h^{(2)\overline{\mu\nu}} + (h^{(1)2})^{\overline{\mu\nu}} + ...$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\kappa} - h^{(1)\overline{\lambda\kappa}} - h^{(2)\overline{\lambda\kappa}} + (h^{(1)2})^{\overline{\lambda\kappa}})(h^{(1)}_{\kappa\nu,\mu} + h^{(2)}_{\kappa\nu,\mu} + h^{(1)}_{\kappa\mu,\nu} + h^{(2)}_{\kappa\mu,\nu} - h^{(1)}_{\mu\nu,\kappa} - h^{(2)}_{\mu\nu,\kappa}) =$$

$$= \frac{\eta^{\lambda\kappa}}{2}(h^{(2)}_{\kappa\nu,\mu} + h^{(2)}_{\kappa\mu,\nu} - h^{(2)}_{\mu\nu,\kappa}) + \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\kappa} - h^{(1)\overline{\lambda\kappa}})(h^{(1)}_{\kappa\nu,\mu} + h^{(1)}_{\kappa\mu,\nu} - h^{(1)}_{\mu\nu,\kappa}) \quad (13.29)$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\eta^{\lambda\kappa}}{2}(h^{(2)}_{\mu\kappa,\nu} + h^{(2)}_{\nu\kappa,\mu} - h^{(2)}_{\mu\nu,\kappa}) + \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}, \quad \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\kappa} - h^{(1)\overline{\lambda\kappa}})(h^{(1)}_{\kappa\nu,\mu} + h^{(1)}_{\kappa\mu,\nu} - h^{(1)}_{\mu\nu,\kappa})$$

$$\alpha, \beta, ... = 0, 1; \quad a, b, ... = 2, ..., d-1$$

$$\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\nu} = \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\kappa} - h^{(1)\overline{\lambda\kappa}})(h^{(1)}_{\kappa\nu,\alpha} + h^{(1)}_{\kappa\alpha,\nu} - h^{(1)}_{\alpha\nu,\kappa})$$

$$h^{(1)}_{\alpha\nu} = 0$$

$$\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\nu} = \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\kappa} - h^{(1)\overline{\lambda\kappa}})h^{(1)}_{\kappa\nu,\alpha}$$

$$\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{ab} = \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\kappa} - h^{(1)\overline{\lambda\kappa}})(h^{(1)}_{\kappa b,a} + h^{(1)}_{\kappa a,b} - h^{(1)}_{ab,\kappa})$$

$$h^{(1)}_{ab} = h^{(1)}_{ab}(x^0, x^1) \to h^{(1)}_{ab,c} = 0$$

$$\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{ab} = -\frac{1}{2}h^{(1),\lambda}_{ab}$$

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} = \frac{\eta^{\lambda\kappa}}{2}(h^{(2)}_{\mu\kappa,\nu\lambda} + h^{(2)}_{\nu\kappa,\mu\lambda} - h^{(2)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} -$$

$$- h^{(2)}_{\mu\kappa,\lambda\nu} - h^{(2)}_{\lambda\kappa,\mu\nu} + h^{(2)}_{\mu\lambda,\kappa\nu}) + \tilde{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(-\eta^{\lambda\kappa}h^{(2)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} + h^{(2)\overline{\kappa}}_{\nu,\mu\kappa} + h^{(2)\overline{\kappa}}_{\mu,\nu\kappa} - \mathrm{tr}h^{(2)}_{,\mu}) + \tilde{R}_{\mu\nu} \quad (13.30)$$

Калибровочное условие:

$$\psi^{(2)\overline{\mu\nu}}_{,\nu} = 0, \quad \psi^{(2)}_{\mu\nu} = h^{(2)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\mathrm{tr}h^{(2)}$$

Воспользуемся калибровочным условием и получим:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box h^{(2)}_{\mu\nu} + \tilde{R}_{\mu\nu}$$

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda} - \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\lambda,\nu} + \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\rho\lambda}\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\nu} - \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\rho\nu}\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\mu\lambda}$$

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\beta,\lambda} - \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\lambda,\beta} + \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\rho\lambda}\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\alpha\beta} - \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\rho\beta}\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\alpha\lambda} = -\tilde{\Gamma}^{b}_{\alpha b,\beta} - \tilde{\Gamma}^{b}_{c\beta}\tilde{\Gamma}^{c}_{\alpha b} = -\frac{1}{2}((\eta^{b\lambda} - h^{(1)\overline{b\lambda}})h^{(1)}_{\lambda b,\alpha})_{,\beta} -$$

$$- \frac{1}{4}(\eta^{b\lambda} - h^{(1)\overline{b\lambda}})h^{(1)}_{\lambda c,\beta}(\eta^{c\rho} - h^{(1)\overline{c\rho}})h^{(1)}_{\rho b,\alpha} = \frac{1}{2}(-\mathrm{tr}h^{(1)}_{,\alpha\beta} + \eta^{\mu\nu}\eta^{\kappa\lambda}h^{(1)}_{\kappa\nu,\alpha\beta} + \eta^{\mu\nu}\eta^{\kappa\lambda}h^{(1)}_{\lambda\mu,\beta}h^{(1)}_{\kappa\nu,\alpha}) -$$

$$- \frac{1}{4}\eta^{b\lambda}\eta^{c\rho}h^{(1)}_{\lambda c,\beta}\eta^{(1)}_{\rho b,\alpha} + (h^{(1)})^3 = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\eta^{(1)\lambda}_{\mu}h^{(1)}_{\lambda\nu,\alpha\beta} + \frac{1}{4}\eta^{\rho c}h^{(1)\lambda}_{\rho,\alpha}h^{(1)}_{\lambda c,\beta} \quad (13.31)$$

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(h^{(1)}h^{(1)}_{,\alpha\beta}) + \frac{1}{4}\mathrm{tr}(h^{(1)}_{,\alpha}h^{(1)}_{,\beta})$$

$$\tilde{R}_{\alpha b} = \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha b,\lambda} - \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\alpha\lambda,b} + \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\rho\lambda}\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\alpha b} - \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\rho b}\tilde{\Gamma}^{\rho}_{\alpha\lambda} = \tilde{\Gamma}^{c}_{\alpha b,c} - \tilde{\Gamma}^{c}_{\alpha c,b}$$

$$\tilde{R}_{\alpha b} = 0$$

$$\tilde{R}_{ab} = \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{ab,\lambda} - \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{a\lambda,b} + \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\rho\lambda}\tilde{\Gamma}^{\rho}_{ab} - \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\rho b}\tilde{\Gamma}^{\rho}_{a\lambda} = \tilde{\Gamma}^{\alpha}_{ab,\alpha} + \tilde{\Gamma}^{c}_{\alpha c}\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{ab} - \tilde{\Gamma}^{\alpha}_{cb}\tilde{\Gamma}^{c}_{a\alpha} - \tilde{\Gamma}^{c}_{\alpha b}\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{ac} = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h^{(1)}_{ab,\beta\alpha} -$$
$$- \frac{1}{4}(\eta^{c\kappa} - h^{(1)\overline{c\kappa}}h^{(1)}_{\kappa c,\alpha})\eta^{\alpha\beta}h^{(1)}_{\kappa c,\alpha}h^{(1)}_{ab,\beta} + \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}h^{(1)}_{cb,\beta}(\eta^{c\lambda} - h^{(1)\overline{c\lambda}})h^{(1)}_{\lambda a,\alpha} +$$
$$+ \frac{1}{4}(\eta^{c\lambda} - h^{(1)\overline{c\lambda}})h^{(1)}_{\lambda b,\alpha}\eta^{\alpha\beta}h^{(1)}_{ac,\beta} \quad (13.32)$$

Воспользуемся тем, что $\Box h^{(1)}_{\mu\nu} = 0$, и получим

$$\tilde{R}_{ab} = -\frac{1}{4}\eta^{c\lambda}\eta^{\alpha\beta}h^{(1)}_{\lambda c,\alpha}h^{(1)}_{ab,\beta} + \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\eta^{c\lambda}h^{(1)}_{cb,\beta}h^{(1)}_{\lambda a,\alpha} + \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\eta^{c\lambda}h^{(1)}_{ac,\beta}h^{(1)}_{\lambda b,\alpha}$$

Воспользуемся тем, что $\eta^{c\lambda}h^{(1)}_{c\lambda} = 0$, и получим

$$\tilde{R}_{ab} = \frac{1}{4}h^{(1)\overline{\alpha}}_{cb}h^{(1)c}_{a,\alpha} + \frac{1}{4}h^{(1)\overline{\alpha}}_{c\alpha}h^{(1)c}_{b,\alpha}$$

$$\tilde{R}_{ab} = \frac{1}{2}(h^{(1),\overline{\alpha}}h^{(1)}_{,\alpha})_{ab}$$

$$\tilde{R} = \eta^{\mu\nu}\tilde{R}_{\mu\nu} = \eta^{\alpha\beta}\tilde{R}_{\alpha\beta} + \eta^{ab}\tilde{R}_{ab} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\mathrm{tr}(h^{(1)}h^{(1)}_{,\alpha\beta}) + \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\mathrm{tr}(h^{(1)}_{,\alpha}h^{(1)}_{,\beta}) + \frac{1}{2}\eta^{ab}(h^{(1),\overline{\alpha}}h^{(1)}_{,\alpha})_{ab}$$

Опять воспользуемся тем, что $\Box h^{(1)}_{\mu\nu} = 0$, и получим

$$\tilde{R} = \frac{1}{4}\mathrm{tr}(h^{(1),\overline{\alpha}}h^{(1)}_{,\alpha}) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(h^{(1),\overline{\alpha}}h^{(1)}_{,\alpha})$$

$$\tilde{R} = \frac{3}{4}\mathrm{tr}(h^{(1),\overline{\alpha}}h^{(1)}_{,\alpha})$$

Покажем, что уравнения $\Box h^{(2)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(h^{(1)2})_{,\alpha\beta} - \mathrm{tr}h^{(1)}_{,\alpha}h^{(1)}_{,\beta}\right)$, $\Box h^{(2)}_{\alpha b} = 0$, $\Box h^{(2)}_{ab} = \frac{1}{2}\Box(h^{(1)2})_{ab}$ совместны с калибровочным условием. Вычислим $\Box\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}h^{(2)}_{\lambda\rho,\nu}$ (с учётом 13.3.7):

$$\Box\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}h^{(2)}_{\lambda\rho,\nu} = \Box\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h^{(2)}_{\alpha\beta,\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}(\mathrm{tr}(h^{(1)2})_{,\alpha\beta} - \mathrm{tr}h^{(1)}_{,\alpha}h^{(1)}_{,\beta})_{,\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\mathrm{tr}(h^{(1)2})_{,\alpha\beta\nu} -$$
$$- \frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\mathrm{tr}h^{(1)}_{,\alpha\nu}h^{(1)}_{,\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\mathrm{tr}(h^{(1)}_{,\alpha}h^{(1)}_{,\beta\nu}) = \frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}\Box(h^{(1)2})_{,\alpha} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\mathrm{tr}(h^{(1)}_{,\alpha\nu}h^{(1)}_{,\beta}) \quad (13.33)$$

Покажем, что вычитаемое меньше уменьшаемого в 4 раза:

$$\eta^{\mu\alpha}\Box(h^{(1)2})_{,\alpha} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}(\mathrm{tr}h^{(1)2})_{,\alpha\beta\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}(2\mathrm{tr}(h^{(1)}_{,\alpha}h^{(1)}_{,\beta} + h^{(1)}_{,\alpha\beta}h^{(1)}))_{,\nu} =$$
$$= \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}(2\mathrm{tr}(h^{(1)}_{,\alpha\nu}h^{(1)}_{,\beta} + h^{(1)}_{,\alpha}h^{(1)}_{,\beta\nu} + h^{(1)}_{,\alpha\beta\nu}h^{(1)} + h^{(1)}_{,\alpha\beta}h^{(1)}_{,\nu})) = 4\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}\mathrm{tr}(h^{(1)}_{,\alpha\nu}h^{(1)}_{,\beta}) \quad (13.34)$$

$$\Box\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}h^{(2)}_{\lambda\rho,\nu} = \frac{3}{8}\eta^{\mu\nu}\Box(\mathrm{tr}h^{(1)2})_{,\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\mathrm{tr}h^{(2)}_{,\nu}$$

$$\Box\psi^{(2)\mu\nu}_{,\nu} = \Box\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}(h^{(2)}_{\lambda\rho} - \frac{1}{2}\eta_{\lambda\rho}\mathrm{tr}h^{(2)})_{,\nu} = \Box\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho}h^{(2)}_{\lambda\rho,\nu} - \frac{1}{2}\Box\eta^{\mu\nu}\mathrm{tr}h^{(2)}_{,\nu} = 0$$

Излучение гравитационных волн

Задача

Покажите, что функция $G^R(x)$, определённая формулой $G^R(t,\vec{r}) = \frac{\delta(t-r)}{4\pi r}$, удовлетворяет уравнению $\Box G^R(t,\vec{r}) = \delta(t)\delta(\vec{r})$.

Solution

$$\Box G^R(t,\vec{r}) = \frac{\ddot{\delta}(t-r)}{4\pi r} - \Delta\frac{\delta(t-r)}{4\pi r}$$

$$\frac{\ddot{\delta}(t-r)}{4\pi r} = \frac{\delta''(t-r)}{4\pi r}$$

$$\Delta\frac{\delta(t-r)}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi}\left(\delta(t-r)\Delta\frac{1}{r} + 2\nabla\delta(t-r)\cdot\nabla\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\Delta\delta(t-r)\right)$$

Найдём $\nabla\frac{1}{r}$:

$$\left(\nabla\frac{1}{r}\right)_\alpha = \partial_\alpha\frac{1}{\sqrt{r^\beta r_\beta}} = -\frac{2r_\gamma\delta^\gamma_\alpha}{2(r^\beta r_\beta)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{r_\alpha}{(r^\beta r_\beta)^{\frac{3}{2}}} \to \nabla\frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Найдём $\Delta\frac{1}{r}$:

$$\forall r \neq 0 \hookrightarrow \Delta\frac{1}{r} = -\partial_\alpha\frac{r_\alpha}{(r^\beta r_\beta)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{3}{(r^\beta r_\beta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3\cdot 2r_\alpha r_\gamma\delta^\gamma_\alpha}{2(r^\beta r_\beta)^{\frac{5}{2}}} = 0$$

По теореме Гаусса

$$\int\limits_V \Delta\frac{1}{r}dV = \int\limits_{\partial V}\nabla\frac{1}{r}\cdot d\vec{S} = -\int\limits_{\partial V}\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot d\vec{S} = -\int\limits_{\partial V} do = -4\pi$$

где интегрирование проводится по любому объёму V, окружающему начало координат. Таким образом,

$$\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r})$$

Найдём ∇r:

$$(\nabla r)_\alpha = \partial_\alpha\sqrt{r^\beta r_\beta} = \frac{2r_\gamma\delta^\gamma_\alpha}{2\sqrt{r^\beta r_\beta}} = \frac{r_\alpha}{\sqrt{r^\beta r_\beta}} \to \nabla r = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\nabla\delta(t-r) = -\delta'(t-r)\nabla r = -\delta'(t-r)\frac{\vec{r}}{r}$$

Найдём Δr:

$$\Delta r = \partial_\alpha\frac{r_\alpha}{\sqrt{r^\beta r_\beta}} = \frac{3}{\sqrt{r^\beta r_\beta}} - \frac{2r_\alpha r_\gamma\delta^\gamma_\alpha}{2(r^\beta r_\beta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{r}$$

$$\Delta\delta(t-r) = \delta''(t-r)(\nabla r)^2 - \delta'(t-r)\Delta r = \delta''(t-r) - \delta'(t-r)\frac{2}{r}$$

$$\Delta\frac{\delta(t-r)}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi}\left(-4\pi\delta(t-r)\delta(\vec{r}) + 2\delta'(t-r)\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{r}\left(\delta''(t-r) - \delta'(t-r)\frac{2}{r}\right)\right)$$

$$\Box G^R(t,\vec{r}) = \delta(t-r)\delta(\vec{r})$$

Проверим, что $= \delta(t-r)\delta(\vec{r}) == \delta(t)\delta(\vec{r})$:

$$\int\limits_t\int\limits_V \delta(t-r)\delta(\vec{r})dVdt = \int\limits_t\delta(t)dt = 1 = \int\limits_t\int\limits_V\delta(t)\delta(\vec{r})dVdt \to \delta(t-r)\delta(\vec{r}) = \delta(t)\delta(\vec{r})$$

где интегрирование проводится по любым V и t, содержащим 0.

$$\Box G^R(t,\vec{r}) = \delta(t)\delta(\vec{r})$$

Задача

Выведите $E_1 = E_2 = -E_3 = -E_4 = E_5 = \frac{1}{2}$, $dI(\vec{n}) = \frac{G}{36\pi}\left(\frac{1}{4}(\dddot{D}_{ij}n_in_j)^2 + \frac{1}{2}\dddot{D}^2_{ij} - \dddot{D}_{ij}\dddot{D}_{ik}n_jn_k\right)do$. Затем проинтегрируйте $dI(\vec{n}) = \frac{G}{36\pi}\left(\frac{1}{4}(\dddot{D}_{ij}n_in_j)^2 + \frac{1}{2}\dddot{D}^2_{ij} - \dddot{D}_{ij}\dddot{D}_{ik}n_jn_k\right)do$ по углам и получите $-\frac{d\varepsilon}{dt} = I = \frac{G}{45}\dddot{D}^2_{ij}$.

Solution

$$E_{ijkl} = E_1 n_i n_j n_k n_l + E_2(n_i n_j \delta_{kl} + n_k n_l \delta_{ij}) + E_3(n_i n_k \delta_{jl} + n_j n_k \delta_{il} + n_i n_l \delta_{jk} + n_j n_l \delta_{ik}) + \\ + E_4 \delta_{ij}\delta_{kl} + E_5(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (13.35)$$

$$E_{iikl} = E_1 n_k n_l + E_2(\delta_{kl} + 3n_k n_l) + 4E_3 n_k n_l + 3E_4\delta_{kl} + 2E_5\delta_{kl} = 0$$

где использовано, что $n_i n_i = \vec{n}^2 = 1$ и $\delta_{ii} = 3$. Поскольку $n_k n_l$ и δ_{kl} в общем случае линейно независимы, то

$$\begin{cases} E_1 + 3E_2 + 4E_3 = 0, \\ E_2 + 3E_4 + 2E_5 = 0. \end{cases}$$

$$E_{ijkl} n_i = E_1 n_j n_k n_l + E_2(n_j \delta_{kl} + n_j n_k n_l) + E_3(n_k \delta_{jl} + n_l n_j n_k + n_l \delta_{jk} + n_k n_j n_l) + E_4 n_j \delta_{kl} + \\ + E_5(n_k \delta_{jl} + n_l \delta_{jk}) = 0 \quad (13.36)$$

$$\begin{cases} E_1 + E_2 + 2E_3 = 0, \\ E_2 + E_4 = 0, \\ E_3 + E_5 = 0, \end{cases}$$

Из систем уравнений (13.3.7) и (13.3.7) следует, что

$$E_1 = E_2 = -E_3 = -E_4 = E_5$$

$$E_{2222}(\partial_1) = E_1 n_2^4 + 2E_2 n_2^2 + 4E_3 n_2^2 + E_4 + 2E_5 = -E_4 = E_5 = \frac{1}{2}$$

Таким образом,

$$E_1 = E_2 = -E_3 = -E_4 = E_5 = \frac{1}{2}$$

$$dI(\vec{n}) = \frac{G}{72\pi} \dddot{D}_{ij} \dddot{D}_{kl} E_{ijkl}(\vec{n}) do = \frac{G}{148\pi} \dddot{D}_{ij} \dddot{D}_{kl}(n_i n_j n_k n_l + (n_i n_j \delta_{kl} + n_k n_l \delta_{ij}) - (n_i n_k \delta_{jl} + n_j n_k \delta_{il} + \\ + n_i n_l \delta_{jk} + n_j n_l \delta_{ik}) - \delta_{ij}\delta_{kl} + (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})) do \quad (13.37)$$

$$\dddot{D}_{ij} \dddot{D}_{kl}(n_i n_j n_k n_l + n_i n_j \delta_{kl} + n_k n_l \delta_{ij} - n_i n_k \delta_{jl} - n_j n_k \delta_{il} - n_i n_l \delta_{jk} - n_j n_l \delta_{ik} - \delta_{ij}\delta_{kl} + \\ + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) = \dddot{D}_{ij} \dddot{D}_{kl} n_i n_j n_k n_l - \dddot{D}_{ij} \dddot{D}_{jk} n_i n_k - \dddot{D}_{ij} \dddot{D}_{ik} n_j n_k - \dddot{D}_{ij} \dddot{D}_{jl} n_i n_l - \dddot{D}_{ij} \dddot{D}_{il} n_j n_l + 2\dddot{D}_{ij}^2$$

Таким образом,

$$dI(\vec{n}) = \frac{G}{36\pi}\left(\frac{1}{4}(\dddot{D}_{ij} n_i n_j)^2 + \frac{1}{2}\dddot{D}_{ij}^2 - \dddot{D}_{ij}\dddot{D}_{ik} n_j n_k\right) do$$

Воспользуемся формулой

$$\langle f(\vec{n}) \rangle = \frac{1}{4\pi} \int f(\vec{n}) do$$

Для вычисления $\langle n_j n_k \rangle$ воспользуемся соображениями симметрии: результат усреднения должен быть симметричным, инвариантным относительно вращений тензором II ранга. Единственная возможность:

$$\langle n_j n_k \rangle = A\delta_{jk}$$

Определим A:

$$\langle n_j n_j \rangle = 3A = 1 \to A = \frac{1}{3}$$

$$\langle n_j n_k \rangle = \frac{1}{3}\delta_{jk}$$

Для усреднения $\langle n_i n_j n_k n_l \rangle$ симметризуем индексы в тензоре IV ранга $\delta_{ij}\delta_{kl}$:

$$\langle n_i n_j n_k n_l \rangle = B(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

Определим B:

$$\langle n_i n_i n_k n_l \rangle = B(\delta_{ii}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{il} + \delta_{il}\delta_{ik}) = B(3+1+1)\delta_{kl} = \langle n_k n_l \rangle$$

$$\langle n_k n_k \rangle = 3 \cdot 5B = 1 \to B = \frac{1}{15}$$

$$\langle n_i n_j n_k n_l \rangle = \frac{1}{15}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

$$I = \frac{G}{9}\left(\frac{1}{60}\dddot{D}_{ij}\dddot{D}_{kl}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \frac{1}{2}\dddot{D}_{ij}^2 - \frac{1}{3}\dddot{D}_{ij}\dddot{D}_{ik}\delta_{jk}\right) = \frac{G}{9}\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\dddot{D}_{ij}^2$$

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = I = \frac{G}{45}\dddot{D}_{ij}^2$$

Задача

* Две частицы массами m_1 и m_2 вращаются вокруг общего центра масс с нерелятивистскими скоростями по круговым орбитам на расстоянии r друг от друга. Найдите потери энергии системой на гравитационное излучение и приближенную зависимость $r(t)$ в предположении, что взаимодействие частиц можно считать ньютоновским.

Solution

Выберем начало координат в центре масс системы. Пусть r_1 и r_2 – расстояния от центра масс до частиц.

$$m_1\vec{r}_1 = -m_2\vec{r}_2$$

Радиус-векторы частиц:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}, \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}, \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Пусть $M = m_1 + m_2$ – масса системы, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ – приведённая масса. Квадрупольный момент:

$$D_{ij}(t) = \int d^3x \rho(t,\vec{r}')(3x_i x_j - r'^2\delta_{ij})$$

Пусть ω – угловая частота частиц, $\varphi = \omega t$ – угол между прямой, соединяющей частицы и осью x. Направим ось z вдоль оси вращения системы. Компоненты квадрупольного момента:

$$D_{xx}(t) = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)(3\cos^2\omega t - 1) = \mu r^2(3\cos^2\omega t - 1) = \frac{3\mu r^2}{2}\cos 2\omega t + \bar{D}_{xx}$$

$$D_{yy}(t) = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)(3\sin^2\omega t - 1) = \mu r^2(3\sin^2\omega t - 1) = -\frac{3\mu r^2}{2}\cos 2\omega t + \bar{D}_{yy}$$

$$D_{xy}(t) = D_{yx}(t) = 3(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\sin\omega t\cos\omega t = \frac{3\mu r^2}{2}\sin 2\omega t$$

$$D_{zz}(t) = -(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) = -\mu r^2 = \bar{D}_{zz}, \quad D_{xz}(t) = D_{zx}(t) = D_{yz}(t) = D_{zy}(t) = 0$$

где сверху подчёркнуты слагаемые, не зависящие от времени. Усреднённые за период потери энергии:

$$-\frac{d\varepsilon}{dt} = I = \frac{G}{45}\langle\dddot{\bar{D}}_{ij}^2\rangle = \frac{G}{45}\left(\frac{3\mu r^2}{2}\right)^2(2\omega)^6\langle(2\sin^2 2\omega t + 2\cos^2 2\omega t)\rangle = \frac{32G\mu^2 r^4\omega^6}{5}$$

$$\varepsilon = T + \Pi = \frac{(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\omega^2}{2} - \frac{Gm_1 m_2}{r} = \frac{\mu r^2\omega^2}{2} - \frac{G\mu M}{r}$$

По теореме вириала для $\Pi \propto \frac{1}{r}$:

$$\Pi = -2T \to \omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}, \quad \varepsilon = -\frac{G\mu M}{2r}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{32G^4M^3\mu^2}{5r^5}$$

Вернёмся к обозначениям:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{32G^4 m_1^2 m_2^2(m_1+m_2)}{5r^5}$$

Связь между производными энергии и расстояния:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{Gm_1m_2}{2r^2}\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{64G^3 m_1 m_2(m_1+m_2)}{5r^3}, \quad r(0) = r_0$$

Приближённая зависимость $r(t)$:

$$r(t) = \sqrt[4]{r_0^4 - \frac{256}{5}G^3 m_1 m_2(m_1+m_2)t}$$

Решение Шварцшильда

Задача

Покажите, что векторные поля J_i, определенные как $J_x = z\partial_y - y\partial_z$, $J_y = x\partial_z - z\partial_x$, $J_z = y\partial_x - x\partial_y$, являются векторами Киллинга в плоском пространстве-времени и удовлетворяют соотношениям $[J_i, J_j] = \sum\limits_{k=x}^{z} \epsilon^{ijk} J_k$ алгебры $so(3)$.

Solution

$$J_x = z\partial_y - y\partial_z, \quad J_y = x\partial_z - z\partial_x, \quad J_z = y\partial_x - x\partial_y$$

Векторы Киллинга удовлетворяют равенствам:

$$J_{i\mu;\nu} + J_{i\nu;\mu} = 0$$

$$J_{xy;z} + J_{xz;y} = 1 - 1 = 0, \quad J_{yz;x} + J_{yx;z} = 1 - 1 = 0, \quad J_{zx;y} + J_{zy;x} = 1 - 1 = 0$$

Остальные компоненты равны 0.

Проверим соотношения $[J_i, J_j] = \sum\limits_{k=x}^{z} \epsilon^{ijk} J_k$:

$$[J_x, J_y] = (z\partial_y - y\partial_z)(x\partial_z - z\partial_x) - (x\partial_z - z\partial_x)(z\partial_y - y\partial_z) = zx\partial_y\partial_z - yx\partial_z^2 - z^2\partial_y\partial_x + yz\partial_z\partial_x + y\partial_x - \\ - xz\partial_z\partial_y - x\partial_y + z^2\partial_x\partial_y + xy\partial_z^2 - yz\partial_x\partial_z = J_z \quad (13.38)$$

$$[J_x, J_z] = (z\partial_y - y\partial_z)(y\partial_x - x\partial_y) - (y\partial_x - x\partial_y)(z\partial_y - y\partial_z) = zy\partial_y\partial_x + z\partial_x - zx\partial_y^2 - y^2\partial_z\partial_x + yx\partial_z\partial_y - \\ - yz\partial_x\partial_y + y^2\partial_x\partial_z + xz\partial_y^2 - xy\partial_y\partial_z - x\partial_z = -J_y \quad (13.39)$$

$$[J_y, J_z] = (x\partial_z - z\partial_x)(y\partial_x - x\partial_y) - (y\partial_x - x\partial_y)(x\partial_z - z\partial_x) = xy\partial_z\partial_x - zy\partial_x^2 - x^2\partial_z\partial_y + zx\partial_x\partial_y + z\partial_y - \\ - yx\partial_x\partial_z - y\partial_z + x^2\partial_y\partial_z + yz\partial_x^2 - xz\partial_y\partial_z = J_x \quad (13.40)$$

$$[J_i, J_j] = \sum_{k=x}^{z} \epsilon^{ijk} J_k$$

13.3.8 Problems from Lashkevich 6

Задача

Завершите доказательство формул.

Solution

$$J_x = \sin\varphi\partial_\theta + \cot\theta\cos\varphi\partial_\varphi, \quad J_y = -\cos\varphi$$

Задача

Проверьте формулы.

Solution

Сферически-симметричная метрика:

$$ds^2 = e^{2k(t,r)}dt^2 - e^{2h(t,r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Обратная метрика:

$$g^{\bullet\bullet} = e^{-2k(t,r)}\partial_t \otimes \partial_t - e^{-2h(t,r)}\partial_r \otimes \partial_r - r^{-2}(\partial_\theta \otimes \partial_\theta + \sin^{-2}\theta \partial_\varphi \otimes \partial_\varphi)$$

Для связности Леви-Чивиты:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{g^{\lambda\kappa}}{2}(\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu})$$

$$\Gamma^t_{tt} = \frac{g^{t\kappa}}{2}(2\partial_t g_{\kappa t} - \partial_\kappa g_{tt}) = \frac{g^{tt}}{2}\partial_t g_{tt} = \frac{e^{-2k}}{2}2\dot{k}e^{2k} = \dot{k}$$

$$\Gamma^t_{rt} = \frac{g^{t\kappa}}{2}(\partial_r g_{\kappa t} + \partial_t g_{\kappa r} - \partial_\kappa g_{rt}) = \frac{g^{tt}}{2}\partial_r g_{tt} = e^{-2k}e^{2k}k' = k'$$

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{g^{r\kappa}}{2}(2\partial_t g_{\kappa t} - \partial_\kappa g_{tt}) = -\frac{g^{rr}}{2}\partial_r g_{tt} = \frac{1}{2}e^{-2h}2k'e^{2k} = k'e^{2k-2h}$$

$$\Gamma^r_{rt} = \frac{g^{r\kappa}}{2}(\partial_r g_{\kappa t} + \partial_t g_{\kappa r} - \partial_\kappa g_{rt}) = \frac{g^{rr}}{2}\partial_t g_{rr} = -\frac{1}{2}e^{-2h}2\dot{h}e^{2h} = \dot{h}$$

$$\Gamma^t_{rr} = \frac{g^{t\kappa}}{2}(2\partial_r g_{\kappa r} - \partial_\kappa g_{rr}) = -\frac{g^{tt}}{2}\partial_t g_{rr} = \frac{1}{2}e^{-2k}2\dot{h}e^{2h} = \dot{h}e^{2(h-k)}$$

Все остальные $\Gamma^t_{\mu\nu} = 0$, поскольку из-за диагональности обратной метрики из $g^{t\kappa} \neq 0$ только g^{tt} (первый множитель в (13.3.8)), а из $g_{t\mu} \neq 0$ только g_{tt}, который от углов не зависит (первые 2 слагаемых 2 множителя в (13.3.8)), $\partial_t g_{\mu\nu} \neq 0$ только для g_{tt} и g_{rr} (последнее слагаемое 2 множителя в (13.3.8)). Т.е. все ненулевые случаи уже были рассмотрены.

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{g^{r\kappa}}{2}(2\partial_r g_{\kappa r} - \partial_\kappa g_{rr}) = \frac{g^{rr}}{2}\partial_r g_{rr} = \frac{1}{2}e^{-2h}2h'e^{2h} = h'$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{g^{\theta\kappa}}{2}(\partial_r g_{\kappa\theta} + \partial_\theta g_{\kappa r} - \partial_\kappa g_{r\theta}) = \frac{g^{\theta\theta}}{2}\partial_r g_{\theta\theta} = \frac{1}{2}r^{-2}2r = r^{-1}$$

$$\Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{g^{\varphi\kappa}}{2}(\partial_r g_{\kappa\varphi} + \partial_\varphi g_{\kappa r} - \partial_\kappa g_{r\varphi}) = \frac{g^{\varphi\varphi}}{2}\partial_r g_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}r^{-2}2r = r^{-1}$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{g^{r\kappa}}{2}(2\partial_\theta g_{\kappa\theta} - \partial_\kappa g_{\theta\theta}) = -\frac{g^{rr}}{2}\partial_r g_{\theta\theta} = -\frac{1}{2}e^{-2h}2r = -re^{-2h}$$

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = \frac{g^{r\kappa}}{2}(2\partial_\varphi g_{\kappa\varphi} - \partial_\kappa g_{\varphi\varphi}) = -\frac{g^{rr}}{2}\partial_r g_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2}e^{-2h}2r\sin^2\theta = -re^{-2h}\sin^2\theta$$

Все остальные $\Gamma^r_{\mu\nu} = 0$, поскольку из-за диагональности обратной метрики из $g^{r\kappa} \neq 0$ только g^{rr} (первый множитель в (13.3.8)), а из $g_{r\mu} \neq 0$ только g_{rr}, который от углов не зависит (первые 2 слагаемых 2 множителя в (13.3.8)), $\partial_r g_{\mu\nu} \neq 0$ только при $\mu = \nu$ (последнее слагаемое 2 множителя в (13.3.8)). Т.е. все ненулевые случаи уже были рассмотрены.

$$\Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \frac{g^{\varphi\kappa}}{2}(\partial_\theta g_{\kappa\varphi} + \partial_\varphi g_{\kappa\theta} - \partial_\kappa g_{\theta\varphi}) = \frac{g^{\varphi\varphi}}{2}\partial_\theta g_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2\sin^2\theta}2r^2\sin\theta\cos\theta = \cot\theta$$

Все остальные $\Gamma^\varphi_{\mu\nu} = 0$, поскольку из-за диагональности обратной метрики $g^{\varphi\kappa} \neq 0$ только $g^{\varphi\varphi}$ (первый множитель в (13.3.8)), а из $g_{\varphi\mu} \neq 0$ только $g_{\varphi\varphi}$, который от t и φ не зависит (первые 2 слагаемых 2 множителя в (13.3.8)), $\partial_\varphi g_{\mu\nu} = 0\ \forall\mu,\nu$ (последнее слагаемое 2 множителя в (13.3.8)). Т.е. все ненулевые случаи уже были рассмотрены.

$$\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = \frac{g^{\theta\kappa}}{2}(2\partial_\varphi g_{\kappa\varphi} - \partial_\kappa g_{\varphi\varphi}) = -\frac{g^{\theta\theta}}{2}\partial_\theta g_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta$$

Все остальные $\Gamma^\theta_{\mu\nu} = 0$, поскольку из из-за диагональности обратной метрики $g^{\theta\kappa} \neq 0$ только $g^{\theta\theta}$ (первый множитель в (13.3.8)), а из $g_{\theta\mu} \neq 0$ только $g_{\theta\theta}$, который от t, θ и φ не зависит (первые 2 слагаемых 2 множителя в (13.3.8)), $\partial_\theta g_{\mu\nu} \neq 0$ только для $g_{\varphi\varphi}$ (первые 2 слагаемых 2 множителя в (13.3.8)). Т.е. все ненулевые случаи уже были рассмотрены.

$$R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\kappa_{\lambda\nu} - \partial_\nu\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} + \Gamma^\kappa_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \Gamma^\kappa_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu} \to R_{\lambda\nu} = \partial_\mu\Gamma^\mu_{\lambda\nu} - \partial_\nu\Gamma^\mu_{\lambda\mu} + \Gamma^\mu_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\lambda\nu} - \Gamma^\mu_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\mu}$$

$$R^t_t = g^{tt}R_{tt} = g^{tt}(\partial_\mu\Gamma^\mu_{tt} - \partial_t\Gamma^\mu_{t\mu} + \Gamma^\mu_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{tt} - \Gamma^\mu_{\rho t}\Gamma^\rho_{t\mu}) = g^{tt}(\partial_t\Gamma^t_{tt} + \partial_r\Gamma^r_{tt} - \partial_t\Gamma^t_{tt} - \partial_r\Gamma^r_{tr} + \\ + \Gamma^t_{tt}(\Gamma^t_{tt} + \Gamma^r_{tr}) + \Gamma^r_{tt}(\Gamma^t_{rt} + \Gamma^r_{rr} + \Gamma^\theta_{r\theta} + \Gamma^\varphi_{r\varphi}) - (\Gamma^t_{tt})^2 - 2\Gamma^r_{tt}\Gamma^t_{tr} - (\Gamma^r_{tr})^2) \quad (13.41)$$

$$R^t_t = e^{-2k}(\ddot{k} + k''e^{2(k-h)} + 2k'(k'-h')e^{2(k-h)} - \ddot{k} - \ddot{h} + \dot{k}(\dot{k}+\dot{h}) + k'e^{2(k-h)}(k' + h' + 2r^{-1}) - \\ - \dot{k}^2 - 2k'^2e^{2(k-h)} + \dot{h}^2) \quad (13.42)$$

$$R^t_t = e^{-2k}(-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2) + e^{-2h}(k'' + k'^2 - k'h' + 2r^{-1}k')$$

$$R^r_r = g^{rr}R_{rr} = g^{rr}(\partial_\mu\Gamma^\mu_{rr} - \partial_r\Gamma^\mu_{r\mu} + \Gamma^\mu_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{rr} - \Gamma^\mu_{\rho r}\Gamma^\rho_{r\mu}) = g^{rr}(\partial_t\Gamma^t_{rr} + \partial_r\Gamma^r_{rr} - \partial_r\Gamma^t_{rt} - \partial_r\Gamma^r_{rr} - \\ - \partial_r\Gamma^\theta_{r\theta} - \partial_r\Gamma^\varphi_{r\varphi} + \Gamma^t_{rr}(\Gamma^t_{tt} + \Gamma^r_{tr}) + \Gamma^r_{rr}(\Gamma^t_{rt} + \Gamma^r_{rr} + \Gamma^\theta_{r\theta} + \Gamma^\varphi_{r\varphi}) - (\Gamma^t_{rt})^2 - 2\Gamma^t_{rr}\Gamma^r_{tr} - (\Gamma^r_{rr})^2 - (\Gamma^\theta_{\theta r})^2 - (\Gamma^\varphi_{\varphi r})^2)$$

$$R^r_r = e^{-2h}(-\ddot{h}e^{2(h-k)} - 2\dot{h}(\dot{h}-\dot{k})e^{2(h-k)} - h'' + k'' + h'' - 2r^{-1} - \ddot{h}(\dot{h}+\dot{k})e^{2(h-k)} - e^{-2h}h'(k' + h' + 2r^{-1}) + \\ + k'^2 + 2\dot{h}^2e^{2(h-k)} + h'^2 + 2r^{-2}) \quad (13.43)$$

$$R^r_r = e^{-2k}(-\ddot{h} + \dot{k}\dot{h} - \dot{h}^2) + e^{-2h}(k'' + k'^2 - k'h' + 2r^{-1}h')$$

$$R^t_r = g^{tt}R_{tr} = g^{tt}(\partial_\mu\Gamma^\mu_{tr} - \partial_r\Gamma^\mu_{t\mu} + \Gamma^\mu_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{tr} - \Gamma^\mu_{\rho r}\Gamma^\rho_{t\mu}) = g^{tt}(\partial_t\Gamma^t_{tr} + \partial_r\Gamma^r_{tr} - \partial_r\Gamma^t_{tt} - \partial_r\Gamma^r_{tr} + \Gamma^t_{tr}(\Gamma^t_{tt} + \Gamma^r_{tr}) + \\ + \Gamma^r_{tr}(\Gamma^t_{rt} + \Gamma^r_{rr} + \Gamma^\theta_{r\theta} + \Gamma^\varphi_{r\varphi}) - \Gamma^t_{tt}\Gamma^t_{tr} - \Gamma^r_{tt}\Gamma^t_{rr} - \Gamma^t_{tr}\Gamma^r_{tr} - \Gamma^r_{rt}\Gamma^r_{rr}) \quad (13.44)$$

$$R^t_r = 2r^{-1}e^{-2k}\dot{h}$$

$$R^\theta_\theta = g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} = g^{\theta\theta}(\partial_\mu\Gamma^\mu_{\theta\theta} - \partial_\theta\Gamma^\mu_{\theta\mu} + \Gamma^\mu_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\theta\theta} - \Gamma^\mu_{\rho\theta}\Gamma^\rho_{\theta\mu}) = g^{\theta\theta}(\partial_r\Gamma^r_{\theta\theta} - \partial_\theta\Gamma^\varphi_{\theta\varphi} + \Gamma^r_{\theta\theta}(\Gamma^t_{tr} + \Gamma^r_{rr} + \\ + \Gamma^\theta_{r\theta} + \Gamma^\varphi_{r\varphi}) - \Gamma^\theta_{\theta r}\Gamma^r_{\theta\theta} - \Gamma^r_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{r\theta} + (\Gamma^\varphi_{\theta\varphi})^2) \quad (13.45)$$

$$R^\theta_\theta = r^{-2}e^{-2h}(1 - 2h'r) - r^{-2}\sin^{-2}\theta + r^{-1}e^{-2h}(k' + h' + r^{-1}) - r^{-2}e^{-2h} + r^{-2}\cot^2\theta$$

$$R^\theta_\theta = -r^{-2}(1 + e^{-2h}(rh' - rk' - 1))$$

$$R^\varphi_\varphi = g^{\varphi\varphi}R_{\varphi\varphi} = g^{\varphi\varphi}(\partial_\mu\Gamma^\mu_{\varphi\varphi} - \partial_\varphi\Gamma^\mu_{\varphi\mu} + \Gamma^\mu_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\varphi\varphi} - \Gamma^\mu_{\rho\varphi}\Gamma^\rho_{\varphi\mu}) = g^{\varphi\varphi}(\partial_r\Gamma^r_{\varphi\varphi} + \partial_\theta\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} + \Gamma^\theta_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi_{\theta\varphi} + \\ + \Gamma^r_{\varphi\varphi}(\Gamma^t_{tr} + \Gamma^r_{rr} + \Gamma^\theta_{\theta r} + \Gamma^\varphi_{\varphi r}) - \Gamma^\varphi_{\varphi r}\Gamma^r_{\varphi\varphi} - \Gamma^r_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi_{r\varphi} - \Gamma^\varphi_{\varphi\theta}\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} - \Gamma^\theta_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi_{\theta\varphi}) \quad (13.46)$$

$$R^\varphi_\varphi = r^{-2}\sin^{-2}\theta(e^{-2h}\sin^2\theta - 2h're^{-2h}\sin^2\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta + re^{-2h}(k' + h' + r^{-1})\sin^2\theta - \\ - e^{-2h}\sin^2\theta - \cos^2\theta) \quad (13.47)$$

$$R^\varphi_\varphi = -r^{-2}(1 + e^{-2h}(rh' - rk' - 1))$$

Проверим, что остальные $R^\mu_\nu = 0$.

$$R^\mu_\nu = g^{\mu\kappa}R_{\kappa\nu} = g^{\mu\mu}R_{\mu\nu}$$

$$R_{t\varphi} = \partial_\kappa\Gamma^\kappa_{t\varphi} - \partial_\varphi\Gamma^\kappa_{t\kappa} + \Gamma^\kappa_{\rho\kappa}\Gamma^\rho_{t\varphi} - \Gamma^\kappa_{\rho\varphi}\Gamma^\rho_{t\kappa}$$

Первые 3 слагаемые равны 0. Выпишем слагемые $\Gamma^\kappa_{\rho\varphi}\Gamma^\rho_{t\kappa}$ с $\Gamma^\kappa_{\rho\varphi} \neq 0$:

$$R_{t\varphi} = -\Gamma^\kappa_{\rho\varphi}\Gamma^\rho_{t\kappa} = -\Gamma^\varphi_{r\varphi}\Gamma^r_{t\varphi} - \Gamma^r_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi_{tr} - \Gamma^\varphi_{\theta\varphi}\Gamma^\theta_{t\varphi} - \Gamma^\theta_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi_{t\theta} = 0$$

$$R_{t\theta} = \partial_\kappa\Gamma^\kappa_{t\theta} - \partial_\theta\Gamma^\kappa_{t\kappa} + \Gamma^\kappa_{\rho\kappa}\Gamma^\rho_{t\theta} - \Gamma^\kappa_{\rho\theta}\Gamma^\rho_{t\kappa}$$

Первые 3 слагаемые равны 0. Выпишем слагемые $\Gamma^\kappa_{\rho\theta}\Gamma^\rho_{t\kappa}$ с $\Gamma^\kappa_{\rho\theta} \neq 0$:

$$R_{t\theta} = -\Gamma^\kappa_{\rho\theta}\Gamma^\rho_{t\kappa} = -\Gamma^\theta_{r\theta}\Gamma^r_{t\theta} - \Gamma^r_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{tr} - \Gamma^\varphi_{\theta\varphi}\Gamma^\varphi_{t\varphi} = 0$$

$$R_{r\varphi} = \partial_\kappa\Gamma^\kappa_{r\varphi} - \partial_\varphi\Gamma^\kappa_{r\kappa} + \Gamma^\kappa_{\rho\kappa}\Gamma^\rho_{r\varphi} - \Gamma^\kappa_{\rho\varphi}\Gamma^\rho_{r\kappa}$$

Первые 3 слагаемые равны 0. Выпишем слагемые $\Gamma^\kappa_{\rho\varphi}\Gamma^\rho_{r\kappa}$ с $\Gamma^\kappa_{\rho\varphi} \neq 0$:

$$R_{r\varphi} = -\Gamma^\kappa_{\rho\varphi}\Gamma^\rho_{r\kappa} = -\Gamma^\varphi_{r\varphi}\Gamma^r_{r\varphi} - \Gamma^r_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi_{rr} - \Gamma^\varphi_{\theta\varphi}\Gamma^\theta_{r\varphi} - \Gamma^\theta_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi_{r\theta} = 0$$

$$R_{r\theta} = \partial_\kappa\Gamma^\kappa_{r\theta} - \partial_\theta\Gamma^\kappa_{r\kappa} + \Gamma^\kappa_{\rho\kappa}\Gamma^\rho_{r\theta} - \Gamma^\kappa_{\rho\theta}\Gamma^\rho_{r\kappa} = \partial_\theta\Gamma^\theta_{r\theta} + \Gamma^\varphi_{\theta\varphi}\Gamma^\theta_{r\theta} - \Gamma^\theta_{r\theta}\Gamma^r_{r\theta} - \Gamma^r_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{rr} - \Gamma^\varphi_{\varphi\theta}\Gamma^\varphi_{r\varphi} = \\ = \Gamma^\varphi_{\theta\varphi}\Gamma^\theta_{r\theta} - \Gamma^\varphi_{\varphi\theta}\Gamma^\varphi_{r\varphi} = \Gamma^\varphi_{\theta\varphi}(r^{-1} - r^{-1}) = 0 \quad (13.48)$$

$$R_{\varphi\theta} = \partial_\kappa\Gamma^\kappa_{\varphi\theta} - \partial_\theta\Gamma^\kappa_{\varphi\kappa} + \Gamma^\kappa_{\rho\kappa}\Gamma^\rho_{\varphi\theta} - \Gamma^\kappa_{\rho\theta}\Gamma^\rho_{\varphi\kappa} = \partial_\varphi\Gamma^\varphi_{\varphi\theta} + \Gamma^\kappa_{\varphi\kappa}\Gamma^\varphi_{\varphi\theta} - \Gamma^\theta_{r\theta}\Gamma^r_{\varphi\theta} - \Gamma^r_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{\varphi r} - \Gamma^\varphi_{\varphi\theta}\Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} = 0$$

Движение частицы в метрике Шварцшильда

Задача

Второй закон Кеплера утверждает, что угловая скорость частицы в ньютоновском гравитационном поле (и, на самом деле, в любом статическом центральном потенциальном поле в нерелятивистской механике) обратно пропорциональна квадрату расстояния до центрального тела. Найдите аналог второго закона Кеплера для тела, движущегося в метрике Шварцшильда.

Solution

$$t = t_0 \pm E \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{(1-\frac{r_g}{r})\sqrt{F(E,J,r)}}, \quad \varphi = \varphi_0 \pm J \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{F(E,J,r)}}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{J(r-r_g)}{Er^3}$$

Задача

Напишите и решите уравнение Гамильтона—Якоби в координатах Эддингтона—Финкельштейна $ds^2 = \left(1-\frac{r_g}{r}\right)(dx^+)^2 - 2dx^+dr - r^2d\Omega^2$. Найдите связь с решением $t = t_0 \pm E\int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{(1-\frac{r_g}{r})\sqrt{F(E,J,r)}}$, $\varphi = \varphi_0 \pm J\int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{F(E,J,r)}}$.

Solution

Метрика при $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$g^{\bullet\bullet} = -\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\partial_r \otimes \partial_r - 2\partial_{x^+} \otimes \partial_r - r^{-2}\partial_\varphi \otimes \partial_\varphi$$

Уравнение Гамильтона-Якоби:

$$-2\frac{\partial S}{\partial x^+}\frac{\partial S}{\partial r} - \left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 = m^2$$

Переменные x^+, φ не входят явно в уравнение. Поэтому мы можем положить соответствующие производные постоянными:

$$\frac{\partial S}{\partial x^+} = -E', \quad \frac{\partial S}{\partial \varphi} = J$$

$$S(E', J, x^+, r, \varphi) = -E'x^+ + J\varphi + S_r(E', J, r)$$

$$2E'\frac{\partial S_r}{\partial r} - \left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2 - \frac{J^2}{r^2} = m^2$$

$$\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2 - 2E'\frac{\partial S_r}{\partial r} + m^2 + \frac{J^2}{r^2} = 0$$

Решения квадратного уравнения:

$$\frac{\partial S_r}{\partial r} = \left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(E' \pm \sqrt{E'^2 - \left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(m^2+\frac{J^2}{r^2}\right)}\right)$$

$$S_r = \int\limits_{r_0}^{r}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(E' \pm \sqrt{F(E',J,r)}\right)dr, \quad F(E',J,r) = E'^2 - \left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left(m^2+\frac{J^2}{r^2}\right)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial E'} = -x_0^+, \quad \frac{\partial S_r}{\partial J} = \varphi_0$$

$$x^+ = x_0^+ + \int\limits_{r_0}^{r} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(1 \pm \frac{E'}{\sqrt{F(E', J, r)}}\right) dr$$

$$\varphi = \varphi_0 \pm J \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2 \sqrt{F(E', J, r)}}$$

$$x^+ = x_0^+ + \left(r + r_g \ln\left|\frac{r}{r_g} - 1\right|\right)\Big|_{r_0}^{r} \pm \int\limits_{r_0}^{r} \frac{E' dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\sqrt{E'^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(m^2 + \frac{J^2}{r^2}\right)}}$$

Получилась особенность при $r = r_g$, хотя в метрике Эддингтона-Финкельштейна её не было.

$$\int\limits_{r_0}^{r} \frac{E' dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\sqrt{E'^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(m^2 + \frac{J^2}{r^2}\right)}} = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(1 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\frac{m^2 + \frac{J^2}{r_g^2}}{2E'^2} + \mathcal{O}(r - r_g)\right)} =$$

$$= \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr\left(1 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\frac{m^2 + \frac{J^2}{r_g^2}}{2E'^2} + \mathcal{O}(r - r_g)\right)}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} = \left(r + r_g \ln\left|\frac{r}{r_g} - 1\right|\right)\Big|_{r_0}^{r} + \left(\frac{m^2 + \frac{J^2}{r_g^2}}{2E'^2} + \mathcal{O}(1)\right)(r - r_0)$$

При выборе знака – нерегулярная часть сокращается:

$$x^+ = -\left(\frac{m^2 + \frac{J^2}{r_g^2}}{2E'^2} + \mathcal{O}(1)\right)(r - r_0)$$

При выборе знака + она остаётся. Зато в координатах (x^-, φ) при таком выборе нерегулярной части нет. И, наоборот, нерегулярная часть есть в в координатах (x^-, φ), когда её нет в координатах (x^+, φ).

Задача

Выведите $\tau = \tau_0 \pm m \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{F(E,J,r)}}$ и покажите, что в случае свободного падения на черную дыру частица достигает горизонта $\mathcal{H}^+$, а затем и сингулярности за конечное собственное время и при ненулевых значениях момента импульса.

Solution

Собственное время:

$$d\tau = ds = -\frac{dS}{m} = \frac{E' dx^+ - J d\varphi - dS_r}{m}$$

$$\frac{d\tau}{dr} = -\frac{dS}{m dr} = \frac{E' dx^+ - J d\varphi - dS_r(E', J, r)}{m dr}$$

$$\frac{dx^+}{dr} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(1 \pm \frac{E'}{\sqrt{F(E', J, r)}}\right), \quad \frac{d\varphi}{dr} = \pm\frac{J}{r^2\sqrt{F(E', J, r)}}$$

$$\frac{dS_r}{dr} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(E' \pm \sqrt{F(E', J, r)}\right)$$

$$\frac{d\tau}{dr} = \frac{1}{m}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(E' \pm \frac{E'^2}{\sqrt{F(E', J, r)}} - E' \mp \sqrt{F(E', J, r)}\right) \mp \frac{J^2}{r^2\sqrt{F(E', J, r)}}$$

$$\frac{d\tau}{dr} = \mp\frac{1}{m}\left(\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\sqrt{F} - \frac{E'^2}{\sqrt{F}}\right) + \frac{J^2}{\sqrt{F} r^2}\right) = \mp\frac{1}{m\sqrt{F}}\left(\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(F - E'^2\right) + \frac{J^2}{r^2}\right)$$

$$\frac{d\tau}{dr} = \mp\frac{1}{m\sqrt{F}}\left(\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(F - E'^2\right) + \frac{J^2}{r^2}\right) = \mp\frac{1}{m\sqrt{F}}\left(-\left(m^2 + \frac{J^2}{r^2}\right) + \frac{J^2}{r^2}\right) = \pm\frac{m}{\sqrt{F}}$$

$$\tau = \tau_0 \pm m \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{F(E', J, r)}}$$

Для ответа на второй вопрос нужно рассмотреть сходимость интегралов:

$$\tau - \tau_0 = \pm m \int\limits_{r_0}^{r_g} \frac{dr}{\sqrt{F(E', J, r)}}, \quad \tau - \tau_0 = \pm m \int\limits_{r_0}^{0} \frac{dr}{\sqrt{F(E', J, r)}}$$

При $r_0 \leq \frac{J^2 + \sqrt{J^4 - 3J^2 m^2 r_g^2}}{m^2 r_g}$ подыинтегральное выражение 1 интеграла ограничено: $\frac{1}{\sqrt{F(E', J, r)}} \leq \frac{1}{\sqrt{F(E', J, r_0)}}$, а значит при конечном интервале интегрирования интеграл сходится. Для исследования сходимости 2 интеграла введём замену $u = \frac{1}{r}$:

$$\tau - \tau_0 = \pm m \int\limits_{r_0}^{0} \frac{dr}{\sqrt{F(E', J, r)}} = \mp m \int\limits_{u_0}^{\infty} \frac{du}{u^2 \sqrt{F(E', J, \frac{1}{u})}} \sim \int\limits_{u_0}^{\infty} \frac{du}{u^{\frac{7}{2}}}$$

Последний интеграл сходится.

Задача

Найдите все устойчивые круговые орбиты в метрике Шварцшильда, их энергии, моменты импульса и сидерические периоды в зависимости от радиуса орбиты. Найдите наименьший возможный радиус устойчивой орбиты.

Solution

Круговая траектория соответствует тому, что во время движения расстояние до чёрной дыры меняться не будет.

$$r_\circ = r_-(J_\circ) = 3r_g \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3m^2 r_g^2}{J_\circ^2}}\right)^{-1} = \text{const}$$

Функция $r_\circ(J_\circ)$ является непрерывной на всей области определения $J_\circ \in [\sqrt{3} m r_g, \infty)$. При увеличении $J_\circ$ подкорневое выражение также увеличивается, а значит увеличивается и $r_\circ$. Значит, $r^\circ = r_\circ(\sqrt{3} m r_g)$.

$$r^\circ = 3r_g$$

Это же можно получить, если заметить, что производная $r'_\circ(J_\circ)$ положительна при $J_\circ \in [\sqrt{3} m r_g, \infty)$:

$$r'_\circ(J_\circ) = \frac{9m^2 r_g^3}{\sqrt{J^2 - 3m^2 r_g^2}(J - \sqrt{J^2 - 3m^2 r_g^2})^2}$$

Выразим момент импульса:

$$J_\circ = m r_\circ \sqrt{\frac{r_g}{2r_\circ - 3r_g}}$$

Энергия находится в локальном минимуме $E_\circ = E_-(J_\circ)$:

$$E_\circ = E_-(J_\circ) = \left(\frac{2m^2}{3} + \frac{2J_\circ^2}{27 r_g^2}\left(1 - \left(1 - \frac{3m^2 r_g^2}{J_\circ^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$E_\circ = \frac{\sqrt{2} m (r_\circ - r_g)}{\sqrt{r_\circ (2r_\circ - 3r_g)}}$$

Для расчёта сидерического перида воспользуемся аналогом второго закона Кеплера, полученном в задаче 11.1 (движение по окружности будет равномерным):

$$\omega = \frac{J(r - r_g)}{E r^3}$$

$$T^\circ = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi E_\circ r_\circ^3}{J_\circ (r_\circ - r_g)}$$

$$T^\circ = 2\sqrt{2}\pi r_\circ \sqrt{\frac{r_\circ}{r_g}}$$

13.3.9 Problems from Lashkevich 7

Движение в относительно слабом гравитационном поле и экспериментальная проверка ОТО

Задача

Выведите отклонение луча света гравитационным полем, исходя из решения линеаризованных уравнений Эйнштейна: $\psi_{00} = -2r_g/r$, $\psi_{0i} = 0$, $\psi_{ik} = 0$.

Solution

Метрика:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

$$h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{d-2}\psi, \quad \psi = \psi^{\bar{\mu}}_{\mu}$$

Размерность $d = 4$:

$$h_{00} = \psi_{00} - \frac{\eta_{00}}{2}\psi = \psi_{00} - \frac{\eta_{00}}{2}\eta^{00}\psi_{00} = \frac{\psi_{00}}{2} = -\frac{r_g}{r}$$

$$h_{0i} = \psi_{0i} - \frac{\eta_{0i}}{2}\psi = 0$$

$$h_{ii} = \psi_{ii} - \frac{\eta_{ii}}{2}\psi = \frac{1}{2}\eta^{00}\psi_{00} = -\frac{r_g}{r}$$

Метрика:

$$g = \begin{pmatrix} 1-\frac{r_g}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\frac{r_g}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2\left(1+\frac{r_g}{r}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta\left(1+\frac{r_g}{r}\right) \end{pmatrix}$$

Уравнение Гамильтона-Якоби для безмассовой частицы ($\theta = \frac{\pi}{2}$):

$$\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(1+\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(1+\frac{r_g}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 = 0$$

Переменные t, φ не входят явно в уравнение. поэтому можно положить соответствубющие производные постоянными:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E, \quad \frac{\partial S}{\partial \varphi} = J$$

$$S(E, J, t, r, \varphi) = -Et + Jr + S_r(E, J, r)$$

$$S_r(E, J, r) = \pm\int dr\sqrt{F(E, J, r)}, \quad F(E, J, r) = E^2\frac{r+r_g}{r-r_g} - \frac{J^2}{r^2}$$

$$\varphi = \varphi_0 \pm J\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2\sqrt{F(E, J, r)}} = \varphi_0 \pm J\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2\sqrt{E^2\frac{r+r_g}{r-r_g} - \frac{J^2}{r^2}}}$$

Момент импульса J выражается через прицельный параметр ρ:

$$J = E\rho$$

Полный угол, заметаемый лучом

$$\Phi = 2\int_{R_{\min}}^{\infty}\frac{dr}{r^2\sqrt{f(\rho, r)}}, \quad f(\rho, r) = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{r+r_g}{r-r_g}\right) - \frac{1}{r^2}$$

где $R_{\min}$ – решение уравнения

$$f(\rho, R_{\min}) = 0$$

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{R_{\min}+r_g}{R_{\min}-r_g} - \frac{1}{R_{\min}^2} = 0 \to \frac{1+\frac{r_g}{R_{\min}}}{1-\frac{r_g}{R_{\min}}} = \frac{\rho^2}{R_{\min}^2}$$

$$1+\frac{r}{r_g}=\frac{\rho}{R_{\min}}$$

$$R_{\min}=\rho-r_g$$

В случае плоского пространства ($r_g=0$) этот угол равен

$$\Phi_0=2\int\limits_{\rho}^{\infty}\frac{dr}{r^2\sqrt{\rho^{-2}-r^{-2}}}=\pi$$

Для вычисления отклонения луча от прямой введём замену координат $r=\tilde{r}-r_g$:

$$\theta=\Phi-\Phi_0=2\int\limits_{\rho-r_g}^{\infty}\frac{dr}{r^2\sqrt{f(\rho,r)}}-\pi=2\int\limits_{\rho}^{\infty}\frac{d\tilde{r}}{(\tilde{r}-r_g)^2\sqrt{f(\rho,\tilde{r}-r_g)}}-\pi=$$

$$=2\int\limits_{\rho}^{\infty}\frac{d\tilde{r}}{(\tilde{r}-r_g)^2\sqrt{\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\tilde{r}}{\tilde{r}-2r_g}\right)-\frac{1}{(\tilde{r}-r_g)^2}}}-\pi=2\int\limits_{\rho}^{\infty}\frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}^2(1-\frac{2r_g}{\tilde{r}})\sqrt{(\rho^{-2}-\tilde{r}^{-2})\left(1+\frac{2r_g}{\tilde{r}}\right)}}-\pi=$$

$$=2\int\limits_{\rho}^{\infty}\frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}^2\sqrt{\rho^{-2}-\tilde{r}^{-2}}}\left(1+\frac{r_g}{\tilde{r}}\right)-2\int\limits_{\rho}^{\infty}\frac{dr}{\tilde{r}^2\sqrt{\rho^{-2}-\tilde{r}^{-2}}}=2r_g\int\limits_{\rho}^{\infty}\frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}^3\sqrt{\rho^{-2}-\tilde{r}^{-2}}}=$$

$$=\frac{2r_g}{\rho}\int\limits_0^1\frac{\xi d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}=\frac{2r_g}{\rho}\quad(13.49)$$

$$\theta=\frac{4GM}{\rho}$$

Заряженные и вращающиеся чёрные дыры

Задача

Решив уравнения Эйнштейна с тензором энергии-импульса $T_t^t=T_r^r=-T_\theta^\theta=-T_\varphi^\varphi=\frac{Q^2}{32\pi^2r^4}$, получите метрику Рейснера—Нордстрема $ds^2=\left(1-\frac{r_g}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\right)dt^2-\left(1-\frac{r_g}{r}+\frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2-r^2d\Omega^2$, где $r_Q^2=\frac{GQ^2}{4\pi}$.

Solution

Уравнения Эйнштейна:

$$R_{\mu\nu}=8\pi G\left(T_{\mu\nu}-\frac{g_{\mu\nu}}{d-2}T\right)=8\pi GT_{\mu\nu}$$

$$R_\nu^\mu=8\pi GT_\nu^\mu$$

$$R_t^t=8\pi GT_t^t=\frac{GQ^2}{4\pi r^4},\quad R_r^r=8\pi GT_r^r=\frac{GQ^2}{4\pi r^4},\quad R_r^t=8\pi GT_r^t=0,\quad R_\theta^\theta=8\pi GT_\theta^\theta=-\frac{GQ^2}{4\pi r^4}$$

$$\begin{cases}R_t^t=e^{-2k}(-\ddot{h}+\dot{k}\dot{h}-\dot{h}^2)+e^{-2h}(k''+k'^2-k'h'+2r^{-1}k')=\frac{r_Q^2}{r^4},\\ R_r^r=e^{-2k}(-\ddot{h}+\dot{k}\dot{h}-\dot{h}^2)+e^{-2h}(k''+k'^2-k'h'-2r^{-1}h')=\frac{r_Q^2}{r^4},\\ R_r^t=2r^{-1}e^{-2k}\dot{h}=0,\\ R_\theta^\theta=-r^{-2}(1+e^{-2h}(rh'-rk'-1))=-\frac{r_Q^2}{r^4};\end{cases}$$

$$\dot{h}=0$$

$$\begin{cases}e^{-2h}(k''+k'^2-k'h'+2r^{-1}k')=\frac{r_Q^2}{r^4},\\ e^{-2h}(k''+k'^2-k'h'-2r^{-1}h')=\frac{r_Q^2}{r^4},\\ r^{-2}(1+e^{-2h}(rh'-rk'-1))=\frac{r_Q^2}{r^4};\end{cases}$$

Вычтем из 1 уравнения 2 и получим:

$$k'+h'=0\to k'=-h'\to k(t,r)=F(t)-h(r)$$

Избавимся от $F(t)$ при помощи замены $t' = \int dt e^{F(t)}$.

$$\begin{cases} e^{-2h}(-h'' + 2h'^2 - 2r^{-1}h') = \frac{r_Q^2}{r^4}, \\ r^{-2}(1 + e^{-2h}(2rh' - 1)) = \frac{r_Q^2}{r^4}. \end{cases}$$

$$1 - r(e^{-2h})' - e^{-2h} = \frac{r_Q^2}{r^2}$$

$$e^{-2h} = 1 + \frac{r_Q^2}{r^2} + \frac{C}{r} = e^{2k}$$

Проверим, что это решение удовлетворяет 1 уравнению системы (13.3.9):

$$h = -\frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{r_Q^2}{r^2} + \frac{C}{r}\right), \quad h' = \frac{Cr + 2r_Q^2}{2r(Cr + r^2 + r_Q^2)}$$

$$h'' = -\frac{C^2r^2 + 2Cr^3 + 4Crr_Q^2 + 6r^2r_Q^2 + 2r_Q^4}{2r^2(Cr + r^2 + r_Q^2)^2}$$

$$\left(1 + \frac{r_Q^2}{r^2} + \frac{C}{r}\right)\left(\frac{C^2r^2 + 2Cr^3 + 4Crr_Q^2 + 6r^2r_Q^2 + 2r_Q^4}{2r^2(Cr + r^2 + r_Q^2)^2} + \frac{(Cr + 2r_Q^2)^2}{2r^2(Cr + r^2 + r_Q^2)^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{Cr + 2r_Q^2}{r^2(Cr + r^2 + r_Q^2)}\right) = \frac{r_Q^2}{r^4} \quad (13.50)$$

В метрике Шварцшильда:

$$e^{2k} = 1 - \frac{r_g}{r}$$

При $r \to \infty$ метрика Рейснера-Нордстрема должна асимптотически переходить в метрику Шварцшильда, поэтому

$$C = r_g$$

Таким образом, метрика Рейснера-Нордстрема:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

Космологические решения. Модели Фридмана

Задача

Получите уравнение $\frac{d\rho}{\rho+p} + 3d\log a = 0$ прямым интегрированием уравнения движения $2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2+k}{a^2} = -8\pi G p$ с использованием уравнения Фридмана $\frac{3(\dot{a}^2+k)}{a^2} = 8\pi G\rho$.

Solution

Вычтем из уравнения Фридмана уравнение движения:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{2(\dot{a}^2 + k)}{a^2} = -8\pi G(p + \rho)$$

$$\frac{a\ddot{a} - \dot{a}^2 - k}{a^2} = -4\pi G(p + \rho)$$

Продифференцируем по времени уравнение Фридмана:

$$\frac{6\dot{a}\ddot{a}}{a^2} - \frac{3(\dot{a}^2 + k)2\dot{a}}{a^3} = 8\pi G\dot{\rho}$$

$$\frac{3\dot{a}(a\ddot{a} - \dot{a}^2 - k)}{a^3} = 4\pi G\dot{\rho}$$

Разделим (13.3.9) на (13.3.9):

$$-\frac{\dot{\rho}}{p + \rho} = \frac{3\dot{a}}{a}$$

$$\frac{d\rho}{p + \rho} + 3d\log a = 0$$

13.4 Questions on Understanding Gravity

13.4.1 Questions on Understanding the Nature of Gravity

13.4.2 Questions on Understanding the Formalism of GR

Если определитель метрического тензора обнуляется, то что это значит? (????)

(подумаю потом, пока хз. ну особенность, ну и что? почему в больших грав волнах мы можем такие решения находить? короче, потом подумаю, пока не актуально вообще.)

13.4.3 Questions on Understanding the Properties of GR

I-check-pr-1. Линеаризованная энергия

Что можно сказать про обмен энергией и импульсом между гравитационном полем и материи в 1 порядке малости?

Answer:

(ничего, оно за пределами этого. напишу с формулами ответ, это четко в теории написано будет)

13.4.4 Questions on Understanding the Details of GR

Находимся ли мы внутри черной дыры?

(там спорный ответ, что невозможно проверить. подумаю еще, я остановился на ответе, что нет, потому что до нас долетают сигналы от дальних объектов. а что было бы если бы была черная дыра? то же самое бы и видели мы???? додумаю, теорию дотренировать нужно еще.)

13.5 Problems about Typical Models

13.5.1 Problems about Physics in Gravity (???)

(название такое же, как и раздела 12, потом разберу, почему так?)

Leuven-2023.HW1.2/2 Time Dilation for Orbiting GPS Satellites (?!!!!)

General Relativity finds important applications in GPS navigation.
Clocks at different heights tick at a different pace and ignoring these corrections would affect timing comparison between the surface of the Earth (or another planet) and satellites in orbit around it. This in turn will lead to large cumulative distance errors. To understand this better we will use the following metric which is a good approximation away from the surface of any planet in the Solar System: [2]

$$ds^2 = -(1+2\Phi)c^2dt^2 + (1-2\Phi)dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right),$$

where r is the coordinate that starts at the center of the planet at $r = 0$ and:

$$\Phi = -\frac{GM}{c^2 r}.$$

Here G is Newton's constant and M is the mass of the planet.
1.) Show that a satellite in circular motion at fixed $r = R$ and $\theta = \pi/2$ obeys

$$\dot{t}^2 = \frac{R^3}{GM}\dot{\phi}^2,$$

where the dot represents derivative with respect to the proper time.
2.) Assume that you want to apply your knowledge to the problem of GPS navigation on Jupiter. How much proper time elapses while a satellite at distance $R_s = 100000$ km from the surface of Jupiter goes through one orbit? You can assume that Jupiter has a radius of $R_M = 70000$ km. The mass of Jupiter is approximately 1.90×10^{27} kg.
3.) How does your result in 2. above compare with the proper time elapsed on a stationary clock on the surface of Jupiter?
4.) Estimate the error you will have in this calculation for one orbit if you have ignored the effects of General Relativity.

1

(??? вообще мб в раздел по ньют мех перекину, тут же вообще нет ото???)
The satellite will follow a geodesic, and so its path $x^\mu(\lambda)$ is described by the geodesic equation

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0$$

where λ is the affine parameter along the geodesic. We can take this to be τ, the proper time that the satellite experiences, and so we can write this as

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho = 0,$$

where dots denote derivatives with respect to τ.

Notes: Let me emphasize: ν, ρ in the above equation are summed over/repeated indices. You can't just "choose" a value (like you do for the free index μ)!

Notes: Although it is not wrong, you see you did not need to calculate all four of the geodesic equations explicitly. The satellite orbits at a constant r and θ, which means that both $\dot{r}$ and $\dot{\theta}$ are zero. The r-component of the geodesic equation therefore simplifies to

$$\Gamma^r_{tt}\dot{t}^2 + 2\Gamma^r_{t\phi}\dot{t}\dot{\phi} + \Gamma^r_{\phi\phi}\dot{\phi}^2 = 0.$$

The three Christoffel symbols that appear in the above equation are the only Christoffel symbols we need to compute.

First, we note that the metric is diagonal, and so any symbol with three different indices (like $\Gamma^r_{t\phi}$) will vanish. Then, since the metric components depend only on r and θ, the two remaining symbols are computed as follows:

$$\Gamma^r_{tt} = -\frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{tt} = \frac{1}{2(1-2\Phi)}\partial_r\left(c^2 - \frac{2GM}{r}\right) = \frac{GM}{r^2(1-2\Phi)},$$

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = -\frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{\phi\phi} = -\frac{1}{2(1-2\Phi)}\partial_r\left(r^2\sin^2\theta\right) = -\frac{r\sin^2\theta}{1-2\Phi}.$$

Note that we used the fact that the metric is diagonal to easily compute $g^{rr} = \frac{1}{g_{rr}}$. If we now fix $r = R$ and $\theta = \frac{\pi}{2}$ and plug the Christoffel symbols into the geodesic equation (2.3), we find that

$$\frac{1}{1-2\Phi}\left(\frac{GM}{R^2}\dot{t}^2 - r\dot{\phi}^2\right) = 0,$$

the solution of which requires

$$\dot{t}^2 = \frac{R^3}{GM}\dot{\phi}^2.$$

Note that we had to compute the Christoffel symbols before fixing r and θ to be constant. Doing this the other way around will give the wrong result.

2.)

In the remaining problems, let $R_S = R_M + R_o$ be the distance between the satellite and the center of the Jupiter. Our result from the previous problem tells us that any infinitesimal changes in time dt and angle $d\phi$ along the satellite's path are related by

$$dt^2 = \frac{R_S^3}{GM}d\phi^2.$$

Additionally, since r and θ are fixed, $dr = d\theta = 0$ along the satellite's path. Therefore, the proper time τ that the satellite experiences is defined by

$$ds^2 = -c^2d\tau^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2R_S}\right)c^2dt^2 + R_S^2d\phi^2.$$

Solving for $d\tau$, we find that

$$\begin{aligned} d\tau &= \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2R_S}\right)dt^2 - \frac{R_S^2}{c^2}d\phi^2} \\ &= \sqrt{\left(1 - \frac{2GM}{c^2R_S}\right)\frac{R_S^3}{GM}d\phi^2 - \frac{R_S^2}{c^2}d\phi^2} \\ &= \sqrt{\frac{R_S^3}{GM} - \frac{3R_S^2}{c^2}}d\phi. \end{aligned}$$

For one full period, ϕ will go from $\phi = 0$ to $\phi = 2\pi$, and thus the change in proper time $\Delta\tau_S$ the satellite experiences over the course of this orbit is simply

$$\Delta\tau_S = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{R_S^3}{GM} - \frac{3R_S^2}{c^2}}\, d\phi = 2\pi\sqrt{\frac{R_S^3}{GM} - \frac{3R_S^2}{c^2}}.$$

If we evaluate this explicitly, we find that

$$\Delta\tau_S \approx 39121.32249 \text{ seconds}$$

which is about 11 hours. Note that you might get a slightly different result depending on what values (and precision) of G and M you use, which is totally fine.

3.)

To find the proper time an observer on Jupiter experiences while the satellite undergoes a full orbit, we need to first calculate the coordinate time Δt it takes for this orbit to occur. To compute this, we use the relationship (2.7) to express

$$dt = \sqrt{\frac{R_S^3}{GM}}\, d\phi,$$

and thus the coordinate time difference for one full period is

$$\Delta t = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{R_S^3}{GM}}\, d\phi = 2\pi\sqrt{\frac{R_S^3}{GM}}.$$

Now, we need to relate this coordinate time to the proper time an observer on Jupiter experiences. Note that the Jupiter observer is not following a geodesic; they are standing
on Jupiter (which we assume is not rotating), and thus r, θ, and ϕ are all constant for this observer. Thus the proper time of the observer is given by

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 R_M}\right) c^2 dt^2.$$

Solving for $d\tau$, this yields

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R_M}}\, dt.$$

We calculated the coordinate time difference Δt required for the satellite to make a full orbit in (2.13). If we integrate the above equation, we find that the proper time difference $\Delta\tau_M$ experienced on Jupiter during this orbit is

$$\Delta\tau_M = \int \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R_M}}\, dt = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R_M}}\, \Delta t = 2\pi\sqrt{\frac{R_S^3}{GM} - \frac{2R_S^3}{c^2 R_M}}.$$

Importantly, this is not the same as the proper time experienced by the satellite! If we plug in numbers, this comes out to approximately

$$\Delta\tau_M \approx 39121.32219 \text{ seconds},$$

which is again close to 11 hours. The difference between the satellite and Earth proper times is

$$\Delta\tau_S - \Delta\tau_M \approx 3 \times 10^{-4} \text{ seconds},$$

which is a very small (but non-zero) difference due to gravitational time dilation. (It is also completely fine to use a Taylor expansion to approximate this difference.)

Notes: A number of people also took into account the Jupiter' rotation. That's fine if you calculate it correctly, the rotation of the Jupiter will give you only a tiny difference to the actual result. (But note: the metric we gave is clearly a non-rotating metric!) Less fine was assuming that the same equation (2.9) held for the observer on Jupiter, too: a stationary observer on Jupiter certainly does not rotate with the same speed as the satellite!

4.)

In the absence of any relativistic effects, the time ΔT it takes for the satellite to orbit is given simply by Kepler's Law:

$$\Delta T = 2\pi\sqrt{\frac{R_S^3}{GM}}.$$

Notice that this is the same as the coordinate time Δt that we calculated earlier. Additionally, we could have also reached this same conclusion if we took $c \to \infty$ in either our answer to problem 2 or to problem 3. We should also note that this is the same as the time the observer on Jupiter would feel as the satellite completes one orbit. Time dilation is a purely relativistic phenomenon, with no counterpart in classical mechanics.

If we plug in numbers, this non-relativistic period is given by

$$\Delta T \approx 39121.3 \text{ seconds} ,$$

which is actually greater than both $\Delta\tau_S$ and $\Delta\tau_M$. To be more specific, the differences are

$$\Delta T - \Delta\tau_S \approx 10^{-4} \text{ seconds} ,$$
$$\Delta T - \Delta\tau_M \approx 10^{-4} \text{ seconds} .$$

So, not only do relativistic effects lead to a difference in the time felt between the observer on Jupiter and the satellite on the order of 10^{-4} seconds, but the relativistic effects also lead to a change in the proper orbital time itself, again on the order of 10^{-4} seconds.

Notes: Some people interpreted the question as asking for the special relativistic time dilation effect (without taking into account gravity), which was fine (but then you need to do it correctly, of course!). These differences are small but non-negligible. If we were to use these satellites to triangulate someone's position on Jupiter by sending out light rays to the satellites, this error of $\Delta t \sim 10^{-4}$ seconds leads to an error in measuring distances on the order of

$$\Delta d \sim c\Delta t \sim 30000 \text{ m per orbit.}$$

Over the course of just a single (Earth) day, the satellite undergoes about two orbits, and so the error thus accumulates to about 60000 m if we do not account for relativity correctly! It is therefore crucial for GPS navigation that we understand relativity.

L-14.1

Solution

14.1.

Найдем сначала, какой тензор энергии-импульса соответствует точечной частице. Пусть масса частицы есть m. В мгновенно сопутствующей системе все компоненты $T^{\mu\nu}$ обращаются в нуль, кроме T^{00}, которая дожна иметь вид -функции от координат частицы. Поэтому

$$T^{\mu v} \sim \int \delta^4\left(x^a - x^\alpha(\tau)\right) u^\mu u^v d\tau,$$

где $x^\alpha(\tau)$ - траектория частицы в пространстве-времени как функция ее собственного времени τ. Далее, мы хотим, чтобы величина $T^{\mu v}$ преобразовывалась как тензор. Произведение $u^\mu u^v$ уже преобразовывается как тензор, но $\delta^4\left(x^\alpha - x^\alpha(\tau)\right)$ не есть скаляр-истинным скаляром является $\delta^4\left(x^\alpha - x^\alpha(\tau)\right)(-g)^{-1/2}$. Действительно,

$$1 = \text{ скаляр } = \int \delta^4\left(x^\alpha - x^\alpha(\tau)\right) d^4x = \int \frac{\delta^4}{(-g)^{1/2}}(-g)^{1/2} d^4x.$$

Таким образом, нормируя на массу m, будем иметь

$$T^{\mu v} = m\int \delta^4\left(x^\alpha - x^\alpha(\tau)\right)\frac{u^\mu u^v}{(-g)^{1/2}} d\tau \equiv \int \rho u^\mu u^v d\tau,$$

где ρ включает в себя все члены, за исключением 4-скоростей u. Далее,

$$0 = T^{uv}; v = \int \left[\left(\rho u^v\right)_{;v} u^\mu + \left(\rho u^v\right) u^\mu_{;v}\right] d\tau.$$

Умножая скалярно на u^μ, получаем

$$0 = \int \left[-\left(\rho u^v\right)_{;v} + \rho(\nabla u\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}\right] d\tau.$$

Второй член равен нулю, поскольку 4-ускорение ∇ иu ортогонально 4-скорости. Отсюда следует, что первый член также равен нулю, и поэтому из уравнения (3) находим

$$0 = \int (\rho u^v)\, u^\mu : 1\tau$$

Это означает, что $u^v u^\mu; v = 0$, независимо от того, в какой точке плотность ρ (-функция) отлична от нуля, т. е. в каком месте ни находилась бы частица. Но ведь $u^v u^\mu{}_{;v} = 0$ и есть уравнение геодезической!

Solution

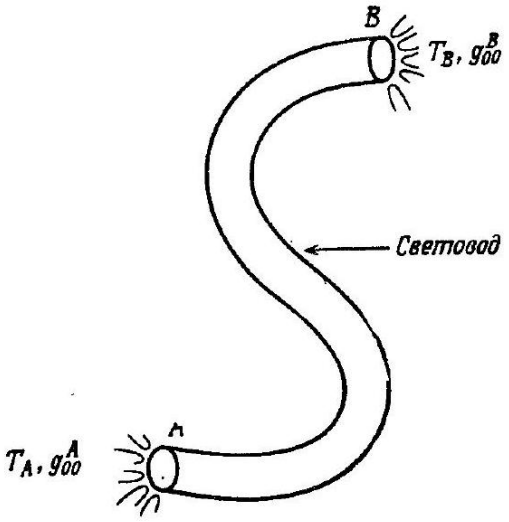
14.2. Если система находится в тепловом равновесии, то суммарный поток энергии между любыми двумя элементарными объемами A и B (фиг. 27), для которых разрешен сбмен энергией, будет равен нулю. Представим себе теперь «световод», соединяющий два таких элементарных объема; по нему может распространяться переносящий тепло поток фотонов. Поскольку и световод, и вся система статичны, энергия фотона при внутреннем отражении в световоде не меняется. Тем не менее между A и B существует обмен энергией за счет гравитационного красного смещения:

$(hv)_A/(hv)_B = \left(-g_{00}^B\right)^{1/2} / \left(-g_{00}^A\right)^{1/2}$

Воспользуемся теперь тем, что спектральная яркость излучения абсолютно черного тела $B_v\,(T_A)$ в A изменяется за счет красного смещения любой природы таким образом, что в результате снова получается спектр излучения абсолютно черного тела, но только соответствующий другой температуре:

$$T_B = [(hv)_B/(hv)_A]\, T_A$$

Если при этом сохраняется теп-



Фиг. 27. ловое равновесие, то именно такова должна быть температура окружающей среды в B, чтобы восходящий и нисходящий тепловые потоки в световоде взаимно компенси ровались. Итак,

$$T_B = \left[\left(-g_{00}^A\right)^{1/2} / \left(-g_{00}^B\right)^{1/2}\right] T_A$$

$$T\left(-g_{00}\right)^{1/2} = \text{const}$$

в любой точке системы.

Solution

14.3. Для идеальной жидкости тензор энергии-импульса имеет вид

$$T^{\mu v} = (\rho + p) u^\mu u^v + p g^{\mu v}$$

и, следовательно, уравнения движения суть

$$0 = T^{\mu v}_{:v} = (\rho + p)_{iv} u^\mu u^v + (\rho + p)\left(u^\mu_{;v} u^v + u^\mu u^v_{iv}\right) + p_{,v} g^{\mu v}.$$

Чтобы получить уравнение Эйлера, спроектируем это уравнение ортогонально $\mathbf{u}$, воспользовавшись проекционным оператором-тен- Зором

В результате найдем

$$P_{\alpha\beta} = u_\alpha u_\beta + g_{\alpha\beta}$$

$$0 = P_{\alpha\mu}T^{\mu v} : v =$$
$$= 0 + P_{\alpha\mu}(\rho + p)u^{\mu}; vu^{v} + 0 + p_{,v}g^{\mu v}P_{\alpha\mu} =$$
$$= (\rho + p)u_{\alpha;v}u^{v} + p_{,\alpha} + p_{,v}u^{v}u^{\alpha},$$

т. е. как раз уравнение Эйлера.
Переходя к ньютоновскому пределу (см. решение задачи 14.8), запишем уравнение Эйлера в виде

$$p_0\left(1 + \pi + p/\rho_0\right)\left(u_{i,v}u^{v} - \Gamma^{\alpha_{vj}}u_{\alpha}u^{v}\right) = -p_{,j} - u_j dp/d\tau.$$

Подставляя значения $u^0 = 1, u_0 = -1, u_j = v_j$, будем иметь
Но

$$\rho_0\left(d\tau_j/d\tau + \Gamma^0_{0j}\right) \approx -p_j$$

$$\Gamma^0_{0j} \approx -\Gamma_{001} = -\frac{1}{2}g_{00,j} \approx \varphi_{,j}$$

откуда окончательно получим

$$\frac{dv_j}{d\tau} = -\varphi_{.j} - \frac{1}{\rho_0}p_{,j}$$

Solution

14.4. Уравнение Эйлера для идеальной жидкости имеет вид

$$(\rho + p)\nabla\mathbf{u}\mathbf{u} = -\nabla p - \mathbf{u}\nabla\mathbf{u}p.$$

Из условия наличия гидростатического равновесия следует существование временного вектора Киллинга. Согласно задаче 13.9, 4-скорость жидкости должна быть параллельна этому вектору Киллинга, т. е.

$$\mathbf{u} = \xi/|\boldsymbol{\xi}|$$

(В компонентах такая запись означает, что только там $u^t = 0$, где $\xi = \partial/\partial t$.) Из задачи 10.14 нам известно, что

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = \frac{1}{2}\nabla\ln|\boldsymbol{\xi}\cdot\xi|$$

Мы знаем также, что $\partial p/\partial t = 0$, т. е. $\nabla_{\mathrm{u}}p \sim \nabla_{\xi}p = 0$, и, следовательно,
Но

$$\nabla p = -(\rho + p)\nabla\ln|\xi\cdot\xi|^{1/2}$$

ТаК чТО

$$\xi\cdot\xi = (\partial/\partial t)\cdot(\partial/\partial t) = g_{00}$$

$|\xi\cdot\xi|^{1/2} = (-g_{00})^{1/3}$,
откуда и следует требуемый результат. В ньютоновском пределе $p \leqslant \rho$ и $g_{00} \approx -(1 + 2\Phi)$, иричем ньютоновский потенциал $\Phi < 1$. Следовательно,

$$\frac{\partial p}{\partial x^v} \approx -\rho\frac{\partial}{\partial x^v}\frac{1}{2}\ln(1 + 2\Phi) \approx -\rho\frac{\partial\Phi}{\partial x^v}.$$

Solution

14.5. Подставляя $p = 1/s\rho$ в уравнение гидростатического равновесия (см. задачу 14.4)
получаем

$$p,\lambda = (\rho + p)\left[\ln\left(-g_{00}\right)^{1/2}\right],\lambda,$$

Интегрирование дает

$$-\ln\left(-g_{00}\right)^{1/2} = \frac{1}{4}\int\frac{d\rho}{\rho}.$$

$$\rho = \text{ const }\cdot\left(-g_{00}\right)^{2}.$$

Поскольк у g_{00} остается конечным, ρ не может обратиться в нуль, и, следовательно, свободной поверхности не существует.

Solution

14.6. Статическому однородному гравитационному полю соответствует линейный элемент

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{zz}dz^2 + dx^2 + dy^2,$$

где величины g_{tt} и g_{zz} зависят только от z. Не обращающиеся в нуль символы Кристоффеля легко вычисляются (см. задачу 7.6). Вес, измеряемый с помощью весов при $z = 0$, есть $W(0)$, где

$$W(z) = \int T^{\hat{z}\hat{z}}dxdy = \int g_{zz}T^{zz}dxdy.$$

Мы хотим доказать, что $W(0)$ зависит только от $T^{\hat{i}\hat{i}} = g_{tt}T^{tt}$ и не зависит от других компонент T . Имеем

$$0 = T^{\alpha\beta}_{;\beta} = |g|^{1/2}\left(|g|^{1/2}T^{\alpha\beta}\right)_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}T^{\beta\nu}.$$

Положим $\alpha = t$ и проинтегрируем по x и y, воспользовавшись тем фактом, что $g_{\alpha\beta}$ не зависит от x, y и t:

$$0 = \int T^{tt}, tdxdy + \int T^{tx}, xdxdy + \int T^{ty}, {}_{,y}dxdy +$$
$$+ |g|^{1/n}\left(|g|^{1/2}\int T^{tz}dxdy\right)_{,z} + 2\Gamma^{t}_{tz}\int T^{tz}dxdy.$$

Первый член обращается в нуль ввиду того, что $T^{\hat{i}\hat{i}}$ не зависит от времени. Второй и третий члены дают вклады, пропорциональные значениям T^{tx} и T^{ty} на границе области интегрирования, которые в свою очередь обращаются в нуль на границах, расположенных вне сосуда. Уравнение (4) можно записать ь виде

$$0 = |g|^{-1/2}g_{tt}^{-1}\left(|g|^{1/2}g_{tt}\int T^{tz}dxdy\right)_{,z}.$$

Отсюда следует, что

$$|g|^{1/2}g_{tt}\int T^{tz}dxdy$$

не зависит от z. Поэтому если этот член обращаегся в нуль в области выше сосуда, то он равен нулю всюду.

Подставим теперь в уравнение (3) $\alpha = z$ и проинтегрируем по x и y:

$$0 = \int T^{zt}, {}_{,t}dxdy + \int T^{zx}, {}_{x}dxdy + \int T^{zy}, {}_{,y}dxdy + |g| - \frac{1}{2}\left(|g|\frac{1}{2}\int Tzzdxdy\right)z +$$
$$+\Gamma z\prime t\int Ttdxdy + \Gamma_{zz}z\int Tzzdxdy.$$

Первый член обращается в нуль по соображениям, изложенным выше, а второй и третий дают вклады, которые зависят от границы области интегрирования и 1акже обращаются в нашем случае в нуль. Используя уравнение (2), находим

$$\left(|g_{tt}|^{1/2}W\right)_{,z} = g_{tt}|^{1/2}, z\int T^{\hat{t}t}dxdy$$

Проинтегрируем уравнение (7) от $z = 0$ до верхней границы сосуда и, воспользовавшись тем, что $W :_{\text{верх}} = 0$, получим выражение

$$W(0) = |g_{tt}|\,{}^{-1/2}_{z=0}\int_0^{\text{вер}\ x} dz\int dxdy\,|g_{tt}|^{1/2}, zT^{\hat{t}\hat{t}}$$

зависящее только от компоненты $T^{\hat{t}\hat{t}}$. (Данным решением задачи мы обязаны В. Унру.)

13.5.2 Problems about Physical Effects of Gravity 2

Solution

14.7. Поскольку гравитационное поле стационарно, существует временной вектор Киллинга $\xi = \partial/\partial t$. Умножим скалярно на этот вектор уравнение Эйлера для течения идеального газа (задача 14.3):

$$(\rho + p)\xi \cdot \nabla_u \mathbf{u} = -\xi \cdot \nabla p - \xi \cdot \mathbf{u}\nabla_u p$$

Но, гак как, согласно уравнению Киллинга, $\nabla\xi$ а нтисимметрично,

$$\xi \cdot \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = \nabla_{\mathbf{u}}(\xi \cdot \mathbf{u}) - (\nabla_{\mathbf{u}}\xi) \cdot \mathbf{u} = \nabla_{\mathrm{u}}(\xi \cdot \mathbf{u}).$$

Кроме того, для стационарного течения

$$\xi \cdot \nabla p = \partial p/\partial t = 0$$

Подставляя $u_0 = \mathbf{u} \cdot \xi$, находим

$$(\rho + p)du_0/d\tau = u_0 dp/d\tau$$

Для адиабатического течения идеальной жидкости первое начало термодинамики (см. задачу 5.19) гласит:

$$d\rho = (\rho + p)dn/n$$

Из уравнений (2) и (3) имеем

$$\frac{du_0}{u_0} = \frac{dn}{n} - \frac{d(\rho + p)}{\rho + p}$$

откуда следует

$$u_0 = \text{const} \cdot \frac{n}{\rho + p}$$

Solution

14.8. Ньютоновский предел уравнений релятивистской гидродинамнки можно получить, если выбрать глобальную, почти лоренцевскую систему, в которой

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0(1 + \pi), & \pi &\ll 1, \\ g_{00} &= -(1 + 2\varphi), & |\varphi| &\ll 1, \\ p/\rho_0 &\ll 1, & v^2 &\ll 1. \end{aligned}$$

Здесь $\rho_0 = nm_B$ есть плстность массы покоя (m_B - средняя масса покоя бариона), л-удельная внутренняя энергия, φ - ньютоновский потенциал и v-обычная 3-скорость жидкости. Поскольку

$$u^{\hat{o}} = \left(1 - v^2\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}v^2$$

и

$$u_0 = (-g_{00})^{1/2}\, u\hat{o} \approx 1 + \frac{1}{2}v^2 + \varphi$$

уравнение Бернулли принимает вид
откуда следует

$$\left(1 + \frac{1}{2}v^2 + \varphi\right) = \frac{\text{const} \cdot n}{\rho_0\left(1 + \pi + p/\rho_0\right)}$$

$$\left(1 + \frac{1}{2}v^2 + \varphi\right)\left(1 + \pi + p/\rho_0\right) = \text{ const}$$

и, наконец,

$$\frac{1}{2}v^2 + \varphi + \pi + p/\rho_0 = \text{ const}.$$

Pewerue 14.9.
а) Условие, что ξ есть вектор, связывающий мировые линии соседних частиц, можно записать следующим образом:

$$\mathscr{L}_u\xi = \alpha\mathbf{u}$$

где α-скалярная функция. В задаче 8.14 функция α равнялась нулю, так как вектор & связывал события с одинаковым собственным временем; сейчас мы найдем α из условия, что $\xi^{\hat{o}} \Rightarrow = \boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{u} = 0$ вдоль мировых линий:

$$0 = \nabla_{\mathbf{u}}(\xi\cdot\mathbf{u}) = \xi\cdot\mathbf{a} + \mathbf{u}\cdot\nabla_{\mathbf{u}}\xi.$$

Сравним это уравнение с уравнением (1), умноженным скалярно на $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u}\cdot(\nabla_{\mathbf{u}\xi} - \nabla_{\xi}\mathbf{u}) = -\alpha,$$

откуда получим, что $\alpha = \xi\cdot\mathbf{a}$. (Напомним, что $\mathbf{u}\cdot\nabla_{\S}\mathbf{u} = 1/2\nabla_{\xi}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) = 0$.) Таким образом, мы имеем

$$\nabla_u\xi = \nabla_{\xi}\mathbf{u} + (\xi\cdot\mathbf{a})\mathbf{u}.$$

Условие для жесткого движения $\nabla_{\mathrm{u}}(\xi\cdot\xi) = 0$ равносильно условию $\xi\cdot\nabla_{\mathbf{u}}\xi = 0$ или в силу уравнения (3) условию

$$\xi^{\alpha}\xi^{\beta}\left(u_{\alpha;\beta} + u_{\alpha}a_{\beta}\right) = 0.$$

Поскольку это соотношение должно быть справедливым для всех ξ, отсюда вытекает

$$u_{(\alpha;\beta)} + u_{(\alpha}a_{\beta)} = 0$$

и, следовательно,

$$\sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\vartheta P_{\alpha\beta} = u_{(\alpha;\beta)} + u_{(\alpha}\alpha_{\beta)} = 0$$

(обозначения и определения см. в задаче 5.18). Итак, жесткое движение может иметь место в том и только в том случае, если $\sigma_{\alpha\beta} = \vartheta = 0$

б) Ввиду симметрии $\sigma^{\alpha\beta} = \sigma^{\beta a}$ условие $\sigma^{\alpha\beta} = 0$ сводится к 10 уравнениям. Если учесть еще 5 тождеств: $u^{\alpha}\sigma_{\alpha\beta} = 0$ и $p^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha}{}_{\alpha} = 0$, то у нас остается 5 независимых уравнений, которые вместе с условием $\vartheta = 0$ дадут в сумме 6 независимых уравнений связей.

Условия существования жесткого движения не налагают ограничений на a^{α} или $\omega^{\alpha\beta}$. Каждая из этих характеристик включает в себя по 3 независимые компоненты (в силу соотношений $a^{\alpha}u_{\alpha} = 0$ и $\omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha}$), так что у нас имеется 6 степеней свободы, как и в нерелятивистском жестком движении.

Solution

14.10. Из определения $\vartheta = \nabla\cdot\mathbf{u}$ имеем

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = u^{\beta}\left(u^{\alpha}_{;\alpha}\right)_{;\beta} = u^{\beta}u^{\alpha}_{;\alpha\beta} = u^{\beta}\left(u^{\alpha}_{;\beta\alpha} - R^{\alpha}_{\beta\alpha\gamma}u^{\gamma}\right) = u^{\beta}u^{\alpha}_{;\beta\alpha} - R_{\beta\gamma}u^{\beta}u^{\gamma}.$$

Если, однако, воспользоваться результатами задачи 5.18, то получим

$$u^{\alpha} : \beta\alpha u^{\beta} = \left(u^{\alpha}{}_{i\beta}u^{\beta}\right)_{;\alpha} - u^{\alpha}{}_{;\beta}u^{\beta}{}_{;\alpha} = a^{\alpha};\alpha -$$
$$-\left(\omega^{\alpha_{\beta}}_{\beta} + \sigma^{\alpha}{}_{\beta} + \frac{1}{3}\vartheta P^{\alpha_{\beta}}_{\beta} - a^{\alpha}u_{\beta}\right)\cdot\left(\omega^{\beta}_{\alpha} + \sigma^{\beta}_{\alpha} + \frac{1}{3}\vartheta P_{\alpha} - a^{\beta}u_{\alpha}\right).$$

Учитывая свойства симметрии $\omega_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha\beta}$ и $P_{\alpha\beta}$, а также тот факт, что они ортогональны u, из уравнений (1) и (2) находим

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} = a^{\alpha} : \alpha - \omega^{\alpha}{}_{\beta}\omega^{\beta}{}_{\alpha} - \sigma^{\alpha_{\beta}}\sigma^{\beta}{}_{\alpha} - \frac{1}{3}\vartheta^2 - R_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta} =$$
$$= a^{\alpha};\alpha + 2\omega^2 - 2\sigma^2 - \frac{1}{3}\vartheta^2 - R_{\alpha\beta}u^{\alpha}u^{\beta}.$$

Решение 14.11.

Так как жидкость движется вдоль геоде- зических,

$$a_\alpha \equiv u^\beta u_{\alpha;\beta} = 0,$$

а поскольку в течении отсутствуют первая и вторая вязкости (см. задачу 5.18), то

$$\sigma_{\alpha\beta} = \vartheta = 0$$

Применяя разложение $\nabla\mathbf{u}$ из задачи 5.18 к нашему случаю, получаем

$$u_{\alpha;\beta} = \omega_{\alpha\beta}$$

Но $\boldsymbol{\omega}$ антисимметрично, так что $u_{(\alpha:\beta)} = 0$, и, следовательно, $\mathbf{u}$ удовлетворяет уравнению Киллинга.

Решение 14.12. На геометрическом языке процесс установления наблюдателем своей локальной системы координат x^α описывается следующим образом. Если и есть 4-скорость центра ящика, направленная вдоль его мировой линии, то наблюдатель выбирает вдоль своей мировой линии вектор $\mathbf{e}_0$, такой, что

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{u} \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \eta_{\alpha\beta}.$$

Далее, из каждой точки $P(\tau)(\tau$ - собственное время) своей мировой линии он проводит пространственные геодезические, ортогональные $\mathbf{u}$, аффинный параметр для которых есть собственная длина s. Если $\mathbf{n}$ - касательный вектор к пространственной геодезической, проходящей через точку P вблизи мировой линии наблюдателя, то он приписывает точке P координаты $x^0 = \tau$, $x^k = sn^k$.

У равнение движения пробной частицы имеет вид

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\nu}\frac{dx^\beta}{d\lambda}\frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0$$

где мы можем считать, что аффинный параметр λ совпадает с собственным временем частицы. 4-скорость частицы есть $dx^\alpha/d\lambda = (\gamma, \gamma\vec{v})$, где $\gamma \equiv \left(1 - v^2\right)^{-\frac{1}{2}}$. Заменим теперь в уравнении $d/d\lambda$ на d/dt, используя соотношение $d/d\lambda = \gamma d/dt$:

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^3} + \frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt}\frac{dx^\alpha}{dt} + \Gamma^\alpha\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{dt}\frac{dx^\gamma}{dt} = 0.$$

Подставляя $\alpha = 0$, будем иметь

$$\frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt} + \Gamma^0_{\beta\gamma} - \frac{dx^\beta}{dt}\frac{dx\gamma}{dt} = 0.$$

Подставляя теперь это соотношение в уравнение (2), для $\alpha = j$ получаем

$$\frac{dvJ}{dt} + \left(-v^j\Gamma^0_{\beta\gamma} + \Gamma^j_{\beta\gamma}\right)\frac{dx^\beta}{dt}\frac{dx^\gamma}{dt} = 0.$$

С точностью до первого порядка по v уравнение (3) можно записать в виде

$$\frac{dv'}{dt} - v^j\Gamma^\theta_{0\theta} + \Gamma^j_{00} + 2\Gamma^j_{k0}v^k = 0$$

Таким образом, с точностью до первого порядка по $\vec{x}$ и $\vec{v}$ имеем

$$\frac{dv'}{dt} = v^j\Gamma^0_{00}\left|\vec{x}=0 - \Gamma^j_{09}\right|\vec{x}=0 - x^k\Gamma^j_{00,k}\left|\vec{x}=0 - 2v^k\Gamma^j_{k0}\right|\vec{x}=0^\circ$$

Значение символов Кристоффеля при $\vec{x} = 0$ можно найти, воспользовавшись результатом задачи 7.17:

$$\Gamma^\beta_{\alpha0}\mathbf{e}_\beta = \nabla u\mathbf{e}_\alpha = -\Omega^\beta{}_\alpha\mathbf{e}_\beta,$$
$$\Gamma_{\beta\alpha0} = -\Omega_{\beta\alpha} \equiv a_\alpha u_\beta - a_\beta u_\alpha + \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\alpha}u^\lambda\omega^\sigma.$$

Поскольку $u^\alpha = (1, \overrightarrow{0}), u_\alpha = (-1, \overrightarrow{0}), a_\alpha = (0, \vec{a}), \omega^\sigma = (0, \vec{\omega})$, получаем

$$\Gamma_{\beta\alpha0} = 0, \text{ если } \beta = \alpha,$$
$$\Gamma_{0/0} = -\Gamma_{j00} = -a_i,$$
$$\Gamma_{kj0} = -\Gamma_{jk0} = \varepsilon_{jk0m}\omega^m = \varepsilon_{jkm}\omega^m.$$

Значения коэффициентов Кристоффеля с «чисто пространственными» индексами находятся из условия, что координатные линии $x^\alpha = \left(\tau, sn^k\right)$, где τ и n^k не зависят от s, суть геодезическ ие. В результате имеем

$$0 = \frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\nu}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds} = 0 + \Gamma^\alpha_{jk}n^j n^k$$

Это соотношение справедливо при $\vec{x} = 0$ для произвольных $\vec{n}$, откуда следует

$$\Gamma_{\alpha jk} = 0.$$

Найдем производную $\Gamma^j_{00,k}$ из выражения для тензора Римана:
Получаем

$$R^{\alpha\beta\delta}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha_{\gamma\mu}\Gamma^\mu_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\delta\mu}\Gamma_{\beta\gamma\beta}.$$

При $\vec{x} = 0$

$$\Gamma'_{00,k} = R^j_{0k0} + \Gamma^i_{0k,0} - \Gamma^j_{k\mu}\Gamma^\mu_{00} + \Gamma^j_{0,\mu}\Gamma^\mu_{0k}.$$

$$\begin{aligned}
\Gamma'_{0k,0} &= -\varepsilon_{jkm}\omega^m{}_{,0}, \\
\Gamma_{k\mu}{\Gamma'}^\mu{}_{00} &= 0, \\
\Gamma^i_{0\mu}\Gamma^\mu{}_{0k} &= \Gamma^i{}_{n0}\Gamma^0{}_{0k} + \Gamma'_{0m}\Gamma^m{}_{0k} = \\
&= a_j a_k + \varepsilon_{m/n}\omega^n\varepsilon_{kml}\omega^l,
\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
&\frac{dv^j}{dt} = -a_j - x^k\left(R^l{}_{0k0} - \varepsilon_{jkm}\omega^m{}_{,0} + a_j a_k + \varepsilon_{mjn}\omega^n\varepsilon_{kml}\omega^l\right) + 2\varepsilon_{jkm}\omega^m v^k = \\
&= -a_j(1 + \vec{a}\cdot\vec{x}) - R^j_{0kv}x^k + (\vec{x}\times\vec{\omega}_{,0})^j - [(\vec{x}\times\vec{\omega})\times\omega]^j + 2(\vec{v}\times\vec{\omega})^j.
\end{aligned}$$

Первый член в этом выражении соответствует "силе инерции», обусловленной ускорением системы отсчета; коэффициент $1 + \vec{a}\cdot\vec{x}$ учитывает релятивистскую поправку (см. [1], упражнение 37.4). Второй член представляет собой «истинную» гравитационную силу. В приближении слабого поля мы могли бы в духе ньютоновской физики выделить по отдельности вклад от локального ускорения силы тяжести, $\partial\Phi/\partial x_j$, и некое «абсолютное» ускорение $\vec{a}_{\text{ac}}$, именно

$$a_j + R'_{0kv}x^k = (a_i)_{\text{abc}} + \partial\Phi/\,\partial x^j\big|_{\vec{x}=0} + \partial^2\Phi/\,\partial x^j\partial x^k\big|_{\vec{x}=0}\,x^k \approx$$

$$\approx (a_j)_{\text{абс}} + \hat{c}\Phi/\,\partial x'|_{\vec{x}=\vec{x}\text{ частицы}}\ .$$

Члены, в которые входит $\vec{\omega}$, те же, что и в нерелятивистской механике; второй и третий члены суть центробежная сила и сила Кориолиса соответственно.

Solution

14.13. Приравнивая дивергенцию тензора энергинимпульса нулю, имеем

$$\begin{aligned}
0 = 4\pi T^v_{\mu;v} &= \Phi_{,\mu;v}\Phi^{,v} + \Phi_{,\mu}\Phi^{,v}{}_{;}v - \frac{1}{2}\delta^v_\mu\left(2\Phi_{\alpha;v}\Phi^{,\alpha}\right) = \\
&= \left(\Phi_{,\mu;v} - \Phi_{,v;\mu}\right)\left(\Phi\cdot v + \Phi_{,\mu}\Phi\cdot v;v\right.
\end{aligned}$$

Поскольку вторые ковариантные производные скаляра коммутируют между собой (действительно, $\Phi_{[,\mu;\nu]} = \Phi_{[,\mu,\nu]} + \Phi_{,\sigma}\Gamma^\sigma_{[\mu\nu]} = 0$), в нашем уравнении остается только второй член и уравнение движения в итоге имеет вид

$$\Box\Phi \equiv \Phi\cdot v_{;v} = 0$$

Solution

14.14. В предлагаемом уравнении (2) член $1/6R\Phi$ не зависит от размеров лаборатории точно так же, как и член с ρ. Следовательно, если мы измеряем поле Φ, то в принципе мы можем измерить и скалярную кривизну Риччи; в этом смысле конформно-инвариантное уравнение (2) находится в противоречии с духом сильного принципа эквивалентности.

Чтобы найти аномальные силы взаимодействия между частицами, обусловленные R-членом, перейдем к локально лоренцевской системе, в которой одна из частиц неподвижна. Поле Φ, источником когорого является эта неподвижная частица с зарядом μ_1, удовлетворяет уравнению

$$\Phi_{1j}, i - \frac{1}{6}R(1) = \mu_1\delta(\mathbf{r})$$

Когда мы выписываем это уравнение, то подразумеваем существование некоторой глобальной (или по крайней мере порядка размеров лаборатории) инерциальной системы координат; иначе говоря, мы пренебрегаем тем самым всеми проявлениями кривизны, кроме скалярной кривизны Риччи. Другими словами, мы предполагаем (так оно, впрочем, и есть на самом деле), что эти другие проявления кривизны не нарушают сильный принцип эквивалентности.

Уравнение для имеет решение вида

$$\Phi = -\frac{\mu_1}{r}\exp\{-r/a\sqrt{6}\},\ \text{где } a = R^{-\frac{1}{2}}$$

откуда сила, действующая на частицу с зарядом μ_2, равна

$$\begin{aligned} F^r = \mu_2\Phi_1 = \mu_1\mu_2/r^2[1 + r/\sqrt{6a}]\exp\{-r/a\sqrt{6}\} \approx \\ \approx \mu_1\mu_2/r^2\left[1 + r^2/12a^2 + \sigma\left(r^3/a^3\right)\right]. \end{aligned}$$

Мы видим, что аномальная сила, обусловленная R-членом и равная приблизительно $\mu_1\mu_2/12a^2$, не зависит от расстояния между частицами, а это явно нарушает сильный принцип эквивалентности.

Из уравнений Эйнштейна ясно, что величина скалярной кривизны Риччи порядка плотности массы-энергии и, следовательно, отношение аномальных сил к «обычным» скалярным силам составляет

$$\frac{r^2}{12a^2} \sim r^2\rho_{\text{масса-9нергия}} \sim r^2\left[\rho/\rho_{\text{z}}\right]\cdot 10^{-14},$$

где r измеряется в сантиметрах. Таким образом, даже если скалярные силы измеряются внутри вещества с ядерными плотностями $\rho_{\text{ядерн}} = 10^{14}\text{Г/см}^3$, то для того, чтобы аномальные силы, обусловленные R-членом, начали заметно проявлять себя, нам необходимо было бы иметь в распоряжении заполненную таким веществом "лабораторию" довольно-таки внушительных размеров ($r \sim 100$ км и более). В любом же практическом эксперименте влияние этих гипотетических R-сил было бы ничтожно.

Solution

14.15. Согласно результатам задачи 7.7(и) и уравнениям Максвелла,

$$4\pi J^\mu = F^{\mu v}_{;v} = \frac{1}{|g|^{1/2}}\left(|g|^{1/2}F^{\mu v}\right)_{,v},$$

$$4\pi J^\mu : \mu = 4\pi\frac{4}{|g!^{1/2}}\left(J^\mu|g|^{1/2}\right)_{,\mu} = \frac{1}{|g|^{1/9}}\left(|g|^{1/2}F^{\mu v}\right)_{,\sim\mu}.$$

Поскольку тензор $\mathbf{F}$ антисимметричен, левая часть должна быть равна нулю. Решение 14.16. В плоском пространстве-времени имеем

откуда

$$\begin{aligned} F^{\mu v}{}_{,v} &= 4\pi J'^\mu, \\ F_{\mu\nu} &= A_{v,\mu} - A_{\mu,v}, \\ -A^{\mu,v}{}_{,v} + A^{v,\mu}, v &= 4\pi J^\mu. \end{aligned}$$

Если мы поменяем во втором члене порядок дифференцирования по μ и v, что можно делать в плоском пространстве-времени, а затем применим правило «запятая переходит в точку с запятой», то получим

$$-A^{\mu;v}; v + A^v; v; \mu = 4\pi J^\mu.$$

Если же, с другой стороны, мы применим это правило непосредственно к уравнению (1), то будем иметь

$$-A^{\mu;v}{}_{iv} + A^{v;\mu}iv = 4\pi J^\mu.$$

Порядок дифференцирования во втором члене теперь можно изменить лишь вместе с введением члена с кривизной (см. задачу 9.8):

$$- A^{\mu;v};v + A^{v};v;\mu + R^{\mu}{}_{\sigma}A^{\sigma} = 4\pi J^{\mu}.$$

Уравнения (2) и (3) приводят, вообще говоря, к различным следствиям, которые можно проверить на эксперименте. Тем не менее мы пока что (вплоть до 1975 г.) не располагаем никакими экспериментальными данными, позволяющими сказать, какое из этих уравнений правильно.

Решение 14.17. Для члена связи с кривизной того вида, которой был найден в задаче 14.16, мы имеем (в лоренцевской калибровке, т. е. при условии $A^{\mu}_{;\mu} = 0$)

$$\Box A^{\mu} + (R^{\mu}A^{v}) = 4\pi J^{\mu}$$

где скобки означают, что этот член может как присутствовать, так и отсутствовать. Поскольку в вакууме тензор Риччи равен нулю, единственная надежда обнаружить присутствие этого ч лена могла бы быть связана с экспериментами в веществе (например, в стекле). Первый член в уравненин имеет порядок $A^{\mu}\left[\min\left(\frac{c}{v},\ell\right)\right]^{-2}$. Величина тензора Риччи (как следует из уравнений поля) порядка

$$G\rho/c^2 \approx 0,74\cdot 10^{-28}\text{см}^{-2}\left(\frac{\rho}{\Gamma\cdot\text{см}^{-3}}\right).$$

Следовательно, относительная поправка, вносимая в уравнение вторым членом, равна

$$\frac{\delta A^{\mu}}{A^{\mu}} \sim \left(\frac{\min\left(\frac{c}{v},\ell\right)\left(\rho/\Gamma\cdot\text{cm}^{-3}\right)^{\frac{1}{2}}}{1,16\cdot 10^{14}\ \text{cm}}\right)^2,$$

Поскольку прредплагветея, что прострaственные масштабы земных процессов не превосходят размеров Земли $\ell \sim 6\cdot 10^8$ cm, числовое значение этой поправки для $\rho = 1$ составляет $(\delta A^{\mu}/A^{\mu}) \lesssim \lesssim \left(5\cdot 10^{-6}\right)^2$. Можно, разумеется, изобретать и более хитроумные члены связи с кривизной, например вида $KR^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}A^{\mu}$, где K - размерная константа. Поскольку, однако, приписать K какое-либо естественное значение не представляется возможным, то не существует и способа оценить априори величину эффекта, обусловленного подобными членами. Так как рассматриваемые уравнения сходны с уравнением Прока

$$\Box A^{\mu} + mA^{\mu} = 0$$

то эксперименты по измерению массы покоя фотона могли бы в принципе дать какие-то ограничения на значение K; к сожалению, пока что эксперименты не дали в этом направлении никаких результатов.

Решение 14.18. Для тензора энергии-импульса электромагнитного поля имеем

$$4\pi T^{\mu v} = -\left(F^{\mu}{}_{\alpha}F^{\alpha v} + \frac{1}{4}g^{\mu v}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)$$

$$4\pi T^{\mu v};v = -\left(F^{\mu}_{*}\alpha_{\alpha\nu}F^{\alpha v} + F^{\mu\alpha v}_{\ \ \alpha};v + \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta;\mu}\right) = 0.$$

Рассматривая сумму первого и последнего членов в уравнении (2), по лучаем

$$-F^{\alpha\beta}g^{\mu\tau}\left(\frac{1}{2}F_{\alpha\beta;\tau} + F_{\tau\alpha;\beta}\right) = -\frac{1}{2}F^{\alpha\beta}g^{\mu\tau}\left(F_{\alpha\beta;\tau} + F_{\tau\alpha;\beta} - F_{\tau\beta;\alpha}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}F^{\alpha\beta}g^{\mu\tau}\left(F_{\alpha\beta;\tau} + F_{\tau\alpha;\beta} + F_{\beta\tau;\alpha}\right) \sim F^{\alpha\beta}g^{\mu\tau}F_{[\alpha\beta;\tau]}.$$

Если $\mathbf{F}$ выводится из выражения для векторного потенциала $\mathbf{A}$ обычньм образом, то $F_{[\alpha\beta;\tau]} = 0$, и у нас остается уравнение

$$0 = 4\pi T^{\mu\nu}{}_{1v} = -F^{\mu}{}_{\alpha}F^{\alpha\nu}{}_{;v}$$

Отсюда следует, что $F^{\alpha v}:v = 0$, за исключением случая, когда детерминант, составленный из коэффициентов $F^{\mu}{}_{\alpha}$, сам обращается в нуль. Но $\det\left(F_{\alpha\alpha}\right) = -(\vec{E}\cdot\vec{B})^2$, что и требовалось доказать.

Решение 14.19. Заметим сначала, что гамльтониан нормирован таким образом, что обладает размерностью (масса)'; это означает, что уравнения Гамильтона суть

$$dx^{\mu}/d\lambda = \partial H/\partial\pi_{\mu},$$
$$d\pi_{\mu}/d\lambda = -\partial H/\partial x^{\mu},$$

где λ - некоторый аффинный параметр (для частицы массы m он равен τ/m, где τ-собственное время). Если бы гамильтониан H был поделен на m, то в уравнениях (1) и (2) можно было бы заменить $d/d\lambda$ на $d/d\tau$; преимущество использования $d/d\lambda$ заключается в том, что $d/d\lambda$ можно использовать также и.в случае безмассовых частиц.

Поскольку 4-импульс частицы есть $p^\mu = dx^\mu/d\lambda$ и так как $g^{\mu v}$ и A_μ являются функциями от x^α, а не от π_α, уравнение (1) дает

$$p^\mu = g^{\mu v}\left(\pi_v - eA_v\right)$$

Из уравнения (2) получаем

$$\frac{d\pi_\alpha}{d\lambda} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu},\alpha\left(\pi_\mu - eA_\mu\right)\left(\pi_v - eA_v\right) + g^{\mu v}eA_{\mu,\alpha}\left(\pi_v - eA_v\right).$$

Из уравнения (3), однако, следует

$$\begin{aligned}\frac{d\pi_\alpha}{d\lambda} &= \frac{d}{d\lambda}\left(g_{\alpha\mu}p^\mu + eA_\alpha\right) = \\ &= g_{\alpha\mu}\frac{dp^!}{d\lambda} + g_{\alpha\mu,\beta}p^\beta p^\mu + eA_{\alpha,\beta}p^\beta\end{aligned}$$

(здесь мы воспользовались соотношением $d/d\lambda = p^\beta\partial/\partial x^\beta$). Умножая на $g^{\alpha\nu}$, находим

$$\frac{dpv}{d\lambda} + g^{\alpha\gamma}g_{\alpha\mu;\beta}p^\beta p^\mu + \frac{1}{2}g^{\alpha v}g^{\mu\nu},ap_\mu p_v = g^{\alpha\gamma}e\left(A_{\mu,\alpha} - A_{\alpha,\mu}\right)p^\mu$$

Перегруппируем теперь производные от $g_{\alpha\beta}$ таким образом, чтобы в результате сконструировать символ Кристоффеля. Поскольку

$$0 = \left(g^{\mu\beta}g_{\beta\gamma}\right)_{,\alpha} = g^{\mu\beta},\alpha g_{\beta\gamma} + g^{\mu\beta}g_{\beta\psi,\alpha},$$

то, умножая на g^γ, получаем
Следовательно,

$$g^{\mu v},\alpha = -g^{\gamma v}g^{\mu\beta}g_{\beta v,\alpha}$$

Так как

$$\frac{dp\gamma}{d\lambda} + g^{\alpha\gamma}\left(g_{\alpha\mu,\beta} - \frac{1}{2}g_{\beta\mu,\alpha}\right)p^\beta p^\mu = g^{\alpha\gamma}eF_{\alpha\mu}p^\mu.$$

$$g_{\alpha\mu,\beta}p^\beta p^\mu = \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\mu,\beta} + g_{\alpha\beta,\mu}\right)p^\beta p^\mu$$

окончательно имеем

$$\frac{dp^v}{d\lambda} + \Gamma_{\beta\mu}p^\beta p^\mu = eF_{\mu\mu}p^\mu$$

что и является уравнением движения.
Рещелие 14.20. Для незаряженной пробной частицы сохра. няющейся величиной является $\mathbf{p}\cdot\xi$, поэтому можно было бы предположить, что в случае заряженной частицы будет сохра- няться $\pi\cdot\xi$, где π - канонический импульс, равный $\mathbf{p} + e\mathbf{A}$ (см. задачу 14.19). В справедливости такого предположенія, с одной стороны, можно убедиться, например, заметив, что поскольку у нас задан вектор Киллинга ξ, то соответственно должна существовать некая циклическая координата. Другими словами, мы можем выбрать координаты таким образом, что гамильтониан H не будет зависеть от какой-то одной координаты, и тогда сопряженный ей канонический импульс будет сохраняющейся величиной.

С другой стороны, мы можем непосредственно проверить наше предположение, обратившись к уравнению движения
из которого следует

$$\Delta_p p = eF\cdot p$$

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathrm{p}}(\pi\cdot\xi) &= (\nabla_{\mathrm{p}}\mathrm{p})\cdot\xi + \mathrm{p}\cdot\nabla_{\mathrm{p}}\xi + e\left(\nabla_{\mathrm{p}}\mathrm{A}\right)\cdot\xi + e\ \mathrm{A}\cdot\nabla_{\mathrm{p}}\xi = \\ &= e\xi\cdot\mathrm{F}\cdot\mathbf{p} + 0 + e\left(\nabla_{\mathrm{p}}\mathrm{A}\right)\cdot\xi - \mathrm{ep}\cdot\nabla_{\mathrm{A}}\xi.\end{aligned}$$

Чтобы переписать в другом виде последний член в первой строчке и показать, что второй член обращается в нуль, мы воспользовались уравнением Киллинга. Заметим теперь, что порядок векторных «сомножителей» в скалярных произведениях в первой строчке несуществен, но когда в дело вступает тензор F, обладающий уже двумя «входными каналами» для «ввода» векторов, необходимо обращать внимание на то, в каком порядке должны стоять векторы [1]). Далее, тот факт, что электромагнитное поле допускает наличие циклической координаты, выражается соотношением

$$0 = \mathscr{L}_\xi\mathrm{A} = \nabla_\xi\mathrm{A} - \nabla_{\mathrm{A}}\xi$$

Переписывая еще раз последний член в выражении для $\nabla_p(\pi\cdot\xi)$ с помощью этого соотношения, получаем

$$\nabla_{\mathbf{p}}(\pi\cdot\xi) = e\xi\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{p} + e\xi\cdot(\nabla\mathbf{A})\cdot\mathbf{p} - e\mathbf{p}\cdot(\nabla\mathbf{A})\cdot\xi = \\ = e\xi\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{p} - e\xi\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{p} = 0,$$

где мы воспользовались тем фактом, что $\mathbf{F}$ есть не что иное, как антисимметризованное выражение для VA. Таким образом, интегралом движения, $\mathbf{T}$ е. сохраняющейся величиной вдоль траектори и частицы, является $\pi\cdot\xi$.

Solution

14.21. Ясно, что четыре уравнения Максвелла

$$F_{[\alpha\beta,v]} = 0 = \tilde{F}_{[\alpha\beta,v]}$$

инвариантны по отношению к конформному преобразованию.

О «входных каналах» подробнее см, ⌊1⌋, г. 1, стр. 110, −П рим, перев. Другие четыре уравнения Максвелла имекот вид

Поскольку

$$F^{\mu v};v = |g|^{-1/2}\left[F^{\mu v}|g|^{1/2}\right]_{,v} = 4\pi J^{\mu}.$$

очевидно, что

$$F^{uv} = g^{u\alpha\alpha}g^{v\beta}F_{\alpha\beta} = f^2\tilde{g}^{\mu\alpha\alpha}\tilde{g}^{v\beta}\tilde{F}_{\alpha\beta} = f^2\tilde{F}^{uv};$$
$$\tilde{g} = \mathrm{Det}\,(\tilde{g}_{\alpha\beta}) = f^4 g,$$

откуда следует

$$|g|^{1/\imath F^{\mu v}} = |\tilde{g}|^{1/2\tilde{F}^{\mu v}},$$

$$F^{\mu v};v = \frac{f^2}{|\tilde{\boldsymbol{g}}|^{\frac{1}{2}}}\left[\tilde{g}\right|^{1/s}\tilde{F}^{\mu v}\Big]_{v} = 4\pi J^{\mu} = 4\pi g^{\mu\alpha}J_{\alpha} = \\ = 4\pi\left(f\tilde{g}^{\mu\alpha}\right)f\tilde{J}_{\alpha} = 4\pi f^2\tilde{J}^{\mu}$$

и окончательно

$$\tilde{F}^{\mu v}{}_{iv} = 4\pi\tilde{j}^{\mu}.$$

(название такое же, как и раздела 14, потом разберу, почему так?)

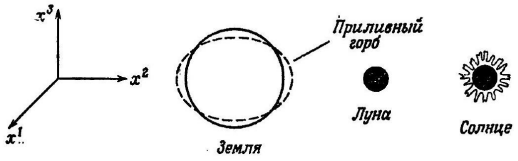
Solution 12.1.

Приравнивая гравитационное ускорение Gm/r^2 центростремительному ускорению $\omega^2 r$, мы получаем закон Кеплера:

$$\omega = \left(Gm/r^3\right)^{\frac{1}{2}}$$

Средняя плотность вещества внутри сферы радиуса r есть $\bar{\rho} = 3m/4\pi r^3$, так что $\omega = (4\pi G\bar{\rho}/3)^{\frac{1}{2}}$. Этот результат означает, в частности, что песчинка будет обращаться вокруг стального шарнка вблизи его поверхности примерно с тем же 90-минутным периодом, что и спутник, запущенный на орбиту близ поверхности Земли.

Решение 12.2. Пусть высота прилива равна h. Желая получить лишь грубую оценку, примем для простоты, что Солнце и Лна расположены в экватриальной плоскости (фиг. 26).



ur. 26.

Тогда, Солние, если элементарный объем воды в океане на широте экватора находится во время прилива в равновесии, то испытываемое им ускорение земной силы тяжести $g(r) = -M_{\oplus}/r^2$ на «высоте» $r = r_{\oplus} + h$ (здесь $M_{\oplus}$ и $r_{\oplus}$ - масса и радиус Земли соответственно) уравновешивается приливными ускорениями со стороны Солнца и Луны, отнесенными к центру Земли:

$$0 = g\left(r_{\oplus} + h\right) + r_{\oplus}R^{\text{Сопвие}}_{2820} + r_{\oplus}R^{\text{Jуна}}_{3020}\,.$$

В это время в пункте, отстоящем по долготе на 90°, наблюдается отлив; соответственно для элементарного объема воды будем иметь

$$0 = g\left(r_{\oplus} - h\right) + r_{\oplus} R_{1010}^{\text{Солие}} + r_{\oplus} R_{1010}^{\text{Jуна}} .$$

Вычитая одно уравнение из другого, получаем

$$0 = 2hg'\left(r_{\oplus}\right) + r_{\oplus}\left(R_{8020}^{\text{Солнце}} - R_{1010}^{\text{Солице}} + R_{3020}^{\text{Луна}} - R_{1010}^{\text{Луна}}\right).$$

Отметим, что если бы мы ввели центробежные силы, то в уравнении (3) они бы взаимно сократились. Вычислтм тепепь омпэнепы тензора Римана в ньютоновском пределе (с.1. з. эч 12.12). меем

$$\Gamma_{\mathbf{11};}^{\text{Сопде}} = \left.\frac{\hat{\partial}^2 \Phi^{\text{Солli:e}}}{\partial^2 x^2}\right|_{x=y\approx 0} =$$

$$= -\frac{\partial^3}{\partial x^2}\left[\frac{M_{\odot}}{\left[\left(x - x_{\text{Со пн ие}}\right)^2 + \left(y - y_{\text{Солнце}}\right)^2 + \left(z - z_{\text{Солнце}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right]$$

и аналогнчные выражения для других компонент. Для наших с лучаев находим

$$R_{1010}^{\text{Солнце}}\ (x_{\text{Солнце}} = z_{\text{Солнце}} = 0, \quad y_{\text{солнце}} = R) = M_{\odot}/R^3,$$
$$R_{\text{но10}}^{\text{Солие}}\ (y \text{ солнце} = z_{\text{Солнце}} = 0, \quad x_{\text{Солнче}} = R) = -2M_{\odot}/R^3,$$
$$R_{\text{оди}}^{\text{Солнце}}\ (x_{\text{Солнце}} = z_{\text{Солнце}} = 0, \quad y \text{ Солнце} = R) = -2M_{\text{O}}/R^3,$$
$$R_{20\text{ди}}^{\text{Солие}}\ (y_{\text{Солнце}} = z_{\text{Солнце}} = 0, \quad x_{\text{Солнце}} = R) = M_{\varrho}/R^3.$$

Аналогичные соотношения получаются для гравитационного поля Луны. Сизигийные приливы наблюдаются, когда Луна и Солнце расположены на одной линии, скажем на оси y. Тогда уравнение (3) дает

$$h_{\text{сизнг}} = \frac{3}{4}\left(\frac{M_{\text{Луна}}}{R_{\text{Лун 3}}^3} + \frac{M_{\bullet}}{R_{\cdot}^3}\right)\frac{r_{\oplus}^4}{M_{\oplus}} = 39\text{см}.$$

Квадратурные приливы соответствуют случаю, когда Луна расположена, например, на оси y, а Солнце- на оси x. В этом случае

$$h_{\text{квадр}} = \frac{3}{4}\left(\frac{M_{\text{Луна}}}{R_{\text{Луна}}^3} - \frac{M_{\varrho}}{R_{\odot}^3}\right)\frac{r_{\oplus}^4}{M_{\oplus}} = 15\text{см}.$$

Разумеется, физические значения высоты приливов во многих случаях значительно превосходят наши оценки. Это обусловлено гидродинамическими эффектами - такими, например, как «хлюпанье» воды в мелководіпых морях іі вблизи береговых линий сложной конфигурации.

Рещение 12.3.

С неплохой точностью можно считать, что твердое тело Земли под воздействием приливообразующей силы, входящей в тензор Римана, деформируется линейно. [Это, однако, неверно для гидродинамических (морских) приливов.] Следовательно, фурье-спектр для земных приливов будет выглядеть так же, как и спектр компонент тензора Римана на поверхности Земли. Поскольку (по крайней мере в ньютоновском приближении) приливообразующие силы линейно зависят от источников, мы можем рассматривать влияние Луны и Солнца независимо. Гравитационный потенциал, создаваемый массой M, помещенной в точке с геоцентрическими координатами x, y, z, имеет вид

$$U = M/\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}$$

Тогда в ньютоновском пределе компоненты тензора Римана равны

$$R_{x0x0} = \partial^2 U/\partial x^2 = \frac{M}{r^3}\left(\frac{3x^2}{r^2} - 1\right),$$
$$R_{x0y0} = \partial^2 U/\partial x \partial y = \frac{M}{r^3}\left(\frac{3xy}{r^2}\right)$$

и т. п. для yy, zz, yz, xz. В системе отсчета, связанной с вращающейся Землей, видимая орбита Солнца или Луны описывается стандартными соотношениями кеплеровской сферической астрономии (см., например, [1], т. 2, стр. 313):

$$x = r\cos(\bar{\omega}+v)\cos\varphi t - r\sin(\bar{\omega}+v)\cos\varepsilon\cdot\sin\varphi t,$$
$$y = r\sin(\bar{\omega}+v)\cos\varepsilon\cdot\cos\varphi t + r\cos(\bar{\omega}+v)\sin\varphi t,$$
$$z = r\sin(\bar{\omega}+v)\sin\varepsilon.$$

Здесь ϖ и ε-постоянные, равные соответственно долготе перигея и наклонению орбиты к экваториальной плоскости. Угол φt есть часовой угол для вращающейся Земли:

$$\varphi t = \frac{2\pi}{1\text{ звездные сутки}}t,$$

r - «радиус-вектор» и v - «истинная аномалия», дающиеся соотношениями

$$r = a(1-e\cos E), \quad \cos v = (\cos E - e)(1-e\cos E)^{-1},$$

где a - большая полуось орбиты, e-эксцентриситет, а E-эксцентрическая аномалия, определяемая из уравнения

$$E - e\sin E = \frac{2\pi}{T}t \equiv \Omega t$$

где T - период обращения по орбите. Оставляя только члены первого порядка малости по эксцентриситету e, после вычисления получаем

$$E = \Omega t + e\sin\Omega t,$$
$$\cos E = \cos\Omega t - e\sin^2\Omega t,$$
$$r^{-8} = a^{-8}(1+3e\cos\Omega t)$$
$$\cos v = \cos\Omega t + e\cos 2\Omega t - e.$$

Теперь, подставляя уравнение (3) в уравнение (2), а получившийся результат в уравнение (1), будем иметь $R_{j0k0} = \frac{M}{a^3}\times$ (постоянные члены + члены, зависящие от времени t). При этом зависящие от времени члены имеют следующий характерный вид:

$$3\left[\begin{pmatrix}\sin\\\cos\end{pmatrix}^2\Omega t - 2e\begin{pmatrix}\sin\\\cos\end{pmatrix}\Omega t + 2e\begin{pmatrix}\sin\\\cos\end{pmatrix}\Omega t\begin{pmatrix}\sin\\\cos\end{pmatrix}2\Omega t\right]\times$$
$$\times\begin{cases}\sin^2\varepsilon \text{ или}\\ \sin\varepsilon\cos^N\varepsilon\begin{pmatrix}\sin\\\cos\end{pmatrix}\varphi t, \text{ или}\\ \cos^{2N}\varepsilon\begin{pmatrix}\sin\\\cos\end{pmatrix}^2\varphi t\end{cases}$$

(здесь $\begin{pmatrix}\sin\\\cos\end{pmatrix}$ означает либо sin, либо cos, а показатель степени mN - любое целое число в промежутке от нуля до m включительно). Это выражение можно разложить по отдельным частотам с помощью последовательного применения тригонометрических тождеств, выражающих произведения синусов и косинусов через суммы членов, зависящих от сумм или разностей частот. В результате мы получаем следующие компоненты:

(I)
(II)
(III)
(IV)
(VIII) Угловая частота
2φ
φ
$2\Omega \pm 2\varphi$
$2\Omega \pm \varphi$
2Ω
$\Omega \pm 2\varphi$
$\Omega \pm \varphi$
Ω
$3\Omega \pm 2\varphi$
$3\Omega \pm \varphi$
3Ω Амплитуда (в главном порядке по e)
$\frac{3}{4}\cos^{2N}{}_8$
$\frac{3}{2}\sin\varepsilon\cos^N\varepsilon$
$\frac{3}{8}\cos^{2N}$
$\frac{3}{4}\sin\varepsilon\cdot\cos^N 8$
$\frac{3}{2}\sin^2\varepsilon$ и $\frac{3}{4}\cos^{2N}\varepsilon$

$3e\cos^{2N}\varepsilon$
$6e\sin\varepsilon\cdot\cos^{N}\varepsilon$
$6e\left(\sin^{2}\varepsilon\ \text{или}\ \frac{1}{2}\cos^{2N}\varepsilon\right)$
$\frac{3}{2}e\cos^{2N}$
$3e\sin\varepsilon\cdot\cos^{N}\varepsilon$
$3e\sin^{2}\varepsilon$

Для снстемы Земля-Солнце $\varepsilon = 23^\circ,5, e = 0,017, \Omega = 2\pi/1$ год и $\varphi = 2\pi/(1$ звездные сутки); для системы Земля - Луна $e = 0,054$, $\Omega = 2\pi/(1$ звездный месяц); $\varphi = 2\pi/(1$ звездные сутки), а значение ε меняется в пределах $23^\circ,5\pm5^\circ$ в результате нутации узлов лунной орбиты с периодом 18,6 лет. (Последний факт приводит к дальнейшему расщеплению спектра, которым мы здесь пренебрегаем.) Используя эти значения и учитывая, что величина $\left(M/a^3\right)$ для лунной орбиты в 2,2 раза больше, чем для солнечной, можно оценить относительную величину перечисленных выше компонент и расположить их в порядке убывания интенсивности:

$M(\text{I}), M(\text{ V}), M(\text{II}), M(\text{III}), S(\text{I}), S(\text{ V}), M(\text{IV})\ S(\text{II}), S(\text{III}), M(\text{VI}), M(\text{VIII})$...,

где M и S - члены, обусловленные соответственно влиянием Луны и Солнца.

Solution

12.4. Лаплас был первым, кто осознал тот факт, что эти два положения должны отличаться друг от друга. Оптически наблюдаемое положение Солнца на небосводе смещено за счет конечности скорости света; другими словами, приходящий от Солнца свет испытывает аберрацию на угол $\vartheta = v/c$, где v скорость движения Земли по орбите. Далее, поскольку кулоновское гравитационное поле аберрации не испытывает, то, если бы снла тяготения была направлена в сторону смещенного положенння Солнца, существовала бы компонента солнечного ускорения, равная $\left(GM_\odot/r^2\right)(v/c)$ и направленная вдоль цвижения Земли. В этом случае энергия Земли должна была бы возрастать со скоростью

$$\frac{d\left(E/M_\oplus\right)}{dt} = \frac{GM_\odot}{r^2}\frac{u^2}{c}$$

Однако, поскольку $E/M_\oplus = -\frac{1}{2}GM_\odot/r$, мы фактически имели бы дело с потерей энергии, соответствующей увеличению радиуса земной орбиты со скоростью $dr/dt = 2v^2/c$. Если учесть, что $v^2 = GM_\odot/r$, это уравнение легко интегрируется:

$$t - t_0 = \frac{c}{4GM}\left(r^2 - r_0^2\right)$$

Для земной орбнты $r = 1,5\cdot10^{13}$ cm, $v = 30$Km/c, так что $\vartheta \approx 10^{-4}$. Если теперь положить r_0 равным, например, радиусу Солнца $r_0 = 7\cdot10^{10}$cM, то $t - t_0 \approx 1,3\cdot10^{10}$c ≈ 400 лет. Это значительно меньше, чем длительность геологического периода, в течение которого, как известно, радиус земной орбиты не менялся. мулой

Solution

12.5. Световое давление внутри звезды дается фор-

$$P_{\text{иял}} = (1/3)U_{\text{из.}}$$

где $U_{\text{излл}}$ - плотность энергии излучения. Поскольку свет «диффундирует» наружу, многократно участвуя в процессах рассеяния, $U_{\text{нз.}}$ удовлетворяет уравнению диффузии, а поток излучения пропорционален градиенту $U_{\text{излл}}$:

$$F = \frac{-c}{3\ \text{к}}\nabla U_{\text{излл}}$$

где x-коэффициент непрозрачности (мы используем здесь его значение по Томпсону $x_{\text{г}} = \sigma_{\text{х}}/m_p = 0,4\ \text{cm}^2/\text{Г}$). Соотношение $L = 4\pi r^2 F$, связывающее поток излучения с полной светимостью L звезды, дает

$$dP_{\text{излл}} = -\frac{x\rho}{4\pi c}\frac{Ldr}{r^2}$$

т. е. выражение для суммарного светового давления на элементарный слой вещества толщиной dr и единичной площадью поверхности. Приравнивая $dP_{\text{излл}}$ гравитационной силе, действующей на этот элементарный объем в направлении внутрь звезды, - GM $\rho dr/r^2$, мы получаем значение эддингтоновского предела:

$$L = \frac{4\pi\sigma Mc}{x_{\text{Т}}} = 1,38\cdot10^{38}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\ni\ \text{р/с}$$

Мы можем также получить этот результат микроскопически, заметив, что поскольку сечение рассеяния пропорционально $\left(1+\cos^2\vartheta\right)$ и, следовательно, симметрично относительно направления рассеяния («вперед - назад»), то фотон с импульсом p передает электрону в среднем при каждом соударении импульс p. Если радиальная компонента импульса равна p_r, то, хотя энергия фотона равна pc, его вклад в светимость (направленный наружу световой поток) уменьшается в $c/v_r = p/p$, раз. Таким образом, радиальная компонента импульса, переданная одному электрону, находящемуся на расстоянии r от центра звезды, в единицу времени, как раз пропорциональна суммарной светимости в радиальном направлении $\mathscr{L}$ (постоянной для всех значений радиуса):

$$\frac{(\text{ импульс})}{(\text{время})} = \frac{L}{4\pi r^2(\hbar\omega)} \times \begin{array}{c}\sigma_{\mathrm{T}} \\ \text{эффективнее} \\ \text{число фотонов,} \\ \text{проходящих в} \\ \text{радиальном на-} \\ \text{правлении через} \\ \text{единицу площа-} \\ \text{ди в единицу} \\ \text{времени}\end{array} \times \left(\frac{\hbar\omega}{c}\right) = \frac{L\sigma_{\mathrm{T}}}{4\pi r^2 c}.$$

Импульс в единицу времени есть не что иное, как сила, и мы приравняем ее направленной внутрь силе тяготения, действующей на протон, связанный с рассматриваемым электроном:

$$\frac{L\sigma_{\mathrm{T}}}{4\pi r^2 c} = \frac{GMm_{\mathrm{p}}}{r^2}$$

это приводит нас к тому же результату, что и полученный выше.

13.5.3 Problems about Physical Effects of Gravity 3

Solution

12.6. Пусть φ^g и φ^e-гравитационный и электростатический потенциалы соответственно. Тогда потенциальная энергия электрона равна

$$\Phi = m\varphi^g + e\varphi^e$$

где m и e-масса и заряд электрона, а сила, действующая на электрон, есть

$$\vec{F} = -\nabla \boldsymbol{D}$$

В статическом случае не может существовать тангенциальная составляющая этой силы, направленная вдоль проводящей поверхности, и, следовательно, энергия на внутренней поверхности должна быть постоянной. Пусть теперь внутри сосуда отсутствуют как массы $\left(\nabla^2\varphi^g = 0\right)$, так и заряды $\left(\nabla^2\varphi^e = 0\right)$, так что $\nabla^2\Phi = 0$. Решение уравнения Лапласа $\nabla^2\Phi = 0$ всюду внутри проводящего сосуда, представляющего собой эквипотенциальную поверхность, есть в этом случае $\Phi = \text{const}$. Таким образом, если в это поле будет помещен электрон, на него не будут действовать никакие силы. [Примечание. Поскольку электрон помещается в центр сосуда, силами со стороны зеркальных зарядов можно пренебречь из соображений симметрин.]

Solution

12.7.
По мере того как содержимое сосуда нагревается, его масса увеличивается пропорционально поступающей энергии в соответствии с формулой $c^2dM = 7/2kNdT$ (коэффициент $7/2$ появилья потому, что воздух - смесь двухатомных газов; N - полное число молекул в сосуде). С другой стороны, центр тяжести массы газа повышается, что приводит к уменьшению веса, так как при этом увеличивается расстояние до центра Земли. Действительно, положение центра тяжести определяется формулой

$$z_{\text{ц. т.}} = \int_0^h \rho z dz \Big/ \int_0^h \rho dz, \quad \rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{mg}{kT}z\right),$$

следовательно, изменение $z_{\text{ц. т.}}$ с температурой дается соотношением

$$\frac{dz_{\mu\cdot\mathrm{T}}}{dT} = \frac{k}{mg}\left[1 - \left(\frac{\eta}{\operatorname{sh}\eta}\right)^2\right], \quad \eta = \frac{mgh}{2kT},$$

где m - средняя масса молекулы воздуха. Результирующее изменение веса равно, таким образом,

$$dW = \left(g\frac{dM}{dT} + M\frac{dg}{dz_{\text{u·r}}}\frac{dz_{\text{L·T}}}{dT} \right) dT =$$
$$= \left(\frac{7}{2}\frac{gkN}{c^2} - mN\frac{2g}{R_\oplus}\frac{k}{mg}\left[1 - \frac{\eta^2}{\text{sh}^2\eta} \right] \right) dT.$$

Правая часть равенства становится отрицательной, когда

$$\cdot 1 - \frac{\eta^2}{sh^2\eta} > \frac{7}{4}\frac{gR_\oplus}{c^2} = 0,122 \cdot 10^{-8}.$$

Это выполняется для $\eta > 6,05 \cdot 10^{-5}$, т. е. при $h = 2kT\eta/mg > 218$ cm.
Рещекие 12.8. В силу уравнения Пуассона $U_{,kk} = 4\pi\rho_0$ имеем

$$T_{jk,k} = \frac{1}{4\pi}\left(U_{,jk}U_{,k} + U_{,j}U_{,kk} - U_{,nj}U_{,n} \right) = \rho_0 U_{,j}$$

Следовательно, мы можем записать ньютоновское уравнение движения в виде

$$\rho_0\frac{dv_1}{dt} = -\frac{\partial t_{jk}}{\partial x^k} - \rho_0\frac{\partial U}{\partial x^j} = -\frac{\partial}{\partial x^k}\left(T_{ik} + t_{ik} \right)_{,k}$$

Используем теперь ньютоновское урав ненне непрерывности

$$\partial\rho_0/\partial t + \left(\rho_0 v^k \right)_{,k} = 0$$

Из уравнения (2) и выражения для «конвективной пронзводной
можно получить

$$d/dt = \partial/\partial t + v_k\partial/\partial x^k$$

$$\rho_0\frac{dv_j}{dt} = \rho_0\left(\frac{\partial v_j}{\partial t} + v^k v\eta_k \right) = \left(\rho_0 v_f \right)_{,t} + \left(\rho_0 v_j v_k \right)_{,k}$$

и тогда уравнение (1) можно запнсать в виде

$$\left(\rho_0 v_j \right)_{,t} + \left(T_{jk} + t_{jk} + \rho_0 v_j v_k \right)_{,k} = 0$$

Решение 12.9. Рассмотрим виртуальное мещение $\vec{\delta}$; энергия должна быть стационарна по $\vec{\delta}$. Если мы включим в полную энергию гравитационную потенциа льную энергию, соответствующую работе, проделанной приложенными силами или против сил, тогда приращение энергии для каждой отдельной силы будет иметь вид

$$dE_i = -\vec{F}_i \cdot \vec{\delta} - \left(dE_i \right)\left(\vec{g}/c^2 \right) \cdot \vec{x}_i$$

а приращение энергии за счет перемещения массы объекта равно

$$dE = -M\vec{g} \cdot \vec{\delta}$$

Тогда

$$dE_{\text{полн}} = -\sum \vec{F}_l \cdot \vec{\delta}\left(1 - \frac{\vec{g} \cdot \vec{x}_i}{c^2} \right) - M\vec{g} \cdot \vec{\delta}$$

для любого $\vec{\delta}$ и, следовательно,

$$\sum_i \vec{F}_i\left(1 - \frac{\vec{g} \cdot \vec{x}_i}{c^2} \right) = -M\vec{g}$$

Обратите внимание, что, относя гравитационный потенциал к центру тяжести, мы избегаем необходимости включать в рассмотрение гравитационную потенциальную энергию. (Этим замечанием мы обязаны К. Нордтведту.)

Solution

12.10. В предыдущей задаче мы нашли, что

$$\sum \vec{F}_i \left(1 - \vec{g} \cdot \vec{x}_i/c^2\right) = -M\vec{g}$$

Если p - давление, а $d\vec{A}$ - ориентированный элемент поверхности, то $\vec{F} = pd\vec{A}$, и приведенный выше результат прнобретает вид
или

$$-\int p(x) \left(1 - \vec{g} \cdot \vec{x}/c^2\right) d\vec{A} = -M\vec{g}$$

$$-\int pd\vec{A} + \int p\vec{g} \cdot \frac{\vec{x}}{c^2} d\vec{A} = -M\vec{g}$$

для постоянного $\vec{g}$. Теперь, подставляя значения
получаем

$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\vec{e}_r, \quad \vec{x} = dr\vec{e}_r, \quad d\vec{A} = \pm dA\vec{e}_r$$

$-A[p(r+dr) - p(r)]\vec{e}_r - dr\frac{GM}{c^2r^2}\vec{e}_r \int pda = -M\vec{g} = Adr\rho\frac{GM}{r^2}\vec{e}_r'$
откуда следует

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM}{r^2}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right).$$

Этот результат справедлив в любой теории гравитации, в которой выполняется соотношение $T^{\mu v}_{;v} = 0$ (такие теории называются метрическими), и не зависит от вида уравнений поля. Однако для нахождения массы $M(r)$, определяемой так, чтобы локальное ускорение силы тяжести было равно $g = -GM/r^2$, в каждой теории существуют свои собственные методы и процедуры.

Рещение 12.11. Выделенной системой координат в ньютоновской теории являются галилеевы пространственные координаты x^j и «универсальное время» t. Уравнение движения

$$\frac{d^2xJ}{dt^2} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x^J}$$

можно переписать в 4-мерном виде:

$$\frac{d^2t}{d\lambda^2} = 0$$

$$\frac{d^2x^j}{d\lambda^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 = 0$$

Отсюда непосредственно получаем символы Кристоффеля:

$$\Gamma^j_{00} = \frac{\partial\Phi}{\partial x^j};\ \text{все остальные } \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \text{ равны нулю.}$$

Стандартная формула для компонент тензора Римана дает

$$R^j_{0k0} = -R^j_{00k} = \frac{\partial^{2\Phi}}{\partial x^j \partial x^k};\ \text{все остальные } R^\alpha_{\beta\psi 8} \text{ равны нулю.}$$

Если предположитb, что эти компоненты можно было бы вычислить из какой-то метрики, то тогда мы имели бы
Но в этом случае

$$R_{j0k0} = g_{j\alpha}R^{\alpha_0}_{0k0} = g_{jm}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^m \partial x^k}$$

$$R_{0jk0} = g_{0\alpha}R^\alpha_{jk0} = 0 \neq -R_{j0k0}$$

что нарушает свойство антисимметричности тензора $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, которым он обладал бы, если бы получался из метрики.

Реиенue 12.12. Пусть ньютоновские траектории пробных частиц опнсываются уравнениями

$$x^j = x^j(t, n)$$

где n - параметр, позволяющий отличить одну траекторию семейства от другой. Тогда вектор

$$\vec{n} = \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial x^k}{\partial n}\frac{\partial}{\partial x^k} = n^k\frac{\partial}{\partial x^k}$$

есть вектор, связывающий соседние траектории. Относительное ускорение соседних траекторий равно

$$\frac{\partial^2 n^J}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial x^j}{\partial n}\right) = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial t^2}\right) = \frac{\partial}{\partial n}\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x^j}\right) = -n^k \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^j}\right) = -n^k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^k \partial x^j},$$

где мы использовали уравнение движения $\partial^2 x^j/\partial t^2 = -\partial\Phi/\partial x'$. Уравнение расхождения геодезических имеет вид

$$\frac{D^2 n^\alpha}{d\tau^2} = -R^\alpha_{\beta\gamma 8} n^\gamma u^\beta u^8$$

В ньютоновском пределе (скорости $\sim \varepsilon$, гравитационные поля $\sim \varepsilon^2$) КМЕеМ

$$u^0 = 1 + \Theta(\varepsilon); u^J = \Theta(\varepsilon); \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Theta\left(\varepsilon^2\right)$$

а параметр n, связывающий события с одинаковым собственным временем, будет связывать с точностью до $\mathscr{O}(\varepsilon)$ события с одинаковым координатным временем. Таким образом,
и параметр

$$\frac{D}{d\tau} = \frac{d}{dt} + O(\varepsilon)$$

$$\frac{d^2 n^J}{dt^2} = -R^J_{0k0} n^k + \mathscr{O}(\varepsilon)$$

Тогда в ньютоновском пределе компоненты тензора Римана выражаются через потенциал следующим образом:

$$R^{j_0}_{0k0} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^k \partial x^j}$$

Обратите внимание, что, пока рассматриваемые скорости не приближаются к скорости света, другие компоненты $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ не входят в уравнение относительного движения пробных частиц.

Solution

12.13. Ньютоновское тяготение обладает характерным свойством мгновенного «действия на расстоянии», причем одновременность определяется в ньютоновской теории с помощью срезов поля «универсального времени» t. Мы хотим найти релягивистски-инвариантное выражение для гравитационного ускорення в некоторой точке, запнсанное через распределение плотности вещества $T^{\mu\nu}$ в остальной части Вселенной. Будем считать, что пространство-время всюду обладает метрикой Минковского. Поскольку в искомое выражение должна входить только компонента T^{00}, мы с самого начала будем использовать свертку тензора $T^{\mu\nu}$ с двумя векторами «универсального времени»:

$$\nabla t \cdot \mathbf{T} \cdot \nabla t \quad (\text{или } t_{,\alpha} T^{\alpha\beta} t_{,\beta}).$$

Тогда гравитационное ускорение для частицы, находящейся в точке $\mathbf{x}$ и взаимодействующей с остальным веществом по закону «обратных квадратов», будет иметь вид

$$a_{\text{граВ}} = G \int\limits_{:=\text{const}} 1 \frac{\nabla t \cdot T\left(x'\right) \cdot \nabla t}{(1 \cdot 1)^{3/2}} d^8 x',$$

где 1- пространственноподобный вектор, соединяющий точки $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}$, а d^3x' - элемен собственного объема на срезе с постоянным значением t. Это выражение еще не согласуется со специальной теорией относительности, так как вектор a не обязательно будет ортогональным 4-скорости частицы $\mathbf{u}$. Следовательно, мы должны еще ввести некоторый проекционный оператор, после чего и получнм окончательный ответ:

$$\mathrm{a}_{5\mathrm{ра}\beta} = G \int \frac{\nabla t \cdot \mathbf{T} \cdot \nabla t}{(1 \cdot 1)^{3/4}} [1 + (\mathbf{u} \cdot \mathrm{I})\mathbf{u}] d^3 x'$$

Это выражение явным образом согласуется со специальной теорией относительности, поскольку оно, во-первых, содержит в себе только геометрические объекты и, во-вторых, определяет некоторый геометрический объект $\mathbf{a}$ (для которого $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = 0$). Согласно этой теории, можно посылать сигналы со скоростью больше скорости света, изменяя распределение масс в какой-го точке. Тогда гравитационное поле будет меняться на поверхностях с постоянным значением t, а поскольку эти поверхности пространственноподобны, то они находятся вне светового конуса для всех наблюдателей. Тем не менее теория не является акаузальной, так как мировая линия каждого наблюдателя времениподобна, а t всегда возрастает в направлении его будущего. Подобным же образом t возрастает вдоль любого светового луча, который посылает наблюдатель. Следовательно, любой сигнал может в крайнем случае связывать события с одинаковыми t, но ни одна последовательность сигналов не в состоянии вернуться к данному наблюдателю в момент времени, предшествующий их испусканию. Эта ситуация

диаметрально противоположна случаю тахионов (задача 1.6), которые действительно являются акаузальными. Разница состоит в том, что в рассматриваемой задаче скалярное поле t уже содержит в себе некую «предгеометрию»: оно расслаивает пространствовремя так, что при этом существует определенная универсальная упорядоченность времени, тогда как способ, которым «разрезают» пространство-время тахноны, меняются от наблюдателя к наблюдателю.

Решежие 12.14. Будем рассматривать разность высот между частицами как вектор $\vec{\eta} \equiv$ (разность высот) $\vec{e}_z$; тогда относительное ускорение, обусловленное гравитационными силами, равно

$$\frac{d^2\eta^z}{dt^2} = -R^z{}_{\beta\gamma 8} u^\beta \eta^\gamma u^8$$

Поскольку частицы начинают двигаться из состояния покоя, то, если ограничить наблюдения коротким промежутком времени, можно считать, что $u' \approx 0$, и поэтому

$$\frac{d^2\eta^z}{dt^2} = -R^z_{0z0}\eta^z$$

Компонента тензора Римана легко вычисляется для случая слабого поля:

$$R^z_{0z0} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(-\frac{M}{z}\right) = -\frac{2M}{z^3}.$$

Благодаря полю E расположенная ниже частица будет испытывать вертикальное ускорение

$$\vec{a} = \frac{q}{m}\overrightarrow{E}\vec{e}_z$$

Следовательно,

$$\frac{d^2\eta^z}{dt^2} = \frac{2M}{z^3}\eta^z - \frac{q}{m}E$$

Тот факт, что два члена в правой части кажутся вполне сравнимыми по величине, может поначалу вызвать некоторые опасения. Предположим, однако, что протяженность нашей лаборатории в пространстве-времени ограничена размерами $\Delta x^\mu \approx L$. Тогда к концу эксперимента гравитационные силы изменят разность высот между частицами η^z на величину
Поскольку $\eta^z < L$

$$\delta\eta^z \sim \frac{1}{2}\frac{2M}{z^3}\cdot\eta^z L^2$$

$$\delta\eta^z = \Theta\left(L^3\right)$$

С другой стороны, изменение разности высот, обусловленное электрическим полем, равно

$$\delta\eta^z \sim -\frac{q}{m}\cdot E\cdot\frac{1}{2}L^2 = \mathcal{O}\left(L^2\right).$$

Таким образом, если в достаточной степени ограничить пространственновременные «масштабы» нашего экспернмента, то можно будет пренебречь гравитационными эффектами.

Solution

12.15.
Геометрический объект, описывающий заряженную частицу, есть скаляр, вектор, тензор 2-го ранга и т. д. для спина, равного $0, 1, 2$ и т. д. соответственно. Так, например, выражения для плотности заряда частицы с зарядом покоя q_0, движущейся вдоль мировой линии $x^\mu = z^\mu(\tau)$ с 4-скоростью, суть:

(скаляр) $\rho\left(x^\sigma\right) = q_0\int\delta^4\left[x^\mu - z^\mu(\tau)\right]d\tau$ (для спина 0);
(вектор) $J^\mu\left(x^\sigma\right) = q_0\int u^\mu\delta^4\left[x^\sigma - z^\sigma(\tau)\right]d\tau$ (для спина 1);
(тензор 2-го ранга) $T^{\mu v}\left(x^\sigma\right) =$
$= q_0\int u^\mu u^v\delta^4\left[x^\sigma - z^\sigma(\tau)\right]d\tau$
(тензор s-го ранга) $T^{\mu\nu\ldots}\rho\left(x^\sigma\right) =$ (для спина 2);
$= q_0\int u^\mu u^\nu\ldots u^\rho\delta^4\left[x^\sigma - z^\sigma(\tau)\right]d\tau$ (для спина s).

Заряд частицы в некотором лабораторном объеме, измеренный по «кулоновской» части силового взаимодействия в лабораторной системе отсчета (л. с. о.), дается выражением

$$q = \int T^{00\ldots0}d^3x = (-1)^s\int T^{\alpha\beta\ldots v}u_\alpha^{\text{л.с.о.}}\ u_\beta^{\text{л.с.о.}}\ \ldots u_\gamma^{\text{л.с. о.}}\ d^{\mathbf{3}}x.$$

Подставляя уравнение (1) в уравнение (2), мы находим измеренное значение заряда отдельной частицы:

$$q = q_0 \int d^3x \int d\tau \left(-\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}^{\text{л.с. о.}}\right)^s \delta^4\left[x^\sigma - z^\sigma(\tau)\right] =$$
$$= q_0 \int d^3x dt \left(\frac{d\tau}{dt}\right)\left(-\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}^{\text{с. о.}}\right)^s \delta^4\left[x^\sigma - z^\sigma(\tau)\right]$$

Интегрируя о-функцию с учетом соотношений

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}^{\text{л. с. о.}} = -\gamma \quad \text{и} \quad d\tau/dt = 1/\gamma,$$

где γ-фактор Лоренца, получаем

$$q = q_0\gamma^{s-1} \approx q_0\left(1 + \frac{s-1}{2}v^2\right) \text{ для } v \ll c.$$

Далее, для идеального газа имеем

$$\left\langle v^2\right\rangle = 3kT/m_0$$

Таким образом, суммируя заряды всех частиц газа, находим

$$Q = \sum_n q = nq_0\left[1 + \frac{s-1}{2}\left(\frac{3kT}{m_0}\right)\right]$$

и, сравнивая это выражение с температурной зависимостью, приведенной в условии задачи, приходим к выводу, что $s = 5$.

решение 12.16.

Предположим противное. Пусть существует такое поле со спином 2, отличное от гравитационного. Поскольку оно обладает квантами с нулевой массой покоя, что соответствует бесконечному радиусу действия, уравнения поля должны допускать в качестве решения слабые плоские волны. Далее, так как это поле обладает спином 2, ему должен быть сопоставлен симметричный «зарядовый» тензор $J^{\mu\nu}$ со следом, равным нулю. Более того, для слабых полей и малых скоростей взаимодействие между «заряженными» частицами, размеры которых значительно менъше длины волны, должно описываться в основном через соответствующую каждой частице компоненту J^{00} (т. е. через «кулоновский» предел).

Рассмотрим теперь плоскую волну, падающую на две частицы с зарядами $J^{00} = q_1$ и $J^{00} = q_2$, первоначально находящиеся в одной н той же тодке. Под воздействием синусондальной плоской волны с определенной линейной поляризацией частицы будут участвовать в линейном колебательном (синусоидальном) движении, амплитуда которого прямо пропорциональна заряду и обратно пропорциональна массе частицы. Следовательно, в некоторый момент времени мы можем ввести для нашего поля вектор поляризации (аналог напряженности электрического поля E), определяя его как

$$\vec{V} \equiv \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2}\right)^{-1}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$$

Очевидно, что при этом его величина не зависит от числовых значений q_1, q_2, m_1, m_2. Но здесь-то и кроется противоречие!

Действительно, так как наше поле обладает спином 2, то при повороте на 180° состояние поляризации должно оставаться неизменным, в то время как при повороте на 180° вектор $\vec{V}$ переходит в $-\vec{V}$, а это значит $\vec{V} = 0$. В чем же дело? По-видимому, в нашем предположении, что поле различным образом действует на разные частицы: теперь мы виднм, что у нас нет иного выхода, как только положить $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ для всех зарядов и масс. Это, однако, эквивалентно утверждению о постоянстве отношения заряда к массе для всех частиц: $q/m = \text{const}$; подходящим выбором единиц мы всегда можем добиться, чтобы $q = m$. Следовательно, в предельном случае слабых полей, или, что то же самое, в приближении плоских волн, мы получаем $J^{00} = T^{00}$, т. е. J^{00} равно компоненте тензора энергии-импульса, соответствующей плотности массы-энергии. Отсюда в силу требования лоренц-инвариантности мы немедленно получаем $J^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}$ (мы не имеем права ввести, например, скаляр T^μ_μ, так как он не является геометрическим объектом, сопоставляемым спину 2).

Как мы показали, наше «произвольное» поле со спином 2 ассоциируется с $T^{\mu\nu}$. Следовательно, это самое обычное тяготение (или, если угодно, то самое, чем бы оно ни было, что проявляет себя во всех наших экспериментах как тяготение). (Мы нигде не утверждали, что таким образом мы приходим к общей теории относительности.) Фейнман обратил внимание на то, что в наши рассуждения решающим образом входит предположение о «точечной» частице, не обладающей собственжым вектором поляризации. Это значит, что можно было бы в принципе подобрать такое удовлетворяющее приведенным выше условиям поле, которое действовало бы «негравитационным» образом на отдельные частицы, обладающие спином; при этом, однако, для неполяризованной матернальной среды результирующая сила воздействия равнялась бы нулю.

Реиение 12.17.

В системе единиц СГС имеем

$$c = 2,998 \cdot 10^{10}\text{с/с};$$
$$c^2 = 8,998 \cdot 10^{20}\ \text{эрг/г};$$
$$G/c^2 = 0,7425 \cdot 10^{-28}\ \text{см/Г};$$
$$G^{2/2} = 2,582 \cdot 10^{-4}\ \text{эл.-стат. ед./г}.$$

(Значение $G^{1/2}$ следует из того факта, что в законах Кулона или Ньютона сила равна e^2/r^2 нли Gm^2/r^2.) Следовательно, в гравитационных едниицах искомые значения равны: а) $\hbar = \hbar\left(\frac{G}{c^2}\right)\dot{c}\left(\frac{1}{c^2}\right) = \frac{\hbar G}{c^3}\left[\frac{(\text{эpг·с})(\text{см/г})(\text{см/с})}{(\text{эр/г})}\right] \approx 2,611 \cdot 10^{-66}\text{см}^2$

б) $e = e\left(\frac{G}{c^2}\right)\left(\frac{1}{G^{1/2}}\right) \approx \frac{eG^{1/2}}{c^2}\left[\frac{(\text{э.-стат. ед.})\ (\text{см/г})}{(\text{эл.-стат. ед./г})}\right] \approx 1,381 \cdot 10^{-34}\text{см};$

в) $\frac{e}{m} = \frac{e}{G^{1/2}m}\left[\frac{(\text{эл.-стат. ед.})}{(\text{ г})\ (\text{эл.-стат. ед./г})}\right] \approx 2,042 \cdot 10^{21};$

г) $M_\odot = \frac{GM_\odot}{c^2}[(r)(\text{см/Г})] \approx 1,48 \cdot 10^5\ \text{см}$

д) $L_\odot = L_\odot\left(\frac{G}{c^2}\right)\left(\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{1}{c}\right)\left[\frac{\left(\frac{3\text{эр/с})(\text{см/г})}{(9\text{эр/г})(\text{см/с})}\right.}{}\right] \approx 1,07 \cdot 10^{-26};$

е) $300\ \text{К} = 300\ \text{К}\frac{k\left(\frac{G}{c^2}\right)}{c^2}\left[\frac{(\text{К})(\text{эр/К})(\text{см/г})}{(\text{эр/г})}\right] \approx 3,42 \cdot 10^{-63}\ \text{см};$

ж) $1\ \text{год} = \left(3,21 \cdot 10^7 \cdot c\right)\left[\frac{(\text{с})(\text{см})}{(\text{с})}\right] = 9,460 \cdot 10^{17}\ \text{см};$

$$1B = \left(\frac{1}{299,8}\frac{\text{эрг}}{\text{эл.-стат. ед.}}\right)G^{1/2}\left(\frac{1}{c^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{299,8} \cdot \frac{G^{1/2}}{c^2}\left[\frac{(\text{эг/эл.-стат. ед.})\ (\text{эл.-стат. ед./г})}{(\text{эрг/г})}\right] \approx 9,58 \cdot 10^{-28}.$$

Реwение 12.18.

$$L^* = \left(\hbar G/c^3\right)^{1/2} = 1,616 \cdot 10^{-33}\ \text{см},$$
$$T^* = \left(\hbar G/c^5\right)^{1/2} = 5,391 \cdot 10^{-44}\text{с},$$
$$M^* = (\hbar c/G)^{1/2} = 2,177 \cdot 10^{-5}\text{Г}.$$

На существование этих безразмерных комбинаций первым обратил внимание Планк - сразу же после того, как он ввел в употребление свою квантовую постоянную, - и теперь они носят название планковских длины, массы и времени. Эти комбинации определяются единственным образом с точностью до множителей порядка единицы (например, можно вместо $\hbar$ использовать h), так как, согласно теории размерностей, существует один и только один способ установить соответствие между тремя разномерными величинами и тремя величинами с заранее выбранной размерностью (иными словами, других "свободных» безразмерных комбинаций не существует).

Solution 12.19.

Условие баланса сил дает

$$Gm_N^2/r^2 = m_N\omega^2\left(\frac{1}{2}r\right)$$

Согласно правилам квантования Бора, радиусы орбит должны удовлетворять условию

$$2m\omega\left(\frac{1}{2}r\right)^2 = n\hbar$$

Из этих двух уравнений находим выражение для радиуса

$$r = 2n^2\hbar^2/Gm_N^8$$

Для низшего энергетического уровня, соответствующего $n = 1$, значение радиуса равно

$$r = 2\hbar^2/Gm_N^3 = 6 \cdot 10^{24}\ \text{см} \approx 6 \cdot 10^6\ \text{св. лет!}$$

13.5.4 Problems about Structure of Stars 1

Solution

16.I. Поскольку для наблюдателя, неподвижного в системе координат t, r, ϑ, φ, временная ось направлена вдоль его 4-скорости, то соответствующий базисный вектор должен быть направлен вдоль $\partial/\partial t$ и обладать при этом правильной нормировкой. В соответствии с этим выберем в качестве базисного вектора $\mathrm{e}_{\hat{0}} = f\partial/\partial t$, где величина f должна быть определена из условия нормировки:

$$-1 = \mathrm{e}_{\hat{0}} \cdot \mathrm{e}_{\hat{0}} = f^2 \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} = f^2 g_{00} = -f^2 e^{2\Phi}.$$

Следовательно, $f = e^{-\Phi}$ и

$$\mathbf{e}_{\hat{0}} = e^{-\Phi} \frac{\partial}{\partial t}$$

Все три направления $\partial/\partial\vartheta, \partial/\partial\varphi, \partial/\partial r$ ортогональны $\partial/\partial t$. Выбирая базисные векторы вдоль них и нормируя на единицу точно так же, как и выше, получаем

$$\mathbf{e}_{\hat{r}} = e^{-\boldsymbol{\mu}} \frac{\partial}{\partial r}, \mathbf{e}_{\hat{\vartheta}} = e^{-\mu} r^{-1} \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \mathbf{e}_{\hat{\varphi}} = e^{-\mu} (r \sin\vartheta)^{-\mathbf{1}} \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Базисные векторы, определенные в (1) и (2), образуют ортонормированную собственную систему отсчета неподвижного наблюдателя. Дуальные им 1-формы $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\alpha}}$ находятся из требования

$$\left\langle \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\alpha}}, \mathbf{e}_{\hat{\boldsymbol{\beta}}} \right\rangle = \delta_{\boldsymbol{\beta}}$$

и, как легко видеть, имеют следующий вид:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{0}} = e^{\Phi} \widetilde{dt}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{r}} = e^{\mu} \widetilde{dr}, \tilde{\omega}^{\hat{\vartheta}} = e^{\mu} r \overline{d\vartheta}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}\hat{\varphi} = e^{\mu} r \sin\vartheta \widetilde{d\varphi}$$

Solution

16.2. Наблюдатель проводит измерения в своей локальной ортонормированной системе:

$$\mathbf{e}_{\hat{t}} = e^{-\Phi}\mathbf{e}_t, \quad \mathbf{e}_{\hat{r}} = e^{-\lambda}\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_{\hat{\vartheta}} = r^{-1}\mathbf{e}_{\hat{\vartheta}}, \quad \mathbf{e}_{\hat{\varphi}} = (r\sin\vartheta)^{-1}\mathbf{e}_{\varphi};$$
$$\tilde{\omega}^{\hat{t}} = e^{\Phi}\widetilde{\mathbf{d}}t, \quad \tilde{\omega}^{\hat{r}} = e^{\lambda}\widetilde{\mathbf{d}r}, \quad \tilde{\omega}\hat{\vartheta} = r\widetilde{\mathbf{d}}\hat{\vartheta}, \quad \tilde{\omega}\hat{\varphi} = r\sin\vartheta\widetilde{\mathbf{d}\varphi}$$

Метрика здесь имеет тот же вид, что и во введении в этой главе, только вместо $(1-2m/r)^{-1}$ у нас стоит $e^{2\lambda}$. Объем жидкого элемента, измеряемый нашим наблюдателем, равен

$$V = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{r}} \wedge \hat{\boldsymbol{\omega}}\hat{\vartheta} \wedge \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\varphi}} = e^{\lambda} r^2 \sin\vartheta \widetilde{\mathbf{d}r} \wedge \widetilde{\mathbf{d}\vartheta} \wedge \widetilde{\mathbf{d}\varphi} = e^{\lambda} r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi.$$

Давление, дейсъвующее на прогивоположные точки вертикальных «стенок» жидкого элемента, одно и то же, но из-за наличия радиального градиента давления верхняя и нижняя «стенкн» испытывают различное давление:
Следовательно,

$$|p_{\text{верхи}} - p_{\text{иижн}}| = \left|p, \hat{r}^{\hat{\omega}}\right| = \left|p_{,r} e^{-\lambda} \tilde{\omega}^{\hat{r}}\right|.$$

$$|F_{\text{выталк}}| = |(p_{\text{верх}} - p_{\text{вижи}}) \times \text{ площадь поверхности }| =$$
$$= \left|p_{,r} e^{-\lambda} \omega^{\hat{r}} \omega^{\hat{\theta}} \hat{\omega}\hat{\varphi}\right| = \left|p_{,r} e^{-\lambda} V\right|.$$

Так как выталкивающая сила направлена по радиусу, то

$$\mathbf{F}_{\text{выта х}} = e^{-\lambda} p, r \mathrm{e}_{\hat{r}} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}} p, r V \mathbf{e}_{\hat{r}}$$

Подставив значение p, r из уравнения Оппенгеймера-Волкова, находим

$$\mathbf{F}_{\text{гр}} = -\mathbf{F}_{\text{выта .}} = -\frac{(\rho + p)\left(m + 4\pi r^3 p\right) V \mathbf{e}_{\hat{r}}}{r^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

В ньютоновской теории этот результат имел бы вид

$$p, r V \mathbf{e}_{\wedge} = -\frac{\rho m V}{r^2} \mathbf{e}_{\hat{r}}$$

Ретение 16.3. Сферически-симметричная метрика может зависеть только от t, dt, r, dr и $d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2$:

$$ds^2 = -A(r,t)dt^2 + B(r,t)dr^2 + 2C(r,t)drdt + \\ + D(r,t)\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right).$$

Выберем в качестве новой радиальной координаты $r' = D^{\frac{1}{2}}(r,t)$. Опуская штрихи, будем иметь

$$ds^2 = -E(r,t)dt^2 + F(r,t)dr^2 + \\ +2G(r,t)drdt + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)$$

Избавимся от G, вводя новую временную координату:

$$dt' = H(r,t)[E(r,t)dt - G(r,t)dr]$$

где H - интегрирующнй множитель, выбранный таким образом, чтобы правая сторона была полным дифференциалом. Метрика тогда принимает стандартный вид (штрихи вновь опущены):

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r,t)}dt^2 + e^{2\lambda(r,t)}dr^2 + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right).$$

Из задачи 9.20 вытекает, что тензор Энштейна обладает следующими нетривиальными компонентами:

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = 2e^{-2\lambda}\lambda_{,r}/r + \left(1 - e^{-2\lambda}\right)/r^2,$$
$$G_{t\hat{r}} = 2e^{-(\Phi+\lambda)\lambda,t/r,}$$
$$G_{\hat{r}\hat{r}} = \left(e^{-2\lambda} - 1\right)/r^2 + 2e^{-2\lambda}\Phi,r/r,$$
$$G_{\hat{\theta}\hat{\vartheta}} = G_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = e^{-2\lambda}\left(\Phi_{,rr} + {\Phi_{,r}}^2 - \Phi_{,r}\lambda_{,r} + \Phi_{,r}/r - \lambda_{,r}/r\right) - \\ - e^{-2\Phi}\left(\lambda_{,tt} + \lambda_{,t^2} - \Phi_{,t}\lambda_{,t}\right).$$

Чтобы выполнялись уравнения поля в пустоте $G_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 0$, как видно из соотношения (2), величина λ не должна зависеть от t. Тогда соотношение (1) принимает вид

Отсюда находим

$$\frac{2d\lambda}{1 - e^{2\lambda}} = \frac{dr}{r}$$

$$e^{2\lambda} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$$

Постоянная интегрирования выбрана равной $2M$ из соображений удобства. Теперь соотношения (3) и (4) представляюі собой эквивалентные уравнения, определяющие Ф (эти уравнения должны быть эквивалентны в силу тождества $G^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}:\hat{\beta}} \equiv 0$). Простейшим образом можно найти Ф, если сложить друг с другом уравнения (1) и (3). Это даст намм

откуда

$$\Phi_{,r} = -\lambda_{,r}$$

$$e^{2\Phi} = f(t)e^{-2\lambda}$$

Вводя новую временную координату посредством соотношения

$$dt' = f^{1/2}(t)dt$$

мы избавляемся от f, и метрика окончательно приобретает вид

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)$$

Это и есть (статическая) шварцшильдовская метрика.

Примечание. Используемая здесь координата r задается соотношением $4\pi r^2$ = площадь поверхности сферы, где соответствующие сферы определяются сферической симметрией задачи. Если бы функция r не была монотонной, мы не смогли бы использовать ее в качестве координаты. Тем не менее более подробное рассмотрение этого случая (см. [1], т. 3, стр. 42) показывает, что решения, отличные от шварцшильдовского, отсутствуют. Решение 16.4. Из теоремы Биркгофа (см. задачу 16.3) мы знаем, что для сферически-симметричной системы метрика в пустоте представляет собой решение Шварцшильда. Следовательно, внутри самогравитирующей полой сферы пространство описывается метрикой Шварцшильда, но в данном случае точка $r = 0$ не является сингулярной. Это значит, что масса M

(которая фактически является постоянной интегрирования в решении уравнений Эйнштейна) должна быть положена равной нулю, чтобы избежать расходящихся членов в метрике, содержащих M/r. Следовательно, внутри полой сферы метрика является плоской, и поэтому пробные частицы не испытывают воздействия гравитационных сил.

Решение 16.5. Запишем вакуумные уравнения поля для метрики $g_{\mu v}$ и скалярного поля Φ в теории Бранса - Дикке:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \frac{\omega}{\Phi^2}\left(\Phi_{,\alpha}\Phi_{,\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\Phi_{,\gamma}\Phi\cdot\gamma\right) + \\ + \Phi^{-1}\left(\Phi,\alpha;\beta - g_{\alpha\beta}\Box\Phi\right),$$
$$\Box\Phi = 0.$$

Если мы используем стандартный вид статической сферическисимметричной метрики

$$ds^2 = -e^{2U}dt^2 + e^{2\lambda}dr^2 + r^2d\Omega^2$$

то уравнение $\Box\Phi = 0$ запишется как

$$\left(e^{U-\lambda r^2}\Phi_{,r}\right)_{,r} = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$\Phi = a\int_r^\infty \frac{e^{\lambda-u}}{r^2}dr + b.$$

Вблизи $r = 0$ метрические функции e^{2U} и $e^{2\lambda}$ стремятся к единице (вблизи $r = 0$ метрика близка к метрике Минковского). Следовательно, интеграл в уравнении (4) расходится вблизи $r = 0$, и Φ вблизи начала координат можно записать так:

$$\Phi \approx a/r + b.$$

Но если a не равно нулю, то правая часть уравнения (1) будет порядка a^2/r^2. (Этот эффект не обусловлен выбором координат; след правой части порядка a^2/r^2, поэтому из уравнения (1) вытекает, что скалярная кривизна расходится как a^2/r^2.) Следовательно, чтобы решение было регулярным в начале координат, необходимо, чтобы а равнялось нулю, т. е. Φ должно быть постояниым. Для случая постоянного Φ уравнение (1) сводится к статическим сферически-симметричным уравнениям поля общей теории относительности в пуототе, а из теоремы Биркгофа известно, что единственным решением этих уравнений, удовлетворяющим условию «хорошего» поведения в $r = 0$, является

$$g_{\mu v} = \eta_{\mu v}$$

Решение 16.6. Рассмотрим компоненты T^μ в любой точке в некотором ортонормированном репере $\left[\mathbf{e}_{\hat{t}}, \mathbf{e}_{\hat{r}}, \mathbf{e}_{\hat{\vartheta}}, \mathbf{e}_{\hat{\varphi}}\right]$. Нз условия сферической симметрии следует, что значения компонент ннварнантны по отношению к поворотам:

$$\mathbf{e}_{\hat{\vartheta}} \to \cos\alpha\mathbf{e}_{\hat{\vartheta}} + \sin\alpha\mathbf{e}_{\hat{\varphi}}$$
$$\mathbf{e}_{\hat{\varphi}} \to -\sin\alpha\mathbf{e}_{\hat{\vartheta}} + \cos\alpha\mathbf{e}_{\hat{\varphi}}.$$

Очевидно, что компоненты $T_{\hat{t}\hat{t}}, T_{\hat{t}\hat{r}}$ и $T_{\hat{r}\hat{r}}$ остаются инвариантными при поворотах. Пара компонент $\left(T_{\hat{t}\hat{\vartheta}}, T_{\hat{t}\hat{\varphi}}\right)$ преобразуется при поворотах как 2-мерный вектор и, следовательно, не является инварнантной. Поэтому мы Приходим к выводу, что $T_{\hat{i}}\hat{\vartheta} = T_{\hat{i}\hat{\varphi}} = 0$ и аналогично $T_{\hat{r}\hat{v}} = T_{\hat{r}\hat{\varphi}} = 0$. Единственной 2-мерной матри:ц, инвариантной по отношению К поворотам, является матрица, кратная единичной, откуда следует

$$\begin{pmatrix} T_{\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}} & T_{\hat{\vartheta}\hat{\varphi}} \\ T_{\hat{\varphi}\hat{\vartheta}} & T_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} \end{pmatrix} = T_{\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, всего имеется четыре независнмых компоненты: $T_{\hat{i}\hat{i}}, T_{\hat{t}\hat{r}}, T_{\hat{r}\hat{r}}$ и $T_{\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}} = T_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}$
решенце 16.7. Стандартный вид метрики для статической сферически-симметричной звезды есть

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + e^{2\Lambda}dr^2 + r^2d\Omega^2$$

Легче всего расписать уравнение $T\alpha\beta;\beta = 0$ в компонентах, если вспомнить, что оно эквивалентно перваму началу термодинамики:

$$d\rho/d\tau = \frac{\rho + p}{n}\frac{dn}{d\tau}$$

(см. задачу 5.19) и уравнению йлера:

$$(\rho + p)u_{\alpha;\beta}u^\beta = -p,\alpha - p_{,\beta}u^\beta u_\alpha$$

(см. задачу 14.3). Для статической звезды обе части уравнения (2) ооращаются в нуль тождественно. Единственной ненулевой компонентой $\mathbf{u}$ является u^t, и из соотношения $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=-1$ следует, что $u^t=e^{-\Phi}$. Поскольку в нуль не обращается только пронз- водная p,r, единственной нетривиальной компонентой уравнения (3) будет

$$-p_{,r}=(\rho+p)u_{r;\beta}^{\ \ \beta}u^\beta=-(\rho+p)\Gamma^\alpha{}_{r\beta}u_\alpha u^\beta=$$
$$=-(\rho+p)\Gamma^t{}_{rt}u_t u^t=(\rho+p)\Phi_{,r}$$

Реиекие 16.8. Пусть $m(r)$ - решение ньютоновских уравнений внутреннего строения политропной звезды:

$$dm/dr=4\pi r^2\rho,$$
$$dp/dr=-\frac{Gm\rho}{r^2},$$
$$p=K\rho^\gamma.$$

Если $\gamma=4/3$, звезда находится в безразличном равновесии (обладает нулевым запасом устойчивости); это видно из того факта, чТО

$$\tilde m(r)=m(\alpha r),$$
$$\tilde\rho(r)=\alpha^3\rho(\alpha r),$$
$$\tilde p(r)=\alpha^4 p(\alpha r)$$

также являются решением системы уравнений (1)-(3), причем им соответствуют те же значения полной массы $m(\infty)$ и коэффициента K.

Релятивистское уравнение, соответствующее уравнению (1), выглядит точно так же; что же касается заданного уравнения состояния (3), то мы предполагаем, что в релятивистской теории его вид также не меняется. Уравнение (2) в релятивистском случае заменяется на

$$\frac{dp}{dr}=-\frac{Gm\rho}{r^2}\left(1+\frac{p}{\rho}\right)\left(1+\frac{4\pi r^3p}{m}\right)\left(1-\frac{m}{r}\right)^{-1}$$

[см. [2], уравнение (11.1.13) или [1], т. 2, уравнение (23.22)]. Поскольку рассматриваемая нами звезда является почти ньютоновской, члены в скобках очень близки к единице. Следовательно, можно найти точное решение уравнения (4), которое будет почти совпадать с решением ньютоновского уравнения (2) [например, полставляя ньютоновское решение в уравнение (4), получая затем малые поправки к p и находя решение методом итераций]. Обозначим это решение через $\hat m(r),\hat\rho(r),\hat p(r)$. Сконструируем из таких функций «пробное решение»:

$$\tilde m(r)=\hat m(\alpha r),$$
$$\tilde\rho(r)=\alpha^{\mathbf{s}}\hat\rho(\alpha r),$$
$$\tilde p(r)=\alpha^4\hat p(\alpha r).$$

Если мы подставим его в систему релятивистских уравнений, то равенство правой и левой сторон в уравнениях (1) и (3) не нарушится, но для уравнения (4) отношение правой части уравнения к левой с точностью до членов низшего порядка будет уже равняться следующей величине:

$$\frac{\text{правая часть}}{\text{левая часть}}=1+(\alpha-1)\left[\frac{\hat p}{\hat\rho}+4\pi(\alpha r)^3\frac{\hat p}{\hat m}+\frac{2\hat m}{\alpha r}\right].$$

Для $\alpha>1$, что соответствует сжатию звезды до меньшего значения радиуса, правая часть больше левой, а это означает, что градиент давления всюду в звезде недостаточен для поддержания равновесного состояния и звезда вынуждена сжиматься до еще меньшего радиуса. Но и этот радиус не будет равновесным, ибо звезда по-прежнему будет оставаться почти ньютоновской, так что предыдущие аргументы вновь окажутся применимыми. Следовательно, состояние с $\gamma=4/3$ неустойчиво и область устойчивости должна начинаться с некоторого значения $\gamma>4/3+\varepsilon$.

Solution

16.9. Увеличение массы звезды, состоящей из вырожденного газа, приводит к увеличению плотности вещества до тех пор, пока энергия Ферми частиц газа (электронов в случае белого карлика и нейтронов в случае нейтронной звезды) не достигнет релятивистских значений. Если A-число барионов в звезде, а R - радиус звезды, то ферми-энергия составляет приблизительно (в релятивистской области)

$$\mathscr{E}_{\mathrm{F}}\approx\frac{\hbar c}{R}A^{1/3}$$

(В этом уравнении мы пренебрегли таким не очень существенным фактом, что как в нейтронной звезде, так и в белом карлике на один барион приходится примерно вдвое большее число фермионов, поддерживающих давление.) Гравитационная масса-энергия на фермион равна приблизительно

$$\mathscr{E}_G \approx -\frac{GAm_B^3}{R}$$

где m_B - масса бариона.

Заметим, что как гравитационная энергия, так и энергия сжатия одинаково зависят от R. Следовательно, решающую роль играет знак суммарного коэффициента, стоящего перед R^{-1}. Если он положителен, то при добавлении массы радиус будет возрастать, а энергии Ферми начнут становиться нерелятивистскими, в результате чего энергия сжатия будет убывать быстрее R^{-1}, и в конце концов при некотором конечном значении R будет достигнуто устойчивое равновесие. Если же коэффициент отрицателен, то в звезде установится и будет продолжаться режим коллапса. Таким образом, критическое число барионов, при котором звезда становится неустойчивой, находится путем приравнивая $\mathscr{E}_O$ и $\mathscr{E}_\mathrm{F}$;

$$A_{\text{крит}} = \left(\frac{\hbar c}{Gm_B^2}\right)^{3/3} \approx 10^{57}.$$

Уравнение (3) соответствует критической предельной массе

$$M_{\text{крит}} = m_B A_{\text{крит}} \approx 2M_\odot$$

и предельным значениям радиуса

$$R_{\text{крит}} \sim \hbar c A_{\text{крит}}^{1/3} \times \begin{cases} \left(m_e c^2\right)^{-1} & \text{для белого карлика,} \\ \left(m_B c^2\right)^{-1} & \text{для нейтронной звезды,} \end{cases} \approx$$
$$\sim \begin{cases} 5,0 \cdot 10^8 \text{ cm для белого карлика,} \\ 2,7 \cdot 10^5 \text{ cm для нейтронной звезды.} \end{cases}$$

Solution

16.10. Пусть в некоторой выбранной точке P наблюдатель строит сферу S, проходящую через P и определенную таким образом, чтобы во всех точках на S геометрия была одинаковой. Тогда из выражения для линей ного элемента находим, что измеряемая площадь поверхности этой сферы будет равна

$$A(r) = 4\pi r^2.$$

Градиент скалярной функции $A(r)$ есть 1-форма, т. е.
Следовательно,

$$\nabla A(r) \equiv \widetilde{\mathbf{d}A} = 8\pi r \widetilde{\mathbf{d}}r$$

$$\widetilde{\mathrm{d}A} \cdot \widetilde{\mathbf{d}A} = 64\pi^2 r^2 \widetilde{\mathrm{d}}r\widetilde{\mathrm{d}r} = 64\pi^2 r^2 (1 - 2m/r)$$

Н

$$m(r) = \frac{(A/\pi)^{1/2}}{4}\left(1 - \frac{\widetilde{\mathrm{d}A} \cdot \widetilde{\mathrm{d}A}}{16\pi A}\right)$$

13.5.5 Problems about Structure of Stars 2

Solution 16.11.

а) Шварцшильдовская метрика

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

в преобразованных координатах принимает вид

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)du^2 - 2dudr + r^2 d\Omega^2.$$

б) Мы хотим вычислить компоненты тензора Эйнштей на $G_{\alpha\beta}$ для случая $M = M(u)$. Проще всего найти еимволы Кристоффеля из выражения для лагранжевой функцни, использованной в за- даче 7.25 для нахождения геодезических:

$$L = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{u}^2 - 2\dot{u}\dot{r} + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2.$$

Уравнение Эйлера - Лагранжа

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

дает нам уравнение геодезической

$$\ddot{u} - \left(M/r^2\right)\dot{u}^2 + r\dot{\vartheta}^2 + r\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2 = 0$$

откуда мы выписываем не равные нулю символы Кристоффеля:

$$\Gamma^u_{uu} = -\frac{M}{r^2}, \quad \Gamma^u_{\vartheta\vartheta} = r, \quad \Gamma^u_{\varphi\varphi} = r\sin^2\vartheta.$$

Подобным же образом уравнение (4), в котором r заменено на u, ϑ и φ, дает нам оставшиеся символы Кристоффеля:

$$\begin{array}{ll} \Gamma_{uu} = \frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right) - \frac{M'}{r}, & \Gamma_{\theta\vartheta} = -r\left(1 - \frac{2M}{r}\right), \\ \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) r\sin^2\vartheta, & \Gamma^r_{ur} = \frac{M}{r^2}, \quad \Gamma^\vartheta_{r\theta} = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{\varphi\varphi} = -\sin\vartheta\cos\vartheta, & \Gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\vartheta\varphi} = \operatorname{ctg}\vartheta. \end{array}$$

Их значения совпадают с соответствующими значениями для мет. рики Шварцшильда, за исключением Γ^r iu. Из формулы для тензора Риччи [см. [1], т. 1, уравнение (8.516)]

$$R_{\alpha\beta} = \Gamma^{\gamma_{\alpha\beta},\gamma} - \left(\ln|g|^{1/2}\right)_{,\alpha\beta} + \left(\ln|g|^{1/2}\right)_{,\gamma}\Gamma_{\alpha\beta\alpha\beta} - \Gamma^\gamma_{\beta\delta}\Gamma^\delta_{\alpha\gamma}$$

видно, что все компоненты $R_{\alpha\beta}$ имеют те же значения, что и в шварцшильдовской метрике (т. е. нулевые), за исключением

$$R_{u\mathfrak{a}} = -2M'/r^2$$

Скалярная кривизна Риччи равна

$$R = g^{uu}R_{uu} = 0,$$

поэтому единственная ненулевая компонента тензора Эйнштейна есть
откуда следует, что

$$G_{uu} = -2M'/r^2$$

$$T_{uu} = -M'/4\pi r^2$$

и что все остальные компоненты $\mathbf{T}$ равны нулю. Поскольку вектор $\mathbf{k} \equiv \nabla u$ [т. е. $k_\alpha = (1,0,0,0)$] является изотропным, тензор энергин-импульса

$$\mathrm{T} = -\frac{M'}{4\pi r^2}\mathbf{k}\otimes\mathbf{k}$$

соответствует чистому полю излучения. Таким образом, физическая интерпретация этого решения (называемого метрикой Вайдья) состоит в следующем: перед нами внешняя метрика сферической звезды, масса которой убывает, поскольку энергия уносится излучением.

Solution

16.12. Уравнения внутреннего строения звезды имеют вид [см. [1], т. 2, уравнение (23.5) или [2], раздел 11.1]

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2,$$

$$m = \int_0^r 4\pi r^2\rho dr,$$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho + p)\left(m + 4\pi r^3 p\right)}{r(r - 2m)},$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 p}{r(r - 2m)}.$$

Поскольку величина ρ постоянна, $\rho = \rho_0$, уравнение (2) дат
и

$$m = 4\pi r^3 \rho_0/3$$

$$M = 4\pi R^3 \rho_0/3$$

где R - радиус, а M - полная масса звезды. Подставив уравнение (5) в уравнение (3), получаем

$$\frac{dp}{4\pi\left(\rho_0 + p\right)\left(\frac{1}{3}\rho_0 + p\right)} = -\frac{rdr}{1 - (8\pi/3)r^2\rho_0}.$$

Проинтегрируем и решим относительно p:

$$\frac{p}{\rho_0} = \frac{\left(1 - 2Mr^2/R^3\right)^{1/2} - (1 - 2M/R)^{1/2}}{3(1 - 2M/R)^{1/2} - \left(1 - 2Mr^2/R^3\right)^{1/2}}$$

Постоянная интегрирования определяется из требования, чтобы $p = 0$ при $r = R$. Величину Φ проще всего найти из уравнения

$$\frac{d\Phi}{dp} = \frac{d\Phi/dr}{dp/dr} = -\frac{1}{\rho_0 + p}$$

Интегрируя, получаем

$$e^{\Phi} = \text{ const } / \left(\rho_0 + p\right) = \frac{3}{2}(1 - 2M/R)^{1/2} - \frac{1}{2}\left(1 - 2Mr^2/R^3\right)^{1/2}$$

где посгоянная интегрирования выбирается с помощью уравнения (7) таким образом, чтобы

$$e^{\Phi}\big|_{r-R} = (1 - 2M/R)^{1/2}$$

т. е. чтобы метрика гладко сшивалась с метрикой Шварцшильда вне звезды.

Таким образом, мы находим однопараметрическое семейство моделей звездной структуры, которое удобно параметризуется, если в качестве параметра выбрать давление в центре звезды:

$$\frac{\rho_c}{\rho_0} = \frac{1 - (1 - 2M/R)^{1/2}}{3(1 - 2M/R)^{1/2} - 1}.$$

Давление в центре становится бесконечным, когда

$$3\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} - 1 = 0$$

т. е. предельное значение $R/2M$ равно $\%/8$.

Сильное энергетическое условие требует выполнения неравенства $p_c < \rho_0$, т. е. правая часть уравнения (9) должна быть меньше 1. Отсюда получаем ограничение $R/2M > 4/3$.

Solution

16.13. Для релятивистского полностью вырожденного ферми-газа уравнение состояния имеет вид $p = (1/3)\rho$, поэтому уравнения внутреннего строения (см. задачу 16.12) записываются следующим образом:

$$d\rho/dr = -\frac{4\rho\left(m + 4\pi r^3\rho/3\right)}{r(r - 2m)},$$

$$dm/dr = 4\pi r^2\rho.$$

Подставляя предполагаемое решение $m(r) = 3r/14$ в уравнение (2), получаем

$$\rho(r) = (3/14)\left(4\pi r^2\right)$$

подставляя затем эти значения ρ и m в уравнение (1), убеждаемся, что они действительно являются решением системы. Из уравнения состояния находим

$$p(r) = (1/14)/\left(4\pi r^2\right)^{-1}.$$

Чтобы определить $n(r)$, воспользуемся формулами для релятивистского ферми-газа (см. задачу 5.24):

$$n = \int_0^{p_F} \left(\frac{2}{h^3}\right) 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^s,$$

$$\rho = \int_0^{p_F} p \left(\frac{2}{h^3}\right) 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi}{4h^3} p_{\mathrm{F}}^8.$$

Исключая p_{F} (импульс Ферми) из уравнений (3) и (4), получаем

$$n(r) = \frac{8\pi}{3h^3} \left(\frac{4h^3\rho}{8\pi}\right)^{3/2}$$

Подставляя теперь $\rho(r)$, окончательно находим

$$n(r) = \frac{K}{r^{3/2}}, \quad K = \frac{8\pi}{3h^3} \left(\frac{4h^3}{8\pi} \cdot \frac{3}{14} \cdot \frac{1}{4\pi}\right)^{3/4}.$$

Полное число частиц внутри сферы радиуса r дается интегралом

$$N(r) = \int_0^r n(r) d \text{ (собственный объем)} =$$

$$= \int_0^r n(r) e^{\Lambda} 4\pi r^2 dr = \frac{14\pi}{3} K r^{3/2};$$

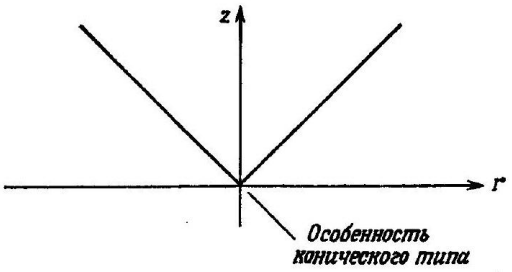
он остается конечным для всех r. Обратите внимание, что при вычислении интеграла (6) мы использовали соотношение

$$e^{2\Lambda} \equiv g_{rr} = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} = \frac{7}{4}$$

3-геометрия гиперповерхности $t = \text{const}$ имеет метрику

$$^{(3)}ds^2 = g_{rr} dr^2 + r^2 d\Omega^2 = (7/4) dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Очевидно, что в начале координат эта метрика обладает особенностью конического типа (фиг. 30), так как радиусу 2-сферы, равному r, соответствует радиус $(7/4)^{1/2} r$, превышающий r.



ur. 30.
Уравнение погружения для радиального сечения имеет вид
откуда следует

$$(3)\ ds^2 = (7/4) dr^2 = dr^2 + dz^2$$

$$z = \pm (3/4)^{1/2} r$$

Solution

16.14. В координатах кривизны метрика не может быть непрерывна при пересечении оболочки, так как

$$g_{rr} = (1 - 2m(r)/r)^{-1}$$

а $m(r)$ изменяется в точке пересечения оболочки. Поэтому мы будем использовать изотропные координаты, в которых метрика, несмотря ни на что, непрерывна и осуществляется гладкое сшивание метрики пустого пространства внутри оболочки с метрикой, характеризующейся наличием массы M вне ее. Эта метрика имеет вид

$$ds^2 = -e^{\gamma}dt^2 + e^{\alpha}\left(dr^2 + r^2 d\Omega^2\right),$$
$$e^{\gamma} = \begin{cases} \left(1 - \frac{M}{2r}\right)^2 \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^{-2}, r > R, \\ \left(1 - \frac{M}{2R}\right)^2 \left(1 + \frac{M}{2R}\right)^{-2}, r < R, \end{cases}$$
$$e^{\alpha} = \begin{cases} \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^4, & r > R, \\ \left(1 + \frac{M}{2R}\right)^4, & r < R. \end{cases}$$

При сшивании метрики в выражениях (1) и (2) мы воспользовались тем фактом, что по теореме Биркгофа (см. задачу 16.3) геометрия является шварцшильдовской вне оболочки и плоской внутри нее. Кроме того, мы полагаем, что поверхность оболочки расположена на расстоянии, соответствующем значению изотропной радиальной координаты $r = R$.

Определим далее компоненты интегральных напряжений $\Lambda^{\hat{\alpha}}{}_{\hat{\beta}}$ следующим инвариантным образом:

$$\Lambda\hat{\alpha}_{\hat{\beta}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon} T^{\hat{\alpha}}\hat{\beta} d\hat{r} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon} T^{\hat{\alpha}}\hat{\beta} e^{\frac{1}{2}} dr.$$

Значения компонент $\triangle$ можно найти, используя уравнения поля Эйнштейна и замечая при этом, что, согласно уравнениям (2) и (3), вклад в них могут давать только те члены C^{μ}, которые содержат вторые пронзводные от метрики.

Компоненты G^{μ} для метрики (1) имеют вид (см. задачу 9.20)

$$G_0^0 \sim \alpha'' e^{-\alpha} \sim -\frac{d}{dr^2}\left(e^{-\alpha}\right)$$
$$G_r^r \sim 0$$
$$G^{\vartheta}{}_{\vartheta} = G^{\varphi}{}_{\varphi} \sim \frac{1}{2}e^{-\alpha}\left(\alpha'' + \gamma''\right) \sim -\frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{dr^2}\left(e^{-\alpha}\right) - \frac{d}{dr}\left(e^{-\alpha}\gamma'\right)\right],$$

где $\sim$ означает, что мы отбрасываем все члены, не включающие вторые производные. Используя формулы (3) и (4), а также эй нштей новские уравнения поля, получаем

$$\Lambda^{\hat{0}}\hat{0} = \Lambda_0^0 = -(8\pi)^{-1} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon} e^{\alpha/2} \frac{d^2}{dr^2}\left(e^{-\alpha}\right) dr \sim -(8\pi)^{-1} \lim_{\varepsilon \to 0} e^{\frac{\alpha}{2}} x$$
$$\times \frac{d}{dr}\left(e^{-\alpha}\right) \Big| \begin{array}{l} R + e \\ R - \varepsilon \end{array}$$

и, далее,
ИЛИ

$$\Lambda_{\hat{0}}^{\hat{0}} = \frac{-M}{4\pi R^2 (1 + M/2R)^3},$$
$$\Lambda_{\hat{r}} = \Lambda_r^r = 0,$$

$$\Lambda_{\hat{\vartheta}}^{\hat{\theta}} = \Lambda_{\hat{\varphi}}\hat{\varphi}_{\hat{1}} = -(8\pi)^{-1} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon} \frac{1}{2} e^{\alpha/2} \left[\frac{d^2}{dr^2}\left(e^{-\alpha}\right) - \frac{d}{dr}\left(e^{-\alpha}\gamma'\right)\right] dr =$$

$$= -(8\pi)^{-1} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2} e^{\alpha/2} \left[\frac{d}{dr}\left(e^{\alpha}\right) - e^{\alpha}\gamma'\right] \Big|_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon},$$

$$\Lambda^{\hat{\theta}}\hat{\theta} = \frac{M}{8\pi R^2} \left(\frac{M/2R}{1 - M/2R}\right) \left(1 + \frac{M}{2R}\right)^{-3}$$

Чтобы дать правильную интерпретацию уравнений (4) - (6), мы должны помнить, что R - радиус оболочки в изотропных координатах. В координатах кривизны радиус $\mathscr{R}$ есть

$$\mathscr{R} = R(1 + M/2R)^2$$

и, таким образом, собственная поверхностная плотность массы равна

$$\frac{M}{4\pi\mathscr{R}^2} = \frac{M}{4\pi R^2(1 + M/2R)^4}$$

В ньютоновском пределе уравнения (4) - (6) дают

$$\Lambda_{\hat{0}}\hat{0}_{\hat{0}} \to -\frac{M}{4\pi R^2},$$
$$\Lambda_{\hat{r}} = 0,$$
$$\Lambda^{\hat{\gamma}}_{\hat{\sigma}} = \Lambda^{\hat{\varphi}}_{\hat{\varphi}} \to\to \frac{M^2}{16\pi R^3}.$$

Рещекие 16.15. Условие энергодоминантности требует, чтобы выполнялось неравенство

$$|T\hat{0}\hat{0}| > \left|T^{\hat{k}\hat{k}}\right|.$$

Используя результаты решения 16.14 и интегрируя по гонкой оболочке, мы приходим к неравенству

$$\left(1 + \frac{M}{2R}\right)^{-3} > \frac{1}{2}\frac{M/2R}{1 - M/2R}\left(1 + \frac{M}{2R}\right)^{-3}$$

где R - изотропная радиальная координата. Полагая $M/2R = x$, получаем $2 - 2x > x$ или $x < 2/3$, что дает

$$R > 3/41$$

Соответственно для шварцшильдовской раднальной координаты е имеем

$$e\mathscr{R} = R\left(1 + \frac{M}{2R}\right)^2 > \frac{25}{12}M,$$

что составляет около 1,04 шварцшильдовского радиуса.

Solution

16.16. В изотропных координатах (см. задачу 16.14) красное смещение на раднальной бесконечности равно

$$z = \frac{\lambda_\infty}{\lambda_{\text{поверх}}} - 1 = \frac{(-g_{00})^{1/2}_\infty}{(-g_{00})^{1/2}_{\text{Iовеер}}} - 1 = \left(e^{-\gamma/2}\right)_{\text{поверх}} - 1 =$$
$$= \frac{1 + M/2R}{1 - M/2R} - 1 = \frac{M/R}{1 - M/2R}.$$

Интегральные плотность массы-энергии и поперечные напряжения равны соответственно

$$-\Lambda^{\hat{0}}_{\hat{0}} = \frac{M}{4\pi R^2}\left(1 + \frac{M}{2R}\right)^{-3}$$
$$\Lambda\hat{\theta}_{\hat{\theta}} = \Lambda\hat{\varphi}_{\hat{\varphi}} = \frac{M}{8\pi R^2}\left(\frac{M/2R}{1 - M/2R}\right)\left(1 + \frac{M}{2R}\right)^{-3}.$$

Следовательно, отношение интегральных напряжений к плотности массы-энергии равно

$$-\frac{\Lambda\hat{\vartheta}_{\hat{\theta}}}{A\hat{0}_{\hat{0}}} - \frac{M/4R}{1 - M/2R} = \frac{1}{4}z,$$

так что красное смещение на бесконечности выражается через эти величины следующим образом:

$$z = -4\Lambda^{\hat{\theta}}\hat{\hat{\theta}}/\Lambda^0\hat{0}.$$

Если выполняется условие энергодоминантности, то

$$\left|\Lambda\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\hat{\boldsymbol{v}}}\right| \leqslant \left|\Lambda^{\hat{0}}_{\hat{0}}\right| \quad \text{и} \quad z \leqslant 4.$$

Решение 16.17. Неисчезающие компоненты 4-скорости жидко. сти суть u^t и $u^\Phi = \Omega u^t$, т. е.

Пусть

$$\mathbf{u} = u^t \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} = \xi_{(t)} + \Omega \xi_{(\varphi)}.$$

Поскольку Ω - постоянная, вектор & является вектором Киллинга. Согласно задаче 10.14, имеем

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = \nabla \ln |\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}|^{\frac{1}{2}}$$

где

$$|\xi \cdot \xi|^{\frac{1}{2}} = 1/u^t$$

так как $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$. Таким образом, уравнение Эйлера (см. задачу 14.3) для жидкости принимает вид

$$(\rho + p) \nabla \ln \left(u^t \right)^{-1} = -\nabla p - \left(\nabla_{(u_\xi)} p \right) \mathbf{u}.$$

Поскольку p не зависит от t и φ, ясно, что $\nabla_\xi p = 0$. Отсюда имеем

$$(\rho + p) \nabla \ln u^t = \nabla p$$

Решение 16.18. Учтем прежде всего, что $\mathrm{d}p = (\rho + p) \mathrm{d} \ln u^t$ (звезда находится в состоянии гидростатического равновесия; см. задачу 16.17). Возьмем затем от обеих частей этого уравнения внешнюю производную и, воспользовавшись соотношением $\mathrm{d}\,\mathrm{d}\, p = 0$, получим

$$0 = d(\rho + p) \wedge d \ln u^t = d(\rho + p) \wedge (\rho + p)^{-\mathbf{1}} d\rho.$$

Отсюда вытекает

$$d\rho \wedge dp = 0$$

и, следовательно, поверхность $\rho = \text{const}$ совпадает с поверхностью $p = \text{const}$.

Реиение 16.19. Поверхность звезды представляет собой поверхность постоянного давления p (так как $p = 0$). Из залачи 16.18 следует, что она является также поверхностью постоянных значений ρ и в силу параллельности

$$\mathrm{d}p \sim \mathrm{d}u^t$$

поверхностью постоянных значений u^t. Но в обозначениях задачи 16.17

$$\left(u^t \right)^{-1} = |\xi \cdot \xi|^{1/2} = \left| g_{tt} + 2 g_{t\varphi} \Omega + g_{\varphi\varphi} \Omega \Omega^2 \right|^{1/2}$$

так что на поверхности звезды

$$g_{tt} + 2 g_{t\varphi} \Omega + g_{\varphi\varphi} \Omega^2 = \text{ const}$$

Реиение 16.20. Пусть p – 4-импульс фотона, а $\mathrm{u}_{\text{изл}}$ и u_∞ - соответственно 4-скорости некоторой излучающей точки на поверхности звезды и наблюдателя на бесконечности. Тогда отношение излученной частоты к наблюдаемой равно

$$\frac{v_{\text{из.}}}{v_\infty} = \frac{p \cdot u_{\text{из.}}}{\mathbf{p} \cdot u_\infty}$$

Но для $\mathbf{u}_{\text{изл}}$ не равны нулю только t - и φ-компоненты, так что

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_{\text{изл}} = p_t u^t + p_\varphi u^\varphi = p_t u^t (1 + \Omega \ell)$$

где $\Omega \equiv u^\varphi / u^t$ - угловая скорость вращения звезды, а $\ell \equiv p_\varphi / p_t -$ прицельный параметр фотона по отношению к оси вращения. Заметим, что p_φ и p_t сохраняются вдоль траектории фотона. Кроме того, $p_t = \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_\infty$, поскольку $u^t = 1$, и, следовательно,

$$z = u^t (1 + \Omega \ell) - 1 = \frac{1 + \Omega \ell}{|g_{tt} + 2 \Omega g_{t\varphi} + \Omega^2 g_{\varphi\varphi}|^{1/2}_{\text{изл}}} - 1.$$

Так как $g_{tt} + 2 \Omega g_{t\varphi} + \Omega^2 g_{\varphi\varphi}$ на поверхности жестко вращающейся звезды есть постоянная (см. задачу 16.19), вариация значений z вдоль поверхности звезды дается формулой

$$\Delta z = \frac{\Omega \Delta \ell}{|g_{tt} + 2 \Omega g_{t\varphi} + \Omega^2 g_{\varphi\varphi}|^{1/2}_{\text{поверх}}}$$

Однако все фотоны, достигаюие наблюдателя, расположенного в направлении оси враения звезды, должны обладать компонентой импульса $p_\varphi = 0$, а это значит, что $\ell = 0$ и, следовательно, $\Delta \ell = 0$. Таким образом, для такого наблюдателя уширение $\Delta z = 0$.

Solution

16.21. Конфигурация идеальной жидкости называется конвективно-устойчивой, если ее масса (т. е. масса покоя плюс энергия) не изменяется при перераспределении барионов. Мы вычислим сначала изменение массы δM такой конфигурации, обусловленное привнесением из бесконечности δA барионов.

Пусть некий удаленный астрофизик бросает в нашу конфигурацию кусок вещества, обладающий полной массой-энергией $\mu_B \delta A + W_0$, где μ_B-среднее значение массы покоя барионов и W_0 - дополнительная энергия, которая должна быть затрачена, чтобы барионы попали внутрь жидкости. Неподвижный наблюдатель с радиальной координатой r ловит эти барионы и дополнительную энергию и измеряет их полную массу-энергию, которая оказывается равной

$$W = u^0 p_0 = e^{-\Phi} \left(\mu_B \delta A + W_0\right)$$

где $e^{-\Phi}$ - фактор красного смещения, обусловленный метрикой

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + (1 - 2m/r)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Используя энергию W, локальный наблюдатель должен нагреть и сжать барионы до состояния, соответствующего локальным термодинамическим условиям, а затем высвободить для них пространство внутри звезды (другими словами, попросту «втиснуть» их туда). Имеем

$$W_{\delta A_{(\text{лок. усл})}} = (\rho/n)\delta A,$$

$$W_{\text{высвобожд}} = p\delta V = (p/n)\delta A,$$

где n - плотность числа барионов. (Заметим по предположению, что звезда уже обладат экстремальным значением полной массыэнергии; поэтому изменением ее энергии, обусловленным тем, что вещество звезды смещается, освобождая место для δA барионов, и внутри нее устанавливается новая структура, можно пренебречь.) Остающаяся после этих процессов избыточная энергия равна

$$W_{\text{избыт}}(r) = W - (W_{\delta A} + W_{\text{высвобожд}}) =$$

$$= e^{-\Phi}\left(\mu_B \delta A + W_0\right) - \frac{(\rho + p)}{n}\delta A.$$

Затем локальный наблюдатель превращает долю $\left(1 - e^{\Phi}\right)$ от энергии $W_{\text{избыт}}$ в кинетическую энергию, так что он может «швырнуть остатки» наблюдателю на бесконечности, и тому достанется энергия

$$W_{\text{избыт}}(\infty) = W_{\text{избыт}}(r) e^{\Phi} = \mu_B \delta A + W_0 - e^{\Phi}\frac{(\rho + p)}{n}\delta A.$$

Следовательно, по измерениям наблюдателя на бесконечности масса звезды возрастает на величину δM, равную

$$\delta M = e^{\Phi}\frac{(\rho + p)}{n}\delta a = e^{\Phi}\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_S \delta A$$

здесь последнее соотношение следует из первого начала термодинамики.

Условие конвективной устойчивости эквивалентно требованию независимости δM от r:

$$e^{\Phi}(\rho + p)/n = \text{ const.}$$

Можно легко показать, обратившись к уравнению Эйлера

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho + p)\frac{d\Phi}{dr}$$

что условие (7) эквивалентно требованию адиабатичности изменений термодинамических переменных вдоль радиуса. Беря производную по r от уравнения (7), получаем

$$-\frac{(\rho + p)}{n}\frac{dn}{dr} + \frac{d\rho}{dr} + \frac{dp}{dr} + (\rho + p)\frac{d\Phi}{dr} = 0.$$

Используя уравнение (8), можно переписать уравнение (9) в виде

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{(\rho + p)}{n}\frac{dn}{dr} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial n}\right)_s \frac{dn}{dr}$$

Из этого уравнения ясно, что критерием конвективной устойчивости является изэнтропичность процессов в жидкости.

Solution

16.22. Будем исходить из уравнения Эйлера для жестко вращающейся звезды:

$$(\rho + p)^1 \frac{\partial p}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \ln u}{\partial x^\mu}$$

Сравним его с условием постоянства энергии инжекции

$$\frac{\rho + p}{nu^\theta} = \text{ const.}$$

Возьмем логарифмическую производную от обеих частей уравнения (2) и подставим ее в уравнение (1). Получим

$$(\rho + p)^{-1} \frac{\partial p}{\partial x^\mu} = n^{-1} \frac{\partial n}{\partial x^\mu}$$

Уравнение (3) представляет собой запись первого начала термодинамики для изэнтропических систем.

Solution

16.23. Поскольку вне звезды $T^\mu{}_v$ обращается в нуль, мы можем брать объемный интеграл по всему пространству в некоторый момент времени t. Из уравнений поля следует

$$8\pi \left(T^\mu{}_v - \frac{1}{2} \delta^\mu{}_v T \right) = R^\mu{}_v$$

поэтому интегральное выражение для массы есть

$$I \equiv - \int \left(2T^{\dot{\mu}}{}_v - \delta^\mu{}_v T \right) \xi^v d^3\Sigma_\mu = -(4\pi)^{-1} \int R^\mu \xi^v d^3\Sigma_\mu =$$
$$= (4\pi)^{-1} \int \xi^{\mu;v}{}_{;v} d^3\Sigma_\mu = (8\pi)^{-1} \oint \xi^{\mu;v} d^2\Sigma_{\mu v}.$$

[Третье равенство следует из решения 10.6; последнее равенство вытекает из теоремы Стокса, см. задачу 8.10 (в).] Если выбрать координаты t, r, ϑ, φ, переходящие на бесконечности в сферические координаты, то будем иметь

$$d^2\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{\partial \left(x^\alpha, x^\beta \right)}{\partial(\vartheta, \varphi)} d\vartheta d\varphi = r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

и, следовательно,

$$\xi^{\mu;v} d^2\Sigma_{\mu\nu} = 2\xi^{i;r} r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

Асимптотический вид метрики есть

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 - \frac{4J \sin^2\vartheta}{r} dt d\varphi +$$
$$+ \left(1 + \frac{2M}{r} \right) \left(dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta d\varphi^2 \right)$$

Поскольку единственной ненулевой компонентой $\xi_{(t)}$ является $\xi = 1$, имеем

$$\xi^{t:r} \approx \xi^t_{ir} = \xi^t_{,r} + \Gamma^t_{\alpha r} \xi^\alpha = 0 + \Gamma^t_{tr} \approx -\frac{1}{2} g_{tt,r} = M/r^2.$$

Тогда для интеграла I получаем

$$I = (8\pi)^1 \int \frac{2M}{r^2} r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi = M$$

что и требовалось показать. Аналогично имеем

$$S \equiv \int T^\mu{}_v \xi^v{}_{(\varphi)} d^3\Sigma_\mu = (8\pi)^{-1} \int R^\mu{}_v \xi^v{}_{(\varphi)} d^3\Sigma_\mu - (16\pi)^{-1} \int R \xi^\mu{}_{(\varphi)} d^3\Sigma_\mu$$

Поскольку $d^3\Sigma_\varphi = 0$, второй член обращается в нуль и
Но

$$S = -(8\pi)^{-1} \int \xi^{\mu;}; v$$
$$= -(16\pi)^{-1} \oint 2\xi^3 \Sigma_\mu - 0 r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi.$$

$$\xi^{t.r} \approx \xi^t, r + \Gamma^t_{\alpha r}\xi^\alpha = 0 + \Gamma^t{}_{\varphi r} = g^{tt}\Gamma_{t\varphi r} + g^{t\varphi}\Gamma_{\varphi\varphi r} \approx$$
$$\approx -\frac{1}{2} g_{t\varphi,r} + \left(\frac{-2J}{r^3}\right)\frac{1}{2} g_{\varphi\varphi,r} = -3J\sin^2\vartheta/r^2,$$

и, следовательно,

$$S = (16\pi)^{-1} \int 6J\sin^3\vartheta d\vartheta d\varphi = J$$

Solution 16.24.

В координатах кривизны

$$\xi^v_{(t)} = \delta^v_t \quad \text{и} \quad d^3\Sigma_\mu = \delta^t_\mu |g|^{1/2} dr d\vartheta d\varphi,$$

поэтому рассматриваемый интеграл равен

$$I \equiv -\int \left(2T^\mu{}_v - \delta^\mu{}_v T\right)\xi^v{}_{(t)} d^3\Sigma_\mu = -\int \left(2T^t{}_t - T\right) e^{\Phi+\lambda} r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi dr$$

Но в данном случае

$$T_t t = (\rho + p)u^t u_t + p\delta^t_t = -\rho,$$
$$T = -(\rho + p) + 4p = 3p - \rho.$$

Так как в подынтегральном выражении нет функций, зависящих от ϑ и φ, интегрирование по углам дает 4π, и, следовательно,

$$I = \int_0^R (\rho + 3p) e^{\Phi+\lambda} 4\pi r^2 dr$$

Воспользуемся методом интегрирования по частям. Поскольку

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr$$

нмеем

$$\int_0^R \rho e^{\Phi+\lambda} 4\pi r^2 dr = m e^{\Phi+\lambda}\Big|_0^R - \int_0^R m\left(e^{\Phi+\lambda}\right)' dr,$$

где штрих означает производную по r. Производную p' можно найти из уравнений внутреннего строения звезды, поэтому запи- Шем Нитеграл

$$\int_0^R 3pe^{\Phi+\lambda} 4\pi r^2 dr = pe^{\Phi} + \lambda 4\pi r^3\Big|_0^R - \int_0^R 4\pi r^3 \left(pe^{\Phi+\lambda}\right)' dr.$$

Первый член в правой части уравнения (3) есть $m(R) = M$, так как $m = 0$ при $r = 0$, а $\Phi = -\lambda$ при $r = R$. Первый член в правой части уравнения (4) равен нулю, так как $p = 0$ при $r = R$. Следовательно, $I = M$ при условии, что сумма остаюихся членов в уравнениях (3) и (4) обращается в нуль. Эта сумма равна

$$\int_0^R m\left(e^{\Phi+\lambda}\right)' dr + \int_0^R 4\pi r^3 \left(pe^{\Phi+\lambda}\right)' dr =$$
$$= \int_0^R dr e^{\Phi} + \lambda\left\{m\left(\Phi' + \lambda'\right) + 4\pi r^3\left[p' + p\left(\Phi' + \lambda'\right)\right]\right\}$$

Вспомним теперь, что
откуда

$$e^{2\lambda} = (1 - 2m/r)^{-1}$$

$$\lambda' = \frac{\left(4\pi r^3 \rho - m\right)}{r(r - 2m)}$$

Если этот результат и соотношения

$$\Phi' = \frac{m + 4\pi r^3 \rho}{r(r - 2m)}$$

$$p' = \frac{-(\rho + p)\left(m + 4\pi r^3 p\right)}{r(r - 2m)}$$

подставить в выражение в фигурных скобках в равенстве (5), то все члены взаимно уничтожатся и интеграл обратится в нуль, что и требова лось.

Рецекие 16.25. Пусть ϑ, φ и радиальная координата R сопутствуют некоторому сферическому слою вещества звезды. Тогда можно записать метрнку в виде
$ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{tR}dRdt + g_{RR}dR^2 + g_{tt}dtdx^l + g_{Ri}dRdx^i + g_{ij}dx^l dx^j$
где $i, j = \vartheta, \varphi$. Если метрика сферически-симметрична, то для $dt = dR = 0$ мы должны иметь

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = r^2(R,t)\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)$$

Далее, g_{ti} и g_{Ri} определяют некоторые векторы в 2-мерном $(\boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{\varphi})$ пространстве, и поэтому в силу изотропии сферических оболочек g_t и $\dot{g}_{Rt}$ должны обращаться в нуль. Наконец, чтобы избавиться от члена g_{tr}, мы можем ввести новую временную координату $T = T(t, r)$, не нарушая при этом «условия сопутствования» радиаль- ной координаты. Тогда получим

$$ds^2 = g_{T\tau}dT^2 + g_{RR}dR^2 + r^2(R,T)d\Omega^2.$$

Таким образом, мы, вообще говоря, можем добиться одновременно, чтобы координаты были сопутствующими, а метрика - диагональной.

Рассмотрим теперь движение элемента жидкости. Из выражения для 4-скорости жидкости

$$\mathbf{u} = (-g_{TT})^{-1/2}\mathbf{e}_T$$

получаем выражение для ускорения жидкости:

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = \mathbf{e}_R\left[\frac{du^R}{d\tau} + \left(u^T\right)^2\Gamma^R_{TT}\right] = -\frac{1}{2}\mathbf{e}_R\left(u^T\right)^2 g^{RR}g_{TT,R}$$

Отсюда следует, что ускорение жидкости равно нулю (а значит, и градиент давления равен нулю) в том и только в том случае, когда g_{TT} есть функция только от T. Но если это так, то мы можем ввести новую временную координату $\tau(T)$ с помощью соотношения

$$d\tau/dT = (-g_{TT})^{1/2}$$

Но это соотношение означает, что τ-собственное время для жидкости! Таким образом, одновременное наличие всех трех принятых свойств возможно тогда и только тогда, когда градиент давления равен нулю; но поскольку давление должно обращаться в нуль на поверхности звезды, равенство нулю градиента давления эквивалентно равенству нулю давления всюду внутри звезды.

13.5.6 Problems about Structure of Stars 3

Solution 16.26.

а) Первое начало термодинамики (см. задачу 5.19) в сопут. ствующей системе записывается в виде

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho + p} = \frac{\dot{n}}{n}$$

где n-плотность числа барионов. Чнсло барионов в сферическом слое толщиной dR есть $\left(4\pi nr^2 e^{\Lambda}\right)dR$, так что закон сохранения числа барионов в этом слое имеет вид
откуда следует

$$\partial\left(nr^2 e^{\Lambda}\right)/\partial t = 0$$

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho + p} = -\frac{2\dot{r}}{r} - \dot{\Lambda}$$

Рассматривая теперь это уравнение совместно с соотношениями

$$G\hat{t}_{\hat{R}} = 0 = \frac{2}{r}e^{-\Phi-\lambda}\left(\dot{r}' - \dot{r}'\Phi' - r'\dot{\Lambda}\right)$$

(см. задачу 9.20) и
получаем

$$T^{\beta}\beta_{R;\beta} = 0 = p' + (p+\rho)\Phi',$$

$$-\dot{\rho} = (\rho + p)\left(\frac{2\dot{r}}{r} + \frac{\dot{r}'}{r'}\right) + \frac{\dot{r}p'}{r'}.$$

Теперь можно подставить найденное соотношение в выражение для $\dot{m}$:

$$\dot{m} = 4\pi\int_0^R \left(2rir'\rho + r^2\dot{r}'\rho + r^2r'\dot{\rho}\right)dR =$$

$$= -4\pi\int_0^R \left(2rr'\dot{r}p + r^2\dot{r}'p + r^2\dot{r}'\right)dR = -4\pi\int_0^R \left(r^2\dot{r}p\right)'dR.$$

Поскольку $r^2rp = 0$ при $R = 0$, имеем
(??????)

б)

Из равенства

$$\dot{m} = -4\pi r^2 p r^2.$$

$$G^{\hat{i}}\hat{i} = -8\pi\rho$$

(см. задачу 9.20) получаем

$$8\pi\rho r^2 = 1 - r'^2e^{-2\Lambda} + i^2e^{-2\Phi} + 2rre^{-2\Phi}\dot{\Lambda} + 2re^{-2\Lambda}\left(r'\Lambda' - r''\right).$$

Воспользуемся теперь равенством

$$G^{\hat{t}}\hat{\boldsymbol{R}} = 0$$

чтобы исключить Λ, а также тем фактом, что $8\pi r^2\rho r'dR$ представляет собой полный дифференциал по отношению к R:

$$8\pi\rho r^2r' = r' - (r')^3e^{-2\Lambda} + r^2r'e^{-2\Phi} + 2rr'e^{-2\Phi}\left(r' - +\Phi'\right) +$$
$$+ 2rr'e^{-2\Lambda}\left(r'\Lambda' - r''\right) = \left[r - e^{-2\Lambda}r\left(r'\right)^2 + r\left(\prime^2\right)^2e^{-2\Phi}\right]^3.$$

Интегрируя, находим искомое соотношение

$$2m = r\left(1 - e^{-2\Lambda}\left(r'\right)^2 + \dot{r}^2e^{-2\Phi}\right) = r\left(1 - \Gamma^2 + U^2\right).$$

Solution

16.27. Из решения задачи 16.26 имеем

$$dr/d\tau = U,$$
$$dm/d\tau = -4\pi r^2pU,$$
$$U = \frac{dr}{d\tau} = \pm\left[\Gamma^2 + \left(\frac{2m}{r} - 1\right)\right]^{1/2}.$$

Как видно из первых двух уравнений, $dr/d\tau$ и $dm/d\tau$ имеют противоположные знаки; тогда для того, чтобы оболочка прошла от $2m/r < 1$ до $2m/r > 1$, во время прохождения через $r = 2m$ должны

выполняться неравенства

$$t \leqslant 0, \quad \dot{m} \geqslant 0.$$

Поэтому в уравнении (3) мы выбираем знак минуо:

$$\frac{dr}{d\tau} = -\left[\Gamma^2 + \left(\frac{2m}{r} - 1\right)\right]^{1/6}.$$

Итак, радиус будет продолжать уменьшаться, пока

$$\Gamma^2 + \left(\frac{2m}{r} - 1\right) > 0$$

но если радиус уменьшается, масса должна увеличиваться, что в свою очередь будет приводить к возрастанию члена $\left(\frac{2m}{r} - 1\right)$, и в результате коллапс не сможет прекратиться.

Предположим теперь, что оболочка сколлапсировала настолько, что $2m/r - 1 = \varepsilon > 0$. Поскольку эта величина продолжает возрастать, приходим к неравенству

$$dr/d\tau \leqslant e^{2/3}$$

т. е. оболочка достигнет $r = 0$ за собственное время $\leqslant 2m/\varepsilon^{\mathrm{T}\cdot}$ [Решением этой задачи мы обязаны Дж. Бардину.]

Решение 16.28. Из задачи 16.25 нам известно, что в случае коллапса в отсутствие давления мы можем выбрать $\Phi = 0$. Из равенств $G^R R = 0$ (см. задачу 9.20) и $\Phi \neq 0$ получаем

$$0 = 2rr + 1 - r'^2 e^{-2\Lambda} + \dot{r}^2 = 2rr + 1 - \Gamma^2 + U^2$$

откуда следует (см. задачу 16.26)

$$r = \frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{M}{r^2}.$$

Решение 16.29. Нз динамического уравнения для массы (см. задачу 16.26)

$$\dot{m} = -4\pi p r^2 \dot{r} = 0$$

непосредственно следует, что масса не зависит от времени; это физически вполне очевидно. Дифференцируя обе части уравнения для Γ^2 из задачи 16.26, получаем

$$2\Gamma\dot{\Gamma} = 2U\dot{U} + \frac{2m}{r^2}\dot{i} = 2\dot{r}\left(r + \frac{m}{r^2}\right)$$

откуда (см. результат задачи 16.28) видно, что Γ также не зависит от времени.

Теперь динамическое уравнение для $r(R, \tau)$ представляет собой простое дифференциальное уравнение первого порядка, которое можно решить в параметрическом виде. Слуга $a.\Gamma^2 - 1 < 0$.

$$r = \frac{m(b)}{1 - \Gamma^2}(1 + \cos\eta),$$
$$\tau = \frac{m(b)}{(1 - \Gamma^2)^{\frac{3}{2}}}(\eta + \sin\eta) + F(b),$$

где $F(b)$ - произвольная функция.

Сяуча $6.\Gamma^2 - 1 = 0$.

$$r = \left\{\frac{3}{2}(m(b))^{1/2}[G(b) - \tau]\right\}^{2/3},$$

где $G(b)$ - произвольная функция.

Случа в. $\Gamma^2 - 1 > 0$.

$$r = \frac{m(b)}{\Gamma^2 - 1}(ch\eta - 1),$$
$$\tau = \frac{m(b)}{(\Gamma^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}(\mathrm{sh}\,\eta - \eta) + H(b),$$

где $H(b)$ - произвольная функция.

Заметим, что у нас имеются три свободные функции, т. е. функции, вид которых мы можем задать, исходя из конкретной физической ситуации. Именно, выбирая $m(b)$, мы можем выбрать тем самым конкретное распределение масс в некоторый начальный момент времени и во все последующие моменты.

Выбор кпостоянных интегрирования» $F(b), G(b), H(b)$ соответствует выбору значения r для каждого элемента жидкости на начальной гиперповерхности, т. е. заданию $r(b,t)=0$.

И, наконец, выбор $\Gamma^2(b)$ соответствует выбору скорости элемента жидкости на начальной гиперповерхности.

Сравнивая наше уравнение с уравнением для радиальной геодезической, мы видим, что Γ^2-1 можно рассматривать как сохраняюшуюся кэнергию на бесконечности» жидкой оболочки. Неудивительно поэтому, что решение соответствует трем режимам: в задаче о разлете жидкой оболочки мы можем придать ей скорость меньше параболической, т. е. «второй космической» (случай a), в точности равную параболической (случай б), или превосходящую параболическую (случай в). Заметим, что вышеприведенные решения симметричны относительно обращения времени, поэтому, например, решение в случае в может описывать падение сферических оболочек на центр (это замечание справедливо также для задач 16.25, 16.26 и 16.30). Обратите внимание на тот факт, что если три свободные функции выбраны неаккуратно, то массивные оболочки могут налететь друг на другal

Реиение 16.30.

1. Тензор энергии-импульса имеет вид

$$T_{\alpha\beta}=\rho u_\alpha u_\beta.$$

Предположения о сферической симметрии и равномерном распределении плотности эквивалентны предположению об однородности и изотропии, так что метрика должна представлять собой решение Фридмана

где

$$ds^2=-d\tau^2+a^2(\tau)\left[d\chi^2+\Sigma^2(\chi)\left(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta d\varphi^2\right)\right]$$

$$\Sigma=\begin{cases}\sin\chi, & \text{если} \quad k=1,\\ \chi, & \text{если} \quad k=0,\\ \operatorname{sh}\chi, & \text{если} \quad k=-1.\end{cases}$$

Поверхности звезды соответствует некоторое постоянное значение «радиальной» координаты $\chi=\chi_0$. Из вида линейного элемента (1) следует, что собственный радиус звезды, определяемый по длине периметра, есть $R=a(\tau)\Sigma(\chi_0)$. Уравнения поля Эйнштейна (см. задачи 19.16 и 19.18) в отсутствие давления принимают вид

$$\left(\frac{a,\tau}{a}\right)^2=-\frac{k}{a^2}+\frac{8\pi\rho}{3},$$
$$\rho a^3=\text{ const.}$$

У равнение (2) можно переписать в виде

$$\rho=\frac{3}{8\pi}\left[\left(\frac{R,\tau}{R}\right)^2+\frac{k\Sigma^2(\chi_0)}{R^2}\right]$$

Следовательно, если $R,\tau=0$ при любом конечном значении R, то k должно быть равно $+1$, т. е. ρ - положительная величина.

Наоборот, если $k=-1$, то R,τ никогда не обращается в нуль.

Случай $k=0$ соответствует $R,\tau\to 0$ при $R\to\infty$.

2. Из уравнения Эйлера в отсутствие давления следует, что $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}=0$, т. е. каждый элемент жидкости движется вдоль геодезической. В силу сферической симметрии задачи все геодезические являются радиальными.

Мы выполним сшивание для $k=+1$; для случаев $k=0$ и $k=-1$ сшивание проводится аналогично. Для $k=+1$ уравнения (2) н (3) дают

$$(a_{,\tau})^2=a_m/a-1$$

где значение постоянной в уравнении (3) было фиксировано тем, что мы положили a равным его максимальному значению: $a=a_m=a_{\text{макс}}$, когда $a_{,\tau}=0$. Уравнение (5) можно проинтегрировать непосредственно в том виде, в котором оно записано; удобно, однако, ввести временной параметр посредством соотношения

$$d\tau=ad\eta$$

Из уравнений (5) и (6) получаем

$$a=\frac{1}{2}a_m(1+\cos\eta),$$
$$\tau=\frac{1}{2}a_m(\eta+\sin\eta).$$

Постоянные интегрирования были выбраны таким образом, чтобы $a = a_m$ и $\tau = 0$ при $\eta = 0$ и чтобы $a = 0$ и $\tau = \pi a_m/2$ при $\eta = \pi$. Внутренняя 3-геометрия поверхности звезды, измеряемая изнутри ее, находится путем подстановки в выражение (1) значения $\chi = \chi_0$:

$$^{(3)}ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau)\sin^2\chi_0 d\Omega^2 = a^2(\eta)\left(-d\eta^2 + \sin^2\chi_0 d\Omega^2\right)$$

Внешняя метрика имеет вид

$$ds^2 = -(1-2M/r)dt^2 + (1-2M/r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Радиальная координата поверхности звезды есть $r = R(\tau)$, а $R(\tau)$ можно найти из уравнения для радиальных геодезических (см. задачу 15.4) по формулам

$$R = \frac{1}{2}R_l(1+\cos\eta),$$
$$\tau = \left(\frac{Rl}{8M}\right)^{1/2}(\eta + \sin\eta),$$
$$u^t = \frac{dt}{d\tau} = \frac{(1-2M/R_i)^{1/2}}{1-2M/R}.$$

Таким образом, 3-геометрия поверхности звезды во внешней метрике имеет вид

$$^{(3)}s_+^2 = -d\tau^2 + R^2(\tau)d\Omega^2 = -\left(\frac{R_l^2}{8M}\right)(1+\cos\eta)d\eta^2 + \\ + \frac{R_i^2}{4}\left(1+\cos\eta^2\right)d\Omega^2.$$

Сравнивая с уравнением (9), мы видим, что эти 3-геометрии гладко сшиваются друг с другом, если мы отождествим следующие параметры:

$$R_l = a_m\sin\chi_0, \quad 2M = a_m\sin^3\chi_0.$$

Вычислим теперь внешнюю кривизну поверхности $K(\vec{j}$, измеряемую изнутри звезды. Нормаль к поверхности есть

$$\mathbf{n} = a^{-1}\partial/\partial x$$

(вспомним, что $n\cdot n = 1$), а векторы $\mathbf{u} = \partial/\partial\tau, \partial/\partial\vartheta$ и $\partial/\partial\varphi$ лежат на поверхности. Пусть теперь индексы i, j пробегают «значения» $\tau, \boldsymbol{\vartheta}, \varphi$. Тогда

$$K_{ij} \equiv -\mathbf{e}_i\cdot\nabla_j\mathrm{n} = -\mathbf{e}_l\cdot\Gamma^\alpha_{nj}\mathbf{e}_\alpha = -g_{l\alpha}\Gamma^\alpha_{nj} = \\ = -\Gamma_{inj} = -\frac{1}{2}\left(g_{in,j} + g_{ij,n} - g_{nj,i}\right) = -\frac{1}{2}g_{ij,n},$$

поскольку

$$g_{in} = a^{-1}g_{ix} = 0$$

Из вида метрики следует, что

$$K^{(-)}_{\tau\tau} = K^{(-)}_{\tau\vartheta} = K^{(-)}_{\tau\varphi} = K^{\dagger-)}_{\theta\varphi} = 0,$$
$$K^{(-)}_{\vartheta\vartheta} = K^{(-)}_{\varphi\varphi}\sin^{-2}\vartheta = -\frac{1}{2}a_m(1+\cos\eta)\sin\chi_0\cos\chi_0.$$

Во внешней метрике 4-скорость записывается в виде
Нормаль к поверхности

$$\mathbf{u} = u^t\mathbf{e}_t + u^r\mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{n} = n^t\mathbf{e}_{\boldsymbol{t}} + n^r\mathbf{e}_r$$

удовлетворяет соотиошениям

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1 = g_{tt}\left(n^t\right)^2 + g_{rr}\left(n^r\right)^2,$$
$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{u} = 0 = n^t u_t + n^r u_r.$$

Поскольку

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = -1 = g^{tt}\left(u_t\right)^2 + g^{rr}\left(u_r\right)^2$$

И

$$g^{rr} = (g_{rr})^{-1} = -\left(g^{tt}\right)^{-1} = -g_{tt} = 1 - 2M/r$$

из приведенных выше уравнений следует:

$$n^t = u_r, \quad n^r = -u_t$$

Пусть, как и прежде, индексы i, j пробегают значения τ, θ, φ. Тогда уравнение (17) справедливо также и для внешней метрики, ТаК КаК

$$g_{in} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_t = 0$$

Уравнение (18) также справедливо во внешней метрике, поскольку

$$\mathbf{e}_\tau \cdot \mathbf{e}_\tau = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1, \text{ а } \mathbf{e}_\tau \cdot \mathbf{e}_\vartheta = \mathbf{e}_\tau \cdot \mathbf{e}_\Phi = \mathbf{e}_\vartheta \cdot \mathbf{e}_\Phi = 0$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} K_Q^{(+)} = K_{\Phi\varphi}^{++} \sin^{-2}\vartheta = -\frac{1}{2}\left(r^2\right)_{,n} = -\frac{1}{2}\left(r^2\right), rn_r = ru_t = \\ = -R\left(1 - 2M/R_t\right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}R_t(1+\cos\eta)\left(1 - 2M/R_t\right)^{\frac{1}{2}} = \\ = -\frac{1}{2}a_m \sin\chi_0 \cos\chi_0 (1+\cos\eta), \end{aligned}$$

где мы использовали уравнения (23), (13), (11) и (15). Такнм образом, $K_{lj}^{(t)} = K_{lj}^{(t)}$, и доказательство завершено.

13.5.7 Problems about Black Holes 1

Solution 17.1.

Параметры массы и момента количества движеиия для асимптотически-плоской метрики можно определить, если найти такую систему координат, в которой данная метрика принимает вид

$$\begin{aligned} g_{00} &= -\left(1 - \frac{2\tilde{M}}{r} + \mathscr{O}\left(r^{-2}\right)\right), \\ g_{0j} &= -\left(4\varepsilon_{jkl}\tilde{S}^k \frac{x^l}{r^3} + \mathscr{O}\left(r^{-3}\right)\right). \end{aligned}$$

Тогда постоянные $\tilde{M}$ и $\tilde{S}^k$ в разложении как раз и будут массой и моментом количества движения источника (см. [2], гл. 9.4 и [1], гл. 19.3).

Разложение метрики Керра в координатах Буайе-Линдквиста в ряд по степеням r^{-1} дает нам главные члены разложения вида

$$\begin{aligned} ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \ldots\right)dt^2 - \left(\frac{4aM}{r}\sin^2\vartheta + \ldots\right)dtd\varphi + \\ + (1 + \ldots)\left[dr^2 + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)\right]. \end{aligned}$$

Преобразовывая к декартовым координатам с помощью подетаНОВКи

$$x \equiv r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y \equiv r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z \equiv r\cos\vartheta$$

получаем

$$\begin{aligned} ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \ldots\right)dt^2 - \left(\frac{4aM}{t^3} + \ldots\right)(xdy - ydx)dt + \\ + (1 + \ldots)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right). \end{aligned}$$

Сравнивая (3) с (1) и (2), немедленно находим

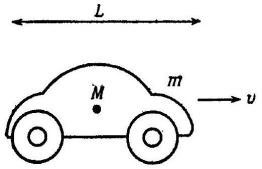
$$\begin{aligned} \tilde{M} &= M, \\ \tilde{S} &= aM\mathrm{e}_{\hat{z}} \end{aligned}$$

Реuенue 17.2. Пусть до спрессовывания автомобиль характеризуется длиной L и массой m, а после-длиной L' и «параметром бугристости» h (см. фиг. 31); масса черной дыры равна M. Предположим также, что величина внутреннего напряжения на единицу массы, которое может выдержать сталь, составляет ε (0,1 эВ на массу ядра; см. задачу 5.6). Сравнивая силы гра-

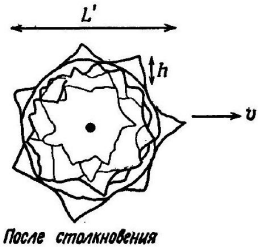
витационного давления с требующимися внутренними напряжениями, получаем следующие «условия спрессовывания»:

$$\left(\frac{GM}{L^2}\right) L > \varepsilon$$
$$\left(\frac{GM}{L'^2}\right) h > \varepsilon$$

условие, необходимое для того, чтобы спрессовывание началось, условие, необходимое для того, чтобы после спрессовывания бугорки не превосходили h.



Мо сппоNкновенHs.



ur. 31.

Если учесть, что при переработке на металлолом автомобили обычно спрессовывают до 1/10 их первоначального размера, то легко видеть, что эти два неравенства становятся эквивалентными, если $h/L' = 1/10$, что кажется вполне разумным значением. Полагая $L' \approx 100$ cm$\varepsilon \approx 10^0$ эрг/г, получаем $\mu \gtrsim 10^{18}$г.

Время, необходимое для спрессовывания остова, определяется временем свободного падения на дыру

$$\left(L^3/GM\right)^{\frac{1}{2}} \sim 10^{-5} c$$

так что в час можно переработать порядка 10^8 остовов.

Peuение 17.3. Чтобы ракетный корабль двигался вдоль времениподобной мировой линии, его 4-скорость должна удовлетворять следующему соотношению (получающемуся из шварцшильдовской метрики):

$$1 = -\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \\ - r^2\left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2 - r^2\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2.$$

Внутри горизонта все члены отрицательны, за исключением того, который содержит $(dr/d\tau)^2$, откуда следует условие

$$\left(\frac{2M}{r}-1\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 > 1.$$

Мы знаем также (например, из картины коллапса Эддингтона Финкельштейна или Крускала), что знак $dr/d\tau$ должен быть отрицательным для «направленного в будущее» (т. е. физнческого) наблюдателя, откуда имеем

$$dr < -\left(\frac{2M}{r}-1\right)^{1/2} d\tau$$

H

$$\tau_{\text{makc}} = -\int\limits_{\text{Q}M}^{0}\left(\frac{2M}{r}-1\right)^{-1/2} dr = \\ = \left[r^{1/2}(2M-r)^{1/2} + M\arccos\left(\frac{r}{M}-1\right)\right]_{QM}^{0} = \pi M.$$

Solution

17.4. Мы рассмотрим случай керровской черной дыры, а затем получим шварцшильдовский случай, полагая $a = 0$. Метрика Керра (в.обычных координатах Буайе-Линдквиста) имеет вид

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \left(4Mar\frac{\sin^2\theta}{\Sigma}\right) dtd\varphi + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \\ + \Sigma dv^2 + \left(r^2 + a^2 + 2Ma^2\frac{r\sin^2\theta}{\Sigma}\right)\sin^2\theta d\varphi^2,$$

где

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2, \Sigma \equiv r^2 + a^2\cos^2\vartheta$$

Уравнение геодезических есть

$$d^2x^\mu/d\tau^2 + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = 0,$$

но первый член обращается в нуль, поскольку u^t и u^Φ - единственные неисчезающие компоненты $\mathbf{u}$ - являются постоянными. Компоненту r уравнения (2) можно записать в виде

$$0 = \Gamma_{ra\beta}u^\alpha u^\beta = \left(\Gamma_{rtt}dt^2 + 2\Gamma_{rt\varphi}dtd\varphi + \Gamma_{r\varphi\varphi}d\varphi^2\right)(d\tau)^{-2}.$$

Так как метрические коэффициенты зависят только от r и θ, необходимые нам символы Кристоффеля в экваториальной плоскости $\forall = \pi/2$ суть

$$\Gamma_{rtt} = -\frac{1}{2}g_{tt,r} = M/r^2$$
$$2\Gamma_{rt\varphi} = -g_{t\varphi,r} = -2Ma/r^2,$$
$$\Gamma_{r\varphi\varphi} = -\frac{1}{2}g_{\varphi\varphi,r} = \frac{Ma^2}{r^2} - r.$$

Учитывая, что $\Omega \equiv d\varphi/dt$, из уравнений (3) и (4) получаем

$$0 = \Omega^2\left(\frac{Ma^2}{r^2} - r\right) - \frac{2Ma}{r^2}\Omega + \frac{M}{r^2}.$$

Два корня этого квадратного уравнения (соответствующие прямой и обратной орбитам) равны

$$\Omega = M^{1/2}/\left(\pm r^2 + aM^{1/2}\right).$$

Для $a = 0$ получаем уравнение $\Omega^2 = M/r^3$, которое (по случай ному совпадению, обусловленному выбором координат) в точности соответствует закону Кеплера в ньютоновской теории тяготения.

Решение 17.5. Метрика Рейсснера - Нордстрема имеет вид

$$ds^2 = -Adt^2 + A^{-1}dr^2 + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right),$$

где $a = 1 - 2M/r + Q^2/r^2$. Найдем вначале кеплеровскую частоту обращения для круговых орбит $\Omega \equiv d\varphi/dt$ (точно так же, как в задаче 17.4). В нашем случае имеем

$$\Gamma_{rtt} = -\frac{1}{2}g_{tt,r} = \frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3},$$
$$2\Gamma_{rt\varphi} = -g_{t\varphi,r} = 0,$$
$$\Gamma_{r\varphi\varphi} = -\frac{1}{2}g_{\varphi\varphi,r} = -r,$$

откуда получаем квадратное уравнение для Ω:

$$\Omega^2 r - \left(\frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3}\right) = 0.$$

Частота орбитального обращения равна

$$\Omega = \pm\left(\frac{M}{r^3} - \frac{Q^2}{r^4}\right)^{273}$$

Собственная скорость движущегося по орбите наблюдателя по отношению к координатно-покоящемуся наблюдателю есть

$$\hat{v} = \frac{d\hat{\varphi}}{d\hat{t}} = \frac{r d\varphi}{A^{2/2} dt} = \left(\frac{Mr - Q^2}{r^2 - 2Mr + Q^2} \right)^{1/2}.$$

(«Шляпками» обозначены ортонормированные компоненты в покоящейся системе отсчета.) В покоящейся системе локально измеряемая напряжен ность электромагнитного поля обладает только одной компонентой:

$$E_{\hat{r}} = \frac{Q}{r^2}$$

Применяя преобразование Лоренца и учитывая обычные соотношения для электрического и магнитного полей, получаем, что в системе отсчета, связанной с наблюдателем на орбите, все компоненты напряженности полей будут равны нулю, за исключением

$$E_{\hat{r}} = \left(1 - \hat{v}^2\right)^{-\frac{1}{8}} \frac{Q}{r^2} = \frac{Q}{r^2} \left(\frac{r^2 - 2Mr + Q^2}{r^2 - 3Mr + 2Q^2} \right)^{1/3},$$

$$B_{\hat{v}} = \left(1 - \hat{v}^2\right)^{-\frac{1}{2}} \hat{v} \frac{Q}{r^2} = \frac{Q}{r^2} \left(\frac{Mr - Q^2}{r^2 - 3Mr + 2Q^2} \right)^{1/2}.$$

Solution 17.6.

Удельный момент количества движения a и заряд e черной дыры Керра - Ньюмана с массой M не могут быть произвольно большими: они должны удовлетворять неравенству

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{Ge^2}{c^4} \leq \frac{G^2}{c^4} M^2$$

(здесь мы для ясности включили фундаментальные константы G и с). Неравенство (1) следует из условия существования горизонта, расположенного от центра на расстоянии

$$r_H = M + \left(M^2 - e^2 - a^2\right)^2.$$

Если неравенство (1) нарушается, мы имеем дело с «голой син* гулярностью», которая к тому же оказывается акаузальной. Из эксперимента мы знаем, что спин, заряд и масса электрона таковы, что член с a^2 в неравенстве (1) имеет порядок 10^{-22} cm^2, член о e^2 - порядок 10^{-68} cm^2, а член с m^2 - порядок 10^{-110}см^2. Таким образом, неравенство довольно глубоко нарушается и электрон это не черная дыра.

Solution

17.7. Поскольку у нас имеется три соотношения между компонентами 4-импульса

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = -m^2, \quad p_t = E, \quad p_\varphi = L,$$

уравнения орбиты можно свести к виду

$$(dr/d\lambda)^2 = V(E, L, r),$$

где λ - аффинный параметр, а V - некоторый эффективный потенциал. Условие того, что орбита является круговой, есть равенство нулю $dr/d\lambda$, т. е.

$$V(E, L, r) = 0,$$
$$V'(E, L, r) = 0,$$

где $V' \equiv \partial V / \partial r$. По теореме существования неявной функции систему уравнений (1) и (2) можно разрешить относительно

$$E = E(r), \quad L = L(r),$$

при условии, что

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial E} & \frac{\partial V}{\partial L} \\ \frac{\partial V'}{\partial E} & \frac{\partial V'}{\partial L} \end{vmatrix} \neq 0.$$

(Это условие в данном случае выполнено.) Тогда dE/dr и dL/dr можно найти с помощью дифференцирования уравнений (1) и (2):

$$0 = \frac{dV}{dr} = \frac{\partial V}{\partial E}\frac{dE}{dr} + \frac{\partial V}{\partial L}\frac{dL}{dr} + V',$$
$$0 = \frac{dV'}{dr} = \frac{\partial V'}{\partial E}\frac{dE}{dr} + \frac{\partial V'}{\partial L}\frac{dL}{dr} + V''.$$

Рассмотрим теперь некоторую орбиту с $r = r_0$ и внесем возмущение таким образом, чтобы $r = r_0 + \varepsilon$. Уравнение возмущенной орбнты есть

$$(dr/d\lambda)^2 = V(r_0) + \varepsilon V'(r_0) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 V''(r_0) + ...$$

где $V(r_0) = 0$ и $V'(r_0) = 0$ (условие для невозмущенной круговой орбиты). Тогда устойчивость зависит от V'': если орбита устойчива, то потенциал V'' должен быть отрицательным. Для случая краевой устойчивости мы в дополнение к $V = 0$ и $V' = 0$ имеем условие $V'' = 0$, так что единственным решением уравнений (4) и (5) будет $dE/dr = 0$ и $dL/dr = 0$. Из физических соображений ясно, что эти экстремумы суть минимумы.

Реuение 17.8.

а) Из соотношений $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = -1$ и $\Omega \equiv u^\varphi/u^0$ имеем

$$-1 = g_{00}\left(u^0\right)^2 + 2g_{0\varphi}u^0u^\varphi + g_{\varphi\varphi}\left(u^\varphi\right)^2 = \left(u^0\right)^2\left(g_{00} + 2\Omega g_{0\varphi} + \Omega^2 g_{\varphi\varphi}\right)$$

и, следовательно,

$$u^0 = \left(-g_{00} - 2\Omega g_{0\varphi} - \Omega^2 g_{\varphi\varphi}\right)^{-1/3}$$

где в плоскости $\vartheta = \pi/2$
$-g_{00} = 1 - 2M/r, \quad -g_{0\varphi} = 2Ma/r, \quad -g_{\varphi\varphi} = -\left(r^3 + a^2r + 2Ma^2\right)/r.$
Остальные компоненты легко найти, выразив их через u^0:

$$u^\varphi = \Omega u^0,$$
$$u_0 = g_{00}u^0 + g_{0\varphi}u^\varphi = u^0\left(g_{00} + \Omega g_{0\varphi}\right),$$
$$u_\varphi = g_{0\varphi}u^0 + g_{\varphi\varphi}u^\Phi = u^0\left(g_{0\varphi} + \Omega g_{\varphi\varphi}\right).$$

б)

Из уравнения (1) имеем

$$Y \equiv g_{00} + 2\Omega_{0\varphi} + \Omega^2 g_{\varphi\varphi} < 0.$$

Наблюдатель может быть координатно-покоящимся ($\Omega = 0$) только там, где $g_{00} < 0$, т. е. в экваториальной плоскости только при $r > r_0 = 2M$.
в) Дискриминант квадратного трехчлена Y в неравенстве (2) ectb

$$\left(g_{0\varphi}\right)^2 - g_{00}g_{\varphi\varphi} = r^2 - 2Mr + a^2 = (r - r_+)(r - r_-).$$

Он отрицателен в области $r_- < r < r_+$. Если дискриминант Y отрицателен, то Y имеет один и тот же знак для любых Ω, т. е. тот же знак, что и $g_{\varphi\varphi}$. Поскольку величина $g_{\varphi\varphi}$ положительна, это нарушает неравенство (2), которое предполагает наличие только времениподобных движений и постоянство r. Следовательно, наблюдатель не может оставаться покоящимся при постоянном значении r. Обратите внимание, что при $r \to r_+\Omega$ стремится к

$$-g_{0\varphi}/g_{00} = a/2Mr_+$$

13.5.8 Problems about Black Holes 2

Solution

17.9. Сохраняющаяся энергия частицы есть скалярное произведение 4-импульса на временной вектор Киллинга $\xi(t) = \partial/\partial t$

$$E = -\mathbf{p}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = -p_t$$

Метрика Керра имеет вид

$$ds^2 = -e^{2v}dt^2 + e^{2\psi}(d\varphi - \omega dt)^2 + e^{2\mu_1}dr^2 + e^{2\mu_i}d\boldsymbol{\vartheta}^2$$

Контравариантные компоненты $g^{\alpha\beta}$ равны

$$g^{tt} = -e^{-2v}, g^{t\varphi} = -\omega e^{-2v}, \quad g^{\varphi\varphi} = e^{-8\phi} - \omega^2 e^{-8v},$$
$$g^{rr} = e^{-2\mu_2}, \quad g^{\theta\theta} = e^{-2\mu_i}.$$

Если масса частицы есть μ, то

$$-\mu^2 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = -e^{-2v}p_t^2 - e^{-2v}2\omega p_t p_\varphi + \\ + \left(e^{-2\psi} - e^{-2v}\omega^2\right)p_\Phi^2 + 8^{-2\mu_1}p_r^8 + e^{-2\mu_2}p_0^8.$$

Решая квадратное уравнение (4) относительно $p_t = E$, получаем

$$E = \omega p_\varphi + \left[e^{2v-2\psi}p_\Phi^2 + e^{2v}\left(e^{-2\mu_1}p_r^2 + \varepsilon^{-2\mu_2}p_6^8 + \mu^2\right)\right]^{1/2}.$$

Знак перед квадратным корнем в выражении (5) положителен, так что для частицы, покоящейся на бесконечности, $E = +\mu$. Если E должно быть отрицательным, то нам необходимо выбрать p_φ со знаком минус и потребовать выполнения неравенства

$$\left[e^{2v-\Omega\psi}p_\Phi^2 + e^{2v}\left(e^{-2\mu_i}p_r^8 + e^{-2\mu_i}p_b + \mu^2\right)\right]^{1/i} < -\omega p_\varphi.$$

Мы можем найти границу области отрицательных энергий E, если положим $p_r = p_\theta = 0$ и устремим к нулю μ (т. е. будем рассматривать ультрарелятивистские частицы). Это даст нам условие

$$e^{2v-8\psi} < \omega^2$$

эквивалентное

$$g(t > 0$$

Другнми словами, орбнты таких частиц должны находиться внутри эргосферы. (Этот результат следует также из задачи 10.15.)

Когда с борта космического корабля выпускается снаряд, из закона сохранения 4-импульса имеем

$$\mathbf{p}_{\text{до}} = \mathbf{p}_{\text{после}} + \mathbf{p}_{\text{снаряда}}$$

Умножая скалярно на временной вектор Киллинга, получаем

$$E_{\text{до}} = E_{\text{повле}} + E_{\text{снаряда.}}$$

Поскольку космическии корабль может войти в эргосферу из бесконечности, имеем $E_{\text{до}} > \mu$. Внутри эргосферы он может выПустить снаряд о достаточно большой скоростью (с отрицательным значением p_φ), так что $E_{\text{снарядв}} < 0$. Тогда из уравнения (7) следует

$$E_{\text{после}} > E_{\text{до,}}$$

и: корабль отправляется на бесконечность с возросшен полнон энергией. Обратите внимание, что, поскольку и траектория космического корабля, и траектория обладающего отрицательной энергией снаряда времениподобны, снаряд можно выпустить с борта корабля с (локально измеренной) скоростью, меньшей c.

Решение 17.10. В задаче 17.8 мы видели, что при приблиЖении к горизонту $\Omega \to a/2Mr_+$, когда $\boldsymbol{\vartheta} = \pi/2$. Чтобы доказать справедливость этого предельного соотношения для любых $\boldsymbol{\vartheta}, 3$ - пишем (в обозначениях задачи 17.9)

$$\Omega = \frac{p^\varphi}{p^t} = \frac{g^{\varphi\varphi}p_\varphi + g^{\varphi t}p_t}{g^{tt}p_t + g^{\varphi t}p_\varphi} = \omega - e^{2v}\frac{e^{-2\psi}p_\varphi}{p_t + \omega p_\varphi}.$$

При $\Delta = 0$ (т. е. на горизонте) метрическая функция $e^{-\mathbf{2}\Psi}$ остается конечной, но e^{2v} обращается в нуль, так что $\Omega = \omega$, и при $\Delta = 0$ имеем

$$\omega = \frac{-g_{\varphi t}}{g_{\varphi\varphi}} = \frac{a}{2Mr_+}$$

Pewenue 17.II. Запишем сначала r^-и $\forall$ - компоненты уравнений орбнтального движения в геометрии Керра [см., например, [1], уравнение (33.32)]:

$$\left(r^8 + a^8\cos\theta\right)dr/d\tau = \pm V_r^{1/}$$
$$\left(r^2 + a^8\cos\theta\right)dv/d\tau = \pm V^2/$$

где

$$V_r = \left[E\left(r^2+a^2\right) - La\right]^2 - \Delta\left[r^2 + (L-aE)^2 + Q\right],$$
$$V_\theta = Q - \cos^2\vartheta\left[a^2\left(1-E^2\right) + L^2/\sin^2\vartheta\right]$$
$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2$$

а E, L и Q - интегралы движения. Чтобы орбита проходила через $\vartheta = 0$ и $\boldsymbol{\vartheta} = \pi$, потенциал V_θ должен быть положительным как при $\boldsymbol{\vartheta} = 0$, так и при $\vartheta = \pi$. Согласно уравнению (4), из этого условия следует

$$L = 0 \text{ и } Q > a^2\left(1-E^2\right).$$

Тогда уравнение (3) принимает вид
где

$$V_r = E^2\left(r^2+a^2\right)^2 - \Delta\left[r^2+a^2+I\right]$$

$$I = Q - a^2\left(1-B^2\right) > 0.$$

Условия, необходимые для того, чтобы орбита характеризовалась постоянным значением радиальной координаты r, суть $V_r = 0$ и $dV_r/dr = 0$ (условие локального экстремума и условие бесконечного сохранения экстремума). Условие, налагаемое на производную, дает

$$0 = 2E^{\mathbf{Q}}r\left(r^2+a^2\right) - (r-M)E^2\left(r^2+a^2\right)^2/\Delta - r\Delta,$$

где для исключения интеграла движения I мы воспользовались условием $V_r = 0$ и уравнением (5). Этот результат можно переписать в виде

$$E^2 = r\Delta^2\left[\left(r^2+a^2\right)\left(r^3 - 3Mr^2 + a^2r + a^2M\right)\right]^{-1}.$$

Для очень больших значений r получаем

$$E \approx \left(1 - \frac{M}{2r} + \ldots\right)$$

т. е. не что иное, как ньютоновскую энергию связи для круговой орбиты. При уменьшении r изменения E описываются уравнением (7). Очевидно, что, поскольку числитель неотрицателен, то решение уравнения (7) перестает существовать в единственном случае - когда знаменатель обращается в нуль (обращение знаменателя в бесконечность вне горизонта невозможно). Следовательно, полярные круговые орбиты существуют вплоть до минимального радиуса r, определяемого из уравнения

$$r^3 - 3Mr^2 + a^2r + a^2M = 0$$

Это уравнение легко решается с помощью классической формулы для решений кубического уравнения; минимальный радиус поляр- ной орбиты равен

$$r = M\left\{1 + \frac{2\left(3-a^2\right)^{1/2}}{3^{1/2}}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3^{3/2}\left(1-\tilde{a}^2\right)}{\left(3-\tilde{a}^2\right)^{2/2}}\right)\right]\right\}$$

где $a \equiv a/M$. Обратите внимание, что в предельном случае E^2 стремится к бесконечности, следовательно, предельным случаем является орбита фотона. Минимальный радиус может иметь значения в интервале $r = 3M$ для $a = 0$ до $r = \left(1+2^{1/2}\right)M$ для $a = M$.

Рещекие 17.12. Пусть ξ - времениподобный вектор Киллинга, существующий в силу статичности черной дыры. Уравнение Киллинга гласит:

$$\xi_{\alpha;\beta} = -\xi_{\beta;\alpha}$$

а требование статичности метрики (см. задачу 10.8) имеет вид

$$\xi\left[\alpha;\beta\xi_{\gamma]} = 0\right.\text{ .}$$

4-скорость неподвижного наблюдателя параллельна &, т. е.

$$\mathbf{u} = \xi/v^{\mathbf{t}/2},$$
$$v = -\xi^{\alpha\xi_\alpha\cdot}$$

Для фотона с импульсом $\mathbf{p}$ поверхность бесконечного красного смещения определяется условием

$$0 = (\mathbf{p}\cdot\mathbf{u})_\infty/(\mathbf{p}\cdot\mathbf{u})_{\text{нзлучатель}} = v^{2/2}_{\text{излучатель}}$$

где мы использовали тот факт, что р. & постоянно вдоль геодезической траектории фотона и v нормировано на бесконечности на единицу. Таким образом, эргоповерхность-это поверхность, на которой вектор Киллинга ξ является изотропным. Докажем, теперь, что эргоповерхность $v = 0$ есть изотропная

гиперповерхность, т. е. нормаль к ней является изотропным вектором. С помощью уравнения (1) перепишем уравнение (2) в виде

$$\xi_{\alpha;\beta}\xi_{\gamma} + \xi_{\gamma;\alpha}\xi_{\beta} - \xi_{\gamma;\beta}\xi_{\alpha} = 0,$$

а затем умножим скалярно уравнение (5) на ξ:

$$v\xi_{\alpha;\beta} + v_{,[\alpha}\xi_{\beta]} = 0$$

Из уравнения (6) видно, что $v_{,\alpha}$ параллельно ξ_{α} всюду, где $v = 0$. Но v, α есть нормаль к гиперповерхности $v = 0$, т. е. нормальный вектор является изотропным, что и требовалось доказать.

Это доказательство должно быть изменено в вырожденном случае $v_{,\alpha} = 0$, поскольку возможно, что $v = 0$ в конечной области, а не только на гиперповерхности. Подробное исследование показывает, однако, что это не так [см. Carter B., Journ. Math. Phys, 10, 70(1969)] Доказанная здесь теорема относится к шварцшильдовской черной дыре, где поверхность $r = 2M$ является одновременно и горизонтом, и поверхностью бесконечного красного смещения для неподвижных наблюдателей (фактически для всех наблюдателей). Примером такого случая, когда эргоповерхность не совпадает с горизонтом, может служить черная дыра Керра.

Реиение 17.13. На внешнем горизонте ($r = r_+$)метрика с $dt = dr = 0$ приобретает вид

$$ds^2 = \left(r_+^2 + a^2\cos^2\vartheta\right)d\vartheta^2 + \frac{\left(r^2+a^2\right)^2\sin^2\vartheta d\phi^2}{\left(r_+^2 + a^2\cos^2\vartheta\right)}$$

Следовательно, площадь поверхности горизонта есть

$$a = \iint g^{1/2}d\vartheta d\varphi = \iint \left(r_+^2 + a^2\right)\sin\vartheta d\vartheta d\varphi = 4\pi\left(r_+^2 + a^2\right)$$

Поскольку r_+−больший корень уравнения $\Delta = 0$, мы имеем

$$r_+ = M + \left(M^2 + Q^2 - a^2\right)^{2/2}$$

откуда и следует искомый результат.

Solution

17.14. Две исходные черные дыры имеют одну и ту же площадь поверхности, так что первоначальная суммарная площадь поверхности (см. результат задачи 17.13, но с $Q = 0$) есть

$$A_{\text{начальн}} = 16\pi M_1\left[M_1 + \left(M_1^2 - a^2\right)^{1/2}\right].$$

Конечная черная дыра является шварцшильдовской, откуда

$$A_{\text{конечн}} = 4\pi\left(2M_2\right)^2 = 16\pi M_2^2.$$

Неравенство $A_{\text{конечн}} \geqslant A_{\text{нячальн}}$ приобретает вид

$$M_2^2 \geqslant M_1^2 + M_1\left(M_1^2 - a^2\right)^{1/2}.$$

Если $a = M_1$, то $M_2 \geqslant M_1$. Полная начальная масса была равна $2M_1$, так что конечная масса должна равняться по меньшей мере половине этого значения. Итак, согласно теореме Хокинга, до 50% первоначальной массы может быть превращено в уходящее иялучение!

Этот процесс является наиболее эффективным среди всех соударений незаряженных черных дыр. Действительно, предположким, что две черные дыры с массами M_1 и M_2 и параметрами момента количества движения a_1 и a_2 сливаются и образуют новую черную дыру с массой $M_{\mathbf{3}}$ и параметром момента количества-движения a_3. Тогда из неравенства $A_{\text{конечн}} \geqslant A_{\text{начадьн}}$ следует

$$M_1\left[M_1 + \left(M_1^8 - a_1^2\right)^{1/2}\right] + M_2\left[M_2 + \left(M_2^2 - a_2^2\right)^{1/2}\right] \leqslant$$
$$\leqslant M_3\left[M_3 + \left(M_3^2 - a_3^2\right)^{1/2}\right].$$

Наибольший выход энергии получается при равенстве двух частей; более того, для данных значений M_1, M_2, a_1 и a_2 наименьшая масса M_8 (и, следовательно, наибольшее вначение излученной энергии) соответствует случаю $a_3 = 0$. Аналогично для данного значения M_3 при $a_3 = 0$ наибольшее значение суммы $M_1 + M_2$ (опять-таки соответствующее наибольшей излученной энергии) достигается при $|a_1| = |a_2| = M_1 = M_2$. Поскольку $a_3 = 0$, из сохра. нения момента количества движения следует, что $a_1 = -a_2$, и мы приходим к ситуации, которая была подробно разобрана выше. Окончательный вывод: в процессе соударения и слияния двух керровских черных дыр может быть излучено не более 50% первоначальной массы.

Solution

17.15.
Площадь поверхности A и «приведенная площадь поверхности» Å керровской черной дыры определяются следующим образом:

$$a = 8\pi\tilde{A} = 8\pi\left[M^2 + \left(M^4 - J^2\right)^{1/3}\right]$$

или, что то же самое,

$$\tilde{A}^2 - 2\tilde{A}M^2 + J^2 = 0$$

Беря первую вариацию от этого выражения, получаем

$$\left(\tilde{A} - M^2\right)\delta\tilde{A} = 2\tilde{A}M\delta M - J\delta J.$$

Левая часть равенства неотрицательна в силу второго закона динамики черных дыр (теорема Хокинга из задачи 17.14). Пусть некоторый частный тип волны обладает зависимостью от t и φ вида $\exp(-i\omega t + im\varphi)$. Как скалярные, так и электромагнитные и гравитационные волны удовлетворяют соотношению
откуда следует

$$\delta M = \frac{\omega}{m}\delta J$$

$$\left(2AM - J\frac{m}{\omega}\right)\delta M \geqslant 0.$$

Для случая усиления волны закон сохранения энергии требует, чтобы масса дыры уменьшалась, т. е. $\delta M < 0$; следовательно, второй член в скобках в неравенстве (5) должен быть отрицательным. то условие можно переписать в виде

$$\frac{2Mr_+}{a} - \frac{m}{\omega} < 0$$

где r_+- координатный радиус горизонта событий. Если учесть, что m и ω могут иметь любой знак, условие переписывается окончательно в виде

$$0 \lessgtr \omega \lessgtr \frac{ma}{2Mr_+}$$

где ? - означает «расположено между».
Обратите внимание, что $a/2Mr_+$есть как раз Ω - - «угловая скорость черной дыры» (см. задачу 17.10).

Pewerue 17.16.

а) Используя результат задачи 7.7
и соотношение

$$\Box\Phi = (-g)^{1/2}\left[(-g)^{1/2}g^{\alpha\beta}\Phi,\alpha\right],\beta$$

запишем

$$(-g)^{1/2} = \left(r^2 + a^2\cos^2\vartheta\right)\sin\vartheta$$

$$0 = \left[-\frac{\left(r^2+a^2\right)^2}{\Delta} + a^2\sin^2\theta\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \frac{Mar}{\Delta} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial t\partial\varphi} + \left(\frac{1}{\sin^2\vartheta} - \frac{a^2}{\Delta}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \\ + \frac{\partial}{\partial r}\left(\Delta\frac{\partial}{\partial r}\Phi\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right).$$

Пусть в уравнении (1) зависимость от t и φ имеет вид

$$\Phi(t,r,\vartheta,\varphi) = e^{-l\omega t}e^{im\varphi}R(r)S(\vartheta)$$

Поделив обе части уравнения (1) на Φ, получим

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(\Delta\frac{dR}{dr}\right) + \omega^2\frac{\left(r^2+a^2\right)^2}{\Delta} - \frac{4Mar\omega m}{\Delta} + \frac{a^2m^2}{\Delta} = \\ = \frac{-1}{S\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dS}{d\vartheta}\right) + a^2\omega^2\sin^2\vartheta + \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}$$

Поскольку левая часть (2) есть функция только от r, а правая часть - только от ϑ, каждая из них должна быть равна некоторой постоянной A. Следовательно,

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dS}{d\vartheta}\right)-\left(a^2\omega^2\sin^2\vartheta+\frac{m^2}{\sin^2\vartheta}-A\right)S=0$$

Н

$$\frac{d}{dr}\left(\Delta\frac{dR}{dr}\right)+\left[\frac{\omega^2\left(r^2+a^2\right)^2-4Mar\omega m+a^2m^2}{\Delta}-A\right]R=0$$

Так как функция S должна быть регулярной при $\vartheta=0$ и $\vartheta=\pi$, уравнение (3) представляет собой уравнение для собственных значений A. Фактически функция S есть функция типа сферической гармоники; в простейшем случае, когда $a\omega=0$, мы имеем $S=P_{\ell m}(\cos\vartheta)$ и $a=\ell(\ell+1)$.

в) Удобно (но не обязательно) ввести «черепашью» координату r^*, удовлетворяющую соотношению

$$dr^*/dr=\left(r^2+a^2\right)/\Delta$$

Причина этого названия ясна из того факта, что интервал (r_+,∞) в координатах r растягивается до $(-\infty,\infty)$ в коорди- натах r^*. Тогда уравнение (4) приобретает вид

$$\frac{d^2R}{dr^{*2}}+\frac{2r\Delta}{\left(r^2+a^2\right)^2}\frac{dR}{dr^*}+\left[\omega^2+\frac{a^2m^2-4Marm\omega-\Delta A}{\left(r^2+a^2\right)^2}\right]R=0.$$

При $r\to\infty$ получаем приближенное уравнение
решение которого

$$\frac{d^2R}{dr^{*2}}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr^*}\omega^2R\approx0$$

$$R\sim r^{-1}e^{\pm i\omega r^*}$$

соответствует входящим и выходящим волнам.

г) При $\Delta\to0$ из уравнения (5) получаем

$$\frac{d^2R}{dr^{*2}}+\left[\omega^2-\frac{2am\omega}{2Mr_+}+\frac{a^2m^2}{\left(2Mr_+\right)^2}\right]R=0$$

и, следовательно,
где

$$R\sim e^{\pm i(\omega-m\omega_+)r*}$$

$$\omega_+=a/2Mr_+$$

д) Поскольку все физические наблюдатели на горизонте связаны друг с другом преобразованиями Лоренца, все они придут к единодушному заключению, представляет ли некоторое частное решение входящие или выходящие волны. Поэтому мы можем вести все вычисления для любого удобного для нас наблюдателя. Выберем некоторого наблюдателя с постоянным r, расположенного в самой непосредственной близости к горизонту, но вне его. Поскольку такой наблюдатель находится внутри эргосферы, он будет увлекаться в движёние вокруг центра в положительном направлении по углу φ с угловой скоростью

$$\Omega=d\varphi/dt>0,$$

где $\Omega=\omega_+$(см. задачу 17.10). Для такого наблюдателя локальная зависимость от t и r решенння имеет вид

$$\Phi=e^{-i\omega t}e^{im\varphi}e^{\pm i(\omega-m\omega_+)r^*}S(\vartheta)$$

$$\Phi=e^{-i(\omega-m\omega_+)t}e^{\pm i(\omega-m\omega_+)r^*}e^{im\tilde{\varphi}S}(\vartheta)$$

где мы положили $\tilde{\varphi}=\varphi-\omega_+t$. Следовательно, $e^{-i(\omega-m\omega_+)r^*}$ соответствует входящим волнам.

е) Тензор энергии-импульса скалярного поля имеет вид

$$4\pi T_{\alpha\beta}=\Phi,_{(\alpha}\Phi^*_{,\beta)}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\left|\Phi,\Phi^{\Phi},\gamma\right|.$$

(Операция комплексного сопряжения необходима, поскольку Φ представлено в комплексном виде.) Вектор потока энергии есть

$$J_\beta=-T_{\alpha\beta}\xi^\alpha,$$

где &-временной вектор Киллинга $\partial/\partial t$ (см. задачу 10.11). Поток энергии, проникающей в горизонт, находится путем интегрирования радиальной компоненты J по 2-поверхности $r = r_+$:

Поскольку

$$\frac{dE}{dt} = \int T_t^r |g|^{1/s} d\vartheta d\varphi$$

$$4\pi T_t = \mathrm{Re}\left(\Phi_{,t}\Phi^{*,r}\right) = \mathrm{Re}\left(\Phi, t\Phi^*, r^* \frac{r^2+a^2}{\Sigma}\right) =$$

$$= \omega\left(\omega - m\omega_+\right) S^2(\vartheta) \frac{2Mr_+}{\Sigma},$$

имеем

$$\frac{dE}{dt} = \omega\left(\omega - m\omega_+\right) \frac{2Mr_+}{4\pi} \int S^2(\vartheta) \sin\vartheta d\vartheta d\varphi;$$

величина dE/dt отрицательна, т. е. энергия выходит из-под горизонта наружу в том случае, если $\omega - m\omega_+ < 0$, иначе говоря, если $0 < \omega/m < \omega_+$, что находится в полном согласии с результатом задачи 17.15.

Рещение 17.17. Предположим, что в дыру введены заряд δQ и энергия δE. Тогда и меем

$$\delta\left(Q^2 - M^2\right) = 2Q\delta Q - 2M\delta E.$$

Однако не все значения δQ и δE являются допустимыми. Радиальный «эффективный потенциал» для падающей заряженной частицы в метрике Рейсснера - Нордстрема (см. [1], уравнение 33.32) определяется уравнением

$$r^2 \frac{dr}{d\tau} = -\left\{\left(r^2\delta E - Q\delta Q r\right)^2 - \Delta\left(\mu_0^2 r^2 + L_2^2 + \mathscr{L}\right)\right\}^{1/2},$$

где E, L_z и $\mathscr{L}$-сохраняющиеся величины, а μ_0 - масса покоя частицы. Для частицы, пересекающей при падении в черную дыру горизонт событий, $dr/d\tau \leqslant 0$ на горизонте при $r = r_+$. Так как $\Delta = 0$ при $r = r_+$, уравнение (2) принимает вид

$$r^2 \frac{dr}{d\tau} = -\left(r_+^2\delta E - Q\delta Q r_+\right) \leqslant 0$$

и, следовательно, $\delta E > Q\delta Q/r_+$. Учитывая уравнение (1), имеем

$$\delta\left(Q^2 - M^2\right) \leqslant 2\delta E\left(r_+ - M\right) = 2\delta E\left(M^2 - Q^2\right)^{1/2}.$$

При $Q^2 \to M^2$ правая часть стремится к нулю как квадратный корень из $\left(M^2 - Q^2\right)$, так что никакими последующими добавлениями δE нельзя сделать интеграл от левой части положительным.

13.5.9 Problems about Black Holes 3

Solution 17.18.

а) $\tilde{\omega}^{\hat{t}} \cdot \tilde{\omega}^{\hat{t}} = \left|g_{tt} - \omega^2 g_{\varphi\varphi}\right|^{1/2} \widetilde{\mathrm{d}t} \cdot \left|g_{tt} - \omega^2 g_{\varphi\varphi}\right|^{1/2} \widetilde{\mathrm{d}t} = -\left(g_{tt} - \omega^2 g_{\varphi\varphi}\right) g_{tt}.$

(Мы выбрали знак минус, потому что $g_{tt} - \omega^2 g_{\varphi\varphi} < 0$.) В метрике Керра единственным недиагональным членом является $g_{t\varphi}$. Построив матрицу, обратную $g_{\alpha\beta}$, найдем

Т. е.

$$g^{tt} = g_{tt} - \omega^2 g_{\varphi\varphi}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{t}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{t}} = -1$$

Аналогично можно вычислить другие скалярные произведения и показать, что

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\alpha}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\beta}} = \eta^{\alpha\beta}$$

б) Дуальный базис $\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}$ определяется с помощью соотношения

Если

$$\left\langle \tilde{\omega}^{\hat{\alpha}}, \mathbf{e}_{\hat{\beta}} \right\rangle = \delta_{\hat{\beta}}^{\alpha}$$

$$\tilde{\omega}^{\hat{\alpha}} = A^{\hat{\alpha}_\beta} \tilde{\omega}^{\hat{\beta}} \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_{\hat{\beta}} = B_{\hat{\beta}}^{\gamma} \mathbf{e}_{\gamma}$$

то матрица $B_{\hat{\beta}}{}^{\gamma}$ должна быть транспонированной обратной матрицей для $A^{\hat{\alpha}}{}_{\beta}$. Чтобы найти B из $\mathbf{A}$, мы можем отделить недиагональную $(t\varphi)$-часть от диагональной $(r\vartheta)$-части; тогда из

$$\begin{bmatrix} \tilde{\omega}^{\hat{t}} \\ \tilde{\omega}^{\hat{\varphi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left|g_{tt} - \omega^2 g_{\varphi\varphi}\right|^{1/2} & 0 \\ -\omega \left(g_{\varphi\varphi}\right)^{1/2} & \left(g_{\varphi\varphi}\right)^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{dt} \\ \widetilde{d\varphi} \end{bmatrix}$$

следует

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_{\hat{t}} \\ \mathbf{e}_{\hat{\varphi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left|g_{tt} - \omega^2 g_{\varphi\varphi}\right|^{-2/2} & \omega \left|g_{tt} - \omega^2 g_{\varphi\varphi}\right|^{-1/2} \\ 0 & \left(g_{\varphi\varphi}\right)^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_t \\ \mathbf{e}_{\varphi} \end{bmatrix}.$$

Поскольку (rv)-часть диагональная, обратная матрица для нее находится элементарно:

$$\mathbf{e}_{\hat{r}} = (\Delta/\Sigma)^{1/2}\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_{\hat{\theta}} = \Sigma^{-1/2}\mathbf{e}_{\hat{\vartheta}}.$$

в) Поле 4-скоростей свободно от вращения, если $\omega_{\alpha\beta} = 0$ (см. задачу 5.18) или, что то же самое, если ч ортогонально гиперповерхности

$$u_{[\alpha;\beta}u_{\gamma]} = 0$$

(см. задачу 7.23). Быстрее всего можно проверить выполнение этого условия, если воспользоваться базнсными 1 -формами и эквн- валентностью $u_{[\hat{\alpha};\hat{\beta}]}$ и $\mathrm{d}\hat{\omega}^{\hat{t}}$. Тогда условне

$$u_{[\hat{\alpha},\hat{\beta}}u_{\hat{v}]} = 0$$

будет равносильно условню
Но

$$d\tilde{\boldsymbol{\omega}}\hat{\boldsymbol{t}} \bigwedge \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{t}} = 0$$

$$\tilde{\omega}^{\hat{t}} = \alpha \mathrm{d}t$$

где

$$\alpha = \left|g_{tt} - \omega^2 g_{\varphi\varphi}\right|^{1/3} = \alpha(r, \vartheta)$$

так что

$$\mathrm{d}\tilde{\omega}^{\hat{t}} = \alpha, r\widetilde{\mathrm{d}r} \bigwedge \widetilde{\mathrm{d}t} + \alpha, \theta\widetilde{\mathrm{d}} \bigwedge \widetilde{\mathrm{d}t}$$

И

$$\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{\omega}}\hat{\boldsymbol{t}} \bigwedge \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{t}} = 0$$

ввиду того, что $\widetilde{\mathbf{d}}t \bigwedge \widetilde{\mathbf{d}}t = 0$ (здесь $\bigwedge$ означает полностью антисимметризованное прямое произведение).

г) 4-скорость наблюдателя с нулевым моментом количества движения определяется выражением

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_{\hat{i}} = \left|g_{tt} - \omega^2 g_{\varphi\varphi}\right|^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{e}_t + \omega\mathbf{e}_{\varphi})$$

Векторы $\mathbf{e}_t$ и $\mathbf{e}_{\varphi}$ суть векторы Киллинга. Векторное поле $\mathbf{e}_t + \omega\mathbf{e}_{\varphi}$ не является векторным полем Киллинга, так как угловая скорость ω не является постоянной. Тем не менее любой конкретный наблюдатель с нулевым моментом количества движения движется вдоль вектора Киллинга $\xi = \mathbf{e}_t + \omega_0\mathbf{e}_{\varphi}$ (ω_0– фиксированная постоянна, которую мы выбираем равной ω для радиального расстояния конкретного рассматриваемого нами наблюдателя с нулевым количеством движения). Следовательно, можно воспользоваться результатами задачи 10.14 и получить

$$a = \frac{1}{2}\nabla \ln|\xi \cdot \xi| = \frac{1}{2}\nabla \ln\left|g_{tt} + 2\omega_0 g_{t\varphi} + \omega_0^2 g_{\phi\varphi}\right|$$

Подставляя $g_{t\varphi} = -\omega g_{\varphi\varphi}$, для $\omega = \omega_0$ окончательно получаем

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}\nabla \ln\left|g_{tt} - \omega^2 g_{\varphi\varphi}\right|$$

рещение 17.19.

Если в метрике Керра в координатах БуайеЛиндквиста положить $t = \text{const}$ и $r = r_+$, мы получим метрику горизонта

$$ds^2 = \left(r^2 + a^2\cos^2\vartheta\right)d\vartheta^2 + \left(2Mr_+\right)^2\sin^2\vartheta\left(r_+^2 + a^2\cos^2\vartheta\right)^{-1}d\varphi^2.$$

(При записи метрического коэффициента $g_{\varphi\varphi}$ мы использовали соотношение $r_+^2 + a^2 = 2Mr_+$.) Гауссова кривизна K 2-поверхно- сти-это то же самое, что Риманова кривизна из задачи 9.23, где мы вычисляли тензор Римана для 2-мерной метрики. Для наших целей удобно воспользоваться некоторым ортонормированным базисом. Для метрики вида

положиМ

$$ds^2 = e^{2\alpha_1}\left(dx^1\right)^2 + e^{2\alpha_2}\left(dx^2\right)^2$$

и получим

$$\tilde{\omega}^{\hat{1}} = e^{\alpha_1}\widetilde{\mathrm{d}x^1}, \quad \tilde{\omega}^{\hat{2}} = e^{\alpha_1}\widetilde{\mathrm{d}}^2$$

$$K = R_{\hat{1}\hat{i}\hat{1}\hat{a}} = R_{1212}e^{-2(\alpha_1+\alpha_2)}.$$

Быстрее всего найти тензор Римана с помощью 1-форм, как в задачах 8.27 и 9.20. Поскольку

$$\mathrm{d}\tilde{\omega}^{\hat{1}} = e^{\alpha_1}\widetilde{\mathrm{d}}_1\bigwedge\widetilde{\mathrm{d}}^1 = e^{\alpha_1\alpha_{1,2}}\widetilde{\mathrm{d}}^{\mathbf{2}}\bigwedge\widetilde{\mathrm{d}}^{\mathbf{1}} = \alpha_{1,2}e^{-\alpha_2}\widetilde{\omega}^{\hat{2}}\bigwedge\widetilde{\omega}^{\hat{1}}$$

а выражение для $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{2}}$ отличается от приведенного только заменой индексов 1 на 2 и наоборот, находим

$$\tilde{\omega}^{\hat{1}}_{\hat{\mathbf{a}}} = e^{-\alpha_2\alpha_{1,2}}\tilde{\omega}^{\hat{1}} - e^{-\alpha_1\alpha_{2,1}}\tilde{\omega}^{\hat{\mathbf{a}}}$$

(Напомним, что $\mathbf{d}\tilde{\omega}^{\hat{\alpha}} = -\tilde{\omega}^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}}\wedge\tilde{\omega}^{\hat{\beta}}$ и $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\hat{\beta}\hat{\alpha}}$) Единственная нетривиальная форма кривизны есть так как

$$\mathscr{R}^{\hat{\mathbf{1}}}_{\hat{\mathbf{2}}} = \mathbf{d}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\mathbf{1}}}_{\hat{\mathbf{2}}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\mathbf{1}}}_{\hat{\alpha}}\wedge\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\alpha}}_{\hat{\mathbf{2}}} =$$

$$= d\left(\alpha_{1,2}e^{\alpha_1-\alpha_2}\widetilde{dx}^1 - \alpha_{2,1}e^{\alpha_2-\alpha_1}\widetilde{d}^2\right) + 0 =$$

$$= \left(\alpha_{1,2}e^{\alpha_1-\alpha_1}\right)_{,2}\widetilde{d\tilde{x}}^2\wedge\widetilde{d}^1 - \left(\alpha_{2,1}e^{\alpha_2-\alpha_1}\right)_{11}\widetilde{dx}^1\wedge\widetilde{d}^2 =$$

$$= -e^{-(\alpha_1+\alpha_2)}\left[\left(e^{\alpha_2},1e^{-\alpha_1}\right)_{,1} + \left(e^{\alpha_2},2e^{-\alpha_2}\right)_2\right]\tilde{\omega}^{\hat{1}}\wedge\tilde{\omega}^{\hat{2}}.$$

имеем

$$\mathscr{R}_{\hat{\mathbf{1}}\hat{\mathbf{2}}} = R_{\hat{\mathbf{1}}\hat{1}\hat{1}\hat{\mathbf{2}}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\mathbf{1}}}\bigwedge\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\mathbf{2}}}$$

$$K = R_{\hat{1}\hat{i}\hat{1}\hat{a}} = -e^{-(\alpha_1+\alpha_i)}\left[\left(e^{\alpha_2},e^{-\alpha_1}\right)_{,1} + \left(e^{\alpha_1},e^{-\alpha_2}\right)_{,2}\right].$$

Из уравнения (6) с использованием явного вида метрики (1), где $x^{\mathbf{1}} = \theta, x^2 = \varphi$, находим

$$K = 2Mr + \frac{r_+^2 - 3a^2\cos^2\theta}{\left(r_+^2 + a^2\cos^2\vartheta\right)^3}$$

Обратите внимание, что если $r_+^2 - 3a^2 < 0$, то кривизна K отрицательна в некотором промежутке значений ϑ вблизи полюсов ($\vartheta = 0, \pi$). Но если кривизна K отрицательна, то поверхность не может быть глобально погружена в евклидово 3-пространство. Так как

условие

$$r_+ = M + \left(M^2 - a^2\right)^{1/2}$$

$$r_+^2 - 3a^2 < 0$$

эквнвалентно условню

$$a > 3^{1/3}M/2.$$

Теорема Гаусса - Бонне гласит:

$$\int Kd^2S = 2\pi x$$

где χ-эйлерова характеристика поверхности ($\chi = 2$ для сферы, $\chi = 0$ для тора и т. п.). Поскольку имеем

$$d^2S = (g)^{\frac{1}{2}}d\vartheta d\varphi = 2Mr_+\sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$\chi = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (2Mr_+)^2 \frac{r_+^* - 3a^2\cos^2\vartheta}{\left(r_+^2 + a^2\cos^2\vartheta\right)^3} \sin\vartheta d\vartheta =$$

$$= (2Mr_+)^2 2 \int_0^1 \frac{r_+^2 - 3a^2x^2}{\left(r_+^2 + a^2x^2\right)^3} dx = (2Mr_+)^2 2 \left[\frac{x}{\left(r_+^2 + a^2x^2\right)^2}\right]_0^1 = 2,$$

т. е. поверхность горизонта топологически эквивалентна 2-сфере.

[Более подробное рассмотрение см. в статье Смарра: Smarr L., Phys. Rev. D7, 289 (1973)].

Рещение 17.20.

Явление усиления падающего на черную дыру излучения, описанное в задачах 17.15 и 17.16, на квантовомеханическом языке соответствует вынужденному излучению (или отрицательному поглощению). Если нам известна интенсивность вынужденного излучения, то интенсивность спонтанного излучения можно найти следующим образом.

Пусть p - вероятность спонтанного испускания одного кванта на единицу объема фазового пространства. Если число падающих квантов равно N, то вероятность получения $N+1$ испущенных квантов в процессе вынужденного излучения равна $(N+1)p$, так как интересующие нас кванты (гравитоны, фотоны) являются бозонами. Чтобы упростить рассуждения, предположим, что $p \ll 1$, тогда мы не должны рассматривать случай излучения более одного дополнительного кванта. Размерность результата не изменилась бы, если бы мы даже отбросили это упрощающее предположение. Математическое ожидание для числа испущенных дополнительных квантов равно

$$\langle \Delta N \rangle = \text{ (число дополнительных квантов)}\times$$
$$\times\text{(вероятность испускания этого числа)} = 1 \times (N+1)p.$$

Параметр усиления есть

$$a = \frac{\langle \Delta N \rangle}{N} = \left(1 + \frac{1}{N}\right) p$$

В классическом пределе ($N \to \infty$) имеем $A \approx p$. Сформулированное Ферми «золотое правило квантовой механики» гласит, что интенсивность спонтанного излучения определяется формулой

$$\frac{dN}{dt} \sim \int_{\substack{\text{Ф пазовое} \\ \text{пространство}}} p.$$

Заменим в уравнении (2) p на A и вспомним, что на «классическом» языке этот эффект описывается в терминах «мод» с «квантовыми числами» ℓ и m, а также частоты ω. Следовательно,

$$\frac{dN}{dt} \sim \sum_{\ell,m} \int A d\omega$$

Как и во всех задачах о «просачивании» через потенциальный барьер, A резко спадает до нуля для больших значений ℓ и m. Точно так же обстоит дело и в задачах 17.15 и 17.16 : A не равно нулю для $\omega \sim 1/M$ в области $\Delta\omega \sim 1/M$, где M - масса черной дыры. Поскольку для малых знячений ℓ и m параметр усиления A порядка единицы, заменим в уравнении (3) A на 1 и снимем знак суммирования. Тогда

$$\frac{dN}{dt} \sim \Delta\omega \sim \frac{1}{M}$$

Черная дыра будет терять энергию (процесс «квантового испарения» черных дыр!) со скоростью

$$\frac{dE}{dt} \sim \hbar\omega \frac{dN}{dt} \sim \frac{\hbar}{M^2}$$

Отсюда получаем, что скорость потери момента количества движения есть

$$\frac{dJ}{dt} \sim \frac{m}{\omega}\frac{dE}{dt} \sim \frac{\hbar}{M}$$

Следовательно, постояння времени для потери момента количества движения равна

$$\mathrm{t} \sim J/(dJ/dt) \sim M^2(\hbar/M) \sim M^3/\hbar \sim \left(M/10^{15}\Gamma\right)^3 10^{10} \text{ лет.}$$

Тода для $M \lesssim 10^{15}\Gamma$ момент количества движения J уже должен был бы практически обратиться в нуль за счет процесса «квантового испарения». Для $M \approx 10^{33}$ г доля потерянного за 10^{10} лет момента количества движения составляет $\approx 10^{-54}$.

Рещение 17.21. Для всех статических метрик пространстваремени «поверхность бесконечного красного смещения» ($g_{00} = 0$) совпадает с горизонтом (см. задачу 17.12). Следовательно, если рассматриваемая метрика описывает черную дыру, то местополо- жение поверхности этой дыры должно даваться соотношением $g_{00} = 0$ или, в данном случае, $\bar{\rho} = 1/2$, где $\bar{\rho} \equiv \rho/m$. Теперь мы покажем, что на самом деле поверхность $\bar{\rho} = 1/2$ не содержится в том многообразии, которое является асимптотически плоским при $\bar{\rho} \to \infty$ и, следовательно, не может быть достигнута ни одним из объектов нашей Вселенной.

Из вида метрического коэффициента $g_{\rho\rho}$ следует, что $\bar{\rho} = 1, \overline{5}$ соответствует поверхности, находящейся на бесконечном собственном радиальном расстоянии от любой точки с $\bar{\rho} > 1,5$. Чтобы показать, что поверхность $\bar{\rho} = 1,5$ не является достижимой за любой конечный промежуток собственного времени и, таким образом, не принадлежит к асимптотически плоскому многообразию, достаточно рассмотреть радиальные изотропные геодезические. (Читатель может проверить, что в случае нерадиальных или времениподобных геодезических дело обстоит даже еще хуже.) Имеем

или

$$g_{\rho\rho}\left(p^{\rho}\right)^2 + g^{00}\left(p_0\right)^2 = 0$$

$$\frac{d\rho}{d\lambda} = \left(\bar{\rho} - \frac{3}{2}\right)\frac{\left(\bar{\rho} + \frac{1}{2}\right)}{\left(\bar{\rho} - \frac{1}{2}\right)^2} p_0,$$

где λ-аффинный параметр. Если вспомнить, что p_0-интеграл движения, поскольку метрика стационарна, то из приведенного выше уравнения следует

$$p_0^{-1} \int_{\frac{\rho}{\rho}}^{\bar{\rho}=\%/\rho} \frac{\left(\bar{\rho} - \frac{1}{2}\right)^2 d\rho}{\left(\bar{\rho} - \frac{3}{2}\right)\left(\bar{\rho} + \frac{1}{2}\right)} = \int_{\lambda}^{\lambda_0} d\lambda.$$

Так как интеграл в левой части расходится при $\bar{\rho} = 3/2$, поверхность $\bar{\rho} = 8/2$ удалена на бесконечное аффинное расстояние. При $\bar{\rho} \geqslant 3/2$ отсутствуют какие-либо сингулярности, и $\bar{\rho}$ является монотонно убывающей координатой для радиально падающих фотонов и частиц. Поэтому поверхность $\bar{\rho} = 1/2$, так же как и поверхность $\bar{\rho} = 3^3/2$, должна находиться вне физического многообразия.

Приведенный выше вывод свидетельствует также о том, что поверхность звезды, коллапсирующей таким образом, чтобы индуцировать рассматриваемую вакуумную метрику, никогда не может достигнуть $\bar{\rho} = 3/2$. Следовательно, для реалистических физических систем данная метрика реализуема только при $\bar{\rho} > 3/2$.

13.5.10 Problems about Black Holes 4

Leuven-2023. Анализ модели заряженной черной дыры (!!?)

One solution to Einstein-Maxwell theory that we are keenly interested in is the electric Reissner-Nordström black hole, given by

$$ds^2 = -\Delta(r)dt^2 + \Delta(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$
$$A_t = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}r}, \quad A_r = A_\theta = A_\phi = 0,$$

where we have defined the function $\Delta(r)$ by

$$\Delta(r) = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2},$$

1. Prove that the field strength tensor $F_{\mu\nu}$ has only two non-zero components:

$$F_{tr} = -F_{rt} = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}r^2},$$

while all other components of $F_{\mu\nu}$ vanish. Equivalently, we can write this in form language as

$$F = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}r^2} dt \wedge dr$$

where $F \equiv \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$ is the two-form version of the field strength tensor.

2. Prove that this solution satisfies the equation of motion $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0$ for the photon field A_μ. (Note: you will have to compute some Christoffel symbols for this problem, though certainly not the full set.)

4. Write down explicitly what the Klein-Gordon equation $\left(\Box - m^2\right)\psi(x) = 0$ looks like on the Reissner-Nordström background, where $\Box \equiv \nabla_\mu \nabla^\mu$ and $\psi(x)$ is some scalar field. You may need to recall from a previous problem set that the Laplacian $\Box$ has an explicit formula of the form

$$\Box\psi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\psi\right).$$

5. Once you have written down the Klein-Gordon equation, prove that it is separable. That is, prove that you can make a careful separation of variables ansatz for ψ that results in a differential equation that only depends on the coordinate r and some constants. In doing this, it may be helpful to recall that the spherical harmonics $Y_{\ell m}(\Omega)$ are eigenfunctions of the Laplacian on $\hat{L}^2$ on S^2, such that

$$\hat{L}^2 Y_{\ell m} = \ell(\ell+1)Y_{\ell m}, \quad \hat{L}^2 \equiv -\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2}{d\phi^2}.$$

6. Bonus: Prove that (0.2) are indeed the equations of motion that follow from the EinsteinMaxwell Lagrangian (0.1).

Solutions

(!!!! еще это нужно раз самому решить, пока такое не легко идет)

$$F_{tr} = \partial_t A_r - \partial_r A_t = -\partial_r A_t = -\partial_r\left(\frac{Q}{\sqrt{4\pi}r}\right) = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}r^2}.$$

Or

$$\begin{aligned} F = dA &= d\left(\frac{Q}{\sqrt{4\pi}r}dt\right) \\ &= \partial_\mu\left(\frac{Q}{\sqrt{4\pi}r}\right)dx^\mu \wedge dt = \partial_r\left(\frac{Q}{\sqrt{4\pi}r}\right)dr\wedge dt = -\frac{Q}{\sqrt{4\pi}r^2}dr\wedge dt = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}r^2}dt\wedge dr. \end{aligned}$$

Thus we arrive at precisely the same result for the field strength.

2. Now that we have F_{tr}, it's easy to compute that

$$F^{tr} = g^{tt}g^{rr}F_{tr} = -F_{tr} = -\frac{Q}{\sqrt{4\pi}r^2}$$

since $g^{tt} = -\Delta^{-1}$ and $g^{rr} = \Delta$, as the metric is diagonal and so inverting it amounts to taking the inverse of each diagonal component. Our goal now is to show that this satisfies $\nabla_\mu F^{\mu\nu}$. To do so, we first write out this equation more explicitly as

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\mu\rho}F^{\rho\nu} + \Gamma^\nu_{\mu\rho}F^{\mu\rho},$$

using the definition of the covariant derivative. Notice that the last term must vanish identically, since $\Gamma^\nu_{\mu\rho}$ is symmetric under $\mu \leftrightarrow \rho$ while $F^{\mu\rho}$ is antisymmetric under the same exchange. Thus, we are left with

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\mu\rho}F^{\rho\nu}.$$

At this point we could simply compute all the relevant Christoffel symbols and verify that the Maxwell equation (0.6) vanishes for $\nu = t, r, \theta, \phi$; this approach will certainly work. However, I want to use a slightly more interesting method of proving this. Recall from problem set 8, question 2, that we proved the following identity:

$$\Gamma^\nu_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\sqrt{-g}.$$

Plugging this identity into the Maxwell equation (0.6), we thus find that

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\partial_\rho\sqrt{-g}\right)F^{\rho\nu}.$$

Relabelling the ρ dummy index to μ and combining terms, we thus find that

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\right).$$

Therefore, in order to prove that $\nabla_\mu F^{\mu\nu}$ vanishes, it suffices to show simply that $\partial_\mu\left(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\right)$ is zero! Note that this is not true for general two-index tensors; antisymmetry was required to simplify the equation greatly, which led us to (0.6).

So, we can now prove that $\partial_\mu\left(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\right)=0$ in order to prove that the Maxwell equations hold. First, we note that $\sqrt{-g}=r^2\sin\theta$, which depends only on r and θ, while $F^{tr}=-F^{rt}$ depends only on r, and all other components of $F^{\mu\nu}$ are zero. Thus, the terms in this equation that involve ∂_t or ∂_ϕ vanish identically, and we are left with

$$\partial_\mu\left(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\right)=\partial_r\left(r^2\sin\theta F^{r\nu}\right)+\partial_\theta\left(r^2\sin\theta F^{\theta\nu}\right).$$

The second term must be zero, since $F^{\theta\mu}=0$ for all values of μ, so this reduces further to

$$\partial_\mu\left(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\right)=\partial_r\left(r^2\sin\theta F^{r\nu}\right).$$

The only possibly non-zero component of this equation is the $\nu=t$ component, since $F^{rt}\neq 0$. If we plug in our result, though, then this becomes

$$\partial_\mu\left(\sqrt{-g}F^{\mu t}\right)=\partial_r\left(r^2\sin\theta\times\frac{Q}{\sqrt{4\pi}r^2}\right)=\partial_r\left(\frac{Q\sin\theta}{\sqrt{4\pi}}\right)=0.$$

4. Since we can easily compute that $\sqrt{-g}=r^2\sin\theta$, we therefore have that

$$\Box\psi=\frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\mu\left(r^2\sin\theta g^{\mu\nu}\partial_\nu\psi\right).$$

Then, since the metric is diagonal, this will boil down to just four individual terms:

$$\begin{aligned}\Box\psi=&\frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_t\left(r^2\sin\theta\left(-\Delta^{-1}\right)\partial_t\psi\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_r\left(r^2\sin\theta(\Delta)\partial_r\psi\right)\\&+\frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\left(r^2\sin\theta\left(\frac{1}{r^2}\right)\partial_\theta\psi\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\phi\left(r^2\sin\theta\left(\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)\partial_\phi\psi\right),\end{aligned}$$

where we used that $g^{tt}=-\Delta^{-1},g^{rr}=\Delta,g^{\theta\theta}=1/r^2$, and $g^{\phi\phi}=1/\left(r^2\sin^2\theta\right)$. We can simplify these four terms immensely by pulling out all terms that are not affected by certain partial derivatives, taking special care to note that Δ depends on r but no other coordinate, after which point we are left with

$$\Box\psi=-\frac{1}{\Delta}\partial_t^2\psi+\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\Delta\partial_r\psi\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\psi\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2\psi.$$

At this point it's not really possible to simplify the Laplacian anymore. Thus, we find that the Klein-Gordon equation $\left(\Box-m^2\right)\psi=0$ is therefore given by

$$0=-\frac{1}{\Delta}\partial_t^2\psi+\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\Delta\partial_r\psi\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\psi\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2\psi-m^2\psi.$$

5. Using the definition of $\hat{L}^2$, the Laplacian on S^2, we can more compactly write the KleinGordon equation above as

$$0=-\frac{1}{\Delta}\partial_t^2\psi+\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\Delta\partial_r\psi\right)-\frac{1}{r^2}\hat{L}^2\psi-m^2\psi.$$

Since $\hat{L}^2$ acts directly on ψ without mixing with any other derivatives, and the t and r derivatives also show up in separate terms from one another, a very natural separation of variables ansatz is

$$\psi=T(t)R(r)Y_{\ell m}(\theta,\phi),$$

where T and R are some functions of t and r, respectively, and $Y_{\ell m}(\theta,\phi)$ are spherical harmonics on S^2. Since they are eigenfunctions of $\hat{L}^2$ with eigenvalue $\ell(\ell+1)$, and $\hat{L}^2$ involves only θ and ϕ, we find that

$$\hat{L}^2\psi=\ell(\ell+1)\psi.$$

where we used that $g^{tt}=-\Delta^{-1},g^{rr}=\Delta,g^{\theta\theta}=1/r^2$, and $g^{\phi\phi}=1/\left(r^2\sin^2\theta\right)$. We can simplify these four terms immensely by pulling out all terms that are not affected by certain partial derivatives, taking special care to note that Δ depends on r but no other coordinate, after which point we are left with

$$\Box\psi=-\frac{1}{\Delta}\partial_t^2\psi+\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\Delta\partial_r\psi\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\psi\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2\psi.$$

At this point it's not really possible to simplify the Laplacian anymore. Thus, we find that the Klein-Gordon equation $\left(\Box - m^2\right)\psi = 0$ is therefore given by

$$0 = -\frac{1}{\Delta}\partial_t^2\psi + \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\Delta\partial_r\psi\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\psi\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2\psi - m^2\psi.$$

5. Using the definition of $\hat{L}^2$, the Laplacian on S^2, we can more compactly write the KleinGordon equation above as

$$0 = -\frac{1}{\Delta}\partial_t^2\psi + \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\Delta\partial_r\psi\right) - \frac{1}{r^2}\hat{L}^2\psi - m^2\psi.$$

Since $\hat{L}^2$ acts directly on ψ without mixing with any other derivatives, and the t and r derivatives also show up in separate terms from one another, a very natural separation of variables ansatz is

$$\psi = T(t)R(r)Y_{\ell m}(\theta,\phi),$$

where T and R are some functions of t and r, respectively, and $Y_{\ell m}(\theta,\phi)$ are spherical harmonics on S^2. Since they are eigenfunctions of $\hat{L}^2$ with eigenvalue $\ell(\ell+1)$, and $\hat{L}^2$ involves only θ and ϕ, we find that

$$\hat{L}^2\psi = \ell(\ell+1)\psi.$$

So, on our ansatz, the Klein-Gordon equation becomes

$$\begin{aligned}0 = &-\frac{1}{\Delta}T''(t)R(r)Y_{\ell m}(\theta,\phi) + \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\Delta R'(r)\right)T(t)Y_{\ell m}(\theta,\phi)\\ &-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}T(t)R(r)Y_{\ell m}(\theta,\phi) - m^2T(t)R(r)Y_{\ell m}(\theta,\phi).\end{aligned}$$

Note that $Y_{\ell m}(\theta,\psi)$ appears in all terms with no derivatives acting on it, and so we can simply cancel it out as a common factor in all terms. That is, we have chosen an ansatz such that all θ,ψ dependence of the Klein-Gordon equation drop out, leaving us with only t and r dependence:

$$0 = -\frac{1}{\Delta}T''(t)R(r) + \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\Delta R'(r)\right)T(t) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}T(t)R(r) - m^2T(t)R(r).$$

We would like to get rid of all t-dependence as well. The obstacle here is the $T''(t)$ term. We need to ansatz a particular form for $T(t)$ that is an eigenfunction of this second derivative, and so we will guess

$$T(t) = e^{iEt},$$

such that $T''(t) = -E^2T(t)$ for some constant E. This simplifies the Klein-Gordon equation to

$$0 = -\frac{E^2}{\Delta}T(t)R(r) + \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\Delta R'(r)\right)T(t) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}T(t)R(r) - m^2T(t)R(r).$$

$T(t)$ now can be cancelled out from all terms, leaving us with simply a differential equation for $R(r)$:

$$0 = \left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\Delta(r)\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{E^2}{\Delta(r)} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - m^2\right]R(r).$$

This depends only on the radial coordinate r and the constants E,ℓ, and m. Thus, we have shown explicitly that there exists an ansatz of the form

$$\psi(t,r,\theta,\phi) = e^{iEt}R(r)Y_{\ell m}(\theta,\phi)$$

that demonstrates the separability of the Klein-Gordon equation on the Reissner-Nordström background. If we can solve the radial differential equation (0.24), then we can construct the most general solution to the full Klein-Gordon equation by taking superpositions of our ansatz for different values of E,ℓ, and m.

6. Bonus: The Maxwell Lagrangian can be written as

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma},$$

where $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ is the field strength. $F_{\mu\nu}$ has no explicit dependence on the metric, and so under a small variation $\delta g_{\mu\nu}$ of the metric, the quantity $\sqrt{-g}\mathcal{L}_M$ transforms as

$$\delta\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right) = -\frac{1}{4}\delta\left(\sqrt{-g}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\right)F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}.$$

We can use that (see Problem Set 7) $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$, and so (using the product rule) we can write the variation above as

$$\delta\left(\sqrt{-g}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\right) = \sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}g_{\lambda\tau}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\delta g^{\lambda\tau} + g^{\nu\sigma}\delta g^{\mu\rho} + g^{\mu\rho}\delta g^{\nu\sigma}\right).$$

Plugging this back into (0.27) and contracting indices appropriately, we find that

$$\begin{aligned}\delta\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right) &= -\frac{1}{4}\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}g_{\lambda\tau}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\delta g^{\lambda\tau} + F_{\mu\nu}F_{\rho}{}^{\nu}\delta g^{\mu\rho} + F_{\mu\nu}F^{\mu}{}_{\sigma}\delta g^{\nu\sigma}\right)\\ &= -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} + 2F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho}\right)\delta g^{\mu\nu},\end{aligned}$$

where in the last line we relabeled dummy indices so that all variations appear as $\delta g^{\mu\nu}$ and used the antisymmetry of the field strength to write $F^{\mu}{}_{\sigma} = -F_{\sigma}{}^{\mu}$. The stress-energy tensor is then given by the functional derivative of $\sqrt{-g}\mathcal{L}_M$ with respect to $\delta g^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu} &= -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right)}{\delta g^{\mu\nu}}\\ &= -\frac{2}{\sqrt{-g}}\times -\frac{1}{4}\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} + 2F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho}\right)\\ &= F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}.\end{aligned}$$

This is the final result for the stress-energy tensor of Einstein-Maxwell theory. Now we move on to the Euler-Lagrange equation for the field A_μ; this can be written as

$$\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial A_\mu} - \nabla_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\left(\nabla_\nu A_\mu\right)}\right) = 0.$$

The first term in the Euler-Lagrange equation is zero, since only derivatives of A_μ appear in the Lagrangian. Then, to compute the second term, we first note that

$$\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial\left(\nabla_\nu A_\mu\right)} = \frac{\partial\left(\nabla_\rho A_\sigma - \nabla_\sigma A_\rho\right)}{\partial\left(\nabla_\nu A_\mu\right)} = \delta^\nu_\rho\delta^\mu_\sigma - \delta^\nu_\sigma\delta^\mu_\rho.$$

Then, the product rule tells us that

$$\frac{\partial\left(F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right)}{\partial\left(\nabla_\nu A_\mu\right)} = 2F^{\rho\sigma}\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial\left(\nabla_\nu A_\mu\right)} = 2F^{\rho\sigma}\left(\delta^\nu_\rho\delta^\mu_\sigma - \delta^\nu_\sigma\delta^\mu_\rho\right) = 2F^{\nu\mu} - 2F^{\mu\nu} = -4F^{\mu\nu},$$

where the last equality comes from the antisymmetry of the field strength. Therefore the Euler-Lagrange equation becomes

$$0 = -\nabla_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\left(\nabla_\nu A_\mu\right)}\right) = \frac{1}{4}\nabla_\nu\left(\frac{\partial\left(F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right)}{\partial\left(\nabla_\nu A_\mu\right)}\right) = -\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \nabla_\nu F^{\nu\mu}.$$

It doesn't matter how we label the dummy and free indices in this expression, and so our final result for the equation of motion for the vector field A_μ in Einstein-Maxwell theory is

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

Leuven-2023. A Black Hole Thermodynamic (!!?)

If a Killing vector field χ^μ is null along some null hypersurface Σ, we say that Σ is a Killing horizon of χ^μ. This Killing vector field is normal to Σ and obeys the geodesic equation

$$\chi^\mu\nabla_\mu\chi^\nu = -\kappa\chi^\nu,$$

along the Killing horizon. To every Killing horizon, we can define the surface gravity κ.

7. Using Killing's equation $\nabla_{(\mu}\chi_{\nu)} = 0$ and the fact that χ^μ is normal to Σ, i.e., $\chi_{[\mu}\nabla_\nu\chi_{\sigma]} = 0$, show that

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}\left(\nabla_\mu\chi_\nu\right)\left(\nabla^\mu\chi^\nu\right)$$

8. Compute the surface gravity for the Schwarzschild black hole. Using the timelike Killing vector ∂_t. Hint: Don't forget that the right hand side must be evaluated at the Killing horizon Σ (at the horizon radius of the black hole).

9. The Hawking temperature of a black hole is defined as

$$T = \frac{\hbar c}{k_B}\frac{\kappa}{2\pi}.$$

What is the temperature of Schwarzschild? How does the temperature scale with the mass? What does this say about small versus large black holes? Compute the temperature for a stellar mass that is five times the mass of our sun and compare it with the temperature of the cosmic microwave background (CMB) which is 2.726 K. Hint: You will find that the temperature is very small compared to the CMB so it would be very hard to measure!

10. One noteworthy characteristic of black holes is the event horizon, a hypersurface separating spacetime points that are connected to infinity by a timelike path from those that are not. The event horizon $r = r_h$ can be defined as the hypersurface when g^{rr} switches sign. What is the event horizon for the Reissner-Nordstrom black hole? Hint: You may find two solutions. **It is typical in theoretical physics to set some constants to be one, but if we want to actually compute things and compare to the real world, we must put those factors back in! For example, to understand how much entropy black holes carry, you would need all the factors in correctly to get an order of magnitude. In the rest of the problems, I have put the constants in for you so if you want to be careful with the factors of $c, \hbar, k_B$, etc then use $\Delta_r = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{c^4}$, otherwise you can set them all to one.**

11. In the limit of $Q \to 0$ (Schwarzschild), what is the event horizon?

12. When charge is added to a black hole, there is more than one event horizon. Actually, we can now define an inner and outer horizon. What is the value of the parameters where the inner and outer horizons coincide? The limit is called extremality.

13. The Hawking temperature may also be defined as

$$T = \frac{\hbar c}{k_B}\frac{\Delta'(r_+)}{4\pi}.$$

Show in the limit of extremality that the Hawking temperature vanishes for the ReissnerNordstrom Black hole. Also show that you find the same value of the temperature from what you got from the surface gravity for the Schwarzschild black hole.

14. Compute the area A of the event horizon for Schwarzschild and find the entropy via the Bekenstein Hawking formula

$$S = \frac{k_B c^3 A}{4G\hbar}.$$

15. Compute the energy of the black hole of the Schwarzschild black hole via the Komar integral

$$E = \frac{c^4}{8\pi G}\int_{\partial\Sigma} d^2x\sqrt{-\gamma_{(2)}}n_\mu\sigma_\nu\nabla^\mu K^\nu.$$

16. Show that $c^2 M = TS$ for the Schwarzschild black hole. This is a hint that black holes are thermodynamic objects and have an analogous "first law of thermodynamics."

Overview of the solutions (???)

(напишу, кстати, в 1ю часть опыт от этой задачи, хорошая вообще задача!)

7.

We start with expanding the relation $0 = \chi_{[\mu}\nabla_\nu\chi_{\sigma]}$:

$$0 = \chi_\mu\nabla_\nu\chi_\sigma - \chi_\mu\nabla_\sigma\chi_\nu + \chi_\sigma\nabla_\mu\chi_\nu - \chi_\sigma\nabla_\nu\chi_\mu - \chi_\nu\nabla_\mu\chi_\sigma + \chi_\nu\nabla_\sigma\chi_\mu,$$

and using the Killing equation, we can combine terms

$$0 = 2\chi_\mu\nabla_\nu\chi_\sigma + 2\chi_\sigma\nabla_\mu\chi_\nu - 2\chi_\nu\nabla_\mu\chi_\sigma.$$

We now multiply by $\nabla^\mu\chi^\nu$

$$0 = 2\left(\nabla^\mu\chi^\nu\right)\chi_\mu\nabla_\nu\chi_\sigma + 2\left(\nabla^\mu\chi^\nu\right)\chi_\sigma\nabla_\mu\chi_\nu - 2\left(\nabla^\mu\chi^\nu\right)\chi_\nu\nabla_\mu\chi_\sigma,$$

and use $\chi^\mu \nabla_\mu \chi^\nu = -\kappa \chi^\nu$ to rewrite the first term and the Killing equation to rewrite the third term

$$0 = -2\kappa \chi^\nu \nabla_\nu \chi_\sigma + 2\left(\nabla^\mu \chi^\nu\right) \chi_\sigma \nabla_\mu \chi_\nu + 2\left(\nabla^\mu \chi^\nu\right) \chi_\mu \nabla_\nu \chi_\sigma.$$

We apply $\chi^\mu \nabla_\mu \chi^\nu = -\kappa \chi^\nu$ once more on the first and third term

$$\begin{aligned} 0 &= 2\kappa^2 \chi_\sigma + 2\left(\nabla^\mu \chi^\nu\right) \chi_\sigma \nabla_\mu \chi_\nu - 2\kappa \chi^\nu \nabla_\nu \chi_\sigma \\ &= 2\kappa^2 \chi_\sigma + 2\left(\nabla^\mu \chi^\nu\right) \chi_\sigma \nabla_\mu \chi_\nu + 2\kappa^2 \chi_\sigma. \end{aligned}$$

Simplifying and rearranging, we find

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2} \nabla^\mu \chi^\nu \nabla_\mu \chi_\nu$$

8.

We define the blackening factor as

$$f \equiv 1 - \frac{2GM}{c^2 r}.$$

The Killing vector is given by

$$K^\mu = (1, 0, 0, 0),$$

which means

$$K_\mu = (-f, 0, 0, 0).$$

The covariant derivative acting on the Killing vector is

$$\nabla_\nu K_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} f' & 0 & 0 \\ \frac{f'}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

and

$$\nabla^\nu K^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \frac{f'}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} f' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Therefore,

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2} \nabla_\nu K_\mu \nabla^\nu K^\mu = \frac{1}{4} \left(f'\right)^2 \Big|_{r=r_h} = \frac{G^2 M^2}{4c^4 r_h^4} = \frac{c^4}{16 G^2 M^2},$$

where we have imposed

$$r_h = \frac{2GM}{c^2}.$$

9.

Using the above result, the Hawking temperature is given by

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B}.$$

The temperature is inversely proportional to the mass which means small black holes are hotter than large black holes. For a stellar black hole with mass M_S, we find

$$T = 6.0 \times 10^{-8} \text{ K} \left(\frac{10^{30}}{M_S}\right),$$

so the Hawking temperature is so small, it would be very very difficult to detect!

10.

We solve for the horizon

$$\Delta = 1 - \frac{2GM}{c^2 r_h} + \frac{GQ^2}{c^4 r_h^2} = 0$$

and we find

$$r_h = \frac{GM}{c^2} \pm \sqrt{\frac{G^2 M^2}{c^4} - \frac{GQ^2}{c^8}}$$

11.

In the limit that $Q \to 0$, we find the horizon of the Schwarzschild black hole, as expected

$$r_h = \frac{2GM}{c^2}$$

12.

When the two roots coincide, the discriminate is zero so this means that $c^4 GM^2 = Q^2$.

13.

Computing the temperature using the second formula, we first must compute $\Delta'(r_h)$

$$\Delta'(r_h) = \frac{2GM}{c^2 r_h^2} - \frac{2GQ^2}{c^4 r_h^3} = \frac{2G}{c^4 r_h^3}\left(Mc^2 r_h - Q^2\right).$$

Then the temperature is given by

$$T = \frac{\hbar c}{k_B}\frac{2G}{4\pi c^4 r_h^3}\left(Mc^2 r_h - Q^2\right).$$

In the limit of extremality, we find

$$\Delta'(r_h) = 0.$$

and therefore, the temperature is zero for the extremal Reissner-Nordstrom black hole. For Schwarzschild, we take $Q \to 0$ and we get

$$T = \frac{\hbar c^3}{k_B}\frac{1}{8\pi GM},$$

which is the result we got before.

14.

We compute the area of the horizon so we are at a constant t and r slice. The induced metric γ at the horizon is

$$ds^2_{\text{horizon}} = r_h^2 d\theta^2 + r_h^2 \sin^2\theta d\phi^2,$$

and the determinant is given be

$$\gamma = r_h^4 \sin^2\theta, \quad \sqrt{\gamma} = r_h^2 \sin\theta.$$

The area is therefore

$$A = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \left(r_h^2 \sin\theta\right) = 4\pi r_h^2$$

The entropy of the Schwarzschild black hole is

$$S = \frac{k_B c^3 \left(4\pi r_h^2\right)}{4G\hbar} = \frac{4\pi k_B GM^2}{c\hbar}.$$

15.

We calculate the Komar integral for Schwarzschild. The normal vectors, normalized to $n_\mu n^\mu = -1$ and $\sigma_\mu \sigma^\mu = +1$ are

$$n = \left(-\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{1/2}, 0, 0, 0\right),$$

$$\sigma_1 = \left(0, \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1/2}, 0, 0\right).$$

Therefore,

$$n_\mu \sigma_\nu \nabla^\mu K^\nu = -\nabla^0 K^1.$$

The Killing vector is $K^\mu = (1, 0, 0, 0)$ so we can compute

$$\begin{aligned}
\nabla^0 K^1 &= g^{00} \nabla_0 K^1 \\
&= g^{00} \left(\partial_0 K^1 + \Gamma^1_{0\lambda} K^\lambda \right) \\
&= g^{00} \Gamma^1_{00} K^0 \\
&= -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \frac{GM}{c^2 r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \\
&= -\frac{GM}{c^2 r^2}.
\end{aligned}$$

The metric on the two-sphere at infinity is

$$\gamma^{(2)}_{ij} \mathrm{d}x^i \, \mathrm{d}x^j = r^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2 \right),$$

and the square root of the determinant is

$$\sqrt{\gamma^{(2)}} = r^2 \sin\theta$$

The mass of a Schwarzschild black hole is

$$E = \frac{c^4}{8\pi G} \int d\theta d\phi r^2 \sin\theta \left(\frac{GM}{c^2 r^2} \right) = \frac{Mc^2}{2}.$$

16.

We have

$$TS = \left(\frac{\hbar c^3}{k_B} \frac{1}{8\pi GM} \right) \left(\frac{4\pi k_B G M^2}{c\hbar} \right) = \frac{c^2 M}{2}.$$

Leuven-2023.HW2.2(m) Conservation quantities for charged black hole (!?!!??!?)

For Reissner-Nordström black hole using two of the Killing vectors of the metric, find the expressions for the energy and angular momentum for the moving particle, and explicitly show that they are conserved for a charged particle in this spacetime. Discuss your answer and compare it with the expressions for the Schwarzschild solution studied in class.

Reminder: the geodesic equation is $\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = \frac{q}{m} F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau}$, the metric is $ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \right)$, with $f(r) = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}$, and $A = \frac{Q}{r} dt$.

Solution

(удалю воду!!! впишу в 1ю часть опыт от этой задачи!!!! что типа по векторам Киллинга так-то сох вел получать можно, это важно! как????)

(??? тут абзац про идеи решения!!!)

(!?!??!? задача какая-то сложная, видимо, я что-то не понимаю в этом!! видимо, она тоже очень хорошая для проверки знаний!!! мб укажу про ее во введении или в 1й части!)

(9 points) For a particle of charge q and mass m moving in the presence of an electromagnetic field, the geodesic equation is modified, simply because there is now a force other than gravity acting on the object. The modified geodesic equation takes the form

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = \frac{q}{m} F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\lambda},$$

where λ is the affine parameter along the geodesic and $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$ is the electromagnetic field strength corresponding to the Maxwell field A_μ. This geodesic equation can also be written equivalently as

$$\frac{D}{d\lambda} \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) = \frac{q}{m} F^\mu_\nu \frac{dx^\nu}{d\lambda},$$

where $\frac{D}{d\lambda} \equiv \frac{dd^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu$ denotes the covariant derivative with respect to the affine parameter λ. In the absence of the background electromagnetic field, we know that the quantity $K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ should be constant along the geodesic

for any Killing vector K. However, due to the modification of the geodesic equation by the electromagnetic field, we can now see that this is no longer conserved:

$$\begin{aligned}\frac{D}{d\lambda}\left(K_\mu\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right) &= \frac{dx^\nu}{d\lambda}\nabla_\nu\left(K_\mu\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)\\ &= \frac{dx^\nu}{d\lambda}\left(\nabla_\nu K_\mu\right)\frac{dx^\mu}{d\lambda}+\frac{dx^\nu}{d\lambda}K_\mu\left(\nabla_\nu\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)\\ &= \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\nabla_\nu K_\mu + K_\mu\frac{D}{d\lambda}\left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)\\ &= \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\nabla_{(\nu}K_{\mu)} + K_\mu\left(\frac{q}{m}F^\mu{}_\nu\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right)\\ &= \frac{q}{m}K^\mu F_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\lambda},\end{aligned}$$

where in the second line we used the product rule, in the third line we used the definition of the covariant derivative with respect to λ and reordered terms, in the fourth line we used the fact that $x^\mu x^\nu$ is symmetric under $\mu\leftrightarrow\nu$ as well as our geodesic equation (2.2), and then in the last line we used the Killing equation $\nabla_{(\mu}K_{\nu)}=0$. Thus, we have shown that $K_\mu\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ is no longer conserved along the geodesic.

So, we need to find some new quantity that can compensate for this non-conservation. In particular, since the last line of (2.3) involves both the Killing vector K as well as the Maxwell field A_μ, let's investigate how the product of these two vectors $A_\mu K^\mu$ changes along the geodesic:

$$\begin{aligned}\frac{D}{d\lambda}\left(A_\mu K^\mu\right) &= \frac{dx^\nu}{d\lambda}\nabla_\nu\left(A_\mu K^\mu\right)\\ &= \frac{dx^\nu}{d\lambda}\left[\left(\nabla_\nu A_\mu\right)K^\mu + A_\mu\nabla_\nu K^\mu\right]\\ &= \frac{dx^\nu}{d\lambda}\left[\left(\nabla_\nu A_\mu-\nabla_\mu A_\nu\right)K^\mu+\left(\nabla_\mu A_\nu\right)K^\mu + A_\mu\nabla_\nu K^\mu\right]\\ &= \frac{dx^\nu}{d\lambda}\left[F_{\nu\mu}K^\mu + K^\mu\nabla_\mu A_\nu + A^\mu\nabla_\nu K_\mu\right],\end{aligned}$$

where in the second line we used the product rule, in the third line we added and subtracted the same term in order to give us an antisymmetric derivative acting on the Maxwell field, and in the last line we recognized electromagnetic field strength and reorganized terms somewhat.

From here, we can use antisymmetry of the field strength $F_{\nu\mu}=-F_{\mu\nu}$ as well as the Killing vector equation $\nabla_\nu K_\mu=-\nabla_\mu K_\nu$ to rewrite this as

$$\frac{D}{d\lambda}\left(A_\mu K^\mu\right) = -K^\mu F_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\lambda}+\frac{dx^\nu}{d\lambda}\left(K^\mu\nabla_\mu A_\nu - A^\mu\nabla_\mu K_\nu\right).$$

Thus, we have exactly the kind of field strength term we need to cancel the one in (2.3) by also multiplying by an overall factor of q/m. We thus find that

$$\frac{D}{d\lambda}\left(K_\mu\frac{dx^\mu}{d\lambda}+\frac{q}{m}A_\mu K^\mu\right) = \frac{dx^\nu}{d\lambda}\left(K^\mu\nabla_\mu A_\nu - A^\mu\nabla_\mu K_\nu\right).$$

So, we still don't quite have something that's conserved along the geodesic, but we're getting closer. What we want to do now is notice that

$$K^\mu\nabla_\mu A^\nu - A^\mu\nabla_\mu K^\nu = K^\mu\partial_\mu A^\nu - A^\mu\partial_\mu K^\nu,$$

as the symmetry in the lower indices of the Christoffel symbols forces the two to cancel when we expand the covariant derivatives. Then, we recognize (2.7) simply as the definition of the vector commutator $[K,A]^\nu$. Plugging this back into (2.6), we thus find that

$$\frac{D}{d\lambda}\left(K_\mu\frac{dx^\mu}{d\lambda}+\frac{q}{m}A_\mu K^\mu\right) = g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}[K,A]^\nu.$$

This result tells us that if our background is equipped with a Killing vector K for which the commutator $[K,A]$ vanishes, then the right-hand side of (2.8) vanishes and thus the quantity

$$K_\mu\left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}+\frac{q}{m}A^\mu\right)$$

will be conserved along any geodesic. That is, for any Killing vector K that commutes with A_μ, there is an associated conserved quantity.

What we have done so far holds in any arbitrary spacetime with an electromagnetic field turned on. We will now specialize to the four-dimensional Reissner-Nordström spacetime, for which the metric and the Maxwell field are given by

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega^2, \quad f(r) = 1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2},$$
$$A = \frac{Q}{r}dt.$$

As discussed in class and in exercise sessions, this spacetime is equipped with four independent Killing vectors:

$$\begin{aligned} K_1 &= \partial_t, \\ K_2 &= -\sin\phi\partial_\theta - \cot\theta\cos\phi\partial_\phi, \\ K_3 &= \cos\phi\partial_\theta - \cot\theta\sin\phi\partial_\phi, \\ K_4 &= \partial_\phi. \end{aligned}$$

For uncharged particles moving along geodesics, we know that K_1 corresponds to energy conservation, while K_2, K_3, and K_4 correspond to conservation of (the three components of) angular momentum. To see if they are still associated with conserved quantities for charged geodesics, we need to determine if they commute with A_μ. To do so, we first note that

$$A^\mu = g^{\mu\nu}A_\nu = \left(-\frac{Q}{f(r)r}, 0, 0, 0\right)$$

and so A^μ has only a time component, and this time component depends only on r. Since all of the Killing vectors above have no radial component, this means that $K^\mu\partial_\mu$ will involve no derivatives with respect to r, and thus

$$K^\mu\partial_\mu A^\nu = 0.$$

Additionally, since none of the Killing vectors above have any component of K^μ that depends on the time coordinate t, this means that $\partial_t K^\mu = 0$. Then, since A^μ has only a time component, we thus conclude that

$$A^\mu\partial_\mu K^\nu = 0.$$

Putting these two results together, we therefore find that $[K, A] = 0$ for all four Killing vectors on our Reissner-Nordström background. Thus each of them corresponds to a conserved charge!

We will use the conservation associated with K_2 and K_3 to fix the angular momentum to point purely in the z-direction, i.e. we will fix $\theta = \pi/2$ along the geodesic. Once we have done so, we now want to compute the total conserved energy associated with $K_1 = \partial_t$ and the total (magnitude of the) conserved angular momentum associated with $K_4 = \partial_\phi$.

Note: We have now argued that all four of our Killing vectors satisfy $[K, A] = 0$; so now it is allowed to use this to set $\theta = \pi/2$ for the geodesic. It was also fine to argue that the metric and gauge field A are spherically symmetric. However, without making an explicit argument that A also satisfies the same symmetries as the metric, it is not immediately obvious that we can rotate the geodesic to be at $\theta = \pi/2$ (the presence of A in the geodesic equation means we need to take it into account when rotating our geodesic!)

First, we focus on $K_1 = \partial_t$, or equivalently $(K_1)^t = 1$, and thus $(K_1)_t = g_{tt} = -f(r)$. The conserved energy is thus given by, with analogy to how we computed it for the Schwarzschild solution,

$$\begin{aligned} E &= -m\,(K_1)_\mu\left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} + \frac{q}{m}A^\mu\right) \\ &= mf(r)\left(\frac{dt}{d\lambda} + \frac{q}{m}A^t\right) \\ &= mf(r)\frac{dt}{d\lambda} - \frac{qQ}{r} \\ &= \left(m - \frac{2GMm}{r} + \frac{GQ^2m}{r^2}\right)\frac{dt}{d\lambda} - \frac{qQ}{r}. \end{aligned}$$

We put an overall factor of $-m$ in front of the conserved quantity for convenience, and to make the units match those of energy, but of course the quantity is conserved whether or not you have these additional factors. Notice that the sign of the electromagnetic interaction energy depends on the relative sign between the particle charge q and the black hole charge Q. In the Schwarzschild limit $Q \to 0$, this becomes

$$E|_{\text{Schw.}} = \left(m - \frac{2GMm}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda}.$$

Thus there are two new features of the energy in the Reissner-Nordström background. The presence of the black hole charge Q modifies the metric itself which in turn changes the energy associated with the gravitational

field. Additionally, the interaction between the particle charge and black hole charge also causes an additional contribution to the energy that goes like $1/r$, as expected from Coulomb's law.

Now, let's move on to the Killing vector $K_4 = \partial_\phi$, or equivalently $(K_4)^\phi = 1$ and thus $(K_4)_\phi = g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta = r^2$, since we have fixed $\theta = \pi/2$. The conserved angular momentum L is thus given by

$$\begin{aligned} L &= (K_4)_\mu \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} + \frac{q}{m} A^\mu \right) \\ &= r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda} + \frac{q}{m} A^\phi \right) \\ &= r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}. \end{aligned}$$

We get exactly the same thing in the Schwarzschild limit $Q \to 0$, and thus the angular momentum has the same form for any value of the charge Q. Thus, the form of the angular momentum seems to be unmodified by the presence of charge. Intuitively, this is because both the electromagnetic force and the gravitational force act purely in the radial direction and so the angular momentum does not receive any modifications from its usual form. The only thing that is relevant is the rate $d\phi/d\lambda$ at which the particle is orbiting the black hole, as well as the distance r to the black hole.

Lagrangian methods (???)

(??? тоже в 1й укажу про это!!!)

It is also nice to see these concepts in action in a Lagrangian method. The Lagrangian for a charged particle is:

$$\mathcal{L} = -\frac{m}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} - q A_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda},$$

together with the additional condition:

$$-\epsilon = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}$$

According to Noether's theorem, if the Lagrangian does not depend on a coordinate, say t or ϕ, then we can find a conserved quantity as: (????????? додумаю, как это??? допишу 1е части в теорполе и гравитации!!! Нетер и Килл векторы, плохо связь усвоена сейчас)

$$E \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{t}}, \quad L \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}.$$

Of course, this simply gives us the expressions we had above:

$$E = -m g_{tt} \frac{dt}{d\lambda} - q A_t = m \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) \frac{dt}{d\lambda} - \frac{qQ}{r}, \quad L = -m g_{\phi\phi} \frac{d\phi}{d\lambda},$$

where we already use that $A_\phi = 0$ and the metric is diagonal. Note that for Noether's theorem, it was crucial that the whole Lagrangian was independent of t, ϕ - i.e. both the metric and gauge field A_μ need to be indepedent of these coordinates. More generally, a Killing vector K^μ induces a small transformation on the coordinates:

$$x^\mu \to x^\mu + \delta x^\mu = x^\mu + \varepsilon K^\mu,$$

where ε is infinitesimally small. The resulting transformation of the Lagrangian is:

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$$

with (keeping only the linear terms in ε):

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = -\varepsilon m &\left(g_{\mu\nu} \frac{dK^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + \frac{1}{2} \partial_\rho g_{\mu\nu} K^\rho \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) \\ - q\varepsilon &\left(A_\mu \frac{dK^\mu}{d\lambda} + \partial_\rho A_\mu K^\rho \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) \end{aligned}$$

11 Of course, we have further that:

$$\frac{dK^\mu}{d\lambda} = \partial_\sigma K^\mu \frac{dx^\sigma}{d\lambda}.$$

Using this and writing $U^\mu = dx^\mu/d\lambda$, we find:

$$\delta\mathcal{L} = -\varepsilon m U^\rho U^\sigma \left(g_{\mu\rho} \partial_\sigma K^\mu + \frac{1}{2} K^\mu \partial_\mu g_{\rho\sigma} \right) - \varepsilon q U^\sigma \left(A_\rho \partial_\sigma K^\rho + K^\rho \partial_\rho A_\sigma \right).$$

The first term can be rewritten as (nice exercise) $-\varepsilon m U^\rho U^\sigma \left(\nabla_\rho K_\sigma\right)$, so in total we get:

$$\delta\mathcal{L} = -\varepsilon m U^\rho U^\sigma \nabla_{(\rho} K_{\sigma)} - \varepsilon q U^\sigma \left(A_\rho \partial_\sigma K^\rho + K^\rho \partial_\rho A_\sigma\right).$$

The second term requires a bit more thought. [1] First, we note that we can replace the derivatives by covariant derivatives, because the Christoffel symbols cancel. Once we have covariant derivatives, we can move metrics in and out of the covariant derivatives without problem. Then, we use the fact that K is a Killing vector to find:

$$\begin{aligned} A_\rho \partial_\sigma K^\rho + K^\rho \partial_\rho A_\sigma &= A_\rho \nabla_\sigma K^\rho + K^\rho \nabla_\rho A_\sigma \\ &= A^\rho \nabla_\sigma K_\rho + K^\rho \nabla_\rho A_\sigma \\ &= -A^\rho \nabla_\rho K_\sigma + K^\rho \nabla_\rho A_\sigma \\ &= [K, A]_\sigma. \end{aligned}$$

so that we finally find the commutator. We conclude that:

$$\delta\mathcal{L} = -\varepsilon m U^\rho U^\sigma \nabla_{(\rho} K_{\sigma)} - \varepsilon q U^\sigma [K, A]_\sigma.$$

So, we can conclude that K^μ is indeed a symmetry of the entire Lagrangian, i.e. gives rise to a conserved quantity through Noether's theorem, if and only if $\nabla_{(\rho} K_{\sigma)} = 0$ (i.e. K is a Killing vector) and $[K, A] = 0$, i.e. K^μ is also a symmetry of the gauge field A. The conserved quantity is then given by (from Noether's theorem)

$$Q = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu}\delta x^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu} K^\mu.$$

For the ∂_t and ∂_ϕ Killing vectors, this clearly gives what we had before for a charged particle; but this is also valid for a more general Killing vector. For example, this would give the other angular momentum components for the other two Killing vectors coming from spherical symmetry.

Leuven-2023.s8/9 Angular Momentum for the Kerr Metric

(!!?!?!?!? выгружу и решу, пока не думал про это, а тут есть, о чем подумать!!!)
(тут про это часа 2 думать нужно еще!)

13.5.11 Problems about Gravitational Radiation 1

Solution

18.1. Искомая мощность гравитационного излучения определяется квадратом третьей производной по времени от квадрупольного момента:

$$\text{Мощность } = \frac{G}{5c^5}(\dddot{\Psi})^2 \sim \frac{GM^2L^4}{5c^5t^8}.$$

Соответствующие параметры для среднего массачусетского автомобилиста: масса кулака и предплечья $M \approx 2 \cdot 10^3 \Gamma$; длина предплечья $L \approx 50\text{c}$; средний период одного «сотрясения» $t \approx 0,2\text{c}$. Ведя вычисления в единицах СГС, получаем, что мощность излучения составляет величину порядка $2 \cdot 10^{-43}$ эрг/с.

Чтобы подсчитать полную энергию, расходуемую в этом процессе автомобилистом, воспользуемся тем фактом, что мускулы являются почти полностью неконсервативными, так что на каждое «сотрясение» кулаком уходит энергия, приблизительно равная максимальной кинетической энергии всей движущейся руки:

Мощность $= \frac{1}{2} M \frac{L^2}{t^2} \cdot \frac{1}{t} \approx 3 \cdot 10^8 \ni \text{pr/c}$.

Таким образом, «коэффициент полезного действия» этого процесса равен примерно 10^{-51}.

Solution

18.2. Гравитационная энергия связи системы пор.ядка M^2/R, а кинетическая энергия порядка $MR^2/T_{\text{дин}}^2$, где $T_{\text{дин}}$ - некоторое характерное время, описывающее движение системы. Из теоремы вириала известно, что для систем, находящихся в равновесии,

$$T_{\text{дии}}^2 \sim R^3/M.$$

Скорость потери энергии на гравитационное излучение определяется квадратом третьей производной по времени от квадрупольного момента и равна примерно

$$PGW \sim M^2R^4/T^0_{\text{дин}} \, .$$

Время, необходимое для того, чтобы реакция излучения заметно повлияла на систему, есть время, необходимое для излучения заметной доли ее энергии в виде гравитационных волн

$$T = \frac{E_{\text{Ku}}}{P^{GW}} \sim \frac{T^4_{\mu\text{H}}}{MR^2} \sim \frac{RT^2_{\mu\ \text{L}}}{M^2}$$

Тогда отношение этого «времени гравитационного затухания» к динамическому характерному времени системы будет порядка

$$\frac{T}{T_{\text{дин}}} \sim \frac{RT_{\text{дин}}}{\text{M}^2} \sim \left(\frac{R}{M}\right)^{5/3} .$$

Очевидно, что силы реакции гравитационного излучения будут играть существенную роль только в релятивистских компактных системах.

Solution

18.3. Три независимые ориентации диполя соответствуют трем компонентам некоторого трехмерного вектора. Поскольку квадруполю отвечает трехмерный тензор второго ранга (9 компонент), который является симметричным (3 ограничения) и бесследовым (1 ограничение), то для него существует 5 независимых «ориентаций». Примером пяти независимых «квадрупольных» тензоров могут служить пять тензоров, у которых все компоненты равны нулю, кроме

$$\begin{aligned} I_{zz} &= -\frac{1}{2}I_{xx} = -\frac{1}{2}I_{yy} = 1, \\ I_{yy} &= -\frac{1}{2}I_{xx} = -\frac{1}{2}I_{zz} = 1, \\ I_{xy} &= I_{yx}, \quad I_{xz} = I_{zx}, \quad I_{yz} = I_{zy}. \end{aligned}$$

Solution

18.4. Предположим, что стержень расположен в плоскости xy и вращается вокруг оси z. Если μ-масса на единицу длины стержня, то единственными зависящими от времени компонентами тензора приведенного квадрупольного момента будут

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \mu\cos^2(\omega t)\cdot 2\int\limits_0^{\ell/2} x^2dx = \frac{\mu\ell^3}{12}\cos^2(\omega t) = \frac{M\ell^2}{24}\cos(2\omega t) + \text{ const}, \\ I_{yy} &= -\frac{M\ell^2}{24}\cos(2\omega t) + \text{ const}, \\ I_{xy} &= I_{yx} = \frac{M\ell^2}{24}\sin(2\omega t), \end{aligned}$$

так чТО

$L_{GW} = \frac{1}{5} < \dddot{I}_{jk}\dddot{I}_{jk} >= \frac{(2\omega)^6}{5}\left(\frac{M\ell^2}{24}\right)^2\left\langle 2\cos^2 2\omega t + 2\sin^2 2\omega t\right\rangle = \frac{2}{45}\omega^6M^2\ell^4.$

(Обратите внимание, что мы используем систему единиц, где $G = c = 11$)

Чтобы вычислить избыточный заряд на концах стержня, приравняем электростатическую и центробежную силы:

$$|e\nabla\Phi| = rm\omega^2$$

где Ф - электростатический потенциал, а e и m - соответственно заряд и масса электрона. Тогда по порядку величины плотность заряда, «индуцированного» центробежными силами, будет равна

$$\rho \sim -\nabla^2\Phi \sim -(m/e)\omega^2$$

Разумеется, это обеднение электронами (плотность ρ отрицательна!) в основной части стержня будет уравновешено избыточными электронами, «приплюснутыми» к концам стержня. Ясно, что их заряд должен быть равен $(m/e)\omega^2\ell A$, где A-площадь поперечного сечения стержня. В результате стержень превращается в электрический квадруполь с моментом порядка $(m/e)\times\ \times\omega^2\ell^3A$. Мощность электромагнитного квадрупольного излучения, обусловленного этим «индуцированным» моментом, будет равна по порядку величины квадрату квадрупольного момента, умноженному на ω^6, т. е. $\omega^{10}(m/e)^2\ell^6A^2$. Тогда отношение электромагнитного затухания к гравитационному затуханию есть

$$\frac{L_{EM}}{L_{GW}} \sim \frac{\omega^{10}(m/e)^2\ell^6 A^2}{\omega^6\rho^2 A^2\ell^8} = \left[\frac{(m/e)\omega^2}{\rho}\right]^2.$$

В системе единиц, где $G = c = 1, (m/e) \approx 0,5 \cdot 10^{-21}, \rho\left(10\Gamma/\mathrm{cm}^8\right) \approx \approx 10^{-27}$ и $\omega(1$ к ц $) \approx \frac{1}{3} \cdot 10^{-7}$, откуда

$$L_{EM}/L_{aw} \sim 10^{-18}.$$

На сей раз верх одержало гравитационное излучение.
Реиение 18.5. Сила реакции излучения, действующая на лемент объема источника, есть

$$dF_l = -\Phi_{,\iota\rho}\rho d^3x$$

Скорость, в которой этот элемент объема теряет энергию, равна скорости, с которой силы реакции излучения совершают над ним работу, т. е. $v^i dF_i$, где v-скорость элемента объема источника. Тогда для всего источника имеем

$$\frac{dE}{dt} = -\int \Phi_{,t} v^l \rho d^9x = \int \Phi\left(v^l\rho\right)_{,t} d^3x$$

Здесь мы использовали теорему Гаусса о дивергенции и, чтобы получить второе равенство, оценили значение интеграла по некоторой поверхности, лежалцей вне источника. Уравнение непрерывности гласит:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{v}\rho) = -\partial\rho/\partial t$$

thus

$$\frac{dE}{dt} = -\int \Phi\frac{\partial\rho}{\partial t}d^3x = -\frac{1}{5}\mathcal{I}^{(j)}_{jk}\frac{d}{dt}\int x' x^k \rho d^3x =$$
$$= -\frac{1}{5}\Psi^{(5)}_{jk}\frac{d}{dt}\left(\Psi_{jk} + \frac{1}{3}\delta_{jk}\int r^2\rho d^3x\right)$$

Поскольку $£_{jk}\delta_{jk} = 0$, последний член обращается в нуль, и мы получаем

$$dE/dt = -\left(\frac{1}{5}\right)\Psi''_{jk}\dot{\Psi}_{jk}.$$

Найдем среднее по времени от этого выражения для нескольких периодов колебаний. Так как мы предполагаем, что на протяжении этого промежутка времени вековые изменения параметров источника малы, имеем
и

$$\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{sk}_{\ jk}\dot{\chi}_{jk}dt \approx \frac{1}{T}\int_0^T \chi_{jk}\Psi_{sk}dt$$

$$\left\langle\frac{dE}{dt}\right\rangle = -\frac{1}{5}\left\langle\bigcup_{jk}\|_{jk}\right\rangle.$$

Чтобы найти скорость уменьшения момента количества движения, воспользуемся тем фактом, что для некоторого элемента объема источника тормозящий момент сил реакции излучения есть

$$\mathbf{r}\times\mathbf{d}F = -\mathbf{r}\times\nabla\Phi_\rho d^3x = \frac{d\mathbf{J}}{dt},$$

а для всего источника

$$\frac{dJ^t}{dt} = -\varepsilon^{ijk}\int x'\Phi, k_\rho\rho d^8x = -\varepsilon^{ijk}\int x\prime\left(\frac{2}{5}X^{(s)}_{km}x^m\right)\rho d^8x =$$
$$= -\frac{2}{5}\varepsilon^{i/k}\chi^{(5)}_{km}\int xx^m\rho d^3x = -\frac{2}{5}\varepsilon^{\varepsilon^{i/k}\chi^{(8)}_{km}\Psi_{jm}}$$

Усредняя по времени и интегрируя по частям так же, как и выше, получаем

$$\left\langle\frac{dJi}{dt}\right\rangle = -\frac{2}{5}\varepsilon^{i/k}\left\langle\dddot{X}_{km}\dddot{\Psi}, \jmath_{jm}\right\rangle.$$

Решение 18.6. Пусть m_1, m_2 и r_1, r_2 суть соответственно массы и расстояния от центра масс для двух звезд, обращаю. щихся вокруг центра масс с угловой частотой ω. Из ньютонов: ской механики известно, что

$$r_1 m_1 = r_2 m_2 = R\mu,$$

где $R \equiv r_1 + r_2$, а μ - приведенная масса, равная $m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$. Теперь полную энергию двойной системы можно записать в виде функции от $M = m_1 + m_2, R$ и μ:

$$E = \left(\frac{1}{2} r_1^2 m_1 + \frac{1}{2} r_2^2 m_2\right) \omega^2 - \frac{m_1 m_2}{R} = \frac{1}{2}\omega^2 R^2 \mu - \frac{\mu M}{R} = -\frac{1}{2}\frac{\mu M}{R}.$$

Здесь мы воспользовались также законами Кеплера. Теперь можно рассчитать мощность, рассеиваемую системой в виде гравитационных волн, если вычислить значение приведенного квадрупольного момента

$$I_{jk} \equiv \int \rho \left(x_j x_k - \frac{1}{3} r^2 \delta_{jk}\right) d^3 x$$

Обратите внимание, что «приводящий член» $\int \frac{1}{3}\rho r^2 \delta_{jk} d^3 x$ не меняется со временем, и поэтому им можно пренебречь. Направим ось 2 вдоль оси орбитального обращения, и пусть φ будет азимутальным углом - от оси x до линии, соединяющей обе звезды. Тогда, если не учитывать не зависящие от времени члены, можно записать:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \left(r_1^2 m_1 + r_2^2 m_2\right) \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} R^2 \mu \cos 2\varphi + \text{ const}, \\ I_{yy} &= -\frac{1}{2} R^2 \mu \cos 2\varphi + \text{ const}, \\ I_{xy} &= I_{yx} = \frac{1}{2} R^2 \mu \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Поскольку $\varphi = \omega t$, мы можем прямо продифференцировать трижды по времени эти выражения, а затем взять сумму $\dddot{I}_{jk} \dddot{I}_{jk}$ и усреднить ее по времени. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}\left\langle \dddot{I}_{jk} \dddot{X}_{jk} \right\rangle &= \frac{1}{5}(2\omega)^6 \left(\frac{1}{2} R^2 \mu\right)^2 \left\langle \sin^2 2\omega t + \sin^2 2\omega t + 2\cos^2 2\omega t \right\rangle = \\ &= \frac{32}{5}\omega^6 R^4 \mu^2 = \frac{32}{5}\frac{M^3 \mu^2}{R^5} = P_{GW}. \end{aligned}$$

Поскольку эта мощность излучается за счет уменьшения энергии орбитального движения, получаем

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\mu M}{R^2}\frac{dR}{dt} = -P_{aW} = -\frac{32}{5}\frac{M^3 \mu^2}{R^5}$$

Результирующее дифференциальное уравнение

$$R^3 \frac{dR}{dt} = -\frac{64}{5} M^2 \mu$$

легко интегрируется и приводит к решению

$$R^4 = -(256/5) M^2 \mu t + \text{ const}.$$

Если обозначить через t_0 время, через которое расстояние между ззездами уменьшится до нуля в согласии с данной формулой, то получим

$$R^4 = \frac{256}{5} M^2 \mu \left(t_0 - t\right)$$

Время t_0 можно найти, если заметить, что при $t = 0$ расстояние R равно некоторому начальному значению $R_{\text{нач}}$. Следовательно,

$$t_0 = \frac{5 R_{\text{Нач}}^4}{256 M^2 \mu}$$

Рещение 18.7. Значения большой полуоси и эксцентриситета орбиты, выраженные через полную энергию орбитального движе-

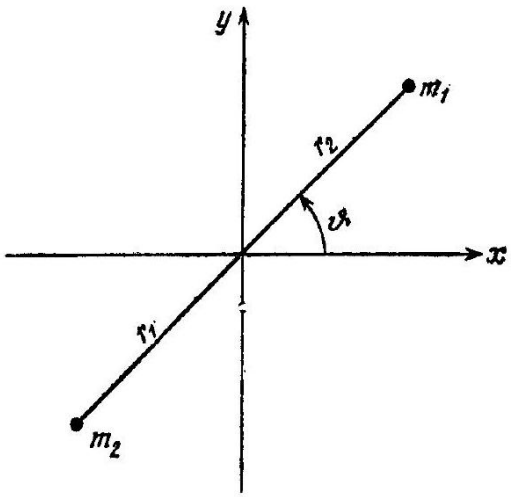


fig. 32.

ния E и момент количества движения L, суть

$$a = -m_1 m_1 / 2E,$$
$$e^2 = 1 + \frac{2EL^2\,(m_1 + m_2)}{m_1^3 m_2^8},$$

откуда

$$\frac{da}{dt} = \frac{m_1 m_2}{2E^2}\frac{dE}{dt},$$
$$\frac{de}{dt} = \frac{m_1 + m_2}{m_1^3 m_2^3 e}\left(L^2\frac{dE}{dt} + 2EL\frac{dL}{dt}\right).$$

Если расстояние между двумя частицами (см. фиг. 32) есть r, причем

$$r = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{1 + e\cos\vartheta}$$

тогда

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}r, \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}r$$

так что компоненты тензора квадрупольного момента имеют вид

$$I_{xx} = m_1 x1 + m_2 x_i^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}r^2\cos^2\vartheta,$$
$$I_{yy} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}r^2\sin^2\vartheta,$$
$$I_{xy} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}r^2\sin\vartheta\cos\vartheta,$$
$$I = I_{xx} + I_{yy} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}r^2.$$

Согласно ньотоновским уравнениям двнжения,

$$\dot{\vartheta} = \frac{\left[(m_1 + m_2)\,a\left(1 - e^2\right)\right]^{1/2}}{t^2}$$

поэтому из уравнения (5) следует

$$\dot{r} = e\sin\theta\left[\frac{m_1 + m_2}{a\,(1 - e^2)}\right]^{1/2}$$

Вычислим теперь последовательные производные по времени от I_{ij}, используя для упрощения получающихся выражений уравнения (5), (7) и (8). Будем иметь

$$I_{xx} = \frac{-2m_1m_2r\cos\vartheta\sin\vartheta}{\left[(m_1+m_2)\,a\,(1-e^2)\right]^{1/2}}$$
$$\ddot{I}_{xx} = \frac{-2m_1m_2}{a\,(1-e^2)}\left(\cos 2\theta + e\cos^3\vartheta\right),$$
$$\dddot{I}_{xx} = \frac{2m_1m_2}{a\,(1-e^2)}\left(2\sin 2\theta + 3e\cos^2\vartheta\sin\theta\right)\dot{\theta},$$
$$I_{yy} = \frac{2m_1m_2}{\left[(m_1+m_2)\,a\,(1-e^2)\right]^{1/2}}r(\sin\vartheta\cos\vartheta + e\sin\vartheta)$$
$$\ddot{I}_{yy} = \frac{2m_1m_2}{a\,(1-e^2)}\left(\cos 2\vartheta + e\cos\vartheta + e\cos^3\vartheta + e^2\right)$$
$$\dddot{I}_{yy} = \frac{-2m_1m_2}{a\,(1-e^2)}\left(2\sin 2\vartheta + e\sin\vartheta + 3e\cos^2\vartheta\sin\vartheta\right)\dot{\vartheta},$$
$$I_{xy} = \frac{m_1m_2r\left(\cos^2\vartheta - \sin^2\theta + e\cos\theta\right)}{\left[(m_1+m_2)\,a\,(1-e^2)\right]^{1/2}}$$
$$\ddot{I}_{xy} = \frac{-2m_1m_2}{a\,(1-e^2)}\left(\sin 2\vartheta + e\sin\vartheta + e\sin\vartheta\cos^2\vartheta\right),$$
$$\dddot{I}_{xy} = \frac{-2m_1m_2}{a\,(1-e^2)}\left(2\cos 2\vartheta - e\cos\vartheta + 3e\cos^3\vartheta\right)\dot{\vartheta},$$
$$\dddot{I} = \dddot{I}_{xx} + \dddot{I}_{yy} = \frac{-2m_1m_2e\sin\theta\dot{\vartheta}}{a\,(1-e^2)}.$$

Тогда скорость потери энергии равна

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{5}\dddot{I}_{jk}\ddot{\Psi}_{jk} = -\frac{1}{5}\left(\dddot{I}_{jk}\dddot{I}_{jk} - \frac{1}{3}\dddot{I}^2\right) =$$
$$= -\frac{1}{5}\left(\dddot{I}^2_{xx} + 2\dddot{I}^2_{xy} + \dddot{I}^2_{by} - \frac{1}{3}\dddot{I}^2\right) =$$
$$= \frac{-8m_1^2m_2^2}{15a^2\left(1-e^2\right)^2}\left[12(1+e\cos\vartheta)^2 + e^2\sin^2\vartheta\right]\dot{\vartheta}^2.$$

Здесь мы воспользовались соотношениями (9) - (18) и обычными алгебраическими упрошениями. Теперь необходимо усреднить полученный результат по периоду одного обращения по орбите. Согласно третьему закону Кеплера, этот период равен

откуда

$$T = \int_0^{2\pi}\frac{1}{\dot{\vartheta}}d\vartheta = \frac{2\pi a^{3/2}}{\left(m_1+m_2\right)^{1/2}}$$

$$\left\langle\frac{dE}{dt}\right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T\frac{dE}{dt}dt = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi}\frac{dE}{dt}\frac{1}{\dot{\theta}}d\vartheta =$$
$$= \frac{-32}{5}\frac{m_1^2m_2^2\left(m_1+m_2\right)}{a^5\left(1-e^2\right)^{7/2}}\left(1+\frac{73}{24}e^2+\frac{37}{96}e^4\right).$$

Аналогично скорость потери момента количества движения есть

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{2}{5}\varepsilon_{zij}\ddot{I}_{ik}\ddot{I}_{kj} = -\frac{2}{5}\varepsilon_{zij}\ddot{I}_{ik}\ddot{I}_{kj} = -\frac{2}{5}\left[\ddot{I}_{xy}\left(\ddot{I}_{yy}-\ddot{I}_{xx}\right)+\right.$$
$$\left.+\ddot{I}_{xy}\left(\ddot{I}_{xx}-\ddot{I}_{yy}\right)\right] = -\frac{8}{5}\frac{m_1^2m_2^2}{a^2\left(1-e^2\right)^2}\left(4+10e\cos\vartheta+e^2\left(9\cos^2\vartheta-\right.\right.$$
$$\left.\left.-1\right)+e^3\left(3\cos^3\vartheta-\cos\vartheta\right)\right]\dot{\vartheta}.$$

Усредняя по времени, получаем

$$\left\langle\frac{dL}{dt}\right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi}\frac{dL}{dt}\frac{1}{\dot{\vartheta}}d\vartheta = -\frac{32}{5}\frac{m_1^2m_2^2\left(m_1+m_2\right)^{1/2}}{a^{7/2}\left(1-e^2\right)^2}\left(1+\frac{7}{8}e^2\right)$$

Наконец, подставляя полученные выражения в уравнения (3) и (4), будем окончательно иметь

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = \frac{2a^2}{m_1 m_2} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{64}{5} \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{a^3 (1-e^2)^{7/s}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4\right),$$

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2 e} \left[\frac{a(1-e^2)}{m_1 + m_2} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle - \frac{(1-e^2)^{1/3}}{a^{1/2} (m_1 + m_2)^{1/3}} \left\langle \frac{dL}{dt} \right\rangle \right] =$$

$$= -\frac{304}{15} \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2) e}{a^4 (1-e^2)^{3/s}} \left(1 + \frac{121}{304} e^2\right).$$

Из уравнения (22) видно, что производная deldt отрицательна, т, е. реакция излучения приводит к уменьщению эксцентриситета. Если в уравнение (21) подставить $e = 0$, мы вновь придем к результату задачи 18.6. (О способах интегрирования уравнений (21) и (22) в случае $e \neq 0$ см. статью Питерса [Peters P. C., Phys. Rev., 136, 1224 (1964)].)

Решение 18.8. Для рассматриваемой волны тензор Риччи должен быть равен нулю. Тогда, свертывая результат задачи 13.13, будем иметь

$$0 = 2R_{\mu v} = h^{\alpha}{}_{v,\alpha\mu} + h^{\alpha}{}_{\mu,\alpha v} - h_{\mu v,}{}^{\alpha}{}_{\alpha} - h_{,\mu v}.$$

Поскольку возмущения суть функции только от $u = t - x$, автоматическ и обращаются в нуль третий член в даламбертиане $\Box h_{\mu v}$ и компоненты R_{22}, R_{23} и R_{33}. Для $\mu, v = 0, 2$ находим

$$\frac{d^2}{du^2} \left(h^0_2 - h^1_2\right) = 0$$

Отсюда следует, что $h^0{}_2 = h^1$. (Постоянные интегрирования в данном случае несущественны: это не функции типа «распространяющейся волны»; они не переносят энергии, и так как они не дают вклада в тензор Римана, то их можно устранить с помощью калибровочного преобразования.) Аналогично имеем

$$h^0_3 = h^1{}_3 \quad \text{из уравнения для } \mu, v = 0, 3,$$

$$h^0_0 - h^1_0 = \frac{1}{2} h \text{ из уравнения для } \mu, v = 0, 0,$$

$$h^2{}_2 + h^3{}_3 = 0 \text{ из уравнения для } \mu, v = 1, 0.$$

Другие комбинации μ, v не дают новых независимых соотношений. Наличие этих четырех ограничений оставляет только шесть независимых компонент $h_{\alpha\beta}$. Далее калибровочное преобразование вида $\xi_\mu(t - x)$ приводит к компонентам $h_{\alpha\beta}$, являющимся функциями только от $(t - x)$, и, следовательно, оставляет в силе приведенные выше четыре ограничения. Поэтому мы выберем калибровочное преобразование именно указанного вида, причем такое, которое обратило бы в нуль компоненты h_{00}, h_{11}, h_{02} и h_{03} и оставило бы лишь компоненты $h_{23} = h_{32}$ и $h_{22} - h_{33}$, инвариантные относительно него. Явный вид такого калибровочного преобразования есть

$$\xi_0(u) = \frac{1}{2} \int^u h_{00}(\tilde{u}) d\tilde{u}, \quad \xi_1(u) = -\frac{1}{2} \int^u h_{11}(\tilde{u}) d\tilde{u},$$

$$\xi_2(u) = \int^u h_{02}(\tilde{u}) d\tilde{u}, \qquad \xi_3(u) = \int^u h_{03}(\tilde{u}) d\tilde{u}.$$

Посмотрим теперь, получили ли мы те же самые компоненты, если бы спроектировали возмущение таким образом, чтобы выделить его поперечно-бесследовую часть. Поскольку $h = h^0_0 + h_{11}$, выделение путем проектирования поперечной части эквивалентно выделению поперечно-бесследовой части. Но применение опера- тора проектирования, выделяющего поперечную часть, оставляет инвариантными компоненты h_{22}, h_{23} и $\tilde{h}_{33}$, что и имеет место в случае нашего калибровочного преобразования. Таким образом, мы другим путем приходим к тем же самым компонентам.

Решение 18.9. Направим ось z вдоль оси симметрии системы и введем циклическую аксиальную координату φ. В некоторый момент времени $t = \text{const}$ в расположенной вдали от источников асимптотически плоской области, через которую распространяются гравитационные волны, момент количества движения внутри замкнутой 2-поверхности $r = r_i$ есть (в силу симметрии задачи имеется только одна аксиальная компонента)

$$J_1 = -(16\pi)^{-1} \oint_{r=r_1} \xi^{\mu;v} d^2\Sigma_{\mu v}$$

где $\xi = \partial/\partial\varphi$. [См. задачу 16.23. Доказательство проходит, даже если не существует временного вектора Киллинга и даже при наличии волн, поскольку волны изменяют только пространственно-пространственные части метрики-см. [1], т. 2, уравнение (19.5).] Аналогично момент количества движения внутри замкнутой 2-поверхности $r = r_2\,(r_2 > r_1)$ есть

$$J_2 = -(16\pi)^{-1} \oint_{r=r_i} \xi^{\mu;v} d^2\Sigma_{\mu v}$$

Следовательно, момент количества движения волн в области между r_1 и r_2 равен

$$J_2 - J_1 = -(16\pi)^{-1} \oint_{r=r_i} \xi^{\mu;v} d^2\Sigma_{\mu\nu} + (16\pi)^{-1} \oint_{r=r_1} \xi^{\mu iv} d^2\Sigma_{\mu v} =$$
$$= \int\limits_{r_1 \leqslant r \leqslant r_1} T_v^\mu \xi^v d^3\Sigma_\mu,$$

где мы, как и при решении задачи 16.23, использовали теорему Стокса. Поскольку в области $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ компоненты тензора T_v^μ равны нулю, то равна нулю и разность $J_2 - J_1$, так что поток момента количества движения для гравитационных волн также обращается в нуль.

Решение 18.10. Плоскую волну, распространяющуюся в направлении оси z, можно описать в месте расположения детектора с помощью величин

$$h_{xx} = -h_{yy} = \mathrm{Re}\left\{A_+ e^{-i\omega t}\right\}, \quad h_{xy} = h_{yx} = \mathrm{Re}\left\{A_x e^{-t\omega t}\right\}.$$

Если плоская волна является монохроматической (и, следовательно, полностью поляризованной), амплитуды A_+и $A_\times$будут постоянными. В более обице случае, когда мы рассматриваем волны в узком диапазоне частот вблизи ω, амплитуды A_+и $A_\times$ будут медленно меняющимися функциями времени (медленными по сравнению с осцилляциями волны Так как интенсивность пропорциональна квадратам модулей амплитуд A, можно ввести поляризационный тензор

$$\rho_{ab} \equiv \frac{\langle A_a A_b^* \rangle}{|A_+|^2 + |A_\times|^2},$$

определяя его по аналогии со случаем электромагнитных волн (см. [7], 5-е изд., стр. 160 и далее).

Следуя и дальше этой аналогии, замечаем, что рассматриваемая матрица является эрмитовой со следом, равным единице, и мы можем переписать ее в виде

$$\rho_{ab} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+\xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1-\xi_3 \end{bmatrix}$$

Как и в случае электромагнитных волн, назовем величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 параметрами Стокса волны. (Примечание. Некоторые авторы называют их нормированными параметрами Стокса.)

Эти параметры характеризуют состояние поляризации волны. Чтобы понять их физический смысл, рассмотрим смесь, состоящую из 1) неполяризованных волн, 2) волн с круговой поляризацией и 3) линей но-поляризованных волн в направлении, составляющем с осями x и y угол ψ. Математически эти три случая соответствуют суперпозиции следующих амплитуд:

$A_+ = G_1(t), \quad A_\times = G_2(t)$, где $\left\langle |G_1(t)|^2 \right\rangle = \left\langle |G_2(t)|^2 \right\rangle \equiv \left\langle |G|^2 \right\rangle$ и $\langle G_1(t) G_2^*(t) \rangle = 0$

$A_+ = H(t), A_x = \pm iH(t)$

$A_+ = F(t)\cos 2\psi, A_\mathrm{x} = F(t)\sin 2\psi.$

Мы предполагаем, разумеется, что G_1, G_2, F и H являются физически независимыми. Тогда поляризационную матрицу можно записать в виде

$$\rho = \tfrac{1}{I} \begin{bmatrix} \left\langle |F|^2 \right\rangle \cos^2 2\psi + \left\langle |G|^2 \right\rangle + \left\langle |H|^2 \right\rangle & \left\langle |F|^2 \right\rangle \sin 2\psi \cos 2\psi \mp i \left\langle |H|^2 \right\rangle \\ \left\langle |F|^2 \right\rangle \sin 2\psi \cos 2\psi \pm i \left\langle |H|^2 \right\rangle & \left\langle |F|^2 \right\rangle \sin^2 2\psi + \left\langle |G|^2 \right\rangle + \left\langle |H|^2 \right\rangle \end{bmatrix},$$
$$I \equiv \left\langle |F|^2 \right\rangle + 2\left\langle |G|^2 \right\rangle + 2\left\langle |H|^2 \right\rangle$$

откуда следует

$$\xi_3 = \frac{1}{I}\left\langle |F|^2 \right\rangle > \cos 4\psi, \quad \xi_1 = \frac{1}{I}\left\langle |F|^2 \right\rangle \sin 4\psi, \xi_2 = \pm\frac{2}{I}\left\langle |H|^2 \right\rangle.$$

Теперь мы видим, что характеристики состояния поляризации гравитационного излучения можно найти из параметров Стокса почти таким же образом, как и в случае электромагнитного излучения. Степень максимальной линей ной поляризации $\left(\xi_a^2 + \xi_1^2\right)^{1/2}$. Направление максимума линей ной поляризации $\mathrm{tg}\, 4\psi = \xi_1/\xi_3$. Степень круговой поляризации $|\xi_2|$ (положительные значения ξ_2 соответствуют право-циркулярной поляризации). Общая степень поляризации $\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2\right)^{1/2}$.

Решение 18.11. Проще всего проанализировать этот процесс в почти ньютоновской системе отсчета. Тогда движение пробных частиц (и наблюдателя) описывается уравнением вида

$$\ddot{x} \sim Rx \sim \ddot{h}x,$$

где R означает величину компонент тензора Римана для гравитационных волн, а h-безразмерные возмущения метрики, соответствующие этим волнам. Поскольку волны являются в нашем слу. чае слабыми возмущениями колебательного типа, координаты частиц меняются также в весьма малой степени; поэтому мы можем проинтегрировать уравнение движения и получить решение вида

$$x(t) - x_0 = x_0 h(t) + \alpha t + \beta + \mathscr{O}\left(h^2\right)$$

где x_0 - координата начального положения.

Если пренебречь поправками второго и высших порядков по амплитуде, то легко видеть, что α и $\boldsymbol{\beta}$ должны быть равны нулю, так как перед приходом всплеска гравитационного излучения частицы по условию задачи покоились в своих первоначальных положениях. После прохождения волн $h = 0$ и частицы должны вновь оказаться покоящимися в свонх первоначальных положенияX.

Solution

18.12. Нормальные моды колебаний стержня (ориентированного для определенности вдоль оси x) находятся из уравнения

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial \xi}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0.$$

Здесь $\xi(x,t)$ - смещение некоторого элемента стержня, τ - постоянная времени затухания, а a - скорость звука в веществе стержня. Эти моды имеют вид

$$\xi = e^{-i\omega t} e^{-t/2\tau} u(x),$$

где $u(x)$ - решение уравнения

$$a^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + \left(\omega^2 + \frac{1}{4\tau^2}\right) u = 0.$$

Поскольку концы стержня не закреплены, граничное условие есть

$$\left.\frac{\partial \xi}{\partial x}\right|_{x=\pm L/2} = 0,$$

где L - длина стержня. Решения уравнения (3), удовлетворяющие условию (4), суть

$$u_n = \begin{cases} \sin n\pi x/L & \text{для нечетных } n, \\ \cos n\pi x/L & \text{для четных } n, \end{cases}$$

а собственные частоты

$$\omega_n = n\pi a/L$$

если предположить, что $\omega_n \gg 1/\tau$.

Рассмотрим гравитационную волну, распространяющуюся в направлении оси z. Она порождает силовое поле вида

$$F_j = -x^k R_{j0k0}(t - z)$$

Тогда, если считать, что стержень расположен в точке $z = 0$, к правой части уравнения (1) необходимо добавить вынуждающую силу

$$F(t,x) = -xR_{x0\times 0}(t)$$

Результирующее смещение можно выразить в виде суперпозиции нормальных мод

$$\xi = \sum_n B_n(t) u_n(x)$$

Величины u_n ортогональны, поэтому из уравнения (1) следует

$$\ddot{B}_n + \frac{1}{\tau}\dot{B}_n + \omega_n^2 B_n = \frac{-\int\limits_{-L/2}^{L/2} F u_n dx}{\int\limits_{-L/2}^{L/2} u_n^2 dx}.$$

Поскольку сила F антисимметрична относительно $x = 0$, вклад в интегралы дают только нечетные значения n. Для нечетных n правая часть уравнения (9) имеет вид

$$-R_{x0\times 0}(t) L / \left(2\pi^2 n^2\right)$$

Если стержень возбуждается на резонансной частоте, т. е.

$$R_{x0x0} \sim e^{-i\omega_n t}$$

то, подставляя в уравнение (9)
получаем

$$B_n \sim e^{-i\omega_n t}$$

$$|B_n| \sim \left|\frac{\tau}{\omega_n n^2}\right| \sim \frac{1}{n^3}$$

Поток энергии F гравитационной волны зависит от n как
Так чТО

$$|R_{xux0}/\omega_n|^2 \sim 1/n^2$$

$$\text{чувствительность } \sim \frac{|B_n|^2}{1/n^2} \sim \frac{1}{n^4}.$$

Solution

18.13. Внутри вещества имеем

$$T^{0\mu}_{GW,\mu} = T^{0l}_{GW,l} = F^0,$$

где F^0 - скорость, с которой внешние силы в единице объема совершают работу над гравитационными волнами. Изолируем глыбу цемента с поперечным сечением A и окружим ее некоторой замкнутой поверхностью. Тогда из теоремы Гаусса в 3-мерном пространстве следует
или

$$\int T^{0t}_{GW} d\Sigma_i = \int T^{0t}_{,i} dV$$

$$\left(T^{0x}_{GW}\big|_{\text{out}} - T^{0x}_{GW}\big|_{\text{in}}\right) a = \int F^0 dV =$$

$=$ скорость возрастания энергии волн внутри гауссового «ящика» $=$ $=$-скорость поглощения энергии волн цементом.

Следовательно,

$$\left(\begin{array}{l}\text{скорость поглощения}\\ \text{импульса на единицу}\\ \text{поверхности за единицу}\\ \text{времени}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}\text{скорость поглощения}\\ \text{энергии на единицу}\\ \text{поверхнос ти за единицу}\\ \text{времени}\end{array}\right).$$

13.5.12 Problems about Gravitational Radiation 2

Solution

18.14. Пусть волна распространяется в направлении оси z, а молекулы смещаются в направлении оси x. Динамическое уравнение движения молекулы есть не что иное, как уравнение расхождения геодезических. Если ξ-смещение молекулы, то это уравнение представляет собой действительную часть записанного в комплексном виде уравнения

$$\ddot{\xi} + \Gamma\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = -R^x_{0x0}X_0 = \frac{1}{2}\ddot{h}_{xx}X_0,$$

или

$$\xi\left(-\omega^2 - i\omega\Gamma + \omega_0^2\right) = -\frac{\omega^2}{2}h_{xx}X_0 = -\frac{\omega^2}{2}A_+X_0e^{-i\omega t}.$$

Здесь ω - частота волны, Г-величина, обратная времени затухания, н X_0 - расстояние вдоль оси x от равновесного положения молекулы до центра масс. Уравнение легко решается относительно ξ:

$$\xi = \frac{1}{2}\omega^2A_+X_0e^{-i\omega t}\left[\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) - i\omega\Gamma\right]/\Delta,$$

$$\Delta \equiv \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \omega^2\Gamma^2$$

И относительно

$$\dot{\xi} = -\frac{1}{2}\omega^3 A_+ X_0 e^{-i\omega t}\left[\omega\Gamma + i\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\right]/\Delta$$

Из этих соотношений можно сразу определить скорость, с которой молекула массы m поглощает энергию:

$$\begin{aligned}\langle \dot{x}F^x\rangle &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{(\dot{\xi})\,(F^x)^*\right\} = \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{(\dot{\xi})\left(-\frac{1}{2}m\omega^2 A_+^* X_0 e^{i\omega t}\right)\right\} = \frac{m\omega^6}{8}\Gamma\left|A_+\right|^2 X_0^2.\end{aligned}$$

Чтобы найти скорость поглощения импульса, нам придется вспомнить, что существует еще и продольное расхождение геодезических, хотя оно и меньше поперечного в c/v раз:

$$Fz = -mR_{xx0}^2 X_0\dot{\xi} = \frac{m}{2}\ddot{h}_{xx}X_0\dot{\xi} = -\frac{1}{2}m\omega^2 X_0\,\mathrm{Re}\left\{A_+ e^{-i\omega t}\right\}\mathrm{Re}\{\dot{\xi}\}$$

Тогда усредненное по времени значение силы, действующей в направлении распространения волны, есть

$$\langle Fz\rangle = \frac{1}{4}m\omega^6 X_0^2\Gamma\left\langle \mathrm{Re}\left(A_+e^{-i\omega t}\right)\cdot\mathrm{Re}\left(A_+e^{-i\omega t}\right)\right\rangle = \frac{1}{8}m\omega^6\Gamma\left|A_+\right|^2 X_0^8$$

что и дает на микроскопическом уровне объяснение результата задачи 18.13.

Решение 18.15. Рассмотрим две частицы, находящиеся на расстоянии d друг от друга. Их относительная скорость под воздействием волны флуктуирует так, что $\Delta v \approx h\omega d$. Если в течение данного периода волны две частицы соударяются друг с другом, то это значит, что по порядку величины расстояние между ними $d \sim v/\omega$, откуда $\Delta v \sim hv$. Тогда в среднем при наличии волны частицы будут соударяться с энергиями, в $(\Delta v/v)^2$ раз больиими, чем в ее отсутствие. Поскольку в процессе соударения направления движения частиц меняются случайным образом, эта энергия не будет вычитаться во время следующего полупериода, когда амплитуда волны противоположна. Энергия участвующих в соударении частиц возрастает также в $(\Delta v/v)^2$ раз в результате еще одного эффекта: дело в том, что частицы, движущиеся навстречу друг другу со скоростью $v + \Delta v$, обладают большей вероятностью столкнуться, чем частицы, движущиеся со скоростью $v - \Delta v$. Мы заключаем поэтому, что при температуре T энергия каждого соударения в среднем возрастает на величину порядка $(\Delta v/v)^2 kT \frown \sim h^2 kT$. Число столкновений на единицу объема в единицу вре. мен естb

$$n_0 v/l \sim (n_0/l)\,(kT/m)^{1/2}$$

где n_0 - плотность числа частиц, а m - масса частицы. Следовательно, внутренняя энергия, поглощенная единицей объема за единицу времени, примерно равна

$$\frac{dE_{\text{ВНу р}}}{dt} \sim \frac{h^2}{n_0^{1/2}m^{1/2}\ell}\,(n_0kT)^{3/2} \sim \frac{h^2}{n_0^{1/2}m^{1/2}\ell}E_{\text{ВНугР}}^{3/2}.$$

Интегрируя это соотношение, получаем

$$E_{\text{внутр}}^{1/2}\,(t) \sim \frac{t_0 E_{\text{внутр}}^{1/2}\,(t=0)}{t_0 - t},$$

где $\left(t_0 \sim \left(\ell/h^2\right)(m/kT)^{1/2}\right.$. Таким образом, $E_{\text{внутр возрастает до бес-}}$ конечности за конечный промежуток времени t_0. На самом деле, разумеется, этого не происходит: при $t \approx t_0$, когда газ становится релятивистским, наш «ньютоновск ий» подход перестает быть применимым.

Фронт волны теряет энергию со скоростью, определяемой уравнением (1). Поскольку плотность ее внутренней энергии порядка $\omega^2h^2c^2/G$, волна затухает на расстоянии

$$\begin{aligned}\ell_{\text{затух}} &\sim c\tau_{\text{Затух}} \sim \frac{\omega^2h^2c^3/G}{h^2\,(n_0kT)^{3/2}\,/\left(n_0^{1/2}m^{1/2}\ell\right)} \sim \\ &\sim \ell\left(\frac{c}{v_{\text{теплов}}}\right)^3\left(\frac{\omega^2}{Gmn_0}\right).\end{aligned}$$

Значение первого множителя в скобках приближается к единице для релятивистского газа; второй множитель становится равным единице для волны, частота которой равна «гравитационной плазменной частоте» данного газа.

Solution

18.16. Характерная для некоторого физического процесса мощность квадрупольного гравитационного излучения есTb

$$\left(G/c^5\right)|\ddot{Q}|^2 \sim \left(G/c^5\right) M^2 v^4/T^2$$

где M, v и T-соответственно масса, скорость и время, характерные для этого процесса. Удобно переписать это выражение в виде

$$P_{GW} \sim \frac{G}{c^5}\left(\frac{Mv^2}{T}\right)^2 \sim \frac{P^2}{3\cdot 10^{50} \ni \rho\rho/\mathrm{c}},$$

где $P \sim Mv^2/T$ - характерная «мощность» потока внутренней энергии.

Для взрыва с энергией E и характерным временем τ «вутренний поток мощности» есть E/τ. Если предположить, что этот «внутренний поток мощности» связан с достаточно эффективными механизмами гравитационного излучения, тогда в системе единиц, где $c = G = 1$, имеем [1)]

H

$$P_{GW} \sim (E/\tau)^2$$

$$E_{GW} \sim P_{GW}\tau \sim E^2/\tau$$

Типичный гравитон, излучаемый при таком взрыве, будет обладать энергией $\hbar\omega \sim \hbar/\tau$, так что число таких гравитонов будет порядка

$$N \sim \frac{E^2/\tau}{\hbar/\tau} = \frac{E^2}{\hbar} \sim \left(\frac{E}{10^{16}\mathrm{pr}}\right)^2$$

Решение 18.17. В данном случае движениями масс, порождающими гравитационные волны, являются соударения электронов с узлами решетки, рассеяние фотонов и т. п. Поскольку тепловые скорости электронов намного превосходят их дрейфовые скорости, характерная энергия одного соударения равна пс порядку величины kT. В соответствии с результатами анализа, проведенного в предыдущей задаче, мощность гравитационного излучения, генерируемого одним электроном, должна быть величиной порядка $(kT/\tau)^2$, где τ - среднее значение временного интервала между соударениями электрона с решеткой. Тогда полная энергия, излучаемая в виде гравитационных волн на протяжении номинального срока службы лампочки, должна быть равна

$$E_{GW} \sim N\left(\frac{kT}{\tau}\right)^2 T_L/\left(10^{59}\mathrm{pr/c}\right)$$

где N - число электронов проводимости в нити накала, а T_L - номинальное «время жизни» лампочки, составляющее приблизительно $4\cdot 10^6$с.

Частота типичного излучаемого гравитона должна быть равна примерно τ^{-1}, так что полное число таких гравитонов по порядку величины есть

$$n \sim \frac{E_{GW}\tau}{\hbar} \sim \frac{N}{\tau\hbar}\frac{(kT)^2 T_L}{1059\ \mathrm{p/c}}$$

Для электрической лампочки накаливания kT должно быть порядка 1 эВ, так как тепловое излучение приходится главным образом на видимый диапазон спектра, а примерные значения N и τ составляют соответственно 10^{17} электронов и 10^{-13}с. Подставляя эти значения, получаем, что полное число гравитонов, излученных за время номинального срока службы лампочки, порядка 10^{-19}.

Чтобы оценить число гравитонов, испускаемых разбивающейся лампочкой, мы предположим, что энергия падающей лампочки

Напомним, что в геометрически x единицах мощность - величина безраз. мерная. - Прим. перев. преобразуется в кинетическую энергию сотрясения, а затем вычислим результирующую мощность генерации гравитационных волн по формуле, приведенной в задаче 18.16. Если лампочка весит 20 г и падает с высоты 1 м, то приобретенная ею энергия составляет около 10^6 эрг. Предположим, что характерное время сотрясения составляет $0,1$с, так что в процессе сотрясения выделяется полная мощность 10^7 эрг/с. Если 10% этой величины связано с механизмом квадрупольных колебаний, то

$$P_{GW} \sim \frac{\left(10^6/c\right)^2}{10^{59}\vartheta\mathrm{pr}/c} \approx 10^{-47}\vartheta\mathrm{pr}/c$$

$$E_{GW} \sim P_{GW}\cdot 0,1\mathrm{c} \approx 10^{-48}\ \text{эрг.}$$

Тогда число гравитонов с энергией $\hbar\omega \sim \hbar/0,1\mathrm{c} \sim 10^{-26}$ эрг будет порядка 10^{-22}.

Solution

18.18. С точностью до первого члена линеаризованного приближения по гравитационному полю гамильтониан взаимодействия поля с системой, обладающей тензором энергии-импульса $T_{\mu v}$, есть

$$H = (8\pi G)^{1/2} T_{\mu v} h^{\mu v}$$

Мы будем использовать систему единиц, где $c = \hbar = 1$, так что $G^{1/2} = 1,616 \cdot 10^{-33}$. Для электрона. в атоме водорода

$$T_{\mu\nu} = m_e u_\mu u_v = \frac{p_\mu p_v}{m_e}$$

далее, поскольку мы работаем с $h^{\mu\nu}$ в поперечно-бесследовой калибровке,

$$h_{0\mu} = 0, h^{il}_{,j} = 0$$

и, следователіьно,

$$H = (8\pi G)^{1/3} \frac{p_i p_j h h^{ij}}{m_e}.$$

Так как гравитон обладает спином 2, распад обязан происходить в s-состояние. Матричный элемент для перехода из $3d$-состояния в 1s-состояние с испусканием гравитона с волновым вектором $\vec{k}$ и поляризацией λ (для право-циркулярной поляризации $\lambda = 1$, а для лево-циркулярной поляризации $\lambda = -1$) есть

$$T = \langle 1s; \vec{k}, \lambda | H | 3d; 0 \rangle$$

Теперь разложим $h^{i\prime}$ в ряд:

$$h^{il} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{(2\omega)^{1/2}} \sum_\lambda \left(e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{ij}_{k,\lambda} a_{k,\lambda} + e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{ij^*}_{k,\lambda} a^\dagger_{k,\lambda} \right)$$

Здесь ω - частота волны, а e^{ij} - поляризационный тензор. Операторы рождения и уничтожения, взятые в один и тот же момент времени, удовлетворяют перестановочным соотношениям
откуда следует

$$\left[a_{k,\lambda}, a^\dagger_{k',\lambda'} \right] = \delta^3 \left(\vec{k} - \vec{k}' \right) \delta_{\lambda\lambda'}$$

и

$$a_{k,\lambda} |0\rangle = 0$$

$$\vec{k}, \lambda \left| a^\dagger_{k',\lambda'} \right| 0 \Big\rangle = \delta^3 \left(\vec{k} - \vec{k}' \right) \delta_{\lambda\lambda'}.$$

Подставляя соотношения (4), (6) и (7) в выражение для матричного элемента (5), получаем

$$T = \frac{(8\pi G)^{\frac{1}{2}}}{m_e} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{(2\omega)^{1/i}} \left\langle 1s \left| e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} p_i p_j e^{ii^*}_{k,\lambda} \right| 3d \right\rangle.$$

Поскольку $kr \approx$ (1 эВ) $) \cdot 10^{-8}$ cm $\approx 10^{-4}$, мы можем положить приближенно $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 1$ (ср. так называемое дипольное приближение, иепользуемое при рассмотрении электромагнитных переходов). Тогда интенсивность перехода есть
$d\Gamma = 2\pi |T|^2 \times$ плотность конечных состояний для гравитона $= 2\pi |T|^2 \omega^2 d\Omega$
где $d\Omega$ - элемент телесного угла, в который испускается гравитон. Следовательно,

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} \frac{G\omega}{\pi m_e^2} \left| \left\langle 1s \left| p_i p_j e^{ij^*}_{k,\lambda} \right| 3d \right\rangle \right|^2$$

Матричный элемент в этом уравнении можно вычислить, если использовать явный вид волновых функций. Далее, так как спины электронов в начальном и конечном состояниях атома не наблюдаемы, мы возымем сумму по конечным спиновым состояниям и усредним по начальным спиновым состояниям. Проще всего это можно проделать, если ввести чисто спиновый оператор для спина 2:

$$Q_{l/} = p_i p_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} p^2$$

Так как $e_i = 0$, мы можем заменить в уравнении (10) $p_i p_j$ на Q_{ij}. Сферические компоненты Q_t имеют вид

$$Q_2 \equiv \frac{1}{2}\left(Q_{xx} - Q_{yy} + 2iQ_{xy}\right)$$
$$Q_1 \equiv \underline{Q_{zx} + iQ_{zy}}$$
$$Q_0 \equiv \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(Q_{zz} - \frac{1}{2}Q_{xx} - \frac{1}{2}Q_{yy}\right),$$
$$Q_{-1} \equiv Q_{zx} - iQ_{zy}$$
$$Q_{-2} \equiv \frac{1}{2}\left(Q_{xx} - Q_{yy} - 2iQ_{xy}\right)$$

Поскольку x - и y-компоненты e_λ^{ij} равны (для $\lambda = \pm 1$)
находим

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & \pm i \\ \pm i & -1 \end{bmatrix},$$
$$Q_{lj}e_\lambda^{lI^*} = \sqrt{2}Q_{-2\lambda}$$

Так как Q_σ обладает спином 2, то из теоремы Вигнера - Эккарта вытекает

$$\langle j_j m_j \left|Q_\sigma\right| j_i m_i\rangle = \langle j_j \| Q \| j_j\rangle \langle 2\sigma j_i m_i | j_j m_j\rangle$$

где «приведенная» матрица определяется следующим соотношением:

$$\langle j_j \| Q \| j_i\rangle = \sum_{m_j m_i \sigma} \frac{1}{2j_j+1}\langle 2\sigma j_l m_l | j_j m_j\rangle \langle j_j m_j \left|Q_\sigma\right| j_l m_l\rangle .$$

Здесь $\langle m_j j_l m_i | j_j m_j\rangle$ - коэффициент Клебша - Гордона. Таким образом, из уравнений (13) и (14), добавляя квантовое число n, получаем

$$\left|\left\langle n_j j_j m_j \left|Q_{ij}e^{ij^*}\right| n_i j_l m_l\right\rangle\right|^2 = 2\left|\langle n_j j_j \| Q \| n_l j_i\rangle\right|^2 \left|\langle 2 - 2\lambda j_l m_i | j_j m_j\rangle\right|^2 .$$

Теперь возьмем сумму по m_j и усредним по m_i, воспользовавшись соотношением
Отсюда

$$\frac{1}{2j_i+1}\sum_{m_i m_j}\left|\langle 2 - 2\lambda_i m_i | j_j m_j\rangle\right|^2 =$$
$$= \frac{1}{2j_l+1}\sum_{m_i m_j}\frac{2j_j+1}{5}\left|\langle j_j - m_j j_i m_i | 2 - 2\lambda\rangle\right|^2 = \frac{1}{5}\frac{2j_j+1}{2j_l+1}$$
$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{G\omega}{\pi m_e^2}\frac{2}{5}\frac{2j_j+1}{2j_i+1}\left|\langle n_j j_j | Q \| n_i j_i\rangle\right|^2 .$$

В этом выражении не учитываются поляризация гравитона и угол испускания; следовательно, полная интенсивность перехода получается путем умножения выражения (16) на 2 (для двух состояний поляризации) и на 4π (полный телесный угол). В результате находим

$$\Gamma = \frac{G\omega}{m_e^2}\frac{16}{5}\frac{2j_j+1}{2j_i+1}\left|\langle n_j j_j \| Q \| n_i j_i\rangle\right|^2 .$$

Приведенный матричный элемент можно вычислить из уравнения

$$P_{GW} \sim \frac{\left(10^6 \mathrm{pr/c}\right)^2}{10^{59}\vartheta \mathrm{pr/c}} \approx 10^{-47}\vartheta \mathrm{pr/c}$$
$$\langle 1s \| Q \| 3d\rangle = \frac{\langle 100 \left|Q_0\right| 320\rangle}{\langle 2020 | 00\rangle}.$$

В уравнении (18) коэффициент Клебша - Гордона равен единице. Из определений (11) и (12) следует

$$Q_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(p_z p_z - \frac{1}{3}p^2\right).$$

Член о p^2 не дает вклада в матричный элемент в правой части (18), так как не описывает связи между состояниями с $j = 0$ и $j = 2$. Поэтому

$$\langle 1s | Q | 3d\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}}\langle 100 \left|p_s p_z\right| 320\rangle .$$

Вообще говоря, для вычисления матричного элемента в (19) нужно было бы ввести полное множество состояний, а затем представить его как сумму членов вида

$$\langle 100\,|p_z|\,n\rangle\,\langle n\,|p_z|\,320\rangle\,.$$

Однако можно воспользоваться тем фактом, что волновая функция $|100\rangle$ чрезвычайно проста, и, произведя замену

$$p_z \to -i\partial/\partial z,$$

непояредственно подействовать оператором

$$p_2^2 \to -\partial^2/\partial z^2 = -\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) =$$
$$= -\left(\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

на сферически-симметричное $|100\rangle$-состояние. Тогда будем иметь

$$\left\langle 320\left|p_2^8\right|100\right\rangle = -\int\limits_0^\infty r^2dr\int\limits_0^\pi\sin\theta d\theta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\frac{\left(3\cos^2\theta-1\right)}{a^{\frac{3}{2}}}\times$$
$$\times\frac{2(30)^{\frac{1}{2}}}{965}\left(\frac{r}{a}\right)^8 e^{-r/3a}\left(\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{2}{a^{\frac{3}{2}}}e^{-rl^2a} =$$
$$= \frac{-V^6}{191a^6}\int\limits_0^\infty drr^b e^{-\frac{4r}{3a}}\int\limits_0^\pi\sin\theta d\theta\left(3\cos^2\theta-1\right)\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}-\frac{\sin^2\theta}{ra}\right) =$$
$$= \frac{V^6}{191a^a}\frac{8}{15}\int\limits_0^\infty dre^{-\frac{4r}{3a}}\left(\frac{r^8}{a^9}+\frac{r}{a}\right) = -\frac{1}{a^2}\frac{V^6\cdot 8\cdot 243\cdot 57}{191\cdot 15\cdot 2\cdot 25}\Bigg) = -\frac{0,19}{a^2},$$

где $a = (m_e\alpha)^{-1}$ - боровский радиус, а $\alpha = 1/137$ - постоянная тонкой структуры. Окончательно получаем

$$\Gamma = \frac{G\omega}{m_9^2}\cdot\frac{16}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{(0,19)^2}{a^4} = 0,36Gm_6^2\omega\alpha^4.$$

Для перехода $3p \to 1s$ имеем $Gm_e^2 = 1,75\cdot 10^{-45}$ и $\omega = 12$ эВ, откуда и находим искомое время жизни $\Gamma^{-1} = 1,9\cdot 10^{38}$с.

Решежие 18.19. Звезда и испускаемый ею поток тепловых гравитонов являются сферически-симметричными только в смысле усреднения по времени. Поскольку вещество внутри звезды состоит из субатомных частиц, ясно, что в данный момент времени звезда может быть сферически-симметричной с точки зрения астронома, но не с точки зрения математика, предъявляющего к понятию симметрии гораздо более строгие требования. По мнению последнего, звезда обладает на уровне атомных масштабов тонкозернистой структурой, поэтому любые теоремы о симметрии неприменимь. Разумеется, эти мелкомасштабные неоднородности в распределении частиц зависят от времени, что и приводит к генерации гравитационного (и электромагнитного!) излучения.

Мультипольность потока связана с масштабом угловой асимметрии потока. (Это утверждение нельзя смешивать ни с тем фактом, что генерация гравитационных волн является локально квадрупольной, ни с тем, что усредненный по времени поток является монопольным, т. е. изотропным.) Для такой звезды, как наше Солнце, большая часть потока гравитонов генерируется в плотном $\left(50\text{r/cm}^3\right)$ высокотемпературном $\left(10^7\text{ K}\right)$ ядре звезды. Если принять, что характерный радиус этого ядра составляет четверть радиуса Солнца, т. е. около $2\cdot 10^{10}$ cm, а среднее расстояние между частицами вещества (как показывают оценки плотности) порядка 10^{-8} cm, то получится, что угловой масштаб асимметрии составляет по порядку величины $\sim 10^{-18}$ радиан. При разложении в ряд по сферическим гармоникам для структуры, характеризующейся "зернистостью» по углу порядка 10-18 радиан, требуется, чтобы число значений ℓ также было порядка 10^{18}.

Следовательно, в смысле существования подобной мелкозернистости поток гравитационного излучения характеризуется мультипольностью порядка $2^{10^{18}}$.

Solution

18.20. В почти инерциальной системе координат, начало которой помещено в центр масс, влияние тензора Римана, как следует из уравнения расхождения геодезических, сводится к ускорению свободных пробных частиц таким образом, что

$$\frac{d^2x^J}{dt^2} = -R_{j0k0}x^k.$$

Мы опустили здесь зависящие от скорости члены типа «магнитного поля», меньшие по величине в c/v раз (см. решение задачи 18.14). Из этого уравнения видно, что тензор Римана приводит к появлению продольных эффектов в том и только в том случае, если один из пространственных индексов в R_{j0k0} есть z (направ- ление распространения волны). Отсюда следует, что Ψ_i, Ψ_3, $\bar{\Psi}_3$ обладают продольнымй эффектами, а $\Psi_4, \bar{\Psi}_4$ и Φ_{22} являются чисто поперечными.

Чтобы исследовать спин волн, выполним преобразование от координат x, yk координатам x', y', повернутым относительно оси z в положительном направлении на угол φ. При этом компоненты тензора Римана преобразовываются следующим образом:

$$R_{x'0'z'0'} = R_{x0z0}\cos\varphi + R_{y0z0}\sin\varphi,$$
$$R_{x'0'x'0'} = R_{x0x0}\cos^2\varphi + R_{y0y0}\sin^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi R_{x0y0}$$

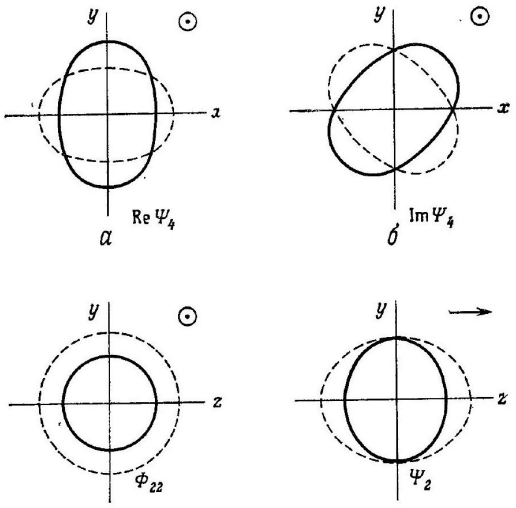
и т. П. Нз вида преобразования компонент тензора Римана легко получить законы преобразования для определенных в нашей задаче типов волн:

$$\Psi_{2'} \equiv -\frac{1}{6}R_{z'0'z'0'} = -\frac{1}{6}R_{z0z0} = \Psi_2,$$
$$\Psi_{3'} = e^{i\varphi}\Psi_3, \quad \bar{\Psi}_{3'} = e^{-i\varphi}\Psi_3,$$
$$\Psi_{4'} = e^{2i\varphi}\Psi_4, \quad \bar{\Psi}_{4'} = e^{-2i\varphi}\bar{\Psi}_4,$$
$$\Phi_{2'z'} = \Phi_{22}.$$

Поскольку Ψ_2 и Φ_{22} не меняются при поворотах относительно оси z, эти волны являются скалярными (спин 0). Для Ψ_3 и $\bar{\Psi}_3$ поворот на 180° возвращает волну в прежнее состояние поляризации (например, чисто действительное), так что этим символам должны соответствовать волны со спином 1. Чтобы возвратить волны Ψ_4 и $\bar{\Psi}_4$ в прежнее состояние поляризации, необходимо повернуть их всего лишь на 90°, отсюда следует, что этим волнам соответствует спин 2. Фактически все рассматриваемые нами типы волн соответствуют в общей теории относительности волнам, поляризованным по кругу.

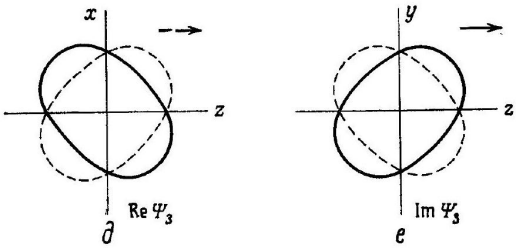
Решение 18.21. На фиг. 33 изображены шесть типов поляризации слабых, плоских, распространяющихся в пустоте гравитационных волн, допустимых в классе метрических теорий тяготения. Там же представим смещение, которое каждый тип волн вызывает в сфере пробных частиц. Волна распространяется в положительном направлении оси $+z$ (что показано стрелкой в правом верхнем углу графиков) и обладает зависимостью от времени вида $\cos\omega t$. Сплошные линии соответствуют моменту времени $\omega t = 0$, пунктирные линии - моменту $\omega t = \pi$; смещения, перпендикулярные к плоскости фигуры, отсутствуют. Все приведенные схематические изображения получены с помощью уравнения расхождения геодезических

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} \approx x^j R^k_{0j0}.$$



В

2



Фиг. 33.

Solution

18.22. Вид функции H определяется уравнениями поля в пустоте

$$R_{\alpha\beta} = 0.$$

Мы вычислим вначале символы Кристоффеля из лагранжиана для геодезических (см. задачу 7.25):

$$L = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{u}\dot{v} + 2H\dot{u}^2$$

Из уравнения Эй лера - Лагранжа
находим

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

откуда

$$\ddot{x} + H_{,x}\dot{u}^2 = 0$$

Аналогично из

$$\Gamma^x uu = H_{,x}$$

следует

$$\ddot{y} + H_{,y}\dot{u}^2 = 0$$

$$\Gamma_{uu} y = H_{,y}$$

а из $u = 0$ вытекает

$$\Gamma_{\alpha\beta\alpha\beta} = 0.$$

Из

$$\ddot{v} - 2H_{,u}\dot{u}^2 - 4H_{,x}\dot{x}\dot{u} - 4H_{,y}\dot{y}\dot{u} = 0$$

получаем

$$\Gamma^v_{uu} = -2H_{,u}; \Gamma^v_{xu} = -2H_{,x}; \Gamma^v_{yu} = -2H_{,y}.$$

Все остальные коэффициенты связности равны нулю. Таким образом, в выражение для тензора Риччи (см. [1], уравнение 8.51б)

$$R_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\mu} - (\ln\sqrt{-g})_{\alpha\beta} + (\ln\sqrt{-g})_{,\mu}\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\Gamma^\sigma_{\alpha\mu}$$

вклад дает только первый член (обратите внимание, что $\sqrt{-g} = 1$). В результате находим, что единственная не равная нулю компонента $R_{\alpha\beta}$ есть

$$R_{uu} = H_{,xx} + H_{,yy}$$

Следовательно, уравнениям поля будет удовлетворять любая функция, гармоническая по x и y. Для плоской волны функция H квадратична по x и y, так что (покажите это в качестве упражнения!) тензор Римана есть функция только от и не обладает особенностями на плоскости xy.

13.5.13 Problems about Basics of Cosmology 1

Реиение 19.1.

Рассматриваемые в задаче ньютоновские уравнения имеют вид $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$ (уравнение для гравитационного потенциала), (1) $\partial\rho/\partial t + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0$ (уравнение непрерывности), $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla\Phi$ (уравнение движения).

Если Вселенная статична и однородна, то $\vec{v} = 0$, а ρ и p постоянны во времени и пространстве. Тогда решение уравнения (1) ectb

$$\Phi = \frac{2}{3}\pi G\rho(\vec{r}\cdot\vec{r}) + \vec{C}\cdot\vec{r} + K$$

где $\vec{C}$ и K - произвольные постоянные интегрирования, а $\vec{r}$ - радиус-вектор, проведенный из произвольно выбранного начала координат. Левая часть уравнения (2) равна нулю тождественно. Однако уравнение (3) не удовлетворяется: левая его часть равна нулю в силу того, что $\vec{v} = 0$, а в правой части ∇p равно нулю нз-за условия однородности, но $\nabla\Phi$ не может быть тождественно обращено в нуль никаким выбором $\vec{C}$ и K. Следовательно, данная система уравнений не имеет решений, обладающих требуемыми свойствами.

Решение 19.2. Поскольку пространство-время является всюду изотропным, оно, в частности, сферически-симметрично относительно некоторого несингулярного наблюдателя. Но по теореме Биркгофа (задача 16.3) единственным сферически-симметричным вакуумным решением является метрика Шварцшильда, а единственным случаем, когда метрика этого типа регулярна в начале координат - где и находится наш наблюдатель, - является случай $M = 0$, т. е. плоское пространство Минковского.

Solution

19.3. По теореме Лиувилля плотность числа фотонов в фазовом пространсгве I_v/v^3 постоянна вдоль траектории светового луча и является также (см. задачу 5.10) лоренц-инвариантной величиной. Тогда, воспользовавшись определением

$$(v_{\text{и зл}}\,/v_{\text{набл}}\,) = 1 + z,$$

будем иметь

Наблюдаемый поток $= \Omega\int I_v^{\text{набл}}\,dv_{\text{набл}} = \Omega\int\left(\frac{I_v^{\text{набл}}}{v^3_{\text{набл}}}\right)v^3_{\text{набл}}\,dv_{\text{набл}} =$

$$= \Omega\int\frac{I_v^{\text{изл}}}{v^3_{\text{иэл}}}\frac{v^3_{\text{изл}}\,dv_{\text{изл}}}{(1+2)^4} =$$

$$= \frac{\Omega}{(1+z)^4}\int I_v^{\text{изл}}\,dv_{\text{нзл}} = \frac{\Omega}{(1+z)^4}\frac{1}{\pi}\sigma T^4,$$

где σ - постоянная Стефана- Больцмана. Обратите внимание, что, так как испытавший красное смещение чернотельный спектр также является некоторым чернотельным спектром, наблюдаемые нами спектр и поток излучения выглядят так, как будто они приходят k нам от расположенного поблизости стационарного объекта, температура которого есть $T/(1+z)$, а излучение заполняет телесный угол Ω для земного наблюдателя.

Все сказанное выше не зависит от того, является ли красное смещение гравитационным, космологическим или обусловленным эффектом Доплера, так как теорема Лиувилля справедлива в общем случае.

Решение 19.4. Из условия однородности следует, что скалярная кривизна R гиперповерхности должна быть постоянной. Величину R можно найти, либо подставляя конкретные значения в формулы задачи 9.20, либо же из формулы

$$R_{ij} = \Gamma^k_{ij,k} - \left(\ln|g|^{1/2}\right)_{,ij} + \Gamma^k_{ij}\left(\ln|g|^{1/2}\right)_{,k} - \Gamma^k_{im}\Gamma^m_{jk},$$

где $|g|^{1/2} = a^3 f r^2\sin\vartheta$, а символы Кристоффеля Γ находятся или из лагранжиана для геодезических, или так, как в задаче 7.6. В результате получаем

$$\begin{aligned} R_{\vartheta\vartheta} &= \Gamma^r_{\vartheta\vartheta,r} - (\ln(\sin\vartheta))_{,\vartheta\vartheta} + \Gamma^r\vartheta\vartheta\left(\ln fr^2\right),r - \Gamma^\varphi_{\vartheta\varphi}\Gamma^\varphi_{\theta\varphi} - 2\Gamma^\vartheta_{\vartheta r}\Gamma^r_{\vartheta\vartheta} = \\ &= -\left(rf^{-2}\right),r + \operatorname{cosec}^2\vartheta - r^{-1}f^{-3}\left(r^2 f\right),r - \operatorname{ctg}^2\vartheta + 2f^{-2} = \\ &= \left[r^2\left(1-f^{-2}\right)\right],r(2r)^{-1}. \end{aligned}$$

Поскольку

а в силу изотропии

$$R_{\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}} = R_{\vartheta\vartheta}\left(a^2r^2\right)^{-1}$$

получаем

$$R_{\hat{r}\hat{r}} = R_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = R_{\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}}$$

$$R = R_{\hat{r}\hat{r}} + R_{\hat{\vartheta}\hat{\vartheta}} + R_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = 3\left[r^2\left(1 - f^{-2}\right)\right]_{,r}\left(2a^2r^3\right)^{-1} \equiv A$$

откуда

$$r^2\left(1 - f^{-2}\right) = Br^4 + C$$

Так как $f \to 1$ при $r \to 0$, имеем $C = 0$. Следовательно,

$$f^2 = \left(1 - Br^2\right)^{-1}.$$

Если $B \neq 0$, мы можем выбрать масштаб r, полагая $r' = |B|^{\frac{1}{2}}r$. Тогда метрика с радиальной координатой r' примет как раз требующийся нам вид.

Ретение 19.5.

а) Пусть

Тогда

$$r = \begin{cases} \sin\chi, & k = +1 \\ \chi, & k = 0 \\ \operatorname{sh}\chi, & k = -1 \end{cases}$$

$$dr = \begin{cases} \cos\chi d\chi \\ d\chi \\ \operatorname{ch}\chi d\chi \end{cases}$$

Н

$$\frac{dr^2}{1 - kr^2} = \begin{cases} d\chi^2 \\ d\chi^2 \\ d\chi^2 \end{cases}$$

Окончательно имеем

$$\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 = d\chi^2 + \Sigma^2(\chi)d\Omega^2$$

где

$$\Sigma^2(\chi) = \begin{cases} \sin^2\chi, & k = +1 \\ \chi^2, & k = 0 \\ \operatorname{sh}^2\chi, & k = -1 \end{cases}$$

б) Определим преобразование от переменной t к переменной с помощью соотношения

Тогда

$$dt = R(\eta)d\eta$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + R^2(t)\left(d\chi^2 + \Sigma^2 d\Omega^2\right) = \\ &= R^2(\eta)\left(-d\eta^2 + d\chi^2 + \Sigma^2 d\Omega^2\right). \end{aligned}$$

Решение 19.6. Из метрики Робертсона - Уокера, записанной в «тригонометрическом» виде, следует, что метрика для пространственно-подобных 3-поверхностей имеет вид

$$d\sigma^2 = a^2\left[d\chi^2 + \sin^2\chi\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)\right]$$

По аналогии с метрикой для 2-сфер легко догадаться, что эту метрику можно представить как 3-сферу, погруженную в евклидово 4-пространство с декартовыми координатами W, X, Y, Z. В частности, если мы положим

$$\begin{aligned} W &= a\cos\chi, \\ Z &= a\sin\chi\cos\vartheta, \\ X &= a\sin\chi\sin\vartheta\cos\varphi, \\ Y &= a\sin\chi\sin\vartheta\sin\varphi \end{aligned}$$

(что удовлетворяет соотношению $A^2 = W^2 + Z^2 + X^2 + Y^2$), то метрика примет вид

$$d\sigma^2 = dW^2 + dZ^2 + dX^2 + dY^2$$

В евклидовом 4-пространстве можно найти две плоскости (например, XY и WZ), которые пересекаются только в начале координат ($a = 0$). Следовательно, поворот плоскости XY меияет все координаты X и Y, за исключением начала координат, и оставляет неподвижными все координаты W и Z; для поворотов в плоскости WZ дело обстоит наоборот. Таким образом, комбинация двух таких поворотов не оставляет ни одной неподвижной точки, за исключением начала координат, и (для ненулевого a) переводит все точки 3-сферы в отличные от них точки.

Solution

19.7. Предположим, что пуля пролетает мимо наблюдателя в некоторой локальной собственной системе отсчета с собственной скоростью V. После того как она продвинулась еще на собственное расстояние dr, пуля пролетает мимо космологического наблюдателя, чья скорость относительно первой собственной системы равна

$$\delta V = Hdr = HVdt = \frac{\dot{R}}{R}Vdt = V\frac{dR}{R}$$

Этот наблюдатель, измеряя скорость пули, получает (в соответствии с формулой сложения скоростей) значение

$$V' - \frac{V-\delta V}{1-V\delta V} = V - \left(1-V^2\right)\delta V + \mathscr{O}(\delta V)^2 = V - \left(1-V^2\right)V\frac{dR}{R} + \mathscr{O}(\delta V)^2.$$

Отсюда имеем уравнение

$$dV/dR = -\left(1-V^2\right)V/R$$

проинтегрировав его, находим ответ:

$$\gamma V \equiv \left(1-V^2\right)^{-\frac{1}{9}}V = \text{ const }/R = \text{ const } \cdot (1+z).$$

Следовательно, V_1 и V_2 связаны соотношением

$$\gamma_2 V_2/\gamma_1 V_1 = (1+z)^{-1}$$

Для частицы с ненулевой массой покоя этот результат означает, что релятивистский импульс по мере расширения Вселенной убывает (испытывает «красное смещение») обратно пропорцнонально $(1+z)$. Для фотона в пределе $V \to 1$ имеем $\gamma V \to hv$, и наш результат сводится к обычной формуле для красного смещения. Обратите внимание, что мы не учли эффект замедления пули, обусловленный гравитационным притяжением космологического вещества, покоящегося в собственной системе отсчета. Читатель может самостоятельно проверить, что это эффект более высокого порядка и для него $dV \sim dr^2$, так что он не влияет на вид дифференциального уравнения для dV/dR.

Solution

19.8. Запишем сначала метрику в координатах η, x (третий вариант записи в задаче 19.5):

$$ds^2 = R^2(\eta)\left[-d\eta^2 + d\chi^2 + \Sigma^2(\chi)d\Omega^2\right],$$

где $\Sigma(x) = \operatorname{sh}\chi, \chi, \sin\chi$ для $k = -1, 0, +1$ соответственно. Поскольку при конформных преобразования похраняются неизменнными световые конусы, представляется естественным перейти в качестве первого шага к изотропным координатам, например

$$u = \frac{1}{2}(\eta + \chi)$$
$$v = \frac{1}{2}(\eta - \chi).$$

Тогда метрика приобретает вид

$$ds^2 = R^2(u+v)\left[-4dudv + \Sigma^2(u-v)d\Omega^2\right].$$

Воспользуемся теперь преобразованием, которое сохраняло бы, во-первых, «изотропность» координат, а во-вторых, симметрию между и v :

$$\alpha = g(u), \quad u = f(\alpha),$$
$$\beta = g(v), \quad v = f(\beta),$$

где g - функция, обратная f. После такого преобразования выражения для интервала (3) получаем

$$ds^2 = R^2(u+v)\left[-4f'(\alpha)f'(\beta)d\alpha d\beta + \Sigma^2(u-v)d\Omega^2\right] =$$
$$= R^2(u+v)f'(\alpha)f'(\beta)\left[-4d\alpha d\beta + \frac{\Sigma^2(u-v)}{f'(\alpha)f'(\beta)}d\Omega^2\right].$$

Если метрика должна быть конформно-плоской, член в квадратных скобках должен иметь такой же вид, как для плоского про. странства, т. е. $\left[-4d\alpha d\beta + (\alpha-\beta)^2 d\Omega^2\right]$. Если воспользоваться функцией

$$f'(\alpha) = du/d\alpha = (d\alpha/du)^{-1} = [g'(u)]^{-1},$$

то условие это можно записать:

$$g'(u)g'(v)[\Sigma(u-v)]^2 = [g(u)-g(v)]^2$$

Для $k=0$ имеем

$$\Sigma(u-v) = u-v$$

так что путем непосредственной подстановки можно убедиться, что функция $g(x)=x$ удовлетворяет условию (6). Для двух других случаев из уравнения (6) можно найти сначала решение для координаты v, мало отличающейся от u, т. е. для $v=u+\varepsilon$. Разлагая уравнение (6) в ряд Тейлора, получаем

$$(g')^2\left[1+\varepsilon g''/g' + \varepsilon^2 g'''/(2g')\ldots\right]\varepsilon^2\left(1-k\varepsilon^2/6\ldots\right)^2 =$$
$$= \varepsilon^2 (g')^2\left[1+\varepsilon g''/(2g') + \varepsilon^2 g'''/(6g')\ldots\right]^2,$$

так что, полагая $p=g'$ и $q=p'$, для случая $k=+1$ мы приходим к уравнению

$$2qdq/dp - 4p = 3q^2/p$$

Это дифференциальное уравнение есть уравнение Бернулли; его решение имеет вид

$$q = p(Ap-4)^{1/2}, a = \text{ const.}$$

Интегрируя дважды, получаем

$$u + B = \operatorname{arctg}(Ap/4-1)^{\text{z}/}$$
$$g(u) = C\operatorname{tg}(u+B) + D.$$

Непосредственно подставляя в уравнение (6) это решение, можно проверить, что фактически оно представляет собой общее решение уравнения (6). Не теряя общности, мы можем положить $g = \operatorname{tg} u$. Для случая $k=-1$ аналогично можно найти $g = \operatorname{th} u$. Если подставить эти решения, то уравнение (6) превращается в два тригонометрических тождества:
$\sec u \sec v \sin(u-v) = \operatorname{tg} u - \operatorname{tg} v$, $\operatorname{sech} u \operatorname{sech} v \operatorname{sh}(u-v) = \operatorname{th} u$ - $\operatorname{th} v$,
а метрика (5) приобретает вид
или

$$ds^2 = \frac{R^2[\operatorname{arctg}\alpha + \operatorname{arctg}\beta]}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}\left[-4d\alpha d\beta + (\alpha-\beta)^2 d\Omega^2\right]$$

$$ds^2 = \frac{R^2[\operatorname{Arth}\alpha + \operatorname{Arth}\beta]}{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}\left[-4d\alpha d\beta + (\alpha-\beta)^2 d\Omega^2\right]$$

В такой заптси ясно видно, что она является конформно-плоской. Для конформно-плоской метрики тензор Вейля тождественно равен нулю, так что тензор Римана состоит только из тензора Риччи и скалярной кривизны (см. введение к гл. 9):

$$R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = 2\delta_{\left[\alpha_{[\gamma}\right.} R^{\beta}{}_{\left.\delta]\right]} - \frac{1}{3}\delta^{\left[\alpha_{[\gamma}\delta\beta\right]}\delta_{\delta]}\Big]$$

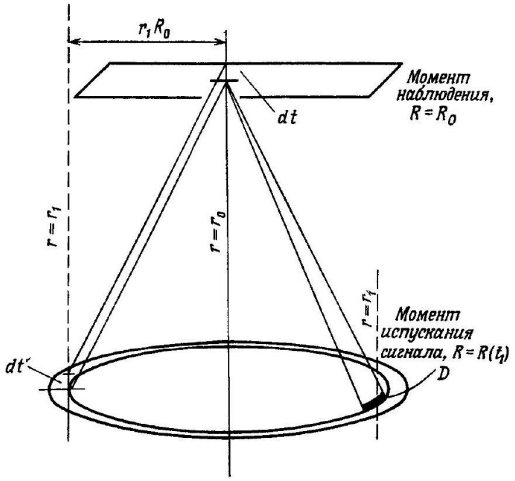
Эта формула совместно с уравнением Эйнштейна

$$R^{\alpha}_{\beta} = 8\pi\left(T^{\alpha}_{\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha}_{\beta}T\right)$$

и выражением для тензора энергии-импульса

$$T^{\alpha_\beta}_{\beta} = (\rho+p)u^{\alpha}u_{\beta} + pg^{\alpha}$$

дает искомое выражение $R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$ через $g_{\mu\nu}, u^{\mu}, \rho$ и p.
Реuение 19.9. Если физический размер объекта есть D, а стягиваемый им с точки зрения земного наблюдателя плоский



Фиг, 34.

угол равен δ, то $d_A \equiv D/\delta$. Если воспользоваться метрикой Робертсона-Уокера, то из фиг. 34 видно, что $D = R(t) r_1 \delta$, откуда

$$d_A = r_1 R(t_1).$$

Если объект движется перпендикулярно лучу зрения с собственной скоростью V, а видимая скорость углового движения есть $d\delta/dt$, ro

$$d_M = V/(d\delta/dt)$$

Пусть t' - промежутки времени, измеряемые в момент испускания фотонов. Так как $V = d(R(t_1) r_1 \delta)/dt'$, а $dt'/dt = R(t_1)/R_0$ из-за космологического красного смещения и, кроме того, $R(t_1)$ можно рассматривать как постоянную величину, поскольку ее изменение не приводит к появлению движений, поперечных к лучу зрения, мы получаем

$$d_M = R_0 r_1$$

Если объект обладает истинной светимостью L, а мы наблюдаем поток ℓ, то

$$d_L \equiv (L/4\pi l)^{1/2}$$

За время dt' объект излучает энергию Ldt'.К настоящему времени это излучение испытало красное смещение, описываемое отношением $R(t_1)/R_0$, и в момент наблюдения распределено по сфере, собственная площадь поверхности которой есть $4\pi (r_1 R_0)^2$ (см. фиг. 34). Следовательно,

u

$$\ell = (Ldt' R/R_0)(4\pi r_1 R_0)^{-2}/dt$$

$$d_L = Ror_1/R(t_1)$$

Используя соотношение

$$R_0/R(t_1) = 1 + 2$$

приходим к искомому результату

$$(1+z)^2 d_A = (1+z) d_M = d_L$$

Решение 19.10. При решении задачи 19.19 мы нашли

$$d_L = Ror_1/R(t_1)$$

где r_1 - радиальная координата объекта, а $R(t_1)$ - масштабный фактор в момент испускания света t_1. Так как $H_0 = \dot{R}/R$, а $q_0 = \equiv -\ddot{R}R/\dot{R}^2$, первые члены в разложении $R(t)$ в степенной ряд имеют вид

$$R(t) = R_0 \left(1 + H_0 (t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \ldots\right)$$

Мы можем исключить $R(t_1)$ из выражения для d_L, используя сортношение $R_0/R(t_1) = 1 + 2$, но нам нужно будет еще найти выражения для R_0 и r_1. Чтобы получить траекторию световых лучей в метрике Робертсона - Уокера, положим $ds^2 = 0$. Тогда ПОЛУИМ

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}}$$

Используя для $R(t)$ выражение (1) [с точностью до двух низших порядков по $(t_0 - t_1)$] при выполнении интегрирования в уравнеНиИ (2), иМееМ

$$r_1 = \frac{1}{R_0}\left[(t_0 - t_1) + \frac{1}{2}H_0 (t_0 - t_1)^2 + ...\right]$$

Определяя $(t - t_0)$ из уравнения (1) и выражая через $1 + z = R_0/R(t_1)$, окончательно находим отКуда

$$R_0 r_1 = \frac{1}{H_0}\left[z - \frac{1}{2}(1 + q_0) z^2 + ...\right]$$

$$d_L = (1 + z)R_0 r_1 = \frac{1}{H_0}\left[z + \frac{1}{2}(1 - q_0) z^2 + ...\right]$$

или в эквивалентной записи

$$\ell = \frac{L}{4\pi d\xi} = \frac{LH_0^8}{4\pi z^2}\left[1 + (q_0 - 1) z + ...\right]$$

Ремение 19.11.
а) Пусть $n(t_1)$ - число источников в единице объема в момент времени t_1. Элемент объема записывается в виде

$$\left|^{(3)} g\right|^{1/2} dr_1 d\theta_1 d\varphi_1 = R^3 (t_1)(1 - kr_1)^{-1/2} r_1^2 dr_1 \sin\theta_1 d\theta_1 d\varphi_1$$

Следовательно, число источников в слое между r_1 и $r_1 + dr_1$ в момент времени t_1 есть

$$dN = 4\pi R^3 (t_1)\left(1 - kr_1^2\right)^{-1/2} r_1^2 n(t_1) dr_1$$

Величины r_1 и t_1 связаны друг с другом уравнением распространения световых лучей в метрике Робертсона - Уокера [уравнение (2) в решении задачи 19.10], т. е. $r_1 = r(t_1)$, где

$$dr_1 = \left(1 - kr_1^8\right)^{\frac{1}{2}} dt_1/R(t_1)$$

Таким образом, нмеем
И

$$dN = 4\pi R^2 (t_1) r^2 (t_1) n(t_1) |dt_1|$$

$$N(z) = \int_{t_z}^{t_0} 4\pi R^2 (t_1) r^2 (t_1) n(t_1) dt_1$$

где t_z - космологическое время, соответствующее красному смещению z; оно определяется в неявном виде с помощью соотношения

$$\frac{R(t_z)}{R(t_0)} = \frac{1}{1 + z}$$

Поскольку плотность числа источников сохраняется, имеем

$$n(t)R^3(t) = \text{ const}$$

[это равенство вытекает из $(nu^\mu)_{;\mu} = 0$]. Следовательно,

$$N(z) = 4\pi n(t_0) R^3 (t_0) \int_{t_z}^{t_0} R^{-1} (t_1) r^2 (t_1) dt_1.$$

Если z мало, то $t_0 \approx t_z$, и мы можем воспользоваться разложениями

$$R(t_1) = R(t_0)\left[1 - H_0 (t_0 - t_1) + ...\right],$$
$$r(t_1) = \frac{t_0 - t_1}{R(t_0)}\left[1 + \frac{1}{2}H_0 (t_0 - t_1) + ...\right]$$

[см. решение задачи 19.10, уравнения (1) и (3)]. Таким образом, для малых z

$$N(z) = 4\pi n(t_0) \int_{t_z}^{t_0} (t_0 - t_1)^2 [1 + 2H_0(t_0 - t_1) + ...]\, dt_1 =$$

$$= \frac{4\pi}{3} n(t_0)(t_0 - t_z)^3 \left[1 + \frac{3}{2} H_0(t_0 - t_z) + ...\right].$$

Чтобы из уравнения (1) определить $t_0 - t_z$ с точностью до $\mathscr{O}(z^2)$, нам необходим следующий член в уравнении (2):

$$R(t_z) = R(t_0) \left[1 - H_0(t_0 - t_z) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t_0 - t_z)^2 + ...\right]$$

В результате получим
и, наконец,

$$H_0(t_0 - t_z) = z\left[1 - z\left(1 + \frac{q_0}{2}\right) + ...\right]$$

$$N(z) = \frac{4\pi}{3} \frac{n(t_0)}{H_0^3} z^3 \left[1 - \frac{3}{2} z(1 + q_0) + ...\right]$$

Заметьте, что с точностью до данного порядка по z оказалось возможным обойтись без уравнений поля.

б) Регистрируемый на Земле поток излучения есть

$$S = \frac{LR^2(t_1)}{4\pi r_1^2 R^4(t_0)}$$

(см. задачу 19.9, где S обозначалось через ℓ). Следовательно, как и в П. «а», имеем

$$N(S) = \int_{t_S}^{t_0} 4\pi R^2(t_1) r^2(t_1) n(t_1)\, dt_1,$$

где при подстановке нижнего предела интегрирования справедливо соотношение

$$\frac{r^2(t_s)}{R^2(t_s)} = \frac{L}{4\pi S R^4(t_0)}$$

получающееся из формулы (3). Когда излучение S велико, то разность $t_0 - t_S$ мала, и разложение интеграла (4), как и в п. «а», дает

$$N(S) = \frac{4\pi}{3} n(t_0)(t_0 - t_S)^3 \left[1 + \frac{3}{2} H_0(t_0 - t_S) + ...\right].$$

Подставляя разложения для $r(t_s)$ и $R(t_s)$ в уравнение (5), получаем
откуда

$$t_0 - t_S = \left(\frac{L}{4\pi S}\right)^{1/2} \left[1 - \frac{3}{2} H_0 \left(\frac{L}{4\pi S}\right)^{1/2} + ...\right]$$

$$N(S) = \frac{4\pi}{3} n(t_0) \left(\frac{L}{4\pi S}\right)^{3/2} \left[1 - 3H_0 \left(\frac{L}{4\pi S}\right)^{1/2} + ...\right]$$

13.5.14 Problems about Basics of Cosmology 2

Solution

19.12. Выберем новую радиальную координату χ, определяемую соотношением

$$d\chi^2 = dr^2/(1 - kr^2)$$

Тогда для фотона, распространяющегося вдоль радиуса, $d\theta = d\varphi = 0$, а метрические коэффициенты вдоль траектории не зависят от χ. Следовательно, χ-циклическая координата и $p_\chi = \text{const}$ вдоль траектории луча (см. задачу 7.13). Поднимая этот индекс с помощью метрического тензора, получаем

$$p^\chi = C/R^2(t)$$

где C - некоторая постоянная. Но
откуда

$$p^{\chi} = d\chi/d\lambda$$

$$d\lambda = C^{-1}R^2(t)d\chi = C^{-1}\frac{R^2(t)dr}{(1-kr^2)}$$

Обратите внимание, что, поскольку R–-ункция t, она является также функцией r вдоль световой линии прошлого.

Solution

19.13. В сопутствующей ортонормированной системе координат имеем

$$T_{\hat{0}}^{\hat{0}} = -\rho \text{ и } T_{\hat{r}}^{\hat{r}} = T_{\hat{\varphi}}^{\hat{\varphi}} = T_{\hat{\theta}}^{\hat{\theta}} = p$$

Следовательно, тензор энергии-импульса «с обратным следом» $\overline{\mathrm{T}}$ обладает компонентами (см. задачу 13.14)

$$1_{\hat{0}}^{\hat{0}} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p) \text{ и } \hat{T}_{\hat{i}} = \frac{1}{2}(\rho - p).$$

Приравняем его тензору Риччи, умноженному на $1/8\pi G$. Компоненты тензора Риччи можно вычислить, например, из результатов задачи 9.20 (сферически-симметричная метрика общего вида). Они равны

$$\hat{R}_{\hat{0}} = 3\ddot{R}/R,$$
$$R^{\hat{i}}{}_{\hat{\gamma}} = \frac{1}{R^2}\left(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k\right).$$

Отсюда немедленно следуют искомые уравнения. Если бы мы воспользовались другим, эквивалентным методом и приравняли $8\pi T_{\mu v}$ тензору Эй нштейна $G_{\mu v}$ (представляющему собой тензор Риччи с обратным следом), то получили бы две линейные комбинации выписанных выше уравнений.

Solution

19.14. Первое уравнение получается просто путем исключения $\ddot{R}$ из системы уравнений задачи 19.13. Второе искомое уравнение получается из него после использования тождества

$$\frac{1}{2}d\left[(\dot{R})^2\right]/dR = \not{R}$$

и уравнения (1) из задачи 19.13:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dR}\left(\frac{8\pi G}{3}\rho R^2\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dR}(\dot{R})^2 = \not{R} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3p)R,$$
$$\frac{d}{dR}\left(\rho R^2\right) = -(\rho + 3p)R,$$
$$\frac{d}{dR}\left(\rho R^3\right) = -3pR^2.$$

Solution

19.15. Уравнение (1) следует непосредственно из определения

$$H \equiv \dot{R}/R$$

и фридмановского уравнения первого порядка (задача 19.14)

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2.$$

Если мы теперь продифференцируем это уравнение по R, используем тождество

$$\ddot{R} = \frac{1}{2}d\left[(\dot{R})^2\right]/dR$$

а также другое уравнение первого порядка
и определение

$$d\left(\rho R^3\right)/dR = -3pR^2$$

$$q \equiv -\ddot{R}R/\dot{R}^2$$

мы придем к уравнению (2). Если $\rho \gg p$, то левой частью уравнения (2) можно пренебречь по сравнению с правой, и мы получаем уравнение (3). Подставляя уравнение (3) в уравнение (1), находим уравнение (4). Если $p = 1/3\rho$, то, исключая ρ из уравнений (1) и (2), мы получаем уравнение (5), а исключая член k/R^2, приходим к уравнению (6).

Solution

19.16. Подставляя в уравнение сохранения энергии е $\mu = j$ соотношения

$$T_0^0 = -\rho \text{ и } T' \text{ (нет суммирования по индексам) } = p,$$

а также используя условие однородности $p, j = 0$, получаем

$$\begin{aligned} 0 = T^v_{i:v} &= T^v_{j,v} - T^v_\alpha \Gamma^\alpha_{jv} + T^\alpha_j \Gamma^v_{\alpha v} = \\ &= p_{,1} + \rho\Gamma^0_{j0} - p\Gamma^k_{jk} + p\Gamma^v_{iv} = (\rho + p)\Gamma^0_{10} = 0, \end{aligned}$$

т. е. тривиальное тождество. Компонента $\mu = 0$ дает

$$\begin{aligned} 0 = T^v_{0;v} &= T^v_{0,v} - T^v_\alpha \Gamma^\alpha_{0v} + T^\alpha_0 \Gamma^v_{\alpha v} = \\ &= -\frac{dp}{dt} + \rho\Gamma^0_{00} - (\rho + p)\left(\ln|g|^{1/2}\right), 0 \end{aligned}$$

где мы воспользовались (см. задачу 7.7) формулой
Отсюда следует

$$\Gamma^\alpha_{\alpha\beta} = \left(\ln|g|^{\frac{1}{2}}\right)_{,\beta}$$

$$d\rho/dt = -\frac{\rho + p}{R^3}\frac{d}{dt}\left(R^3\right)$$

И

$$d\left(\rho R^3\right) = -3pR^2 dR$$

что и представляет собой одно из фридмановских уравнений первого порядка (см. задачу 19.14). Ретение 19.17. Для $p = \rho = 0$ и $k = -1$ фридмановское уравнение первого порядка

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2$$

сводится к уравнению $\dot{R} = 1$, откуда следует, что $R = t$, т. е. заданное выражение для линей ного элемента действительно представляет собой метрику Фридмана. Поскольку метрика сферическисимметрична, радиальная координата кривизны есть

$$r = t\,\mathrm{sh}\,x$$

Нетрудно догадаться, что искомым преобразованием временной координаты является

$$T = t\,\mathrm{ch}\,\chi$$

а затем можно вычислить преобразованное выражение для интервала

$$ds^2 = -dT^2 + dr^2 + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)$$

соответствующего пустому пространству Минковского.
решение 19.18.
а) Когда преобладает вещество, мы можем пренебречь давлением, и тогда плотность массы-энергии будет убывать по мере возрастания объема Вселенной:

$$\rho = \rho_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^3$$

Определим новую временную координату («угол разверток) в помощью соотношения

$$d\eta = dt/R$$

Тогда фридмановское уравнение перепишется в виде
или

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \left(\frac{dR/d\eta}{R^2}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^8 - \frac{k}{R^2}$$

$$R - 1/8\frac{dR}{d\eta} = 2\frac{d}{d\eta}R^{1/2} = \left(\frac{8\pi G}{3}\rho_0 R3 - kR\right)^{3/4}.$$

Проинтегрировав его, получим

$$\frac{1}{2}\eta = \int_0^{R^{1/6}} \frac{dR^{1/s}}{\left(\frac{8}{3}\pi\rho_0 R_0^3 - kR\right)^{1/e}} = \begin{cases} \arcsin \frac{R^{1/2}}{\left(\frac{8}{3}\pi G\rho_0 R_0^8\right)^{1/2}} \text{ для } k=+1, \\ \frac{R^{1/s}}{\left(\frac{8}{3}\pi G\rho_0 R_0^8\right)^{1/2}} \text{ для } k=0, \\ \operatorname{Arsh} \frac{R^{1/e}}{\left(\frac{8}{3}\pi G\rho_v R_0^8\right)^{1/2}} \text{ для } k=-1. \end{cases}$$

Из задачи 19.15 мы знаем, что

$$q_0 = \frac{4\pi G}{3}\frac{\rho_0}{H_0^2}$$

Н

$$R_0^a = \frac{k}{(2q_1 - 1)\,H_0^2} \quad (k = \pm 1)$$

Так как левая часть (5) положительна, ясно, что $k = \operatorname{sign}(2q_0 - 1)$. Следовательно, в уравнении (3) имеем

$$\frac{8\pi}{3}\rho_0 R8 = \frac{2q_0}{H_0\,|2q_0 - 1|^{\frac{3}{2}}} \quad (k = \pm 1).$$

Разрешая уравнение (3) относительно R, получаем

$$R = \begin{cases} \frac{q_0}{H_0(2q_0-1)^{2/e}}(1 - \cos\eta) & \text{для } k=+1, \\ \frac{1}{4}H_0^2 R8\eta^2 & \text{для } k=0, \\ \frac{q_0}{H_0(1-2q_0)^{\%/e}}(\operatorname{ch}\eta - 1) & \text{для } k=-1. \end{cases}$$

Наконец, интегрируя соотношение $dt = Rd\eta$, находим

$$t = \begin{cases} \frac{q_0}{H_0(2q_0-1)^{8/4}}(\eta - \sin\eta) & \text{для} \quad k=+1, \\ \frac{1}{12}H_0^8 R_0^8\eta^8 & \text{для} \quad k=0, \\ \frac{q_0}{H_0(1-2q_0)^{8/6}}(\operatorname{sh}\eta - \eta) & \text{для} \quad k=-1. \end{cases}$$

При $k = 0$ невозможно исключить из ответа R_0; это отражает всего лишь тот факт, что Вселенная в данном случае обладает произвольным масштабом пространственных расстояний и ее геометрия «выглядит» одинаково во все моменты времени. Значение R_0 не будет входить в вычисления любой физически измеримой величины.

б) Когда преобладает излучение, масса-энергия, содержащаяся в данном объеме сопутствующего пространства, не будет постоянной. В этом случае существует дополнительный эффект убывания плотности за счет красного смещения фотонов, и поэтому

$$\rho = \rho_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^4.$$

Аналогом уравнения (2) является уравнение

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \left(\frac{dR/d\eta}{R^2}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^4 - \frac{k}{R^2},$$

ИЛИ

$$\frac{dR}{\left(\frac{8}{3}\pi G\rho_0 R_0^4 - kR^2\right)^{1/2}} = d\eta$$

решение этого уравнения имеет вид

$$R = \left(\frac{8\pi}{3} G\rho_0 R_0^4\right)^{1/4} \times \begin{cases} \sin\eta & \text{для} \quad k=+1, \\ \eta & \text{для} \quad k=0, \\ \operatorname{sh}\eta & \text{для} \quad k=-1. \end{cases}$$

Вместо уравнения (4) мы получаем теперь (см. задачу

$$q_0 = \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_0}{H_0^8}$$

а вместо уравнения (Б) имеем

$$R_0^2 = \frac{k}{(q_0-1)\,H_0^2} \quad (k=\pm 1).$$

Следовательно, уравнение (6) заменяется на

$$\frac{8\pi}{3} G\rho_0 R_0^1 = \begin{cases} \frac{q_0}{(q_0-1)^2 H_0^2} & \text{для} \quad k=\pm 1, \\ H_0^2 R_0^4 & \text{для} \quad k=0, \end{cases}$$

а интегрирование соотношения $dt = Rd\eta$ дает

$$t = \begin{cases} \frac{1}{H_0}\left[\frac{q_0^{1/2}}{q_0-1}\right](1-\cos\eta) & \text{для} \quad k=+1, \\ \frac{1}{2} H_0 R_0^2 \eta^2 & \text{для} \quad k=0, \\ \frac{1}{H_0}\left[\frac{q_0^{2/2}}{q_0-1}\right](\operatorname{ch}\eta - 1) & \text{для} \quad k=-1. \end{cases}$$

Решение 19.19. После того как пуля достигла нерелятивистской скорости, мы имеем (из результатов задачи 19.7).

$$\frac{\text{const}}{R} = \frac{dr_p}{dt} = \frac{dr_p}{dr}\frac{dr}{dR}\frac{dR}{dt} = \frac{dr}{dR}\dot{R}R,$$

где r киоордината Робертсона-Уокера, связанная с собственными расстояниями r_p посредством соотношения $dr_p = Rdr$ (из него и следует последнее из написанных выше равенств). Для фридмановской Вселенной с $k=0$ имеем
откуда

$$R \sim t^{2/3}$$

$$\dot{R} \sim R^{-1/\cdot}$$

Тогдв из уравнения (1) следует
и мы получаем

$$dr/dR \sim R^{-3/2}$$

$$r = A + B/R^{1/2}.$$

При $t \to \infty$ координата пули $r_{\text{пули}}$ приближается к значению $r = A$. Собственное расстояние между наблюдателем, находящимся в точке $r = A$, и пулей равно

$$R\Delta r = BR^{1/2}.$$

Следовательно, собственное расстояние стремится к бесконечности, даже если скорость пули [согласно уравнению (1)] приближается к скорости космологического наблюдателя.

Если $k=-1$, то при больших временах величина $\dot{R}$ становится постоянной, и из уравнения (1) следует
откуда

$$dr/dR \sim R^{-2}$$

$$r = A + B/R$$

При $t \to \infty$ координата пули r достигает значения A, но собственное расстояние $R\Delta r$ между пулей и наблюдателем, находящимся в точке $r = A$, достигает некоторого постоянного значения B.

Решение 19.20. Если во фридмановской метрике время выражается через «угол развертки» η, определяемый соотношением

$$d\eta = dt/R(t)$$

то выражение интервала для фотона, распространяющегося по радиусу ($d\vartheta = d\varphi = 0$), принимает вид

$$0 = ds^2 = R^2(\eta)\left(-d\eta^2 + d\chi^2\right)$$

где $d\chi^2 = dr^2/\left(1-r^2\right)$ - «тригонометрическая» радиальная координата на 3-сфере (см. задачу 19.5). Из задачи 19.18 следует, что время жизни Вселенной (промежуток между двумя нулями функции R) соответствует промежутку $\Delta\eta = 2\pi$. За это время фотон пройдет расстояние $\Delta\chi = 2\pi$, т. е. обежит Вселенную в точности один раз.

Solution

19.21. Для фридмановской Вселенной с $k = 0$ имеем

$$R(t)/R_0 = \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{2/3}$$

Энергия, излучаемая источником за единицу собственного времени, есть L. Она уменьшается за счет красного смещения в $R(t)/R_0$ раз так что наблюдаемая нами в современную эпоху полная энергия на одну звезду есть
или

$$\mathscr{E} = \int\limits_0^{t_0} L\frac{R(t)}{R_0}dt = \frac{3}{5}L\left(\frac{3}{2}H_0\right)^{1/3} t_0^{3/3}$$

$$\mathscr{E} = 2L/5H_0$$

так как $t_0 = 2/3H_0$. Тогда энергия на единицу объема, u, равна в настоящее время $2/5H_0^{-1}\mathrm{Ln}$. Так как энергия излучения заполняет Вселенную изотропно, она соответствует потоку излучения

$$B = \frac{c}{4\pi}u = \frac{c}{10\pi}H_0^{-1}Ln$$

Для сравнения укажем, что в ньютоновской Вселенной, в которой все звезды «зажглись» бы в момент времени $t_0 = \left({}^3/_2 H_0\right)^{-1}$, мы имели бы
и

$$\mathscr{E} = \int\limits_0^{t_0} Ldt = \frac{2}{3}H_0^{-1}L$$

$$B = \frac{c}{6\pi}H_0^{-1}Ln$$

Решение 19.22. Из решения задачи 19.18 мы знаем, что параметру замедления $q_0 > 0,5$ соответствует космологическая модель с $k = +1$, которая расширяется по закону

$$R(t)/R_0 = \frac{q_0}{2q_0 - 1}(1 - \cos\eta)$$

Подставляя $R(t) = R_0$ и соответственно $\eta = \eta_0$, мы получаем формулу, связывающую η_0 со значением q_0 в «современную» эпоху. Так как выбор «современной» эпохи, очевидно, является пронзвольным, эта формула связывает η и q для любой эпохи. Полагая $q = 0,5002$, мы получаем, что $1 - \cos\eta = 0,0008$ при $z = 1500$. Подставляя это значение обратно в уравнение (1) и полагая $R_0/R(t) = 1 + z = 1501$, мы можем решить уравнение (1) относительно q_0. Получим

$$q_0 = [2 - (1+z)(1-\cos\eta)]^{-1} = 1,25$$

Если параметр замедления $q_0 < 0,5$, то $k = -1$, и уравнение (1) заменяется на следующее:

$$R(t)/R_0 = \frac{q_0}{1 - 2q_0}(\mathrm{ch}\,\eta - 1)$$

Полагая $q = 0,4998$, получаем, что $\mathrm{ch}\ \eta - 1 = 0,0008$ при $z = 1500$. Отсюда для q_0 находим

$$q_0 = [2 + (1+z)(\mathrm{ch}\,\eta - 1)]^{-1} = 0,312.$$

13.5.15 Problems about Basics of Cosmology 3

Solution 19.23.

а) В современную эпоху $t = t_0$ пространственноподобная 3-поверхность обладает метрикой

$$d\sigma^2 = R_0^2 \left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \right) \right)$$

Замечая, что промежуток $0 \leqslant r \leqslant 1$ соответствует половине 3-сферы, имеем

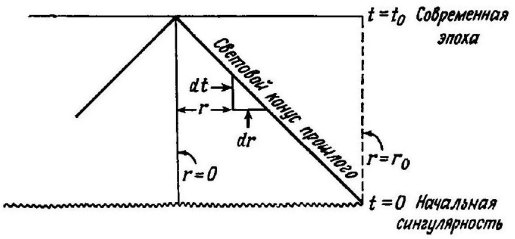
$$V = \int\limits_{3-\text{сера}} \left| {}^{(3)}g \right|^{1/2} d^3x = 2 \int\limits_0^1 dr \int\limits_{-1}^1 d(\cos\vartheta) \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \frac{R_0^3 r^2}{\left(1-r^2\right)^{1/2}} = 2\pi^2 R_0^3.$$

Для Вселенной, в которой преобладает вещество (см. задачу 19.15),
откуда

$$R_0 = H_0^{-1} \left(2q_0 - 1\right)^{-1/2}$$

$$V = 2\pi^2 \left(2q_0 - 1\right)^{-3/2} H_0^{-3}$$

б) Наш световой конус прошлого за время dt распространяется на собственное радиальное расстояние cdt (см. фиг. 35). Зная



Фиг. 35.
метрику, находим, что собственная площадь поверхности 2-сферы есть $4\pi r^2 R^2$, где r и R - функции t вдоль светового конуса. Следовательно, видимый нами объем есть ($c = 1$)

$$V = \int\limits_0^{t_0} dt 4\pi r^2(t) R^2(t)$$

Дифференциальное уравнение для $r(t)$ следует из определения этой функции как светового конуса:

$$-dt = \frac{R(t)}{\left(1-r^2\right)^{1/2}} dr$$

и

$$r = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0.$$

Чтобы решить уравнение (4) и найти интеграл (3), мы воспользуемся решением для $R(t)$, параметризованным с помощью «угла развертки» η (см. решение задачи 19.18):
где

$$R = A(1 - \cos\eta), \quad t = A(\eta - \sin\eta),$$

$$a = \frac{q_0}{\left(2q_0 - 1\right)^{3/2} H_0}$$

а современнсе значение η есть

$$\eta_0 = \arccos\left(\frac{1-q_0}{q_0}\right)$$

Теперь уравнение (4) приобретает вид
откуда

$$d(\arcsin r) = d\eta$$

$$r = \sin(\eta_0 - \eta)$$

и выражение (3) переписывается как

$$V = \int_0^{\eta_0} A(1-\cos\eta)d\eta 4\pi \sin^2(\eta_0-\eta)\, A^2(1-\cos\eta)^2$$

Непосредственное интегрирование приводит к выражению

$$V = 4\pi A^3\left(\frac{61}{80}\sin 2\eta_0 + \frac{5}{4}\eta_0 - \frac{5}{2}\sin\eta_0 - \frac{3}{8}\eta_0\cos 2\eta_0 + \frac{1}{30}\sin 3\eta_0\right),$$

которое с помощью соотношений (6) и (7) можно свести к функции от q_0 и H_0.

в) Согласно уравнению (8), радиальная координата для самых удаленных областей пространства, которые мы в состоянии увидеть в современную эпоху, есть

$$r_0 = \sin(\eta_0) = (2q_0-1)^{1/2}/q_0$$

где мы использовали также соотношение (7). Объем, ограниченный этим значением радиальной координаты в современную эпоху, составляет (вычисления аналогичны вычислениям в П. «а»)

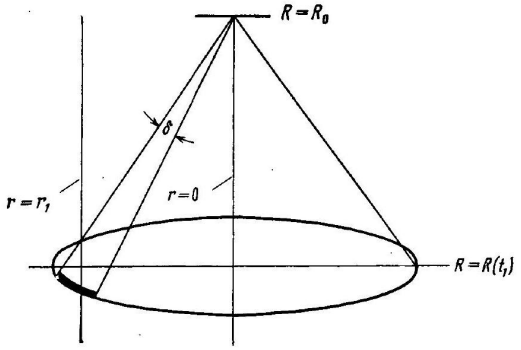
$$V = = 4\pi\int_0^{r_0}\frac{R_0^3 r^2 dr}{(1-r^2)^{\frac{1}{2}}} = 2\pi R_0^3\left[\arcsin r_0 - r_0\left(1-r_0^2\right)^{1/2}\right] =$$

$$= \frac{2\pi}{H_0^3(2q_0-1)^{\frac{3}{2}}}\left[\arccos\left(\frac{1-q_0}{q_0}\right) - \frac{(1-q_0)(2q_0-1)^{1/2}}{q_0^2}\right].$$

рецение 19.24. Из фиг. 36 и вида линейного элемента метрики Робертсона - Уокера следует

$$\ell = [r_1 R(t_1)]\,\delta$$

Функцию $R(t_1)$ можно заменить на $R_0/(1+z)$; трудность состоит



Фиг. 36.

теперь только в вычислении r_1. Возьмем метрику, записанную в координатах η, χ (из задачи 19.5). Тогда

$$r_1 = \Sigma(\chi_1)$$

Траектория фотона описывается уравнением

ТаК ТО

$$0 = R^2\left(d\chi^2 - d\eta^2\right)$$

$$\chi_1 = \eta(t_0) - \eta(t_1)$$

Применяя формулу для синуса (или гиперболического синуса) разности двух аргументов, получаем

$$r_1 = \Sigma(\eta_0)\,C(\eta_1) - \Sigma(\eta_1)\,C(\eta_0)$$

Здесь C означает $\cos, 1$ или ch для $k = 1, 0, -1$ соответственно. Воспользуемся теперь формулой, связывающей значение η для некоторой эпохи с соответствующим ей значением красного смещения и современным значением q (см. задачу 19.18):

или

$$1 - C(\eta) = \frac{2q_0 - 1}{q_0} \frac{1}{1+z}$$

$$C(\eta) = \frac{q_0 z - q_0 + 1}{q_0(1+z)}$$

(эта формула верна для всех трех значений k). Отсюда получим

$$\Sigma(\eta) = \frac{|2q_0 - 1|^{2/2} (2q_0 z + 1)^{1/2}}{q_0(1+z)}$$

$$r_1 = \frac{|2q_0 - 1|^{1/2}}{q_0^2(1+z)} \left[1 - q_0 + q_0 z - (1 - q_0)(1 + 2q_0 z)^{1/2}\right]$$

Следовательно, видимый угловой размер есть

$$\delta = \ell / r_1 R(t_1) = \ell(1+z)/r_1 R_0$$

Используя для исключения R_0 уравнение (3) из задачи 9.15, окончательно получаем

$$\delta = \frac{\ell H_0 (1+z)^2 q_0^2}{\left[1 - q_0 + q_0 z - (1 - q_0)(1 + 2q_0 z)^{\frac{1}{2}}\right]}.$$

Рещение 19.25. Мы будем работать в системе единиц, где $c = k = 1$. Плотность вещества есть

$$\rho_{\text{веш}} = m_p n$$

здесь m_p-средняя масса бариона. Плотность излучения дается формулой

$$\rho_{\text{изл}} = KaT^4$$

где a-постоянная Стефана-Больцмана, равная $8\pi^5 k^4/15h^3$, а $K = 1$ (если мы рассматриваем только фотоны) или $K = 1 + + \frac{7}{4}\left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} = 1,454$ (если мы рассматриваем фотоны и нейтрнно; см. [2], стр. 575). Приравнивая $\rho_{\text{вещ}}$ и $\rho_{\text{изл, получаем}}$

$$1 = \frac{\rho_{\text{из,}}}{\rho_{\text{B}}\text{S}} = \frac{KaT^{\mathbf{4}}}{nm_p}$$

Уравнение Саха для степени ионизации x водорода гласит:

$$\frac{x^2}{1-x} = \frac{(2\pi m_e kT)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2 m_q / kT\right)}{nh^3},$$

где m_e - масса электрона, а $\alpha = \frac{1}{137}$. Если считать, что рекомбинация соответствует тому моменту, когда левая часть уравнения Саха примерно равна единице, то, используя уравнение (1), получаем

$$\exp\left(\frac{1}{2}\alpha^2 m_e / kT\right) = \frac{15\,(2\pi m_e T)^{3/2} m_p}{8\pi^5 K T^4}$$

Разумеется, вид решения определяется экспонентой:

$$T \sim \alpha^2 m_e$$

Если мы теперь попытаемся подобрать некоторое значение коэффициента, а затем вычислим правую часть и один раз проинтегрируем, то придем к более точному виду решения (ср. задачу 19.26):

$$T \approx \frac{1}{80}\alpha^2 m_e$$

Если же, наконец, начало преобладания вещества и рекомбинация водорода происходят при одной и той же температуре T, мы имеем

$\sigma = \frac{4}{3}\frac{aT^3}{n} = \frac{4}{3}\frac{m_p}{TK}\left(\frac{KaT^4}{m_p n}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{m_p}{K\left(\frac{1}{80}\alpha^2 m_e\right)} = \frac{320}{3K}(137)^2(1836) \approx 4 \cdot 10^9.$

Solution

19.26. Уравнение Саха для степени ионизации водорода в условиях термодинамического равновесия имеет вид (в системе единиц, где $k = c = 1$)

$$\frac{x^2}{1-x} = \frac{(2\pi m_e T)^{\frac{3}{2}}\, e^{-B/T}}{nh^3}$$

где B - энергия ионизации, равная $\frac{1}{2}\alpha^2 m_e (\alpha = 1/137)$, а n-суммарная плотность числа протонов и атомов. Величина n связана с σ, т. е. энтропией на барион, соотношением

$$\sigma = \frac{4}{3}\frac{aT^3}{a}$$

так что если мы положим $x = 1/2$ и примем для a значение $8\pi^5/15h^3$, уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{2^{\frac{1}{2}} 4\pi^{\frac{7}{2}}}{45}\frac{1}{\sigma}\left(\frac{T}{m_e}\right)^{\frac{3}{2}} = \exp\left[-\frac{m_e/T}{2(137)^2}\right].$$

Это уравнение легко решается методом итераций. Например, про. делав процедуру итераций дважды, получим
н

$$\frac{m_e}{T} = 2(137)^2\left(\ln\frac{\sigma}{6,908} + \frac{3}{2}\ln\frac{m_e}{T}\right)$$

$$T \approx \frac{m_e}{2(137)^2}\left[\ln\frac{\sigma}{6,908} + \frac{3}{2}\left(10,53 + \ln\ln\frac{\sigma}{6,908}\right)\right]^{-1} =$$

$$= \begin{cases} 430 \text{ K для } \sigma = 10^8, \\ 4050 \text{ K для } \sigma = 10^9. \end{cases}$$

Решение 19.27. Из задачи 19.18 известно, что в радиационнодоминированном режиме вблизи сингулярности

$$R = \left(\frac{8\pi}{3}\rho_0 R_0^4\right)^{1/2}\eta, \quad t = \left(\frac{8\pi}{3}\rho_0 R_0^4\right)^{1/2}\frac{\eta^2}{2}.$$

Эти формулы справедливы для любого значения k в пределе $\eta \to 0$. Отсюда имеем

$$t^2 = \frac{3R^4}{32\pi\rho_0 R_0^4} = \frac{3}{32\pi\rho}$$

где мы использовали тот факт, что в радиационно-доминированную эпоху

$$\rho \sim R^{-4}.$$

Плотность энергии фотонов есть

$$\rho_\gamma = \frac{8\pi}{h^3}\int_0^\infty \frac{q^3 dq}{\exp(q/kT) - 1} = aT^4$$

где a - постоянная Стефана - Больцмана, равная $8\pi^5 k^4/15h^3$. Для ультрарелятивистских электронов и позитронов (подчиняющихся статистике Ферми - Дирака) имеем

$$\rho_{e+} = \rho_{e-} = \frac{8\pi}{h^3}\int_0^\infty \frac{q^3 dq}{\exp(q/kT) + 1} = \frac{7}{8}aT^4.$$

Следовательно, суммарная плотность массы-энергии равна
откуда

$$\rho = \rho_v + \rho_{e+} + \rho_{e-} = \frac{11}{4}aT^4$$

$$T = \left(\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{32\pi a}\right)^{\frac{1}{4}} t^{-1/2}.$$

Если мы включим в рассмотрение нейтрино и предположим, что они обладают химическим потенциалом, равным нулю (см. [2], раздел 15.6), то, поскольку им соответствует только одно спино- вое состояние, получим

$$\rho_{v_e} = \rho_{\bar{v}_e} = \rho_{v_\mu} = \rho_{\bar{v}_\mu} = \frac{7}{16} aT^4.$$

Тогда суммарная плотность есть

$$\rho = \frac{11}{4} aT^4 + \frac{7}{4} aT^4 = \frac{9}{2} aT^4$$

И

$$T = \left(\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{\delta 2\pi a} \right)^{\frac{1}{4}} t^{-1/2}$$

Solution

19.28. Для релятивистских частиц с $E \approx p$ равновесное значение плотности при температуре T есть (см. решение задачи 19.27)

$$\rho(T) = \int En(p)dp = \begin{cases} aT^4 \text{ для фотонов,} \\ \frac{7}{16} aT^4 \text{ для каждой разновидности нейтрино,} \\ \frac{7}{8} aT^4 \text{ для каждой разновидности электро-} \\ \qquad \text{нов и мюонов.} \end{cases}$$

Здесь a - постоянная Стефана - Больцмана, равная $8\pi^5 k^4/15h^3$. Для нашей задачи имеем
Т. е.

$$\rho(T) = \left\{ \begin{array}{ll} \left(1 + 4 \cdot \frac{7}{16} + 4 \cdot \frac{7}{8}\right) aT^4 & \text{при } R_1 \\ \left(1 + 4 \cdot \frac{7}{16} + 2 \cdot \frac{7}{8}\right) aT^4 & \text{при } R_2 \end{array} \right\} \equiv KaT^4,$$

$$K_1 = 25/4, \quad K_2 = 18/4$$

Воспользуемся теперь тем фактом, что расширение Вселенной является изэнтропическим. Из первого начала термодинамики следует, что энтропия на единицу объема для такого релятивистского газа определяется формулой

$$\frac{S}{V} = \frac{4}{3} KaT^3$$

Поскольку объем V меняется как куб масштабного фактора, имеем

$$\text{const } = S \sim \frac{4}{3} Ka(RT)^3,$$

т. е. при изэнтропическом расширении

$$K_1 R_1^8 T_1^3 = K_2 R_2^8 T_2^8$$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{R_1}{R^2} \right) \left(\frac{25}{18} \right)^{1/2}$$

Физически этот результат означает, что при аннигиляции мюоны передают свою энергию (точнее, энтропию) остающимся частицам, повышая за счет этого их температуру в $(25/18)^{1/3}$ раз по сравнению с ожидаемым значением, следующим из закона линейного убывания T при возрастании R.

Solution

19.29. В стандартной модели горячей Вселенной гелий и дейтерий образуются, если говорить упрощенно, за счет следующих процессов: 1). "ымораживание» неравновесного значения отношения концентрации нейтронов к концентрации протонов [1)] в тот момент, когда слабые процессы распада $n \to p$ начинают протекать медленнее, чем падает температура при расширении; 2) образование дейтерия в реакции $n + p \to \mathrm{D} + \gamma$ в то время, когда большинство свободных нейтронов еще не распалось; 3) выгорание почти всего дейтерия в реакциях образования гелия: $\mathrm{D} + \mathrm{D} \leftarrow \mathrm{He}^3 + n \to \mathrm{H}^3 + p$ или $\mathrm{D} + \mathrm{D} \to \mathrm{H}^3 + p$, а затем $\mathrm{H}^3 + \mathrm{D} \to \to \mathrm{He}^4 + n$.

Теперь мы можем дать ответ на вопросы задачи

а) "Вымороженное» значение отношения нейтронных и протонных концентраций не изменяется, но при любой данной температуре для более высокой концентрации барионсв реакции протекают более

интенсивно. Следовательно, превращение легких лдер в гелий будет происходить более полно, и в результате образуется больше He^4 и меньше D.

б) Реакции $n \to p$ идут медленнее, и поэтому после закалки остается больше «вымороженных» нейтронов. Скорости других реакций не меняются, и в итоге образуется болыше He^4 и больше D.

в) Направление реакции $n+v \leftrightarrow p+e^-$ смещается вправо за счет энергии вырождения (ферми-энергии) нейтрино; меньшее количество нейтронов даст меньше He^4 и меньше D.

г) Тот же случай, что и предыдущий, но для реакции $v + p \leftrightarrow \leftrightarrow n + e^+$, поэтому образуется больше He^4 и больше D.

д) Время расширения связано с плотностью соотношением

$$t = \left(\frac{3}{32\pi G\rho}\right)^{1/2} + \text{ const.}$$

Следовательно, увеличение G означает, что каждая стадия с различной плотностью будет занимать меньшее время. Это приводит к более высокому значению отношения концентраций нейтронов и протонов. Малые изменения G не оказывают существенного влияния на тот факт, что почти все нейтроны идут на образование дейтерия, так как время их распада по-прежнему велико. В итоге образуется больше и дейтерия и больше He^4.

В ряде работ советских авторов этот процесс называется «закалкой». Прим. перев.

13.5.16 Problems about Basics of Cosmology 4

Solution

19.30. Введение космологической постоянной эквивалентно предположению о наличии во Вселенной равномерно распределенной идеальной жидкости с эффективной плотностью и давлением

$$\rho_{\text{В}\Phi\Phi} = (8\pi)^{-1}\Lambda, \quad \rho_{9,\phi\Phi} = -(8\pi)^{-1}\Lambda.$$

Динамические уравнения задачи 19.14 сводятся к одному

$$\dot{R}^2 = 1/3\Lambda R^2$$

запишем решение этого уравнения:

$$R = R_0 e^{t/T_0}, \quad T_0^{-1} = 1/3.$$

Метрика тогда приобретает вид

$$ds^2 = -dt^2 + R_0^2 e^{2t/T_0}\left(dr^2 + r^2 d\Omega^2\right)$$

Чтобы преобразовать ее к явно статическому виду, введем «координату кривизны»

$$r' = R_0 e^{t/T_{\text{or}}}$$

и получим

$$ds^2 = -dt^2 + \left(dr' - r'dt/T_0\right)^2 + r'^2 d\Omega^2.$$

Исключим теперь $g_{r't}$ с помощью преобразования
и найдем окончательно

$$t = t' + \frac{1}{2}T_0 \ln\left(\frac{r'^2}{T_0^2} - 1\right)$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r'^2}{T_0^2}\right)dt'^2 + \left(1 - \frac{r'^2}{T_0^3}\right)^{-1} dr'^2 + r'^2 d\Omega^2.$$

Интерпретация метрики (1) как нестатической космологической модели основана на предположении, что координаты являются сопутствующими по отношению к галактикам, плотностью которых в динамических уравнениях можно пренебречь.

Решение 19.31. Полная система уравнений, описывающих однородные изотропные модели, имеет вид (см. задачи 19.13 или 19.14)

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{-k}{R^2} + \frac{8\pi\rho}{3},$$

$$2\left(\frac{\ddot{R}}{R}\right) = -\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{k}{R^2} - 8\pi p.$$

Поскольку наша модель характеризуется только плотностью массы-энергии пыли ρ_0 и плотностью массы-энергии, обусловленной "поляризацией вакуума" Λ, имеем

$$\rho = \rho_0 + \Lambda/8\pi,$$
$$p = -\Lambda/8\pi.$$

Так как все производные по времени выше второго порядка можно выразить как линейные комбинации $\dot{R}$ и $\ddot{R}$ с помощью уравнений (1), необходимое и достаточное условие того, что решение является статическим, запишем в виде

$$\dot{R} = \ddot{R} = 0$$

Если подставить в (1) условия (2) и (3), система примет вид

$$k/R^2 = (8\pi\rho_0 + \Lambda)/3,$$
$$k/R^2 = \Lambda,$$

откуда следует

$$\rho_0 = \Lambda/4\pi,$$
$$R = \Lambda^{-1/2}.$$

Поскольку $\rho_0 > 0$, из уравнения (4б) следует, что $k = +1$. Чтобы исследовать «Вселенную Эйнштейна» на устойчивость, объединим сначала уравнения (1), что даст нам

$$\frac{2\ddot{R}}{R} = -\frac{8\pi}{3}\rho - 8\pi p = -\frac{8\pi}{3}\rho_0 + \frac{2}{3}\Lambda$$

а затем положим

$$R = \Lambda^{-1/2} + \delta R,$$
$$\rho_0 = \frac{\Lambda}{4\pi} + \delta\rho_0.$$

Тогда уравнение (6) с точностью до δR примет вид

$$2\Lambda^{\frac{1}{2}}(\delta\ddot{R}) = -\frac{8\pi}{3}\delta\rho_0$$

Далее, поскольку полное количество пылевой материи сохраняется, ее тензор энергии-импульса подчиняется условию
откуда

$$\rho_0 R^3 = \text{ const}$$

$$\frac{\delta\rho_0}{\rho_0} = -3\frac{\delta R}{R}$$

Тогда из уравнения (8) следует

$$(\delta\ddot{R}) - \Lambda\delta R = 0$$

т. е. возмущение δR со временем экспоненциально растет. Следовательно, данная модель неустойчива.
Решение 19.32. Линейный элемент «Вселенной Эй нштейна» с $k = +1$ имеет вид (см. задачу 19.5)

$$ds^2 = R^2\left[d\chi^2 + \sin^2\chi\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right)\right]$$

где

$$0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

Следовательно, объем V есть

$$V = \int_0^\pi 4\pi R^3 \sin^2\chi d\chi = 2\pi^2 R^3$$

В задаче 19.31 мы нашли, что в этой модели

$$R = (4\pi\rho_0)^{-1/2}$$

где ρ_0 - плотность массы-энергии пылевидной материи. Подставляя это соотношение в интеграл (2), получаем

$$V = 2\pi^2 \left(\frac{c^2}{4\pi G \rho_0} \right)^{3/2}$$

где мы на этот раз ввели в явном виде фундаментальные константы с G

Peuение 19.33. Пусть Λ_E - эйнштей новское значение космологической постоянной, так что для эй нштей новской Вселенной (см. задачу 19.31)

$$\rho_0 = \Lambda_E / 4\pi \quad \text{И} \quad R = \Lambda_E^{-1/2}$$

Для всех космологических моделей, заполненных пылью, даже с $\Lambda \neq 0$, справедливо условне Запишем его в виде

$$\rho R^3 = \text{ const.}$$

$$\rho R^3 = \frac{1+\varepsilon}{4\pi \Lambda^{1/2}}$$

что эквивалентно записи

$$\Lambda = \Lambda_E (1+\varepsilon)^2$$

Тогда единственное остающееся в данной модели динамическое уравнение задачи 19.14 принимает вид

$$\dot{R}^2 = V(R) \equiv \frac{\Lambda R^2}{3} - 1 + \frac{2(1+8)}{3\Lambda^{1/2} R}$$

Для малых R имеем $\dot{R}^2 \sim 1/R$, т. е. $R \sim t^{2/s}$. Расширение максимально замедляется, когда $\dot{R}$ достигает минимума. Полагая dV/dR равным нулю, находим, что это происходит при

$$R = R_m = (1+\varepsilon)^{1/3} \Lambda - 1/2$$

Когда R близко к R_m,

$$\dot{R}^2 \approx V(R_m) + \frac{1}{2} (R - R_m)^2 V''(R_m) + \ldots =$$
$$= (1+\varepsilon)^{2/s} - 1 + \left[\Lambda^{1/2} R - (1+\varepsilon)^{1/3} \right]^2 .$$

По таблице интегралов находим

$$R = \frac{(1+\varepsilon)^{1/3}}{\Lambda^{1/2}} \left\{ 1 + \left[1 - (1+\varepsilon)^{-2/3} \right]^{1/2} \operatorname{sh} \Lambda^{1/2} (t - t_m) \right\}$$

где $R = R_m$ при $t = t_m$. Для малых ε имеем приближенно

$$R \approx R_m \left[1 + \frac{\varepsilon}{3} \operatorname{sh} \Lambda^{\frac{1}{2}} (t - t_m) \right]$$

Таким образом, R остается приблизительно равным R_m в области, где

$$\varepsilon \operatorname{sh} \Lambda^{1/2} (t - t_m) \approx 1$$

т. е. для промежутка времени

$$(t - t_m) \approx \Lambda - 1/2 \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)$$

Если выбрать достаточно малое ε, то этот промежуток можно сделать произвольно большим. В конце концов, однако, R вновь начинает возрастать так, что

$$H^2 = \frac{\dot{R}^2}{R^2} \to \frac{1}{3} \Lambda$$

и в пределе мы приходим к Вселенной де Ситтера из задачи 19.30.

Если образование квазаров происходит при $z = 2$, то $R = R_m$ при $z = 2$, т. е.

$$R_0 = R_m (1+z) = 3 R_m = 3 \Lambda^{-1/2}$$

Если это так, то (при $\varepsilon \ll 1$) плотность вещества в современную эпоху должна быть равна

$$\rho_0 = \left(4\pi R_0^3 \Lambda^{1/2} \right)^1 = (108\pi)^{-1} \Lambda$$

С другой стороны,

$$H_0 = \left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right) = \left(\frac{1}{3}\Lambda - \frac{1}{R_0^2} + \frac{2}{3\Lambda^{1/2}}\right)^{1/2} = \frac{(20\Lambda)^{1/2}}{9}.$$

Полагая $H_0 = 10^{-28}$ см$^{-1}$, получаем $\Lambda = 4 \cdot 10^{-56}$ см^2, откуда $\rho_0 = 1,2 \cdot 10^{58}$см$^2 = 1,6 \cdot 10^{-30}$г/см^3. Peueeиие 19.34. Соответствующая данному значению Λ эффективная плотность есть

$$\rho_c = \frac{\Lambda}{8\pi} = \frac{10^{-87}\text{см}^{-2}}{8\pi} \approx 4 \cdot 10^{-81}\text{г/см}^3.$$

Характерные плотности в Солнечной системе равны

$$\rho_{\text{те.}} \sim 1\Gamma/\text{СМ}^3,$$
$$\rho \text{ солн, снст} \sim 10^{38}\Gamma/\left(10^{10}\text{см}\right)^5 \sim 10^{-12}\Gamma/\text{см}^3.$$

Следовательно, влияние Λ на механику Солнечной системы по порядку величины равно

$$\frac{p_c}{\rho_{\text{Солн, сист}}} \sim 10^{-19}.$$

Реиеите 19.35.

Уравнения Фридмана (задача 19.15) имеют вид

$$\ddot{R} = -\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3p)R,$$
$$R\ddot{R} + 2\dot{R} + 2k = 4\pi G(\rho - p)R^2.$$

Для статического решения все-производные по времени должны обращаться в нуль, откуда следуют два условия:

$$\rho + 3p = 0 \quad \text{и} \quad \rho = 3k/8\pi GR^2.$$

Эта систма не имеет решений, соответствующих жидкости, для которой плотность массы-энергии и давление положительны (т. е. любой известной жидкости).

Решения 19.36 и 19.37. .Рассмотрим сначала более «легкие» случаи. Если метрика инвариантна во времени и симметрична относнтельно его обращения, то $g_{0l} = 0$ и ее можно запнсать в внде

$$ds^2 = -g_{00}\left(x^l\right)dt^2 + g_{lj}\left(x^k\right)dx^l dx^l.$$

Если соответствующая ей модель однородна (задача 19.37), то скорость хода часов во всех точках постоянна и $g_{00} = \text{const}$; если модель неоднородна, но давление отсутствует (задача 19.36), то можно найти такое локальное преобразование временной координаты, которое привело бы к $g_{\oplus 0} = \text{const}$ (как было показано в задаче 16.25). В этом случае из обычной формулы для $\Gamma_{\mu\nu\sigma}$ видно, что единственными не равными нулю компонентами являются Γ_{tjk}. (Действительно, любая компонента с индексом 0 является либо производной по времени от компоненты g_{0f}, либо производной от g_{00}.) Теперь мы можем вычислить R_{00} по стандартной формуле, включающей символы Γ; так как при этом каждый член формулы содержит Γ с нулевым индексом, очевидно, что $R_{00} = 0$ и, следовательно,

$$T_{\hat{0}}^{\hat{0}} - \frac{1}{2}T_{\hat{\alpha}}^{\hat{\alpha}} = 0$$

откуда $\rho + 3p = 0$. Это, однако, невозможно для жидкости без давления или для любой физически разумной идеальной жидкости (т. е. обладающей положительными p и ρ).

Перей дем теперь к более «трудным» случаям. Пусть ξ - вектор Киллинга симметрии по времени, а a-4-скорость жидкости. Так как u параллельно ξ (задача 13.9), а ξ ортогонально к гиперповерхности, u также ортогонально к гиперповерхности, и, следовательно, $\omega_{\alpha\beta} = 0$. В уравнении Рейчаудхури (задача 14.10)

$$\frac{d\vartheta}{d\tau} \sim \frac{d\vartheta}{dt} = 0$$

где $\xi = \partial/\partial t$. Таким образом, уравнение Рейчаудхури принимает вид

$$0 = a^{\alpha}_{;\alpha} - 2\sigma^2 - \frac{1}{3}\vartheta^2 - 8\pi\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T\right)u^{\alpha}u^{\beta}$$

Для случая $p = 0$ (задача 19.36) из уравнения Эйлера (задача 14.3) следует, что $\mathbf{a} = 0$, и уравнение (1) сводится к уравнению

$$0 = -2\sigma^2 - \frac{1}{3}\vartheta^2 - 4\pi\rho$$

которое не имеет решений для положительных ρ.
Когда присутствует давление, тогда, вообще говоря, а не равно нулю, именно:

$$a = \nabla \ln |\xi \cdot \xi|^{\frac{1}{2}}$$

Если же мы предполагаем однородность (задача 19.37), то а = 0 и мы приходим к уравнению

$$0 = -2\sigma^2 - \frac{1}{3}\vartheta^2 - 4\pi(\rho + 3p)$$

которое опять-таки не имеет решений для $\rho + 3p > 0$.
Решение 19.38.
а) Из того факта, что при движении галактики
вытекает

$$x^i = \text{ const}$$

и, следовательно,

$$dx^i = 0$$

$$ds^2 = -d\tau^2.$$

б) Если $d\tau = 0$, то

$$ds^2 = g_{ij} dx^l dx$$

в) Если g_{0t} и g_{ij} не зависят от всех x^l, то на гиперповерхности $\tau = \text{const}$ вообще ничего не зависит от x^i и, следовательно, пространство однородно. Однако неудачный выбор координат и обусловленное им кажущееся искажение пространственноподобной гиперповерхности могут приводить к зависимости метрических функций однородного пространства от пространственных координат.
г) В задаче 14.9 мы показали, что если пространственный вектор, связывающий две соседние геодезические, обладает постоянной длиной, то для поля геодезических $\sigma_{\alpha\beta} = \vartheta = 0$. Если g_{0t} и g_{ij} не зависят от τ, то связывающий вектор будет обладать постоянной длиной.
д) Так как $u^0 = +1$ и $u^i = 0$, мы имеем
$u_{i;j} = -u^v \Gamma_{\gamma tj} = -\Gamma_{0ij} = -\frac{1}{2}\left(g_{i0,j} + g_{0j,l} - g_{ij,0}\right) = \frac{1}{2} g_{ij,0} = \frac{1}{2}\dot{f}\bar{g}_{ij}$,

$$\theta \equiv u^\alpha; \alpha = |g|^{1/2}\left(|g|^{1/2} u^\alpha\right)_{,\alpha} = f^{-8/\omega(f^s/2}\Big)_{,0} = \frac{3}{2}\frac{j}{f}.$$

Далее из уравнений (1) и (2), а также из формулы

$$\sigma_{\alpha;\beta} = \frac{1}{2}\left(u_{\alpha;\mu} P^\mu_\beta + u_{\beta;\mu} P^\mu_\alpha\right) - \frac{1}{3}\vartheta P_{\alpha\beta}$$

(см. задачу 5.18) получаем

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i;j} + u_{i:t}\right) - \frac{1}{3}\vartheta g_{lj} = \frac{1}{2}\dot{f}\bar{g}_{ij} - \frac{1}{2}\dot{f}\bar{g}_{ij} = 0.$$

е) Имеем

$$a^\alpha = u^\alpha_{;\beta} u^\beta = u^\alpha_{i0} = \Gamma^\alpha_{00}$$

$$a_\alpha = \Gamma_{\alpha 00} = \frac{1}{2}\left(g_{\alpha 0,0} + g_{\alpha 0,0} - g_{00,\alpha}\right) = g_{0\alpha,0}.$$

Если $a_\alpha = 0$, то $g_{0\alpha,0} = 0$, и галактики движутся по геодезическим в том и только в том случае, если $g_{0t,0} = 0$.
ж) В задаче 7.23 мы показали, что $\omega_{\alpha\beta} = 0$ есть необходимое условие для того, чтобы семейство гиперповерхностей было ортогонально u. Поскольку $\mathbf{u} = \partial/\partial\tau$, а гиперповерхности $\tau = \text{const}$ «скреплены» (как перемычками) векторами $\partial/\partial x^i$, то из $\omega_{\alpha\beta} \neq 0$ вытекает
и, следовательно,

$$(\partial/\partial t) \cdot \left(\partial/\partial x^i\right) \neq 0$$

Если

$$g_{0t} \neq 0.$$

$$\omega_{\alpha\beta,0} \neq 0,$$

ТО Н

$$g_{\alpha\beta,0} \neq 0$$

а это означает в соответствии с п. «е» настоящей задачи, что Галактики не движутся по геодезическим.

Решение 19.39. Нз решения 14.9 мы знаем, что пространственный вектор ξ, связываюий две соседние мировые линии, подчиняется уравнениio

$$\nabla_{\mathbf{u}}\xi = \nabla_{\boldsymbol{u}}\mathbf{u} + (\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{a})\mathbf{u}$$

Подставляя $\xi = R$ в уравнение (1), получаем

$$Rn^{\alpha}_{;\beta}u^{\beta} + n^{\alpha}\dot{R} = Rn^{\beta}u^{\alpha}_{;\beta} + Ru^{\alpha}n^{\gamma}a_{\gamma}$$

где $\dot{R} = dR/dt = u^{\alpha}R,\alpha$. Если мы теперь скалярно умножим уравнение (2) на n^{α}, а затем воспользуемся уравнением разложения для $u_{\alpha:\beta}$(см. задачу 5.18):

$$u_{\alpha;\beta} = \omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\theta\left(g_{\alpha\beta} + u_{\alpha}u_{\beta}\right) - a_{\alpha}u_{\beta}$$

Т0 ПоУчнМ

$$\dot{R} = Rn^{\alpha}n^{\beta}\left[\omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\theta\left(g_{\alpha\beta} + u_{\alpha}u_{\beta}\right) - a_{\alpha}u_{\beta}\right] + Ru^{\alpha}n^{\gamma}n_{\alpha}a_{\gamma}$$

Далее, так как величина $\omega_{\alpha\beta}$ антисимметрнчна, а вектор n^{α} в уравненин (3) - пространственный единичный вектор ($n^{\alpha}u_{\alpha} = 0$), имеем

$$\frac{\dot{R}}{R} = \sigma_{\alpha\beta}n^{\alpha}n^{\beta} + \frac{1}{3}\theta$$

Усреднение $\sigma_{\alpha\beta}n^{\alpha}n^{\beta}$ по всем направлениям приводит к появлению члена, пропорционального следу $\sigma_{\alpha\beta}$. Так как след $\sigma_{\alpha\beta}$ равен нулю, окончательно получаем

$$\left\langle\frac{\dot{R}}{R}\right\rangle = \frac{1}{3}\theta$$

peuenue 19.40. Так как $\mathrm{u} = \mathrm{e}_0$ имеем
откуда

$$u_{\alpha;\beta} = u_{\alpha,\beta} - \Gamma\gamma_{\alpha\beta}u_{\gamma} = 0 + \Gamma^{0}_{\alpha\beta}$$

$$\vartheta = u_{\alpha:\beta}g^{\alpha\beta} = \Gamma^{0}_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = -(-g)^{-1/2}\left[g^{0\alpha}(-g)^{2/6}\right],\alpha$$

(см. п. ке» в задаче 7.7). Следовательно, для метрики Робертсона Yokepa

$$\theta = (-g)^{-\frac{1}{2}}(-g)^{\frac{1}{2}} = 3\dot{R}/R$$

Вращение равно нулю в силу симметрии символов $\Gamma^{0}_{\alpha\beta}$:
Для сдвига имеем

$$\omega_{\alpha\beta} = P^{\gamma}_{\beta}u_{[\alpha;\gamma]} = 0.$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\beta} &= P^{\gamma}_{\beta}u_{(\alpha;\gamma)} - \frac{1}{3}\vartheta P_{\alpha\beta},\\
\sigma_{0\alpha} &= 0,\\
\sigma_{ij} &= u_{(t,j)} - \frac{1}{3}\vartheta g_{ij} = -\frac{1}{2}\left(g_{0t,j} + g_{0j,t} - g_{ij,0}\right) - \frac{\dot{R}}{R}g_{ij} =\\
&= \frac{1}{2}g_{i,0} - \frac{\dot{R}}{R}g_{lj} = 0.
\end{aligned}$$

Для анизотропной метрики уравнение (1) по-прежнему справедливо, так что

$$\begin{aligned}
\vartheta &= (-g)^{-1/2}(-g)^{1/2}_{,0} = \dot{a} + \dot{b} + \dot{c},\\
\omega_{\alpha\beta} &= 0,\\
\sigma_{0\alpha} &= 0\\
\sigma_{ij} &= \frac{1}{3}g_{ij,0} - \frac{1}{3}\vartheta g_{ij} = \frac{1}{2}Ag_{ij},
\end{aligned}$$

где

$$a = \begin{cases} 2\dot{a} - \dot{b} - \dot{c} & \text{для } i = j = x, \\ 2\dot{b} - \dot{a} - c & \text{для } i = j = y, \\ 2\dot{c} - \dot{a} - \dot{b} & \text{для } i = j = z. \end{cases}$$

Рещение 19.41.

Проще всего можно вычислить тензор Риччи для этой метрики, если воспользоваться формулами из задачи. 9.33. Имеем

$$K_{ij} = -\frac{1}{2}\dot{g}_{ij},$$
$$0 = R^t{}_t = K_{li}K^{ij} - \dot{K},$$
$$0 = R^t{}_1 = K^t{}_{1,t} - K_{,j},$$
$$0 = R^i{}_1 = K^i{}_1 K - \dot{K}^i{}_1,$$

где точка означает производную d/dt. В уравнении (4) мы приравняли пространственные компоненты R_{ij} нулю, так как 3-геометрия является плоской, а в уравнении (3) заменили ковариантные производные частными.

Сворачивая уравнение (4), получаем $\dot{K} = K^2$, откуда

$$K = -1/t$$

если соответствующим образом выбрать постоянную интегрирования. Подставляя решение (5) обратно в уравнение (4), получаем

$$K^i_j = -K_j/t$$

откуда

$$K^i = A^i_f/t$$

где A^i - некоторая постоянная матрнца. Теперь выберем координаты таким образом, чтобы матрица K^l, была диагональной в некоторый момент времени $t = t_0$. Тогда, согласно уравнению (6), матрица K^i, остается диагональной и ее можно записать в виде

$$K^i = -\delta_j, P_j/t$$

где $P_\jmath = \text{const}$. Чтобы это уравнение было совместно с уравнением (5), должно выполняться условие

$$\sum_i P_i = 1$$

Уравнение (3) удовлетворяется автоматически, а из уравнения (2) следует условие

$$\sum_i P_i = 1$$

Тогда уравнение (1) принимает вид
откуда вытекает

$$\dot{g}_{ij} = -2g_{im}K^m = 2g_{ij}P_j/t$$

$$g_{ij} = \delta_{ij}t^{2P}$$

Таким образом, окончательный вид метрики (называемой «метрики Казнера») есть

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2P_1}dx^2 + t^{2P_2}dy^2 + t^{2P_3}dz^2$$

где P_1, P_2 и P_3 должны удовлетворять условиям (8) и (9).
Объем этой Вселенной пропорционален t:

$$\left[{}^{(3)}g_{lj}\right]^{1/2} = \left(t^{2\Sigma P_i}\right)^{1/2} = t$$

в отличие от радиационно-доминированной фридмановской Вселенной, где эта зависимость имеет вид $t^{3/2}$.

Довольно удобно можно изобразить связи между P_1, P_2 и P_3, налагаемые уравнениями (8) и (9), если начертить окружность радиусом $2/3$ с ентром в точке $y = 1/3$ и вписать в нее равносторонний треугольник. Тогда координнаты y вершин треугольника будут удовлетворять уравнениям (8) и (9). Отсюда становится ясно, что значения двух параметров P лежат в интервале $(0, 1)$, а значение третьего

- в интервале $(0, -1/3)$. Вырожденный случай $(1, 0, 0)$, как легко показать, соответствует плоскому пространству. Таким образом, пространство должно сжиматься вдоль одной из осей, одновременно расширяясь вдоль двух других.

13.5.17 Other Problems (??)

Ретение 21.1.

а) Формулу для производной от определителя можно найти, например, из тождества

$$\det a = e^{\mathrm{Sp_p}\{\ln A\}};$$

оно справедливо для любой неособенной матрицы A. (Здесь $\ln A$ понимается как обратная функция от e^A, где экспонента опреде ляется в виле степенного ряда.) Тогда мы имеем

$$\delta(\det A) = e^{\mathrm{Sp}}(\ln A\}\delta(\mathrm{Sp}\{\ln A\}) = (\det A)\mathrm{Sp}\left(A^{-1}\delta A\right),$$

откуда для $g \equiv \det\left(g_{\alpha\beta}\right)$ получаем

$$\delta g = g g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}$$

здесь мы воспользовались симметрией тензора $g_{\alpha\beta}$. Искомый результат получается непосредственно

$$\delta(-g)^{1/6} = -\frac{1}{2}(-g)^{-1/2}\delta g = \frac{1}{2}(-g)^{1/2} g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}.$$

б) Из определения $g^{\alpha\beta}$,
имеем

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\nu} = \delta_v^\alpha$$

$$\delta g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} + g^{\alpha\beta}\delta g_{\beta\gamma} = 0.$$

Умножая на g^{γ^8}, получаем

$$\delta g^{\alpha\beta}\delta_\beta{}^\gamma + g^{\gamma\delta} g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} = 0,$$

откуда и следует ответ:

$$\delta g^{\alpha\delta} = -g^{\gamma\delta} g^{\alpha\beta}\delta g_{\beta\psi}$$

Solution

21.2. Вариация L, получающаяся в результате вариации переменных поля Φ^A, дается формулой

$$(-g)^{\frac{1}{2}}\delta L\left(\Phi^A, \Phi^A, \mu, g_{\mu\nu}\right) = \left(\frac{\partial L}{\partial \Phi^A}\delta\Phi^A + \frac{\partial L}{\partial \Phi^A, \mu}\delta\Phi^A, \mu\right)(-g)^{\frac{1}{2}}.$$

Операция варьирования Φ^A коммутирует с частным дифференци. рованием:

$$\delta\left(\Phi^A, \mu\right) = \left(\delta\Phi^A\right)_{,\mu}$$

так что уравнение (1) можно переписать в виде

$$(-g)^{1/2}\delta L = (-g)^{1/2}\frac{\partial L}{\partial \Phi^A}\delta\Phi^A + \left(\frac{\partial L(-g)^{1/2}}{\partial \Phi^A, \mu}\delta\Phi^A\right)_{,\mu} -$$
$$-\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial L(-g)^{1/2}}{\partial \Phi^A, \mu}\right)\delta\Phi^A.$$

Второй член представляет собой полную дивергенцию, приводящую к появлению в δS члена, имеющего вид интеграла по поверхности. Следовательно, он равен нулю, так как мы полагаем $\delta\Phi^A = 0$ на поверхности. Таким образом

$$0 = \frac{\delta L}{\delta\Phi^A} = \frac{\partial L}{\partial\Phi^A} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial L(-g)^{1/i}}{\partial\Phi^A \cdot \mu}\right)\frac{1}{(-g)^{1/2}}$$

Решение 2I.3. Поскольку $L(-g)^{1/2}d^4x$ - скаляр, он не изменяется при инфинитезимальном преобразовании координат:

$$\bar{X}^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}$$

Переобозначая постоянную интегрирования, условно записанную в виде переменной, мы можем вновь вернуться от $d^4\bar{x}$ к d^4x. Следовательно, результирующее изменение $L(-g)^{1/2}$ есть производная Ли (см. задачу 8.17), так что мы можем записать

$$0 = \delta S = \int \mathscr{L}_{\xi} \left(L(-g)^{1/2} \right) d^4x =$$
$$= \int \left[\frac{\delta L}{\delta \Phi^A} \left(\mathscr{L}_{\xi} \mathbb{Q}^A \right) (-g)^{\frac{1}{2}} + \frac{\delta \left(L(-g)^{1/2} \right)}{\delta g_{\mu v}} \mathscr{L}_{\xi} g_{\mu v} \right] d^4x.$$

Первый член в подынтегральном выражении обращается в нуль в силу уравнений движения (задача 21.2), и уравнение (1) сводится к уравнению
Посколbку

$$0 = \frac{1}{2} \int T^{\mu\nu} \mathscr{L}_{\xi} g_{\mu v} (-g)^{1/2} d^* x$$

мы Получаем

$$\mathscr{L}_{\sharp} g_{\mu v} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{v;\mu}$$

$0 = \int T^{\mu v} \xi_{\mu;v} (-g)^{1/2} d^4x = \int \left(T^{\mu v} \xi_{\mu} \right); v (-g)^{1/2} d^4x - \int T^{\mu v} : v \xi_{\mu} (-g)^{1/2} d^4x.$
Первый член имеет вид

$$\int \left(T^{\mu v \xi_{\mu}} \right)_i v (-g)^{1/2} d^4x = \int \left((-g)^{1/2} T^{\mu v} \xi_{\mu} \right)_{,v} d^4x$$

и сводится к поверхностному интегралу, который обращается в нуль Поскольку ξ_{μ} - произвольная величина, из уравнения (2) следует

$$T^{\mu} v_{iv} = 0$$

Solution 21.4.

а) При независимом варьировании

мы получаем

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu},$$
$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \to \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$$

$$\delta \left((-g)^{1/2} R \right) = (-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + R \delta (-g)^{1/2} + (-g)^{1/2} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.$$

Так как

$$R_{\mu v} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,v} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{v\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha}$$

первый член в правой части уравнения (1) можно записать в виде

$$(-g)^{1/2} g^{\mu v} \delta R_{\mu v} = \left((-g)^{1/2} g^{\mu v} \delta \Gamma^{\alpha}_{\mu v} \right)_{,\alpha} - \left((-g)^{1/2} g^{\mu\nu v} \delta \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\alpha} \right)_{,v} -$$
$$- \left((-g)^{1/2} g^{\mu v} \right)_{,\alpha} \delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \left((-g)^{1/2} g^{\mu v} \right)_{,v} \delta \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} +$$
$$+ (-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \left(\delta \Gamma^{\alpha}_{\alpha\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\mu v} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\sigma} \delta \Gamma^{\sigma}_{\mu v} - \delta \Gamma^{\alpha}{}_{v\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{v\sigma} \delta \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\alpha} \right).$$

Первые два члена в правой части выражения (3) представляют собой полные дивергенции и поэтому не дают вклада в δS, так как интеграл от дивергенции можно записать в виде интеграла по поверхности, а на поверхности области интегрирования $\delta\Gamma = 0$. Соответствующим образом переименовывая немые индексы, мы можем переписать выражение (3) в виде
где

$$(-g)^{1/2} g^{\mu v} \delta R_{\mu v} = (-g)^{1/2} \left(A^{\mu v}_{\sigma} + \delta^{v}_{\sigma} B^{\mu} \right) \delta \Gamma^{\sigma}_{\mu v}$$

$$A^{\mu\nu}_{\sigma} \equiv g^{\mu\nu} \Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\sigma} - (-g)^{-1/2} \left[(-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \right]_{,\sigma} - g^{\alpha\nu} \Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma} - g^{\alpha\mu} \Gamma^{\nu}_{\alpha\sigma},$$
$$B^{\mu} \equiv (-g)^{-1/2} (1-g)^{1/2} g^{\mu\beta} \Big]_{,\beta} + g^{\alpha\beta} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}.$$

Из задачи 21.1 мы знаем, что

$$\delta\left[(-g)^{1/2}\right] = -\frac{1}{2}(-g)^{1/2} g_{\mu v}\delta g^{\mu\nu}$$

откуда

$$0 = \delta S = (16\pi)^{-1}\int (-g)^{1/2} d^4x \left(A^{\mu\nu}_{\sigma} + \delta^{v}{}_{\sigma} B^{\mu}\right)\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} +$$

$$+(16\pi)^{-1}\int (-g)^{1/2} d^4x \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu} + \int \frac{\delta\left(L_{\mathrm{Be}\mu}(-g)^{1/2}\right)}{\delta g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} d^4x.$$

Поскольку вариация $\delta\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ симметрична, из рассмотрения первого члена в уравнении (8) получаем

$$A^{\mu v}_{\sigma} + \frac{1}{2}\delta_{\sigma} B^{\mu} + \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\sigma} B^{v} = 0.$$

Умножая уравнение (9) на $\delta^{\sigma}{}_{v}$ и сворачивая индексы, находим

$$A^{\mu\sigma}_{\sigma} + 2B^{\mu} + \frac{1}{2}B^{\mu} = 0$$

Производя ту же операцию с тождеством (5) и сравнивая его с (6), приходим к равенству

$$A^{\mu\sigma}_{\sigma} = -B^{\mu}$$

Из уравнений (10) и (11) следует

$$B^{\mu} = 0$$

поэтому уравнение (9) сводится к уравнению

$$A^{\mu v}_{\sigma} = 0$$

Если записать $A^{\mu\nu}_{\sigma}$ в явном виде с помощью тождества (5), то уравнение (12) можно записать следующим образом:
где

$$g^{\mu\nu}C_{\sigma} = g^{\mu\nu},\sigma + g^{\alpha v}\Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma} + g^{\alpha\mu}\Gamma^{\nu}_{\alpha\sigma}$$

$$C_{\sigma} = (-g)^{-1/2}(-g)^{1/2}_{,\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\alpha\sigma}$$

$\bigvee'$ множая уравнение (13) на $g_{\mu 1}$, находим

$$4C_{\sigma} = g^{\mu\nu}_{,\sigma} g_{\mu\nu} + 2\Gamma^{\alpha}_{\alpha\sigma} = -2(-g)^{-1/2}(-g)^{1/2}_{,\sigma} + 2\Gamma^{\alpha}_{\alpha\sigma} \equiv -2C_{\sigma}$$

(где для получения второго равенства мы воспользовались результатом задачи 21.1). Отсюда следует, что $C_{\sigma} = 0$. Если мы введем определение

$$\Gamma_{\lambda\alpha\sigma} \equiv g_{\lambda\mu}\Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma}$$

и умножим уравнение (13) на $g_{\lambda\mu}g_{\gamma v}$, то получим
откуда

$$0 = -g_{\gamma\lambda,\sigma} + \Gamma_{\lambda\gamma\sigma} + \Gamma_{\gamma\lambda\sigma},$$

$$\frac{1}{2}\left(g_{\gamma\lambda,\sigma} + g_{\gamma\sigma,\lambda} - g_{\sigma\lambda,\gamma}\right) = \Gamma_{\gamma\lambda\sigma},$$

что и дает нам один из требующихся результатов.
Если вернуться теперь к уравнению (8) и воспользоваться результатами задачи 21.3, будем иметь

$$\frac{\delta\left(L_{\mathrm{Bem}}(-g)^{1/2}\right)}{\delta g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} = \frac{\delta\left(L_{\mathrm{Bem}}(-g)^{1/2}\right)}{\delta g_{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(-g)^{1/2}T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} =$$

$$= -\frac{1}{2}(-g)^{1/2}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.$$

Отсюда заключаем, что
ИЛИ

$$(16\pi)^{-1}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) - \frac{1}{2}T_{\mu\nu} = 0,$$

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

б) Хотя символ $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ (понимаемый теперь как символ Кристоффеля, образованный из $g_{\alpha\beta}$) и не является тензором, $\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ есть тензор (см. задачу 8.26). Следовательно, мы можем упростить вычисление $\delta R_{\mu v}$, работая в локальной инерциальной системе отсчета, где символы Г обращаются в нуль. В этой системе уравнение (2) сводится к уравнению

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu v,\alpha} - \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,v} = \delta\Gamma^{\alpha_\mu - \delta\Gamma_{\mu\alpha;v}}_{\mu v;\alpha}$$

Так как это тензорное уравнение, оно справедливо в любой системе координат. Так как Г суть символы Кристоффеля, $g_{\mu v;\alpha} = 0$ и

$$\begin{aligned}(-g)^{1/2} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= (-g)^{1/2}\left[\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\right)_{;\alpha} - \left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}g^{\mu l v}\right)_{;v}\right] = \\ &= \left((-g)^{1/2}g^{\mu v}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right)_{,\alpha} - \left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}g^{\mu v}(-g)^{1/2}\right)_{,v}\end{aligned}$$

[здесь мы для получения второго равенства воспользовались результатом задачи 7.7 (ж)). Поскольку это выражение есть полная дивергенция, оно не дает вклада в δS. Остающиеся в уравнениях (1) и (18) члены приводят к уравнению (19), как и в п. «а»].

Solution

21.5. Беря вариацию от действия
получаем

$$S = -(8\pi)^{-1}\int\left(\Phi;\alpha:\alpha + m^2\left(\Phi^2\right)(-g)^{1/2}d^4x\right.$$

$$0 = \frac{\delta L}{\delta\Phi} = \left[2m^2\Phi - 2(-g)^{-1/2}\left[(-g)^{1/2}\Phi,\alpha\right],\alpha\right](-g)^{1/2}$$

ИЛи

$$\Box\Phi - m^2\Phi = 0$$

Из задачи 21.3 следует, что тензор энергии-импульса есть

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu} &\equiv -2(-g)^{-1/2}\frac{\delta\left[(-g)^{1/2}L\right]}{\delta g^{\mu\nu}} = \\ &= \frac{1}{4\pi}(-g)^{-1/2}\left[\Phi_{,\mu}\Phi_{,v}(-g)^{1/2} - \frac{1}{2}\left(\Phi_{,\alpha}\Phi,\alpha + m^2\Phi^2\right)(-g)^{1/2}g_{\mu\nu}\right] = \\ &= \frac{1}{4\pi}\left[\Phi_{,\mu}\Phi,v - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\Phi_{,\alpha}\Phi,\alpha + m^2\Phi^2\right)\right]\end{aligned}$$

и, следовательно, его дивергенция равна

$$T^{\mu v};v = \tfrac{1}{4\pi}\left(\Phi^{,\mu};v^{()^v} + \Phi^{\mu}\Box\Phi - \Phi_{,\alpha};\mu\Phi^{,\alpha} - m^2\Phi\Phi^{\mu}\right)$$

Для скалярного поля Φ справедливо также соотношение

$$\Phi^{\cdot\mu} = \Phi_{\cdot v};\mu$$

в силу которого уравнение (3) принимает вид

$$T^{\mu v}_{iv} = \frac{\Phi^{,\mu}}{4\pi}\left(\Box\Phi - m^2\Phi\right) = 0$$

Последнее равенство следует из уравнения (1).
Решение 21.6. Вариация интеграла действия дает

$$\begin{aligned}\frac{\delta\left(L(-g)^{1/2}\right)}{\delta A_\mu} &= -\frac{1}{4\pi}\frac{\delta\left(A_{[\mu;v]^A}A^{[\mu;v]}(-g)^{1/2}\right)}{\delta A_\mu} = \\ = -\frac{1}{4\pi}\frac{\delta\left(A_{[\mu,v]}A^{[\mu,v]}(-g)^{1/2}\right)}{\delta A_\mu} &= -\frac{1}{4\pi}\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{\partial}{\partial x^{\mu\mu}}\left(A^{[\mu,v]}(-g)^{1/2}\right) = \\ &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(F^{v\mu}(-g)^{1/2}\right) = -\frac{(-g)^{1/2}}{2\pi}F^{v\mu};\mu\end{aligned}$$

где мы воспользовались результатом задачи 7.7 (и).
Используя формулу, выражающую тензор энергии-импульса через плотность лагранжиана, получаем

$$T_{\alpha\beta} \equiv -2\frac{\delta L}{\delta g^{\alpha\beta}} + Lg_{\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi}\frac{\delta\left(F_{\mu\nu}F_{\sigma\tau}g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}\right)}{\delta g^{\alpha\beta}} - \frac{1}{16\pi}F_{\mu v}F^{\mu v}g_{\alpha\beta} =$$
$$= \frac{1}{4\pi}F_{\alpha}{}^{v}F_{\beta v} - \frac{1}{16\pi}F_{\mu v}F^{\mu v}g_{\alpha\beta}.$$

Рассмотрим теперь плотность лагранжиана вида

$$L = \left(-\frac{1}{16\pi}F_{\mu v}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F^{\mu v}A_{\mu;v}\right)(-g)^{1/2}$$

Вариация L по A_μ дает уравнения Максвелла:

$$F^{\mu v} : v = 0,$$

а варьирование L по $F^{\mu v}$ приводит к соотношению

$$F^{\mu\nu} = 2A^{[v;\mu]}.$$

Реиежие 21.7. Варьируя лагранжиан по , получаем
откуда

$$(- - g)^{1/2}\left(R + \frac{\omega}{\Phi^2}\Phi, \alpha\Phi^{,\alpha}\right) = -2\omega\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\Phi\cdot\alpha(-g)^{1/2}}{\Phi}\right)$$
$$2\omega\Phi^{-1}\Box\Phi - \omega\Phi^{-2}\Phi_{,\alpha}\Phi^{\alpha\alpha} + R = 0$$

здесь мы использовали равенство

$$\Box\left(\Phi \equiv \left(, \alpha^{\cdot}\alpha = \frac{1}{(-g)^{\frac{1}{2}}}\left(\left(D^{,\alpha}(-g)^{1/2}\right), \alpha\right.\right.\right.$$

Вариация L по $g_{\alpha\beta}$ содержит три члена:

$$\frac{\delta\left(-\omega\Phi\cdot\alpha^{\Phi}\cdot\beta^{g}g_{\alpha\beta}\Phi^{-1}(-g)^{1/2}\right)}{\delta g_{\alpha\beta}} =$$

(выгружу заново формулы, они ужасно скопировались.)
а также
(II) $\delta\left(\Phi R(-g)^{1/2}\right) = (-g)^{1/2}\left(\mathrm{D}C^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} + \left(\mathrm{D}(-g)^{1/2}g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}\right.\right.$
ГДе

$$(-g)^{1/2}g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\left[(-g)^{1/2}\left(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma\gamma_{\alpha\beta} - g^{\alpha\gamma}\delta\Gamma^{\tau}{}_{\alpha\tau}\right)\right]$$

(см. задачу 21.4). Кроме того, из выражения для символов через производные от g имеем

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu v} = -g^{\lambda\rho}\delta g_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu v} + \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left[\left(\delta g_{\rho\mu}\right), v + \left(\delta g_{\rho v}\right)_{,\mu} - \left(\delta g_{\mu v}\right), \rho\right] =$$
$$= \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left[\left(\delta g_{\rho\mu}\right)_{iv} + \left(\delta g_{\rho v}\right)_{i\mu} - \left(\delta g_{\mu v}\right)_{;\rho}\right].$$

Далее, используя уравнения (2в) и (2г), можно записать

$$\Phi(-g)^{1/2}g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} \to \delta g^{\alpha\beta}\left(-\Phi, \alpha : \beta + g_{\alpha\beta}\Box\ \mathrm{D}\right)(-g)^{1/2}\ ,$$

где стрелка обозначает операцию отбрасывания всех иплных дивергенций (они обрацаются в нуль при интегрировании). Объе. диняя уравнения (2б) и (2 д), получаем

$$\delta\left(\Phi R(-g)^{1/2}\right) = (-g)^{1/2}\delta g^{\alpha\beta}\left[-\Phi, \alpha i\beta + g_{\alpha\beta}\Box\Phi + \Phi G_{\alpha\beta}\right]$$

Оставшийся третий член имеет вид
(III) $16\pi\frac{\delta\left(L_{\text{вещ}}\,(-g)^{1/2}\right)}{\delta g_{\alpha\beta}} = -8\pi(-g)^{1/2}T^{\alpha\beta}$.

И, наконец, используя уравнения (2а), (2е) и (2ж), мы прнходим к уравнениям поля, полученным путем варьирования по $g^{\alpha\beta}$:

$$G_{\alpha\beta} + \Phi^{-1}\left(g_{\alpha\beta}\Box\Phi - \Phi, \alpha : \beta\right) -$$
$$-\omega\Phi^{-2}\left(\Phi_{,\alpha}\Phi_{,\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\Phi_{,\mu}\Phi, \mu\right) - 8\pi\Phi^{-1}T_{\alpha\beta} = 0$$

Реuение 21.8.

Выберем для простоты такне координатю (они называются гауссовыми нормальными коорднатамн, см. задат 8.25), в которых метрика принимает вид

$$ds^2 = dn^2 + {}^{(3)}g_U dx^l dx'$$

Координаты $x^t (i = 1, 2, 3)$ играют роль «жестких перемычек» внутри поверхностного слоя, который расположен, как мы будем считать, при $n = 0$. Из уравнений для начальных значений имеем

$$G^i{}_1 = {}^{(3)}G^i_1 + \left(K^i{}_1 - \delta^i, \mathrm{Sp}\, K\right)_{,n} - (\mathrm{Sp}K)K^i,$$
$$+\frac{1}{2}\delta_{ii}(\mathrm{Sp}K)^2 + \frac{1}{2}\delta^i{}_1 \mathrm{Sp}(K)^2 = 8\pi T^i{}_\gamma.$$

Проннтегрируем теперь по n от $-\varepsilon$ до $+\varepsilon$, используя тот факт, что n представляет собой собственное расстояние, перпендикулярное 3-поверхности, а затем устремим ε к нулю. Поскольку внутренняя геометрия 3-поверхности вполне определена, единственным остающимся после этого «предельного» интегрирования членом является член, включающий производные внешней кривизны. Отсюда, обозначая «скачок» **K** через [K], находим
или

$$\left[K^t; -\delta^l, \mathrm{Sp}[K] = 8\pi S^t\right.$$

откуда

$$\mathrm{Sp}[K] = -4\pi S_i l = -4\pi {}^{(3)}g_{ij} S^{il}$$

$$\left[K^i_1 = i\pi\left(S_{11} - \frac{1}{2}\delta^i{}_1 S_{kk}\right)\right.$$

Solution

21.9. Из уравнений для начальных значений имеем

$$G^n{}_l = -\left\{K_l{}^{m_{1m}} - (\mathrm{Sp}\, K)_i\right\} = -\left\{K_l{}^m - \delta_l{}^m \mathrm{Sp}(K)\right\}_{|m} = 8\pi T^n{}_i.$$

"Скачок» G^n ‘ при пересечении 3-поверхности есть

$$\left\{[K_l{}^m, -\delta^m_l \mathrm{Sp}[K]\right\}_{|m} = -8\pi T^{n_i}\Big].$$

Совместно о результатом задачи 21.8 это дает

$$S^{m_{1m}}_l = -\left[T^n\right]$$

Рещение 21.10. «Поверхностный тензор энергии-имиульса» тонкой пылевой оболочки имеет вид

$$S^{\alpha\beta} = \sigma u^\alpha u^\beta$$

Из решения задачи 21.8 имеем
или

$$\left[K^i,\right] = 8\pi\left\{\sigma u^i u_1 - \frac{1}{2}\delta_1(-\sigma)\right\}$$

$$[K_{ij}] = 8\pi\sigma\left\{u_i u_i + \frac{1}{2}{}^{(3)}g_{ij}\right\}.$$

Так как вне оболочки энергия-импульс отутетвует, $[T^n l] = 0$ и из уравнений движения (см. задачу. 21.9) получаем

$$0 = S^m_i = \sigma_{,m} u^m u_i + \sigma u^m u_i + \sigma u_{i:m} u^m =$$
$$= \frac{d\sigma}{d\tau} u_i + \sigma u_i u^m_m + \sigma u_{i|m} u^m$$

Свертывая это выражение u, мы проверяем второе из приведенных в Условии соотношений:

$$\frac{d\sigma}{d\tau} + \sigma u^m_m = 0$$

Сравнивая с уравнением (2), мы видим, что
Следовательно,

$$u_{i|m}\dot{u}^m = 0$$

$$\mathbf{a} = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = u^i\nabla_i\left(u^j\mathbf{e}_j\right) = u^i\left(u^{j_{ij}}_{ij}\mathbf{e}_j + u^jK_{ij}\mathbf{n}\right) = u^iu^jK_{ij}\mathbf{n}$$

[Для получения второго от конца равенства мы воспользовались уравнением (2) из решения 9.32.] Третье искомое соотношение следует теперь из уравнений (1) и (4):

$$\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^- = u^iu^j\left[K_{ij}\right]\mathbf{n} = 4\pi\sigma n$$

Чтобы проверить четвертое соотношение, нам необходимо показать, ЧТО

$$\left(K^+_{ij} + Ki\right)u^iu^j = 0$$

Сделаем это с помощью уравнения для начальных значений

$$\left[G_nn_n\right] = 8\pi\left[T_n\right] = 0$$

Так как кривизна (3) R непрерывна, отсюда получаем

$$\begin{aligned}0 =& \left[\mathrm{Sp}\left(K^2\right) - \left(\mathrm{Sp}K^i\right)^2\right] = K^{i+}_jK^{j+}_i - K^{i-}_jK^i_i - \left(K^{i+}_i\right)^2 + \left(K^{i-}_i\right)^2 = \\ &= \left(K^{i+}_j + K^{i-}_j\right)\left\{K^{j+}_i - K^{i-}_j - {}^{(3)}g^{ij}\left(K^{a+}_a - K^{a-}_a\right)\right\} = \\ &= \left(K^{i+}_j + K^{i-}_j\right)\left\{\left[K^j_i\right] - \delta^j_i\,\mathrm{Sp}[K]\right\},\end{aligned}$$

где мы воспользова.пись также легко проверяемым фактом - тем, что K^{i+}_j и K^{i-}_j коммутируюот. Поскольку
отсюда следует

$$\left[K^j_i\right] = 8\pi\sigma\left(u^ju_i + \frac{1}{2}{}^{(3)}\delta_i\right)$$

К

$$\left[K^i_i\right] = 4\pi\sigma$$

$$\left[K_i\right] - \delta_i\left[K^i_i\right] = 8\pi\sigma\left(u^ju_i\right)$$

откуда, наконец, получаем

$$\left(K^{i+}_j + K^{i-}_j\right)u^ju_i = 0$$

Решение 21.11. Если τ - собственное время, измеряемое наблюдателем, покоящимся относительно пыли, то движение оболочки описывается функцией $r(\tau)$, где r - радиальная координата оболочки либо во внешней, либо во внутренней метрике. Метрику оболочки можно записать в виде

$$ds^2 = -d\tau^2 + R^2(\tau)\left(d\theta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right).$$

Здесь $4\pi R^2$ - площадь поверхности оболочки в момент времени τ, откуда ясно, что $R(\tau) = r(\tau)$. Из второго соотношения задачи 21.10 следует

$$0 = \frac{d\sigma}{d\tau} + \sigma u^i_{,i} = \left(\sigma u^i\right)_{|i} = \left(\sigma\left({}^{(3)}g\right)^{1/2}u^i\right)_{,i} / \left({}^{(3)}g\right)^{1/2}$$

Но $u^\tau = 1$ и ${}^{(3)}g = R^4(\tau)$, так что $\left(\sigma R^2\right),\tau = 0$. Отсюда вытекает, что величина $4\pi R^2\sigma = \mu$, которую мы отождествляем с массой покоя оболочки, является постоянной.
Чтобы найти уравнение движения, воспользуемся условием сшивки из задачи 21.10:

$$\left[K_{\vartheta\vartheta}\right] = 8\pi\sigma\left(u_\vartheta u_\vartheta + \frac{1}{2}{}^{(3)}g_{\vartheta\vartheta}\right) = 4\pi\sigma{}^{(3)}g_{\vartheta\vartheta} = \mu.$$

Непосредственно находя $K_{\vartheta\vartheta}$, получаем

$$K_{\vartheta\vartheta} = -n_{\vartheta;\vartheta} = n_\alpha\Gamma^\alpha_{\vartheta\vartheta} = -\frac{1}{2}n^rg_{\vartheta\vartheta,r} = -rn^r,$$

откуда

$$\left[K_{\vartheta\vartheta}\right] = -r\left(n^{r+} - n^{r-}\right) = \mu,$$

где n^{r+} и n^{r-} - значения радиальной компоненты нормали во внешней и внутренней геометрии.

Используя соотношения $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}=0$ и $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=-\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=1$, мы можем найти компонены $\mathbf{u}$ и $\mathbf{n}$. Вне оболочки имеем

$$\begin{aligned}1&=\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(u^t\right)^2-\left(u^r\right)^2/\left(1-\frac{2M}{r}\right),\\0&=n_ru^r+n_tu^t,\\1&=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(n_t\right)^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(n_r\right)^2.\end{aligned}$$

Исключая u^t и n_t, находим

$$n_r^+=\left[\frac{1+\left(u^r\right)^2/\left(1-\frac{2M}{r}\right)}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\right]^{1/2}.$$

На оболочке $r=R(\tau)$ и $u^r=dR/d\tau\equiv\dot{R}$, так что контравариантная компонента $\mathbf{n}$ вне оболочки имеет вид

$$n^{r+}=\left(1-\frac{2M}{R}+\dot{R}^2\right)^{1/2}$$

Вычисления n^{r-} абсолютно индентичны, а полученный ответ отличается лишь отсутствием члена с M. Таким образом, получаем уравнение

$$\mu=-R\left(n^{r+}-n^{r-}\right)=-R\left\{\left[1-\frac{2M}{r}+\dot{R}^2\right]^{1/2}-\left[1+\dot{R}^2\right]^{1/s}\right\}.$$

Решая его относительно M, приходим к уравнению движения

$$M=\mu\left(1+\dot{R}^2\right)^{1/2}-\mu^2/2R$$

Если $\dot{R}=0$ при $R=\infty$ (случай падения на центр из состояния покоя на бесконечности), то $M=\mu$, и мы имеем

$$\dot{R}=-\frac{\mu}{2R}\left(1+\frac{4R}{\mu}\right)^{1/2}.$$

Это уравнение легко проинтегрировать и получить

$$\frac{4}{\mu}\tau=-\frac{1}{3}\left(1+\frac{4R}{\mu}\right)^{1/2}+\left(1+\frac{4R}{\mu}\right)^{1/2}-\frac{2}{3},$$

где мы приняли, что $R=0$ соответствует момент времени $\tau=0$.

Рещекие 21.12. Чтобы найти мгновенную пространственную метрику, нам нужно лишь рассмотреть метрику и уравнения поля на пространственноподобной поверхности Коши S, являющейся поверхностью симметрии по времени. Шесть из десяти уравнений Эйнштей на определяют метрику вне S и нас здесь интересовать не будут. Остающиеся четыре уравнения представляіот собой уравнения для начальных значений, и их можно переписать в виде [см. уравнения (6) и (7) из задачи 9.33]

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}{}^{(3)}R-\frac{1}{2}\left(K^i\right)^2+\frac{1}{2}K_l{}^mK^l{}_m=0,\\&K_i{}^{m}{}_{|m}-K^m{}_{m'i}=0,\end{aligned}$$

где ${}^{(3)}R$ - скаляр кривизны на поверхности $S, K^i{}_m$ - внешняя кривизна, а вертикальная черточка означает ковариантное дифференцирование по отношению к 3-геометрии ${}^{(3)}g_{ij}$ на поверх ности S; кроме того, мы использовали вакуумные уравнения для начальных значений.

В некоторый момент симметрии по времени времениподобная нормаль к S, через которую выражается K_{ij}, сама меняет знак на минус при обращении времени. Следовательно, $K_{ij}=-K_{ij}$, и поэтому внешняя кривизна S должна быть равна нулю. Для случая $K_{ij}=0$ на S уравнение (16) удовлетворяется тождественно, а уравнение (1a) принимает вид

$$(3)\ R=0.$$

Начнем с того, что выберем в качестве решения уравнения (2) «пробную функцию» вида

$$g_{ij}=\Phi^4\eta_{ij}$$

и посмотрим, можно ли подобрать такое , чтобы уравнение (2) удовлетворялось. Имеем

$$^{(3)}R = g^{ij}\left(\Gamma^{m}{}_{lm,j} - \Gamma^{m}{}_{ij,m} + \Gamma^{m}{}_{ll}\Gamma^{l}{}_{jm} - \Gamma^{l}_{ml}\Gamma^{m_{lj}}\right).$$

Для пробной функции вида (3) символы Кристоффеля принимают вид

$$\begin{aligned}
\Gamma^{m}_{li} &= 2\Phi\Phi^{-1}\left(\Phi_{,i}\delta^{m} + \Phi_{,l}\delta^{m} - \Phi,{}_{i}\eta_{li}\right), \\
g^{ij}\Gamma^{m}{}_{im,j} &= -6\Phi^{-6}(\nabla\Phi)^2 + 6\left(\Phi^{-5}\nabla^2(\Phi,\right. \\
g^{ij}\Gamma^{m}{}_{ij,m} &= 2\Phi^{-6}(\nabla\Phi)^2 - 2\Phi\Phi^{-5}\nabla^2\Phi \\
g^{ij}\Gamma^{m}{}_{ll}\Gamma^{l}_{jm} &= -4\Phi^{-6}(\nabla\Phi)^2 \\
g^{ij}\Gamma^{l}_{ml}\Gamma^{m}_{ij} &= -12\Phi^{-6}(\nabla\Phi)^2
\end{aligned}$$

где мы ввели следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
(\nabla\Phi)^2 &\equiv \Phi_{,i}\Phi_{,,\eta^{ij}} \\
\nabla^2\Phi &\equiv \Phi_{,i,j}\eta^{ij}
\end{aligned}$$

Если подставить значения (5) в уравнение (4), то уравнение (2) сведется к уравнению

$$(3)\ R = 0 = 8\Phi^{-5}\nabla^2\Phi$$

которое удовлетворяется любым решением уравнения Лапласа. Одно из таких решений есть

$$\Phi = 1 + \sum_i \frac{M_i}{2r_i}$$

а соответствующая ему метрика имеет вид

$$g_{ij} = \left(1 + \sum_i \frac{M_i}{2r_i}\right)^4 \eta_{ij}$$

С точностью до членов низшего порядка по M/r метрику можно записать следующим образом:

$$g_{ij} \approx \left(1 + \sum_i \frac{2M_i}{r_l}\right)\eta_{ij}$$

она представляет собой «пост-ньютоновское» приближение к пространственной части метрики, генерируемой точечными массами M_l, расположенными в точках r_i. Следовательно, метрика (8) действительно является мгновенной пространственной метрикой, соответствующей произвольному пространственному распределению конечного числа точечных масс в некоторый момет симметрии по времени. Решение 21.13. Заметим с самого начала, что квадрат U^{α}, являющийся лоренц-инвариантным, как раз и представляет собой определитель $U^{AA'}$. Следовательно, аналогом метрики Минковского будет являться система матриц, служащих для поднятия и опускания индексов при конструировании определителя UAA':

$$\delta^{C}_{D}\det\left(U^{AB}\right) = U^{FC}U^{EG}\varepsilon_{FE}\varepsilon_{DG}$$

где

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{FE} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta^{C}_{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что пара матриц ε играет роль мегрики Минковского.
Чтобы найти аналог преобразований Лоренца, обозначим матрицу такого преобразования через L:

$$U^{F'C'} = L^{F'C'}_{FC}U^{FC}.$$

Требование инвариантности скалярного произведения двух векторов $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ приводит к условию

$$U^{AB}V^{CD}\varepsilon_{AC}\varepsilon_{BD} = L^{E'F'}_{EF}U^{EF}L^{G'H'}_{GH}V^{GH}\varepsilon_{E'G'}\varepsilon_{F'H'}$$

Это означает, что должно выполняться равенство
откуда вытекает

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{EG}\varepsilon_{FH} = L^{E'F'}_{EF}L^{G'A'}_{GH}\varepsilon_{E'G'}\varepsilon_{F'H'}$$

$$\delta^{M}_{E}\delta^{K}_{H} = L^{E'F'}_{EF}L^{G'A'}_{GH}\varepsilon_{E'G'}\varepsilon_{F'H'}\varepsilon^{GM}\varepsilon^{FK}$$

и, следовательно,

$$\det\left(L^{E'F'}_{EF}\right) = 1$$

Таким образом, матрицы преобразований Лоренца должны быть унимодулярными (т. е. определители их должны быть равны единице).

Solution 21.14.

а) Результат следует из того факта, что индексы B, C и D пробегают всего лишь два значения и поэтому не могут все быть различными.
б) Записав результат п. «а» и воспользовавшись антисимметрней ε_{AB}, получим

$$\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD} + \varepsilon_{AC}\varepsilon_{DB} + \varepsilon_{AD}\varepsilon_{BC} = 0$$

Свертывая это уравнение с ξ^{CD}, находим (будьте внимательными со знаками!)

$$-\varepsilon_{AB}\xi^{C}_{C} + \xi_{AB} - \xi_{BA} = 0.$$

Отсюда имеем

$$\xi_{AB} = \xi_{(AB)} + \xi_{|AB|} = \xi_{(AB)} + \frac{1}{2}\varepsilon_{AB}\xi^{C}_{C}$$

Решение 21.15. Результат получается немедленно из соотношений

$$\varepsilon^{cd}_{ab} = i\left(\delta^{C}_{A}\delta^{D}_{B}\delta^{C'}_{B'}\delta^{D'}_{A'} - \delta^{C}_{B}\delta^{D}_{A}\delta^{C'}_{A'}\delta^{D'}_{B'}\right)$$

[см., например, книгу Пирани (Pirani $F.$ A. E., Lectures on General Relativity, 1965) стр. 315] и

$$* \mathrm{T}_{ab} = \frac{i}{2}e^{cd}_{ab}T_{cd}$$

Решение 21.16. Поскольку «штрихованные» и «нештрихованные» индексы коммутируют, мы имеем

$$\begin{aligned} T_{(ab)} &= \frac{1}{2}\left(T_{ABA'B'} + T_{BAB'A'}\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(T_{ABA'B'} - T_{BAA'B'} + T_{BAB'A'} - T_{ABB'A'}\right) + \frac{1}{2}T_{(ab)} + \\ &+ \frac{1}{4}\left(T_{BAA'B'} + T_{ABB'A'}\right) \end{aligned}$$

Воспользсвавшись результатом задачи 21.14, это соотношение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} T_{(ab)} &= 2T_{|AB_{|}|A'B'1} + \frac{1}{2}\left(T_{BAA'B'} + T_{ABB'A'}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{AB'}\varepsilon_{A'B'}T_{CC}C^{C'} + \frac{1}{2}\left(T_{BAA'B'} + T_{ABB'A'}\right). \end{aligned}$$

И, наконец, используя результат задачи 21.15, получаем

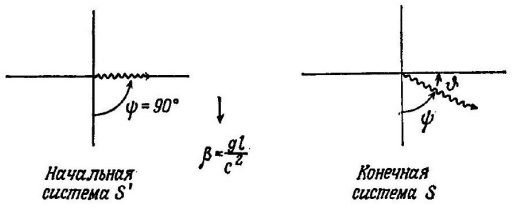
$$\begin{aligned} T_{BAA'B'} &= T_{(ab)} - \frac{1}{2}\varepsilon_{AB}\varepsilon_{A'B'}T^{c}_{C}c^{C'} + *T_{(ab)} = \\ &= T_{(ab)} - \frac{1}{2}g_{ab}T^{c}_{c} + i * T_{ab}. \end{aligned}$$

13.5.18 Problems about Experiments Testing Gravity Models

Решение 20.1.

Заметим, что в данном случае «реальные» (приливные) гравитационные силы отсутствуют; свет распространяется по прямой в любой инерциальной системе, но в ускоренной системе, связанной с трубкой, его траектория кажется искривленной.

Рассмотрим две инерциальные системы - одну, сопутствующую трубке в тот момент, когда свет поступает в нее, и другую, сопутствующую трубке в тот момент, когда свет достигает ее конца.



Фhr. 37.

Поскольку длина трубки, измеряемая. в обеих системах, равна ℓ, а угол отклонения ϑ всегда мал, время распространения света по трубке с точки зрения наблюдателей в обеих системах равно &/с. В момент выхода света из трубки относительная скорость этих наблюдателей равна $\beta = g\ell/c^2$ (по отношению к наблюдателю во второй системе первая система движется вверх со скоростью β). Направляющие углы траекторий фотонов связаны между собой соотношением

$$\cos\psi = \sin\vartheta \approx \vartheta = \frac{\cos\psi' + \beta}{1 + \beta\cos\psi'} = \beta$$

(см. фиг. 37 и задачу 1.8).

Отсюда

$$\vartheta = g\ell/c^2, \text{ где } g/c^2 = 10^{-16}\text{M}^{-1}.$$

Таким образом, если длина трубки составляет 10 м, то $\vartheta = 10^{-15}$ рад, а полное отклонение равно

$$\frac{1}{2}\left(g/c^2\right)\ell^2 \approx 10^{-14}$$

Эта величина чрезвычайно мала по сравнению длиной волны света; трудно вообразить себе, каким интерферометрическим (или каким-либо другим) методом можно было бы обнаружить такое смещение. Поэтому в тех случаях, когда лазеры используются для юстировки (как, например, в Стэнфордском линейном ускорителе), они предназначаются для коррекции искажений, обусловленных кривизной поверхности Земли. Разумеется, это гораздо более заметный эффект, ибо световой луч у поверхности Земли не искривляется настолько сильно, чтобы начать двигаться по «околоземной круговой орбите».

Solution 20.2.

Рассмотрим последовательность свободно падающих наблюдателей; каждый из них занимает локальную инерциальную систему длиной $d\ell$. Пусть n-й свободно падающий наблюдатель покоится относительно Солнца в тот момент, когда



Фиг. 38.

фотон проходит через левую границу его инерциальной системы S_n, и пусть он наблюдает фотон, движущийся под углом ϑ относительно направления инерциального движения системы (см. фиг. 38). Когда фотон покидает его систему и влетает в следующую, S_{n+1}, которая в этот момент покоится, наш наблюдатель находится в состоянии свободного падения в направлении угла φ со скоростью

$$\beta = gd\ell = \frac{GM}{R^2}$$

Фотон входит в систему S_{n+1}, двигаясь при этом в направлении $\vartheta + d\vartheta$; закон преобразования направляющих углов траектории фотона (см. звдачу 1.8) есть

откуда

$$\cos\psi = \frac{\cos\bar{\psi} - \beta}{1 - \beta\cos\bar{\psi}} = \cos\bar{\psi} - \beta\sin^2\bar{\psi} + \mathscr{O}\left(\beta^2\right)$$

$$\cos\psi - \cos\vec{\psi} = -\beta\sin^2\psi$$

h

$$d\vartheta = \beta\sin\psi \approx \beta\sin\varphi = \left(\frac{GM}{R_0^2 + \ell^2}\right)\frac{R_0}{\left(R_0^2 + \ell^2\right)^{\frac{1}{2}}}d\ell$$

Таким образом, полный угол отклонения δ есть

$$\delta = \int d\vartheta = GMR_0\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\ell}{\left(R_0^2 + \ell^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2GM}{R_0}$$

что составляет лишь половину наблюдаемого значения! В чем же Де.IO?

В процессе вычислений мы предположили, что последовательность «жестких линеек» с наблюдателями размещена вдоль линии $y = R_0$, параллельной линии $y = 0$, причем $(n+1)$-я линейка локально параллельна n-й линейке. Отклонение фотона по отношению к этой последовательности

линеек мы и вычисляли. Однако мы не приняли во внимание тот факт, что пространство-время вблизи Солнца искривлено (приливные силы!), и на самом деле последовательность локально параллельных линеек является кривой линией по отношению к линии $y = 0$. Таким образом, мы фактически рассчитывали отклонение фотона относительно этой кривой линии. Итак, реальное отклонение, нзмеряемое удаленным наблюдателем, должно быть результатом обоих эффектов: как отклонения фотона по отношению системе локально параллельных линеек, так и искривления (по отношению к $y = 0$) линейной конфигурации последовательности этих линеек.

Решение 20.3. Не теряя общности, мы можем рассмаривать чисто экваториальное движение. Тогда метрику в гравитационном поле Солнца можно приближенно записать следующим образом:

$$ds^2 \approx -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2M}{r}\right)\left(dr^2 + r^2 d\varphi^2\right)$$

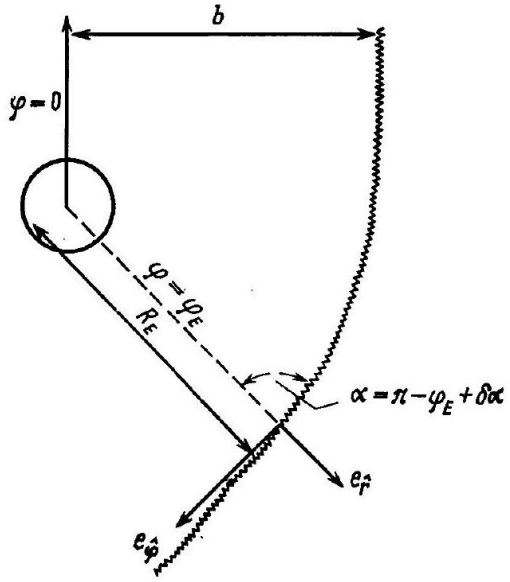
Изотропные геодезические для этой метрики имеют вид

$$\frac{b}{r} = \sin\varphi + \frac{2M}{r}(1 - \cos\varphi)$$

Для угла α между Солнцем и звездой (фиг. 39), измеряемого земным астрономом, справедливо соотношение

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\pi - \varphi_E + \delta\alpha) \approx -\operatorname{tg}\varphi_E + \frac{\delta\alpha}{\cos^2\varphi_E} =$$
$$= \frac{u^{\hat{\varphi}}}{u^{\hat{r}}} = \left[\frac{\left(1 + \frac{M}{r}\right) r d\varphi/d\lambda}{\left(1 + \frac{M}{r}\right) dr/d\lambda}\right]_E = \left[r\frac{d\varphi}{dr}\right]_E,$$

где $u^{\hat{\varphi}}$ и u' - ортонормированные компоненты 4-скорости ротона, а для определения углов мы воспользовались изотропным видом



ur. 39.

метрики (1) Если теперь обратиться к уравнению (2), уравнение (3) примет вид

$$\operatorname{tg}\varphi_E - \frac{\delta\alpha}{\cos^2\varphi_E} = \frac{\sin\varphi_E \cdot \frac{2M}{b}(1 - \cos\varphi_E)}{\cos\varphi_E + \frac{2M}{b}\sin\varphi_E} \approx \operatorname{tg}\varphi_E - \frac{2M}{b}\frac{(1 - \cos\varphi_E)}{\cos^2\varphi_E},$$

откуда

$$\delta\alpha \approx \frac{2M}{b}(1 + \cos\alpha) \approx \frac{2M}{R_E}\left(\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}\right)^{1/3}.$$

Этот угол $\delta\alpha$ и представляет собой угол отклонения фотона, измеряемый земным наблюдателем (см. также [1], раздел 40.3 и приводимую там литерагуру).

Рещение 20.4. Так как мы собираемся вычислить только низший порядок отклонения, обусловленного $\vec{J}$, мы ожем ограничиться рассмотрением лишь членов, линейных по $\vec{J}$, а в выражении для линейного элемента положить $M = 0$. Тогда полное отклонение первого порядка будет представлять собой сумму обычного линейного по M члена и некоторого члена, линейного по $\vec{J}$. Итак, если записать (для наших целей) метрику в виде (см. задачу 17.1)

$$ds^2 = -dt^2 - \frac{4\vec{J}}{r}\sin^2\vartheta dt d\varphi + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

где вектор $\vec{J}$ направлен вдоль оси z, то уравнения движения можно най ти из вариационного принципа (см. задачу 7.25)

$$\delta\int\left(-\dot{i}^2 - \frac{4J}{r}\sin^2\vartheta\dot{t}\dot{\varphi} + \dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2\right)d\lambda = 0$$

где точки означают производные по аффинному параметру λ (например, $\dot{t} \equiv dt/d\lambda$ и т. д.). Уравнения Эйлера для вариационного принципа (2) в первом порядке по J имеют вид

$$\frac{d}{d\lambda}\left(2\dot{t} + \frac{4J}{r}\sin^2\vartheta\dot{\varphi}\right) = 0$$
$$\frac{d}{d\lambda}\left(2\dot{\varphi}r^2\sin^2\vartheta - \frac{4J}{r}\sin^2\vartheta\dot{t}\right) = 0,$$

откуда следует, что величины

$$P_0 \equiv \dot{t} + \frac{4J}{r}\sin^2\vartheta\dot{\varphi},$$
$$P_\varphi = \dot{\varphi}r^2\sin^2\vartheta - \frac{2J}{r}\sin^2\vartheta P_0$$

являются постоянными и

$$r = r\dot{\vartheta}^2 + r\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2 + \frac{4J}{r^2}\sin^2\vartheta\dot{\varphi}P_0$$
$$\frac{d}{d\lambda}\left(r^2\dot{\vartheta}\right) = P_\varphi^2\cos\vartheta/r^2\sin^3\vartheta.$$

Третий интеграл движения (в добавление к P_0 и P_φ) можно найти из уравнения (3е):

$$P_{\hat{\vartheta}}^2 + \frac{P_\phi^2}{\sin^2\vartheta} \equiv L^2 = \text{ const } \left(P_\vartheta \equiv r^2\dot{\vartheta}\right)$$

Мы разобьем теперь полное искривление на три вклада, каждый из которых определяется различным взаимным расположением (см. фиг. 40) траектории светового луча (которая в низшем порядке представляет собой прямую линию) и направления момента количества движения $\vec{J}$ Солнца. Поскольку мы работаем с точностью лишь до линейного порядка, полное отклонение обязано быть суммой этих вкладов.

В обоих случаях, показанных на фиг. $40, a$ и 6, проекция момента количества двнжения светового пучка относительно центра Солнца на $\vec{J}$ равна нулю, а в случае, представленном на фиг. 40, в $_{\text{A}}$ эта проекция равна единице. Рассмотрим сначала фиг. $40, a$ и 6. В обоих случаях $P_\varphi = 0$ (поскольку P_φ есть чнтеграл движения). Нам необходимо теперь получить функцию $r(\vartheta)$. Из уравнения (3г) имеем

$$\dot{\varphi} = \frac{2JP_0}{r^3} = \mathscr{O}(J),$$

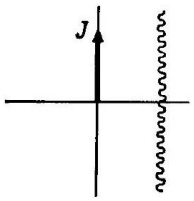
а из уравнения (4)

$$P_\vartheta = r^2\dot{\vartheta} = L = \text{ const}$$

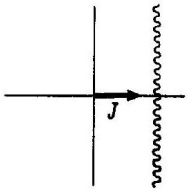
Тогда из уравнений (3д) и (5а) следует

$$r = r\dot{u}^2$$

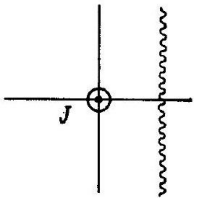
но этот результат совместно с уравнением (5б) означает, что свет будет двигаться по прямой! Таким образом, в случаях, представленных на фиг. $40, a$ и $6, \vec{J}$ не дает вклада в отклонение.



a



σ



6
Фиг. 40.

Рассмотрим теперь фиг. 40, 8. В этом случае мы можем положить $\vartheta = \pi/2$ и $\dot{\vartheta} = 0$ (тогда в силу уравнения (3е) $\ddot{\vartheta}$ всегда будет равно нулю) и соответственно этому решать наши уравнения. Используя соотношение

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{d\varphi}{d\lambda}\frac{d}{d\varphi} = \left(\frac{P_\varphi}{r^2} + \frac{2JP_0}{r^3}\right)\frac{d}{d\varphi}$$

и вводя определения

$$u \equiv 1/r, \quad \ell \equiv P_0/P_\varphi,$$

мы можем записать уравнение (3д) в виде

$$u'' + u = -6u^2 J\ell - 2J\ell u'^2 - 4J\ell u u',$$

где $u' \equiv du/d\varphi$. Будем решать уравнение (6) меятодом возмущений: пусть

$$u = u_0 + u_{12}$$

где $u_1 - \mathscr{C}(J)$. Тогда с точностью до нулевого порядка по малому параметру разложения уравнение (6) принимает вид $u_0'' + u_0 = 0$, откуда следует

$$u_0 = \frac{1}{b}\cos\varphi$$

где b - прицельный параметр, и мы выбрали систему координат таким образом, что свет распространяется параллельно оси y. В следующем порядке u_1 должно удовлетворять уравнению

$$u_1'' + u_1 = -\frac{2J\ell}{b^2}\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) = -\frac{2J\ell}{b^2}$$

откуда

$$u_1 = -\frac{2J\ell}{b^2}$$

Таким образом, из (7), (8) и (9б) получаем, что искомое решение имеет вид

$$u \approx \frac{1}{b}\cos\varphi - \frac{2J\ell}{b^2}$$

Отклонение траектории α на каждой асимптоте находим, полагая $u = 0 (r = \infty)$. Для одной асимптоты $\varphi \approx (\pi/2) + \alpha$, так что $\cos\varphi \approx \approx -\alpha$ и

$$\alpha \approx -\frac{2J\ell}{b}.$$

Для другой асимптоты вклад в отклонение точно такой же, и в результате полное отклонение есть

$$\delta\varphi = 2\alpha = -\frac{4J}{b^2}$$

(здесь мы использовали тот факт, что $\ell = P_0/P_\varphi \approx b^{-1}$).

Исходя из формулы (12) и результатов для случаев, представленных на фиг. $40, a$ и 6, мы можем записать полное отклонение света, обусловленное наличием количества движения момента $\vec{J}$, в виде

$$\delta\varphi = -\frac{4\vec{J}\cdot n}{b^2}$$

где n - единичныи вектор в направлении момента количества движения фотонов относительно центра Солнца.

Отметим, что безразмерный малый параметр, по которому мы проводили разложение в ряд теории возмущений, есть

$$\left(\frac{J}{b^2}\right)_{\odot} = \frac{1,7\cdot 10^{48} r\cdot \mathrm{cm}^2/\mathrm{c}}{\left(7\cdot 10^{10}\ \mathrm{cm}\right)^2} \approx 10^{12} \approx 2\cdot 10^{-7} \text{ дуговых сек.}$$

Решенпе 20.5. Показатель преломления плазмы есть

$$n = \left(1 - v_p^2/v^2\right)^{1/2}$$

где v_p - плазменная частота $\left(v_p \equiv n_e e^2/\pi m_e\right)$. Известное уравнение, определяющее форму траектории луча при распространении света в неоднородной среде [см., например, книгу Росси Rossi B., Optics (Addison - Wesley, 1957), p. 54] 1), имеет вид

$$d(n\vec{m})/d\ell = \vec{\nabla} n$$

где $\vec{m}$ - единичный вектор, касательный к лучу, а ℓ - расстояние вдоль луча. Посколько вычисляемый нами угол отклонения мал, мы можем вполне корректно найти первый порядок изменения $\vec{m}$, проинтегрировав уравнение (1) вдоль невозмущенной траектории $y = b, -\infty < x < +\infty$. Из приведенной в условии формулы для n_e имеем

откуда

$$n \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v_p}{v}\right)^2 \approx 1 - 0,0101\left(\frac{r}{R_\odot}\right)^{-6,5}\left(\frac{v}{10^9\Gamma_\mu}\right)^{-2}$$

$$\vec{\nabla} n \approx \frac{0,0657}{R_\odot}\left(\frac{r}{R_\odot}\right)^{-7,5}\left(\frac{v}{10^8\Gamma\mu}\right)^{-2}\hat{r}$$

Тогда, используя

$$n(\pm\infty) = 1 \quad \text{и} \quad r = \left(x^2 + y^2\right)^{1/2}$$

получаем

$$\vec{m}|_{+\infty} - \vec{m}|_{-\infty} \approx \frac{0,0657}{R_\odot}\left(\frac{v}{10^9\Gamma_\llcorner}\right)^{-2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{r}{R_\odot}\right)^{-7,5}\times$$

$$\times\left[\hat{x}\left(\frac{x}{r}\right) + \hat{y}\left(\frac{y}{r}\right)\right]dx.$$

Член, содержащий $\hat{x}$, обращается в нуль в силу симметрии относительно обращения знака x, в то время как член, содержащий $\hat{y}$, можно представить в виде $2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}$. Так как $\vec{m}$ - единичный вектор, то при малых углах выражение $\left(\vec{m}|_{\infty} - \vec{m}|_{-\infty}\right)\cdot\hat{y}$ дает угол отклонения, который требуется найти. Полагая

$$\eta = b/R, \quad z \equiv r/b$$

н используя соотношения

$$y = b, \quad x^2 = b^2\left(z^2 - 1\right), \quad dx = bz\left(z^2 - 1\right)^{-1/k}dz$$

См. также Ландау Л. Д., Лифииц Е. М. Электроднамика сплошных сред. - М.: Гостехиздат, 1957, стр. 343. - Прим, перев. получаем

$$v_{\text{корон}} \approx 0,1391\left(\frac{v}{10^0\Gamma\text{П}}\right)^{-2}\eta^{-6,5}\int\limits_1^{\infty} z^{-7,5}\left(z^2 - 1\right)^{-1/2}dz.$$

Подставляя $t = 1/z^2$, преобразуем интеграл из (4) в бета-функцию Эйлера $(1/2)B(3,75; 0,5) = 0,158$. Таким образом, угол коронального отклонения можно записать в виде

$$\theta_{\text{корон}} \approx 0,021\left(\frac{v}{10^9\Gamma}\right)^{-2}\eta^{-6.5}.$$

Общерелятивистское выражение для угла отклонения ϑ_{GR} представимо в виде

$$\vartheta_{GR} \approx \frac{8,5 \cdot 10^{-8}}{\eta}$$

(см. задачу 15.6). Приравнивая оба отклонения, получаем

$$\frac{8,5 \cdot 10^{-6}}{\eta} \approx 0,021 \left(\frac{v}{10^{\theta} \Gamma \bar{u}}\right)^{-2} \eta^{-6,5}$$

ЛИ

$$\eta \equiv \frac{b}{R_{\odot}} \approx 4,1 \left(\frac{v}{10^{\circ}\mathrm{Bu}}\right)^{-0,36}$$

При меньших прицельных параметрах b доминирует корональное отклонение.

Solution

20.6. Связь между φ и ϑ (см. фиг. 41) дается законом преломления Снеллиуса («закон синусов»):

$$n = \varphi/\theta$$

Чтоб линза могла моделировать гравитационное отклонение света, требуется, чтобы выполнялось соотношение

$$\delta \equiv \varphi - \vartheta = 1,75''/b$$

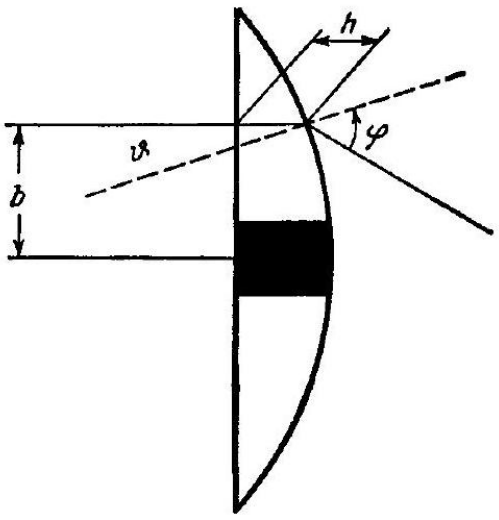
Из уравнений (1) и (2) следует

$$\vartheta = 1,75''/b(n-1) = 1,6 \cdot 10^{-5}/b.$$

Из геометрических соображений ясно, что $\vartheta = -dh/db$, так что мы приходим к уравнению
откуда

$$\frac{dh}{db} = -\frac{1,6 \cdot 10^{-5}}{b}$$

$$h = h_0 - 1,6 \cdot 10^{-5} \ln b$$



Фиг. 41.

Solution

20.7. В метрике Шварцшильда, записанной в координатах кривизны, уравнение для некруговых орбит можно представить в виде (см., например, решение задачи 15.9)

$$u'' + u = \frac{M}{\bar{L}^2} + 3Mu^2 \equiv a + bu^2$$

где $u \equiv 1/r, u'' \equiv d^2u/d\varphi^2$, а $\bar{L}$ - момент количества движения на единицу массы движущейся по орбите частицы ($\vec{L} = \text{const}$). Решение в нулевом порядке, соответствующее линейной части уравнения (1), есть

$$u_0 = a + A\cos\varphi$$

где A - некоторая постоянная. Тогда в следующем порядке решение уравнения (1), u_1, должно удовлетворять уравнению

$$u_1'' + u_1 \approx bu_0^2 = b\left(a^2 + 2aA\cos\varphi + A^2\cos^2\varphi\right) =$$
$$= ba^2 + \frac{1}{2}bA^2 + 2abA\cos\varphi + \frac{1}{2}bA^2\cos 2\varphi.$$

Решение неоднороднолного уравнения (3) есть

$$u_1 = b\left(a^2 + \frac{1}{2}A^2\right) + abA\varphi\sin\varphi - \left(bA^2/6\right)\cos 2\varphi.$$

и, таким образом,

$$u = \frac{1}{r} \approx u_0 + u_1$$

Вековые изменения обусловлены вторым членом в выражении (4) для u_1: мы можем представить его в более удобном виде, если воспользуемся тождеством

$$\varepsilon\varphi\sin\varphi \equiv \cos(\varphi - \varepsilon\varphi) - \cos\varphi + O\left(\varepsilon^2\right).$$

Поскольку, согласно уравнению (1), ab есть малая величина, уравнение (4) с помощью тождества (6) можно привести к виду

$$u_1 \approx b\left(a^2 + \frac{1}{2}A^2\right) + A\cos(\varphi - ab\varphi) - A\cos\varphi - \left(bA^2/6\right)\cos 2\varphi,$$

откуда следует, что смещение перигелия за период одного обращения по орбите равно

$$\delta\varphi = 2\pi ab = 6\pi M^2/L^2.$$

Мы можем выразить $\bar{L}$ через большую полуось a и эксцентриситет e орбиты с помощью стандартной формулы классической механики

$$\bar{L}^2 = Ma\left(1 - e^2\right)$$

Тогда уравнение (8) примет вид

$$\delta\varphi = \frac{6\pi M}{a\left(1 - e^2\right)}$$

в пределе малых e оно переходит в решение задачи 15.7.
Ретение 20.8.
а) Да. Заметим сначала, что масса частицы постоянна:

$$\frac{dm^2}{d\tau} = -\frac{d\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}{d\tau} = -2\mathbf{p}\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = 0$$

Поскольку $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ и $m = \text{const}$, сомножитель m можно опустить в каждом члене уравнения для действующей на частицу силы. Тогда это уравнение сведется к уравнению

$$du''/d\tau = -\left(\eta^{\mu\nu}\Phi_{,\nu} + u^\alpha\Phi_{,\alpha}u^\mu\right)$$

которое ясно показывает, что движение частицы не зависит от массы.
б) Да. Вблизи поверхности Земли эту поверхность можно считать плоской. Направим ось z вертикально вверх; тогда $\Phi = \Phi(z)$, и «уравнение источников» для Φ имеет вид

$$\partial^2\Phi/\partial z^2 = 0$$

У земной поверхности потенциал можно записать как

$$\Phi = az + b$$

Постоянную a можно определить, рассматривая падение массивной частицы из состсяния покоя и полагая начальное значение ее ускорения равным g. Если в уравнении для силы положить $u^0 = 1, u^j = 0$, мы будем иметь

$$-mg = dp^z/d\tau = -m\Phi_{,z} = -ma$$

откуда следует, что $a = g$. Рассмотрим теперь фотон, движущийся вертикально вверх. За время $dt = dz$ он теряет энергию

$$dp^0 = -p^\alpha \Phi_{,\alpha} dx^0 = -p^z \Phi_{,z} dt$$

Поскольку для фотона $p^z = p^0$, потеря энергии составляет

$$dp^0 = -p^0 g dz$$

Для наземного эксперимента $g\Delta z \leqslant 1$, и мы получаем

$$\Delta p^0/p^0 = \Delta v/v = -g\Delta z$$

в полном согласии с результатами эксперимента Паунда-Ребки.
в) Нет. Поскольку для фотона $p_\beta dx^\beta = 0$, его траектория описывается уравнением

$$dp^\mu = -p^\alpha \Phi_{,\alpha} dx^\mu = -dx^\alpha \Phi_{,\alpha} p^\mu$$

Так как $d\mathbf{p}$ пропорционально $\mathbf{p}$, фотон должен распространяться по прямой линии; иск ривление траектории отсутствует.
(Примечание. Более того, в противоречии с наблюдениями эта теория предсказывает отстающее, а не опережающее смещение перигелия планетных орбит, равное

$$\delta = 2\pi M_{\odot}^2/J^2$$

где δ - смещение перигелия за одно обращение по орбите, J момент количества движения планеты на единицу массы. Для почти к руговых орбит эта формула предсказывает смещение, равное

$$\delta = 2\pi M_\varrho/r$$

что составляет примерно $\approx 13''$ за столетие для орбиты Меркурия.)
Решение 20.9. Любые эталонные часы можно прокалибровать по отношению к часам, находящимся на бесконечности, которые измеряют время t. Тогда отношение скорости хода часов, расположенных в точке с координатами (r, ϑ) и обладающих 4скоростью $\mathbf{u}$, к скорости хода часов на бесконечности равно

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{u^0(r, \vartheta)}$$

В решении задачи 16.19 мы показали, что на поверхности жестко вращающейся равновесной конфигурации идеальной жидкости $u^0 = \text{const}$. Следовательно,

$$d\tau/dt = \text{const}$$

и все часы на поверхности Земли имеют одну и ту же скорость хода! Дело здесь в том, что доплеровский эффект в точности компенсирует эффект красного смещения.

13.6 Problems within Newtonian Theory of Gravitation

13.6.1 Interaction Energy of Gravitational Systems (???)

(тут много задач решить еще нужно.)

13.7 Problem book in relativity and gravitation by Lightman, Press, Price, Teukolskv

13.7.1 1 Special-Relativistic Kinematics

The path of an observer through spacetime is called the worldline of that observer. The time measured by the observer's own clocks, called his proper time τ, is given by

$$-\mathrm{d}\tau^2 \equiv \mathrm{ds}^2 = -\mathrm{dt}^2 + \mathrm{dx}^2 + \mathrm{dy}^2 + \mathrm{dz}^2$$

where t, x, y, z are the observer's (Minkowski) coordinates along his path. Here, and unless noted otherwise throughout this book, we use units in which c, the speed of light, is unity.

The 4 -velocity u, with components $(dt/d\tau, dx/d\tau, dy/d\tau, dz/d\tau)$, and 4 acceleration $\mathrm{a} \equiv \mathrm{du}/\mathrm{d}\tau$, components $\left(\mathrm{d}^2\mathrm{t}/\mathrm{d}\tau^2,\ \mathrm{d}^2\mathrm{x}/\mathrm{d}\tau^2,\ \mathrm{d}^2\mathrm{y}/\mathrm{d}\tau^2,\ \mathrm{d}^2\mathrm{z}/\mathrm{d}\tau^2\right)$, are defined on the worldline. The (contravariant) components of these or other 4 -vectors are denoted $\mathrm{u}^\alpha, \mathrm{a}^\beta, \mathrm{A}^\gamma, \mathrm{B}^\delta$, etc., where a Greek index indicates any of the 4 components $t, x, y, z \equiv 0, 1, 2, 3$. Latin indices $\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k} \cdots$ are used to indicate only the spatial components $\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \equiv 1, 2, 3$.

The Einstein summation convention is used, that is, any repeated literal index is assumed to be summed over its range. For example,

$$\mathbf{V} = \mathrm{V}^\mu \mathrm{e}_\mu$$

expresses a vector as a sum of contravariant components multiplied by basis vectors, $\mathrm{e}_0 \equiv (1,0,0,0), \mathrm{e}_1 \equiv (0,1,0,0)$, etc.

The invariant dot product of two 4 -vectors is, in Minkowski coordinates,

$$A \cdot B = -A^0 B^0 + A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3$$

This can be written as $A \cdot B = A_\mu B^\mu$, where the numbers A_μ, called coVariant components of A , are defined by $\mathrm{A}_\mu \equiv \eta_{\mu\nu}\mathrm{A}^\nu$, or $\mathrm{A}^\mu = \eta^{\mu\nu}\mathrm{A}_\nu$

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{also } \equiv \eta^{\mu\nu})$$

Vectors are called spacelike, timelike, or null, according to whether their square $v \cdot v$ is positive, negative, or zero. 4 -velocities are always timelike.

Two Lorent z frames may differ by a relative 3 -velocity $\underset{\sim}{v}$ or by a spatial rotation, or by a combination of relative velocity and rotation. If t, x, y, z are the coordinates of one frame, then the coordinates in a different frame are usually written t', x', y', z'. Similarly, vector components in the primed frame are written $\mathrm{A}^{\mu'}, \mathrm{B}_{\nu'}$, etc., and its basis vectors are e_μ. The basis vectors and the components of vectors in Lorentz frames are related by

$$\mathbf{e}_{\mu'} = \Lambda^a_{\mu'} \mathbf{e}_a, \quad V_{\mu'} = \Lambda^a_{\mu'} V_a$$
$$V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_a V^a \quad \left(\Lambda^{\mu'}_a \equiv \text{ matrix inverse of } \Lambda^a_{\mu'}\right)$$

where the Λ 's are Lorent z transformation matrices. Of special interest are the "boost" transformations involving changes in velocity with no rotation. For a primed frame with velocity β in the x -direction,

$$\Lambda^{\mu'}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \gamma \equiv \left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

The velocity between two frames is sometimes parameterized by $\theta \equiv \tanh^{-1}\beta$ ("the rapidity parameter").

A particle of rest mass m and 4 -velocity u has 4 -momentum $p \equiv mu$. If $m = 0$ (photons), p is defined by its components in the frame of any observer $\mathrm{p}^0 \equiv$ photon energy, $\mathrm{p}^\mathrm{i} \equiv \underset{\sim}{\mathrm{p}} =$ photon 3-momentum.

Problem 1.1. The 4 -velocity u corresponds to 3 -velocity v. Express:
(a) u^0 in terms of $|v|$
(b) $u^j (j = 1, 2, 3)$ in terms of $\underset{\sim}{v}$
(c) u^0 in terms of u^j
(d) $d/d\tau$ in terms of d/dt and $\underset{\sim}{v}$
(e) v^j in terms of u^j
(f) $|\underset{\sim}{v}|$ in terms of u^0.

Problem 1.2. Find the matrix for the Lorentz transformation consisting of a boost v_x in the x -direction followed by a boost v_y in the y -direction. Show that the boosts performed in the reverse order would give a different transformation.

Problem 1.3. If two frames move with 3 -velocities $\underset{\sim 1}{v}$ and $\underset{\sim 2}{v}$, show that their relative velocity is given by

$$v^2 = \frac{(v_1 - v_2)^2 - (v_1 \times v_2)^2}{(1 - v_1 \cdot v_2)^2}.$$

Problem 1.4. A cart rolls on a long table with velocity β. A smaller cart rolls on the first cart in the same direction with velocity β relative to the first cart. A third cart rolls on the second cart in the same direction with relative velocity β, and so on up to n carts. What is the velocity v_n of the nth cart in the frame of the table? What does v_n tend to as $n \to \infty$?

Problem 1.5. A distant camera snaps a photograph of a speeding bullet (velocity v) with length b in its rest frame. Behind the bullet and parallel to its path is a meter stick, at rest with respect to the camera. The direction to the camera is an angle a from the direction of the bullet's velocity. What will be the apparent length of the bullet as seen in the photo? (i.e. How much of the meter stick is hidden?).

Problem 1.6. Tachyons are hypothetical particles whose velocity is faster than light. Suppose that a tachyon transmitter emits particles of a constant
velocity $u > c$ in its rest frame. If a tachyonic message is sent to an observer at rest at a distance L, how much time will elapse before a tachyonic reply can be received? How much time will elapse if the distant observer is moving directly away at velocity v, and is at a distance L at the instant he receives the message and replies? (Show that for $u > \left[1 + \left(1 - v^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]/v$ the reply can be received before the signal is sent!)

Problem 1.7. Frame S' moves with velocity $\underset{\sim}{v}$ relative to frame S. A rod in frame S' makes an angle θ' with respect to the forward direction of motion. What is this angle θ as measured in S ?

Problem 1.8. Frame S'moves with velocity $\underline{\beta}$ relative to frame S. A bullet in frame S' is fired with velocity $\underset{\sim}{v'}$ at an angle θ' with respect to the forward direction of motion. What is this angle θ as measured in S ? What if the bullet is a photon?

Problem 1.9. Suppose that an observer at rest with respect to the fixed distant stars sees an isotropic distribution of stars. That is, in any solid angle $d\Omega$ he sees $dN = N(d\Omega/4\pi)$ stars, where N is the total number of stars he can see.

Suppose now that another observer (whose rest frame is S') is moving at a relativistic velocity β in the $\mathrm{e_x}$ direction. What is the distribution of stars seen by this observer? Specifically, what is the distribution function $\mathrm{P}(\theta', \phi')$ such that the number of stars seen by this observer in his solid angle $\mathrm{d}\Omega'$ is $\mathrm{P}(\theta', \phi')\,\mathrm{d}\Omega'$? Check to see that $\int_{\text{sphere}} \mathrm{P}(\theta', \phi')\,\mathrm{d}\Omega = \mathrm{N}$, and check that $\mathrm{P}(\theta', \phi') \to \frac{\mathrm{N}}{4\pi}$ as $\beta \to 0$. Where will the observer see the stars "bunch up"?

Problem 1.10. Show that $\mathbf{A} = 3^{\frac{1}{2}}\mathbf{e_t} + 2^{\frac{1}{2}}\mathbf{e_x}$ is a unit timelike vector in special relativity. Show that the angle between A and e_t is not real.

Problem 1.11. Two rings rotate with equal and opposite angular velocity ω about a common center. Suppose Adam rides on one ring and Eve on the other, and that at some moment they pass each other and their clocks agree. At the moment they pass, Eve sees Adam's clock running more
slowly, so she expects to be ahead the next time they meet. But Adam expects just the reverse. What really happens? Can you reconcile this with Adam's (or Eve's) observations?

Problem 1.12. Define an imaginary coordinate w = it. Show that a rotation of angle θ in the x_i, w plane $(i = 1, 2, 3)$, where θ is a pure imagiwary number, corresponds to a pure Lorentz boost in t, x, y, z coordinates. How is the boost velocity v related to the angle θ ?

Problem 1.13. Show that the curve

$$\mathrm{x} = \int \mathrm{r}\cos\theta\cos\phi\ \mathrm{d}\lambda$$
$$\mathrm{y} = \int \mathrm{r}\cos\theta\sin\phi\ \mathrm{d}\lambda$$
$$\mathrm{z} = \int \mathrm{r}\sin\theta\ \mathrm{d}\lambda$$
$$\mathrm{t} = \int \mathrm{r}\mathrm{d}\lambda$$

where r, θ and ϕ are arbitrary functions of λ, is a null curve in special relativity. Under what conditions is it a null geodesic?

Problem 1.14. Show that an observer's 4 -acceleration $\mathrm{du}^\alpha/\mathrm{d}r$ has only 3 independent components, and give the relation of these to the 3 components of ordinary acceleration that he would measure with a Newtonian accelerometer in his local frame.

Problem 1.15. Write the magnitude of the acceleration measured in the observer's frame as an invariant.

Problem 1.16. A particle moves with 3 -velocity $\underset{\sim}{u}$ and 3 -acceleration a as seen by an inertial observer $\mathcal{O}$. Another inertial observer $\mathcal{O}'$ has 3 -velocity $\underline{v}$ relative to $\mathcal{O}$. Show that the components of acceleration of the particle parallel and perpendicular to $\underset{\sim}{v}$ as measured by $\mathcal{O}'$ are

$$\begin{array}{l} \underset{\sim}{a'}_{\parallel} = \frac{\left(1-v^2\right)^{3/2}}{(1-\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{u})^3}\underset{\sim}{a}_{\parallel} \\ \underset{\sim}{a'}_{1} = \frac{\left(1-v^2\right)}{(1-\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{u})^3}\left[\underset{\sim}{a}\right. \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ -\underset{\sim}{v}\times(\underset{\sim}{a}\times\underset{\sim}{u}) \end{array} \right].$$

Problem 1.17. An observer experiences a uniform acceleration in the **x** direction, of magnitude g . Define a coordinate system $(\bar{\mathrm{t}}, \bar{\mathrm{x}}, \bar{\mathrm{y}}, \bar{\mathrm{z}})$ for him in the following way: (i) Let the observer be at $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$ and let $\bar{t}$ be his proper time. (ii) Let his hyperplanes of simultaneity agree with the hyperplanes of simultaneity of an instantaneously comoving inertial frame. (iii) Let the other "coordinate stationary observers" (for whom $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ are constant) move in such a way that they are always at rest with respect to the observer on the hyperplanes of simultaneity. At $t = 0$ label all spatial points with the same labels as the momentarily comoving inertial system $\mathrm{t} = 0, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$.

Give the coordinate transformation between $\mathrm{t}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$ and $\bar{\mathrm{t}}, \bar{\mathrm{x}}, \bar{\mathrm{y}}, \bar{\mathrm{z}}$. Show that coordinate stationary clocks cannot remain synchronized.

Problem 1.18. A mirror moves perpendicular to its plane with a velocity v . With what angle to the normal is a ray of light reflected, if it is incident at an angle θ ? What is the change in the frequency of the light?

Problem 1.19. A mirror is moving parallel to its plane. Show that the angle of incidence of a photon equals the angle of reflection.

Problem 1.20. A particle of rest mass m and 4 -momentum p is examined by an observer with 4 -velocity u. Show that:

(a) the energy he measures is $E = -p \cdot u$;

(b) the rest mass he attributes to the particle is $m^2 = -p \cdot p$;

(c) the momentum he measures has magnitude $|\underset{\sim}{p}| = \left[(\mathbf{p} \cdot \mathbf{u})^2 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}\right]^{\frac{1}{2}}$;

(d) the ordinary velocity v he measures has magnitude

$$|\underset{\sim}{v}| = \left[1 + \frac{p \cdot p}{(p \cdot u)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

(e) the 4 -vector v, whose components in the observer's Lorentz frame are

$$v^0 = 0, v^j = \left(dx^j/dt\right)_{\text{particle}} = \text{ ordinary velocity}$$

is given by $\mathrm{v} = -\mathrm{u} - \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p} \cdot \mathrm{u}}$.

Problem 1.21. An iron nucleus emits a Mössbauer gamma ray with frequency Was as measured in its own rest frame. The nucleus is traveling with melocity β with respect to some inertial observer. What frequency does Se observer measure when the gamma ray reaches him? Express the moswer in terms of $\underset{\sim}{\beta}, \nu_0$, and the unit vector $\underset{\sim}{n}$ pointing towards the meleus at the time it emitted the γ-ray, as measured by the observer.

Problem 1.22. An observer receives light from a source of light which is Dowing with a velocity $\underset{\sim}{v}$; the angle between $\underset{\sim}{v}$ and the line between asserver and source is θ at the time the light is emitted. If the observer sees no net redshift or blueshift, what is θ in terms of $|\underset{\sim}{v}|$?

Problem 1.23. Suppose in some inertial frame S a photon has 4 -momentum components

$$\mathrm{p}^0 = \mathrm{p}^{\mathrm{x}} = \mathrm{E}, \quad \mathrm{p}^{\mathrm{y}} = \mathrm{p}^z = 0.$$

There is a special class of Lorentz transformations - called the "little group of p'' - which leave the components of p unchanged, e.g. a pure zotation through an angle a in the $y - z$ plane

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos a & -\sin a \\ 0 & 0 & \sin a & \cos a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{E} \\ \mathrm{E} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{E} \\ \mathrm{E} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

is such a transformation. Find a sequence of pure boosts and pure rotations whose product is not a pure rotation in the $y - z$ plane, but is in the little group of p .

Problem 1.24. Two giant frogs are captured, imprisoned in a large metal cylinder, and placed on an airplane. While in flight, the storage doors accidentally open and the cylinder containing the frogs falls out. Sensing something amiss, the frogs decide to try to break out. Centering themselves in the cylinder, they push off from each other and slam simultaneously into the ends of the cylinder. They instantly push off from the ends and shoot across the cylinder past each other into the opposite ends. This
continues until the cylinder hits the ground. Consider how this looks from some other inertial frame, falling at another speed. In this frame, the frogs do not hit the ends of the cylinder simultaneously, so the cylinder jerks back and forth about its mean speed β. The cylinder, however, was at rest in one inertial frame. Does this mean that one inertial frame can jerk back and forth with respect to another?

Problem 1.25. Let $\mathrm{J}_{\mathrm{x}}, \mathrm{J}_{\mathrm{y}}, \mathrm{J}_z$ be infinitesimal rotation operators defined so that $1 + iJ_j\theta/2$ is a rotation by a small angle θ around the j-axis. Let $\mathrm{K}_{\mathrm{x}}, \mathrm{K}_{\mathrm{y}}, \mathrm{K}_z$ be infinitesimal boost operators defined so that $1 + \mathrm{iK_j v}/2$ is a boost by a small velocity v in the j -direction. Show that the following relationships, and all their cyclic permutations, are true:

$$[\mathrm{J_x}, \ \mathrm{J_y}] = 2\mathrm{iJ_z}$$
$$[\ \mathrm{J_x}, \ \mathrm{K_y}] = 2\mathrm{iK_z}$$
$$[\ \mathrm{K_x}, \ \mathrm{K_y}] = -2\mathrm{iJ_z}$$

Find a representation of the Lorentz group in terms of Pauli spin matrices $\sigma_{\mathrm{x}}, \sigma_{\mathrm{y}}, \sigma_{\mathrm{z}}$, and the unit matrix.

Problem 1.26. Two successive, arbitrary pure Lorentz boosts $\underset{\sim}{v}_1$ and $\underset{\sim}{v}_2$ are equivalent to a pure boost $\underset{\sim}{v}_3$ followed by a pure rotation $\theta\underset{\sim}{n}$, where n is a unit vector. Find the magnitude of θ in terms of $\underset{\sim}{v}_1$ and $\underset{\sim}{v}_2$ and show that $\underset{\sim}{n}\cdot\underset{\sim}{v}_3 = 0$.

Problem 1.27. Show that any proper (non time-reversing, non parityreversing) homogeneous Lorentz transformation leaves fixed at least one null direction.

Problem 1.28. What is the least number of pure boosts which generate an arbitrary Lorentz transformation? Note: This is a difficult problem!

1: Solutions

Solution 1.1. $\mathbf{u} = (\gamma, \gamma\underset{\sim}{v})$, where $\gamma \equiv \left(1-\tilde{v}^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{u}^0 = \mathrm{d}t/\mathrm{d}r$. Thus:

(a) $u^0 = \left(1-v^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

(b) $u^j = \left(1-v^2\right)^{-\frac{1}{2}} v^j$

(c) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = -1$ since it is a 4-velocity, so

$$u^0 = \left[1+\left(u^1\right)^2+\left(u^2\right)^2+\left(u^3\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \equiv \left(1+u^j u_j\right)^{\frac{1}{2}}$$

(d) $\mathrm{d}/\mathrm{d}r = (\mathrm{d}t/\mathrm{d}r)\mathrm{d}/\mathrm{d}t = \left(1-\underline{v}^2\right)^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}/\mathrm{d}t$

(e) $v^j = u^j/u^0 = u^j\left(1+u^i u_i\right)^{-\frac{1}{2}}$

(f) $|\underline{v}| = \left[1-\left(\mathrm{u}^0\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{2}}$, from (a).

Solution 1.2. The product of the transformations is

$$\begin{bmatrix} \gamma_\mathrm{x} & \gamma_\mathrm{x}\mathrm{v}_\mathrm{x} & 0 & 0 \\ \gamma_\mathrm{x}\mathrm{v}_\mathrm{x} & \gamma_\mathrm{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_\mathrm{y} & 0 & \gamma_\mathrm{y}\mathrm{v}_\mathrm{y} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_\mathrm{y}\mathrm{v}_\mathrm{y} & 0 & \gamma_\mathrm{y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_\mathrm{x}\gamma_\mathrm{y} & \gamma_\mathrm{x}\mathrm{v}_\mathrm{x} & \gamma_\mathrm{x}\gamma_\mathrm{y}\mathrm{v}_\mathrm{y} & 0 \\ \gamma_\mathrm{x}\gamma_\mathrm{y}\mathrm{v}_\mathrm{x} & \gamma_\mathrm{x} & \gamma_\mathrm{x}\gamma_\mathrm{y}\mathrm{v}_\mathrm{x}\mathrm{v}_\mathrm{y} & 0 \\ \gamma_\mathrm{y}\mathrm{v}_\mathrm{y} & 0 & \gamma_\mathrm{y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

but

$$\begin{bmatrix} \gamma_\mathrm{y} & 0 & \gamma_\mathrm{y}\mathrm{v}_\mathrm{y} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_\mathrm{y}\mathrm{v}_\mathrm{y} & 0 & \gamma_\mathrm{y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_\mathrm{x} & \gamma_\mathrm{x}\mathrm{v}_\mathrm{x} & 0 & 0 \\ \gamma_\mathrm{x}\mathrm{v}_\mathrm{x} & \gamma_\mathrm{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_\mathrm{x}\gamma_\mathrm{y} & \gamma_\mathrm{y}\gamma_\mathrm{x}\mathrm{v}_\mathrm{x} & \gamma_\mathrm{y}\mathrm{v}_\mathrm{y} & 0 \\ \gamma_\mathrm{x}\mathrm{v}_\mathrm{x} & \gamma_\mathrm{x} & 0 & 0 \\ \gamma_\mathrm{x}\gamma_\mathrm{y}\mathrm{v}_\mathrm{y} & \gamma_\mathrm{x}\gamma_\mathrm{y}\mathrm{v}_\mathrm{x}\mathrm{v}_\mathrm{y} & \gamma_\mathrm{y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

which is different.

Solution 1.3. Let $\mathbf{u}_1$ and $\mathbf{u}_2$ be the 4 -velocities of the two frames. In frame $1, \mathbf{u}_1 = (1,0), \mathbf{u}_2 = (\gamma, \gamma\underset{\sim}{v})$ where $\gamma = \left(1-v^2\right)^{-\frac{1}{2}}$. Since $\gamma = -\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2$,

we just have to evaluate this scalar in a general frame where $\mathbf{u}_1 = (\gamma_1, \gamma_1\mathbf{v}_1\ )\ \mathbf{u}_2 = \left(\gamma_2, \gamma_2\underset{\sim}{v}_2\right)$:

$$\gamma = -\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2 = \gamma_1\gamma_2 - \gamma_1\gamma_2\underline{v}_1\cdot\underline{v}_2 = \left(1-\mathrm{v}^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$1-\mathrm{v}^2 = \left(\gamma_1\gamma_2\right)^{-2}/\left(1-\underline{v}_1\cdot\underline{v}_2\right)^2$$

$$\mathrm{v}^2 = \frac{\left(1-\underline{v}_1\cdot\underline{v}_2\right)^2 - \left(1-{v_1}^2\right)\left(1-{v_2}^2\right)}{\left(1-\underline{v}_1\cdot\underline{v}_2\right)^2} = \frac{\left(\underline{v}_1-\underline{v}_2\right)^2 - \left(\underline{v}_1\times\underline{v}_2\right)^2}{\left(1-\underline{v}_1\cdot\underline{v}_2\right)^2}$$

(The solution could also be verified by a painfully tedious application of Lorentz transformations.)

Solution 1.4. We use the fact that in one dimension the "rapidity parameter" $\theta \equiv \tanh^{-1}\mathrm{v}$ adds linearly. Thus $\tanh^{-1}\mathrm{v}_\mathrm{n} = \theta_\mathrm{n} = \mathrm{n}\theta = \mathrm{n}\tanh^{-1}\beta$, or

$$\begin{aligned} \mathrm{v}_\mathrm{n} &= \tanh\left(\mathrm{n}\tanh^{-1}\beta\right) \\ &= \tanh\log\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{\mathrm{n}/2} \qquad \text{(easily verified!)} \\ &= \frac{1-[(1-\beta)/(1+\beta)]^\mathrm{n}}{1+[(1-\beta)/(1+\beta)]^\mathrm{n}} \end{aligned}$$

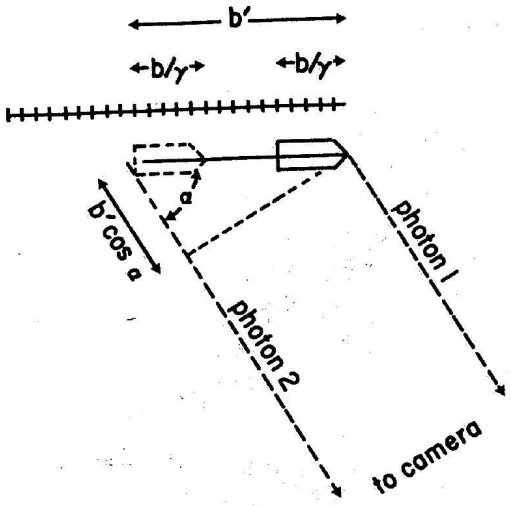
As $n\to\infty, [(1-\beta)/(1+\beta)]^n \to 0$ and $v_n \to 1$, the speed of light.

Solution 1.5. The usual b/γ answer refers to a measurement made simultaneously in the lab frame, but the photons are not emitted simultaneously in the lab frame. They are received simultaneously so that photon 2 (see diagram) has to travel for an extra time $b'\cos a$, where b' is the apparent length. From the Lorentz transformation

$$\mathrm{b} = \Delta\mathrm{x} = \gamma\left(\Delta\mathrm{x}' - \beta\Delta\mathrm{t}'\right) = \gamma\left(\mathrm{b}' - \beta\mathrm{b}'\cos a\right)$$

so that

$$\mathrm{b}' = \mathrm{b}/\gamma(1 - \beta\cos\alpha)$$



Solution 1.6. When the two observers are at rest in the same Lorentz frame, we have (distance) ÷(velocity) × (time) and $t_{\text{round trip}} = 2L/u$. Things are more complicated when one is moving. The moving observer's coordinates are

$$\mathrm{t}' = \gamma(\mathrm{t} - \mathrm{vx})$$
$$\mathrm{x}' = \gamma(\mathrm{x} - \mathrm{vt})$$

and the tachyon emitted from the moving frame back towards the stationary observer has velocity

$$\mathrm{dx}'/\mathrm{dt}' = -\mathrm{u}$$

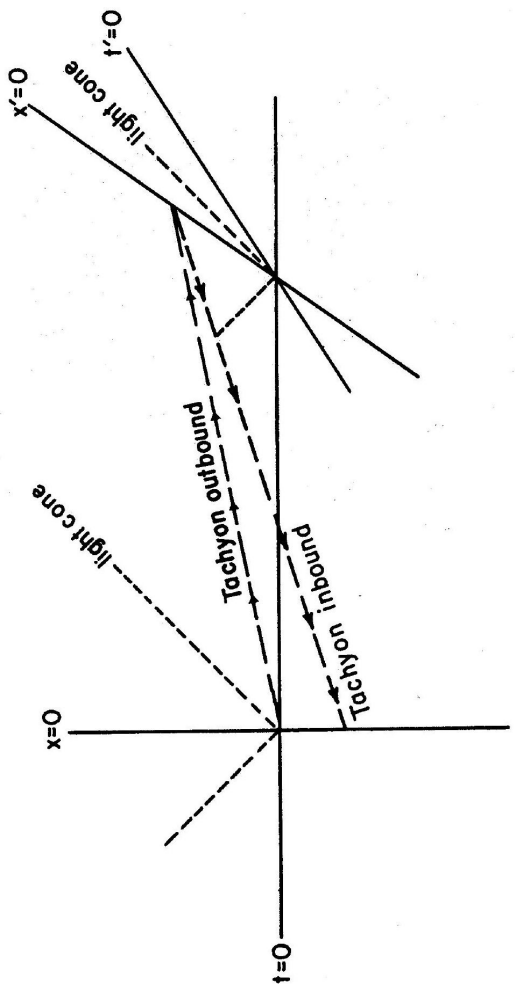
Now $\mathrm{dx}' = \gamma(\mathrm{dx} - \mathrm{vdt})$, $\mathrm{dt}' = \gamma(\mathrm{dt} - \mathrm{vdx})$, so substituting and solving for the apparent velocity in the stationary frame gives

$$-\mathrm{dx}/\mathrm{dt} = (\mathrm{u} - \mathrm{v})/(1 - \mathrm{uv})$$

Finally we add up times in the stationary frame $t_{\text{total}} = t_{\text{out}} + t_{\text{back}} = \mathrm{L/u} + \mathrm{L}(1 - \mathrm{uv})/(\mathrm{u} - \mathrm{v}) = \mathrm{L}[1/\mathrm{u} + (1 - \mathrm{uv})/(\mathrm{u} - \mathrm{v})]$. One can easily calculate that

$$t_{\text{total}} < 0 \quad \text{if} \quad u > \left[1 + \left(1 - v^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]/v$$

A spacetime diagram is helpful in understanding this effect.



Solution 1.7. The rotation comes from the contraction in the x direction but not in the y direction. That is, $\cot\theta = \Delta\mathrm{x}/\Delta\mathrm{y}$. Because of the motion, $\Delta x = \Delta x'\left(1-\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}$ while $\Delta y = \Delta y'$. Thus,

$$\cot\theta = \left(1-\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}\cot\theta'$$

Solution 1.8. Not only are lengths contracted, but also times are dilated. In S the bullet's velocity is

$$\mathrm{v} = (\Delta\mathrm{x}/\Delta\mathrm{t}, \Delta\mathrm{y}/\Delta\mathrm{t})$$

From the transformation formulas for Δx and Δt

$$\mathrm{v_x} = \Delta\mathrm{x}/\Delta\mathrm{t} = \left(\mathrm{v_{x'}} + \beta\right)/\left(1+\beta\mathrm{v_{x'}}\right)$$

Also, since $\Delta y = \Delta y'$; we have

$$\mathrm{v_y} = \Delta\mathrm{y}/\Delta\mathrm{t} = \Delta\mathrm{y}'\left(1-\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}/\left(\Delta\mathrm{t}'+\beta\Delta\mathrm{x}'\right) = \mathrm{v_{y'}}\left(1-\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}/\left(1+\beta\mathrm{v_{x'}}\right)$$

The direction of motion then is given by

$$\tan\theta = \mathrm{v_y}/\mathrm{v_x} = \mathrm{v'_y}\left(1-\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}/\left(\mathrm{v_{x'}}+\beta\right) = \tan\theta'\left(1-\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}/\left(1+\beta/\mathrm{v'_{x'}}\right)$$

Except for the factor of $\left(1-\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}$, this change in direction is identical to the Galilean result. It represents a "funneling" of the motion toward the x axis. For a photon, $v_x^2 + v_y^2 = 1, v_x = \cos\theta$, so that

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta'+\beta}{1+\beta\cos\theta'}, \quad \tan\theta = \frac{\tan\theta'\left(1-\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}}{1+\beta\sec\theta'}$$

Solution 1.9. If $\bar{\theta}$ is the direction of the motion of a photon from star to observer then the star is observed at angle $\theta = \pi - \bar{\theta}$. The transformation of photon directions was derived in the previous problem. From that result we have here

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta'-\beta}{1-\beta\cos\theta'}$$

The number of stars observed in solid angle $\mathrm{d}\Omega$ is then

$$\begin{aligned}\mathrm{dN} &= \mathrm{N d\Omega}/4\pi = (\mathrm{N}/4\pi)2\pi\ \mathrm{d}(\cos\theta)\\ &= \frac{1}{2}\ \mathrm{N}\frac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}\left(\cos\theta'\right)}\mathrm{d}\left(\cos\theta'\right)\\ &= \frac{1}{2}\ \mathrm{N}\frac{\left(1-\beta^2\right)}{\left(1-\beta\cos\theta'\right)^2}\ \mathrm{d}\left(\cos\theta'\right)\end{aligned}$$

Since $\mathrm{dN} = 2\pi \mathrm{P}\left(\theta', \phi'\right) \mathrm{d}\left(\cos\theta'\right)$ the distribution in S′ is

$$\mathrm{P}\left(\theta', \phi'\right) = \frac{\mathrm{N}}{4\pi}\frac{\left(1-\beta^2\right)}{\left(1-\beta\cos\theta'\right)^2}$$

Checks: $\beta \to 0 \quad \mathrm{P}\left(\theta', \phi'\right) \to \mathrm{N}/4\pi = \mathrm{P}(\theta, \phi)$

$$\int_{\text{sphere}} \mathrm{P}\left(\theta', \phi'\right) \mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{N}\left(1-\beta^2\right)}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{2\pi\ \mathrm{d}\cos\theta'}{\left(1-\beta\cos\theta'\right)^2} = \mathrm{N}.$$

You can easily verify that half the stars are contained between $\theta' = 0$ and $\theta'_{\frac{1}{2}} = \cos^{-1}\beta < \pi/2$. Thus the stars "bunch up" in the forward direction. For $\beta \approx 1, \theta'_{\frac{1}{2}} \approx [2(1-\beta)]^{\frac{1}{2}}$ and the bunching is pronounced.

Solution 1.10. The length of $\mathbf{A}$ is $|\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}|^{\frac{1}{2}}$ and

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} &= \left(3^{\frac{1}{2}}\mathbf{e}_t + 2^{\frac{1}{2}}\mathbf{e}_x\right)\cdot\left(3^{\frac{1}{2}}\mathbf{e}_t + 2^{\frac{1}{2}}\mathbf{e}_x\right)\\ &= 3\mathbf{e}_t\cdot\mathbf{e}_t + 2\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_x + 2\sqrt{6}\mathbf{e}_t\cdot\mathbf{e}_x\\ &= -3 + 2 + 0 = -1\end{aligned}$$

If θ is the angle between A and $\mathbf{e}_\mathrm{t}$ then

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_t}{|\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}|^{\frac{1}{2}}\left|\mathbf{e}_t\cdot\mathbf{e}_t\right|^{\frac{1}{2}}} = -3^{\frac{1}{2}}$$

which is satisfied by no real θ.

Solution 1.11. By symmetry, the clocks must read the same the next time Adam and Eve meet. An easy way to see this is by considering proper time intervals in a coordinate system fixed to an inertial observer at rest.

In polar coordinates

$$-\mathrm{d}\tau^2 = -\mathrm{dt}^2 + \mathrm{dr}^2 + \mathrm{r}^2\ \mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{dz}^2. \tag{1}$$

The coordinates of an instantaneously comoving inertial frame attached to Adam are $\phi_A = \omega t$, with r and z constant, and the coordinates of Eve are $\phi_\mathrm{E} = -\omega\mathrm{t}$, with r and z constant. Thus

$$\mathrm{d}\tau_\mathrm{A}^2 = \mathrm{d}\tau_\mathrm{E}^2 = \mathrm{dt}^2\left(1-\mathrm{r}^2\omega^2\right) \tag{2}$$

and proper time intervals for Adam and Eve are identical.

A second method is to consider a noninertial coordinate system attached to Adam. He may define surfaces of simultaneity by extending hypersurfaces orthogonal to his world line, the distance between hypersurfaces being at equal intervals of his proper time. At points where his hypersurfaces intersect Eve's world line, her proper time τ_E is read off and Adam can compute τ_A as a function of τ_E. One proceeds by determining the 4 -vector w which connects Adam's and Eve's world lines and which is orthogonal to Adam's 4-velocity:

Adam's world line:

$$\begin{aligned}&\mathrm{x} = \gamma\tau_\mathrm{A} &\text{(3a)}\\ &\mathrm{x} = \cos\omega\mathrm{t} = \sin\omega\gamma\tau_\mathrm{A}\\ &\mathrm{z} = 0\\ &\mathrm{t} = \gamma\tau_\mathrm{E} &\text{(3b)}\\ &\mathrm{x} = -\sin\omega\mathrm{t} = -\sin\omega\gamma\tau_\mathrm{E}\\ &\mathrm{y} = \cos\omega\mathrm{t} = \cos\omega\gamma\tau_\mathrm{E}\\ &\mathrm{z} = 0\end{aligned}$$

where we have taken the ring to have unit radius. From these relations

$$\begin{aligned}\mathbf{w} \equiv \mathbf{x_A} - \mathbf{x_E} &= \left[\gamma\left(\tau_\mathbf{A} - \tau_\mathbf{E}\right), \sin\omega\gamma\tau_\mathbf{A} + \sin\omega\gamma\tau_\mathbf{E}, \cos\omega\gamma\tau_\mathbf{A} - \cos\omega\gamma\tau_\mathbf{E}, 0\right]\\ \mathbf{u_A} &= \left(\gamma, \omega\gamma\cos\omega\gamma\tau_\mathbf{A}, -\omega\gamma\sin\omega\gamma\tau_\mathbf{A}, 0\right)\end{aligned}$$

so that requiring $w\cdot u_A = 0$ gives

$$\tau_{\rm A} - \tau_{\rm E} = \omega\gamma^{-1}\sin\left[\omega\gamma\left(\tau_{\rm A} + \tau_{\rm E}\right)\right] \tag{4}$$

Equation (4) is transcendental for $\tau_{\rm A}\left(\tau_{\rm E}\right)$. One may easily see, however, that $\tau_{\rm A} = \tau_{\rm E}$ when

$$\sin 2\omega\gamma\tau_{\rm A} = \sin 2\omega t = 0, \tag{5}$$

i.e. whenever Adam's and Eve's world lines cross.

Solution 1.12. The Lorentz transformation is

$$\begin{aligned} {\rm t}' &= \gamma({\rm t} - {\rm vx}) \\ {\rm x}' &= \gamma({\rm x} - {\rm vt}); \end{aligned}$$

if $\mathrm{w} \equiv \mathrm{it}, \mathrm{w}' \equiv \mathrm{it}'$, this becomes

$$\begin{aligned} {\rm w}' &= \gamma({\rm w} - {\rm ivx}) \\ {\rm x}' &= \gamma({\rm x} + {\rm ivw}). \end{aligned}$$

To make this look like a rotation

$$\begin{aligned} {\rm w}' &= \cos\theta{\rm w} - \sin\theta{\rm x} \\ {\rm x}' &= \cos\theta{\rm x} + \sin\theta{\rm w}, \end{aligned}$$

we obviously want

$$\begin{gathered} \sin\theta = {\rm iv}y \\ \cos\theta = \gamma \\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = \gamma^2\left(1 - {\rm v}^2\right) = 1 \end{gathered}$$

So $\theta = \arcsin({\rm iv}\gamma) = \arctan({\rm iv}) = +{\rm i}\tanh^{-1}{\rm v}$.

Solution 1.13. Along the curve we have

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 &= \left(r^2\cos^2\theta\cos^2\phi + r^2\cos^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^2\theta - r^2\right)d\lambda^2 \\ &= r^2 d\lambda^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta - 1\right) = 0 \end{aligned}$$

so the curve is null.

To be a geodesic (i.e. a straight line) we must have ${\rm d}z/{\rm dt}$ = constant, but ${\rm d}z/{\rm dt} = \sin\theta$, so θ must be a constant. From the expression for dy/dt or dx/dt we see that ϕ must be constant. These are the requirements for a geodesic; there is no restriction on the function $r(\lambda)$. If, however, λ is to be an affine parameter (e.g. proper time) we must have ${\rm dt}/{\rm d}\lambda$ a constant, and hence r a constant.

Solution 1.14. 4-velocities are normalized so that ${\rm u}^\alpha{\rm u}_a = -1$, so

$$0 = \frac{\rm d}{{\rm d}\tau}\left({\rm u}^\alpha{\rm u}_\alpha\right) = 2\frac{{\rm du}^\alpha}{{\rm d}\tau}{\rm u}_\alpha = 2{\rm a}^\alpha{\rm u}_\alpha.$$

This is one constraint on the 4 -components of acceleration ${\rm a}^\alpha$. In the momentarily comoving frame ${\rm u}_\alpha = (-1, 0)$, and the constraint requires $a^0 = 0$, with $a^j (j = 1, 2, 3)$ arbitrary. A Newtonian accelerometer can be modeled as follows: Have the observer release a particle in the comoving frame and see how much velocity $d\underset{\sim}{v}$ the observer picks up relative to it in a short time ${\rm d}\tau$, then calculate $\underset{\sim}{a}_{\rm Newtonian} = {\rm d}\underset{\sim}{v}/{\rm d}\tau$. Of course the particle is really stationary in the momentarily comoving inertial frame, and we accelerate relative to it by an amount ${\rm du}^{\rm j} = {\rm a}^{\rm j}{\rm d}r$. Now ${\rm u}^{\rm j} = v^j\left(1 - v^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, so $du^j = \left(1 - v^2\right)^{-\frac{1}{2}}dv^j + v^j d\left(1 - v^2\right)^{-\frac{1}{2}}$. But $v = 0$ since the frames are momentarily comoving, and thus $du^j = dv^j$, so finally

$${\rm a}^{\rm j}_{\rm Newtonian} = {\rm dv}^{\rm j}/{\rm d}\tau = {\rm du}^{\rm j}/{\rm d}\tau = {\rm a}^{\rm j}.$$

The 3 independent components of 4 -acceleration in a comoving frame are just 3 Newtonian accelerations.

Solution 1.15. Since $\mathbf{a}\cdot\mathbf{u} = 0$, in the observer's local rest frame

$$\mathbf{a} = \left(0, \mathbf{a}^{\hat{\mathbf{j}}}\right),$$

where $\mathrm{a}^{\hat{\mathrm{j}}}$ is the $\mathrm{j}^{\rm th}$ component of locally measured acceleration. Then, the squared magnitude of his locally measured acceleration is

$$a^2 \equiv a^{\hat{j}}a_{\hat{j}} = \left(0, a^{\hat{j}}\right)\cdot\left(0, a^{\hat{j}}\right) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}.$$

Solution 1.16. The transformation of 3-velocity, from Problem 1.8, is

$$u'_\perp = \frac{\gamma^{-1}}{\left(1 - vu_\parallel\right)}u_\perp, \quad u_\parallel = \frac{u_\parallel - v}{1 - vu_\parallel}$$

and the time transformation is

$$\mathrm{t}' = \gamma(\mathrm{t} - \underline{\mathrm{v}} \cdot \underline{\mathrm{x}})$$

Now take differentials:

$$du'_{\perp} = \frac{\gamma^{-1} du_{\perp}}{\left(1 - v u_{\parallel}\right)} + \frac{v\gamma^{-1} u_{\perp}}{\left(1 - v u_{\parallel}\right)^2} du_{\parallel} = \frac{\gamma^{-1}\left[\left(1 - v u_{\parallel}\right) du_{\perp} + v u_{\perp} du_{\parallel}\right]}{\left(1 - v u_{\parallel}\right)^2}$$

$$du'_{\parallel} = \frac{du_{\parallel}}{1 - v u_{\parallel}} - \frac{v\left(v - u_{\parallel}\right) du_{\parallel}}{\left(1 - v u_{\parallel}\right)^2} = \frac{\gamma^{-2} du_{\parallel}}{\left(1 - v u_{\parallel}\right)^2}$$

$$dt' = \gamma\left(dt - \underset{\sim}{v}' \cdot d\underline{x}\right) = \gamma dt(1 - \underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{u}) = \gamma dt\left(1 - v u_{\parallel}\right)$$

$$\frac{d\underline{u}'_{\parallel}}{dt'} \equiv \underset{\sim}{a}'_{\parallel} = \frac{\gamma^{-3}}{\left(1 - v u_{\parallel}\right)^3} \overset{a}{\sim} \Big\| = \frac{\gamma^{-3}}{(1 - \underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{u})^3} \overset{a}{\sim} \Big\| \cdot (\text{ Ar })$$

(Answer)
and

$$\begin{aligned}\frac{d\underset{\sim}{u}'_{\perp}}{dt'} \equiv \underset{\sim}{a}'_{\perp} &= \frac{\gamma^{-2}}{\left(1 - v u_{\parallel}\right)^3}\left[\left(1 - v u_{\parallel}\right)\underset{\sim}{a}_{\perp} + v \underset{1}{u}_{\perp} a_{\parallel}\right] \\ &= \frac{\gamma^{-2}}{\left(1 - v u_{\parallel}\right)^3}\left[\underset{\sim}{a}_{\perp} - v\left(u_{\parallel} \underset{a}{a}_{\perp} - \underset{\perp}{u}_{\perp}{}^{a}\|\right)\right] \\ &= \frac{\gamma^{-2}}{\left(1 - \underset{\sim}{v}' \underset{\sim}{u}\right)^3}\left[\underset{\sim}{a}_{\perp} - \underset{\sim}{v} \times (\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{u})\right]\end{aligned}$$

(Answer)
[In the last line we have used the fact that

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{u} &= \left(\underset{\sim 1}{a} + \underset{\sim}{a}\|\right) \times \left(\underset{\sim 1}{u} + \underset{\sim}{u}\|\right) \\ &= \underset{\sim 1}{a} \times \underset{\sim}{u}\| + \underset{\sim}{a}\| \times \underset{\sim 1}{u}\end{aligned}$$

and the rule for expanding vector triple products.]
Solution 1.17. If the acceleration is in the x direction we can clearly choose $y = \bar{y}, z = \bar{z}$. Note that the world lines

$$\begin{aligned}t &= A\sinh g\bar{t} + B \\ x &= A\cosh g\bar{t} + C\end{aligned}$$

represent world lines with constant acceleration. [Easily verified. See also Problem 2.13.] If A, B, C are functions only of $\bar{x}$ then the above equations represent a 4 -velocity

$$u = \cosh \overline{gt} e_t + \sinh g\bar{t} e_x$$

independent of $\bar{x}$, and they therefore give us a set of world lines which are parallel on a $\bar{t}$ = constant surface. If, furthermore B and C are constant, u is perpendicular to the hyperplane $\overrightarrow{dt} = 0$ (i.e. the hyperplanes $\bar{t}$ = constant are hyperplanes of simultaneity for the momentarily comoving inertial frame). It remains only to choose $\mathrm{A}(\overline{\mathrm{x}}), \mathrm{B}$, and C correctly:

$$\begin{aligned}\mathrm{t} &= \left(\mathrm{g}^{-1} + \overline{\mathrm{x}}\right)\sinh \overline{\mathrm{gt}} \\ \mathrm{x} &= \left(\mathrm{g}^{-1} + \overline{\mathrm{x}}\right)\cosh \overline{\mathrm{gt}} - \mathrm{g}^{-1}\end{aligned}$$

Notice that the element of proper time for a coordinate stationary observer is

$$\mathrm{d}\tau = \left(\mathrm{dt}^2 - \mathrm{dx}^2\right)^{\frac{1}{2}} = (1 + \mathrm{g}\overline{\mathrm{x}})\mathrm{dt}$$

Since it does not depend only on t, clocks will not remain synchronized. i.e. They can only agree on one hyperplane.
Solution 1.18. Without loss of generality take the mirror to be in the xy plane, and take the photon to be in the yz plane. If "before" and "after" mean before and after reflection, we have for a photon in the lab frame:

$$\mathrm{p}_{\text{ before }} = (\mathrm{E}, 0, \mathrm{E}\sin\theta, \mathrm{E}\cos\theta)$$

Lorentz transforming to mirror frame,

$$P_{\text{before}} = [\gamma E(1 + v\cos\theta), 0, E\sin\theta, \gamma E(v + \cos\theta)]$$

Reflecting in mirror:

$$\mathbf{P}_{\text{after}} = [\gamma \mathrm{E}(1 + \mathrm{v}\cos\theta), 0, \mathrm{E}\sin\theta, -\gamma \mathrm{E}(\mathrm{v} + \cos\theta)]$$

Lorentz transforming back to lab frame:

$$\begin{aligned} P_{\text{after}} = \big\{&\gamma^2 E[(1 + v\cos\theta) + v(v + \cos\theta)], 0, \\ &E\sin\theta, \gamma^2 E[-v(1 + v\cos\theta) - (v + \cos\theta)]\big\} \end{aligned}$$

So that, finally:

$$\cos\theta|_{\text{after}} = \left|\frac{p^3}{p^0}\right| = +\frac{\left(1 + v^2\right)\cos\theta + 2v}{1 + 2v\cos\theta + v^2}$$

$$E_{\text{after}} = p^0_{\text{after}} = \left(\frac{1 + 2v\cos\theta + v^2}{1 - v^2}\right) E_{\text{before}}$$

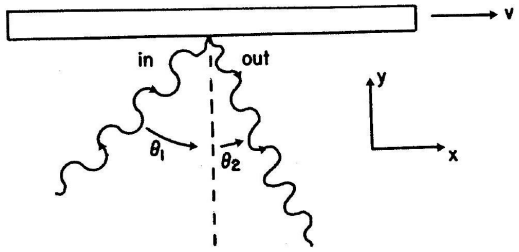
Solution 1.19. Let E and $\underset{\sim}{\mathrm{P}}$ denote the energy and momentum of the photon. In the frame of the mirror (primed frame) $\mathrm{E}'_{\text{in}} = \mathrm{E}'_{\text{out}}$, $\mathrm{P}'_{\text{x in}} = \mathrm{P}'_{\text{x out}}$, $\mathrm{P}'_{\text{y in}} = -\mathrm{P}'_{\text{y out}}$. In the lab frame, we wish to show $\theta_1 = \theta_2$.

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{(\mathrm{P_x}/\mathrm{P_y})_{\text{in}}}{(\mathrm{P_x}/-\mathrm{P_y})_{\text{out}}} = \frac{\mathrm{P}_{\text{x in}}}{\mathrm{P}_{\text{x out}}} \cdot \frac{\mathrm{P}'_{\text{y in}}}{-\mathrm{P}'_{\text{y out}}} = \frac{\mathrm{P}_{\text{x in}}}{\mathrm{P}_{\text{x out}}},$$

where we have used $\mathrm{P}'_{\mathrm{y}} = \mathrm{P}_{\mathrm{y}}$. Then, Lorentz transforming $\mathrm{P_x}$,

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\gamma\left(\mathrm{P}'_{\mathrm{x}} + \beta\mathrm{E}'\right)_{\text{in}}}{\gamma\left(\mathrm{P}'_{\mathrm{x}} + \beta\mathrm{E}'\right)_{\text{out}}} = 1.$$

Hence the angle of incidence equals the angle of reflection in the lab frame as well as the mirror frame.



Solution 1.20. In the rest frame of the observer,

$$\mathrm{u}^0 = 1, \quad \mathrm{u}^{\mathrm{j}} = 0$$
$$\mathrm{p}^0 = -\mathrm{p}_0 = \mathrm{E}$$
$$\mathrm{p}^{\mathrm{j}} = \mathrm{p}_{\mathrm{j}} = \underline{\mathrm{p}}$$

so, we verify the invariant formulas in this easiest frame:

(a) $\mathrm{E} = -\mathrm{p}_0\mathrm{u}^0 = -\mathrm{p}\cdot\mathrm{u}$

(b) $\mathrm{m}^2 = \mathrm{E}^2 - |\ \underset{\sim}{|}\ |^2 = -\mathrm{p}_0\mathrm{p}^0 - \mathrm{p}_{\mathrm{j}}\mathrm{p}^{\mathrm{j}} = -\mathrm{p}\cdot\mathrm{p}$

(c) $|\underset{\sim}{p}| = \left(\mathrm{E}^2 - \mathrm{m}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left[(\mathrm{p}\cdot\mathrm{u})^2 + \mathrm{p}\cdot\mathrm{p}\right]^{\frac{1}{2}}$

(d) $|\underset{\sim}{v}| = \frac{|p|}{E} = \left[\frac{E^2 - m^2}{E^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[1 + \frac{p\cdot p}{(p\cdot u)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$

(e) In the rest frame,

$$v^0 = -u^0 - \frac{p^0}{(-E)} = -1 + 1 = 0$$
$$v^j = -u^j - \frac{p^j}{(-E)} = 0 + \frac{dx^j}{dt}$$

Solution 1.21. There are three 4 -velocities to consider. The laboratory observer has $\mathbf{u}_{1\mathrm{ab}} = (1, 0)$; the nucleus has $\mathbf{u}_{\mathrm{Fe}} = (\gamma, \gamma\underline{\beta})$, where $\gamma = (1 - \underset{\sim}{\underline{\beta}}\cdot\underline{\beta})^{-\frac{1}{2}}$; the photon has a 4 -momentum $\mathbf{p}_\gamma = \text{constant} \times (1, -\mathfrak{n})$, since it is traveling toward the observer. Also notice that the photon is null, $\mathrm{p}_\gamma\cdot\mathrm{p}_\gamma \propto -1 + (-\underline{n})\cdot(-\underline{n}) = 0$. From Problem 1.20, now

$$\frac{\nu_{\text{observed}}}{\nu_{\text{emitted}}} = \frac{\mathrm{E}_{\text{lab}}}{\mathrm{E}_{\mathrm{Fe}}} = \frac{-\mathrm{u}_{1\mathrm{ab}}\cdot\mathrm{p}_\gamma}{-\mathrm{u}_{\mathrm{Fe}}\cdot\mathrm{p}_\gamma} = \frac{1}{\gamma(1 + \underline{\beta}\cdot\mathrm{n})}. \quad \text{(Answer).}$$

Solution 1.22. The doppler-shift formula (Problem 1.21) gives

$$1 = \frac{\nu_{\text{obs}}}{\nu} = \frac{\left(1 - \mathrm{v}^2\right)^{\frac{1}{2}}}{1 + \tau^{\cdot} \cdot \tilde{n}}$$

$$\cos\theta = \frac{\tau^{\cdot} \cdot \tilde{n}}{v} = \frac{\left(1 - v^2\right)^{\frac{1}{2}} - 1}{v}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left[\frac{\left(1 - v^2\right)^{\frac{1}{2}} - 1}{v}\right]$$

Solution 1.23. Make an arbitrary boost in a direction which lies in the $y - z$ plane. The photon now may have nonvanishing p^y and p^z as well as p^x. A pure rotation lines up the coordinate frame again so that only p^{x} is nonvanishing, but p^{x} does not now have its original magnitude. So, make a final boost along p^{x} either to redshift it or to blueshift it to the original value. Since $E^2 - p^2 = 0, E$ also has its original value. You can easily convince yourself that the product of these transformations is not a pure rotation; there is in general a net boost left over. An example is:

x-boost					x − y rotation		y− boost							
$\begin{bmatrix} \gamma' \\ \gamma'\mathrm{v}' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\gamma'\gamma' \quad 0 \quad 0 \quad 0$	$\begin{matrix} v' \\ 0 \end{matrix}$	σ	$\Gamma 1$	$0 \ \left(1 - v^2\right)^{\frac{1}{2}}$	0	0	$\begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \end{bmatrix}$	0	$\gamma\mathrm{v}$	0	$\begin{bmatrix} \mathrm{E} \\ \mathrm{E} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	=	= $\begin{bmatrix} \mathrm{E} \\ \mathrm{E} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

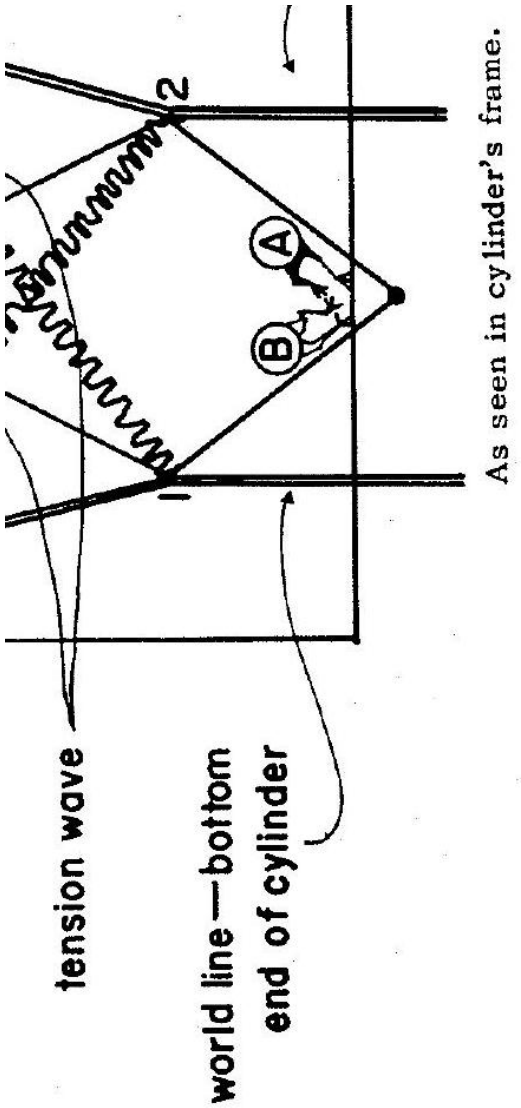
where v' is chosen to satisfy the equality

$$y'\left(1 + v'\right) = 1/y,$$

which gives

$$v' = -v^2/\left(2 - v^2\right).$$

Solution 1.24. It is not possible for one inertial frame to jerk back and forth with respect to another. The "paradox" comes from the tacit and erroneous assumption that the cylinder remains rigid when the frogs hit the ends. This cannot be true since the elastic waves that inform one end of the tube that the other has been hit must propagate along the walls of the tube at less than the speed of light. In the freely-falling frame of the cylinder, the two ends are driven outward by the impact of the frogs. Tension waves fly from each end of the cylinder toward the other. Not until the waves meet at the center of the tube do they discover the exist-



ence of each other. Then they pass each other and counteract each other's effects, pulling the tube back to its original shape. The tube then pulsates back and forth in its fundamental mode of vibration. During this
his pulsation the frogs hit the ends of the tube time and again, each time changing the amplitude and phase of the pulsation.

From another freely-falling frame (perhaps instantaneously comoving with onlooking birds), the cylinder rushes by at speed β, and the frogs do not hit the ends of the tube simultaneously, the pulsations of the two ends will be out of phase with each other, but the overall picture will not be much different. In particular, the center of the tube (which is at rest in the inertial frame of the cylinder) will not jerk back and forth in any other inertial frame. The accompanying spacetime diagrams illustrate the phenomena.

Solution 1.25. Let us first derive the forms of the infinitesimal operators by considering their action on a spacetime function $f(x, y, z, t)$:
(i) Rotations about z axis:

$$\begin{aligned} \mathrm{x}' &\approx \mathrm{x} - \mathrm{y}\theta \\ \mathrm{y}' &\approx \mathrm{y} + \mathrm{x}\theta \\ \mathrm{z}' &= \mathrm{z} \\ \mathrm{t}' &= \mathrm{t} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\mathrm{f}\left(\mathrm{x}', \mathrm{y}', \mathrm{z}'\right) - \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = \theta\left[-\mathrm{y}\partial_{\mathrm{x}} + \mathrm{x}\partial_{\mathrm{y}}\right]\mathrm{f} \tag{2}$$

thus

$$\mathrm{J}_z = -2\mathrm{i}\left(\mathrm{x}\partial_{\mathrm{y}} - \mathrm{y}\partial_{\mathrm{x}}\right), \tag{3}$$

since

$$\mathrm{f}\left(\mathrm{x}', \mathrm{y}', \mathrm{z}'\right) \equiv \left(1 + \mathrm{i}\ \mathrm{J}_z\theta/2\right)\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, z).$$

$\mathrm{J_y}, \mathrm{J_x}$ are obtained by cyclical permutations of Equation (3).
(ii) Boosts in z direction:

$$z' \approx z - vt$$
$$t' \approx t - vx$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

$$\mathrm{f}\left(\mathrm{x}', \mathrm{y}', \mathrm{z}', \mathrm{t}'\right) - \mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{t}) = \left[-\mathrm{t}\partial_z - \mathrm{z}\partial_\mathrm{t}\right] \mathrm{vf}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, \mathrm{t})$$

thus

$$\mathrm{K}_z = 2\mathrm{i}\left(\mathrm{t}\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\right), \text{ etc.} \tag{4}$$

(iii) Now, commutation relations may be worked out from Equations (3) and (4) by the usual procedure, for example:

$$\left[\mathrm{J_x},\ \mathrm{J_y}\right] = -4\left[\mathrm{y}\partial_\mathrm{z} - \mathrm{z}\partial_\mathrm{y}, \mathrm{z}\partial_\mathrm{x} - \mathrm{x}\partial_\mathrm{z}\right] = 4\left(\mathrm{x}\partial_\mathrm{y} - \mathrm{y}\partial_\mathrm{x}\right) = 2\mathrm{i}\ \mathrm{J_z}, \tag{5}$$

and similarly for all other commutators.
(iv) A representation of the Lorentz group is specified by giving explicit matrices for the generators. We can associate the operators with the Pauli spin matrices

$$\sigma_\mathrm{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ etc.}$$

according to

$$\underset{\sim}{\mathrm{J}} \to \underset{\sim}{\sigma}$$
$$\underline{\mathrm{K}} \to \mathrm{i}\sigma.$$

The commutation relations for $\underset{\sim}{J}$ and $\underset{\sim}{K}$ are satisfied since $[\sigma_x, \sigma_y] = 2\mathrm{i}\sigma_z$ etc. To find the matrices corresponding to finite transformations L , note that for example J_Z is defined by

$$\left.\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0} = \frac{\mathrm{iJ}_z}{2},$$

so that

$$\mathrm{L}(\theta) = \exp\left(\mathrm{i}\theta\ \mathrm{J}_z/2\right)$$

An arbitrary finite transformation L will have six parameters; in the general case the rotation parameters θ^* (here treated as a 3 -vector) will be different from the physical rotation angle $\underset{\sim}{\theta}$ and the parameters representing boosts, $\underset{\sim}{v}^*$, will differ from the physical relative velocity $\underset{\sim}{v}$. These are details; the Lorentz group is defined completely by its generators J, K; its parametrization is largely arbitrary. The infinitesimal version of an arbitrary transformation L is

$$\delta\mathrm{L} = \mathrm{i}\left(\theta_\mathrm{x}^*\ \mathrm{J_x} + \theta_\mathrm{y}^*\ \mathrm{J_y} + \theta_\mathrm{z}^*\ \mathrm{J_z} + \mathrm{v_x^*}\ \mathrm{K_x} + \mathrm{v_y^*}\ \mathrm{K_y} + \mathrm{v_z^*}\ \mathrm{K_z}\right)/2 = \left(\underset{\sim}{i}^* - \underset{\sim}{v}^*\right) \cdot \underset{\sim}{\sigma}/2$$

Let us define

$$\underline{q} \equiv \left(\underset{\sim}{i}\theta^* - \underset{\sim}{v}^*\right)/2$$
$$q^2 \equiv \underset{\sim}{q} \cdot \underset{\sim}{q} = \frac{1}{4}\left(-\theta^* 2 - 2i\underset{\sim}{\theta}^* \cdot \underset{\sim}{v}^* + v^2\right).$$

(Note that pure boosts and pure rotations correspond respectively to pure real and pure imaginary q.) We have then, for the general finite transformation:

$$\begin{aligned} L(\underline{\theta}, v) = \exp(\underline{q} \cdot \underline{\sigma}) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\underline{q} \cdot \underline{\sigma})^n / n! \\ &= \sum_{n=0,2,4\cdots}^{\infty} q^n/n! + \sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty} (\underline{q} \cdot \underline{\sigma}) q^{n-1/n!} \\ &= \cosh q + (\underline{q} \cdot \sigma/q) \sinh q. \end{aligned}$$

Here we have used

$$(\underline{q}\cdot\underline{\sigma})(\underline{q}\cdot\underline{\sigma}) = q_i q_j\,(\sigma_i,\sigma_j) = q_i q_j \delta^{ij} = q^2.$$

Solution 1.26. The hard way to solve the problem is by multiplying 4×4 matrices together and then decomposing into rotations and boosts. An easier way is to use the 2×2 complex unimodular matrix representation of the Lorentz group developed in Problem 1.25. Represent a pure boost of velocity v_1 by

$$\mathrm{L}\left(\underset{\sim 1}{v}\right) = \exp\left(-v_1^* \underset{\sim 1}{n}\cdot\underset{\sim}{\sigma}/2\right) = \cosh\left(v_1^*/2\right) + \left(\underset{\sim 1}{n}\cdot\underset{\sim}{\sigma}\right)\sinh\left(v_1^*/2\right) \tag{1a}$$

where $\underline{n}_1$ is a unit vector in the direction of the boost and v_1^* parametrizes the magnitude of the boost. Represent a pure rotation $\underset{\sim}{\theta}$ by

$$\mathrm{L}\left(\underset{\sim 1}{\theta}\right) = \exp\left(i\theta^* \underset{\sim}{n}\cdot\underset{\sim}{\sigma}/2\right) = \cos\left(\theta^*/2\right) - i(\underline{n}\cdot\underset{\sim}{\sigma})\sin\left(\theta^*/2\right) \tag{1b}$$

where $\underline{n}$ is the rotation axis and θ^* parametrizes the magnitude of the rotation.

For pure boosts in the same direction, v^* is in fact the rapidity parameter, $v^* = \tanh^{-1}|v|$, since v^* adds linearily, e.g.

$$\mathrm{L}(v_1)\,\mathrm{L}(v_2) = e^{-v_1^*\sigma_x/2} e^{-v_2^*\sigma_x/2} = e^{-(v_1^*+v_2^*)\sigma_x/2}.$$

Likewise one can see that for pure rotations in the same direction, θ^* is just the magnitude of the rotation angle, $\theta^* = |\underline{\theta}|$.

Using Equations (1a) and (1b) one now solves the relation

$$\mathrm{L}\left(\underset{\sim 1}{v}\right)\mathrm{L}\left(\underset{\sim 2}{v}\right) = \mathrm{L}(\theta\underset{\sim}{n})\mathrm{L}\left(\underset{\sim 3}{v}\right) \tag{2}$$

for $\theta, \underset{\sim}{n}, \underset{\sim 3}{v}$ in terms of $\underset{\sim 1}{v}$ and $\underset{\sim 2}{v}$. A useful identity in multiplying the right hand sides of Equation (2) together is

$$(\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{\sigma})(\underset{\sim}{B}\cdot\underset{\sim}{\sigma}) = A\cdot B + i(\underset{\sim}{A}\times\underline{B})\cdot\underset{\sim}{\sigma}.$$

Since the $\underset{\sim}{\sigma}$ and identity 2×2 matrix are all independent, one may equate, in Equation (2), the real and imaginary parts respectively of terms multiplying the identity matrix and of terms multiplying the σ matrices, yielding two scalar and two vector equations:

$$\cosh\left(\frac{1}{2}v_1^*\right)\cosh\left(\frac{1}{2}v_2^*\right) + \sinh\left(\frac{1}{2}v_1^*\right)\sinh\left(\frac{1}{2}v_2^*\right)(n_1\cdot n_2) = \cosh\left(\frac{1}{2}v_3^*\right)\cos\left(\frac{1}{2}\theta^*\right) \tag{3a}$$

$$\sin\left(\frac{1}{2}\theta^*\right)\sinh\left(\frac{1}{2}v_3^*\right)(\underline{n}\cdot\underline{n}_3) = 0 \tag{3b}$$

$$\cosh\left(\frac{1}{2}v_1^*\right)\sinh\left(\frac{1}{2}v_2^*\right)n_2 + \sinh\left(\frac{1}{2}v_1^*\right)\cosh\left(\frac{1}{2}v_2^*\right)n_1 = \cos\left(\frac{1}{2}\theta^*\right)\sinh\left(\frac{1}{2}v_3^*\right)n_3 + \sin\left(\frac{1}{2}\theta^*\right)\sinh\left(\frac{1}{2}v_3^*\right)(\underline{n}\times\underline{n}_3) \tag{3c}$$

$$\sinh\left(\frac{1}{2}v_1^*\right)\sinh\left(\frac{1}{2}v_2^*\right)\left(\underset{\sim 1}{n}\times\underset{\sim 2}{n}\right) = -\sin\left(\frac{1}{2}\theta^*\right)\cosh\left(\frac{1}{2}v_3^*\right)\underset{\sim}{n}. \tag{3d}$$

In the general case, the solution to Equation (3b) is

$$\underline{n}\cdot\underline{n}_3 = 0 \tag{4}$$

i.e., the resultant rotation is orthogonal to the resultant boost.

Let γ be the angle between $\underline{n}_1$ and $\underline{n}_2$. Then, dotting $\underset{\sim}{n}$ into Equation (3d) and combining with Equation (3a), one finds

$$\tan\left(\frac{1}{2}\theta^*\right) = \frac{-\sinh\left(\frac{1}{2}v_2^*\right)\sinh\left(\frac{1}{2}v_2^*\right)\sin\gamma}{\cosh\left(\frac{1}{2}v_1^*\right)\cosh\left(\frac{1}{2}v_2^*\right) + \cos\gamma\sinh\left(\frac{1}{2}v_1^*\right)\sinh\left(\frac{1}{2}v_2^*\right)} \tag{5}$$

Note that $\theta\,(=\theta^*$ by above discussion) may take on all values $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ except $\theta = \pi$, and that for $n_1 = n_2(\gamma = 0), \theta = 0$ and there is no net rotation as expected.

Solution 1.27. An astronaut looking at the sky (by null photons!) makes an arbitrary Lorentz transformation,

and looks at the sky again. There results a continuous map of the sky onto itself. Any continuous map of a 2 -sphere onto itself has at least one fixed point.

Solution 1.28. From Solution 1.25, any homogeneous proper Lorentz transformation corresponds to a 2×2 complex unimodular matrix L , or a complex 3 -vector $\underset{\sim}{P}$, say. We will write the 2×2 matrix as

$$\mathrm{L}(\underset{\sim}{\mathrm{P}}) = \left(1 + \mathrm{P}^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{I} + \underset{\sim}{\mathrm{P}} \cdot \underset{\sim}{\sigma},$$

where $\mathrm{P}^2 = \underset{\sim}{\mathrm{P}} \cdot \underset{\sim}{\mathrm{P}}$, and I is the identity matrix which we will often not write in explicitly. (In Solution 1.25, we used $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{q}(\sinh q)/q$.) For a pure boost with velocity v and direction $\underset{\sim}{n}$, $\underset{\sim}{P}$ is real: $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{n} \sinh(\psi/2)$, where $\psi = \tanh v$ is the rapidity. For a pure rotation of magnitude θ about an axis $\underset{\sim}{n}$, $\underset{\sim}{P}$ is imaginary: $\underset{\sim}{P} = \text{in } \sin(\theta/2)$ and $P^2 \geq -1$.

The composition of two Lorentz transformations represented by $\underset{\sim}{P}$ and Q is

$$\underset{\sim}{P} \circ \underset{\sim}{Q} = \left(1 + P^2\right)^{\frac{1}{2}} \underset{\sim}{Q} + \left(1 + Q^2\right)^{\frac{1}{2}} \underset{\sim}{P} + i \underset{\sim}{P} \times \underset{\sim}{Q}.$$

This follows from multiplying the matrices corresponding to the Lorentz transformations:

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(\mathrm{P})\mathrm{L}(\underset{\sim}{\mathrm{Q}}) &= \left[\left(1 + \mathrm{P}^2\right)^{\frac{1}{2}} + \underset{\sim}{\mathrm{P}} \cdot \underset{\sim}{g}\right] \left[\left(1 + \mathrm{Q}^2\right)^{\frac{1}{2}} + \underset{\sim}{\mathrm{Q}} \cdot \underset{\sim}{g}\right] \\ &= \left(1 + \mathrm{P}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \mathrm{Q}^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left[\left(1 + \mathrm{P}^2\right)^{\frac{1}{2}} \underset{\sim}{\mathrm{Q}} + \left(1 + \mathrm{Q}^2\right)^{\frac{1}{2}} \underset{\sim}{\mathrm{P}}\right] \cdot \underset{\sim}{g} + \underset{\sim}{\mathrm{P}} \cdot \underset{\sim}{\mathrm{Q}} + \mathrm{P} \times \underset{\sim}{\mathrm{Q}} \cdot \underset{\sim}{\sigma} \end{aligned}$$

The idea of the solution is first to find a characterization of the product of two pure boosts (Lemma 1), then to find a criterion for the case that an arbitrary Lorentz transformation is the product of three boosts (Lemma 2), and finally to show that this criterion is always satisfied except for the case of a " 180° screw", which requires four boosts.

LEMMA 1. $\underset{\sim}{\mathrm{P}}$ is the product of two pure boosts $\underset{\sim}{\mathrm{C}}$ and $\underset{\sim}{\mathrm{D}}$ if and only if P^2 is real and positive.

Proof. If $\underset{\sim}{\mathrm{P}}$ is the product of $\underset{\sim}{\mathrm{C}}$ and $\underset{\sim}{\mathrm{D}}$ (real, non-null vectors), then

$$\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{C} \circ \underset{\sim}{D} = \left(1 + C^2\right)^{\frac{1}{2}} \underset{\sim}{D} + \left(1 + D^2\right)^{\frac{1}{2}} \underset{\sim}{C} + i \underset{\sim}{C} \times \underset{\sim}{D} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} P^2 &= \left(1 + C^2\right) D^2 + \left(1 + D^2\right) C^2 + 2 \left(1 + C^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + D^2\right)^{\frac{1}{2}} \underset{\sim}{C} \cdot \underset{\sim}{D} - C^2 D^2 + (\underset{\sim}{C} \cdot \underset{\sim}{D})^2 \\ &= \left[\left(1 + C^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + D^2\right)^{\frac{1}{2}} + \underset{\sim}{C} \cdot \underset{\sim}{D}\right]^2 - 1 \qquad (2) \\ &> \left[\left(1 + 2CD + C^2 D^2\right)^{\frac{1}{2}} + \underset{\sim}{C} \cdot \underset{\sim}{D}\right]^2 - 1 \quad \text{since } C^2 + D^2 > 2CD \\ &\geq (1 + |\underset{\sim}{C} \cdot \underset{\sim}{D}| + \underset{\sim}{C} \cdot \underset{\sim}{D})^2 - 1 \quad \text{since } CD \geq |\underset{\sim}{C} \cdot \underset{\sim}{D}| \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Conversely, if P^2 is real and positive, then one can write $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{A} + i \underset{\sim}{B}$, where $\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B} = 0$ and $A^2 - B^2 > 0$. To construct boosts $\underset{\sim}{C}$ and $\underset{\sim}{D}$, choose a vector $\underset{\sim}{E}$ orthogonal to both $\underset{\sim}{A}$ and $\underset{\sim}{B}$ with E^2 to be determined. As an ansatz, take

$$\underset{\sim}{\mathrm{C}} = \mathrm{a} \underset{\sim}{\mathrm{A}} + \underset{\sim}{\mathrm{E}}, \quad \underset{\sim}{\mathrm{D}} = \mathrm{a} \underset{\sim}{\mathrm{A}} - \underset{\sim}{\mathrm{E}}, \tag{3}$$

where a is a normalization constant to be determined. From Equation (3) $\mathrm{C}^2 = \mathrm{D}^2 = \mathrm{a}^2\ \mathrm{A}^2 + \mathrm{E}^2$ and by Equation (1)

$$\underset{\sim}{A} = \left(1 + C^2\right)^{\frac{1}{2}} \underset{\sim}{D} + \left(1 + D^2\right)^{\frac{1}{2}} \underset{\sim}{C} = \left(1 + a^2 A^2 + E^2\right)^{\frac{1}{2}} 2a \underset{\sim}{A}$$

and

$$\underline{B} = \underset{\sim}{C} \times \underset{\sim}{D} = 2a \underset{\sim}{E} \times \underset{\sim}{A}.$$

Thus the construction will succeed as long as

$$1 = 2a \left(1 + a^2 A^2 + E^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4a}$$

$$B^2 = 4a^2 E^2 A^2 \tag{4b}$$

Square Equation (4a) and solve for a^2 :

$$a^2 = \left\{ \left[\left(1+E^2\right)^2 + A^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \left(1+E^2\right) \right\} / \left(2A^2\right) \tag{5a}$$

Equation (4b) now implies ..

$$B^2 = 2E^2 \left\{ \left[\left(1+E^2\right)^2 + A^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \left(1+E^2\right) \right\}$$

After squaring and simplifying, this reduces to

$$4\left(A^2 - B^2\right) E^4 - 4B^2E^2 - B^4 = 0 \tag{5b}$$

which always has a positive solution for E^2 since $A^2 > B^2$. The parameter a is given by (5a) and the proof is now complete.

Now try to express any $\underset{\sim}{Q}$ as a product of three boosts. By Lemma 1, this is possible if and only if there exists a boost $\underset{\sim}{\mathrm{C}}$ such that $\underline{P}^2$ is real and positive, where $\underset{\sim}{P} \equiv \underset{\sim}{Q} \circ (-C)$. By algebra similar to that used to reach Equation (2), we find

$$\left(1+P^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1+Q^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(1+C^2\right)^{\frac{1}{2}} - \underline{Q} \cdot \underline{C} \tag{6}$$

So we must find $\underset{\sim}{\mathrm{C}}$ such that $\left(1+\mathrm{P}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ evaluated from Equation (6) is real ($\underset{\sim}{Q}$ is in general complex) and $\left(1+P^2\right)^{\frac{1}{2}} > 1$.

Let $\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{A} + i\underset{\sim}{B}$ ($\underset{\sim}{A}$ and $\underset{\sim}{B}$ real), and let the boost $\underset{\sim}{D}$ be some linear combination of $\underset{\sim}{A}$ and $\underset{\sim}{B}$.

LEMMA 2. There exists a boost C satisfying the required properties if and only if there exists a boost $\underset{\sim}{\mathrm{D}}$ which is a linear combination of $\underset{\sim}{\mathrm{A}}$ and $\underset{\sim}{B}$ such that

$$d \equiv \left(1+Q^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(1+D^2\right)^{\frac{1}{2}} - \underset{\sim}{Q} \cdot \underset{\sim}{D}$$

with d real and strictly positive.

Proof. Let $\underset{\sim}{F}$ be a vector orthogonal to both $\underset{\sim}{A}$ and $\underset{\sim}{B}$ with $F^2 < 1$ to be determined shortly. Define

$$\underline{C} = (\underline{D} + F) / \left(1-F^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

so that $1 + \mathrm{C}^2 = \left(1+\mathrm{D}^2\right) / \left(1-\mathrm{F}^2\right)$. From Equation (6),

$$\left(1+P^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\left(1+Q^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(1+D^2\right)^{\frac{1}{2}} - Q \cdot D \right] \left(1-F^2\right)^{-\frac{1}{2}} = d\left(1-F^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Thus if and only if d is real and positive, we can choose F^2 close enough to 1 that $\left(1+\mathrm{P}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ is real and has magnitude greater than 1 . Lemma 2 is proven.

Now consider two cases:

Case 1: $\underset{\sim}{A}$ not parallel to $\underset{\sim}{B}, A^2 \neq 0$, and $B^2 \neq 0$.

In this case Equation (7) gives

$$(d + \underline{Q} \cdot D)^2 = \left(1+Q^2\right)\left(1+D^2\right).$$

Substituting $\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{A} + i\underset{\sim}{B}$ gives two real equations:

$$(d + \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{D})^2 - (\underset{\sim}{B} \cdot \underset{\sim}{D})^2 = \left(1 + A^2 - B^2\right)\left(1+D^2\right), \tag{8a}$$

$$(d + \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{D})\underset{\sim}{B} \cdot \underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B}\left(1+D^2\right). \tag{8b}$$

Solve Equations (8) simultaneously for $d + A \cdot \underset{\sim}{D}$ and $\underset{\sim}{B} \cdot \underset{\sim}{D}$ to get:

$$(d + \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{D})^2 = \frac{1}{2}\left(1+D^2\right) \left\{ \left[\left(1 + A^2 - B^2\right)^2 + 4(\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B})^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left(1 + A^2 - B^2\right) \right\} \tag{9a}$$

$$(\underset{\sim}{B} \cdot \underset{\sim}{D})^2 = \frac{1}{2}\left(1+D^2\right) \left\{ \left[\left(1 + A^2 - B^2\right)^2 + 4(\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B})^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \left(1 + A^2 - B^2\right) \right\} \tag{9b}$$

These equations do not determine D and/or d explicitly, because D^2 sccurs on the right-hand side. One possible solution of these equations is to take $\underset{\sim}{D} = b\underset{\sim}{B}, b$ to be determined. For this choice Equation (9b) secomes

$$\left(2b^2B^4\right) / \left(1+b^2B^2\right) = \left[\left(1+A^2-B^2\right)^2 + 4(A\cdot B)^2\right]^{\frac{1}{2}} - \left(1+A^2-B^2\right). \tag{10}$$

To show that there is always a real solution b of Equation (10), note that the right-hand side is ≥ 0 (obvious) and also $< 2\ \mathrm{B}^2$; this follows since

$$\begin{aligned} 4(\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B})^2 &< 4A^2B^2 \\ &= \left(1+A^2+B^2\right)^2 - \left(1+A^2-B^2\right)^2 - 4B^2 \\ &< \left(1+A^2+B^2\right)^2 - \left(1+A^2-B^2\right)^2 \end{aligned}$$

Because the left-hand side of Equation (10) varies from 0 to $2B^{\angle}$ as b^2 varies from 0 to ∞, there is always a real constant b such that Equation (10) holds. Thus Equation (9b) is satisfied by our ansatz, and then Equation (9a) (with $\underset{\sim}{D} = b\underset{\sim}{B}$ and with the sign of b chosen appropriately) defines a positive value of d. Thus $\underset{\sim}{Q}$ is the product of 3 boosts.

Case 2: $\underset{\sim}{A}$ parallel to $\underset{\sim}{B}$ (including $A^2 = 0$ or $B^2 = 0$).

Now Equation (7) becomes a scalar equation since all the vectors are collinear:

$$\mathrm{d} = \left(1+\mathrm{Q}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\mathrm{D}^2\right)^{\frac{1}{2}} - \mathrm{QD} \tag{11}$$

Let

$$\psi = \sinh^{-1}\mathrm{Q} = a + \mathrm{i}\beta,$$

and make ψ single-valued by the restriction $-\pi/2 < \beta \leq \pi/2$. Also let

$$\phi = \sinh^{-1}\mathrm{D} \quad \text{(real)}$$

Equation (11) then becomes

$$d = \cosh(\psi-\phi) = \cosh(\alpha-\phi)\cos\beta - i\sinh(\alpha-\phi)\sin\beta.$$

If $\beta = 0$, we are done ($\underset{\sim}{Q}$ is a pure boost). If $\beta \neq 0$, for d to be real we must choose $\phi = a$ (this fixes D); i.e. $\mathrm{d} = \cos\beta$. If $\beta \neq \pi/2$, d positive and Q is the product of three boosts. If $\beta = \pi/2, d = 0$ and is not the product of three boosts.

The case $\beta = \pi/2$ corresponds to $\mathrm{Q} = \sinh(\alpha + \mathrm{i}\pi/2) = \mathrm{i}\cosh\alpha$. So is pure imaginary and $Q^2 \leq -1$. This corresponds to a rotation through 180° composed with a boost of rapidity $2a$, a " 180° screw." (In partict lar, a pure rotation through 180° cannot be attained by three boosts.)

A 180° screw can be achieved by four boosts; for, if $\underset{\sim}{\mathrm{C}}$ is a boost. and $\underset{\sim}{Q} = \dot{i}\underset{\sim}{B}$ with $B^2 \geq 1$, then

$$\underset{\sim}{R} \equiv \underset{\sim}{Q}\circ\underset{\sim}{C} = i\left(B^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\underset{\sim}{C} + i\left(1+C^2\right)^{\frac{1}{2}}\underset{\sim}{B} - \underset{\sim}{B}\times\underset{\sim}{C}$$

is not a 180° screw provided $\underset{\sim}{\mathrm{C}}$ is not parallel to $\underset{\sim}{\mathrm{B}}$. Therefore $\underset{\sim}{\mathrm{R}}$ is the product of three boosts and so $\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{R}\circ(-\underset{\sim}{C})$ is the product of four boosts.

This solution is due to D. M. Eardley.

13.7.2 2 Special-Relativistic Dynamics

In our laboratory frame, a particle with 4 -momentum $\mathbf{p}$ has total energy II$= p^0$ and 3 -momentum $\underset{\sim}{p} = p^i$. If the particle has a nonzero rest mass m, 8. 4-momentum, 4-velocity $\mathbf{u}$ and 3 -velocity $\underset{\sim}{\mathbf{v}}$ are related by

$$\mathrm{p} = \mathrm{mu} = \mathrm{m}(\gamma, \gamma\mathrm{v}), \quad \gamma \equiv \left(1-\mathrm{v}^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

so $\mathbf{E} = \gamma\mathrm{m}, \underset{\sim}{\mathrm{p}} = \gamma\mathrm{mv}$. The square of a particle's 4-momentum, an invariant finall frames, is

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = -\mathbf{E}^2 + \underset{\sim}{p}^2 = -\mathbf{m}^2$$

The kinetic energy of a particle is $\mathrm{T} \equiv \mathrm{E} - \mathrm{m}$.
The fundamental dynamical law for particle interactions is that in any frame the vector sum of the 4 -momenta of all particles is a conserved constant in time.

Problem 2.1. (Compton scattering.) A photon of wavelength λ hits a stationary electron (mass m_e) and comes off with wavelength λ' at an angle θ. Derive the expression

$$\lambda' - \lambda = (\mathrm{h}/\mathrm{m_e})\,(1-\cos\theta)$$

Problem 2.2.

(a) When a photon scatters off a charged particle which is moving with a speed very nearly that of light, the photon is said to have undergone an inverse Compton scattering. Consider an inverse Compton scattering in which a charged particle of rest mass m and total mass-energy (as seen
in the lab frame) $E \gg m$, collides head-on with a photon of frequency $\nu(\mathrm{h}\nu \ll \mathrm{m})$. What is the maximum energy the particle can transfer to the photon?
(b) If space is filled with black-body radiation of temperature 3°K and contains cosmic ray protons of energies up to 10^{20}eV, how much energy can a proton of energy 10^{20}eV transfer to a 3^0 K photon?

Problem 2.3. Show that it is impossible for an isolated free electron to absorb or emit a photon.

Problem 2.4. A particle of rest mass m_1 and velocity v_1 collides with a stationary particle of rest mass m_2 and is absorbed by it. Find the rest mass m and velocity $\underset{\sim}{v}$ of the resultant compound system.

Problem 2.5. The beta-decay of a neutron is isotropic in the rest frame of the neutron, with the velocity of the emitted electron $v_e = 0.77$. If the neutron is moving with velocity β through the laboratory, what values of the electron's laboratory momentum vector $\underset{\sim}{P}$ are possible?

Problem 2.6. Evaluate the "available energy" of two different protonproton scattering experiments. The first is of the conventional type, where a beam of protons is accelerated to 30 GeV and allowed to strike a target (liquid hydrogen, for example). In the second, two separate beams of protons are accelerated to 15 GeV each, then directed toward each other and allowed to collide. Evaluate the total energy of two colliding protons in the center of momentum frame for each experiment. To what energy would a beam in the first type of experiment have to be accelerated to match the CM energy of the 15 GeV protons in the second experiment?

Problem 2.7. A particle of rest mass m collides elastically with a stationary particle of equal mass. The incident particle has kinetic energy T_0. What is its kinetic energy after the collision, if the scattering angle is θ ?

Problem 2.8. Calculate the threshold energy of a nucleon N for it to undergo the reaction

$$\gamma + \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N} + \pi$$

widere y represents a photon of temperature 3^0 K. Assume the collision
is dead-on; take the photon energy to be $\sim \mathrm{kT}; \mathrm{m_N} = 940\mathrm{MeV}; \mathrm{m}_\pi =$
ENOMEV. (This effect probably produces a cut-off in the cosmic-ray tectrum at this threshold energy.)

Exoblem 2.9. Consider the reaction $\pi^+ + \mathfrak{n} \rightarrow \mathrm{K}^+ + \Lambda^0$. The rest masses othe particles are $m_\pi = 140\mathrm{MeV}, m_\mathrm{n} = 940\mathrm{MeV}, m_\mathrm{K} = 494\mathrm{MeV}, m_\Lambda = 815$ MeV . What is the threshold kinetic energy of the π to create a K 7 an angle of 90° in the lab in which the n is at rest?

Thoblem 2.10. Consider the reaction $\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B} + \mathrm{C}$ (with particle masses $\mathrm{m_A}, \mathrm{m_B}, \mathrm{m_C}$).
(a) If A is at rest in the lab frame, show that in the lab frame partiEI. B has energy $E_B = \left(m_A^2 + m_B^2 - m_C^2\right)/2m_A$.
(b) An atom of mass M at rest decays to a state of rest energy $M - \delta$ Sy emitting a photon of energy hν. Show that $\mathrm{h}\nu < \delta$. In the Mössbauer effect, why is $h\nu = \delta$?
(c) If A decays while moving in the lab frame, find the relation between the angle at which B comes off, and the energies of A and B.

Problem 2.11. Consider the reaction $1+2 \rightarrow 3+4$. The lab frame is deFined to be the one in which $\underline{P}_2 = 0$. The C.M. frame is defined to be the one in which $\underset{\sim 1}{P}^{\mathrm{C.M.}} + \underset{\sim 2}{P}^{\mathrm{C.M.}} = 0$. Show that:

(a) $\mathrm{E}_{\mathrm{total}}^{\mathrm{C.M.}} = \left(\mathrm{m_1}^2 + \mathrm{m_2}^2 + 2\ \mathrm{m_2 E_1}\right)^{\frac{1}{2}}$
(b) $\mathrm{E_1}^{\mathrm{C.M.}} = \left[\left(\mathrm{E}_{\mathrm{total}}^{\mathrm{C.M.}}\right)^2 + \mathrm{m_1}^2 - \mathrm{m_2}^2\right]/2\mathrm{E}_{\mathrm{total}}^{\mathrm{C.M}}$
(c) $P_1^{C.M.} = m_2 P_1 / E_{\mathrm{total}}^{C.M.}$
(d) $\gamma_{\mathrm{C.M.}} = (E_1 + m_2)/E_{\mathrm{total}}^{\mathrm{C.M.}}$ ($v_{\mathrm{C.M.}} \equiv$ velocity of C.M. in lab frame, and $\gamma_{\mathrm{C.M.}} \equiv \left(1 - \mathrm{v}^2\ \mathrm{C.M.}\right)^{-\frac{1}{2}}$.)
(e) $v_{\mathrm{C.M.}} = P_1/(E_1 + m_2)$.

Problem 2.12. Consider the elastic collision of a particle of mass m_1 with a stationary particle of mass $m_2 < m_1$. Let $\theta_{\max}$ be the maximum scattering angle of m_1. In nonrelativistic calculations, $\sin\theta_{\max} = m_2/m_1$ Prove that this result also holds relativistically.

Problem 2.13.
(a) If a rocket has engines that give it a constant acceleration of 1 g (relative to its instantaneous inertial frame, of course), and the rocket starts from rest near the earth, how far from the earth (as measured in the earth's frame) will the rocket be in 40 years as measured on the earth? How far after 40 years as measured in the rocket?
(b) Compute the proper time for the occupants of a rocket ship to travel the 30,000 light years from the Earth to the center of the galaxy. Assume they maintain an acceleration of 1 g for half the trip and decelerate at 1 g for the remaining half.
(c) What fraction of the initial mass of the rocket can be payload in part (b)? Assume an ideal rocket that converts rest mass into radiation and ejects all of the radiation out of the back with 100% efficiency and perfect collimation.

Problem 2.14. What is the maximum energy one could get out of a fixed frequency electron cyclotron with accelerating potential V .

Problem 2.15. A new force field $\mathrm{F}^\mu(\mathrm{x}^\nu)$ is discovered which induces a 4-acceleration $\mathrm{a}^\mu \equiv \mathrm{du}^\mu/\mathrm{d}\tau = \mathrm{m}^{-1}\ \mathrm{F}^\mu(\mathrm{x}^\nu)$ on a particle of mass m , at position x^ν. Notice that F^μ does not depend on u^ν. Show that this force is not consistent with special relativity.

2: Solutions

Solution 2.1. From 4-momentum conservation we have

$$\mathbf{P_e} + \mathbf{P}_\gamma = \mathbf{P'_e} + \mathbf{P}'_\gamma.$$

Mere γ indicates the photon; prime denotes values after scattering.) Since we are not interested in the electron's final momentum we use a enerally useful trick to eliminate it:

$$\left(\mathbf{P}_\mathrm{e} + \mathbf{P}_\gamma - \mathbf{P}'_\gamma\right)^2 = \mathbf{P}_\mathrm{e}^2 = -\mathrm{m}_\mathrm{e}^2,$$

ir, since $\mathbf{P}_y^2 = 0$,

$$-\mathrm{m}_\mathrm{e}^2 + 2\mathbf{P}_\mathrm{e}\cdot\mathbf{P}_\gamma - 2\mathbf{P}_\mathrm{e}\cdot\mathbf{P}'_\gamma - 2\mathbf{P}_\gamma\cdot\mathbf{P}'_\gamma = -\mathrm{m}_\mathrm{e}^2.$$

In the lab frame, we have

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_\mathrm{e} = (\mathrm{m}_\mathrm{e}, 0)\\
&\mathbf{P}_\gamma = (\mathrm{h}/\lambda, \mathrm{h}/\lambda \underset{\sim}{\mathrm{e}}_\mathrm{i}), \quad \underset{\sim}{\mathrm{e}}_\mathrm{i} = \text{ unit 3-vector in incident direction},\\
&\mathbf{P}'_\gamma = (\mathrm{h}/\lambda', \mathrm{h}/\lambda' \underset{\sim}{\mathrm{e}}_0), \quad \underset{\sim}{\mathrm{e}}_0 = \text{ unit 3-vector in outgoing direction},
\end{aligned}$$

so that

$$-\frac{m_\mathrm{e}\ \mathrm{h}}{\lambda} + \frac{m_\mathrm{e}\ \mathrm{h}}{\lambda'} + \frac{h^2}{\lambda\lambda} - \frac{h^2}{\lambda\lambda'}\cos\theta = 0.$$

Multiplying through by $\lambda\lambda'$, we find

$$\lambda' - \lambda = (\mathrm{h}/\mathrm{m}_\mathrm{e})\,(1 - \cos\theta).$$

Solution 2.2. Use γ to denote the photon, and prime to denote values after scattering. We proceed by eliminating $\mathbf{P}'$ from the equation of 4-momentum conservation:

$$\begin{gathered}
\left(\mathbf{P}'_\gamma + \mathbf{P}' - \mathbf{P}_\gamma\right)^2 = \mathbf{P}^2 = -\mathbf{m}^2\\
\mathbf{P}_\gamma\cdot\mathbf{P}'_\gamma = \mathbf{P}\cdot\left(\mathbf{P}_\gamma - \mathbf{P}'_\gamma\right)
\end{gathered}$$

Maximum energy transfer obviously occurs for a 180° scattering angle. With this condition and $\left|\underset{\sim\gamma}{\mathrm{P}}\right| = \mathrm{E}_\gamma$, the above equation becomes

$$\begin{gathered}
-\mathrm{E}_\gamma\mathrm{E}'_\gamma + \underset{\sim\gamma}{\mathrm{P}}\cdot\underset{\sim\gamma}{\mathrm{P}}' = -\mathrm{E}\left(\mathrm{E}_\gamma - \mathrm{E}'_\gamma\right) + \underset{\sim}{\mathrm{P}}\cdot\left(\underset{\sim\gamma}{\mathrm{P}} - \underset{\sim\gamma}{\mathrm{P}}'\right)\\
-2\mathrm{E}_\gamma\mathrm{E}'_\gamma = -\mathrm{E}\left(\mathrm{E}_\gamma - \mathrm{E}'_\gamma\right) + \mathrm{P}\left(-\mathrm{E}_\gamma - \mathrm{E}'_\gamma\right)
\end{gathered}$$

so that

$$\mathrm{E}'_\gamma = \frac{\mathrm{E}_\gamma(\mathrm{E}+\mathrm{P})}{2\mathrm{E}_\gamma + \mathrm{E} - \mathrm{P}} \approx \frac{\mathrm{E}}{1 + \mathrm{m}^2/4\mathrm{E}\mathrm{E}_\gamma}$$

The second expression for E'_γ is a result of using the approximation

$$\mathrm{P} = \left(\mathrm{E}^2 - \mathrm{m}^2\right)^{\frac{1}{2}} \approx \mathrm{E} - \frac{1}{2}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{E}$$

appropriate to our assumed condition $\mathrm{E} \gg \mathrm{m}_\mathrm{e}$.
For 3^0 K, the photon energy is of order $\mathrm{kT} \approx 3\times10^{-4}$eV. Using this, $\mathrm{m}_{\mathrm{proton}} = .938\times10^9$eV, and $\mathrm{E} = 10^{20}$eV in our equation we find $\mathrm{E}'_\gamma \approx 10^{19}$eV.

Solution 2.3. By conservation of 4 -momentum, we would have to have

$$\mathbf{p}_y + \mathbf{p_e} = \mathbf{p'_e} \tag{1}$$

where $\mathbf{p}_\gamma$ is the photon momentum, $\mathbf{p_e}$ and $\mathbf{p'_e}$ are the electron's momentum when the photon is/is not present.

Squaring both sides of Equation (1)

$$\begin{gathered}
\mathbf{p}_y\cdot\mathbf{p}_y + 2\mathbf{p}_\mathrm{e}\cdot\mathbf{p}_y + \mathbf{p}_\mathrm{e}\cdot\mathbf{p}_\mathrm{e} = \mathbf{p}'_\mathrm{e}\cdot\mathbf{p}'_\mathrm{e}\\
0 + 2\mathbf{p}_\mathrm{e}\cdot\mathbf{p}_y - \mathrm{m}_\mathrm{e}^2 = -\mathrm{m}_\mathrm{e}^2\\
\mathbf{p}_\mathrm{e}\cdot\mathbf{p}_y = 0
\end{gathered}$$

But in the frame where $\mathrm{p}_\mathrm{e} = (\mathrm{m}, \underset{\sim}{0})$ and $\mathrm{p}_\gamma = (\mathrm{E}, \mathrm{p})$, this says that the photon energy must be zero, i.e. there is no photon. Thus the process cannot occur.

Solution 2.4. If $\mathbf{p}$ is the 4 -momentum of the resultant system, and $y \equiv \left(1 - v_1{}^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, we have

$$\begin{aligned} \mathrm{p} &= (\mathrm{m}_1\gamma,\ \mathrm{m}_1\gamma\mathrm{v}_1) + (\mathrm{m}_2, 0) \\ \mathrm{m} &= (-\mathrm{p}\cdot\mathrm{p})^{\frac{1}{2}} = \left(\mathrm{m}_1^2 + \mathrm{m}_2^2 + 2\gamma\ \mathrm{m}_1\ \mathrm{m}_2\right)^{\frac{1}{2}} \\ \underset{\sim}{\mathrm{v}} &= \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{m}_1\gamma\mathrm{v}_1}{\mathrm{m}_1\gamma + \mathrm{m}_2} = \frac{\mathrm{v}_1}{1 + \mathrm{m}_2/\mathrm{m}_1\gamma}. \end{aligned}$$

Solution 2.5. Let the neutron travel in the x direction. In its rest frame the electron has momentum 4 -vector

$$\mathbf{P}' = \left(\mathbf{E}', \mathbf{P}'\cos\theta, \mathbf{P}'\sin\theta, 0\right), \quad \mathbf{E}' = \mathbf{m}_\mathrm{e}\left(1 - \mathbf{v}_\mathrm{e}^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

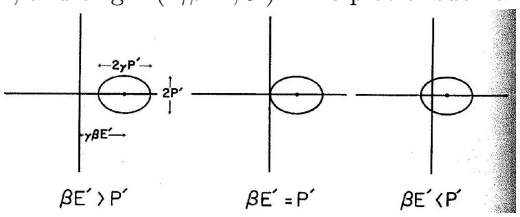
(where we have, without loss of generality, oriented our coordinate system so P' is in the $\mathrm{x}-\mathrm{y}$ plane), and P' is isotropic. Using the Lorentz transformation to get the lab momentum $\underset{\sim}{P}$, we have:

$$\begin{aligned} \mathbf{P_x} &= \gamma\left(\mathbf{P}'\cos\theta + \beta\mathbf{E}'\right) \\ \mathbf{P_y} &= \mathbf{P}'\sin\theta \end{aligned}$$

or

$$\left(\frac{\mathrm{P_x} - \gamma\beta\mathrm{E}'}{\gamma\mathrm{P}'}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{P_y}}{\mathrm{P}'}\right)^2 = 1$$

The last equation says that in the lab, the momentum vector in momentum space lies on an ellipse of semi major axis $\gamma\mathrm{P}'$, semiminor axis P', and origin ($\gamma\beta\mathrm{E}', 0$). The plot of such an ellipse falls into three cases:



Solution 2.6. Let $\mathbf{P}$ and $\mathbf{Q}$ be the 4 -momenta of the incident protons, and W the total energy in the C.M. frame. In this frame,

$$W^2 = \left(P^0 + Q^0\right)^2 = -(P+Q)^2,$$

which is an invariant expression for W^2 and can be evaluated in any frame. In the conventional experiment, in the lab frame

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= (E, \underset{\sim}{P}) \\ \mathbf{Q} &= (m, \underset{\sim}{0}), \end{aligned}$$

so

$$\begin{aligned} \mathrm{W}^2 &= (\mathrm{E}+\mathrm{m})^2 - \mathrm{p}^2 \\ &= 2\mathrm{Em} + 2\ \mathrm{m}^2 \\ &\approx 2\mathrm{Em} \text{ for } \mathrm{E} \gg\ \mathrm{m}. \end{aligned}$$

For $\mathrm{E} = 30\mathrm{GeV}, \mathrm{m} = .94\mathrm{GeV}$, the available energy is $W \approx 7.5\mathrm{GeV}$.
For the colliding beam experiment, in the lab frame

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= (\mathrm{E}, \underset{\sim}{\mathrm{P}}) \\ \mathbf{Q} &= (\mathrm{E}, \underset{\sim}{-\mathrm{P}}). \end{aligned}$$

So $\mathrm{W}^2 = 4\mathrm{E}^2$, i.e. $\mathrm{W} = 2\mathrm{E}$. For $\mathrm{E} = 15\mathrm{GeV}$, the available energy is $W = 30\mathrm{GeV}$. To achieve $W = 30\mathrm{GeV}$ in a conventional experiment would require $E = W^2/2m \approx 480\mathrm{GeV}$.

Solution 2.7. Let subscripts 0 and 1 denote respectively the initially moving, and the initially stationary particle. Balancing 4 -momentum before and after the collision, we have

$$\begin{aligned} P_0 + P_1 &= P_{0'} + P_{1'} \\ \left(P_0 + P_1 - P_{0'}\right)^2 &= P_1^2 \\ -3\ \mathrm{m}^2 + 2P_0\cdot P_1 - 2P_{0'}\cdot(P_0 + P_1) &= -\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

Now we put in

$$P_0 = (E, \underset{\sim}{P}), E = m + T_0$$
$$P_1 = (m, \underset{\sim}{Q}), E' = m + T'$$
$$P_{0'} = \left(E', \underset{\sim}{P'}\right), \underset{\sim}{P}\underset{\sim}{P'} = PP' \cos\theta$$
$$-m^2 - Em + E'(E+m) - PP' \cos\theta = 0$$

to find

$$\left(E^2 - m^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(E'^2 - m^2\right)^{\frac{1}{2}} \cos\theta = (E' - m)(E + m)$$

Squaring and factoring the difference of squares, then gives the kinetic energy of the scattered particle:

$$(\mathrm{E} - \mathrm{m})(\mathrm{E}' + \mathrm{m}) \cos^2\theta = (\mathrm{E}' - \mathrm{m})(\mathrm{E} + \mathrm{m})$$
$$\mathrm{T}_0 \left(\ \mathrm{T}' + 2\ \mathrm{m}\right) \cos^2\theta = \mathrm{T}'\left(\mathrm{T}_0 + 2\ \mathrm{m}\right)$$
$$\mathrm{T}'\left(-\mathrm{T}_0 \cos^2\theta + \mathrm{T}_0 + 2\ \mathrm{m}\right) = 2\ \mathrm{m}\ \mathrm{T}_0 \cos^2\theta$$
$$\mathrm{T}' = \frac{2\ \mathrm{m}\ \mathrm{T}_0 \cos^2\theta}{2\ \mathrm{m} + \mathrm{T}_0 \sin^2\theta}$$

Solution 2.8. Conservation of 4 -momentum gives us

$$\mathbf{P}_y + \mathbf{P_N} = \mathbf{P}_{\mathbf{N}'} + \mathbf{P}_\pi \quad (\mathbf{N}' = \text{ nucleon coming out of reaction}$$

$$\left(\mathbf{P}_\gamma + \mathbf{P}_\mathrm{N}\right)^2 = \left(\mathbf{P}_\mathrm{N} + \mathbf{P}_\pi\right)^2.$$

In the lab frame (where $\mathrm{E}_\gamma \sim 3^0\ \mathrm{K} \sim 2.5 \times 10^{-10}\mathrm{MeV}$),

$$\mathbf{P}_\gamma = \left(\mathrm{E}_\gamma, \underset{\sim\gamma}{P}\right), \quad \mathbf{P_N} = \left(\mathrm{E}_\mathbf{N}, \underset{\sim\mathbf{N}}{P}\right).$$

In the C.M. frame at threshold,

$$\mathbf{P}_{\mathbf{N}'} + \mathbf{P}_\pi = (\mathrm{m}_\mathbf{N} + \mathrm{m}_\pi, 0)$$

so that

$$2\mathbf{P}_\gamma \cdot \mathbf{P}_\mathrm{N} - \mathrm{m}_\mathrm{N}^2 = -\left(\mathrm{m}_\mathrm{N} + \mathrm{m}_\pi\right)^2$$
$$-2\mathrm{E}_\gamma \mathrm{E}_\mathrm{N} + 2\underset{\sim\gamma}{P} \cdot \underset{\sim\mathrm{N}}{P} = -2\ \mathrm{m}_\mathrm{N}\ \mathrm{m}_\pi - \mathrm{m}_\pi^2$$

Now $\mathrm{P}_\gamma = \mathrm{E}_\gamma$ since $\mathrm{m}_\gamma = 0$ and, for a head-on collision $\underset{\sim\gamma}{\mathrm{P}} \cdot \mathrm{P}_\mathrm{N} = -\mathrm{P}_\gamma \mathrm{P}$, so that

$$\mathrm{E}_\mathrm{N} + \left(\mathrm{E}_\mathrm{N}^2 - \mathrm{m}_\mathrm{N}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\ \mathrm{m}_\mathrm{N}\ \mathrm{m}_\pi + \mathrm{m}_\pi^2}{2\mathrm{E}_\gamma}$$
$$= \frac{2 \cdot 940 \cdot 140 + 140^2}{2 \cdot (2.5 \times 10^{-10})}\mathrm{MeV} = 6 \times 10^{14}\mathrm{MeV}$$

Since $E_N \gg m_N$, we can replace $\left(E_N^2 - m_N^2\right)^{\frac{1}{2}}$ by E_N. Thus $\mathrm{E_N} \approx 3 \times 10^{14}\mathrm{MeV}$.
Solution 2.9. We proceed by conserving 4-momentum and removing information about the Λ particle:

$$\mathbf{P}_\pi + \mathbf{P}_\mathrm{n} = \mathbf{P}_\mathrm{K} + \mathbf{P}_\Lambda$$
$$\mathbf{P}_\Lambda^2 = -\mathrm{m}_\Lambda^2 = \left(\mathbf{P}_\pi + \mathbf{P}_\mathrm{n} - \mathbf{P}_\mathrm{K}\right)^2 = -\mathrm{m}_\pi^2 - \mathrm{m}_\mathrm{n}^2 - \mathrm{m}_\mathrm{K}^2 + 2\mathbf{P}_\pi \cdot \mathbf{P}_\mathrm{n} - 2\mathbf{P}_\mathrm{n} \cdot \mathbf{P}_\mathrm{K} - 2\mathbf{P}_\pi \cdot \mathbf{P}_\mathrm{K}$$

In the lab

$$P_\pi = \left(E_\pi, \underset{\sim\pi}{P}\right)$$
$$P_n = (m_n, 0), \quad P_K = \left(E_K, \underset{\sim K}{P}\right)$$

so,

$$-m_\pi^2 - m_n^2 - m_K^2 - 2m_n E_\pi + 2m_n E_K + 2E_\pi E_K - 2P_\pi \cdot P_K = -m_\Lambda^2$$

We now set $\underset{\pi\,\pi}{\mathrm{P}} \cdot \underset{\sim\mathrm{K}}{\mathrm{P}} = 0$ (90° scattering) and find

$$\mathrm{E}_\pi = \frac{\mathrm{m}_\Lambda^2 - \mathrm{m}_\pi^2 - \mathrm{m}_\mathrm{n}^2 - \mathrm{m}_\mathrm{K}^2 + 2\ \mathrm{m}_\mathrm{n}\mathrm{E}_\mathrm{K}}{2\left(\ \mathrm{m}_\mathrm{n} - \mathrm{E}_\mathrm{K}\right)}$$

Thus, to make E_π a minimum we must make $\mathrm{E_K}$ as small as possible (as you might have guessed!), so we try $\mathrm{E_K} = \mathrm{m_K}$. Thus

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_{\pi(\text{ threshold }\,)} &= \frac{\mathrm{m_\Lambda^2 - m_\pi^2 - m_n^2 - m_K^2 + 2\ m_n\ m_K}}{2\,(\ \mathrm{m_n - m_K})} \\ &= \frac{\mathrm{m_\Lambda^2 - m_\pi^2}}{2\,(\ \mathrm{m_n - m_K})} - \frac{\mathrm{m_n - m_K}}{2} = \frac{1115^2 - 140^2}{2(940-494)} - \frac{940-494}{2} \\ &= 1149\mathrm{MeV}\end{aligned}$$

hence threshold kinetic energy $= 1149 - 140 = 1009\mathrm{MeV}$.

Solution 2.10.

(a) From conservation of 4-momentum

$$\mathbf{P}_\mathrm{C}^2 = -\mathrm{m_C^2} = (\mathbf{P}_\mathrm{A} - \mathbf{P}_\mathrm{B})^2 = -\mathrm{m_A^2} - \mathrm{m_B^2} - 2\mathbf{P}_\mathrm{A}\cdot\mathbf{P}_\mathrm{B} \tag{1}$$

In the lab frame $\mathbf{P}_A = (m_A, 0)\,, \mathbf{P}_B = (E_B, \mathbf{P}_B)$, so

$$-\mathrm{m_C^2} = -\mathrm{m_A^2} - \mathrm{m_B^2} - 2\ \mathrm{m_A E_B}$$

and hence

$$\mathrm{E_B} = \mathrm{m_A^2} + \mathrm{m_B^2} - \mathrm{m_C^2}/2\ \mathrm{m_A}$$

(b) Here $m_A = M, m_B = 0, m_C = M - \delta$, so

$$\mathrm{E_B} = \mathrm{h}\nu = \frac{\mathrm{M^2 - (M-\delta)^2}}{2\mathrm{M}} = \delta - \frac{\delta^2}{2\mathrm{M}} < \delta$$

Physically $h\nu \neq \delta$ because some energy goes into the recoil of M which is necessary to conserve momentum. In the Mössbauer effect, the recoil momentum is shared among $\sim 10^{23}$ atoms, so the recoil energy is negligible.

(c) In this case $P_A = \left(E_A, \underset{\sim A}{P}\right), P_B = \left(E_B, \underset{\sim B}{P}\right)$, so (1) becomes

$$-m_A^2 - m_B^2 + 2E_AE_B - 2\left(E_A^2 - m_A^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(E_B^2 - m_B^2\right)^{\frac{1}{2}}\cos\theta = -m_C^2$$

Solution 2.11.

(a) The total 4-momentum is $\mathbf{P}_\text{total} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4$. In the C. frame $P_\text{total} = \left(E_\text{total}^{C.M.}, 0\right)$ so that

$$\mathbf{P}_\text{total}^2 = -\left(\mathbf{E}_\text{total}^{\mathbf{C\cdot M\cdot}}\right)^2 = (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^2 \tag{1}$$

We can evaluate $(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^2$ in the lab frame, where $\mathbf{P}_1 = (\mathrm{E_1}, \mathrm{P_1})\,, \mathrm{P_2} = (\ \mathrm{m_2}, 0\ )$:

$$-\left(E_\text{total}^{C\cdot M}\right)^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1\cdot P_2 = -m_1^2 - m_2^2 - 2E_1m_2.$$

(b) In the equation

$$\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_\text{total} = \mathbf{P}_1\cdot(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)$$

evaluate the left side in the C.M. frame and the right side in the lab frames

$$\begin{aligned}-E_1^{C\cdot M}\cdot E_{\text{tota }1}^{C\cdot M} &= -m_1^2 - E_1m_2 \\ &= -m_1^2 - \frac{1}{2}\left[\left(E_{\text{tota }1}^{C\cdot M}\right)^2 - m_1^2 - m_2^2\right]\end{aligned}$$

(from (a))

Hence, the result:

$$\mathrm{E_1^{C\cdot M}} = \left[\left(\mathrm{E_\text{total}^{C\cdot M}}\right)^2 + \mathrm{m_1^2 - m_2^2}\right]/2\mathrm{E_\text{total}^{C\cdot M}}$$

(c) By using the result of part (b) we have

$$\begin{aligned}\left(P_1^{C.M.\cdot}\right)^2 &= \left(E_1^{C.M.\cdot}\right)^2 - m_1^2 = \left(\frac{m_1^2 + E_1m_2}{E_\text{tot}^{C.M.}}\right)^2 - m_1^2 \\ &= \frac{\left(m_1^2 + E_1m_2\right)^2 - m_1^2\left(m_1^2 + m_2^2 + 2E_1m_2\right)}{\left(E_\text{tot}^{C.M}\right)^2} = \frac{m_2^2\left(E_1^2 - m_1^2\right)}{\left(E_\text{tot}^{C.M}\right)^2} = \frac{m_2^2P_1^2}{\left(E_\text{tot}^{C.M}\right)^2}\end{aligned}$$

and therefore $P_1^{C.M.\cdot} = m_2P_1/E_\text{total}^{C.M}$.

(d) If $\mathbf{u}$ is the 4-velocity of any observer, then it is easy to verify in that observer's frame (hence in all frames) that

$$\mathbf{P}_{(3)} \equiv \mathbf{P} + (\mathbf{P}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}$$

is the 3 -momentum measured by that observer. Therefore $\mathbf{u}_{\text{C.M.}}$ is defined by

$$\mathbf{P}_{\text{total}} + (\mathbf{P}_{\text{total}} \cdot \mathbf{u}_{\text{C.M.}})\,\mathbf{u}_{\text{C.M.}} = 0$$

iow if two observers have 4-velocities $\mathbf{u}_1$ and $\mathbf{u}_2$, then $\gamma = -\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2$ So the Lorentz transformation factor between the two frames. (Proof: In Yest-frame of $_1, \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = (1,0) \cdot (\gamma, \gamma\underline{\mathbf{v}}) = -\gamma$). So $\gamma_{\text{C.M.}} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_{\text{C.M}}$. mives the transformation to the C.M. frame. Thus

$$\begin{gathered}\mathbf{P}_{\text{tot}} \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{P}_{\text{total}} \cdot \mathbf{u}_{\text{C.M.}})\,\mathbf{u}_{\text{C.M.}} \cdot \mathbf{u} = 0 \\ -\mathrm{E}_{\text{total}} + \mathrm{E}^{\text{C.M.}}_{\text{total}}\,\gamma_{\text{C.M.}} = 0 \\ \gamma_{\text{C.M.}} = \mathrm{E}_{\text{total}} / \mathrm{E}^{\text{C.M.}}_{\text{tot}}\end{gathered}$$

In our case, $E_{\text{total}} = E_1 + m_2$, hence

$$\gamma_{\text{C.M.}} = (\mathrm{E}_1 + \mathrm{m}_2) / \mathrm{E}^{\text{C.M.}}_{\text{total}}$$

(e) From (d), we have

$$\begin{aligned}1 - v^2_{\text{C.M.}} &= \left[E^{\text{C.M.}}_{\text{total}} / (E_1 + m_2)\right]^2 \\ v_{\text{C.M.}} &= \left[\frac{E_1^2 - m_1^2}{(E_1 + m_2)^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{P_1}{E_1 + m_2}\end{aligned}$$

Solution 2.12. In the C.M. frame since the collision is elastic, $\mathrm{E}^{\text{C.M.}}_1 = \mathrm{E}^{\text{C}}_1, \text{M.}$ i.e.,

$$\mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{u}_{\text{C.M.}} = \mathrm{P}_1 \cdot \mathrm{u}_{\text{C.M.}}$$

(The prime denotes values after the collision.) Evaluating this equation in the lab frame yields

$$-E_1 + \underset{\sim 1}{P} \cdot \underset{\sim C.M.}{v} = -E_1\prime + \underset{\sim 1}{P}\,\prime \cdot \underset{C\ .M.}{C}\ .$$

But $\underset{\sim \text{C.M.}}{v} = \underset{\sim 1}{P} / (E_1 + m_2)$, so we have

$$-E_1 + \frac{P_1^2}{E_1 + m_2} = -E_{1'} + \frac{P_1, P_1 \cos\theta}{E_1 + m_2},$$

or

$$\cos\theta = \frac{E_1 (E_1 + m_2) - E_1 m_2 - m_1^2}{P_1 \left(E_{1'}^2 - m_1^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{1}$$

(This equation could also have been derived without using the center of mass frame.) We can find the minimum value of $\cos\theta$ (maximum value of $\sin\theta$) by setting $\mathrm{d}\cos\theta/\mathrm{dE}_{1'} = 0$, solving for $\mathrm{E}_{1'}$, and then substituting into Equation (1). A quicker way is to consider the intersection of the graph of $\cos\theta\,(\mathrm{E}_{1'})$ with the straight line $\cos\theta = \mathrm{K}$. The points of intersection are given by

$$\begin{aligned}K^2 P_1^2 \left(E_1^2, -m_1^2\right) &= E_1^2 (E_1 + m_2)^2 \\ &\quad - 2 (E_1 + m_2) \left(E_1 m_2 + m_1^2\right) E_1, + \left(E_1 m_2 + m_1^2\right)^2\end{aligned} \tag{2}$$

At the minimum value of $\cos\theta$, the straight line is tangent to the curve and the discriminant of Equation (2), a quadratic in $\mathrm{E}_{1'}$, is zero. This gives

$$0 = -(\mathrm{E}_1 + \mathrm{m}_2)^2\ \mathrm{K}^2\mathrm{P}_1^2\ \mathrm{m}_1^2 + \mathrm{K}^2\mathrm{P}_1^2 \left(\mathrm{E}_1\ \mathrm{m}_2 + \mathrm{m}_1^2\right)^2 + \mathrm{K}^4\mathrm{P}_1^4\ \mathrm{m}_1^2,$$

or

$$K^2 = \frac{(E_1 + m_2)^2 m_1^2 - \left(E_1 m_2 + m_1^2\right)^2}{m_1^2 P_1^2} = \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1^2}$$

and, finally

$$\begin{aligned}\cos\theta_{\min} &= \frac{\left(m_1^2 - m_2^2\right)^{\frac{1}{2}}}{m_1} \\ \sin\theta_{\max} &= m_2/m_1\end{aligned}$$

Solution 2.13.

(a) Take the rocket's motion to be along the x-axis. We have the following constraints on its 4-velocity u and 4-acceleration a:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = -1 = -\left(\mathbf{u}^t\right)^2 + \left(\mathbf{u}^x\right)^2 & (\text{ normalization of } \mathbf{u}) \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{u} = 0 = -\mathbf{a}^t\mathbf{u}^t + \mathbf{a}^x\mathbf{u}^x & (\text{ a orthogonal to } \mathbf{u}) \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{g}^2 = -\left(\mathbf{a}^t\right)^2 + \left(\mathbf{a}^x\right)^2 & (\text{ Proper acceleration is g}). \end{array} \tag{3}$$

From these equations, we get

$$a^t = a^x\left(\frac{u^x}{u^t}\right), \quad (a^x)^2\left[1 - \left(u^x/u^t\right)^2\right] = g^2$$

zhich imply

$$a_x = gu^t \tag{4}$$

$$a^t = gu^x. \tag{5}$$

By differentiating Equation (4) we can get a differential equation for u^x

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{u}^\mathrm{x}}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{\mathrm{da}}{\mathrm{d}\tau} = \mathrm{g}\frac{\mathrm{du}^\mathrm{t}}{\mathrm{d}\tau} = \mathrm{ga}^\mathrm{t} = \mathrm{g}^2\mathrm{u}^\mathrm{x}$$

with solutions $\mathrm{u^x} = \mathrm{A}\sinh\mathrm{g}\tau + \mathrm{B}\cosh\mathrm{g}\tau$. Since the initial conditions on the motion are $\mathrm{u^x} = 0, \mathrm{du^x}/\mathrm{d}r = \mathrm{g}$, at $r = 0, \mathrm{u}$ must be

$$\begin{aligned} \mathrm{u}^\mathrm{x} &= \mathrm{dx}/\mathrm{d}\tau = \sinh\mathrm{g}\tau \\ \mathrm{u}^\mathrm{t} &= \mathrm{dt}/\mathrm{d}\tau = \cosh\mathrm{g}\tau \end{aligned} \tag{6}$$

The integrals of these equations (with $\mathrm{x} = \mathrm{t} = 0$ at $r = 0$) give us

$$\mathrm{x} = \mathrm{g}^{-1}(\cosh\ \mathrm{g}\tau - 1) \quad \mathrm{t} = \mathrm{g}^{-1}(\sinh\ \mathrm{g}\tau). \tag{7}$$

In units with $c = 1$, it turns out by numerical coincidence that $\mathrm{g}\left(= 980\ \mathrm{cm/sec^2}\right)$ is almost exactly equal to one inverse year (as a time) or one inverse light-year (as a distance). Thus for 40 years as measured on Earth ($t = 40\mathrm{yr}$), (7) gives

$$\tau \approx \left[\sinh^{-1}(40)\right]\mathrm{yr} \approx 4.38\mathrm{yr}$$

and

$$x \approx \left[\cosh\left[\sinh^{-1}(40)\right] - 1\right]\ \text{L.Y.}\ \approx 39.01\ \text{L.Y.} \tag{8}$$

For 40 years in the rocket $\tau = 40\mathrm{yr}$ and from (7)

$$x \approx [\cosh(40) - 1]\ \text{L.Y.}\ \approx 10^{17}\ \text{L.Y.} \tag{9}$$

(b) To travel halfway requires $x = 15,000$ L.Y. , or

$$\tau \approx \cosh^{-1}(15,000 + 1)\mathrm{yr} \approx 10.3\mathrm{yr}. \tag{10}$$

The deceleration half of the trip is identical, so the total time is 20.6 years
(c) Denote the rest mass of the rocket (which changes) by M. The change in energy of the rocket equals the energy radiated

$$\mathrm{d}\left(\mathrm{Mu}^0\right) = -\mathrm{dE}_\mathrm{rad} \tag{11}$$

Since the energy is radiated as photons

$$dE_{\text{rad.}} = dP_{\text{rad.}} \tag{12}$$

and by conservation of momentum,

$$\mathrm{dP}_{\text{rad.}} = \mathrm{dP} \tag{13}$$

where dP is the change in momentum of the rocket. Combining Equations (11) - (13) gives

$$\begin{gathered} d\left(Mu^0\right) = -dP = -d\left(Mu^x\right) \\ (dM)u^0 + Mdu^0 = -(dM)u^x - Mdu^x \\ dM/M = -d\left(u^0 + u^x\right)/\left(u^0 + u^x\right) \end{gathered}$$

so that

$$M = M_0/\left(u^0 + u^x\right) = M_0 e^{-g\tau} \tag{14}$$

* here we have used Equations (6) to give us $u^0(\tau)$ and $u^x(\tau)$.
From part (b), $e^{g\tau} = 30,000$ for half the trip. Thus, $M_{\frac{1}{2}} = M_0/30,000$ and

$$M_{\text{final}} = M_0/(30,000)^2 \approx 10^{-9} M_0.$$

Solution 2.14. A cyclotron applies an accelerating potential with a fixed mequency, to the gap between two "dees." The frequency is chosen so itat the potential is always in the right direction when the electron crosses The gap, i.e. it is the cyclotron frequency $\omega_0 = \text{eB/mc}$. The reason that Inere is a maximum energy is that the electron actually circles at the "synchrotron frequency" $\omega = \text{eB}/\gamma\text{mc} = \omega_0$ m/E (where E = electron Energy), and as the electron becomes relativistic this gets out of phase Nith the fixed cyclotron frequency. Eventually the electron arrives at the ap when the potential is 90° out of phase and the accelerating process Weaks down. Quantitatively if the phase of the accelerating potential is All when the electron passes through the gap, the electron receives energy $4\cos a$, where V is the maximum accelerating potential expressed in electron volts. In dN cycles of the electron motion then

$$\frac{\text{d(electron energy)}}{\text{dN}} = \frac{\text{dE}}{\omega \text{dt}/2\pi} = 2\ \text{V}\cos\left(\phi - \omega_0 \text{t}\right).$$

Note that the electron passes through the gap twice per cycle, hence the factor of 2.] Here ϕ is the angular distance traveled by the electron
and

$$\phi = \int \omega dt = \omega_0 \int_0^t (m/E) dt$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\omega}{2\pi} 2V \cos\left[\omega_0 \int_0^t \frac{m}{E} dt - \omega_0 t\right]$$

$$= \frac{V}{\pi E} \omega_0 m \cos\left[\omega_0 \int_0^t \left(\frac{m}{E} - 1\right) dt\right].$$

$$\frac{dE^2}{dt} = a \cos\left[\omega_0 \int_0^t \left(\frac{m}{E} - 1\right) dt\right]$$

where $\text{a} \equiv 2\ \text{V}\omega_0\ \text{m}/\pi$. Differentiating we have

$$\frac{d^2\left(E^2\right)}{dt^2} = -a \sin\left[\omega_0 \int_0^t \left(\frac{m}{E} - 1\right) dt\right] \omega_0 \left(\frac{m}{E} - 1\right)$$

$$= \left[a^2 - \left(\frac{dE^2}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \omega_0 \left(\frac{m}{E} - 1\right)$$

The negative, square root has been used because the sine function above is clearly negative.

We now find a first integral of this equation. Let $q \equiv dE^2/dt$ so that $\text{d}^2\text{E}^2/\text{dt}^2 = \text{qdq/dEE}^2$, then our differential equation becomes

$$-q\frac{dq}{dE^2} = \left[a^2 - q^2\right]^{\frac{1}{2}} \omega_0 \left[1 - \frac{m}{(E^2)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

This can be integrated with the initial condition that $q = a$ at $E = m$ (i.e. at $t = 0$):

$$\left(a^2 - q^2\right)^{\frac{1}{2}} = \omega_0 (E - m)^2$$

The energy keeps increasing until $q = 0$, at which time the energy must be

$$\text{E}_{\max} = \text{m} + \text{a}/\omega_0 = \text{m} + (2\text{Vm}/\pi)^{\frac{1}{2}}$$

Solution 2.15. If $\mathbf{F}$ is not to be identically zero then for some 4 -velocity $\mathbf{u}$, the product $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}$ must be nonzero. This contradicts the requirement that $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2}\ \text{d}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})/\text{d}r = 0$.

13.7.3 3 Special-Relativistic Coordinate Transformations

Spacetime in special relativity can be described by more general envilinear) coordinates than "inertial" or Minkowski coordinates, e.g. ocondinates $\mathrm{x}\mu'$,

$$\mathrm{x}^{\mu'} = \mathrm{f}^{\mu}\left(\mathrm{x}^{\nu}\right)$$

There x^{ν} are Minkowski coordinates, and f^{μ} four arbitrary functions. ise then shows that the basis vectors and components of vectors in the $\rightarrow$ coordinates are related to the old by

$$\begin{array}{ll} \mathbf{e}_{a'} = \frac{\partial \mathrm{x}^{\mu}}{\partial \mathrm{x}^{\alpha}}, \mathbf{e}_{\mu}, & \mathbf{e}_{\mu} = \frac{\partial \mathrm{x}^{a'}}{\partial \mathrm{x}^{\mu}} \mathbf{e}_{a'} \\ \mathrm{V}^{a'} = \frac{\partial \mathrm{x}'}{\partial \mathrm{x}^{\mu}} \mathrm{V}^{\mu}, & \mathrm{V}^{\mu} = \frac{\partial \mathrm{x}^{\mu}}{\partial \mathrm{x}^{a}},\ \mathrm{V}^{a'} \\ \mathrm{V}_{a'} = \frac{\partial \mathrm{x}^{\mu}}{\partial \mathrm{x}^{a}},\ \mathrm{V}_{\mu}, & \mathrm{V}_{\mu} = \frac{\partial \mathrm{x}^{a'}}{\partial \mathrm{x}^{\mu}} \mathrm{V}_{a'} \end{array}$$

In other words, the transformation matrix $\Lambda_{\alpha}^{\mu'} \equiv \partial \mathrm{x}^{\mu'} / \partial \mathrm{x}^{a}$ replaces the less general Lorentz matrices (which are applicable only for transformations between two systems of Minkowski coordinates).

In general coordinates, the relation $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \mathrm{A}_{\mu} \mathrm{B}^{\mu}$ still holds, but we so longer have $\mathrm{A}_{\mu} = \eta_{\mu\nu} \mathrm{A}^{\mu}$. Rather, corresponding to every coordinate system there is a metric tensor with components $\mathrm{g}_{\alpha\beta}$, such that $\mathrm{ds}^2 = \mathrm{E}_{\alpha\beta} \mathrm{dx}^{\alpha} \mathrm{dx} \beta$, which leads to $\mathrm{A}_{\mu} = \mathrm{g}_{\mu\nu} \mathrm{A}^{\nu}$ and therefore $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \mathrm{g}_{\mu\nu} \mathrm{A}^{\mu} \mathrm{B}^{\nu}$. Note also $\mathrm{A}^{\mu} = \mathrm{g}^{\mu\nu} \mathrm{A}_{\nu}$ where $\mathrm{g}^{\mu\nu}$ is the matrix inverse of $\mathrm{g}_{\mu\nu}$.

Various formal definitions of a tensor are possible. Here, it suffices to say that it is a geometrical object which, like a vector, has components
whose numerical values are different in different coordinate systems. A tensor has 4^n components, where n is its rank (number of "slots" or indices for components). Slots may be contravariant or covariant; examples $\mathrm{T}^{\mu\nu}, \mathrm{F}_{\mu\nu}, \mathrm{R}_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}, \mathrm{G}_{\mu}{}^{\nu}$. Tensors transform with one matrix for each slot, e.g.

$$\mathrm{G}_{\mu}{}'' = \Lambda^{a}{}_{\mu} \Lambda^{\nu'}{}_{\beta} \mathrm{G}_{a}{}^{\beta}.$$

Tensors may be "contracted" (a covariant and a contravariant index summed) or multiplied as a "direct product" with other tensors or with themselves to form new tensors, e.g.

$$\mathrm{Q}_{\mu\nu} = \mathrm{R}_{\mu\alpha\nu}^{a}, \quad \mathrm{A}^{\mu} = \mathrm{G}_{\nu}^{\mu} \mathrm{B}^{\nu}, \quad \mathrm{F}_{\mu\nu} = \mathrm{A}_{\mu} \mathrm{B}_{\nu}.$$

A special case is contraction with the metric tensor, where the same symbol is usually used for the result as in the relation of covariant and contravariant vectors, $\mathrm{F}^{\mu}{}_{\nu} = \mathrm{g}_{\nu\alpha} \mathrm{F}^{\mu\alpha}$. A tensor expression with no free indices, e.g. $\mathrm{F}_{\mu\nu} \mathrm{A}^{\mu} \mathrm{A}^{\nu}$ or $\mathrm{R}_{\beta\gamma} \mathrm{F}^{\beta\gamma}$ or $\mathrm{A}^{\alpha} \mathrm{B}^{\beta} \mathrm{g}_{a\beta}$, is a scalar and is an invariant number in all frames. The analog of the index free notation A for a vector A^{μ} is to write, e.g. T for a tensor $\mathrm{T}^{\mu\nu}$. In both cases the existence of covariant or contravariant slots must be deduced from the context.

In index free notation, $\otimes$ represents the direct product, e.g. $\mathrm{F}^{\mu\nu} \mathrm{A}^{\rho}$ is written $\mathbf{F} \otimes \mathbf{A}$; the contracted product is written with a dot, e.g. $\mathbf{F} \cdot \mathbf{A}$ for $\mathrm{F}^{\mu a}\ \mathrm{A}_{a}$.

We denote partial derivatives by a comma, e.g. $\mathrm{f}_{,\alpha} \equiv \partial \mathrm{f} / \partial \mathrm{x}^{\alpha}$.

Problem 3.1.
(I) If 2 events are separated by a spacelike interval, show that
(a) there exists a Lorentz frame in which they are simultaneous, and
(b) in no Lorentz frame do they occur at the same point.
(II) If 2 events are separated by a timelike interval, show that
(a) there exists a frame in which they happen at the same point, and
(b) in no Lorentz frame are they simultaneous.

Problem 3.2. Find 4 linearly independent null vectors in Minkowski space.
Can you find 4 which are orthogonal?
Problem 3.3. Show that the only non-spacelike vectors orthogonal to a given nonzero null vector are multiples of it.

Problem 3.4. Show that the sum of two vectors can be spacelike, null, or imelike, independently of whether the two vectors are spacelike, null, or timelike.

Problem 3.5. Show that the cross-sectional area of a parallel beam of light is invariant under Lorentz transformations.

Problem 3.6. Show that $\sum_{\mu} \mathrm{D}^{\mu\mu}$ and $\sum_{\mu} \mathrm{D}_{\mu\mu}$ are not invariant under coordiarte transformations, but that $\sum_{\mu} D_{\mu}{}^{\mu}$ is invariant. (Take D. to be a tensor defined by its components $\mathrm{D}^{\mu\nu}$.)

Problem 3.7. $\mathrm{F}^{a\beta}$ is antisymmetric on its two indices. Show that

$$\mathrm{F}_{\mu,\nu}^{a}\ \mathrm{F}_{a}^{\nu} = -\mathrm{F}_{\mu a,\beta}\ \mathrm{F}^{a\beta}.$$

Problem 3.8. In a coordinate system with coordinates x^{μ}, the invariant Ine element is $\mathrm{ds}^2 = \eta_{\alpha\beta} \mathrm{dx}^{\alpha}{}_{\mathrm{dx}} \beta$. If the coordinates are transformed $\mathrm{x}^{\mu} \rightarrow \overline{\mathrm{x}}^{\mu}$, show that the line element is $\mathrm{ds}^2 = \mathrm{g}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \mathrm{d}\overline{\mathrm{x}} \mu_{\mathrm{d}\overline{\mathrm{x}}} \nu$, and express $\bar{z}\bar{\nu}\bar{\nu}$ in terms of the partial derivatives $\partial \mathrm{x}^{\mu} / \partial \overline{\mathrm{x}}^{\nu}$. For two arbitrary 4 -vectors U and V, show that

$$\mathrm{U} \cdot\ \mathrm{V} = \mathrm{U}^{\alpha} \mathrm{V}^{\beta} \eta_{\alpha\beta} = \mathrm{U}^{\bar{\alpha}} \mathrm{V}^{\bar{\beta}} \mathrm{g}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$$

Problem 3.9. Show that the determinant of the metric tensor $\mathrm{g} \equiv \det\left(\mathrm{g}_{\mu\nu}\right)$ is not a scalar.

Problem 3.10. If Λ^a_β and $\tilde{\Lambda}^a_\beta$ are two matrices which transform the components of a tensor from one coordinate basis to another, show that the matrix $\Lambda^a_\gamma\tilde{\Lambda}^\gamma_\beta$ is also a coordinate transformation.

Problem 3.11. You are given a tensor $\mathrm{K}^{a\beta}$. How can you test whether it is a direct product of two vectors $\mathrm{K}^{\alpha\beta} = \mathrm{A}^\alpha\mathrm{B}^\beta$? Can you express the test in coordinate-free language?

Problem 3.12. Prove that the general second-rank tensor in n-dimensions cannot be represented as a simple direct product of two vectors, but can be expressed as a sum over many such products.

Problem 3.13. A two index "object" $\mathrm{X}\mu\nu$ is defined by the "direct sum" of two vectors $\mathrm{X}^{\mu\nu} = \mathrm{A}^\mu + \mathrm{B}^\nu$. Is $\mathrm{X}^{\mu\nu}$ a tensor? Is there a transformation law to take. X to a new coordinate system, i.e. to obtain $X^{\hat{\mu}\nu}$ from $\mathrm{x}^{\mu\nu}$?

Problem 3.14. Show that a second rank tensor $\mathbf{F}$ which is antisymmetric in one coordinate frame ($\mathrm{F}_{\mu\nu} = -\mathrm{F}_{\nu\mu}$) is antisymmetric in all frames. Show that the contravariant components are also antisymmetric ($\mathrm{F}^{\mu\nu} = -\mathrm{F}^{\nu\mu}$). Show that symmetry is also coordinate invariant.

Problem 3.15. Let $\mathrm{A}_{\mu\nu}$ be an antisymmetric tensor so that $\mathrm{A}_{\mu\nu} = -\mathrm{A}_{\nu\mu}$; and let $S^{\mu\nu}$ be a symmetric tensor so that $S^{\mu\nu} = S^{\nu\mu}$. Show that $\mathrm{A}_{\mu\nu}\mathrm{S}^{\mu\nu} = 0$. Establish the following two identities for any arbitrary tensor $\mathrm{V}_{\mu\nu}$:

$$\mathrm{V}^{\mu\nu}\mathrm{A}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{V}^{\mu\nu} - \mathrm{V}^{\nu\mu}\right)\mathrm{A}_{\mu\nu}, \quad \mathrm{V}^{\mu\nu}\mathrm{S}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{V}^{\mu\nu} + \mathrm{V}^{\nu\mu}\right)\mathrm{S}_{\mu\nu}$$

Problem 3.16.
(a) In an n-dimensional metric space, how many independent components are there for an r-rank tensor $\mathrm{T}^{\alpha\beta\cdots}$ with no symmetries?
(b) If the tensor is symmetric on s of its indices, how many independent components are there?
(c) If the tensor is antisymmetric on a of its indices, how many independent components are there?

Problem 3.17. We define the meaning of square and round brackets enclosing a set of indices as follows:

$$\mathrm{V}_{(a_1,\cdots,a_\mathrm{p})} \equiv \frac{1}{\mathrm{p}!}\Sigma\mathrm{V}_{a_{\pi_1}}\cdots a_{\pi_\mathrm{p}}; \quad \mathrm{V}_{[a_1,\cdots a_\mathrm{p}]} \equiv \frac{1}{\mathrm{p}!}\Sigma(-1)^\pi\mathrm{V}_{a_{\pi_1}}\cdots a_{\pi_\mathrm{p}}$$

there the sum is taken over all permutations π of the numbers $1, 2, \cdots, \mathrm{p}$ (in) $(-1)^\pi$ is +1 or -1 depending on whether the permutation is even Stodd. The quantity V may have other indices, not shown here, besides On set of p indices $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\mathrm{p}$, but only this set of indices is $\pi_1 = \pi_2, \cdots, \pi_\mathrm{p}$ the the numbers $1, 2, \cdots, \mathrm{p}$ rearranged according to the permutation π. Tass for example $\mathrm{V}_{(a_1a_2)} \equiv \frac{1}{2}\left(\mathrm{V}_{a_1a_2} + \mathrm{V}_{a_2a_1}\right)$ or equivalently $\mathrm{V}_{(\mu\nu)} = v_{\mu\nu} + V_{\nu\mu}$)
(a) If F is antisymmetric and T is symmetric, apply these definiivens to give explicit formulas for the following: $\mathrm{V}_{[\mu\nu]}, \mathrm{F}_{[\mu\nu]}, \mathrm{F}_{(\mu\nu)}$, $\mathrm{F}_{[\mu\nu]}, \mathrm{T}_{(\mu\nu)}, \mathrm{V}_{[\alpha\beta\gamma]}, \mathrm{T}_{(\alpha\beta;\gamma)}, \mathrm{F}_{[\alpha\beta,\gamma]}$.
(b) Establish the following formulae: $\mathrm{V}_{((a_1\cdots a_\mathrm{p}))} = \mathrm{V}_{(a_1\cdots a_\mathrm{p})}$; $V\left[a_1\cdots a_p\right]] = V_{[a_1\cdots a_p]}; V_{(a_1\cdots[a_\ell a_m]\cdots a_p)} = 0; V_{[a_1\cdots[a_\ell a_m]\cdots a_p]} = \Psi_{[a_1}\cdots a_p a_m\cdots a_p\big]$.
(c) Use these notations to show that $\mathrm{F}_{\mu\nu} = \mathrm{A}_{\nu,\mu} - \mathrm{A}_{\mu,\nu}$ implies $\mathrm{F}_{\alpha\beta,\nu} + \mathrm{F}_{\beta\nu,\alpha} + \mathrm{F}_{\nu\alpha,\beta} = 0$. (Half of Maxwell's equations!)

Problem 3.18. Show for any two-index tensor X , that $\mathrm{X}_{\alpha\beta} = \mathrm{X}_{(\alpha\beta)} + \Psi_{[a,\beta]}$ where ( ) and [ ] denote symmetrization and antisymmetrization, respectively. Show that in general

$$\mathrm{Y}_{a\beta\gamma} \neq \mathrm{Y}_{(\alpha\beta\gamma)} + \mathrm{Y}_{[\alpha\beta\gamma]}$$

Problem 3.19. Prove that the Kronecker delta, $\delta^\mu{}_\nu$, is a tensor.
Problem 3.20. Prove that, except for scaling by a constant, there is a anique tensor $\varepsilon_{a\beta\gamma\delta}$ which is totally antisymmetric on all its 4 indices. The usual choice is to take $\varepsilon_{0123} = 1$ in Minkowski coordinates. What are the components of ε in a general coordinate frame, with metric $\mathrm{g}_{\mu\nu}$?

Problem 3.21. In an orthonormal frame, show that

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

What is the analogous relation in a general coordinate frame with metric $\mathrm{g}_{\mu\nu}$?

Problem 3.22. Evaluate $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$.

Show that for any tensor $\mathrm{A}^a{}_\beta$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\mathrm{A}^a{}_\mu\mathrm{A}^\beta{}_\nu\mathrm{A}^\gamma\mathrm{A}^\delta{}_\sigma = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\det\|\mathrm{A}^a{}_\beta\|$$

where $\|A^a{}_\beta\|$ is the matrix of the components $A^a{}_\beta$.
Problem 3.24. Show that four vectors $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}$, are linearly independe if and only if $u \wedge \vee \wedge W \wedge x \neq 0$. Show that in this case $u \wedge v \wedge w \wedge x$ is proportional to the totally antisymmetric tensor ε. (The "wedge" product is defined as the antisymmetrized direct product, e.g. $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$.)

Problem 3.25. Let $\mathbf{F}$ be an antisymmetric second-rank tensor with components $\mathrm{F}^{\mu\nu}$. From F construct another second-rank, anti-symmetric tensor, $*$ F, called the dual of F , as follows

$$* \mathrm{F} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{F}_{a\beta}\mathbf{e}^\otimes_\mu\mathbf{e}_\nu$$

Show that $*(*\mathbf{F}) = -\mathbf{F}$.

Problem 3.26. Show that

$$\mathrm{V}_\sigma \mathrm{V}^\sigma = -\frac{1}{3!}(*\ \mathrm{V})_{\alpha\beta\gamma}(*\ \mathrm{V})^{\alpha\beta y}$$

Problem 3.27. The tensor $\delta^{\mu\cdots\lambda}_{\rho\cdots\sigma}$ is defined by

$$\delta^{\mu\cdots\lambda}_{\rho\cdots\sigma} \equiv \det \begin{bmatrix} \delta^\mu_\rho & \cdots & \delta^\lambda_\rho \\ \vdots & & \vdots \\ \delta^\mu_\sigma & \cdots & \delta^\lambda_\sigma \end{bmatrix}.$$

Wat if there are more than 4 upper (or lower) indices, the tensor cally vanishes.
3.28. Show that $\delta^{\mu\nu}_{\lambda\kappa} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\lambda\kappa\rho\sigma}$, and generalize to of other ranks.

Sem 3.29. Show that if the antisymmetric tensor $\mathrm{p}^{\alpha\beta}$ is a bivector $\mathrm{p}^{\alpha\beta} = \mathrm{A}^{[\alpha_\mathrm{B}\beta]}$) then

$$\mathrm{p}^{\alpha\beta}\mathrm{p}^{\gamma\delta} + \mathrm{p}^{\alpha\gamma}\mathrm{p}^{\delta\beta} + \mathrm{p}^{\alpha\delta}\mathrm{p}^{\beta\gamma} = 0$$

Plucker relations).

All tem 3.30. In 4-space define the 3-dimensional volume element in a surface $\mathrm{x}^a = \mathrm{x}^a(\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c})$ by $\mathrm{d}^3\Sigma_\mu = (1/3!)\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}$ dadbdc $\left[\partial\left(\mathrm{x}^\alpha, \mathrm{x}^\beta, \mathrm{x}^\gamma\right) /\ 10,\mathrm{c})\right]$, where the last factor is a 3×3 Jacobian determinant. Compute components of $d^3\Sigma_\mu$ for a space-like hypersurface $x^0 =$ constant, meterized by $x^1 = a, x^2 = b, x^3 = c$.

Doblem 3.31. Show that the invariant proper volume element in divensional space is given by

$$dV = (-g)^{\frac{1}{2}} d^4x$$

Stere $\mathrm{d}^4\mathrm{x} =$ dxdydzdt in the coordinate system of the metric $\mathrm{g}_{\mu\nu}$.

Thoblem 3.32. Show that the proper 3-volume element of an observer with S-elocity u is $d^3V = (-g)^{\frac{1}{2}} u^0 d^3x$, and show that this is a scalar Evvariant.

Froblem 3.33. What is the invariant volume element of contravariant zomentum $\mathrm{d}^4\mathrm{P}$ for 4 -dimensional momentum space? What is the invariant 3 -volume "on the mass shell", i.e. when the constraint $(-\mathbf{P}\cdot\mathbf{P})^{\frac{1}{2}} = m$ is imposed?

Problem 3.34. A group of N particles is seen to occupy a volume $\mathrm{dxdyd}z\mathrm{dP}^\mathrm{x}\mathrm{dP}^\mathrm{y}\mathrm{dP}^z$ in 6-dimensional phase space, so that the number
density of particles in phase space π is given by

$$\mathrm{N} = \pi \mathrm{dxdy}\ \mathrm{d}z\mathrm{dP}^\mathrm{x}\mathrm{dP}^\mathrm{y}\mathrm{dP}^z.$$

Show that $\Re$ is a Lorentz invariant, i.e. that all observers will compute the same numerical value for $\Re$.

Problem 3.35. A vector field J^α (x^μ) satisfies $\mathrm{J}^a_{,a} = 0$ and J^a falls off faster than r^{-2} at large distances from the origin. (a) Show that $\int J^0 d^3x$ is constant in time. (b) Show that the integral is a scalar, i.e. $\int J^0 d^3x = \int \mathrm{J}^{0'}\mathrm{d}^3\mathrm{x}'$.

3: Solutions

Solution 3.1. The neatest way to do this problem is by using spacetime diagrams.

First rotate the coordinate system until both events lie on the x -axis and the first event occurs at $x = t = 0$.

The two events A and B at spacelike separation ($\Delta\mathrm{x}, \Delta\mathrm{t}$) are depicted In Figure (i), with the world line of a light ray indicated as the dotted 45° line. A Lorentz transformation, shown as the t', x' axes in Figure (ii), can obviously be made to make A and B simultaneous. (The magnitude of the Lorentz boost is $\beta = \Delta\mathrm{t}/\Delta\mathrm{x}$ and $\tanh^{-1}\tan\theta$ in Figure (ii) is the rapidity parameter.) Since the t' axis cannot be rotated below the light cone line in a Lorentz transformation, the two events cananot be made to occur at the same location.

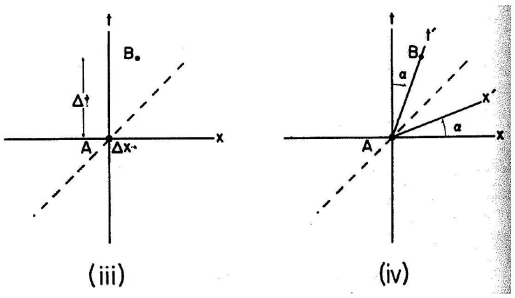
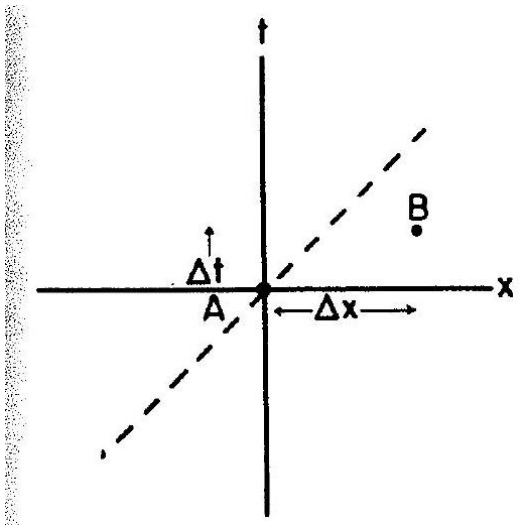
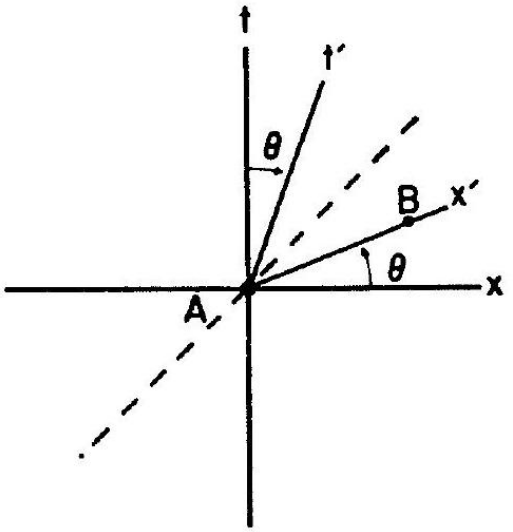


Figure (iii) depicts events A and B at timelike separation. As shown in F igure (iv), a Lorentz transformation can obviously be made to bring A and B to the same location in the primed frame. The magnitude of the required boost is $a = \Delta x/\Delta t$. Since the x' axis cannot be rotated above the light cone line, the two events cannot be made simultaneous.

Solution 3.2. Four linearly independent null vectors are e.g.



(i)



(ii)

$$e_z + e_t, e_z - e_t, e_x + e_t, e_y + e_t.$$

Suppose there existed 4 null vectors A, B, C, D which were mutually orthogonal. Linear independence implies that any vector can be written

$$\mathbf{V = aA + bB + cC + dD}$$

but the length of this vector is clearly zero if A, B, C, D are null and mutually orthogonal. Hence 4 such vectors cannot exist.

Solution 3.3. Without loss of generality, choose coordinates to make the null vector $V = e_x + e_t$. A general vector is $S = Ae_t + Be_x + Ce_y + De_z$, The dot product is $\mathrm{S \cdot V = A\,(e_t \cdot e_t) + B\,(e_x \cdot e_x) = B - A}$ so A must equal B if S is orthogonal to V. Now the vector S is spacelike unless
$\mathrm{P^2 \geq B^2 + C^2 + D^2}$ which means $\mathrm{C^2 + D^2 = 0}$ and hence $\mathrm{C = D = 0}$, thereore $S = A\,(e_x + e_t)$, which is a multiple of V.

Olution 3.4. Take flat Minkowski space, so that $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ are spacelike Nit vectors; $\hat{\mathrm{t}}$ is a timelike unit vector; $\hat{\mathrm{t}} \pm \hat{\mathrm{z}}, \hat{\mathrm{t}} \pm \hat{\mathrm{y}}$ are null, etc. The
Dillowing table gives examples in the order: spacelike sum, null sum, melike sum.

	spacelike	null	timelike
acelike	$\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}$ $(\hat{\mathbf{x}}+\varepsilon\hat{\mathbf{t}})+(-\hat{\mathbf{x}}+\varepsilon\hat{\mathbf{z}})$ $(\hat{\mathbf{x}}+\varepsilon\hat{\mathbf{t}})+(-\hat{\mathbf{x}})$	$\hat{\mathbf{x}}+(\hat{\mathbf{x}}-\hat{\mathbf{t}})$ $(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{t}})+(-2\hat{\mathbf{x}})$ $(-\hat{\mathbf{x}})+(\hat{\mathbf{x}}-\hat{\mathbf{t}})$	$\hat{\mathbf{x}}+(\varepsilon\hat{\mathbf{t}})$ $\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{t}}$ $(\varepsilon\hat{\mathbf{x}})+\hat{\mathbf{t}}$
		$(\hat{x}-\hat{t})+(\hat{x}+\hat{t})$ $(\hat{x}+\hat{t})+(\hat{x}+\hat{t})$ $(\hat{t}-\hat{x})+(\hat{t}+\hat{x})$	$(\hat{\mathbf{x}}-\hat{\mathbf{t}})+\hat{\mathbf{t}}$ $(\hat{\mathbf{x}}-\hat{\mathbf{t}})+2\hat{\mathbf{t}}$ $(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{t}})+\hat{\mathbf{t}}$
		spacelike sum $\rightarrow$ null sum $\rightarrow$ timelike sum $\rightarrow$	$(\hat{\mathbf{t}}+\varepsilon\hat{\mathbf{x}})+(-\hat{\mathbf{t}})$ $(\hat{\mathbf{t}}+\varepsilon\hat{\mathbf{x}})+(-\hat{\mathbf{t}}+\varepsilon\hat{\mathbf{t}})$ $\hat{\imath}+\hat{\imath}$

Here ε represents any small constant, e.g. 0.1. Not all possibilities sould be allowed if one required the timelike vectors to be "future directed." i.e. $\mathbf{u}\cdot\hat{\mathbf{t}}<0$ for timelike vectors u. (The reader can work Dis out.)

Solution 3.5. Let $\mathbf{k}$ be the null vector along which the light is traveling. A given observer takes a little square element of the beam whose sides me the vectors $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$, which are purely spacelike vectors in his fiame, and orthogonal to the light beam, so $\mathbf{A}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{k}=0$. Also $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$ since the element is square. The area of the element is $|A||B|$.

A different observer can unambiguously identify the same element of the beam, say by the rays making up its corners, but he slices it differently in time: the old vectors A and B are not orthogonal to his 4 velocity u, so are not a purely spacelike cross section in his frame.

Now for any constants α and β, the vectors

$$\mathbf{A}'=\mathbf{A}+a\mathbf{k}$$
$$\mathbf{B}'=\mathbf{B}+\beta\mathbf{k}$$

span the same beam element as $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ (the "tip" of each vector is just moved to a different point along the ray by adding a multiple of the wave vector $\mathbf{k}$). The new observer requires $\mathbf{A}'\mathbf{u}=\mathbf{B}'\mathbf{u}=0$, which is always possible, choosing $a=-\mathbf{A}\cdot\mathbf{u}/\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}$ and $\beta=-\mathbf{B}\cdot\mathbf{u}/\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}$. ($\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$, since k is null and u is timelike.) Notice that $A'\cdot k=B'\cdot k=A'\cdot B'=0$ since $k\cdot k=0$, so A' and B' are orthogonal vectors which are the sides of the new observer's cross section. The new area is $|A'|\,|B'|=(\mathbf{A}'\cdot\mathbf{A}')^{\frac{1}{2}}\,(\mathbf{B}'\cdot\mathbf{B}')^{\frac{1}{2}}=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|$, the same area as seen by the original obser

Solution 3.6. It is easy to show by example that $\sum_\mu \mathrm{D}^{\mu\mu}$ is not invariant Let $\mathrm{D}^{0\mathrm{x}}=1$ and all other components be zero. For a boost in the x-direction $\mathrm{D}^{0'0'}=-\beta\gamma,\mathrm{D}^{x'x'}=-\beta\gamma$ so that $\sum_\mu \mathrm{D}^{\mu\mu}=0$ but $\sum_{\mu'}\mathrm{D}^{\mu'\mu'}-2\beta\gamma$. The proof for $\sum_\mu \mathrm{D}_{\mu\mu}$ is similar.

For a Lorentz transformation $\Lambda^{\mu'}_{\nu}$, we know $\mathrm{D}^{\nu'}_{\mu'}=\Lambda^{a}_{\mu'}\Lambda^{\nu'}_{\beta}\mathrm{D}^{\beta}_{a}$ so this

$$\sum_{\mu'}\mathrm{D}^{\mu'}_{\mu'}=\sum_{\mu'}\Lambda^{\alpha}_{\mu'}\Lambda^{\mu'}_{\beta}\mathrm{D}^{\alpha}_{\beta}=\delta^{\alpha}_{\beta}\mathrm{D}^{\beta}_{a}=\sum_{\mu}\mathrm{D}^{\mu}_{\mu}$$

and hence this summation is invariant.

Solution 3.7. Since $\eta^{\alpha\beta}$ is constant we have

$$\begin{aligned}\mathrm{F}^{a}_{\mu,\beta}\,\mathrm{F}^{\beta}_{a}&=\left(\mathrm{F}_{\mu\gamma}\eta^{\gamma\alpha}\right),\beta^{\left(\mathrm{F}^{\beta\sigma}\eta_{o\alpha}\right)}\\&=\mathrm{F}_{\mu\gamma,\beta}\mathrm{F}^{\beta\sigma(\eta^{\gamma a}\eta_{o\alpha})=\mathrm{F}_{\mu\gamma,\beta}\mathrm{F}^{\beta\sigma}}\delta^{a}_{\sigma}=\mathrm{F}_{\mu\gamma,\beta}\mathrm{F}^{\beta\gamma}\\&=-\mathrm{F}_{\mu\alpha,\beta}\mathrm{F}^{a\beta}\end{aligned}$$

where the last equality follows from relabelling dummy indices, and by antisymmetry.

vition 3.8. We express the differentials in terms of the new coordinates:

$$\begin{aligned}\mathrm{ds}^2&=\eta_{a\beta}\mathrm{dx}^a\mathrm{dx}\beta\\&=\eta_{\alpha\beta}\left(\partial\mathrm{x}^a/\partial\overline{\mathrm{x}}^\mu\right)\mathrm{d}\overline{\mathrm{x}}^\mu\left(\partial\mathrm{x}^\beta/\partial\overline{\mathrm{x}}^\nu\right)\mathrm{dx}^\nu\\&=\left(\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial\mathrm{x}^a}{\partial\overline{\mathrm{x}}^\mu}\frac{\partial\mathrm{x}^\beta}{\partial\overline{\mathrm{x}}^\nu}\right)\mathrm{dx}^\mu\mathrm{dx}^\nu\end{aligned}$$

ge write the line element as $\mathrm{ds}^2=\mathrm{g}_{\bar{\mu}}\bar{\nu}^{\mathrm{d}\overline{\mathrm{x}}^\mu}{}_{\mathrm{d}\overline{\mathrm{x}}^\nu}{}^\nu$ it follows that

$$\mathrm{g}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\equiv\eta_{a\beta}\frac{\partial\mathrm{x}^\alpha}{\partial\overline{\mathrm{x}}^\mu}\frac{\partial\mathrm{x}^\beta}{\partial\overline{\mathrm{x}}^\nu}$$

ivector transforms by the following rule

$$\mathrm{u}^\alpha=\frac{\partial\mathrm{x}^a}{\partial\overline{\mathrm{x}}^{\bar{\beta}}}\mathrm{u}^{\bar{\beta}}$$

Aerefore

$$\begin{aligned}\mathrm{U}\cdot\ \mathrm{V} &= \mathrm{U}^{\sigma}\mathrm{V}^{\lambda}\eta_{\sigma\lambda}\\ &= \left(\mathrm{U}^{\bar{a}}\frac{\partial \mathrm{x}^{\sigma}}{\partial \overline{\mathrm{x}}^{\alpha}}\right)\left(\mathrm{V}^{\bar{\beta}}\frac{\partial \mathrm{x}^{\lambda}}{\partial \overline{\mathrm{x}}^{\beta}}\right)\eta_{\sigma\lambda} = \mathrm{U}^{\bar{\alpha}}\mathrm{V}^{\bar{\beta}}\frac{\partial \mathrm{x}^{\sigma}}{\partial \overline{\mathrm{x}}^{\alpha}}\frac{\partial \mathrm{x}^{\lambda}}{\partial \overline{\mathrm{x}}^{\beta}}\eta_{\sigma\lambda}\\ &= \mathrm{U}^{\bar{\alpha}}\mathrm{V}^{\bar{\beta}}\mathrm{g}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\end{aligned}$$

Solution 3.9. Under the coordinate transformation $\mathrm{x}^{\mu}\rightarrow\overline{\mathrm{x}}^{\mu}\left(\mathrm{x}^{\nu}\right)$ the transformation of $\mathrm{g}_{\alpha\beta}$ is

$$\mathrm{g}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \mathrm{g}_{\alpha\beta}\frac{\partial \mathrm{x}^{\alpha}}{\partial \overline{\mathrm{x}}^{\mu}}\frac{\partial \mathrm{x}^{\beta}}{\partial \overline{\mathrm{x}}^{\nu}}$$

and therefore the transformation of g is

$$\overline{\mathrm{g}} = \det\left(\mathrm{g}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\right) = \det\left(\mathrm{g}_{\alpha\beta}\right)\det\left(\frac{\partial_{\mathrm{x}}^{\alpha}}{\partial \overline{\mathrm{x}}^{\mu}}\right)\det\left(\frac{\partial_{\mathrm{x}}^{\beta}}{\partial \overline{\mathrm{x}}^{\nu}}\right) = \mathrm{g}\left[\det\left(\frac{\partial_{\mathrm{x}}^{\alpha}}{\partial \overline{\mathrm{x}}^{\mu}}\right)\right]^{2}$$

Since $\overline{\mathrm{g}}\neq\mathrm{g},\overline{\mathrm{g}}$ is not a scalar.

Solution 3.10. Suppose one coordinate transformation is

$$\overline{\mathrm{x}}^{\mu} = \overline{\mathrm{x}}^{\mu}\left(\mathrm{x}^{\nu}\right), \quad \text{so} \quad \Lambda_{\beta}^{\alpha} = \partial\overline{\mathrm{x}}^{\alpha}/\partial\mathrm{x}^{\beta} \tag{1}$$

and the other is

$$\tilde{\mathrm{x}}^{\mu} = \tilde{\mathrm{x}}^{\mu}\left(\mathrm{x}^{\nu}\right), \quad \text{so} \quad \tilde{\Lambda}_{\beta}^{\alpha} = \partial\tilde{\mathrm{x}}^{\alpha}/\partial\mathrm{x}^{\beta} \tag{2}$$

The product matrix is then

$$\Lambda_{\gamma}^{a}\tilde{\Lambda}_{\beta} = \frac{\partial\overline{\mathrm{x}}^{a}}{\partial\mathrm{x}^{\gamma}}\frac{\partial\tilde{\mathrm{x}}^{\gamma}}{\partial\mathrm{x}^{\beta}}. \tag{3}$$

This looks suspiciously like the chain rule for partial derivatives, so one is led to consider the coordinate transformation

$$\bar{x}^{\mu}\left(x^{\beta}\right) = \bar{x}^{\mu}\left[\tilde{x}^{\gamma}\left(x^{\beta}\right)\right] \tag{4}$$

whose transformation matrix is obviously

$$\bar{\Lambda}_{\beta}^{\mu} = \frac{\partial\overline{\mathrm{x}}^{\mu}}{\partial\mathrm{x}^{\beta}} = \frac{\partial\overline{\mathrm{x}}^{\mu}}{\partial\tilde{\mathrm{x}}^{\gamma}}\frac{\partial\tilde{\mathrm{x}}^{\gamma}}{\partial\mathrm{x}^{\beta}} \tag{5}$$

This differs from (3) only by a twiddle. A little thought shows that the twiddle is not meaningful. Partial derivatives are taken with respect to argument variables; it makes no difference what symbols are used to repre sent these variables. Thus (4) is in fact the coordinate transformation of the product matrix.

Solution 3.11. In a basis $\mathbf{K}$ is represented by a matrix $K^{\alpha\beta}$. An obvious necessary and sufficient condition for $\mathrm{K}^{\alpha\beta}$ to be expressible as $\mathrm{A}^{\alpha}\mathrm{B}^{\beta}$ is that all columns of the matrix are proportional to each other.

In basis-free language, K can be written as

$$K = A\otimes B$$

if and only if the vector $W = K\cdot v$ (i.e. $W^{\alpha} = K^{\alpha\beta}v_{\beta}$) is in the same direc tion for any choice of v. Proof: In some frame choose 4 basis vectors $\mathrm{e}^{0},\mathrm{e}^{1},\cdots$ to satisfy $\mathrm{e}^{\mu}\cdot\mathrm{e}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$. By linearity the direction of W

5 independent of any v if and only if it is independent of the 4 basis ectors e^{μ}. Our condition then is

$$\begin{aligned}K\cdot e^{0} &= \lambda_{0}\mathbb{W}, K\cdot e^{1} = \lambda_{1}\mathbb{W},\cdots\\ K^{\alpha 0} &= \lambda_{0}W^{\alpha}, K^{\alpha 1} = \lambda_{1}W^{\alpha}\cdots\end{aligned}$$

basis-free criterion then is equivalent to the columns being proportional.

Wation 3.12. A direct product of two vectors (see Problem 3.11) has all Its columns proportional to each other (similarly for all of its rows).

is is not true for a general second rank tensor. If $\mathrm{e_i i} = 1,\mathrm{n}$ are the Sis vectors $(0,0,\cdots 1,\cdots 0,0)$ where the 1 is in the i^{th} slot, then the \$ products $\mathrm{e_i}\otimes\mathrm{e_j}$ obviously span the space of second rank tensors, Sice there is one with a 1 uniquely in any row and column. Sums over Pese times constants obviously can give the general tensor. (Any one Decific tensor can be represented as a sum of n outer products, as the Sader is invited to verify.)

odution 3.13. The object cannot be a tensor. A 2^{nd} rank covariant Lasor is a functional of 2 covariant tensors, i.e. $X^{\mu\nu}V_{\mu}W_{\nu}$ would have be a scalar, but

$$\mathrm{X}^{\mu\nu}\mathrm{V}_{\mu}\mathrm{W}_{\nu} = (\mathrm{A}\cdot\ \mathrm{V})\mathrm{W}_{\nu} + (\mathrm{B}\cdot\ \mathrm{W})\mathrm{V}_{\mu}$$

Which is coordinate dependent.
If one defines the two index object by the relation $X^{\mu\nu} = A^\mu + B^\nu$ in my coordinate system, then the coordinate transformation law is $\mathrm{X}^{\mu'\nu'} = \mu'_\alpha \mu' \mathrm{A}^\alpha + \Lambda^{\nu'}_\beta \mathrm{B}^\beta$. It is not possible to express this as

$$\mathrm{X}^{\mu'\nu'} = \mathrm{T}^{\mu'\nu'}_{a\beta} \mathrm{X}^{a\beta}$$

zhere T is some transformation. This follows from the fact that there are many choices of A^μ and B^ν which give, in one coordinate system, the same $\mathrm{X}^{\mu\nu}$. In particular, in a given coordinate system $\mathrm{A}^\mu + \mathrm{C}, \mathrm{B}^\nu - \mathrm{C}$ give the same $\mathrm{X}^{\mu\nu}$ as A^μ and B^ν, but the two choices give very different $X^{\mu'\nu'}$.

Solution 3.14. We need only transform and check the results for antisymmetry:

$$\mathrm{F}_{\bar\mu\nu} = \Lambda^a_{\bar\mu} \Lambda \frac{\beta}{\nu}\, \mathrm{F}_{a\beta} = -\Lambda \frac{a}{\mu} \Lambda \frac{\beta}{\nu}\, \mathrm{F}_{\beta a} = -\Lambda \frac{\beta}{\mu} \Lambda \frac{a}{\nu}\, \mathrm{F}_{a\beta} = -\mathrm{F}_{\bar\nu\bar\mu}$$
$$\mathrm{F}^{\mu\nu} = \mathrm{g}^{\mu a}\, \mathrm{g}^{\nu\beta} \mathrm{F}_{a\beta} = -\mathrm{g}^{\mu a}\, \mathrm{g}^{\nu\beta} \mathrm{F}_{\beta a} = -\mathrm{g}^{\mu\beta} \mathrm{g}^{\nu\alpha} \mathrm{F}_{a\beta} = -\mathrm{F}^{\nu\mu}$$

For variety, we treat the symmetric case by a different argument: Consid the tensor $\mathbb{Q}^{\mu\nu} = \mathrm{S}^{\mu\nu} - \mathrm{S}^{\nu\mu}$, where $\mathrm{S}^{\mu\nu}$ is a symmetric tensor. Since $\mathbb{Q}^{\mu\nu}$ vanishes (by hypothesis) and since $\mathbb{Q}^{\mu\nu}$ is a tensor, it vanishes in all coordinate systems, hence $S^{\mu\nu}$ is symmetric in all coordinate system

Solution 3.15. By the given symmetries $\mathrm{A}_{\mu\nu}\mathrm{S}^{\mu\nu} = -\mathrm{A}_{\nu\mu}\mathrm{S}^{\nu\mu}$, but μ, ν are dummy indices so we can interchange μ and ν to get

$$\mathrm{A}_{\mu\nu}\mathrm{S}^{\mu\nu} = -\mathrm{A}_{\nu\mu}\mathrm{S}^{\mu\nu} = -\mathrm{A}_{\mu\nu}\mathrm{S}^{\mu\nu}$$

Thus $\mathrm{A}_{\mu\nu}\mathrm{S}^{\mu\nu} = 0$.
Any tensor $\mathrm{V}_{\mu\nu}$ can be written as a sum of its symmetric part $\tilde{\mathrm{V}}_{\mu\nu} \frac{1}{2} (\mathrm{V}_{\mu\nu} + \mathrm{V}_{\nu\mu})$ and its antisymmetric part $\tilde{\mathrm{V}}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} (\mathrm{V}_{\mu\nu} - \mathrm{V}_{\nu\mu})$, thus

$$\mathrm{V}^{\mu\nu}\mathrm{A}_{\mu\nu} = \tilde{\mathrm{V}}^{\mu\nu}\mathrm{A}_{\mu\nu} + \tilde{\mathrm{V}}^{\mu\nu}\mathrm{A}_{\mu\nu} = \tilde{\mathrm{V}}^{\mu\nu}\mathrm{A}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\mathrm{V}^{\mu\nu} - \mathrm{V}^{\nu\mu})\, \mathrm{A}_{\mu\nu}$$
$$\mathrm{V}^{\mu\nu}\mathrm{S}_{\mu\nu} = \tilde{\mathrm{V}}^{\mu\nu}\mathrm{S}_{\mu\nu} + \tilde{\mathrm{V}}^{\mu\nu}\mathrm{S}_{\mu\nu} = \tilde{\mathrm{V}}^{\mu\nu}\mathrm{S}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\mathrm{V}^{\mu\nu} + \mathrm{V}^{\nu\mu})\, \mathrm{S}_{\mu\nu}$$

Solution 3.16.
(a) If there are no symmetries there are clearly n^r components.
(b) For s symmetric indices and $r - s$ asymmetric ones, consider:
How many inequivalent ways are there of choosing the values of the s indices from the n possibilities? It equals the number of ways of choosing s things from n possibilities, including repetitions:
See, e.g. J. Mathews and R. Walker, Mathematical Methods of Physics 14. A. Benjamin, 1965) Section 14.3.] The other r-s indices can be dosen in $\mathrm{n}^{\mathrm{r-s}}$ ways so the number of independent components is

$$n^{r-s}(n+s-1)!/(n-1)!s!$$

(c) For a antisymmetric indices and r-a other indices, consider Ust: How many ways are there of choosing the a indices? This is upal to the number of ways of choosing a things from n, with no Epetitions:

$$n!/(n-a)!a!$$

The number of independent components is then

$$n^{r-a}n!/(n-a)!a!$$

Sote that if $a = n$ there is only one possibility for the a indices. If as n, there are no possibilities; all components must be zero!
Solution 3.17.
(a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_{[\mu\nu]} &= \tfrac{1}{2} (\mathrm{V}_{\mu\nu} - \mathrm{V}_{\nu\mu}) && \mathrm{T}_{[\mu\nu]} = 0 \\
\mathrm{F}_{[\mu\nu]} &= \mathrm{F}_{\mu\nu} && \mathrm{T}_{(\mu\nu)} = \mathrm{T}_{\mu\nu} \\
\mathrm{F}_{(\mu\nu)} &= 0 \\
\mathrm{V}_{[\alpha\beta\gamma]} &= \tfrac{1}{6} [\, \mathrm{V}_{\alpha\beta\gamma} - \mathrm{V}_{\alpha\gamma\beta} + \mathrm{V}_{\beta\gamma a} - \mathrm{V}_{\beta a\gamma} + \mathrm{V}_{\gamma a\beta} - \mathrm{V}_{\gamma\beta a}] \\
\mathrm{T}_{(\alpha\beta,\gamma)} &= \tfrac{1}{3} [\, \mathrm{T}_{a\beta,\gamma} + \mathrm{T}_{a\gamma,\beta} + \mathrm{T}_{\beta\gamma,a}] \\
\mathrm{F}_{[\alpha\beta,\gamma]} &= \tfrac{1}{3} [\, \mathrm{F}_{\alpha\beta,\gamma} + \mathrm{F}_{\gamma a,\beta} + \mathrm{F}_{\beta\gamma,a}]
\end{aligned}$$

(b) If $\mathrm{A}_{\mu\nu\cdots\sigma}$ is a totally antisymmetric tensor, i.e.

$$(-1)^\pi \mathrm{A}_{a_{\pi_1}} \cdots a_{\pi_\mathrm{p}} = \mathrm{A}_{a_1} \cdots a_\mathrm{p}$$

then

$$^{\mathrm{A}}\,[\alpha_1 \cdots \alpha_\mathrm{p}] = \frac{1}{\mathrm{p}!} \sum (-1)^\pi \mathrm{A}_{\pi_1} \cdots \alpha_{\pi_\mathrm{p}} = \mathrm{A}_{\alpha_1} \cdots \alpha_\mathrm{p} :$$

But $A_{\alpha_1\cdots\alpha_p} \equiv V_{[\alpha_1\cdots\alpha_p]}$ is totally antisymmetric, so

$$(n+s-1)!/(n-1)!s!$$

$$A_{[a_1\cdots\alpha_p]} = V_{[[a_1\cdots a_p]]} = V_{[a_1\cdots a_p]}$$

The theorem for $V_{((\alpha_1\cdots\alpha_p))}$ follows analogously.
By symmetry $V_{(\alpha_1\cdots[\alpha_\ell\alpha_m]\cdots\alpha_p)} = V_{(\alpha_1\cdots[\alpha_m\alpha_\ell]\cdots\alpha_p)}$ but by antisym metry $V_{(a_1\cdots[\alpha_\ell a_m]\cdots a_1)} = -V_{(a_1\cdots[a_m a_\ell]\cdots a_p)}$.
Hence V must vanish Antisymmetry on two indices is easily expressed as

$$V_{\alpha_1\cdots[\alpha_\ell\alpha_m]\cdots\alpha_p} = \frac{1}{2}\left[\, V_{\alpha_1\cdots\alpha_\ell\alpha_m\cdots\alpha_p} - V_{\alpha_1\cdots\alpha_m\alpha_\ell\cdots\alpha_p}\right]$$

Thus
$V_{[\alpha_1\cdots[\alpha_\ell\alpha_m]\cdots\alpha_p]} = \frac{1}{2p!}\sum(-1)^\pi \left(V_{a_{\pi_1}\cdots\alpha_{\pi_m}\alpha_{\pi_\ell}\cdots\alpha_{\pi_p}} - V_{\cdots\alpha_{\pi_\ell}\alpha_m}\cdots\right)$
But $V_{a_{\pi_1}}\cdots a_{\pi_\ell}a_{\pi_m}\cdots a_{\pi_p} = -V_{a_{\pi_1}}\cdots a_{\pi_m}a_{\pi_\ell}\cdots a_{\pi_p}$ so that

$$V_{[a_1\cdots[a_\ell a_m]\cdots a_p]} = V_{[a_1\cdots a_\ell a_m\cdots a_p]}$$

(c) From part (a),

$$F_{a\beta,\nu} + F_{\beta\nu,a} + F_{\nu a,\beta} = 3\ F_{[a\beta,\nu]}.$$

But $F_{\alpha\beta} = -A_{[a,\beta]}$ so $F_{[\alpha\beta,\nu]} = -A[[\alpha,\beta],\nu]$, and by part (b)

$$A_{[[\alpha,\beta],\nu]} = A[\alpha,\beta,\nu]$$

which must vanish because $A_{\alpha,\beta,\nu} = A_{\alpha,\nu,\beta}$.
Solution 3.18. The first part is straightforward:

$$X_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(X_{\alpha\beta} + X_{\beta a}\right) + \frac{1}{2}\left(X_{a\beta} - X_{\beta a}\right) = X_{(\alpha\beta)} + X_{[\alpha\beta]}$$

If a similar relation,

$$Y_{a\beta\gamma} = Y_{(a\beta\gamma)} + Y_{[\alpha\beta\gamma]} \tag{1}$$

were true for a 3^{rd} rank tensor, we would have:

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_{\beta\alpha y} &= \mathbf{Y}_{(\beta a y)} + \mathbf{Y}_{[\beta a y]} = \mathbf{Y}_{(a\beta y)} - \mathbf{Y}_{[a\beta\gamma]}\\ \mathbf{Y}_{\beta\gamma\alpha} &= \mathbf{Y}_{(\gamma\beta a)} - \mathbf{Y}_{[y\beta a]} = \mathbf{Y}_{(a\beta\gamma)} + \mathbf{Y}_{[a\beta\gamma]} = \mathbf{Y}_{\alpha\beta\gamma}\end{aligned} \tag{2}$$

Since $Y_{\alpha\beta\gamma}$ does not in general have the symmetry properties implied by Equation (2), the simple decomposition in Equation (1) cannot be correct.

Solution 3.19. One way is to show that δ^μ_ν can be combined with the components of two vectors to form a scalar. But $A^\nu B_\mu \delta^\mu{}_\nu = A \cdot B$, hence δ is a tensor.

Alternately one can check the transformation properties

$$\frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^\nu}\delta^a_\beta = \frac{\partial x^{\mu\prime}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\nu\prime}} = \delta^{\mu\prime}_{\nu\prime}$$

where the last equality follow from the fact that $\partial x^{\mu\prime}/\partial x^\alpha$ and $\partial x^\alpha/\partial x^\mu$, are matrix inverses of each other. Hence $\delta^\mu{}_\nu$ transforms as a tensor.

Solution 3.20. If $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ is totally antisymmetric, then given any one component e.g. ε_{0123} any other component (with nonrepeated indices) can be found by permuting the indices on that given component. Components with repeated indices, of course, vanish. The tensor is thus fixed once ε_{0123} is given, i.e. the tensor is unique up to scaling by a constant. With the usual, position independent choice of normalization, we have

$$\varepsilon_{0123} = -\varepsilon_{1023} = \varepsilon_{1032} = \cdots = 1$$

in Minkowski coordinates. If we now transform to other coordinates $x^{\mu'}(x^a)$ we get

$$\varepsilon_{\mu\prime\nu\lambda\prime\sigma\prime} = \frac{\partial^a_x}{\partial_x \mu\prime}\frac{\partial_x \beta}{\partial_x \nu\prime}\frac{\partial x^\gamma}{\partial_x \lambda\prime}\frac{\partial x^\delta}{\partial x\prime\sigma\prime}\varepsilon_{a\beta\gamma\delta} = \det\left[\frac{\partial^a_x}{\partial_x{}''}\right]\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}.$$

Now

$$\begin{aligned} g_{\mu'\nu'} &= \frac{\partial x^a}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}}\eta_{a\beta}\\ \det\left(g_{\mu'\nu'}\right) &= \left|\det\left(\frac{\partial x^a}{\partial x^{a'}}\right)\right|^2 \det\left(\eta_{a\beta}\right)\end{aligned}$$

so that

$$\det\left(\partial \mathrm{x}^{\alpha}/\partial \mathrm{x}^{\alpha'}\right) = \left[-\det\left(\mathrm{g}_{\mu'\nu'}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

and finally

$$\varepsilon_{\mu'\nu'\lambda'\sigma'} = \left[-\det\left(g_{u'\nu'}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$$

Solution 3.21. In an orthonormal frame

$$\varepsilon^{a\beta\gamma\delta} = \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}\eta^{\gamma\sigma}\eta^{\delta\lambda}\varepsilon_{\mu\nu\sigma\lambda}$$

For nonzero components of $\varepsilon^{a\beta\gamma\delta}$, precisely one of the indices a, β, γ, δ must equal zero. Since $\eta^{00} = -1$ and $\eta^{\mathrm{ij}} = 1$ this introduces precisely one minus sign in what is otherwise an identity transformation. Thus

$$\varepsilon_{a\beta\gamma\delta} = -\varepsilon^{a\beta\gamma\delta}$$

In some other frame, this equation becomes

$$\left[-\det\left(\mathrm{g}_{\mu\nu}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\left[-\det\left(\mathrm{g}_{\mu\nu}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \varepsilon a\beta\gamma\delta$$

according to the transformation derived in Solution 3.20, and its obvious analog for $\varepsilon^{a\beta\gamma\delta}$. Thus in general

$$\varepsilon_{a\beta y\delta} = \det\left(\mathrm{g}_{\mu\nu}\right) \varepsilon^{a\beta\gamma\delta}$$

Solution 3.22. Evaluate this scalar in a local orthonormal frame. According to Solution 3.21, $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ so

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\sum_{\mu\nu\rho\sigma} \left|\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\right|^2 = -\sum \left|\varepsilon_{0123}\right|^2$$

here the sum is over permutations of 0123 . Since there are $4! = 24$ ermutations, $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -24$.

Solution 3.23. In an orthonormal frame (with $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$) it should be evident that the antisymmetric nature of ε is precisely what is needed to erform all of the operations in finding the determinant. That is,

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\mathrm{A}_0^{\alpha}\mathrm{A}_1^{\beta}\mathrm{A}_2^{\gamma}\mathrm{A}_3^{\delta} = \det\left\|\mathrm{A}_{\beta}^{\alpha}\right\|$$

Generalizing from the $(0, 1, 2, 3)$ to arbitrary $(\mu, \nu, \lambda, \sigma)$ requires placing =p $\mu\lambda\sigma$ on the right-hand side to account for the minus signs introduced by interchange of rows.

To show that the result is true in all (not just orthonormal) frames, we need to show that it is a tensor equation. This is equivalent to showing Hat det $\left\|A_{\beta}^{\alpha}\right\|$ is a scalar:

$$\begin{aligned}\det\left\|\mathrm{A}_{\beta}^{a'}\right\| &= \det\left\|\mathrm{A}_{\beta}^{\alpha}\frac{\partial \mathrm{x}^{a'}}{\partial \mathrm{x}^{a}}\frac{\partial \mathrm{x}^{\beta}}{\partial \mathrm{x}'}\right\| \\ &= \det\left\|\mathrm{A}_{\beta}^{\alpha}\right\| \det\left\|\frac{\partial \mathrm{x}^{\alpha'}}{\partial \mathrm{x}^{a}}\right\| \det\left\|\frac{\partial \mathrm{x}^{\beta}}{\partial \mathrm{x}'}\right\| = \det\left\|\mathrm{A}_{\beta}^{\alpha}\right\|.\end{aligned}$$

(The last step follows from the fact that $\partial \mathrm{x}'/\partial \mathrm{x}^{a}$ and $\partial \mathrm{x}^{a}/\partial \mathrm{x}'$ are matrix inverses.]

Solution 3.24. Suppose $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w} + \delta\mathbf{x} = 0$ for $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ not all zero. If $a \neq 0$, take the wedge product of this equation with $\mathrm{v} \wedge \mathrm{w} \wedge \mathrm{x}$ and get $\mathrm{a} \wedge \vee \wedge w \wedge x = 0$. If $a = 0$, then form analogous product using the β, γ, or δ term. Conversely, if u, w, x and v are linearly independent, then any vector can be written as a linear combination of them; in particular, any 4 orthonormal basis vectors can be so written. Thus

$$\begin{aligned}0 \neq \mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = &(\alpha_1\mathbf{u} + \beta_1\mathbf{v} + \gamma_1\mathbf{w} + \delta_1\mathbf{x}) \wedge (\alpha_2\mathbf{u} + \cdots) \\ &\wedge (\alpha_3\mathbf{u} + \cdots) \wedge (\alpha_4\mathbf{u} + \cdots) \propto (\mathbf{u} \wedge \mathrm{v} \wedge \mathrm{w} \wedge \mathbf{x})\end{aligned}$$

since cross terms with a duplicated vector vanish. Hence unv $\mathrm{uw} \wedge \mathrm{x} \neq 0$ Since $u \wedge \vee \wedge W \wedge x$ is totally antisymmetric on all "slots" and is a multip of $e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$, it must uniquely be proportional to the ε tensor. See Problems 3.20, 3.21.

Solution 3.25.

$$*\,\mathrm{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu a\beta}\ \mathrm{F}_{a\beta} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}*\,\mathrm{F}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\tau}\varepsilon^{\sigma\tau a\beta}\ \mathrm{F}_{a\beta} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}^{\alpha\beta}\mathrm{F}_{a\beta} \\ &= \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{\mu\nu\lambda y}\eta^{\alpha\lambda}\eta^{\beta y}\right)\mathrm{F}_{a\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda y}\left(\eta^{a\lambda}\eta^{\beta y}\ \mathrm{F}_{a\beta}\right) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu a\beta}\ \mathrm{F}^{\alpha\beta}\end{aligned} \tag{2}$$

$$*\left(*\,\mathrm{F}^{\mu\nu}\right) = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu a\beta}\left(*\,\mathrm{F}_{a\beta}\right) = \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu a\beta}\varepsilon_{a\beta\lambda\sigma}\ \mathrm{F}^{\lambda\sigma} \tag{3}$$

Now, $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{a\beta\lambda\sigma} \equiv -2\delta^{\mu\nu}_{\lambda\sigma}$ (this defines the symbol $\delta^{\mu\nu}_{\lambda\sigma}$). One should convince oneself that $\delta^{\mu\nu}_{\lambda\sigma}$ has the following properties:

$$\begin{aligned}\delta^{\mu\nu}_{\lambda\sigma} &= +1 \text{ if } \lambda = \mu, \sigma = \nu \\ &= -1 \text{ if } \lambda = \nu, \sigma = \mu \\ &= 0 \text{ otherwise.}\end{aligned}$$

Thus

$$\delta^{\mu\nu}_{\lambda\sigma} = \delta^{\mu}_{\lambda}\delta^{\nu}_{\sigma} - \delta^{\mu}_{\sigma}\delta^{\nu}_{\lambda}$$

and therefore

$$*\,(*\,\mathrm{F}^{\mu\nu}) = -\frac{1}{2}\delta^{\mu\nu}_{\lambda\sigma}\mathrm{F}^{\lambda\sigma} = -\frac{1}{2}\,(\,\mathrm{F}^{\mu\nu} - \mathrm{F}^{\nu\mu}) = -\mathrm{F}^{\mu\nu}.$$

Solution 3.26. From the definition $*\,\mathrm{V}^{\alpha\beta\gamma} = \mathrm{V}_{\lambda}\varepsilon^{\lambda\alpha\beta\gamma}$, and

$$*\,\mathrm{V}_{a\beta\gamma}*\;\mathrm{V}^{\alpha\beta\gamma} = \mathrm{V}^{\mu}\mathrm{V}_{\lambda}\varepsilon_{\mu a\beta\gamma}\varepsilon^{\lambda a\beta\gamma}$$

Since μ must be a different index than α, β, or γ, and λ must also be, it follows that

$$\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\varepsilon^{\lambda\alpha\beta\gamma} = \mathrm{C}\delta^{\lambda}_{\mu}$$

for some constant C. If we sum over μ and λ, use $\delta^{\mu}_{\mu} = 4$, and use the result of Problem 3.22 we see that $C = -6$ so

$$*\,\mathrm{V}_{a\beta\gamma}*\;\mathrm{V}^{a\beta\gamma} = -6\delta^{\lambda}_{\mu}\mathrm{V}^{\mu}\mathrm{V}_{\lambda} = -6\;\mathrm{V}^{\sigma}\mathrm{V}_{\sigma}$$

Solution 3.27. Notice that $\delta^{\mu\cdots\lambda}_{\rho\ldots\sigma}$ is antisymmetric in both its upper and dower indices. This follows from the fact that the sign of a determinant dianges for an odd permutation of its rows or columns. Since, for example, the upper indices are antisymmetric there can be no repeated index. If there are more than four upper indices there must be a repeated index so $\frac{\partial\mu\cdot\lambda}{\rho\cdot\cdot\sigma}$ must be identically zero.

Solution 3.28. The indices $\mu, \nu, \lambda, \kappa$ must take on different values from ρ, σ. For given ρ, σ, we can have μ equal to κ (with ν then equal to A) or μ equal to λ (with ν then equal to κ). All other possibilities vanish because of the antisymmetry of $\varepsilon^{\dot{\mu}\nu\rho\sigma}$. Furthermore, because of that antisymmetry, the $\mu = \kappa, \nu = \lambda$ case has a minus sign. Thus

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\lambda\kappa\rho\sigma} = \mathrm{C}\,(\delta^{\mu}_{\lambda}\delta^{\nu}_{\kappa} - \delta^{\mu}_{\kappa}\delta^{\nu}_{\lambda}) \equiv \mathrm{C}\delta^{\mu\nu}_{\lambda\kappa}$$

for some C . Summing on μ, λ and ν, k and using the results of Problem 3.22 gives $\mathrm{C} = -2$. Thus

$$\delta^{\mu\nu}_{\lambda\kappa} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\lambda\kappa\rho\sigma}$$

In general

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\mu\nu\lambda t}\varepsilon_{t\kappa\rho\sigma} &= -\delta^{\mu\nu\lambda r}_{t\kappa\rho\sigma} \\ \varepsilon^{\mu\nu\lambda r}\varepsilon_{t\kappa\rho\tau} &= -\delta^{\mu\nu\lambda}_{t\kappa\rho}\end{aligned}$$

Solution 3.29. If $\mathrm{p}^{\alpha\beta} = \mathrm{A}^{[\alpha_{\mathrm{B}}\beta]}$, then

$$\det\begin{bmatrix}\mathbf{p}^{\alpha\beta} & \mathbf{p}^{\alpha\gamma} & \mathbf{p}^{\alpha\delta} \\ \mathbf{A}^{\beta} & \mathbf{A}^{\alpha} & \mathbf{A}^{\delta} \\ \mathbf{B}^{\beta} & \mathbf{B}^{\gamma} & \mathbf{B}^{\delta}\end{bmatrix} = 0$$

since the first row is a linear combination of the other two rows (first row $= -\frac{1}{2}\;\mathrm{A}^{\alpha}\times$ third row $+\frac{1}{2}\;\mathrm{B}^{\alpha}\times$ second row). Multiplying out the determina gives the desired result.

Solution 3.30. For each value of μ, there are 3 ! arrangements of $\alpha, \beta, \gamma \neq \mu$ which make the ε nonzero. The Jacobian determinant has the same property of changing sign that the ε does, so with the 3! in the denominator, we can just take one representative element of each permuta tion and get the right answer:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^3\Sigma_0 &= [\partial(\mathrm{a},\ \mathrm{b},\mathrm{c})/\partial(\mathrm{a},\ \mathrm{b},\mathrm{c})]\mathrm{dadbdc} = \mathrm{dadbdc} \\ \mathrm{d}^3\Sigma_1 &= -[\partial(\text{ const.},\ \mathrm{b},\mathrm{c})/\partial(\mathrm{a},\ \mathrm{b},\mathrm{c})]\mathrm{dadbdc} = 0 \\ \mathrm{d}^3\Sigma_2 &= -[\partial(\mathrm{a},\ \text{const. }\ ,\mathrm{c})/\partial(\mathrm{a},\ \mathrm{b},\mathrm{c})]\mathrm{dadbdc} = 0 \\ \mathrm{d}^3\Sigma_3 &= -[\partial(\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \text{const. })/\partial(\mathrm{a},\ \mathrm{b},\mathrm{c})]\mathrm{dadbdc} = 0\end{aligned}$$

Solution 3.31. Let barred coordinates represent an orthonormal frame where the metric is $\eta_{\mu\nu}$. Then $\mathrm{dV} \equiv \mathrm{d}^4\overline{\mathrm{x}} = \det(\partial\overline{\mathrm{x}}/\partial\mathrm{x})\mathrm{d}^4\mathrm{x}$ because the Jacobian determinant relates volumes. Now

$$-\mathrm{g} = -\det\left(\mathrm{g}_{a\beta}\right) = -\det\left(\frac{\partial \mathrm{x}^{\bar{\mu}}}{\partial \mathrm{x}^{\alpha}}\frac{\partial \mathrm{x}^{\bar{\nu}}}{\partial \mathrm{x}^{\beta}}\eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\right) = [\det(\partial\overline{\mathrm{x}}/\partial \mathrm{x})]^2(-\det\eta)$$

so that

$$(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}} = \det(\partial\overline{\mathrm{x}}/\partial \mathrm{x})$$

and hence

$$dV = (-g)^{\frac{1}{2}}d^4x.$$

Solution 3.32. In a comoving local orthonormal frame we have $d^3v = dxdydz$; we want a scalar invariant quantity which reduces to this.

Start with $\mathrm{d}^4\ \mathrm{V} = (-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\mathrm{dxdydxdt}$, a scalar in any frame. Multiply by $\mathrm{u}^0/\mathrm{u}^0 = \mathrm{u}^0/(\mathrm{dt/ds})$ and get

$$d^4V = \left[(-g)^{\frac{1}{2}}u^0dxdydz\right]ds.$$

Since d^4V and ds are invariants, the term in parentheses must also be, and it reduces to $dxdydz$ in a comoving orthonormal frame, so

$$d^3V = (-g)^{\frac{1}{2}}u^0dxdydz.$$

Solution 3.33. Since the contravariant momentum vector P^a transforms just like the contravariant displacement vector x^{α}, the 4 -dimensional momentum element must be of the same form as the invariant 4 -volume element (Problem 3.32), so

$$d^4P = (-g)^{\frac{1}{2}}dP^xdP^ydP^zdP^t.$$

For the 3 -volume element we multiply by a δ-function of the constraint and integrate over P^{t} :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^3\mathrm{P} &= \int \delta\left[\left(-\mathrm{g}_{a\beta}\mathrm{P}^{\alpha}\mathrm{P}^{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} - \mathrm{m}\right](-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\mathrm{dP}^{\mathrm{x}}\mathrm{dP}^{\mathrm{y}}\mathrm{dP}^{z}\mathrm{dP}^{\mathrm{t}} \\ &= (-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\mathrm{dP}^{\mathrm{x}}\mathrm{dP}^{\mathrm{y}}\mathrm{dP}^{z} \times \left[-\frac{1}{2}\left(-\mathrm{g}_{a\beta}\mathrm{P}^{\alpha}\mathrm{P}^{\beta}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2\ \mathrm{g}_{\mathrm{t}\alpha}\mathrm{P}^{\alpha}\right]^{-1}\end{aligned}$$

(Here we have used the identity

$$\int \delta(\mathrm{f}(\mathrm{x}))\mathrm{dx} = \frac{1}{|\mathrm{f}'\left(\mathrm{x}_1\right)|}$$

where x_1 is a zero of f.) Rewriting the term in brackets, we get

$$d^3P = (-g)^{\frac{1}{2}}dP^xdP^ydP^z\left(\frac{m}{-P_t}\right)$$

Notice that in a local orthonormal frame comoving with the particles in momentum space, this reduces to

$$\mathrm{d}^3\mathrm{P} = \mathrm{dP}^{\mathrm{x}}\mathrm{dP}^{\mathrm{y}}\mathrm{dP}^{Z}$$

as it should.

Sometimes d^3P is renormalized by dividing by m. This gives an invariant volume element which is valid for massless particles as well. Solution 3.34. Clearly the number of particles N is invariant. We need to show that $\mathrm{dxdydzdP}^{\mathrm{x}}\mathrm{dP}^{\mathrm{y}}\mathrm{dP}^{z}$ is also invariant. If the particles are moving with 4 -velocity u relative to the observer's xyz coordinate system, he measures an invariant 3 -volume element occupied by them (se. Problem 3.32),

$$d^3V = (-g)^{\frac{1}{2}}u^0dxdydz$$

and an invariant 3-momentum element occupied by them (see Problem 3.3,

$$d^3P = (-g)^{\frac{1}{2}}dP^xdP^ydP^z\left(\frac{-1}{\tilde{u}_0}\right)$$

Since he measures with an orthonormal frame, we have $-g = 1$ and $u^0 - u_0$, so

$$dxdydzdP^xdP^ydP^z = d^3Vd^3P$$

which is an invariant.

Solution 3.35.

(a) Choose a 4-volume bounded by $\mathrm{x}^0_{\mathrm{A}}$, by $\mathrm{x}^0_{\mathrm{B}} > \mathrm{x}^0_{\mathrm{A}}$, and by "side" hypersurfaces at infinite distance from the origin. By Gauss' theorem

$$0 = \int \mathrm{J}^{\alpha}_{,a}\mathrm{d}^4\Omega = \int \mathrm{J}^{\alpha}_{,a}\mathrm{dtdxdydz} = \int \mathrm{J}^{\alpha}\mathrm{d}^3\Sigma_{\alpha}$$

The contributions on the sides can be ignored as they are moved to infinity, so

$$0 = \int_{x_\beta} J^\alpha d^3\Sigma_\alpha + \int_{x_A} J^\alpha d^3\Sigma_\alpha = \int_{x_\beta} J^0 dxdy\ dz - \int_{x_A} J^0 dxdy\ dz$$

(b) The planes $x^0 = $ constant, and $x^0 = $ constant intersect forming two 4-dimensional regions: I and II. Close off these regions with spatial hypersurfaces at infinity forming two bounded 4 -volumes. By Gauss' theorem, for region I

$$0 = \int_I J^\alpha_{,a} d^4\Omega = 0 = \int_{Ix} J^0\ d^3\Sigma_0 - \int_{Ix^{0'}} J^{0'} d^3\Sigma_0$$

$$\int_{Ix} J^0 dxdydz = \int_{Ix} J^{0'} dx'dy'dz'$$

and similarly for region II. The proof is completed by adding the equations Nor the two regions.

13.7.4 4 Electromagnetism

The electromagnetic field is described relativistically by the antimetric electromagnetic field tensor (Maxwell tensor) $F^{\mu\nu}$. In any Wentz frame the components of $F^{\mu\nu}$ are related to the electric and SANCINC field strengths, $\underset{\sim}{E}$ and $\underset{\sim}{B}$, in that frame by

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ -E^x & 0 & B^z & -B^y \\ -E^y & -B^z & 0 & B^x \\ -E^z & B^y & -B^x & 0 \end{bmatrix}.$$

Wre μ is the row index and ν the column index. Maxwell's equations com be written

$$F^{\mu\nu}_{\ \ ,\nu} = 4\pi\ J^\mu$$

$$F_{a\beta,\gamma} + F_{\gamma a,\beta} + F_{\beta\gamma,a} = 0$$

eldere $J^\mu = (\rho, J)$ is the 4 -current density. The Lorent z force law is

$$dp^\mu/d\tau = ek^{\mu\nu}u_\nu$$

Tor a particle of charge e, 4-momentum p and 4-velocity u.
The energy density $\mathfrak{E} = \left(E^2 + B^2\right)/8\pi$, the Poynting energy flux $\underset{\sim}{S} = (E \times B)/4\pi$, and the 3 -dimensional stress-tensor

$$T^{ij} = \left[-\left(E^i E^j + B^i\ B^j\right) + \frac{1}{2}\delta^{ij}\left(E^2 + B^2\right)\right]/4\pi$$

are combined to form the electromagnetic stress-energy tensor

$$\mathbf{T}^{\mu\nu} = \left(\mathbf{F}^{\mu\alpha}\mathbf{F}^\nu_{\ a} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\mathbf{F}^{a\beta}\mathbf{F}_{a\beta}\right)/4\pi$$

Problem 4.1. Find the magnetic field $\underset{\sim}{B}$ from a current I in an infinitely long straight wire, by appropriate Lorentz transformations and superpositions of the electric field of an infinitely long straight charge distribution.

Problem 4.2. For electric and magnetic fields, show that $B^2 - E^2$ and $\underset{\sim}{E} \cdot \underset{\sim}{B}$ are invariant under changes of coordinates and Lorentz transformations. Are there any invariants which are not merely algebraic combinations of these two?

Problem 4.3. A particular electromagnetic field has its E field at an angle θ_0 to its $\underset{\sim}{B}$ field, and θ_0 is invariant to all observers. What is the value of θ_0 ?

Problem 4.4. Show that $\mathcal{E}^2 - |\underset{\sim}{S}|^2$ is a Lorentz invariant of the electromagnetic field, where $\mathcal{E}$ is the energy density and $\underset{\sim}{S}$ the Poynting flux.

Problem 4.5. Prove that except when $(\underset{\sim}{B} \cdot \underset{\sim}{E})^2 + \left(B^2 - E^2\right)^2 = 0$, there is a Lorentz transformation which will make $\underset{\sim}{E}$ and $\underset{\sim}{B}$ parallel $\left(\underset{\sim}{E}' \times \underset{\sim}{B}' = 0\right)$. [Hint: Try $\underset{\sim}{v} = \alpha(\underset{\sim}{E} \times \underset{\sim}{B})$ for some a.]

Problem 4.6. Suppose that $\underset{\sim}{E} \cdot \underset{\sim}{B} = 0$. Show that there is a Lorentz transformation which makes $\underset{\sim}{E} = 0$ if $B^2 - E^2 > 0$, or one that makes $\underset{\sim}{B} = 0$ if $B^2 - E^2 < 0$. What if $B^2 - E^2 = 0$ in addition to $\underset{\sim}{E} \cdot \underset{\sim}{B} = 0$?

Problem 4.7. A collection of charged particles of charges e_i has 3 -velocities $\underset{\sim i}{v}$ and trajectories $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim i}{z}(t)$. The 4 -current has components $J^0 = \sum_i e_i \delta^3\left[\underset{\sim}{x} - \underset{\sim i}{z}(t)\right]; J^i = \sum_k e_k v^i \delta^3\left[\underset{\sim}{x} - \underset{\sim k}{z}(t)\right]$. Show that this can be written $J^\mu = \sum_k \int e_k \delta^4\left[x^\alpha - z^\alpha{}_k(r)\right] u^\mu_k d\tau$ where u^μ_k is the 4-velocity of particle k.

Problem 4.8. Show by explicit examination of components that the equations

$$\mathrm{F}_{\alpha\beta,\gamma}+\mathrm{F}_{\beta\gamma,\alpha}+\mathrm{F}_{\gamma a,\beta}=0 \quad \mathrm{F}^{\alpha\beta}_{\ ,\beta}=4\pi\ \mathrm{J}^{\alpha}$$

reduce to Maxwell's equations:

$$\underset{\sim}{\nabla}\cdot\underset{\sim}{B}=0,\dot{\underset{\sim}{B}}+\underset{\sim}{\nabla}\times\underset{\sim}{E}=0,\underset{\sim}{\nabla}\cdot\underset{\sim}{E}=4\pi\rho,$$

$$\dot{\underset{\sim}{E}}-\underset{\sim}{\nabla}\times\underset{\sim}{B}=-4\pi\underset{\sim}{J}.$$

4. Nem 4.9. If $\mathrm{F}^{\mu\nu}$ is the electromagnetic tensor, show that Maxwell's Nitions in vacuum can be written as $\mathrm{F}^{\mu\nu}_{\ ,\nu}=0$ and $*\,\mathrm{F}^{\mu\nu}_{\ ,\nu}=0$. [Here, is the dual of $\mathrm{F}^{\mu\nu}$; see Problem 3.25.]

Wiem 4.10. Write out the $\mu=0$ component of the Lorentz force equain $\mathrm{du}^{\mu}/\mathrm{d}\tau=(\mathrm{e}/\mathrm{m})\mathrm{F}^{\mu\beta}\mathrm{u}_{\beta}$ expressing $\mathrm{F}^{\mu\nu}$ in terms of $\mathrm{E_i}$ and $\mathrm{B_i}$, itstain

$$\mathrm{dP}^{0}/\mathrm{dt}=\mathrm{e}\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{E}$$

Willem 4.11. From the spatial components of the Lorentz 4-force equaQ. A. find an equation for $\mathrm{d}\underset{\sim}{\mathrm{P}}/\mathrm{dt}$ in terms of $\underset{\sim}{\mathrm{E}}$ and $\underset{\sim}{\mathrm{B}}$. (Here $\underset{\sim}{\mathrm{P}}$ is the Sidial part of P).

Doldem 4.12. A particle of charge q and mass m is coasting through lab with velocity $v\underset{x_x}{e}$ when it encounters a constant $\underset{\sim}{E}$ field in the xirection. Find $y(x)$, the shape of the particle's subsequent motion.

Tostlem 4.13. A particle of charge q, mass m, moves in a circular Sin of radius R in a uniform B field $\mathrm{B}\underset{z_z}{e}$. (a) Find B in terms of cla, q, m and ω, the angular frequency. (b) The speed of the particle is constant since the B field can do no work on the particle. An observer doring at velocity $\beta\underset{\mathrm{e_x}}{\mathrm{e}}$, however, does not see the speed as constant. Wat is $\mathrm{u}^{0'}$ measured by this observer? (c) Calculate $\mathrm{du}^{0'}/\mathrm{d}r$ and thus $\mathrm{ed}^{\mathrm{a}}/\mathrm{d}r$. Explain how the energy of the particle can change since the B deld does no work on it.

Problem 4.14. A small test particle (mass m, positive charge q) makes dicular orbits around a "fixed" (i.e. very massive) body of positive darge Q. A uniform magnetic field $\underset{\sim}{B}$ perpendicular to the orbital plane serves to keep the particle in orbit. In the inertial frame in which the central body is at rest, the test charge is seen to circle in the plane perpendicular to the B field with an angular frequency ω. What is the charge to mass ratio of the test particle in terms of ω, R, B, Q ?

Problem 4.15. Show that the stress-energy tensor for the electromagnetic field is divergenceless (i.e. $\mathrm{T}^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0$) in the absence of charge sources

Problem 4.16. Show that the stress-energy tensor for the electromagnetic field has zero trace.

Problem 4.17. If $\mathrm{T}^{\mu\nu}$ is the stress-energy tensor of the electromagnetic field, show that

$$\mathrm{T}^{\mu}_{a}\mathrm{T}^{a}_{\nu}=\delta^{\mu}_{\nu}\left[\left(\mathrm{E}^2-\mathrm{B}^2\right)^2+(2\mathrm{E}\cdot\ \mathrm{B})^2\right]/(8\pi)^2$$

Problem 4.18. Write Ohm's law $\underset{\sim}{J}=\sigma\underset{\sim}{E}$ invariantly in terms of $J^{\mu}, F^{\mu\nu}\sigma$ and u^{μ} (the 4 -velocity of the conducting element).

Problem 4.19. Derive the Lorentz force law for a charged particle from the action $\int J^{\mu}A_{\mu}d^4x-m\int dr$, where J^{μ} is the 4-current, A_{μ} the vector potential, and $\mathrm{d}\tau^2\equiv-\eta_{\alpha\beta}\mathrm{dx}^{a}\mathrm{dx}\beta$.

Problem 4.20.

(a) Show that $\underset{\sim}{E}\rightarrow-\underset{\sim}{B}$ and $\underset{\sim}{B}\rightarrow\underset{\sim}{E}$ under the "duality transformation" $\mathrm{F}\rightarrow*\,\mathrm{F}$.

(b) Show that if F is a solution of the free-space Maxwell equations so is $*\,\mathrm{F}$ and also $\mathrm{e}^{*a}\ \mathrm{F}\equiv\ \mathrm{F}\cos\alpha+*\,\mathrm{F}\sin\alpha$ for arbitrary a. ($\mathrm{F}\rightarrow\mathrm{e}^{*a}\ \mathrm{F}$ is called a "duality rotation".)

Problem 4.21. If one believes that esthetics should be an important consideration in physical laws, then by symmetry Maxwell's laws should read

$$\mathrm{F}^{\mu\nu}_{\ ,\nu}=4\pi\ \mathrm{J}^{\mu}$$
$$*\,\mathrm{F}^{\mu\nu}_{\ ,\nu}=4\pi\ \mathrm{K}^{\mu}$$

What would the significance of K be?

Problem 4.22. In Minkowski spacetime, there is an electromagnetic current $J^{\mu}\left(x^{\nu}\right)$. Show that the solution to Maxwell's equation is

$$\mathrm{F}^{\mu\nu}\left(\mathrm{x}^{a}\right)=\frac{4}{\pi\mathrm{i}}\int\frac{\mathrm{r}^{[\mu}\mathrm{J}^{\nu]}\mathrm{d}^4\tilde{\mathrm{x}}}{\left(\mathrm{r}_{\sigma}{}^{\sigma}\right)^2}$$

$\mathrm{r}^{\beta}\equiv\mathrm{x}^{\beta}-\mathrm{x}^{\beta}$. (Start by finding a Green's function of $\Box\mathrm{A}^{\mu}=$ (a) How are the retarded boundary conditions specified?

Wom 4.23. Find the equation for the convective time rate of change magnetic field which is "frozen in" a perfectly conducting fluid, in of the expansion, shear, and rotation of the fluid. (See Problem 5.18 Pinitions of these quantities.)

4: Solutions

Solution 4.1. Suppose the wire lies on the z-axis of cylindrical polar coordinates and has proper charge density ρ_0. In the rest frame of the wire $\mathrm{J}^0 = \rho_0$ and $\mathrm{J} = 0$, and from Gauss' law the only nonvanishing component of the field tensor is $E^r = \rho_0 A/2\pi r = F^{0r}$, where A is the cross sectional area of the wire. If the wire is moving in the $+z$ directiod with velocity β relative to the lab, the Lorentz transformation $\Lambda^{0'}{}_0 = \gamma$, $\Lambda^{0'}{}_z = \beta\gamma$ gives

$$\begin{aligned} &\text{gives} \quad \mathrm{J}^{0'} = \gamma\rho_0 \quad \mathrm{J}^{z'} = \beta\gamma\rho_0 \\ &\mathrm{B}^{\hat{\phi}} = \mathrm{F}^{z'\mathrm{r}'} = \Lambda^{z'}{}_0 \, \mathrm{F}^{0\mathrm{r}} = \beta\gamma\rho_0 \, \mathrm{A}/2\pi\mathrm{r} \quad \mathrm{E}^{\mathrm{r}'} = \gamma\rho_0 \, \mathrm{A}/2\pi\mathrm{r} \end{aligned}$$

($B^{\hat{\phi}}$ is the "physical component," i.e. the component related to the unit vector $\mathrm{e}_{\hat{\phi}}$.) If we now superpose the field of a similar wire of charge density $-\gamma\rho_0$, at rest in the lab, the total charge density and $\underset{\sim}{E}$ field both cancel. The current $\mathrm{I} = \int \mathrm{J}^{z'} \mathrm{dxdy} = \beta\gamma\rho_0$ A produces only a B field $B^{\hat{\phi}} = 1/2\pi r$.

Solution 4.2. The invariance of these quantities follows from the fact that they are equal to scalars:

$$\begin{aligned} \mathrm{B}^2 - \mathrm{E}^2 &= \frac{1}{2} \, \mathrm{F}^{\alpha\beta}\mathrm{F}_{\alpha\beta} \\ \underset{\sim}{\mathrm{E}} \cdot \underset{\sim}{\mathrm{B}} = \frac{1}{4} * \, \mathrm{F}_{\alpha\beta}\mathrm{F}^{\alpha\beta} &= \frac{1}{8}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{F}^{\mu\nu}\mathrm{F}^{\alpha\beta} = \det\left(\mathrm{F}^{\mu\nu}\right). \end{aligned}$$

Any invariant must be an invariant for rotations in 3 -space. Thus the invariants can only be constructed from the scalars $\underset{\sim}{E} \cdot \underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{E} \cdot \underset{\sim}{E}$ and $\underset{\sim}{B} \cdot \underset{\sim}{B}$. If there were three independent invariants, then it would follow that e.g. $\underset{\sim}{B} \cdot \underset{\sim}{B}$ would be invariant. This is obviously untrue, since B^2 changes in general under a Lorentz transformation.

Solution 4.3. In any frame the angle is given by

$$\cos\theta_0 = \underset{\sim}{E} \cdot \underset{\sim}{B}/|\mathrm{E}||\mathrm{B}|$$

Now $\underset{\sim}{E} \cdot \underset{\sim}{B}$ is invariant (see Problem 4.2), but $|\mathrm{E}||\mathrm{B}|$ is not. Thus, θ_0 can be invariant if and only if $\underset{\sim}{E} \cdot \underset{\sim}{B} = 0$, i.e. $\theta_0 = \pi/2$.

Solution 4.4. The expression is shown to be invariant by relating it to the invariants $E^2 - B^2$ and $\underset{\sim}{E} \cdot \underset{\sim}{B}$:

$$\begin{aligned} 64\pi\left(\tilde{G}^2 - |\underline{S}|^2\right) &= \left(E^2 + B^2\right)^2 - 4(\underset{\sim}{E} \times \underset{\sim}{B})^2 \\ &= \left[E^4 + 2E^2B^2 + B^4\right] - 4\left[E^2B^2 - (\underset{\sim}{E} \cdot \underset{\sim}{B})^2\right] \\ &= E^4 - 2E^2B^2 + B^4 + 4(\underset{\sim}{E} \cdot \underset{\sim}{B})^2 \\ &= \left(E^2 - B^2\right)^2 + 4(\underset{\sim}{E} \cdot \underset{\sim}{B})^2 \end{aligned}$$

Solution 4.5. Let $\underset{\sim}{v} = a(\underset{\sim}{\mathrm{E}} \times \underset{\sim}{\mathrm{B}})$, then

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{E'}\gamma^{-1} &= \underset{\sim}{E} + \underset{\sim}{v} \times \underset{\sim}{B} = \left(1 - a \, \mathrm{B}^2\right) \underset{\sim}{E} + a(\underset{\sim}{E} \cdot \underset{\sim}{B})\underset{\sim}{B} \\ \underset{\sim}{B'}\gamma^{-1} &= \underset{\sim}{B} - \underset{\sim}{v} \times \underset{\sim}{E} = \left(1 - a\mathrm{E}^2\right) \underset{\sim}{B} + a(\underset{\sim}{E} \cdot \underset{\sim}{B})\underset{\sim}{E}. \end{aligned}$$

Case i) If $\underset{\sim}{E} \cdot \underset{\sim}{B} = 0$ and $|E| = |B|$, the transformation is equivalent to the redshift of a plane wave, and $\underset{\sim}{E}$ and $\underset{\sim}{B}$ cannot be made parallel.

Case ii) If $\underset{\sim}{\mathrm{E}} \cdot \underset{\sim}{\mathrm{B}} = 0$ but $\mathrm{E}^2 \neq \mathrm{B}^2$ choose $\alpha = 1/\max\left(\mathrm{E}^2, \, \mathrm{B}^2\right)$ to make $\underline{E}'$ or $\underline{B}'$ vanish. Then $\underline{E}' \times \underline{B}' = 0$. Case iii) If $\underset{\sim}{E} \cdot \underset{\sim}{B} \neq 0$, then $\underset{\sim}{E'}$ and $\underset{\sim}{B'}$ can be made parallel by choosing α to satisfy $\alpha^2\left[(\underset{\sim}{E} \cdot \underset{\sim}{B})^2 - \mathrm{E}^2 \, \mathrm{B}^2\right] = 1 - \alpha\left(\mathrm{E}^2 + \mathrm{B}^2\right)$, so that

$$\frac{\underset{\sim}{v}}{1 + v^2} = \frac{\alpha(\underset{\sim}{E} \times \underset{\sim}{B})}{1 + \alpha^2[(\underset{\sim}{E} \times \underset{\sim}{B})]^2} = \frac{\alpha(\underset{\sim}{E} \times \underset{\sim}{B})}{1 + \alpha^2\left[\mathrm{E}^2 \, \mathrm{B}^2 - (\underset{\sim}{E} \cdot \underset{\sim}{B})^2\right]} = \frac{\underset{\sim}{E} \times \underset{\sim}{B}}{\mathrm{E}^2 + \mathrm{B}^2}.$$

Solution 4.6. If $\mathrm{E}^2 - \mathrm{B}^2 > 0$ perform a Lorentz transformation with $\underset{\sim}{\mathbf{v}} = \underset{\sim}{\mathbf{E}} \times \underset{\sim}{\mathbf{B}}/\mathrm{E}^2$ to get $\underset{\sim}{B'} = \gamma(\underset{\sim}{\mathbf{B}} - \underset{\sim}{\mathbf{v}} \times \underset{\sim}{\mathbf{E}}) = 0$. The transformation is analogous for $\mathrm{E}^2 - \mathrm{B}^2 < 0$ and $\underset{\sim}{v} = -\underset{\sim}{B} \times \underset{\sim}{E}/\mathrm{B}^2$. If $\mathrm{E}^2 - \mathrm{B}^2 = 0$ then clearly $|E| = |B|$ after any transformation. A transformation of the form (see

Problem 4.5) $\underset{\sim}{\mathrm{v}} = \alpha(\underset{\sim}{\mathrm{E}} \times \underset{\sim}{\mathrm{B}})$ reduces the magnitude of $\underset{\sim}{\mathrm{E}}$ or $\underset{\sim}{\mathrm{B}}$ by a factor $\gamma\left(1 - a\mathrm{E}^2\right) = \gamma(1 - \mathrm{v}) = [(1 - \mathrm{v})/(1 + \mathrm{v})]^{\frac{1}{2}}$. In the limit $\mathrm{v} \to 1$ the magnitude of $\underset{\sim}{E}$ and $\underset{\sim}{B}$ can be made arbitrarily small.

Solution 4.7. The integration in the expression for J^μ can be performed by using

$$\int \mathrm{F}(\tau)\delta\left[\mathrm{t}-z^0(\tau)\right]\mathrm{d}\tau=\int \mathrm{F}(\tau)\delta\left[\mathrm{t}-\mathrm{z}^0(\tau)\right](\mathrm{d}\tau/\mathrm{dt})\mathrm{dt}=\mathrm{F}(\tau[\mathrm{t}])/\mathrm{u}^0$$

The result is

$$J^\mu=\sum_k \frac{u_k^\mu}{u_k^0}e_k\delta^3\left[\underset{\sim}{x}-z_k(t)\right]$$

The time and spatial components obviously reduce to the correct expressions.

Solution 4.8. For this problem it is useful to introduce the totally antisymmetric tensor in three dimensions, ε_{ijk} (with normalization $\varepsilon_{123}=1$). Note that

$$F^{ij}=\varepsilon^{ijk}B_k \quad B^i=\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F_{jk}$$
$$(\underset{\sim}{U}\times\underset{\sim}{V})^i=\varepsilon^{ijk}U^jV^k$$

Now, for the "electric" equations $\mathrm{F}^{\mu\nu}{}_{,\nu}=4\pi\ \mathrm{J}^\mu$:

$$\mathrm{F}^{0\beta}_{\ ,\beta},\ \mathrm{F}^{0\mathrm{i}}_{\ ,\mathrm{i}}=\underset{\sim}{\nabla}\cdot\underset{\sim}{\mathrm{E}}=4\pi\ \mathrm{J}^0=4\pi\rho$$
$$\mathrm{F}^{\mathrm{i}\beta}_{\ ,\beta}=\mathrm{F}^{\mathrm{ij}}_{\ ,\mathrm{j}}+\mathrm{F}^{\mathrm{i}0}_{\ ,0}=\varepsilon^{\mathrm{ijk}}\ \mathrm{B}_{\mathrm{k,j}}-\mathrm{E}^{\mathrm{i}}_{\ ,0}=4\pi\ \mathrm{J}^{\mathrm{i}}.$$

This last equation is the i^{th} component of

$$\underset{\sim}{\nabla}\times\underset{\sim}{B}-\underset{\sim}{\dot{E}}=4\pi\underset{\sim}{J}.$$

In the "magnetic" equations first assume α,β,γ are all spatial. Take $\alpha=1,\beta=2,\gamma=3$.

$$\mathrm{F}_{12,3}+\mathrm{F}_{31,2}+\mathrm{F}_{23,1}=\mathrm{B}^3_{\ ,3}+\mathrm{B}^2_{\ ,2}+\mathrm{B}^1_{\ ,1}=\underset{\sim}{\nabla}\cdot\underset{\sim}{\mathrm{B}}=0$$

Now take $\alpha=0$, and β,γ spatial:

$$\begin{aligned}F_{0i,j}+F_{j0,i}+F_{ij,0}&=E_{i,j}+E_{j,i}+\varepsilon_{ijk}\dot{B}^k\\&=\varepsilon_{ijk}(\underset{\sim}{\nabla}\times\underset{\sim}{E})^k+\varepsilon_{ijk}\dot{B}^k=0\end{aligned}$$

Multiplying this equation by ε^{ijm} gives us $\underset{\sim}{\nabla}\times\underset{\sim}{E}+\underset{\sim}{\dot{B}}=0$.

Solution 4.9. It has already been shown (Problem 4.8) that $\mathrm{F}^{\mu\nu}_{\ ,\nu}=0$ is equivalent to the "electric" Maxwell equations (in vacuum). As for the magnetic equations:

$$\begin{aligned}*\ \mathrm{F}^{\mu\nu}{}_{,\nu}&=\frac{1}{2}\left(\ \mathrm{F}_{a\beta}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\right)_{,\nu}=\frac{1}{2}\ \mathrm{F}_{a\beta,\nu}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\\&=\frac{1}{2}\ \mathrm{F}_{[\alpha\beta,\nu]}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\end{aligned}$$

so that $*\ \mathrm{F}^{\mu\nu}_{\ ,\nu}=0$ is equivalent to $\mathrm{F}_{\alpha\beta,\nu}+\mathrm{F}_{\nu\alpha,\beta}+\mathrm{F}_{\beta\nu,\alpha}=0$.

Solution 4.10. With $\mu=0$ the Lorentz force equation is

$$\mathrm{dP}^0/\mathrm{d}\tau=\mathrm{eF}^{0\mathrm{i}}\mathrm{u}_{\mathbf{i}}=\mathrm{eE}^{\mathrm{i}}\gamma\mathrm{v}_{\mathbf{i}}$$

Since $\mathrm{d}r=\mathrm{dt}/y$ this equation can be written

$$\mathrm{dP}^0/\mathrm{dt}=\mathrm{eE}^{\mathrm{i}}\mathrm{v}_{\mathrm{i}}$$

Note that this differs from the nonrelativistic equation only in that P^0 is the relativistic mass-energy.

Solution 4.11. The spatial components of the Lorentz equation are

$$\frac{dP^i}{d\tau}=\gamma\frac{dP^i}{dt}=qF^{i\mu}u_\mu=qF^{i0}u_0+qF^{ij}u_j=q\gamma E^i+q\gamma\varepsilon^{ijk}B_kv_j$$

so that

$$\mathrm{d}\underset{\sim}{\mathrm{P}}/\mathrm{dt}=\mathrm{q}(\underset{\sim}{\mathrm{E}}+\underset{\sim}{\mathrm{v}}\times\underset{\sim}{\mathrm{B}})$$

Solution 4.12. The only nonzero components of $\mathrm{F}^\mu{}_\nu$ are $\mathrm{F}^{\mathrm{t}}_{\mathrm{y}}=\mathrm{F}^{\mathrm{y}}_{\mathrm{t}}=\mathrm{E}$. The initial 4-velocity u^a of the particle has components ($y, y\mathrm{v}, 0, 0$), $\gamma\equiv\left(1-\mathrm{v}^2\right)^{-\frac{1}{2}}$; the Lorentz force equations

$$\mathrm{dP}^\mu/\mathrm{d}\tau=\mathrm{qF}^\mu_\nu\mathrm{u}^\nu$$

then give us $\mathrm{dP}^{\mathrm{x}}/\mathrm{d}\tau=0$ for $\mu=1$ and hence

$$\mathrm{u^x} = \gamma \mathrm{v} \quad \tau = \mathrm{x}/\gamma \mathrm{v}.$$

The equations for $\mu = 0, 2$,

$$\mathrm{du^t}/\mathrm{d}r = (\mathrm{q}/\mathrm{m})\mathrm{Eu^y} \quad \mathrm{duu^y}/\mathrm{d}r = (\mathrm{q}/\mathrm{m})\mathrm{Eu^t}$$

can be combined to give the equation

$$\mathrm{d^2u^y}/\mathrm{d}\tau^2 = (\mathrm{qE}/\mathrm{m})^2\mathrm{u^y}$$

with the solution

$$\mathrm{u^y} = \gamma \sinh[(\mathrm{qE}/\mathrm{m})r]$$

where the initial conditions on u^t and u^y have been used. Integrating this result with respect to τ, substituting $\tau = \mathrm{x}/\mathrm{yv}$, and using the initial condition $y = 0$ when $x = 0$, gives

$$\mathrm{y} = \left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{qE}}\right)\gamma\left[\cosh\left(\frac{\mathrm{qE}}{\mathrm{m}}\right)\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{v}\gamma} - 1\right].$$

Solution 4.13.
(a) From the Lorentz force equation (see Problem 4.11)

$$\omega \mathrm{p} = |\mathrm{d}\underset{\sim}{\mathrm{p}}/\mathrm{dt}| = \mathrm{qvB}$$

therefore

$$B = \frac{\omega p}{qv} = \frac{m\omega}{q\left(1-v^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{m\omega}{q\left(1-\omega^2R^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

(b) The 4 -velocity components seen in the lab are

$$u^0 = \left(1-\omega^2R^2\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad u^x = \omega y\left(1-\omega^2R^2\right)^{-\frac{1}{2}} \quad u^y = -\omega x\left(1-\omega^2R^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

The components measured by the moving observer are found with a Lorentz transformation, e.g.

$$\mathbf{u}^{0'} = \gamma\left(\mathbf{u}^0 - \beta\mathbf{u}^{\mathbf{x}}\right) = \gamma(1-\beta\omega\mathbf{y})\left(1-\omega^2\mathbf{R}^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

where $\gamma \equiv \left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}$.
(c) Since $\mathrm{u}^{0'}$ is not constant, energy is seen to increase:

$$\frac{d\mathrm{p}^{0'}}{d\tau} = m\frac{d\mathrm{u}^{0'}}{d\tau} = -\frac{m\beta\omega\gamma\mathrm{u^y}}{\left(1-\omega^2\mathrm{R}^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

In the moving observer's frame he observes an $\underset{\sim}{E}$ field $E^{y'} = -\gamma\beta B$. (This is easily computed by Lorentz transforming $\mathrm{F}^{\mu\nu}$.) The observer should then expect to see work being done on the particle at a rate

$$\frac{dp^{0'}}{d\tau} = qE^{y'}u^{y'} = -\frac{m\omega\gamma u^{y'}}{\left(1-\omega^2R^2\right)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{m\omega\gamma u^y}{\left(1-\omega^2R^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

This resolves the "paradox."
Solution 4.14. From the Lorentz force equation (Problem 4.11),

$$\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dt}} = \left(-\mathrm{q}\omega\mathrm{RB} + \frac{\mathrm{qQ}}{\mathrm{R}^2}\right)\underset{\mathrm{e}}{\mathrm{r}} = \mathrm{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(y\underset{\sim}{v}).$$

No work is being done on the particle so $\gamma = \left(1-\omega^2R^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ is a constant. Since $dv/dt = -\omega^2 Re_r$ we have

$$\mathrm{q}\omega\mathrm{RB} - \mathrm{qQ}/\mathrm{R}^2 = \mathrm{m}\omega^2\mathrm{R}/\left(1-\omega^2\mathrm{R}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

and hence

$$\frac{q}{m} = \frac{\omega^2}{\left(1-\omega^2R^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\omega B - Q/R^3\right)}$$

Solution 4.15. The form of the electromagnetic stress-energy is given in the introduction. Taking its divergence we have:

$$
\begin{aligned}
4\pi\ \mathrm{T}^{\mu\nu}_{\ \ ,\nu} &= \mathrm{F}^{\mu a}_{\ \ ,\nu}\ \mathrm{F}^{\nu}_{a} + \mathrm{F}^{\mu a}_{\ \ a,\nu}\ \mathrm{F}^{\nu}_{\ a,\nu} - \frac{1}{2}\ \mathrm{F}_{a\beta}\ \mathrm{F}^{a\beta,\mu} \\
&= \mathrm{F}^{\mu a}\ \mathrm{F}^{\nu}_{\ a,\nu} + \mathrm{F}_{\nu a}\left(\ \mathrm{F}^{\mu a,\nu} - \frac{1}{2}\ \mathrm{F}^{\nu a,\mu}\right) \\
&= \mathrm{F}^{\mu a}\ \mathrm{F}^{\nu}_{\ a,\nu} + \frac{1}{2}\ \mathrm{F}_{\nu a}\left(\ \mathrm{F}^{a\nu,\mu} + \mathrm{F}^{\mu a,\nu} + \mathrm{F}^{\nu\mu,a}\right)
\end{aligned}
$$

According to the free field Maxwell equations, both $\mathrm{F}^{\nu}_{\ a,\nu}$ and the terms in parentheses vanish, hence $\mathrm{T}^{\mu\nu}_{\ \ ,\nu} = 0$. Note: If a charge current $\mathbf{J}$ is present this result is modified to $\mathrm{T}^{\mu\nu}_{\ \ ,\nu} = -\mathrm{F}^{\mu a}\ \mathrm{J}_{\alpha}$, as is easily verified.

Solution 4.16. From the stress-energy $\mathrm{T}^{\mu\nu} = (1/4\pi)\left(\mathrm{F}^{\mu\alpha}\mathrm{F}^{\nu}_{\ \alpha} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\mathrm{F}_{\alpha\beta}\mathrm{F}^{\alpha\beta}\right)$ the trace is easily computed to be

$$
\mathrm{T}^{\mu}_{\mu} = (1/4\pi)\left(\mathrm{F}^{\mu\alpha}\mathrm{F}_{\mu\alpha} - \frac{1}{4}\cdot 4\cdot\ \mathrm{F}_{\alpha\beta}\mathrm{F}^{\alpha\beta}\right) = 0.
$$

Solution 4.17. It is sufficient to show that this relation is true in one frame.

Case 1: $\mathrm{E}^2 = \mathrm{B}^2, \underset{\sim}{\mathrm{E}}\cdot\underset{\sim}{\mathrm{B}} = 0$.

Choose $\underset{\sim}{E} = \varepsilon\underset{\sim}{e}_{\mathrm{x}}, \underset{\sim}{B} = \varepsilon\underset{\sim}{e}_{\mathrm{y}}$; then the only nonvanishing components of $\mathrm{T}^{\mu\nu}$ are $\mathrm{T}^{00} = \mathrm{T}^{0z} = \mathrm{T}^{zz} = \varepsilon^2/4\pi$ from which it follows that $\mathrm{T}^{\mu}_{\ a}\ \mathrm{T}^{a}_{\ \nu} = 0$.

$$
\text{Case 2: } \left(E^2 - B^2\right)^2 + (\underset{\sim}{E}\cdot\underset{\sim}{B})^2 \neq 0
$$

From Problem 4.5 we can make $\underset{\sim}{E}$ and $\underset{\sim}{B}$ parallel. Choose $\underset{\sim}{E} = E\underset{\sim x}{e}$, $\underset{\sim}{B} = B\underset{\sim x}{e}$. The nonvanishing components of the stress-energy are then $\mathrm{T}^{00} = -\mathrm{T}^{\mathrm{xx}} = \mathrm{T}^{\mathrm{yy}} = \mathrm{T}^{zz} = (1/8\pi)\left(\mathrm{E}^2 + \mathrm{B}^2\right)$ and

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}^{\mu}_{a}\mathrm{T}^{\alpha}_{\nu} &= \delta^{\mu}_{\nu}\left[\mathrm{E}^2 + \mathrm{B}^2\right]^2/(8\pi)^2 = \delta^{\mu}_{\nu}\left[\left(\mathrm{E}^2 - \mathrm{B}^2\right)^2 + 4\mathrm{E}^2\ \mathrm{B}^2\right]/(8\pi)^2 \\
&= \delta^{\mu}_{\nu}\left[\left(\mathrm{E}^2 - \mathrm{B}^2\right)^2 + (2\mathrm{E}\cdot\ \mathrm{B})^2\right]/(8\pi)^2
\end{aligned}
$$

Solution 4.18. If u^{μ} is the 4 -velocity of the conducting element, then the $\underset{\sim}{E}$ field seen by charge carriers in the conducting element is $E^{\mu} = \mathrm{F}^{\mu}_{\ \nu}\mathrm{u}^{\nu}$. A vector which reduces to $\underset{\sim}{\mathrm{J}}$ in the rest frame of the charge carriers is $\mathrm{J}^{\mu} + \mathrm{u}^{\mu}\mathrm{J}_{\nu}\mathrm{u}^{\nu}$. Ohm's equation can then be written as
$\mathrm{J}^{\mu} + \mathrm{u}^{\mu}\mathrm{J}_{\nu}\mathrm{u}^{\nu} = \sigma\mathrm{F}^{\mu}_{\ \nu}\mathrm{u}^{\nu}$. Since this is a tensor equation and is correct in the rest frame of the conducting element, it must be correct in all frames.

Solution 4.19. From Problem 4.7 we know that, for a particle of charge q

$$
\mathrm{J}^{\mu}(\mathrm{x}) = \mathrm{q}\int \delta^4(\mathrm{x} - \mathrm{z}[\tau])\mathrm{u}^{\mu}\mathrm{d}\tau
$$

so that the action can be written as

$$
\int \mathrm{L}dr = \mathrm{q}\int \mathrm{u}^{\mu}\mathrm{A}_{\mu}\mathrm{d}r - \mathrm{m}\int\ \mathrm{d}r
$$

and the Lagrangian is:

$$
\mathrm{L} = \mathrm{qu}^{\mu}\mathrm{A}_{\mu} - \mathrm{m}\left(-\eta_{a\beta}\mathrm{u}^{\alpha}\mathrm{u}^{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}
$$

The coordinates z^{λ}. specify the position of the particle parametrized by r and

$$
\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\left(\ \mathrm{d}z^{\lambda}/\mathrm{d}r\right)} = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{u}^{\lambda}} = \mathrm{qA}_{\lambda} + \mathrm{mu}_{\lambda}
$$

The Euler-Lagrange equations then give us

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\partial\ \mathrm{L}}{\partial \mathbf{u}^{\lambda}}\right) = \mathrm{qA}_{\lambda,\mu}\frac{\mathrm{d}z^{\mu}}{\mathrm{d}r} + \mathrm{m}\frac{\mathrm{du}_{\lambda}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}^{\lambda}}\mathrm{L} = \mathrm{qu}^{\mu}\mathrm{A}_{\mu,\lambda}
$$

so that the equations of motion are

$$
\begin{gathered}
\mathrm{mdu}_{\lambda}/\mathrm{d}r = \mathrm{q}\left(\ \mathrm{A}_{\mu,\lambda} - \mathrm{A}_{\lambda,\mu}\right)\mathrm{u}^{\mu} \\
\mathrm{dp}_{\lambda}/\mathrm{d}r = \mathrm{qF}_{\lambda\mu}\mathrm{u}^{\mu}
\end{gathered}
$$

Solution 4.20.

(a) From the form of $\mathrm{F}^{\mu\nu}$ in terms of $\underset{\sim}{\mathrm{E}}$ and $\underset{\sim}{\mathrm{B}}$ (see the introduction to this chapter) and from the definition for $*F$ (see Problem 3.25) we have

$$
\begin{aligned}
* \mathrm{F}^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\mathrm{F}_{\mu\nu} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{B}^{\mathrm{x}} & -\mathrm{B}^{\mathrm{y}} & -\mathrm{B}^{z} \\ \mathrm{B}^{\mathrm{x}} & 0 & \mathrm{E}^{z} & -\mathrm{E}^{\mathrm{y}} \\ \mathrm{B}^{\mathrm{y}} & -\mathrm{E}^{z} & 0 & \mathrm{E}^{\mathrm{x}} \\ \mathrm{B}^{z} & \mathrm{E}^{\mathrm{y}} & -\mathrm{E}^{\mathrm{x}} & 0 \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

therefore $\mathrm{F} \rightarrow * \mathrm{F}$ corresponds to $\underset{\sim}{\mathrm{E}} \rightarrow -\underset{\sim}{\mathrm{B}}$ and $\underset{\sim}{\mathrm{B}} \rightarrow \underset{\sim}{\mathrm{E}}$.

(b) [Note: Since $*(* \mathrm{F}) = -\mathrm{F}$, if we treat $*$ as an operator it has the same algebraic properties as i, hence we write $e^{*a}F = F\cos a + * \mathrm{F}\sin\alpha$.] According to Problem 4.9 Maxwell's equations, in the absence of sources, are

$$
*\mathbf{F}^{\mu\nu}_{,\nu} = 0 \quad \mathbf{F}^{\mu\nu}_{,\nu} = 0
$$

Clearly the transformation $\mathbf{F} \rightarrow *\mathbf{F}$ leaves these equations invariant i.e. $*$ F is a solution if F is. Since the equations are linear, a linear combination such as $e^{*\alpha}$ F must also satisfy the equations.

Solution 4.21. Since we know that $\mathbf{F} \rightarrow *\mathbf{F}$ under the transformation

$$
\underset{\sim}{E} \rightarrow -\underset{\sim}{B}; \quad \underset{\sim}{B} \rightarrow \underset{\sim}{E},
$$

then K would be interpreted as (minus) a charge-current of "magnetic charge." Note that by the $\mathrm{F} \leftrightarrow * \mathrm{F}$ duality $\underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{B} = -4\pi\ \mathrm{K}^0$ implies the existence of magnetic monopoles.

Solution 4.22. In 4-dimensional Euclidean space described with cartesian coordinates $x^i (i = 1, \cdots, 4)$, consider the function $G = 1/\sum_i \left(x^i\right)^2$. It is straightforward to show that $\nabla^2 \mathrm{G} \equiv \sum_{\mathrm{i}} \partial^2 \mathrm{G}/\partial \mathrm{x}^{\mathrm{i}^2} = 0$ except possibly at the point $x^i = 0$.

If we introduce 4 -dimensional spherical coordinates

$$
x^4 = U\cos V, r = U\sin V \quad (0 \leq U < \infty, 0 \leq V \leq \pi)
$$

$$
\theta = \theta \quad \phi = \phi
$$

then $\mathrm{G} = \mathrm{U}^{-2}$. The integral $\int \nabla^2 \mathrm{G} \mathrm{d}^4\mathrm{x}$ can easily be written in 4 -spherical coordinates. If the 4 -volume is taken to be the pseudospherical region $\mathrm{U} \leq \mathrm{U}_0$, the volume integral can be converted into a surface integral on the 3-spherical surface $\mathrm{U} = \mathrm{U}_0$

$$
\int_{U \leq U^0} \dot{\nabla}^2 G d^4x = \int_0^\pi dV \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \left(\frac{\partial G}{\partial U}\right) V^3 \sin^2 V \sin\theta = -4\pi^2
$$

It follows therefore that $\nabla^2 \mathrm{G} = -4\pi^2 \delta\left(\mathrm{x}^1\right) \delta\left(\mathrm{x}^2\right) \delta\left(\mathrm{x}^3\right) \delta\left(\mathrm{x}^4\right)$ and that we can therefore use G as a Green's function to solve the 4 -dimensional Poisson problem $\nabla^2 \Phi = -4\pi f\left(x^i\right)$ as

$$
\Phi\left(x^i\right) = \frac{1}{\pi} \int \frac{f\left(\zeta^i\right) d^4\zeta}{\sum_i \left(\zeta^i - x^i\right)^2}
$$

Now suppose that f is somehow defined for imaginary ζ^4. Introduce new variables $\zeta^4 = \tilde{x}^4$, and $\zeta^i = \tilde{x}^i, i = 1, 2, 3$. Define S such that

$$
f\left(\zeta^i\right) = S\left(x^i\right)
$$

Notice now that $\nabla^2 \Phi = -4\pi f\left(x^i\right)$ becomes $\Box \Phi = -4\pi S\left(x^1, x^2, x^3, t\right)$. The solution to this problem is the above integral. If we transform variables we have

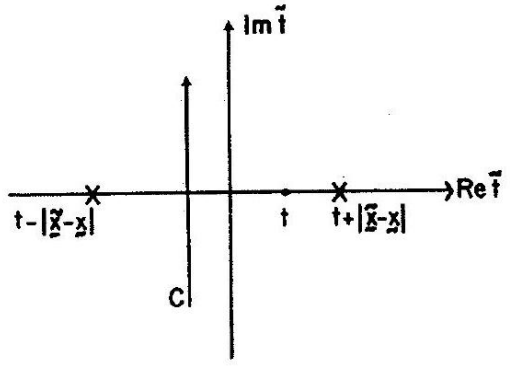
$$
\Phi(\underset{\sim}{x}, t) = \frac{-i}{\pi} \int \frac{S(\hat{x}, \hat{t}) d^3\hat{x} d\hat{t}}{\eta_{\mu\nu}\left(\hat{x}^\mu - x^\mu\right)\left(\hat{x}^\nu - x^\nu\right)}
$$

where it is understood that the t integration extends from $\mathrm{i}\infty$ to $-\mathrm{i}\infty$. Assume that $S(\underset{\sim}{x}, \hat{t})$, the source term in the d'Alembertian equation, is defined and has no poles on the real $\hat{t}$ axis for $\hat{t} < t$. Take the definition of S elsewhere in the complex $\hat{t}$ plane to be defined by analytic continuation. The contour of integration is shown as C in Figure 1. The boundary conditions are specified by how the contour C is deformed to run along the real axis where the source $S(\underset{\sim}{x}, \hat{t})$ is defined. The poles of

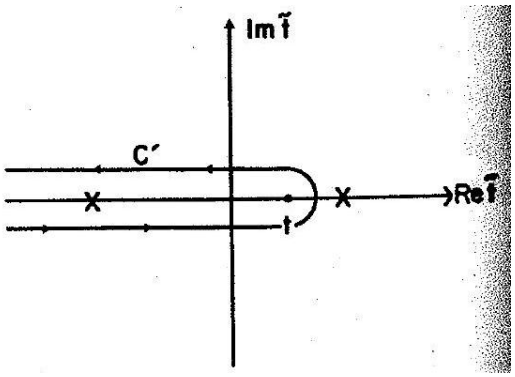
$1/\left(\hat{x}^\mu - x^\mu\right)\left(\hat{x}_\mu - x_\mu\right)$ are at $\hat{t} = t \pm |\underset{\sim}{\hat{x}} - \underset{\sim}{x}|$. Retarded boundary conditions correspond to deforming C into C' in Figure 2. This can be verified by using the above result to solve

$$
\Box A_\mu = -4\pi J_\mu.
$$

We get:



(a)



(b)

$$\mathrm{A}_{\mu}\left(\mathrm{x}^{a}\right)=\frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_{\mathrm{C}^{\prime}} \frac{\mathrm{J}_{\mu}\left(\hat{\mathrm{x}}^{\alpha}\right) \mathrm{d}^{4} \hat{\mathrm{x}}}{\mathrm{r}_{\sigma} \mathrm{r}^{\sigma}}$$

We now show that this reduces to the familiar retarded integral solution by performing the integral over dt :

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_{\mu}(\underline{\mathrm{x}}, \mathrm{t}) &=-\frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int \frac{\mathrm{J}_{\mu}(\hat{\mathrm{x}}, \hat{\mathrm{t}}) \mathrm{d}^{3} \hat{\mathrm{x}} \mathrm{dt}}{(\hat{\mathrm{t}}-\mathrm{t}-|\underline{\hat{x}}-\underline{\mathrm{x}}|)(\hat{\mathrm{t}}-\mathrm{t}+|\underline{\hat{x}}-\underline{\mathrm{x}}|)} \\ &=-\frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int 2 \pi \mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{J}_{\mu}(\hat{\mathrm{x}}, \hat{\mathrm{t}}) \mathrm{d}^{3} \hat{\mathrm{x}}}{\hat{\mathrm{t}}-\mathrm{t}-|\underline{\hat{x}}-\underline{\mathrm{x}}|}\right]_{\hat{\mathrm{t}}=\mathrm{t}-|\underline{\hat{x}}-\underline{\mathrm{x}}|}=\int \frac{\mathrm{J}_{\mu}(\hat{\mathrm{x}}, \mathrm{t}-|\underline{\hat{x}}-\underline{\mathrm{x}}|) \mathrm{d}^{3} \hat{\mathrm{x}}}{|\underline{\hat{x}}-\underline{\mathrm{x}}|}\end{aligned}$$

Since $\partial\left(\mathrm{r}_{\sigma} \mathrm{r}^{\sigma}\right)^{-1} / \partial \mathrm{x}^{\nu}=-2 \mathrm{x}^{\nu}\left(\mathrm{r}_{\sigma} \mathrm{r}^{\sigma}\right)^{-2}$, a formal expression for the field tensor is

$$\mathrm{F}_{\mu \nu}=2 \mathrm{~A}_{[\nu, \mu]}=\frac{4}{\pi \mathrm{i}} \int \frac{\mathrm{x}\left[\nu \mathrm{~J}_{\mu}\right]^{(\hat{\mathrm{x}}^{\alpha}) \mathrm{d}^{4} \hat{\mathrm{x}}}}{\left(\mathrm{r}_{\sigma} \mathrm{r}^{\sigma}\right)^{2}}.$$

Solution 4.23. Since the conductivity is infinite, the Lorentz force on a charge carrier must be zero, so $\underset{\sim}{E}+\underset{\sim}{v} \times \underset{\sim}{B}=0$. Maxwell's equation $\underset{\sim}{\mathbf{B}}=-\underset{\sim}{\nabla} \times \underset{\sim}{\mathbf{E}}$ gives

$$\dot{B}=\underset{\sim}{\nabla} \times(\underset{\sim}{v} \times \underset{\sim}{B})=-\underset{\sim}{B}(\underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{v})+(\underset{\sim}{B} \cdot \underset{\sim}{\nabla}) \underset{\sim}{v}-(\underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{\nabla}) \underset{\sim}{B}. \tag{1}$$

If we now specialize to the instantaneous rest frame of the fluid, $\underset{\sim}{v}=0$, $t=\tau$ (proper time), then $\gamma=1$ and has vanishing first derivatives, and $\partial / \partial \mathrm{t}$ becomes $\partial / \partial \tau$ (i.e. the convective derivative and the partial derivative are equal), so

$$dB^{i} / dr=-B^{i} v_{,j}^{j}+B^{j} v_{,j}^{i}=-B^{i} u_{,j}^{j}+B^{j} u_{,j}^{i}.$$

Since $u_{,j}^{i}$ is the projection perpendicular to u, of $u_{,\nu}^{\mu}$ it follows that

$$\mathrm{u}_{\mathrm{i,j}}=\omega_{\mathrm{ij}}+\sigma_{\mathrm{ij}}+\frac{1}{3} \mathrm{~g}_{\mathrm{ij}} \theta.$$

The contraction of this 3-tensor is of course $u^i_{,i} = \theta$ and the proper time derivative of B is then

$$\mathrm{dB^i/d}r = -\mathrm{B^i}\theta + \mathrm{B_j}\left(\omega^{\mathrm{ij}} + \sigma^{\mathrm{ij}} + \frac{1}{3}\,\mathrm{g^{ij}}\theta\right) = -\frac{2}{3}\,\mathrm{B^i}\theta + \left(\sigma^{\mathrm{ij}} + \omega^{\mathrm{ij}}\right)\mathrm{B_j}. \tag{2}$$

To Equation (2) may be added any term proportional to the spatial component of the 4 -velocity (since that vanishes in the comoving frame). Thus write Equation (2) as

$$\mathrm{dB^i/d}\tau = -\frac{2}{3}\,\mathrm{B^i}\theta + \left(\sigma^{\mathrm{ij}} + \omega^{\mathrm{ij}}\right)\mathrm{B_j} + \mathrm{fu^i} \tag{3}$$

where f is as yet arbitrary. Now transform Equation (2) into a tensor equation by
(a) Letting indices run from $0-3$ instead of just 1-3;
(b) Defining a 4 -vector B^α by $B^\alpha u_\alpha = 0$ and the spatial part of B equal in the comoving frame to $\underset{\sim}{B}$;
(c) Changing ordinary derivatives to covariant derivatives;
(d) Defining f so that $d(B\cdot u)/dr = 0$, i.e. so that the normalization of $\mathbf{B}$ is preserved.
The unique equation satisfying (a), (b), (c), (d) is

$$\mathrm{DB^\alpha/d}\tau = \mathrm{u^\alpha}_\beta\mathrm{B^\beta} + \left(\omega^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta}\right)\mathrm{B}_\beta - \frac{2}{3}\theta\mathrm{P^\alpha_\beta B^\beta} \tag{4}$$

where a is the 4-acceleration, and $\mathrm{P}^\alpha\beta$ is the projection operator defined in Problem 5.18. Equation (4) is obviously a tensor equation and

13.7.5 5 Matter and Radiation

A proper description of the energy, momentum and stress of a relativistic fluid or field uses the symmetric tensor T , the stress-energy tenso (also called the energy-momentum tensor). The components of this tensor in the Lorentz frame of an observer are related to the measurements made by that observer in the following way:
$\mathrm{T^{00}} \equiv$ density of mass-energy (often denoted ρ).
$\mathrm{T^{0j}} = \mathrm{T^{j0}} \equiv$ j-component of momentum-density
= j-component of energy-flux
$T^{ij} \equiv$ components of the ordinary stress tensor (e.g. $T^{xx} = x$-compone of pressure).
If $\mathrm{T}^{\mu\nu}$ describes all fields, fluids, particles etc. present in a system the interrelation of momentum flow and energy change is summarized by th equations of motion:

$$\mathrm{T^{\mu\nu}}_{,\nu} = 0$$

The basic concepts of relativistic thermodynamics and hydrodynamics which follow from this are developed in the problems.
With a view to developments later in the book, several problems in this chapter use covariant differentiation, denoted by a semicolon. The reader not yet familiar with this may replace all semicolons by commas (partial differentiation in Minkowski coordinates). Also, the ∇ notation is introduced; e.g. ∇S for $\mathrm{S^\alpha_{;\beta}}\nabla$f for $\mathrm{f}_{,\alpha}, \nabla\cdot\mathrm{T}$ for $\mathrm{T^{\mu\nu}_{;\nu}}$, etc.

295.1. Calculate the nonzero components in an inertial frame S of wess-energy tensor for the following systems:
(9) A group of particles all moving with the same velocity $\underset{\sim}{\beta} = \beta\underset{\sim}{e}_{\mathrm{x}}$ as if S. Let the rest-mass density of these particles be ρ_0 as and in their comoving frame. Assume a high. density of particles and flem in the continuum approximation.
(1). A ring of N similar particles of mass m rotating counter-
drise in the $x-y$ plane about some point fixed in S at a radius a eqular velocity ω. (The width of the ring is much less than a.) Do clude the stress-energy of whatever forces keep them in orbit. Assume
Delarge enough that one can treat the particles as being continuously mbuted.
(c) Two such rings of particles, one rotating clockwise, the other wer-clockwise, at the same radius a. The particles do not collide or wact with each other in any way.
Whem 5.2. What is the stress energy of a gas with a proper number Imsuity (i.e. number density as measured in the local rest frame of the gas) Id di noninteracting particles of mass m, if the particles all have the Dive speed v but move isotropically? (Do not assume $\mathrm{v} \ll \mathrm{c}$.)
Thedem 5.3. In the rest frame of a perfect fluid its stress energy tensor, terms of mass-energy density ρ and pressure p, is the diagonal tensor

$$\mathrm{T^{\mu\nu}} = \begin{bmatrix} \rho & & & 0 \\ & \mathrm{p} & & \\ & & \mathrm{p} & \\ 0 & & & \mathrm{p} \end{bmatrix}.$$

Q 2 , fluid element of proper density and pressure, ρ and p is moving with 4 -velocity u, what is its stress-energy?
Thoblem 5.4. Find the stress-energy tensor for a uniform magnetic field. What is the average stress-energy if the B field is static but "chaotic" Ee the direction of the B field varies, and is isotropic on the average?

Problem 5.5. A rod has cross sectional area A and mass per unit length μ. Write down the stress-energy tensor inside the rod when the rod is under a tension F. (Assume that the tension is uniformly distributed over the cross section.)

Problem 5.6. A rope of mass per unit length μ hals a static breaking strength F . What is the maximum F can be without violating the "weak energy condition that T^{00} should be positive to all observers? How clos is steel cable to this theoretical maximum strength?

Problem 5.7. An infinitesimally thin rod of length $2a$ has a point mass: at each of its ends. The center of the rod is fixed in the laboratory and the rod rotates about this point with a relativistic angular velocity ω. (i.e. $\omega\ell$ is comparable with c). Assume the rod is massless. What is $\mathrm{T}^{\mu\nu}$ for the rod and particle system?

Problem 5.8. A parallel plate capacitor consists of two large plates of area A, perpendicular to the x-direction, separated by a small distance The capacitor is charged so that a uniform electric field of magnitude E is present between the plates; fringe effects at the edge of the plate can be neglected. The "electrostatic mass" of this capacitor is $\mathrm{E}^2\mathrm{Ad}/8\pi$ in the rest frame of the capacitor. Show that the electrostatic energy is smaller if the capacitor is moving in the x-direction! Consider now that the plates must be held apart. Let the plates be held apart by an ideal gas of proper density ρ_0. Show that the total energy (electrostatic + gas) of the capacitor increases with velocity in the x-direction in precisely the same manner that the energy of a point mass does.

Problem 5.9. Consider a system of discrete particles of charge $\mathrm{q_i}$ and mass m_i interacting through electromagnetic forces. From the explicit expression for $\mathrm{T}^{\mu\nu}$ of the particles show that the total $\mathrm{T}^{\mu\nu}$ (particles plus field) is conserved, i.e. that $\mathrm{T}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$.

A B Tear 5.10. The specific intensity I_ν of radiation measures the in2 of radiation at a particular frequency ν in a particular direction. Elined as the flux per unit frequency interval, per unit solid angle. that I_ν/ν^3 is a Lorentz invariant.

4. 1 == 5.11. A star emits radiation isotropically in its own rest frame, laminosity L (energy per unit time). At a particular instant, as med from the earth, the star is at a distance R, and is moving with Weity v which makes an angle θ with respect to the direction from anth to the star. What is the flux of radiation (energy per unit time Wit area) seen by an observer on the earth in terms of R, v and θ dited at the instant the radiation was emitted?

Em 5.12. Consider a spherical particle of mass m which scatters Electromagnetic radiation incident on it, isotropically in its rest frame. A be the effective cross sectional area of the particle. Find the dion of motion of the particle in a constant radiation field of intensity Weargy per time per area), and solve it for the case of a particle initially Emst. (Poynting-Robertson effect).

develem 5.13. A thermally-conducting black sphere with a thermometer seched moves with velocity v through a black body radiation field of Amperature T_0. What does the thermometer read?

Xiablem 5.14. In an electron gas of temperature $\mathrm{T} \ll \mathrm{m_e c^2/k}$ a photon energy $E \ll m_e c^2$ undergoes collisions and is Compton scattered.

Sow that, to lowest order in E and T the average energy lost by a Pooton in a collision is

$$\langle \Delta E \rangle = \left(E/m_e c^2\right)(E - 4kT)$$

Troblem 5.15. Show that in special relativity the stress-energy of an isolated physical system of finite extent obeys the tensor virial theorem

$$\int T^{ij} d^3x = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\int T^{00} x^i x^j d^3x$$

Problem 5.16. Show that the stress-energy tensor $\mathrm{T}^{\mu\nu}$ has a timelike eigenvector if and only if there is a physical observer who sees no net energy flux in any direction. What is the significance of the eigenvalue?

Problem 5.17.

(a) Consider a stressed medium which moves through a particular inertial frame with velocity $|\underline{v}| \ll 1$. Show that to first order in the velocity, the spatial components of the momentum density are

$$g^j = m^{jk} v^k,$$

where m^{jk}, the "inertial mass per unit volume" is

$$\mathrm{m^{jk}} = \mathrm{T^{0'0'}}\delta^{\mathrm{jk}} + \mathrm{T^{j'k'}}$$

in terms of $T^{\mu'}\nu'$, the components of the stress-energy in the rest frame of the medium. What is $\mathrm{m^{jk}}$ for a perfect fluid?

(b) Consider an isolated, stressed body at rest and in equilibrium ($\mathrm{T}^{\alpha\beta}, 0 = 0$) in the laboratory frame. Show that its total inertial mass, defined by

$$M^{ij} \equiv \int_{\substack{\text{stressed}\\ \text{body}}} m^{ij} dxdydz$$

is isotropic and equals the rest mass of the body, i.e. show that

$$M^{ij} = \delta^{ij}\int T^{00} dxdydz$$

Problem 5.18. If $\mathbf{u}$ is the 4 -velocity of a fluid show that $\nabla\mathbf{u}$ can be decomposed as

$$\mathrm{u}_{a;\beta} = \omega_{a\beta} + \sigma_{a\beta} + \frac{1}{3}\theta \mathrm{P}_{a\beta} - \mathrm{a}_a \mathrm{u}_\beta$$

where a is the "4-acceleration" of the fluid

$$\mathrm{a}_a \equiv \mathrm{u}_{a;\beta}\mathrm{u}^\beta$$

θ is the "expansion" of the fluid world lines

$$\theta \equiv \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}^a_{;a}$$

is the "rotation 2-form" of the fluid, and $\sigma_{\alpha\beta}$ is the "shear

$$\omega_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}\left(\mathrm{u}_{a;\mu}\mathrm{p}^\mu_\beta - \mathrm{u}_{\beta;\mu}\mathrm{p}^\mu_\alpha\right)$$
$$\sigma_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}\left(\mathrm{u}_{a;\mu}\mathrm{p}^\mu_\beta + \mathrm{u}_{\beta;\mu}\mathrm{p}^\mu_\alpha\right) - \frac{1}{3}\theta \mathrm{P}_{\alpha\beta}$$

P is the projection tensor

$$\mathrm{P}_{\alpha\beta} \equiv \mathrm{g}_{\alpha\beta} + \mathrm{u}_\alpha \mathrm{u}_\beta$$

projects a vector onto the 3 -surface perpendicular to $\mathbf{u}$.

Whem 5.19. Write the first law of thermodynamics for a relativistic (i.e. Write the law of conservation of mass-energy for a fluid ducit.)

Toletem 5.20. Use the equations of motion ($\mathrm{T}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$) to show that the of a perfect fluid is isentropic.

Wotem 5.21. For a perfect fluid with equation of state $\rho = \rho(\mathrm{n})$ (where Daryon density) show that $T^\mu{}_\mu$, the trace of the stress-energy tensor Anergative if and only if

$$\mathrm{d}\log\rho/\mathrm{d}\log\mathrm{n} < 4/3$$

8. 8 lem 5.22. Show that the velocity of sound v_s in a relativistic perfluid is given by

$$\mathrm{v}_\mathrm{s}^2 = \partial\mathrm{p}/\,\partial\rho|_{\mathrm{s=constant}}\,.$$

For a high temperature relativistic gas with an equation of state $\rho \approx 3\mathrm{P}$ Essentially that for a photon gas) show that $v_s \approx 1/\sqrt{3}$.

froblem 5.23. The velocity of sound in a fluid is $\mathrm{v}_\mathrm{s}^2 = \partial\mathrm{p}/\,\partial\rho|_{\mathrm{s=\ constant}}$. Stow that $\mathrm{v}_\mathrm{s}^2 = \Gamma_1\mathrm{p}/(\rho + \mathrm{p})$ where Γ_1 is the adiabatic index

$$\Gamma_1 = \partial\log p/\,\partial\log n|_{s=cons\tan t}\,.$$

Problem 5.24. What is the speed of sound in an ideal Fermi gas at zero temperature?

Problem 5.25. A relativistic wind tunnel is to be fed from a tank of perfect adiabatic compressed gas. Suppose the gas has an equation of state $p \propto n$ with γ constant, and the speed of sound in the tank is a. What is the largest wind velocity $v_{\max}$ which can be obtained? (No gravitational forces; isentropic flow.)

Problem 5.26. An idealized description of heat flow in a fluid uses the heat flux 4 -vector q with components in the fluid rest frame $q^0 = 0$, $q^j =$ (energy per unit time crossing a unit surface perpendicular to e_j, in the positive j direction). What is the stress-energy tensor associated with the heat flow?

Problem 5.27. Let s, n and q be respectively entropy per baryon, number density of baryons, and heat flux, all measured in the proper frame of the fluid. In this proper frame q is purely spatial. Let S be the entropy density-flux 4 -vector. Show that

$$\mathrm{S} = \mathrm{nsu} + \mathrm{q/T}$$

where $\mathbf{u}$ is the 4 -velocity of the fluid rest frame.

Problem 5.28. A fluid is "perfect" except for admitting some heat conduction, described by a heat flow 4 -vector q. Calculate the local rate of entropy generation $\nabla \cdot S$.

Problem 5.29. In a uniformly accelerating system, show that the condition for thermal equilibrium is not $T = \text{constant} = T_0$ but rather is

$$T = T_0 \exp(-\underline{a} \cdot \underline{x})$$

where x is coordinate position in the accelerating frame.

Problem 5.$\widetilde{30}$. The stress energy tensor of a viscous fluid is

$$\mathrm{T}^{a\beta} = \rho \mathrm{u}^a \mathrm{u}^\beta + \mathrm{p}^{\alpha\beta} - 2\eta\sigma^{\alpha\beta} - \zeta\theta\mathrm{p}^{\alpha\beta}$$

If and ζ are respectively the coefficients of shear and bulk Encity. The definitions of $\sigma^{\alpha\beta}, \theta, \mathrm{p}^{\alpha\beta}$ are those of Problem 5.18. Wessure and density are p and ρ. Show that the viscous terms Wothe production of entropy at a rate

$$\mathrm{S}^{\alpha}_{;\alpha} = \left(\zeta\theta^2 + 2\eta\sigma_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}\right)/\mathrm{T}$$

I , is the temperature of the fluid. (Hint: First show that $\mathrm{S}^{a}{}_{;a} = \mathrm{I}^{\mathrm{t}}, \theta(\rho + \mathrm{p})]/\mathrm{T}$ for a fluid without heat flow, then differentiate $\rho \mathrm{u}^{\beta} =$ to get $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}r$.)
5.31. From the stress-energy

$$\mathrm{T}^{\alpha\beta} = \rho \mathrm{u}^{\alpha}\mathrm{u}^{\beta} + \mathrm{pP}^{\alpha\beta} - 2\eta\sigma^{\alpha\beta} - \zeta\theta\mathrm{P}^{\alpha\beta}$$

that the equations of motion derived from $\mathrm{T}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$ reduce to the 2− Stokes equations in the nonrelativistic limit.
5.32. As in non-relativistic thermodynamics, one defines the Stic heat of a gas at constant volume and constant pressure by

$$\mathrm{c_v} = \mathrm{T}\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dT}}\bigg|_{\mathrm{n}} \quad \mathrm{c_p} = \mathrm{T}\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dT}}\bigg|_{\mathrm{p}}$$

a perfect Maxwell-Boltzmann gas, show that $c_p = c_v + k$. (Here k = amaann's constant.) Show that the adiabatic index

$$\Gamma_1 \equiv \frac{\partial \log p}{\partial \log n}\bigg|_s$$

equal to the ratio of specific heats,

$$\gamma \equiv \mathrm{c_p}/\mathrm{c_v}.$$

% oblem 5.33. For a perfect Maxwell-Boltzmann gas, show that if γ is droximately constant in some regime of interest, then $\mathrm{p} = \mathrm{Kn}^{\gamma}$ and Dum m $+\mathrm{Kn}^{\gamma}\gamma/(\gamma - 1)$ under adiabatic conditions. (K = constant, m = mass (particles.)
Problem 5.34. The invariant equilibrium distribution function of a relativistic gas is

$$\pi\left(\mathrm{p}^{\alpha}, \mathrm{x}^{\alpha}\right) \equiv \frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{d}^3 \times \mathrm{d}^3\mathrm{P}} = \frac{(2\ \mathrm{J} + 1)/\mathrm{h}^3}{\exp\left[-\frac{\mathrm{P}\cdot\mathrm{u}}{\mathrm{kT}} - \theta\right] - \varepsilon}$$

Here J = spin of particles, h = Planck's constant, u = mean 4-velocity of gas, $\varepsilon = 1, 0$ or -1 for Bose-Einstein, Maxwell-Boltzmann or FermiDirac statistics respectively. The parameter θ is independent of P. The first two moments of π are

$$J^{\mu} \equiv \int \pi P^{\mu} \frac{d^3P}{(-P\cdot u)}, \quad T^{\mu\nu} \equiv \int \pi P^{\mu}P^{\nu} \frac{d^3P}{(-P\cdot u)}$$

Since u is the only free vector, these integrals must have the form

$$\mathrm{J}^{\mu} = \mathrm{nu}^{\mu}, \quad \mathrm{T}^{\mu\nu} = (\rho + \mathrm{p})\mathrm{u}^{\mu}\mathrm{u}^{\nu} + \mathrm{pg}^{\mu\nu}$$

(This is the kinetic-theory definition of $\mathrm{n}, \rho, \mathrm{p}$.)
(a) Obtain 1-dimensional integrals for n, ρ and p .
(b) Show that $\mathrm{dp} = (\rho + \mathrm{p})/\mathrm{TdT} + \mathrm{nkTd}\theta$.
(c) Use the first law of thermodynamics to identify $\mathrm{kT}\theta$ as the chemi cal potential $\mu = (\rho + \mathrm{p})/\mathrm{n} - \mathrm{Ts}$.
(d) Show that for a Maxwell-Boltzmann gas, $\mathrm{p} = \mathrm{nkT}$ for all T .
(e) Show that for a Maxwell-Boltzmann gas, $\rho = \mathrm{n}\left(\mathrm{m} + \frac{3}{2}\mathrm{kT}\right)$ is an approximation valid only for $\mathrm{kT} \ll \mathrm{m}$. Find the exact expression for ρ/n. What is ρ/n for $\mathrm{kT} \gg \mathrm{m}$? (Here m is the mass of a gas particle.)
Problem 5.35. For a perfect Maxwell-Boltzmann gas, find γ(T), the ratio of specific heats, as a function of temperature.

5: Solutions

reduces to Equations (3) and (1) in a comoving orthonormal frame, thus it is the correct equation in all frames.
Solution 5.1.
(a) In the rest frame of the particles the only nonzero component is $\mathrm{I}^{0'0'} = \rho_0$. By transforming to a frame moving in the x -direction with velocity $-\beta$, we find the nonzero components

$$\mathrm{T}^{00} = \rho_0\gamma^2, \quad \mathrm{T}^{0\mathrm{x}} = \mathrm{T}^{\mathrm{x}0} = \rho_0\gamma^2\beta, \quad \mathrm{T}^{\mathrm{xx}} = \rho_0\beta^2\gamma^2$$

where $\gamma \equiv \left(1 - \beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}$. In general, if u is the 4 -velocity of the particles $T = \rho_0 u \otimes u$.
(b) Let the circle of motion be in the $x - y$ plane. Consider a continuum of rest mass density ρ_0 at the point $\mathrm{x} = 0, \mathrm{y} =$ a moving with velocity $\beta = \omega$. From part (a), at $\mathrm{x} = 0, \mathrm{y} =$ a we have $\mathrm{T}^{00} = \rho_0\gamma^2$ etc. Now if we consider a ring of matter, all points on the ring are equivalent so that in polar coordinates the nonzero components of $\mathrm{T}^{\mu\nu}$ are

$$\mathrm{T}^{00} = \rho_0\gamma^2, \quad \mathrm{T}^{0\hat{\phi}} = \rho_0\gamma^2\beta = \mathrm{T}^{\hat{\phi}0}, \quad \mathrm{T}\hat{\phi}\hat{\phi} = \rho_0\gamma^2\beta^2.$$

We now must relate ρ_0 to the collection of particles. If we assume that $\mathbf{N}$ is large enough so that we can view the particles as continuously distributed around the ring, then $\rho_0 \propto \delta(\mathrm{r}-\mathrm{a})\delta(z)$. The total energy of the particles must be $\gamma\mathrm{Nm}$ so

$$\mathrm{T}^{00}2\pi\mathrm{rdrd}z = \gamma\mathrm{Nm}$$

and $\rho_0 = \mathrm{Nm}\delta(\mathrm{r}-\mathrm{a})\delta(z)/2\pi\mathrm{a}y$. The results can now be expressed in cartesian coordinates by making the usual transformation $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$:

$$\mathrm{T}^{\mu\nu} = \frac{\gamma\,\mathrm{Nm}\,\delta\left(\left[\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2\right]^{\frac{1}{2}}-\mathrm{a}\right)\delta(z)}{2\pi\mathrm{a}} \begin{bmatrix} 1 & -\beta\sin\phi & \beta\cos\phi \\ & \beta^2\sin^2\phi & -\beta^2\sin\phi\cos\phi \\ & \beta^2\cos^2\phi & 0 \\ \text{(symmetric)} & & 0 \end{bmatrix}$$

(c) If we have an additional ring rotating in the opposite direction then that ring's stress-energy is the same as that in (b), with the sign of $\beta = \omega a$ reversed. We can then add the two cases. In the sum, terms linear in β disappear; terms quadratic in β are doubled. In polar coordinates, the nonzero components are

$$\mathrm{T}^{00} = \mathrm{T}^{\hat{\phi}\hat{\phi}}/\beta^2 = \gamma\mathrm{Nm}\delta(\mathrm{r}-\mathrm{a})\delta(z)/\pi\mathrm{a}$$

Solution 5.2. In Problem 5.1 we saw that for particles with 4 -velocity the stress-energy is proportional to $\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}$. For an isotropic collection with $\mathbf{u} = \gamma(1, \mathrm{v}\underline{\mathrm{n}})$ we have

$$\mathbf{T} = \kappa\langle\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}\rangle, \quad \kappa = \text{ some constant}$$

where the average is taken over the orientations of n. By symmetry, off diagonal components average to zero:

$$\mathrm{T}^{0\mathrm{i}} = \kappa\gamma^2\mathrm{v}\left\langle\mathrm{n}^{\mathrm{i}}\right\rangle = 0$$
$$\mathrm{T}^{\mathrm{ij}} = \kappa\gamma^2\mathrm{v}^2\left\langle\mathrm{n}^{\mathrm{i}}\mathrm{n}^{\mathrm{j}}\right\rangle = 0, \quad \mathrm{i}\neq\mathrm{j}.$$

To evaluate the diagonal, spatial, components note that $\langle n^x n^x\rangle = \langle \mathrm{n}^{\mathrm{y_n y}}\rangle = \langle \mathrm{n}^z\mathrm{n}^z\rangle$ and that

$$\langle\mathrm{n}^{\mathrm{x}}\mathrm{n}^{\mathrm{x}}\rangle + \langle\mathrm{n}^{\mathrm{y}}\mathrm{n}^{\mathrm{y}}\rangle + \langle\mathrm{n}^{\mathrm{z}}\mathrm{n}^{\mathrm{z}}\rangle = \left\langle\mathrm{n}^2\right\rangle = 1$$

so that

$$\left\langle n^i n^i\right\rangle = \frac{1}{3} \quad T^{ii} = \kappa y^2 v^2/3$$

We know that the moving particles each have energy my so the density of mass energy must be

$$\mathrm{m}\gamma\ \mathrm{N} = \mathrm{T}^{00} = \kappa\gamma^2 < 1 >= \kappa\gamma^2$$

Thus $\kappa = \mathrm{mN}/\gamma$ and the nonvanishing components are

$$\mathrm{T}^{00} = \mathrm{m}\gamma\ \mathrm{N} \quad \mathrm{T}^{\mathrm{ij}} = \left(\mathrm{m}\gamma\mathrm{Nv}^2/3\right)\delta^{\mathrm{ij}}.$$

Por photons $\mathrm{v}\to\mathrm{c}, \mathrm{m}y \to\ \mathrm{h}\nu$. For cold dust $\mathrm{v} = 0$ so $\mathrm{T}^{00} = \mathrm{mN}$ is the only nonvanishing component.

Solution 5.3. In the rest frame of the fluid element $u^0 = 1, u^i = 0$ so that

$$\mathrm{T}^{\mu\nu} = \mathrm{pg}^{\mu\nu} + (\rho+\mathrm{p})\mathrm{u}^\mu\mathrm{u}^\nu$$

Since this is a tensor equation which is true in the rest frame of the fluid Mement, it must be true in general.

Solution 5.4. We can always choose the spatial coordinates to diagonalize the 3 -dimensional stress tensor T^{ij}. It is obvious by symmetry that one if the spatial directions which is singled out is the direction of $\underset{\sim}{B}$, and that the choice of the other two orthogonal directions is arbitrary. If we choose $\underset{\sim}{\mathrm{B}} = \mathrm{Be}_z$ it follows that $\mathrm{T}^{\mathrm{xx}} = \mathrm{T}^{\mathrm{yy}}$ and that $\mathrm{T}^{\mathrm{xy}} = \mathrm{T}^{\mathrm{xz}} = \mathrm{T}^{\mathrm{yz}} = 0$. Since there is clearly no energy transport in this static problem $T^{0i} = 0$. The energy density of a magnetic field is $\mathrm{T}^{00} = \mathrm{B}^2/8\pi$.

We must now calculate the "pressures" T^{xx}, T^{yy}, T^{zz}. We do this $\mathrm{y_{ty}}$ considering a box $\Delta\mathrm{x}, \Delta\mathrm{y}, \Delta z$ of the field and imagining it expanded diabatically. (An adiabatic expansion keeps constant the magnetic flux $3\Delta x\Delta y$ - i.e. the number of "lines" of B in the volume.) The energy Wat the box is

$$\xi = \left(\mathrm{B}^2/8\pi\right)\Delta\mathrm{x}\Delta\mathrm{y}\Delta\mathrm{z} = (\mathrm{B}\Delta\mathrm{x}\Delta\mathrm{y})^2\Delta\mathrm{z}/8\pi\Delta\mathrm{x}\Delta\mathrm{y}$$

The pressures can now easily be found:

$$\mathrm{T}^{\mathrm{xx}} = -\frac{1}{\Delta\mathrm{y}\Delta z}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{G}}{\mathrm{d}(\Delta\mathrm{x})} = \mathrm{B}^2/8\pi = \mathrm{T}^{\mathrm{yy}}$$
$$\mathrm{T}^{zz} = -\frac{1}{\Delta\mathrm{x}\Delta\mathrm{y}}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{G}}{\mathrm{d}(\Delta z)} = -\mathrm{B}^2/8\pi$$

so that

$$\mathrm{T}^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{B}^2}{8\pi}\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{bmatrix}.$$

To find the stress energy of a chaotic field start by choosing a set of orthogonal axes and average the $\underset{\sim}{B}$ fields in the x, y, and z directions. From our previous result, the averaging gives

$$\langle \mathrm{T}^{\mu\nu} \rangle = \frac{\mathrm{B}^2}{8\pi}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{3} & & \\ & & \frac{1}{3} & \\ & & & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

where B is the average strength of the field. If we picked any other orthogonal directions we would get the same result because the 3×3 identity matrix block is invariant under rotations; hence the above result also represents the average over all directions.

Solution 5.5. We are given the linear mass density as μ, so $\mathrm{T}^{00} = \mu/\mathrm{A}$. In the rest frame of the rod there is no energy flow so $\mathrm{T}^{0\mathrm{i}} = 0$. Choose the z direction to be along the rod axis. By symmetry [see the argument in Problem 5.4] the off diagonal stresses $\mathrm{T}^{\mathrm{xy}}, \mathrm{T}^{\mathrm{xz}}, \mathrm{T}^{\mathrm{yz}}$, must be zero. Since the tension is in the z-direction, $T^{zz} = -F/A$. Since there is no applied stress in the x or y directions (therefore no transport of x or y momentum) $T^{xx} = T^{yy} = 0$.

Solution 5.6. Suppose a force infinitesimally smaller than F is applied. If the cross section is A and the axis of the rope is in the z direction, the components of T in the rest frame of the rod are given in Problem 5.5. An observer moving with velocity $\mathbf{u} = (\gamma, \gamma \underset{\sim}{v})$ sees energy density

$$\mathrm{T}^{0'0'} = \mathrm{T}^{\alpha\beta}\mathrm{u}_\alpha \mathrm{u}_\beta = \left(\gamma^2/\mathrm{A}\right)\left[\mu - \mathrm{F}\mathrm{v}_z^2\right].$$

Clearly the observer with the greatest chance of seeing a negative $\mathrm{T}^{0'0'}$ is the one moving in the z-direction with $v \to c$. To guarantee that he sees a positive $\mathrm{T}^{0'0'}$, the weak energy condition requires $\mathrm{F} < \mu$, which is the required upper limit. In physical units, and for good steel rope this would be

$$\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{A}} < \frac{\mu}{\mathrm{A}}\mathrm{c}^2 = \rho \mathrm{c}^2 = 7 \times 10^{13}\mathrm{Kg} - \mathrm{wt}/\mathrm{mm}^2.$$

as compared to its actual breaking strength of ≈ 200 kg $-$ wt/mm^2. The reason for this difference by a factor of order $10^{11.5}$ is that the strength of steel comes essentially from the energy of the molecular bonds (≤ 1eV per atom), not from the total mass density, which is virtually all in the nucleus $\left(\sim 5 \times 10^{10}\mathrm{eV}\right)$.

Solution 5.7. Let S' be the instantaneous rest frame of an element of the rod. In this rest frame the only nonzero components are $\mathrm{T}^{0'0'} = \rho, \mathrm{T}^{\mathrm{x'x'}} = \mathrm{p}$. If we Lorentz transform to the lab frame we find the nonzero components: $\mathrm{T}^{\mathrm{xx}} = \mathrm{p}, \mathrm{T}^{\mathrm{yy}} = \gamma^2\beta^2\rho$, $\mathrm{T}^{00} = \gamma^2\rho$, $\mathrm{T}^{0\mathrm{y}} = \gamma^2\beta\rho$, where $\beta = \omega \mathrm{r}$ and $\gamma \equiv \left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}$. If spherical polar coordinates are used the nonzero components are

$$\mathrm{T}^{\mathrm{rr}} = \mathrm{p}, \quad \mathrm{T}^{\phi\phi} = \gamma^2\beta^2\rho/\mathrm{r}^2, \quad \mathrm{T}^{0\phi} = \gamma^2\beta\rho/\mathrm{r}, \quad \mathrm{T}^{00} = \gamma^2\rho.$$

To find $p(r)$ we can use the r component of the equation of motion

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{T}^{\mathrm{r}\nu}_{;\nu} &= \mathrm{T}^{\mathrm{rr}}_{,\mathrm{r}} + \mathrm{T}^{\phi\phi}\Gamma^{\mathrm{r}}_{\phi\phi} + \mathrm{T}^{\mathrm{rr}}\left[\log(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\right],\mathrm{r} \\ &= \left(\mathrm{T}^{\mathrm{rr}}\mathrm{r}^2\right),\mathrm{r}^2 - \mathrm{r}\sin^2\theta\ \mathrm{T}^{\phi\phi} \end{aligned}$$

so that

$$\left(\mathrm{pr}^2\right)_{,\mathrm{r}} = \mathrm{r}\sin^2\theta\gamma^2\beta^2\rho$$

Since the only mass density is in the point masses we have

$$\rho = \mathrm{m}\delta(\mathrm{r}-\mathrm{a})\delta(\cos\theta)[\delta(\phi-\omega\mathrm{t}) + \delta(\phi-\omega\mathrm{t}-\pi)]/\mathrm{r}^2.$$

We can now integrate the equation of motion with the boundary condition $\mathrm{p} = 0$ for $\mathrm{r} > \mathrm{a}$, to find p . When this is done the components of the stress-energy tensor (in the lab, described by coordinates t, t, θ, ϕ) are seen to be

$$\begin{aligned} \mathrm{T}^{\mu\nu} =& \frac{\mathrm{m}}{1-\omega^2\mathrm{a}^2}\delta(\cos\theta)[\delta(\phi-\omega\mathrm{t}) + \delta(\phi-\omega\mathrm{t}-\pi)] \\ &\times \begin{bmatrix} \frac{\delta(\mathrm{r}-\mathrm{a})}{\mathrm{a}^2} & 0 & 0 & \frac{\omega\delta(\mathrm{r}-\mathrm{a})}{\mathrm{a}^2} \\ & -\frac{\omega^2\mathrm{a}}{\mathrm{r}^2} & 0 & 0 \\ \text{symmetric} & & 0 & 0 \\ & & & \mathrm{a}^2\delta(\mathrm{r}-\mathrm{a}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Solution 5.8. The electrostatic field for the moving capacitor remains E , since electric fields parallel to the direction of motion do not change. The moving capacitor, due to Lorentz contraction, has thickness d/γ, where $\gamma \equiv \left(1-\mathrm{v}^2\right)^{-\frac{1}{2}}$. The moving capacitor then has electrostatic energy $\mathrm{E}^2\mathrm{Ad}/8\pi y < \mathrm{E}^2\mathrm{Ad}/8\pi$.

The pressure of the gas must be equal in magnitude to the (negative) pressure of the E field, so $p = E^2/8\pi$. The nonvanishing components of the stress-energy of the gas in the capacitor rest frame are

$$\mathrm{T}^{00} = \rho_0, \quad \mathrm{T}^{\mathrm{xx}} = \mathrm{T}^{\mathrm{yy}} = \mathrm{T}^{zz} = \mathrm{E}^2/8\pi$$

The total rest mass of the capacitor is

$$\mathrm{M} = \mathrm{E}^2\mathrm{Ad}/8\pi + \rho_0\mathrm{Ad}$$

If the capacitor is moving we can calculate the energy density of gas by using a Lorentz transformation:

$$\mathrm{T}^{0'0'} = \gamma^2\left(\ \mathrm{T}^{00} + \beta^2\ \mathrm{T}^{\mathrm{xx}}\right) = \gamma^2\left(\rho_0 + \beta^2\mathrm{E}^2/8\pi\right)$$

If the capacitor is moving, then its total energy is

$$\begin{aligned}\mathfrak{E} &= \mathrm{E}^2\mathrm{Ad}/8\pi\gamma + \gamma^2\left(\rho_0 + \beta^2\mathrm{E}^2/8\pi\right)\mathrm{Ad}/\gamma \\ &= \left(\gamma\rho_0 + \gamma\mathrm{E}^2/8\pi\left[1/\gamma^2 + \beta^2\right]\right)\mathrm{Ad} = \gamma\left(\rho_0 + \mathrm{E}^2/8\pi\right)\mathrm{Ad} = \gamma\mathrm{M}\end{aligned}$$

Solution 5.9. For simplicity assume Minkowski coordinates. The stress energy for the particles is

$$\mathrm{T}^{\mu\nu}_{\mathrm{P}}(\mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{i}}\ \mathrm{m}_{\mathrm{i}}\int \mathrm{u}^{\mu}_{\mathrm{i}}\left(\tau_{\mathrm{i}}\right)\mathrm{u}^{\nu}_{\mathrm{i}}\left(\tau_{\mathrm{i}}\right)\delta^4\left[\mathrm{x}-\mathrm{x}_{\mathrm{i}}\left(\tau_{\mathrm{i}}\right)\right]\mathrm{d}\tau_{\mathrm{i}}$$

$$\mathrm{T}^{\mu\nu}_{\mathrm{P},\nu} = \sum_{\mathrm{i}}\ \mathrm{m}_{\mathrm{i}}\int \mathrm{u}^{\mu}_{\mathrm{i}}\mathrm{u}^{\nu}_{\mathrm{i}}\left(\partial/\partial\mathrm{x}^{\nu}\right)\delta^4\left[\mathrm{x}-\mathrm{x}_{\mathrm{i}}\left(\tau_{\mathrm{i}}\right)\right]\mathrm{d}\tau_{\mathrm{i}}$$

The delta function depends only on $x - x_i$ so we can replace $\partial/\partial x^{\nu}$ by $-\partial/\partial \mathrm{x}^{\nu}_{\mathrm{i}}$. Since $\mathrm{u}^{\nu}_{\mathrm{i}}\partial/\partial\mathrm{x}^{\nu}_{\mathrm{i}} = \mathrm{d}/\mathrm{d}\tau_{\mathrm{i}}$ we have then

$$\begin{aligned}\mathrm{T}^{\mu\nu}_{\mathrm{P},\nu} &= -\sum_{\mathrm{i}}\ \mathrm{m}_{\mathrm{i}}\int \mathrm{u}^{\mu}_{\mathrm{i}}\left(\mathrm{d}/\mathrm{d}\tau_{\mathrm{i}}\right)\delta^4\left[\mathrm{x}-\mathrm{x}_{\mathrm{i}}\left(\tau_{\mathrm{i}}\right)\right]\mathrm{d}\tau_{\mathrm{i}} \\ &= \sum_{\mathrm{i}}\ \mathrm{m}_{\mathrm{i}}\int\left(\ \mathrm{du}^{\mu}_{\mathrm{i}}/\mathrm{d}\tau_{\mathrm{i}}\right)\delta^4\left[\mathrm{x}-\mathrm{x}_{\mathrm{i}}\left(\tau_{\mathrm{i}}\right)\right]\mathrm{d}\tau_{\mathrm{i}}\end{aligned}$$

where the second result follows from integration by parts.
Now for the i^{th} particle

$$\mathrm{m}_{\mathrm{i}}\mathrm{du}^{\mu}_{\mathrm{i}}/\mathrm{d}r_{\mathrm{i}} = \mathrm{q}_{\mathrm{i}}\ \mathrm{F}^{\mu}_{\nu}\left(\mathrm{x}_{\mathrm{i}}\right)\mathrm{u}^{\nu}_{\mathrm{i}}$$

so, with the result of Problem 4.7,

$$\begin{aligned}\mathrm{T}^{\mu\nu}_{\mathrm{P},\nu} &= \sum_{\mathrm{i}}\mathrm{q}_{\mathrm{i}}\int\ \mathrm{F}^{\mu}_{\nu}\mathrm{u}^{\nu}_{\mathrm{i}}\delta^4\left[\mathrm{x}-\mathrm{x}_{\mathrm{i}}\left(r_{\mathrm{i}}\right)\right]\mathrm{d}r_{\mathrm{i}} \\ &= \mathrm{F}^{\mu}_{\nu}\mathrm{J}^{\mu}\end{aligned}$$

But, from Problem 4.15,

$$\mathrm{T}^{\mu\nu}_{\mathrm{EM},\nu} = (4\pi)^{-1}\ \mathrm{F}^{\mu a}\ \mathrm{F}^{\nu}_{a,\nu} = -\mathrm{F}^{\mu a}\ \mathrm{J}_a$$

so that $\left(\mathrm{T}^{\mu\nu}_{\mathrm{P}} + \mathrm{T}^{\mu\nu}_{\mathrm{EM},\nu}\right)_{\nu} = 0$.

Solution 5.10. Consider a small number, dN , of photons with a small spread in frequency and position, moving in a narrow cone, and impinging on a small area in a short time. By definition

$$I_{\nu} = \frac{d\ (\text{energy})}{d\ (\text{frequency})\ d\ (\text{time})\ d\left[\begin{array}{c}\text{solid angle}\\ \text{of cone}\end{array}\right] d\left[\begin{array}{c}\text{cross-sectional}\\ \text{area}\end{array}\right]}.$$

With no loss of generality take the narrow cone of the motion, whose size is d (solid angle), to be along the z-direction, then

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}(\text{ energy }) = \mathrm{h}\nu\mathrm{dN} \\ &\mathrm{d}(\text{ solid angle }) = \mathrm{dv}^{\mathrm{x}}\mathrm{dv}^{\mathrm{y}} = \mathrm{d}\left(\mathrm{p}^{\mathrm{x}}/\mathrm{E}\right)\mathrm{d}\left(\mathrm{p}^{\mathrm{y}}/\mathrm{E}\right) = \mathrm{dp}^{\mathrm{x}}\mathrm{dp}^{\mathrm{y}}/\mathrm{h}^2\nu^2 \\ &\mathrm{d}(\text{ time }) = \mathrm{d}z/\mathrm{c} = \mathrm{d}z \\ &\mathrm{d}(\text{ cross sectional area }) = \mathrm{dxdy} \\ &\mathrm{d}(\text{ frequency }) = \mathrm{d}(\ \mathrm{h}\nu)/\mathrm{h} = \mathrm{dp}^{z}/\mathrm{h}\end{aligned}$$

so that

$$I_\nu = \frac{dN}{dxdydzdp^x dp^y dp^z}.$$

Number density in phase space, $\mathrm{dN/d^3xd^3p}$, is a Lorentz invariant (see Problem 3.34) so I_ν/ν^3 is invariant.

Solution 5.11. If spherical polar coordinates are used to describe the 3-dimensional space in the frame of the star, then in that frame the radiation has stress energy

$$\mathrm{T}^{\mu\nu}(\mathrm{r},\theta,\phi) = \left(\mathrm{L}/4\pi\mathrm{r}^2\right)\begin{bmatrix} \mathrm{t} & \mathrm{r} & \theta & \phi \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Let ℓ be the vector (null, of course) from the emission of a photon to the reception of that photon. In the star's frame, if a photon is received at a distance r from the star, $\ell^0 = r, \ell^r = r, \ell^\theta = \ell^\phi = 0$, and the stressenergy tensor at the event of reception can be written in the frame independent form

$$T = \left[L/4\pi\left(u_s \cdot \ell\right)^4\right]\ell \otimes \ell$$

where u_s is the 4-velocity of the star so that, evaluated in the star's frame, $\mathbf{u_s} \cdot \ell = -\mathrm{r}$. It is now simple to use the frame independent expression for $\mathbf{T}$ to evaluate the flux the observer sees. Let $\mathbf{n} = (0, \underline{n})$ be the spatial vector which, in the observer's frame, points to the observed position of the star, so that $\ell = (R, -R\underset{\sim}{n})$. The flux measured by the observer will be, in the observer's coordinates,

$$F_{obs} = -T^{0i_{n_i}=u_{obs}} \cdot T \cdot n.$$

In the observer's coordinates

$$\mathbf{u}_\mathrm{s} \cdot \ell = (\gamma, \gamma\underline{\mathrm{v}}) \cdot (\mathrm{R}, -\mathrm{R}\underline{\mathrm{n}}) = -\gamma\mathrm{R}(1 + \mathrm{v}\cos\theta).$$

Furthermore $\ell \cdot \mathbf{u}_{\mathrm{obs}} = -\mathrm{R}$ and $\ell \cdot \mathbf{n} = -\mathrm{R}$ so that

$$\mathrm{F}_{\mathrm{obs}} = \mathrm{L}/\left[4\pi\gamma^4(1 + \mathrm{v}\cos\theta)^4\mathrm{R}^2\right].$$

Another way of arriving at this result is to use the fact that I_ν/ν^3 is a Lorentz invariant. (See Problem 5.10.)

Solution 5.12. Let the 4-velocity of the particle be u. Let the null 4 -vector along which the radiation propagates be ℓ. The particle absorbs a 4 -momentum flux $-\mathrm{SA}(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\ell})\boldsymbol{\ell}$, i.e. the stress-energy of the radiation $T = Sl \otimes l$ multiplied by the effective area of the particle and dotted into its 4 -velocity (to get the flux in its frame). The minus sign is due to the -+++ signature. The time component of this in its rest frame is $\mathrm{SA}(\mathrm{u} \cdot \ell)(\mathrm{u} \cdot \ell)$; this is the absorbed energy which the particle reradiates in its own rest frame, so the net change in 4 -momentum is

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{md}\mathbf{u}}{\mathrm{d}\tau} = -\mathrm{SA}\left[(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\ell})\boldsymbol{\ell} + (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\ell})^2\mathbf{u}\right] \tag{1}$$

This is the equation of motion for $\mathbf{u}$.

To solve, let $W \equiv \mathbf{u} \cdot \ell$, and dot the equation of motion with ℓ to get

$$\mathrm{dW/d}\tau = -(\mathrm{SA/m})\mathrm{W}^3$$

and hence

$$\mathrm{W} = -[(2\mathrm{SA}r/\mathrm{m}) + \mathrm{K}]^{-\frac{1}{2}} \tag{2}$$

where K is some constant. We now treat W as the independent variable and substitute $\mathrm{d}\tau = -\mathrm{dWm/SAW}^3$ in Equation (1) to get

$$\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dW}} - \frac{\mathrm{u}}{\mathrm{W}} = \frac{1}{\mathrm{W}^2}\ell \tag{3}$$

This has the integrating factor 1/W and can easily be integrated:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dW}}\left(\frac{1}{\mathrm{W}}\mathrm{u}\right) = \frac{1}{\mathrm{W}^3}\ell \tag{4}$$

$$\mathrm{u} = -\frac{1}{2\ \mathrm{W}}\ell + \mathrm{Wq} \tag{5}$$

where $\mathbf{q}$ is a constant of integration. The conditions $\mathbf{u} \cdot \ell = W$ and $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$ imply that $\mathbf{q} \cdot \mathbf{l} = 1$ and $\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = 0$. Substitute for W from Equation (2) and integrate Equation (5) to find

$$\mathbf{x} = +\frac{1}{6a}(2ar + \mathrm{K})^{\frac{3}{2}}\ell - \frac{1}{a}(2ar + \mathrm{K})^{\frac{1}{2}}q + \mathbf{x}_0$$

where $a = \mathrm{SA/m}$. If we choose the constant of integration so that the particle starts from rest at the origin in a radiation field parallel to the m-axis, this is

$$\begin{aligned}
\mathrm{t} &= \frac{1}{6a}(2a\tau + 1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2a}(2a\tau + 1)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3a} \\
\mathrm{x} &= \frac{1}{6a}(2a\tau + 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2a}(2a\tau + 1)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3a} \\
\mathrm{y} &= 0 \\
z &= 0
\end{aligned}$$

The solution here follows that of Robertson and Noonan, pp. 116-118.) Solution 5.13. An observer on the sphere sees the black body spectrum doppler shifted by different amounts in different directions. Since the black body spectrum has $\mathrm{I}_\nu/\nu^3 = \text{constant} \times \left(\mathrm{e}^{\mathrm{h}\nu/\mathrm{KT}} - 1\right)^{-1}$, and since I_L/ν^3 is a Lorent z invariant, the effect of a doppler shift $\nu_0 \to \nu$ is just to change the effective temperature $\mathrm{T}_0 \to \mathrm{T} = \mathrm{T}_0\,(\nu/\nu_0)$.

What is the doppler shift seen by the comoving observer when he looks at an angle θ to the forward direction of motion? This standard result is easy to rederive with invariants: Let u be the 4 -velocity of the sphere, $\mathbf{u}_0$ be the rest 4 -velocity of the radiation, and $\mathbf{p}$ be the 4 -momentum of a photon in units of Planck's constant. Then $\nu = -\mathbf{u}\cdot\mathbf{p}, \nu_0 = -\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{p}$ and $\left(1 - v^2\right)^{-\frac{1}{2}} \equiv \gamma = -u\cdot u_0$. In the sphere's frame,

$$\mathbf{u} = (1, \underline{0}), \quad \mathbf{u}_0 = (\gamma, -\gamma\underset{\sim}{v}), \quad \mathbf{p} = (\nu, \nu\mathfrak{n})$$

where $\underline{n}$ is a unit 3 -vector. The unit spatial vector in the direction of $\underset{\sim}{v}$ is

$$\left(0, \frac{v}{|v|}\right) = -\frac{u_0 + (u_0\cdot u)\,u}{\gamma v}$$

(This is verified by substituting in components in the sphere's frame.) Similarly, the vector $(0, \underline{\mathrm{n}})$ is invariantly written as

$$(0, \mathrm{n}) = \frac{\mathrm{p} + (\mathrm{u}\cdot\mathrm{p})\mathbf{u}}{\nu},$$

so the angle of the photon in the sphere's frame is

$$\cos\theta = (0, \mathrm{n})\cdot\left(0, \frac{\mathrm{v}}{|\mathrm{v}|}\right) = \frac{\nu_0 - \gamma\nu}{\gamma\mathrm{v}\nu}$$

The last line is obtained by dotting together the invariant 4 -vector expressions and using $\nu = -\mathrm{u}\cdot\mathrm{p}$ etc. Solving for ν/ν_0, we have

$$\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}_0} = \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{1}{\gamma(1 + \mathrm{v}\cos\theta)}$$

Finally, the equilibrium temperature is given by the average over all directions $\left\langle \mathrm{T}(\theta)^4 \right\rangle^{\frac{1}{4}}$. [This is because the radiation rate, which equals the absorption rate in equilibrium, goes as T^4 (Stefan-Boltzman law).] Thus

$$\left\langle \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}_0} \right\rangle^4 = \frac{1}{2}\int_{\cos\theta=-1}^{\cos\theta=1} \frac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\gamma^4(1 + \mathrm{v}\cos\theta)^4} = \frac{1}{\gamma^4}\frac{1}{6\mathrm{v}}\left[\frac{1}{(1-\mathrm{v})^3} - \frac{1}{(1+\mathrm{v})^3}\right]$$

and

$$\mathrm{T}_{\text{equilibrium}} = \left\langle \mathrm{T}^4 \right\rangle^{\frac{1}{4}} = \left(\gamma^2\left(1 + \mathrm{v}^2/3\right)\right)^{\frac{1}{4}}\ \mathrm{T}_0.$$

Solution 5.14. Let the average transfer of energy be $\langle\Delta\mathrm{E}\rangle$. We are given that $\mathrm{E/mc^2} \ll 1$ and $\mathrm{T/mc^2} \ll 1$ (units with $\mathrm{k} = 1$), so we want only the first nonvanishing terms in the double series expansion

$$\begin{aligned}
<\Delta\mathrm{E}> = \mathrm{mc}^2\,[&a_1 + a_2(\mathrm{E/m}) + a_3(\ \mathrm{T/m}) \\
&+a_4\left(\mathrm{E}^2/\mathrm{m}^2\right) + a_5\left(\mathrm{ET/m}^2\right) + a_6\left(\ \mathrm{T}^2/\mathrm{m}^2\right) + \cdots]
\end{aligned} \tag{1}$$

If $\mathrm{T} = \mathrm{E} = 0$, nothing is happening, so $\alpha_1 = 0$. If $\mathrm{T} = 0, \mathrm{E} \neq 0$, we have standard Compton scattering with a cross section $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega \propto \left(1 + \cos^2\theta\right)$ and an energy transfer $\Delta\mathrm{E} = \left(\mathrm{E}^2/\mathrm{m}\right)(1 - \cos\theta)$. Since the cross section is forward-backward symmetric, the $\cos\theta$ term cancels out when we average over angles, and

$$<\Delta\mathrm{E}> = \left(\mathrm{E}^2/\mathrm{m}\right), \quad \mathrm{T} = 0.$$

Ithis implies that $a_2 = 0$ and $a_4 = 1$. If $E = 0, T \neq 0$, the photon has zero energy and is vacuous, so $a_3 = a_6 = 0$.

Finally, we need a_5 : Take a thought experiment where there is a Illute black-body flux of photons with the same temperature as the gas so liat

$$d(\text{ number of photons })/dE = \text{ constant } \times E^2 e^{-E/T}.$$

Plugging in Equation (1) with $a_1 = a_2 = a_3 = a_6 = 0, a_4 = 1$, and requiring thermal equilibrium, namely $\int_0^\infty \langle \Delta \mathrm{E} \rangle \mathrm{E}^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{E}/\mathrm{T}} \mathrm{dE} = 0$, gives $0 = (3\ \mathrm{T/m})\,(4\ \mathrm{T} + \alpha_5\ \mathrm{T})$ or $\alpha_5 = -4$. Expression (1) now takes the final form

$$\langle \mathrm{E} \rangle = \left(\mathrm{E}^2 - 4\mathrm{TE}\right)/\mathrm{mc}^2 + \cdots .$$

Solution 5.15. The technique here is to use the equations of motion $(T^{\mu\nu}, \nu = 0)$ to convert first derivative terms to divergences and then, by Gauss's theorem, to vanishing surface integrals outside the system. By repeated use of the equations of motion we have

$$\mathrm{T}^{00}_{,00} = -\mathrm{T}^{0\mathrm{k}}_{,\mathrm{k}0} = -\mathrm{T}^{\mathrm{k}0}_{,0\mathrm{k}} = \mathrm{T}^{\mathrm{km}}_{,\mathrm{mk}}$$

Now multiply by $x^i x^j$:

$$\begin{aligned}
\left(x^i x^j T^{00}\right)_{,00} &= x^i x^j \left(T^{km}\right), km \\
&= \left(T^{km} x^i x^j\right), km - 2\left(x^i x^j\right), k^T T^{km}_{,m} - T^{km}\left(x^i x^j\right), km \\
&= \left(T^{km} x^i x^j\right), km - 2\left(x^j T^{im}_{,m} + x^i T^{jm}_{,m}\right) - 2T^{ij}
\end{aligned}$$

The first derivative terms can be simplified, e.g.

$$x^j T^{im}_{,m} = \left(x^j T^{im}_{,m}\right)_{,m} - \delta^j_m T^{im}$$

If we make this simplification, integrate over all space, and ignore all divergences which can be converted to vanishing surface integrals we see

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} \int x^i x^j T^{00} d^3x &= \int \left[0 - 2\left(-T^{ij} - T^{ij}\right) - 2T^{ij}\right] d^3x \\
&= 2\int T^{ij} d^3x
\end{aligned}$$

Solution 5.16. Suppose v is a timelike eigenvector

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = a\mathbf{v}$$

Consider the stress-energy measured by an observer with 4 -velocity $u = \pm v/|v|$. (Choose the sign to make u future-pointing.) In that observer's rest frame $u = (1, 0)$ and the energy flux vector S is

$$-\mathbf{S} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = \frac{\alpha}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u} = (\alpha, 0)$$

Thus the observer sees no energy flux, and α is the negative of the energy density he sees.

Conversely if an observer with 4 -velocity u sees no spatial flux, then $-S = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} = a\mathbf{u}$ for some a, and $\mathbf{u}$ is thus a timelike eigenvector of $\mathbf{T}$. Solution 5.17.

(a) If second order terms in velocity are ignored, the general Lorentz transformation is

$$\Lambda^0_{0'} = 1, \quad \Lambda^0_{i'} = v^i, \quad \Lambda^i_{j'} = \delta^{i'}_{j'}$$

If $\mathrm{T}^{\mu'\nu'}$ are the stress-energy components in the rest frame of the fluid, then $\mathrm{T}^{0'\mathrm{i}'} = 0$, and

$$\begin{aligned}
\mathrm{g}^{\mathrm{j}} \equiv\ \mathrm{T}^{0\mathrm{j}} &= \Lambda^0_{\mu'}\Lambda^{\mathrm{j}}_{\nu'}\ \mathrm{T}^{\mu'\nu'} = \Lambda^0_{0'}\Lambda^{\mathrm{j}}_0\ \mathrm{T}^{0'0'} + \Lambda^0_{\mathrm{k}'}\Lambda^{\mathrm{j}}_{\mathrm{i}'}\ \mathrm{T}^{\mathrm{i}'\mathrm{k}'} \\
&= \mathrm{v}^{\mathrm{j}}\ \mathrm{T}^{0'0'} + \mathrm{v}^{\mathrm{k}}\ \mathrm{T}^{\mathrm{j}'\mathrm{k}'} = \mathrm{v}^{\mathrm{k}}\left(\ \mathrm{T}^{0'0'}\delta^{\mathrm{jk}} + \mathrm{T}^{\mathrm{j}'\mathrm{k}'}\right)
\end{aligned}$$

For a perfect fluid $\mathrm{T}^{0'0'} = \rho$ and $\mathrm{T}^{\mathrm{j}'\mathrm{k}'} = \mathrm{p}\delta^{\mathrm{jk}}$ so that the "inertial mass per unit volume" is

$$\mathrm{m}^{\mathrm{jk}} = \delta^{\mathrm{jk}}(\rho + \mathrm{p})$$

(b) Since

$$\mathrm{M}^{\mathrm{ij}} \equiv \delta^{\mathrm{ij}} \int\ \mathrm{T}^{00}\mathrm{dxdydz} + \int \mathrm{T}^{\mathrm{ij}}\mathrm{dxdydz}$$

we need only show that the second term on the right vanishes. Note that the 3-divergence of T^{jk} vanishes

$$\mathrm{T}^{\mathrm{jk}}_{,\mathrm{k}} = \mathrm{T}^{\mathrm{j}\mu}_{,\mu} - \mathrm{T}^{\mathrm{j}0}_{,0} = 0 - 0$$

and that

$$\left(x^k T^{ji}\right)_{,i} = \delta_i^k T^{ji} + x^k T^{ji}_{,i} = T^{jk}$$

It follows by Gauss' theorem that

$$\int T^{jk} dxdydz = \int \left(x^k T^{ji}\right)_{,i} dxdydz = \int_S x^k T^{ji} n^i dS$$

where S is any surface outside the stressed body and $\underset{\sim}{n}$ is the outward normal to S. Since the surface integral obviously vanishes, the proof is complete.

Solution 5.18. When the definitions of $\sigma_{\alpha\beta}$ and $\omega_{\alpha\beta}$ are used, we can see we need only verify

$$\mathrm{u}_{\alpha;\beta} = \mathrm{u}_{a;\mu}\mathrm{P}^{\mu}_{\beta} - \mathrm{a}_a \mathrm{u}_{\beta}$$

It is straightforward to use the definition of P^{μ}_{β} to verify this. Instead we follow a more instructive approach of projecting the equation with u and with P. Note that

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{P} = 0, \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P}$$

The projections with **P** and with **u** are:

$$\mathrm{u}_{a;\beta}\mathrm{P}^{\beta}_{\gamma} = \mathrm{u}_{a;\mu}\mathrm{P}^{\mu}_{\beta}\mathrm{P}^{\beta}_{\gamma} - \mathrm{a}_a \mathrm{u}_{\beta}\mathrm{P}^{\beta}_{\gamma} = \mathrm{u}_{a;\mu}\mathrm{P}^{\mu}_{\gamma} - 0$$

and

$$\mathrm{u}_{a;\beta}\mathrm{u}^{\beta} = \mathrm{u}_{a;\mu}\mathrm{P}^{\mu}\mathrm{u}^{\beta} - \mathrm{a}_a \mathrm{u}_{\beta}\mathrm{u}^{\beta} = 0 + \mathrm{a}_a.$$

Both results check. Since the projection of the equation onto u and perpendicular to u are true, the equation is verified.

Solution 5.19. If the fluid has mass energy density ρ, pressure P , temperature T and entropy S, then conservation of mass-energy for a fluid element of volume V is

$$\mathrm{d}(\rho\ \mathrm{V}) = -\mathrm{PdV} + \mathrm{TdS}$$

Here S is the entropy in the volume V. This differs from the nonrelativistic law only in that we have replaced energy density by mass-energy density, since mass is not conserved in special relativity. Baryon number is conserved so the first law is often written in terms of baryon number density n, and entropy per baryon s, by eliminating $V \equiv$ (number of baryons / n):

$$\mathrm{d}(\rho/\mathrm{n}) = -\mathrm{Pd}(1/\mathrm{n}) + \mathrm{Tds}$$

or

$$\mathrm{d}\rho = (\rho + \mathrm{P})\mathrm{dn/n} + \mathrm{nTds}$$

Solution 5.20. For a perfect fluid $\mathrm{T}^{\mu\nu} = (\mathrm{P}+\rho)\mathrm{u}^{\mu}\mathrm{u}^{\nu} + \mathrm{Pg}^{\mu\nu}$ so that in the fluid rest frame the 0 component of the equation of motion is

$$\begin{aligned}\mathrm{u}_{\mu}\mathrm{T}^{\mu\nu}_{\ ;\nu} = \mathrm{T}^{0\nu}_{\ ;\nu} &= \mathrm{P}_{,\nu}\mathrm{g}^{0\nu} + \mathrm{Pg}^{0\nu}_{\ ;\nu} + (\mathrm{P}+\rho),\nu\mathrm{u}^{\nu}\mathrm{u}^{0} \\ &+ (\mathrm{P}+\rho)\left[\mathrm{u}^{\nu}_{;\nu}\mathrm{u}^{0} + \mathrm{u}^{0}_{;\nu}\mathrm{u}^{\nu}\right] = 0\end{aligned}$$

Now $\mathrm{g}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \mathrm{u}^0 = 1$, and $\mathrm{u}^0_{;\nu} = \mathrm{u}_a\mathrm{u}^{\alpha}{}_{;\nu} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{u}_a\mathrm{u}^{\alpha}\right)_{;\nu} = 0$, so that the equation becomes

$$0 = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{P} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{P}+\rho) + (\mathrm{P}+\rho)\mathrm{u}^{\nu}_{;\nu}$$

If n is the density of baryons in the fluid rest frame then the numberflux vector of baryons nu is conserved. In the rest frame then

$$\left(\mathrm{nu}^{\nu}\right)_{;\nu} = 0 = \mathrm{n}_{,\nu}\mathrm{u}^{\nu} + \mathrm{nu}^{\nu}_{;\nu} = \frac{\mathrm{dn}}{\mathrm{dt}} + \mathrm{nu}^{\nu}_{;\nu}$$

When this equation is used to eliminate $u^{\nu}_{;\nu}$ the equation of motion becomes

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dt}} = \frac{(\mathrm{P}+\rho)}{\mathrm{n}}\frac{\mathrm{dn}}{\mathrm{dt}}$$

If we compare this with the first law of thermodynamics (see Problem 5.19) we see that $ds/dt = 0$; the fluid flow is isentropic.

Solution 5.21. From the first law of thermodynamics for a perfect fluid (see Problem 5.20) having equation of state $\rho = \rho(\mathrm{n})$

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \frac{\rho + \mathrm{P}}{\rho}\frac{\mathrm{dn}}{\mathrm{n}}$$

so that

$$\mathrm{d}\log\rho/\mathrm{d}\ln\mathrm{n} = (\rho+\mathrm{P})/\rho$$

Thus ρ is greater than 3P if and only if $d\log\rho/d\log n < 4/3$. Since

$$\mathrm{T}^{\mu}_{\mu} = (\rho+\mathrm{P})\mathrm{u}^{\mu}\mathrm{u}_{\mu} + \mathrm{p}\mathrm{g}^{\mu}_{\mu} = -(\rho+\mathrm{P}) + 4\mathrm{P} = 3\mathrm{P} - \rho$$

for a perfect fluid, the proof is complete.

Solution 5.22. Assume that the acoustical wave is a perturbation (isentropic) in a uniform static fluid with parameters ρ_0, P_0, and n_0. Let the perturbations be ρ_1, P_1, and n_1 and the fluid velocity be $\mathbf{u} \approx (1, \boldsymbol{v}_1)$ in the rest frame of the unperturbed fluid. The first order perturbation terms in $\mathrm{T}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ give us

(i) From $\mu = 0$

$$\nabla\cdot v_1 = -\frac{\partial\rho_1}{\partial\mathrm{t}}\left(\rho_0+\mathrm{P}_0\right)^{-1}$$

(ii) From $\mu = 1, 2, 3$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\nabla P_1}{(\rho_0+P_0)}$$

which can be combined into

$$\partial^2\rho_1/\partial\mathrm{t}^2 - \nabla^2\mathrm{P}_1 = 0$$

Since P_1 and ρ_1 are related for isentropic flow by

$$\mathrm{P}_1 = \partial\mathrm{P}/\left.\partial\rho\right|_{\mathrm{s}}\rho_1$$

the above equation becomes a wave equation

$$\nabla^2\rho_1 - \frac{1}{v_s^2}\frac{\partial^2\rho_1}{\partial t^2} = 0$$

with characteristic velocity v_s.

For an equation of state $\rho \approx 3P$,

$$\mathrm{v}_{\mathrm{s}}^2 = \partial\mathrm{P}/\partial\rho = 1/3$$

so that $v_s \approx 3^{-\frac{1}{2}}$ in a highly relativistic gas.

Solution 5.23. From the first law of thermodynamics (see Problem 5.19) with $ds = 0$ we have

$$\mathrm{dn}/\mathrm{d}\rho = \mathrm{n}/(\rho+\mathrm{P})$$

Now we use the definition of Γ_1 and the expression for v_s^2 from Problem 5.21:

$$\frac{v_s^2}{\Gamma_1} = \frac{dP/d\rho}{(ndP)/(Pdn)} = \frac{P}{n}\frac{dn}{d\rho} = \frac{P}{\rho+P}$$

Solution 5.24. At zero temperature all energy states in the Fermi gas are filled up to the Fermi level $E = E_F$. Since there are two spin states for fermions the density of fermions in phase space is $2/h^3$ so that

$$\mathrm{dn}/\mathrm{V} = \left(2/\mathrm{h}^3\right)\mathrm{d}^3\mathrm{p}$$

$$\rho = \int_0^{\mathrm{P_F}}\left(\mathrm{p}^2+\mathrm{m}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(2/\mathrm{h}^3\right)4\pi\mathrm{p}^2\mathrm{dp}$$

$$\mathrm{P} = \int_0^{\mathrm{P_F}}\frac{1}{3}\mathrm{p}^2\left(\mathrm{p}^2+\mathrm{m}^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2/\mathrm{h}^3\right)4\pi\mathrm{p}^2\mathrm{dp}$$

where P_F is the momentum corresponding to the Fermi energy. In Problem 5.22 we found $\mathrm{v}_{\mathrm{s}}^2 = \mathrm{dP}/\mathrm{d}\rho$ so

$$\mathrm{v}_{\mathrm{S}}^2 = \frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}\rho} = \frac{\mathrm{dP}/\mathrm{dP_F}}{\mathrm{d}\rho/\mathrm{dP_F}} = \frac{1}{3}\left(\frac{\mathrm{P_F}}{\mathrm{E_F}}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(1-\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{E_F^2}}\right)$$

Note that for a highly relativistic Fermi gas $v_s \to 3^{-\frac{1}{2}}$.

Solution 5.25. The relativistic Bernoulli equation, which expresses the conservation of energy along flow lines of a perfect fluid, is (Problem 14.7)

$$\left(1-v^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{n}{P+\rho}\right)\times\ \text{constant}$$

(This equation follows from $T^{0\nu},\nu = 0$, from $(nu^{\mu})_{,\mu} = 0$ and from the first law of thermodynamics $\mathrm{d}\rho/(\mathrm{P}+\rho) = \mathrm{dn/n}$.) Since the gas starts in the tank at zero velocity, we have: constant $= (\mathrm{P}_0+\rho_0)/\mathrm{n}_0$. An upper bound for $n/(P+\rho)$ which will give an upper bound $v_{\max}$ for v, occurs when $\mathrm{P}\to 0$ implying $\rho = \mathrm{mn}$, so

$$\left(1-v_{\max}^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{m}\left(\frac{P_0+\rho_0}{\bar{n}_0}\right)$$

Now we have to try and write the right hand side only in terms of a, the sound velocity of the gas with P_0, ρ_0, n_0. We have $P = Kn^{\gamma}$ where K is a constant telling what adiabat the gas is on. The first law reads

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dn}} = \frac{\mathrm{Kn}^{\gamma}+\rho}{\mathrm{n}}$$

which is integrable and (with $\rho\to\mathrm{mn}$ when $\mathrm{n}\to 0$) gives

$$\rho = \mathrm{mn} + \frac{\mathrm{K}}{\gamma-1}\mathrm{n}^{\gamma}$$

The speed of sound a is given by

$$a^2 = \frac{dP}{d\rho} = \frac{dP/dn}{d\rho/dn} = \frac{\gamma K_n\gamma - 1}{m+\gamma {K_n}^{\gamma-1}/(\gamma-1)} \tag{1}$$

and the first law of thermodynamics gives us

$$\frac{\mathrm{P}+\rho}{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dn}} = \left(\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{dn}}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dP}}\right) = \left(\gamma\mathrm{Kn}^{\gamma-1}\right)\left(1/\mathrm{a}^2\right). \tag{2}$$

But Equation (1) contains just this same combination $\gamma\mathrm{Kn}^{\gamma-1}$. So we can solve Equation (1) for

$$\gamma\mathrm{Kn}^{\gamma-1} = \mathrm{ma}^2/\left[1-\mathrm{a}^2/(\gamma-1)\right]$$

and get

$$\frac{1}{m}\left(\frac{P_0+\rho_0}{n_0}\right) = \frac{1}{1-a^2/(\gamma-1)}$$

and therefore

$$v_{\max}^2 = 1-\left[1-a^2/(\gamma-1)\right]^2.$$

(Notice that $\mathrm{v}_{\max}\to 1$ in the limit of highly relativistic gas, for which $y\to 4/3$ and $a^2\to 1/3$.)

Solution 5.26. In the fluid rest frame $\mathrm{T}^{0\mathrm{j}} = \mathrm{T}^{\mathrm{j}0} = \mathrm{q}^{\mathrm{j}}$ are the only stressenergy components associated with q. Since u for the fluid is $(1,0)$ in its rest frame, then

$$\mathrm{T}^{\alpha\beta} = \mathrm{u}^{\alpha}\mathrm{q}^{\beta} + \mathrm{u}^{\beta}\mathrm{q}^{\alpha}$$

is true in that frame and hence true in general.

Solution 5.27. In the fluid rest frame

$$S^0 = \text{ entropy density } = ns$$
$$S^j = \text{ entropy flux } = \text{ heat flux } /T = q^j/T.$$

Since $q^0 = 0, u^0 = 1$ in the fluid rest frame $S = nsu + q/T$ is true in the fluid rest frame, and hence in general.

Solution 5.28. For the stress energy of the system we have

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\text{fluid}} + \mathbf{T}_{\text{heat}} = [(\mathbf{P}+\rho)\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} + \mathbf{Pg}] + [\mathbf{q}\otimes\mathbf{u} + \mathbf{u}\otimes\mathbf{q}]$$

We compute the equation expressing energy conservation along the fluid flow:

$$0 = (\nabla\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{u} = (\nabla\cdot\mathbf{T}_{\text{fluid}})\cdot\mathbf{u} + (\nabla\cdot\mathbf{T}_{\text{heat}})\cdot\mathbf{u}. \tag{1}$$

By a short calculation (see Solution 5.20) the first term is seen to be $-\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}\tau + (\mathrm{dn}/\mathrm{d}\tau)(\mathrm{P}+\rho)/\mathrm{n}$ which by the 1^{st} law of thermodynamics equals $-\mathrm{nTds}/\mathrm{d}\tau$ (see Problem 5.19). The second term is

$$(\nabla\cdot\mathbf{T}_{\text{heat}})\cdot\mathbf{u} = \left(\mathbf{q}^{\mu}\mathbf{u}^{\nu} + \mathbf{u}^{\mu}\mathbf{q}^{\nu}\right)_{;\nu}\mathbf{u}_{\mu}$$

Since $\mathrm{q}^{\alpha}\mathrm{u}_{\alpha} = 0$ (heat flux is spacelike in comoving frame) and $\mathrm{u}^{\alpha}\mathrm{u}_{\alpha} = -1$, which imply

$$0 = (q^{\mu}u_{\mu})_{;\nu} = q^{\mu}_{;\nu}u_{\mu} + q^{\mu}u_{\mu;\nu}$$
$$0 = (u^{\mu}u_{\mu})_{;\nu} = 2u^{\mu}_{;\nu}u_{\mu}$$

the second term reduces to $-q\cdot a - \nabla\cdot q$. Thus Equation (1) becomes

$$0 = -\mathrm{nTds/d}\tau - \mathrm{q}\cdot\mathrm{a} - \nabla\cdot\mathrm{q}.$$

Finally using the definition $S = nsu + q/T$, we compute

$$\begin{aligned}\nabla\cdot S &= s\nabla\cdot(nu) + n(\nabla s\cdot u) + \frac{1}{T}\nabla\cdot q - \frac{\nabla T}{T^2}\cdot q\\ &= n\frac{ds}{dr} + \frac{1}{T}\nabla\cdot q - \frac{\nabla T\cdot q}{T^2}\\ &= -\frac{q\cdot a}{T} - \frac{\nabla T}{T^2}\cdot q\end{aligned}$$

The second term says entropy is generated by heat flow thru a temperature gradient, as in nonrelativistic thermodynamics. The first term says that it is generated by flow along an acceleration, this is a "redshift" effect arising from the fact that in a accelerated system, constant temperature is not an equilibrium state: photons from the "forward" side are blueshifted in going backward, thus carrying a net heat flux.

Solution 5.29. An equilibrium state obtains when there is no entropy generation, so according to the results of Problem 5.28

$$-q\cdot a = \frac{\nabla T}{T}\cdot q$$

must hold for all heat flows q. Thus we must have $a = -\nabla\ln T$. The solution to this equation is $\ln T = -\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{x}+$ constant, or

$$T = T_0\exp(-\underset{\sim}{a}\cdot\underset{\sim}{x})$$

Solution 5.30. Since $\mathrm{T}^{\alpha\beta}{}_{\mathrm{u}_\alpha} = -\rho\mathrm{u}^\beta$ there are no energy flow terms, hence $q = 0$ and $s = nsu$. The rate of entropy production is thus

$$\mathrm{S}^\alpha_{;\alpha} = (\mathrm{nu}^\alpha)_{;\alpha}\,\mathrm{s} + \mathrm{n}\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{d}\tau} = \mathrm{n}\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{d}\tau}$$

where the second equality follows from baryon number conservation $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathrm{nu}) = 0$.

With the first law of thermodynamics

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\rho+\mathrm{p}}{\mathrm{n}}\frac{\mathrm{dn}}{\mathrm{d}\tau} + \mathrm{nT}\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{d}\tau}$$

and the law of baryon conservation

$$(\mathrm{nu}^\alpha)_{;\alpha} = \frac{\mathrm{dn}}{\mathrm{d}\pi} + \mathrm{n}\theta$$

the rate of entropy production can be written as

$$\mathrm{S}^a_{;a} = \frac{1}{\mathrm{T}}\left[\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\tau} + \theta(\rho+\mathrm{p})\right]$$

To express the right hand side in terms of the viscosity coefficients take the divergence of the vector $T^{a\beta}{}_{u_\alpha}$:

$$-\left(\rho\mathrm{u}^\beta\right)_{;\beta} = -\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\tau} - \rho\theta = \left(\mathrm{T}^{\alpha\beta}\mathrm{u}_\alpha\right)_{;\beta} = \mathrm{T}^{\alpha\beta}\mathrm{u}_{\alpha;\beta}$$

The last term on the right can be calculated using the stress-energy for the viscous fluid and the expansion for $u_{\alpha;\beta}$ given in Problem 5.18. The $\mathrm{T}^{a\beta}\omega_{a\beta}$ term vanishes by symmetry; the $\mathrm{T}^{a\beta}\mathrm{a}_\alpha\mathrm{u}_\beta$ term vanishes since $\mathrm{T}^{\alpha\beta}\mathrm{u}_\beta \propto \mathrm{u}^\alpha$ and we are left with

$$\begin{aligned}\mathrm{T}^{a\beta}\mathrm{u}_{a;\beta} &= \left[\mathrm{pu}^a\mathrm{u}^\beta + (\mathrm{p}-\zeta\theta)\mathrm{P}^{a\beta} - 2\eta\sigma^{\alpha\beta}\right]\left[\sigma_{a\beta} + \frac{1}{3}\theta\mathrm{P}_{a\beta}\right]\\ &= -2\eta\sigma_{a\beta}\sigma^{\alpha\beta} + \theta(\mathrm{p}-\zeta\theta)\end{aligned}$$

[Here we used the easily verified relations

$$\mathrm{u}^a\sigma_{a\beta} = 0, \quad \mathrm{P}_{\alpha\beta}\sigma^{a\beta} = 0, \quad \mathrm{P}_{\alpha\beta}\mathrm{P}^{a\beta} = 3.]$$

The result then is

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\tau} + \theta(\rho+\mathrm{p}) = 2\eta\sigma_{a\beta}\sigma^{\alpha\beta} + \zeta\theta^2$$

When this is substituted in our previous formula for $S^\alpha{}_{;a}$ the desired equation results.

Solution 5.31. We know that projecting $\mathrm{T}^{\alpha\beta}{}_{,\beta}$ along u_α gives an equation of local energy conservation; to get an equation of motion for the fluid, we project perpendicular to u_a.

$$0 = \mathrm{p}_a^\gamma \mathrm{T}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = \mathrm{P}_a^\gamma \Big(\rho, \beta^{\mathrm{u}_\mathrm{u}\beta} + \rho \mathrm{u}^\alpha, \beta^{\mathrm{u}^\beta + \rho \mathrm{u}^\alpha \mathrm{u}^\beta, \beta^{+\mathrm{p}}, \beta^{\mathrm{p}}{}_{\alpha\beta}}$$
$$+ \mathrm{p}\mathrm{P}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} - 2\eta, \beta^\sigma \sigma^{\alpha\beta} - 2\eta\sigma^{\alpha\beta}{}_{,\beta} - \zeta, \beta^{\theta \mathrm{P}^{\alpha\beta}} - \zeta\theta, \beta^{\mathrm{P}^{\alpha\beta}} - \zeta\theta \mathrm{P}^{\alpha\beta}{}_{,\beta}\Big)$$

We now use the following identities: $\mathrm{P}_\alpha^\gamma \mathrm{u}^\alpha = 0$,

$$\mathrm{P}_a^\gamma \mathrm{u}^\alpha_{,\beta} = \mathrm{u}^\gamma_{,\beta} + \mathrm{u}^\gamma \mathrm{u}_a \mathrm{u}^\alpha_{,\beta} = \mathrm{u}^\gamma_{,\beta}$$
$$\mathrm{P}_a^\gamma \mathrm{P}^{\alpha\beta} = \mathrm{P}^{\gamma\beta}$$
$$\mathrm{P}_a^\gamma \mathrm{P}^{\alpha\beta}_{,\beta} = \mathrm{P}_a^\gamma \left(\mathrm{u}^\alpha \mathrm{u}^\beta\right)_{,\beta} = \mathrm{u}^\gamma_{,\beta} \mathrm{u}^\beta$$
$$\mathrm{P}_a^{\gamma\alpha\beta} = {}_\sigma\gamma\beta$$

$\mathrm{p}^{\gamma\,\alpha\beta}_{\alpha\alpha}{}_{,\beta} = \sigma^{\gamma\beta}{}_{,\beta} + \mathrm{u}^\gamma \mathrm{u}_\alpha \sigma^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = \sigma^{\gamma\beta}{}_{,\beta} - \mathrm{u}^\gamma \mathrm{u}_{\alpha,\beta^\sigma}{}^{\alpha\beta} = \sigma^{\gamma\beta}{}_{,\beta} - \mathrm{u}^\gamma \sigma_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}$.
With these identities the projected equations of motion become:

$$0 = (\rho + \mathrm{p})\mathrm{u}_{,\beta^\mathrm{u}}{}^\beta + \mathrm{p}_{,\beta^\mathrm{P}}{}^{\alpha\beta} - 2\left(\eta\sigma^{\gamma\beta} + \zeta\theta \mathrm{P}\gamma\beta\right)_{,\beta}$$
$$+ 2\eta \mathrm{u}^\gamma \sigma_{a\beta^\sigma} \sigma^{\alpha\beta} + \zeta\theta^2 \mathrm{u}^\gamma \tag{1}$$

In the nonrelativistic limit,

$$u^t \approx 1, \quad u^j \approx v^j, \quad p = \mathcal{O}\left(v^2\right), \quad \rho = \mathcal{O}(1)$$

Taking the j -component of Equation (1), and working to $\mathcal{O}\left(\mathrm{v}^2\right)$, we get

$$0 = \rho\left(\mathrm{v}^\mathrm{j}_{,\mathrm{t}} + \mathrm{v}^\mathrm{j}_{,\mathrm{k}} \mathrm{v}^\mathrm{k}\right) + \mathrm{p}_{,\mathrm{j}}$$
$$- \left[\eta\left(\mathrm{v}_{\mathrm{j},\mathrm{k}} + \mathrm{v}_{\mathrm{k},\mathrm{j}} - \frac{2}{3}\delta_{\mathrm{jk}} \mathrm{v}^\mathrm{m}_{,\mathrm{m}}\right)\right]_{,\mathrm{k}} + \left(\zeta \mathrm{v}^\mathrm{m}_{,\mathrm{m}}\right)_{,\mathrm{j}}$$

which is the Navier-Stokes equation.
Solution 5.32. For a perfect Maxwell-Boltzmann gas,

$$\mathrm{p} = \mathrm{nkT} \tag{1}$$
$$\rho/\mathrm{n} = \mathrm{U}(\ \mathrm{T}) \tag{2}$$

Equation (2) says that the energy per particle is a function of temperature alone. From the first law of relativistic thermodynamics,

$$\mathrm{Tds} = \mathrm{d}(\rho/\mathrm{n}) + \mathrm{pd}(1/\mathrm{n}) \tag{3}$$
$$= \frac{\mathrm{dU}}{\mathrm{dT}}\mathrm{dT} + \mathrm{pd}\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\right)$$

we see that

$$c_v = \frac{dU}{dT} \tag{4}$$

Equation (1) implies that

$$\mathrm{pd}\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\right) + \frac{1}{\mathrm{n}}\mathrm{dp} = \mathrm{kdT} \tag{5}$$

so Equation (3) becomes

$$\mathrm{Tds} = \left(\frac{\mathrm{dU}}{\mathrm{dT}} + \mathrm{k}\right)\mathrm{dT} - \frac{1}{\mathrm{n}}\mathrm{dp} \tag{6}$$

and thus

$$c_p = \frac{dU}{dT} + k = c_v + k \tag{7}$$

From Equation (1)

$$\Gamma_1 = \left.\frac{\partial \log p}{\partial \log n}\right|_s = 1 + \left.\frac{n}{\bar{T}}\frac{dT}{dn}\right|_s \tag{8}$$

But Equation (3) implies that, when s = constant,

$$c_v \frac{dT}{dn} = \frac{p}{n^2} = k\frac{T}{n} = (c_p - c_v)\frac{T}{n} \tag{9}$$

Substituting Equation (9) in Equation (8) gives us

$$\Gamma_1 = 1 + \frac{(c_p - c_v)}{c_v} = \gamma.$$

Solution 5.33. From Problem 5.32,

$$\gamma = \Gamma_1 = \left.\frac{\partial \log p}{\partial \log n}\right|_s$$

so if γ = constant,

$$\mathrm{p} = \mathrm{Kn}^\gamma$$

For adiabatic changes the first law of thermodynamics is

$$\mathrm{d}\rho = \frac{\rho + \mathrm{p}}{\mathrm{n}}\mathrm{dn} = \left(\frac{\rho}{\mathrm{n}} + \mathrm{Kn}^{\gamma-1}\right)\mathrm{dn}$$

or

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{\rho}{n}\right) = Kn^{\gamma-2}$$

so that the solution is

$$\frac{\rho}{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{Kn}^{\gamma-1}}{\gamma - 1} + \text{ constant}$$

But when $n \to 0$, then $\rho/n \to m$, so

$$\rho = \mathrm{mn} + \frac{\mathrm{Kn}^\gamma}{\gamma - 1}$$

Solution 5.34. We obtain scalar integrals by dotting various combinations of u^α into the vector and tensor integrals for J^μ and $T^{\mu\nu}$. Thus

$$\mathrm{n} = -\mathrm{J}^{\mu_\mathrm{u}} = \int \Re \mathrm{d}^3\mathrm{P} = \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{h}^3}\int_0^\infty \frac{4\pi \mathrm{P}^2 \mathrm{dP}}{\exp\left[\left(\mathrm{P}^2 + \mathrm{m}^2\right)^{\frac{1}{2}}/\mathrm{kT} - \theta\right] - \varepsilon}$$

where $\mathrm{g} = 2\ \mathrm{J} + 1$. Make the substitution $\mathrm{P} = \mathrm{m}\sinh\chi$.
Then

$$\mathrm{n} = \frac{4\pi \mathrm{gm}^3}{\mathrm{h}^3}\int_0^\infty \frac{\sinh^2\chi\cosh\chi\ \mathrm{d}\chi}{\exp(\beta\cosh\chi - \theta) - \varepsilon} \tag{1}$$

where $\beta = \mathrm{m/kT}$. Similarly, we have

$$\begin{aligned}\mathrm{p} &= \frac{1}{3}\left(\mathrm{u}_\mu \mathrm{u}_\nu + \mathrm{g}_{\mu\nu}\right)\mathrm{T}^{\mu\nu} = \frac{1}{3}\int \pi \frac{\mathrm{P}^2}{\left(\mathrm{P}^2 + \mathrm{m}^2\right)^{\frac{1}{2}}}\ \mathrm{d}^3\mathrm{P} \\ &= \frac{4\pi \mathrm{gm}^4}{3\ \mathrm{h}^3}\int_0^\infty \frac{\sinh^4\chi\ \mathrm{d}\chi}{\exp(\beta\cosh\chi - \theta) - \varepsilon}\end{aligned} \tag{2}$$

and finally,

$$\begin{aligned}\rho - 3\mathrm{p} &= -\mathrm{g}_{\mu\nu}\mathrm{T}^{\mu\nu} = \mathrm{m}^2\int \pi \frac{\mathrm{d}^3\mathrm{P}}{\left(\mathrm{P}^2 + \mathrm{m}^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{4\pi g\ \mathrm{m}^4}{\mathrm{h}^3}\int_0^\infty \frac{\sinh^2\chi\ \mathrm{d}\chi}{\exp(\beta\cosh\chi - \theta) - \varepsilon}\end{aligned} \tag{3}$$

(b) From Equation (2),

$$\mathrm{dp} = \frac{4\pi \mathrm{gm}^4}{3\ \mathrm{h}^3} \int_0^\infty \frac{\sinh^4\chi\ \mathrm{d}\chi(\beta\cosh\chi \mathrm{dT/T} + \mathrm{d}\theta)\exp(\beta\cosh\chi - \theta)}{[\exp(\beta\cosh\chi - \theta) - \varepsilon]^2}.$$

Now integrate by parts, differentiating the terms $\sinh^3\chi\cosh\chi$ and $\sinh^3\chi$ to get
$\mathrm{dp} = \frac{4\pi \mathrm{gm}^4}{3\ \mathrm{h}^3}\frac{1}{\beta}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\chi\left[\left(3\sinh^2\chi + 4\sinh^4\chi\right)\beta \mathrm{dT/T} + 3\sinh^2\chi\cosh\chi\ \mathrm{d}\theta\right]}{\exp(\beta\cosh\chi - \theta) - \varepsilon}$
Substitute expressions (1), (2), and (3) for the integrals, and find

$$\mathrm{dp} = (\rho + \mathrm{p})\mathrm{dT/T} + \mathrm{nkT}\ \mathrm{d}\theta. \tag{4}$$

(c) From the definition of μ we have

$$\mathrm{d}\mu = \mathrm{d}\rho/\mathrm{n} + \mathrm{dp/n} - (\rho + \mathrm{p})\mathrm{dn/n}^2 - \mathrm{sdT} - \mathrm{Tds},$$

but

$$\mathrm{d}\rho = (\rho + \mathrm{p})\mathrm{dn/n} + \mathrm{nTds},$$

therefore

$$\mathrm{d}\mu = \mathrm{dp/n} - \mathrm{sdT} = \mathrm{dp/n} - (\rho + \mathrm{p})\mathrm{dT}/(\mathrm{nT}) + \mu\mathrm{dT/T}.$$

Here we have substituted for s in terms of μ. Comparing this with Equation (4), we identify

$$\mu = \mathrm{kT}\theta$$

(d) For $\varepsilon = 0$

$$\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{n}} = \frac{\frac{\mathbf{m}}{3}\int_0^\infty \sinh^4\chi \mathrm{e}^{-\beta\cosh\chi}\mathrm{d}\chi}{\int_0^\infty \sinh^2\chi\cosh\chi \mathrm{e}^{-\beta\cosh\chi}\mathrm{d}\chi},$$

but

$$\int_0^\infty \sinh^4\chi\exp(-\beta\cosh\chi)\mathrm{d}\chi = -\frac{1}{\beta}\sinh^3\chi\exp(-\beta\cosh\chi)\Big|_0^\infty + \frac{3}{\beta}\int_0^\infty \sinh^3\chi\cosh\chi\exp(-\beta\cosh\chi)\mathrm{d}\chi$$

The first term on the right vanishes, so

$$\mathrm{p} = \mathrm{nkT}$$

(e) For $\varepsilon = 0$, the integrals (1), (2), and (3) can be expressed in terms of modified Hankel functions, since

$$\begin{aligned} K_n(\beta) &= \frac{\beta^n}{(2n-1)!!}\int_0^\infty dx \sinh^{2n}\chi\exp(-\beta\cosh\chi) \\ &= \frac{\beta^{n-1}}{(2n-3)!!}\int_0^\infty dx \sinh^{2n-2}\chi \quad \cosh\chi e^{-\beta\cosh\chi} \end{aligned}$$

Thus for $a = 4\pi g m^3 e^\theta h^{-3}$ we have

$$\begin{aligned} \mathrm{n} &= \mathrm{aK}_2(\beta)/\beta \\ \mathrm{p} &= \mathrm{amK}_2(\beta)/\beta^2 \\ \rho - 3\mathrm{p} &= \mathrm{amK}_1(\beta)/\beta^2. \end{aligned}$$

13.7.6 6 Metrics

Witric geometry, geometry specified by a distance formula $\mathrm{ds}^2 = \mathrm{y}^\mathrm{a}\mathrm{a}^\mathrm{a}\mathrm{dx}\beta$, is the foundation for general relativity and for most of the diving chapters in this book. The most important metric is of course a Stime metric, formally a metric which can locally be transformed to minumski metric, i.e. for every point P in the spacetime, there is coordinate transformation which makes $\mathrm{g}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ at P .

Problem 6.1.

(a) Prove that the 2 -dimensional metric space described by

$$ds^2 = dv^2 - v^2 du^2 \tag{1}$$

West the flat 2-dimensional Minkowski space usually described by

$$\mathrm{ds}^2 = \mathrm{dx}^2 - \mathrm{dt}^2 \tag{2}$$

ϕ tis by finding the coordinate transformations $x(v,u)$ and $t(v,u)$ Stich take the metric (2) into the form (1).
(b) For an unaccelerated particle, show that the component of the Seromentum P_u is constant, but that P_v is not.

Noder 6.2. Show that the line element

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{R}^2 \left[\mathrm{d}\alpha^2 + \sin^2\alpha \left(\mathrm{d}\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \ \mathrm{d}\phi^2 \right) \right]$$

expesents a hypersphere of radius R in Euclidean 4-space, i.e. a locus et points a distance R from a given point.

Problem 6.3. The metric for the surface of a globe of the Earth is

$$\mathrm{ds}^2 = \mathrm{a}^2 \left(\mathrm{d}\lambda^2 + \cos^2\lambda \ \mathrm{d}\phi^2 \right)$$

where λ is the latitude and ϕ is the longitude. The metric of a flat map of the world, with Cartesian coordinates x and y is $ds^2 = dx^2 + dy^2$ however we are not interested in this geometry, but in that of the globe it represents. What is the metric of the globe expressed in x and y coord nates for (a) a cylindrical projection, and (b) a stereographic projection map of the world?

Problem 6.4. Mercator's projection is defined as follows: The map coordinates are rectangular Cartesian coordinates (x, y) such that a straight line on the map is a line of constant compass bearing on the globe
(a) Show that the map is defined by $\mathrm{x} = \phi, \mathrm{y} = \log\cot\frac{1}{2}\theta$, where (θ, ϕ) are the polar coordinates of a point on the globe.
(b) What is the metric of the globe in (x, y) coordinates?
(c) Show that the great circles are given by $\sinh y = a\sin(x+\beta)$ (except for the special cases $y = 0$ or $x =$ constant).

Problem 6.5. A space purports to be 3-dimensional, with coordinates x, y, z and the metric

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \left(\frac{3}{13}dx + \frac{4}{13}dy + \frac{12}{13}dz \right)^2$$

Show that it is really a two-dimensional space, and find two new coordinates ζ and η for which the line element takes the form

$$\mathrm{d}\mathbf{s}^2 = \mathrm{d}\zeta^2 + \mathrm{d}\eta^2$$

Problem 6.6. Show that a contraction of a vector V with the "projection tensor" $\mathbf{P} \equiv \mathbf{g} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ projects $\mathbf{V}$ into the 3-surface orthogonal to the 4 -velocity vector u. If n is a unit spacelike vector show that

$$\mathbf{P} \equiv \mathbf{g} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$$

- corresponding projection operator. Show that there is no unique sition operator orthogonal to a null vector.
  6.7. Show that a conformal transformation of a metric, i.e. $\mathrm{g}_{\alpha\beta} \rightarrow$ All A β for an arbitrary function f , preserves all angles. (Figure out indefine angles!) Show that all null curves remain null curves.
  6.8. One can put a metric on the velocity space of a particle by the distance between two nearby velocities as their relative
  my. Show that the metric can be written in the form

$$\mathrm{ds}^2 = \mathrm{d}\chi^2 + \sinh^2\chi \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \ \mathrm{d}\phi^2 \right)$$

the magnitude of the velocity is $v = \tanh\chi$.

4. Tem 6.9. A manifold which has the topology of a 2 -sphere has - in a Dorhood of $\theta = \frac{1}{2}, \quad \chi = 0$ - the metric

$$\mathrm{ds}^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \left(\theta - \theta^3\right)^2 \ \mathrm{d}\chi^2$$

Als manifold has precisely one point which is not locally flat, and that is a "conical" singularity. Show that there are two different maxiDil analytic extensions of the metric, i.e. that there are two different ways Estending the metric, and satisfying the condition that there is only one meal singularity. Note that this shows that a metric in a local coordipatch does not always pin down the global nature of the manifold.
Wint: consider the periodicity of the χ coordinate.)
Toblem 6.10. Find the most general form for a spacetime metric that is spatially) spherically symmetric.

6: Solutions

The exact expression for ρ/n is

$$\rho/\mathrm{n} = \mathrm{m}\left[\ \mathrm{K}_1(\beta)/\mathrm{K}_2(\beta) + 3/\beta\right]$$

For $\mathrm{kT} \ll \mathrm{m}, \beta \to \infty$. In this limit

$$\mathrm{K_n}(\beta) \to \left(\frac{\pi}{2\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\beta}\left[1 + \frac{4\mathrm{n}^2 - 1}{8\beta} + \cdots\right]$$

so

$$\rho/n \to m\left[\frac{1 + 3/(8\beta)}{1 + 15/(8\beta)} + \frac{3}{\beta}\right] = m\left(1 + \frac{3}{2}\frac{kT}{m}\right)$$

For $\mathrm{kT} \gg \mathrm{m}, \beta \to 0,\ \mathrm{K}_1(\beta)/\mathrm{K}_2(\beta) \to 0$, so $\rho/\mathrm{n} \to 3\mathrm{kT}$. Whew!
Solution 5.35. From Problem 5.32,

$$\gamma = \left(\mathrm{c_v} + \mathrm{k}\right)/\mathrm{c_v} = 1 + \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{dU/dT}}$$

where, from Problem 5.34

$$\mathrm{U}(\ \mathrm{T}) = \mathrm{m}\left\{\ \mathrm{K}_1(\beta)/\mathrm{K}_2(\beta) + 3/\beta\right\}, \quad \beta = \mathrm{m/kT}$$

This gives the formal answer. Note that for $\mathrm{kT} \ll \mathrm{m}, \mathrm{U} = \mathrm{m} + 3\mathrm{kT}/2$, $\gamma = 5/3$, and that for $\mathrm{kT} \gg \mathrm{m}, \mathrm{U} = 3\mathrm{kT}$ and $\gamma = 4/3$.
Solution 6.1.
(a) The analogy with polar coordinates suggests

$$\begin{array}{llll} x & = v\cosh u & x^2 - t^2 & = v^2 \\ t & = v\sinh u & x/t & = \coth u \end{array}$$

Then

$$\begin{aligned} dx^2 &= (dv\cosh u + duv\sinh u)^2 \\ dt^2 &= (dv\sinh u + duv\cosh u)^2 \\ dx^2 - dt^2 &= dv^2 - v^2du^2 \end{aligned} \tag{1}$$

(b) Solving Equations (1) for du and dv gives

$$\begin{aligned} dv &= dx\cosh u - dt\sinh u \\ du &= v^{-1}(dt\cosh u - dx\sinh u) \end{aligned}$$

and thus for a particle of unit mass,

$$P_u = g_{uu}P^u = -v^2\frac{du}{d\tau} = -v\cosh u\frac{dt}{d\tau} + v\sinh u\frac{dx}{d\tau} = -x\frac{dt}{d\tau} + t\frac{dx}{d\tau}$$

For an unaccelerated particle $\mathrm{x} = \text{const.} + \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}\mathrm{t}$, and $\mathrm{dt/d\tau}, \mathrm{dx/d\tau}$ are also both constant, so

$$P_u = \ \text{const.}\ - t\frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau} + t\frac{dx}{d\tau} = \ \text{constant.}$$

Now for $\mathrm{P_v}$, use

$$-m^2 = \mathbf{P}\cdot\mathbf{P} = g^{vv}\left(P_v\right)^2 + g^{uu}\left(P_u\right)^2 = \left(P_v\right)^2 - \left(P_u\right)^2/v^2$$

So, $P_v^2 = P_u^2/v^2 - m^2$, which is not constant since in general v varies along the particle's trajectory. It turns out that whenever the metric coefficient does not depend on some coordinate (in this case **u**), then the covariant momentum of that coordinate (here P_u) is conserved. (See Problem 7.13 or MTW, p. 651.)
Solution 6.2. The metric in Euclidean 4-space is

$$\mathrm{ds}^2 = \mathrm{dx}_1^2 + \mathrm{dx}_2^2 + \mathrm{dx}_3^2 + \mathrm{dx}_4^2. \tag{1}$$

The equation of a hypersphere of radius R is

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2. \tag{2}$$

By analogy with the 3 -dimensional case, introduce coordinates on the hypersphere:

$$\begin{aligned} x_4 &= R\cos\alpha \\ x_3 &= R\sin\alpha\cos\theta \\ x_2 &= R\sin\alpha\sin\theta\cos\phi \\ x_1 &= R\sin\alpha\sin\theta\sin\phi \end{aligned} \tag{3}$$

Then Equation (2) is automatically satisfied; taking the differential of Equation (3) with R constant, and substituting in Equation (1) yields the required metric of the hypersphere.

Solution 6.3.

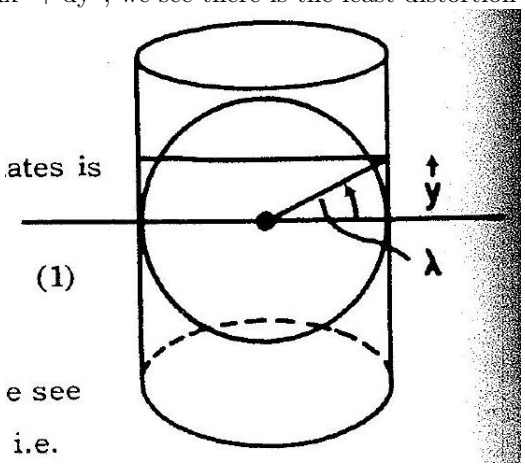
(a) Introduce x and y coordinates on the cylinder by

$$\begin{aligned} x &= \phi \\ y &= a\tan\lambda. \end{aligned}$$

The metric of the sphere in these coordinates is

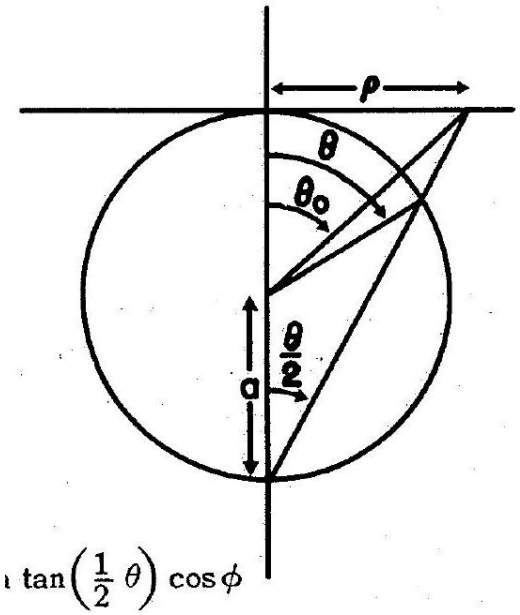
$$ds^2 = \frac{a^4 dy^2}{(a^2+y^2)^2} + \frac{a^4 dx^2}{a^2+y^2}$$

Comparing this with $ds^2 = dx^2 + dy^2$, we see there is the least distortion near $y = 0$, i.e.



near the equator.

(b) For the stereographic projection, it is slightly easier to use the usual polar angle $\theta = 90° - \lambda$. Let (θ, ϕ) be the coordinates of a point on the sphere, and (θ_0, ϕ_0) the spherical polar coordinates of the projected point. Clearly $\phi_0 = \phi$. The distance of the projected point from the axis is $\rho = 2a\tan(\theta/2)$, so we introduce coordinates



$$x = \rho\cos\phi = 2a\tan\left(\frac{1}{2}\theta\right)\cos\phi$$
$$y = \rho\sin\phi = 2a\tan\left(\frac{1}{2}\theta\right)\sin\phi$$

and it is easily verified that

$$ds^2 = a^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) = \cos^4\left(\frac{1}{2}\theta\right)\left(dx^2 + dy^2\right).$$

Here the distortion is least near $\theta = 0$, the north pole. This projection is said to be conformal, because $\left(ds^2\right)_{sphere} = g\left(ds^2\right)_{\text{map}}$, where g is some function, in this case equal to $\cos^4(\theta/2)$. A conformal projection preserves angles (see Problem 6.7).

Solution 6.4.

(a) Imagine traveling along some curve $\phi = \phi(\theta)$. The compass bearing ψ is given by

$$\tan\psi = \sin\theta\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta}. \tag{1}$$

(Note that ψ is measured clockwise from the y-axis.) On the map we have

$$\frac{dy}{dx} = \tan\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan\psi}. \tag{2}$$

Now we combine this with Equation (1):

$$\sin\theta\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{\mathrm{dx}/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dy}/\mathrm{d}\theta} = -\frac{\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial\theta} + \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial\theta} + \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta}}$$
$$\left(\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial\theta} + \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta}\right)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta = -\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial\theta} - \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta}. \tag{3}$$

Since Equation (3) must hold for arbitrary $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\theta$ at the point we are considering, we can equate coefficients of powers of $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\theta$ on the two sides of Equation (3). This gives us

$$\begin{array}{lll} \partial y/\partial\phi = 0, & & y = y(\theta) \\ \partial x/\partial\theta = 0, & & x = x(\phi) \\ -\sin\theta\partial y/\partial\theta = & & \partial x/\partial\phi \end{array} \tag{6}$$

Equations (4) and (5) imply that the left-hand side of Equation (6) is a function of θ only, while the right-hand side is a function of ϕ only, and so each side must be a constant which we can choose to be 1 . Thus the map is given by

$$x = \phi, \quad y = -\int\frac{d\theta}{\sin\theta} = \log\cot\frac{1}{2}\theta \tag{7}$$

(b) Take the radius to be 1 for convenience. Then

$$\begin{aligned} \mathrm{ds}s^2 &= \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\ \mathrm{d}\phi^2 \\ &= \sin^2\theta\left(\mathrm{dx}x^2 + \mathrm{dy}y^2\right) \\ &= \operatorname{sech}^2\mathrm{y}\left(\ \mathrm{d}x^2 + \mathrm{dy}y^2\right) \end{aligned} \tag{8}$$

(c) The great circles are the geodesics of the 2 -sphere. The geodesic equations are easy to solve, since we have two first integrals. Let a dot denote d/ds; then Equation (8) gives

$$\operatorname{sech}^2 y\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = 1 \tag{9}$$

Since x is an ignorable coordinate in the metric (8), $g_{xx}\dot{x}$ is constant (see Solution 7.13), i.e.

$$\left(\operatorname{sech}^2\mathrm{y}\right)\dot{\mathrm{x}} = \gamma \tag{10}$$

When neither $\dot{x}$ nor $\dot{y}$ vanishes, we can eliminate s from Equations (9) and (10):

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2} = \frac{\lambda^2 - \cosh^2 y}{\cosh^2 y} \tag{11}$$

where $\lambda = 1/\gamma$. Equation (11) is easily integrated by putting $z = \sinh y$. The result is

$$\sinh y = a \sin(x + \beta)$$

where $\alpha = \left(\lambda^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}$ and β is another constant of integration.
Solution 6.5. We can decide if the space is 3-dimensional or not by evaluating the 3 -volume spanned by dx dy dz

$$\begin{aligned} dV &= g^{\frac{1}{2}} dxdydz \\ &= \begin{vmatrix} 1-\left(\frac{3}{13}\right)^2 & -\left(\frac{3}{13}\right)\left(\frac{4}{13}\right) & -\left(\frac{12}{13}\right)\left(\frac{3}{13}\right) \\ -\left(\frac{3}{13}\right)\left(\frac{4}{13}\right) & 1-\left(\frac{4}{13}\right)^2 & -\left(\frac{4}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right) \\ -\left(\frac{12}{13}\right)\left(\frac{3}{13}\right) & -\left(\frac{4}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right) & 1-\left(\frac{12}{13}\right)^2 \end{vmatrix} dxdydz = 0. \end{aligned}$$

Since this is identically zero for all x, y, z, the 3 coordinates are always linearly dependent. The space is thus either two dimensional or one dimensional. We can now throw away one coordinate, say z, by taking $z =$ constant; this is allowed because it is an "ignorable coordinate," i.e. the coefficients of the metric do not depend on z. The metric left is

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - \left(\frac{3}{13}dx + \frac{4}{13}dy\right)^2.$$

It is in fact 2-dimensional, not 1-dimensional, because

$$g = \det \begin{pmatrix} 1-\left(\frac{3}{13}\right)^2 & -\left(\frac{3}{13}\right)\left(\frac{4}{13}\right) \\ \left(\frac{3}{13}\right)\left(\frac{4}{13}\right) & 1-\left(\frac{4}{13}\right)^2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

It is not difficult to find the coordinate transformation (e.g. by GramSchmidt orthogonalization)

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{12}{5}\left(\frac{3}{13}\mathrm{x} + \frac{4}{13}\mathrm{y}\right) \\ \eta &= \frac{13}{5}\left(-\frac{4}{13}\mathrm{x} + \frac{3}{13}\mathrm{y}\right) \end{aligned}$$

which gives $\mathrm{ds}^2 = \mathrm{d}\xi^2 + \mathrm{d}\eta^2$, obviously the simplest form of the metric. The more sophisticated reader will notice that the original metric was of the form

$$\mathrm{g}_{a\beta} = \delta_{a\beta} - \mathrm{V}_a \, \mathrm{V}_\beta$$

where V_a is the Euclidean unit vector $\left(\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}\right)$. This metric just projects a 3 -dimensional Euclidean space into a 2 -dimensional space perpendicular to V, so it is obvious that there had to exist ξ and η coordinates which make it a flat-space 2 -dimensional metric.
Solution 6.6. Let A be an arbitrary vector. We want to see if $\mathrm{P} \cdot \mathrm{A}$ is orthogonal to $\mathbf{u}$, i.e. if $\mathbf{u} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = 0$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{u}^\alpha \left(\mathbf{g}_{\alpha\beta} + \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\beta\right) \mathbf{A}^\beta = \mathbf{u}^\alpha \mathbf{A}_\alpha + \left(\mathbf{u}^\alpha \mathbf{u}_\alpha\right) \mathbf{u}_\beta \mathbf{A}^\beta = \mathbf{u}_\alpha \mathbf{A}^\alpha - \mathbf{u}_\beta \mathbf{A}^\beta = 0.$$

Also it is easy to see that if $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = 0$, then $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$, so $\mathbf{A}$ is unaffected by projection. If n is a unit spacelike vector, we have

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} &= \mathrm{n}^\alpha \left(\mathrm{g}_{\alpha\beta} - \mathrm{n}_\alpha \mathrm{n}_\beta\right) \mathrm{A}^\beta \\ &= \mathrm{n}^\alpha \mathrm{A}_\alpha - \left(\mathrm{n}^\alpha \mathrm{n}_\alpha\right) \mathrm{n}_\beta \mathrm{A}^\beta \\ &= \mathrm{n}_a \, \mathrm{A}^a - \mathrm{n}_\beta \mathrm{A}^\beta = 0 \end{aligned}$$

Likewise a vector already orthogonal to n is unaffected by projection. Suppose now that $\mathbf{P}$ is a projection operator orthogonal to a null vector k, so that $k \cdot P \cdot A = 0$ for all A. It is easy to see that $P+$ constant $\times \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}$ is also a projection operator since $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 0$; so $\mathbf{P}$ is not unique. (The set of null projection operators is not empty since it is easy to
check that for any 4 -vector w, one is $P = g - w \otimes k / k \cdot w$. However, there are no symmetric null projection operators at all.)
Solution 6.7. Let $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ be two vectors in the metric space. Obviously we want the angle to be related to the dot product $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$. We also want it to be unaffected by scaling A and B , so the natural choice is $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} / (|\mathbf{A}||\mathbf{B}|)$, which is $\cos\theta$ in the familiar Euclidean case. Now under $\mathrm{g}_{\alpha\beta} \to \mathrm{f}\left(\mathrm{x}^\mu\right) \mathrm{g}_{\alpha\beta}$ we have

$$\frac{A \cdot B}{(|A||B|)} = \frac{g_{a\beta} A^\alpha B^\beta}{\left(g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu g_{\rho\sigma} B^\rho B^\sigma\right)^{\frac{1}{2}}} \to \frac{f\left(x^\gamma\right) g_{a\beta} A^\alpha B^\beta}{\left[f\left(x^\gamma\right) g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu f\left(x^\gamma\right) g_{\rho\sigma} B^\rho B^\sigma\right]^{\frac{1}{2}}}$$

but the f's cancel, giving the same value as before. Null curves remain null curves because the square of their tangent vector remains zero

$$0 = \ell \cdot \ell = \mathrm{g}_{\mu\nu}\ell^{\mu}\ell^{\nu} \rightarrow \mathrm{f}\left(\mathrm{x}^{\gamma}\right)\mathrm{g}_{\mu\nu}\ell^{\mu}\ell^{\nu} = 0$$

Solution 6.8. The relative velocity ds between two velocities $\underset{\sim}{v}$ and $\underset{\sim}{\mathbf{v}} + \mathrm{d}\underset{\sim}{\mathbf{v}}$ is (by Problem 1.3) given by

$$ds^2 = \frac{(dv)^2 - (\underset{\sim}{v} \times dy)^2}{\left(1 - v^2\right)^2}$$

and

$$(\underset{\sim}{v} \times d\underset{\sim}{v})^2 = v^2(d\underset{\sim}{v})^2 - (\underset{\sim}{v} \cdot d\underset{\sim}{v})^2.$$

Let θ and ϕ be polar and azimuthal angles about the direction of $\underset{\sim}{v}$ (i.e. $\mathrm{v_z} = \mathrm{v}\cos\theta, \quad \mathrm{v_x} = \mathrm{v}\sin\theta\cos\phi, \quad \mathrm{v_y} = \mathrm{v}\sin\theta\sin\phi$). Then

$$(d\underset{\sim}{v})^2 = (dv)^2 + v^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

$$\underset{\sim}{v} \cdot d\underset{\sim}{v} = \frac{1}{2}d(\underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{v}) = vdv$$

$$ds^2 = \frac{dv^2}{\left(1 - v^2\right)^2} + \frac{v^2}{1 - v^2}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right).$$

Introduce the "rapidity parameter" $\mathrm{v} = \tanh\chi$. Then

$$ds^2 = d\chi^2 + \sinh^2\chi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

Note that for small $\mathrm{v}, \sinh\chi \sim \chi \sim \mathrm{v}$ and velocity space is flat, as we expect it to be in the Newtonian limit.

Solution 6.9. If we had $\sin^2\theta$ instead of $\left(\theta - \theta^3\right)$ the metric would just be that of the Euclidean 2-sphere. As given, it is obviously some sort of axially symmetric "warped" 2 -sphere with singularities possible at $\theta = 0, \pm 1$. From the given value of $\theta = \frac{1}{2}$, it is obvious that the range of θ can be extended to $0 < \theta < 1$. We must examine the cases $\theta = 0$ and $\theta = 1$ with some care to decide what range χ can take. We know that χ must be periodic because, as the metric shows, the coordinates $\theta = 0$, all χ) and ($\theta = 1$, all χ) each represent just one point.

For $\theta \approx 0$, we have

$$\mathrm{d}s^2 \approx \ \mathrm{d}\theta^2 + \theta^2\ \mathrm{d}\chi^2$$

If χ is periodic with period P , then the proper circumference of a small circle of radius $\Delta\theta$ is $\int(\Delta\theta)\mathrm{d}\chi = (\Delta\theta)\mathrm{P}$. If we are to avoid a conical singularity this must equal $2\pi\Delta\theta$, so $\mathrm{P} = 2\pi$. But now consider $\theta \approx 1$: The metric is

$$\mathrm{d}\ \mathrm{s}^2 \approx \ \mathrm{d}\theta^2 + (\theta - 1)^2(2)^2\ \mathrm{d}\chi^2$$

so the condition avoiding a conical singularity, is

$$\int_0^{\mathrm{P}} 2(\Delta\theta)\mathrm{d}x = 2\pi(\Delta\theta)$$

implies that $\mathrm{P} = \pi$. Thus we can either take $\mathrm{P} = 2\pi$ and have a conical singularity at $\theta = 1$, or $\mathrm{P} = \pi$ and have it at $\theta = 0$. These are two different global extensions of the manifold. (This problem is due to Gilbert Miller.)

Solution 6.10. A geometrical object exhibits a particular group symmetry if its functional change (i.e. its change in functional form) under the action
of the group vanishes. If ξ is an infinitesimal displacement, then under the infinitesimal coordinate transformation $x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}$, one can easily show that the functional change of the metric, $\bar{\delta}\mathrm{g}_{\mu\nu}$, is

$$\bar{\delta}\mathrm{g}_{\mu\nu} \equiv \mathrm{g}'_{\mu\nu}(\mathrm{x}) - \mathrm{g}_{\mu\nu}(\mathrm{x}) = -\mathrm{g}_{\mu\rho}\xi^{\rho}_{,\nu} - \mathrm{g}_{\rho\nu}\xi^{\beta}_{,\mu} - \mathrm{g}_{\mu\nu,\rho}\xi^{\rho} \tag{1}$$

(See Problem 13.12.) For spherical symmetry, $\bar{\delta}\mathrm{g}_{\mu\nu}$ must vanish under the rotation group, a particular realization of which is obtained from the generators

$$\xi^0 = 0, \quad \xi^{\mathrm{i}} = \varepsilon^{\mathrm{ij}}\mathrm{x}^{\mathrm{j}} \tag{2}$$

where $\varepsilon^{ij} = -\varepsilon^{ji}$ are three arbitrary infinitesimal constants. Substituting Equation (2) for the generators ξ^{μ} in Equation (1) and setting the left side to zero, one gets:

a. $\mu = \nu = 0$

$$\mathrm{g}_{00,\mathrm{i}}\varepsilon^{\mathrm{ij}}\mathrm{x}^{\mathrm{j}} = 0 \quad \text{or} \quad \mathrm{g}_{00,\mathrm{i}}\mathrm{x}^{\mathrm{j}} = \mathrm{g}_{00,\mathrm{j}}\mathrm{x}^{\mathrm{i}}$$

and hence

$$g_{00} = g_{00}\left(x^0, r^2\right) \tag{3a}$$
$$r^2 \equiv \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2$$

b. $\mu = 0, \nu \neq 0$

$$g_{0i}\varepsilon^{ij} + g_{0j,i}\varepsilon^{ik}x^k = 0$$
$$g_{0j} = \Gamma_{-1}\left(r^2, x^0\right)x^j \tag{3b}$$

where Γ_1 is an arbitrary function.
c. $\mu \neq 0, \nu \neq 0$

$$g_{ik}\varepsilon^{kj} + g_{\ell j}\varepsilon^{\ell i} + g_{ij,\ell}\varepsilon^{\ell k}x^k = 0$$
$$g_{ij} = \Gamma_2\left(r^2, x^0\right)\delta_{ij} + \Gamma_3\left(r^2, x^0\right)x^i x^j \tag{3c}$$

where Γ_2 and Γ_3 are again arbitrary functions.
From Equation (2) one can see that the above coordinate system $\left(\mathrm{x}^0, \mathrm{x}^1, \mathrm{x}^2, \mathrm{x}^3\right)$ is "cartesian-like." The group theoretically defined property of spherical symmetry is coordinate independent, however, and to find $\mathrm{g}_{\mu\nu}$ in any other coordinate system one merely transforms the metric given in Equations (3) in the usual way.

13.7.7 7 Covariant Differentiation and Geodesic Curves

The partial derivatives of a vector or tensor with respect to the coordia nates of a space (e.g. $\mathrm{A}^{\mu}{}_{,\nu}$ or $Q^{\alpha\beta\cdots}{}_{\gamma\delta\cdots,\nu}$) are not themselves components of a tensor. Rather, the curvilinearity of the coordinates (optional in flat space, but inevitable in a curved space) must be taken into account, leading to the idea of covariant differentiation.
The tensor formed by differentiating a tensor $\mathbf{Q}$ with components $\mathrm{Q}^{\alpha\beta\cdots}{}_{\gamma\delta\cdots}$ is denoted $\nabla\mathbf{Q}$ and has components denoted

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}^{\alpha\beta\cdots}_{\gamma\delta\cdots;\sigma} \equiv{}& \mathrm{Q}^{\alpha\beta\cdots}_{\gamma\delta\cdots,\sigma} {}^{a}_{\gamma\delta\cdots}\mathrm{Q}^{\nu\beta\cdots}_{\gamma\delta\cdots} \\ &+ \Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}\mathrm{Q}^{\alpha\nu\cdots}_{\gamma\delta\cdots\,\gamma\delta\cdots} - \Gamma^{\nu}_{\gamma\sigma}\mathrm{Q}^{\alpha\beta\cdots}_{\nu\delta\cdots} \\ &- \Gamma^{\nu}_{\delta\sigma}\mathrm{Q}^{\alpha\beta\cdots}_{\gamma\nu\cdots}\end{aligned}$$

where there is one "correction" term for every index of Q. The Γ 's are called Christoffel symbols or [affine] connection coefficients. In a coordibasis they are related to the partial derivatives of the metric by

$$\Gamma^{a}_{\beta\gamma} = \mathrm{g}^{\alpha\mu}\Gamma_{\mu\beta\gamma} = \frac{1}{2}\,\mathrm{g}^{a\mu}\left(\,\mathrm{g}_{\mu\beta,\gamma} + \mathrm{g}_{\mu\gamma,\beta} - \mathrm{g}_{\beta\gamma,\mu}\right)$$

(the first equality defines $\Gamma_{\mu\beta\gamma}$). The Γ 's are sets of numbers, but they are not components of a tensor. (They do not transform like a tensor.)
A covariant derivative which is dotted into a vector is called a directional derivative:

$$(\nabla\mathbf{Q})\cdot\mathbf{u} \equiv \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{Q} \equiv \mathbf{Q}^{\alpha\beta\cdots}{}_{\gamma\delta\cdots;\nu}\mathbf{u}^{\nu}.$$

If the vector $\mathbf{u}$ is tangent to a curve parameterized by λ, one sometimes writes $\mathrm{u} = \mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ for $\mathrm{u}^a = \mathrm{dx}^a/\mathrm{d}\lambda$ and

$$\nabla_{\mathbf{u}}Q \equiv \frac{DQ}{d\lambda}$$

weetor happens to be a basis vector, one writes

$$\nabla_{e_\alpha}\mathbf{Q} \equiv \nabla_{\alpha}\mathbf{Q}$$

of the basis vectors, the connection coefficients can be written

$$\nabla_{\beta\mathbf{e}} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta\mu} \quad \text{or} \quad \Gamma_{\mu\alpha\beta} = \mathbf{e}_{\mu}\cdot\nabla_{\beta\mathbf{e}}$$

covariant derivative operator ∇ obeys all of the nice rules expected derivative operator, except that in curved space $\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{v}} \neq \nabla_{\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{u}}$ (see 9).
EI a is the tangent vector to a curve, a tensor Q is said to be Illel propagated along the curve if

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{Q} = 0.$$

tangent vector is itself parallel propagated,

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0$$

Qugent vector "covariantly constant") the curve is a geodesic, the screalization of a straight line in flat space. If $x^a(\lambda)$ is the geodesic Wah $\mathrm{u}^\alpha = \mathrm{dx}^\alpha/\mathrm{d}\lambda$) then the components of this geodesic equation are

$$0 = (\nabla_{\mathbf{u}})^\mu = \frac{du^\mu}{d\lambda} + u^\alpha u^\beta \Gamma^\mu_{a\beta}$$

Whe λ must be an affine parameter along the curve; for non-null curves Iss means λ must be proportional to proper length.

If a curve is timelike, $\mathbf{u}$ is its tangent vector, and $\mathbf{a} \equiv \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = \mathrm{Du}/\mathrm{d}\tau$, Sen a vector V is said to be Fermi-Walker transported along u if

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{V} = (\mathbf{u}\otimes\mathbf{a} - \mathbf{a}\otimes\mathbf{u})\cdot\mathbf{V}$$

Problem 7.1. Show that the connection coefficients $\Gamma^a{}_{\beta\gamma}$ do not obey the tensor transformation law.

Problem 7.2. For a 2-dimensional flat, Euclidean space described by polar coordinates r, θ, assume that the geodesics are the usual straight lines.

(a) Find the connection coefficients $\Gamma^\alpha{}_{\beta y}$, using your knowledge of these geodesics, and the geodesic equation

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}^\mu}{\mathrm{ds}^2} + \frac{\mathrm{dx}^\alpha}{\mathrm{ds}}\frac{\mathrm{dx}^\beta}{\mathrm{ds}}\Gamma^\mu_{a\beta} = 0$$

(b) Next, in the coordinates x, y which are related to r, θ in the usual way, take the covariant structure to be given by $\Gamma^{\mathrm{x}}_{\mathrm{xx}} = \Gamma^{\mathrm{x}}_{\mathrm{xy}} = \cdots = 0$. Using the transformation law for connection coefficients find the connection coefficients in the r, θ coordinates.

(c) Finally, from the line element $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ find the Christoffel symbols, in the usual way, as derivatives of the metric coefficients $\mathrm{g}_{\mu\nu}$. (All three methods, of course, must give the same Christoffel symbols.)

Problem 7.3. Consider the familiar metric space

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

(a) Write the 2 equations that result from the geodesic equation, and show that the following are first integrals of these equations:

$$\mathrm{r}^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{ds}} = \mathrm{R}_0 = \text{ constant}$$
$$\left(\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{ds}}\right)^2 + \mathrm{r}^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{ds}}\right)^2 = 1$$

(b) Use the results in (a) to get a first-order differential equation for $\mathrm{r}(\theta)$. [That is: Eliminate s as a parameter and replace by θ].

(c) Using the fact that the metric space is just flat 2-dimensional

Tim space, write down the general equation for a straight line in coordinates, and show that the straight line satisfies the equation

N-14.7.4. For the 2-dimensional metric $\mathrm{ds}^2 = \left(\mathrm{dx}^2 - \mathrm{dt}^2\right)/\mathrm{t}^2$, find all elion coefficients $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$, and find all timelike geodesic curves.

7.5. Show that the metric tensor is covariantly constant.

7.6. For a diagonal metric, prove that (in a coordinate frame) the todfel symbols are given by

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} = 0, \quad \Gamma^\mu{}_{\lambda\lambda} = -\frac{1}{2\,\mathrm{g}_{\mu\mu}}\frac{\partial g_{\lambda\lambda}}{\partial x^\mu}$$
$$\mu = \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\log\left(\mathrm{lg}_{\mu\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\right), \quad \Gamma^\mu{}_{\mu\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\log\left(\mathrm{g}_{\mu\mu}\right|^{\frac{1}{2}}\right).$$

and $\mu \neq \nu \neq \lambda$ and there is no summation over repeated indices.

Diem 7.7. Prove the following indentities:-

(a) $\mathrm{g}_{\alpha\beta,\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\alpha\gamma}$.

(b) $\mathrm{g}_{\alpha\mu}\mathrm{g}^{\mu\beta}{}_{,\gamma} = -\mathrm{g}^{\mu\beta}\mathrm{g}_{\alpha\mu,\gamma}$.

(c) $\mathrm{g}^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} = -\Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\mathrm{g}^{\mu\beta} - \Gamma^\beta{}_{\mu\gamma}\mathrm{g}^{\mu\alpha}$.

(d) $\mathrm{g}_{;\alpha} = -\mathrm{g}\mathrm{g}_{\beta y}\ \mathrm{g}^{\beta y}{}_{,\alpha} = \mathrm{g}\mathrm{g}^{\beta y}\ \mathrm{g}_{\beta y,a}$.

(e) $\Gamma^\alpha_{\alpha\beta} = \left(\log|\mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\right)_{,\beta}$ in a coordinate frame.

(f) $\mathrm{g}^{\mu\nu}\Gamma^a_{\mu\nu} = -\frac{1}{|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}}\left(\ \mathrm{g}^{a\nu}|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\right)_{,\nu}$ in a coordinate frame.

(g) $\mathrm{A}^\alpha_{;\alpha} = \frac{1}{|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}}\left(|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{A}^\alpha\right)_{,\alpha}$ in a coordinate frame.

(h) $\mathrm{A}_{\alpha;\beta} = \frac{1}{|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}}\left(|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{A}_\alpha{}^\beta\right)_{,\beta} - \Gamma^\lambda_{\alpha\mu}\mathrm{A}_\lambda{}^\mu$ in a coordinate frame.

(i) $A^{\alpha\beta}_{;\beta} = \frac{1}{|\ g|^{\frac{1}{2}}}\left(|\ g|^{\frac{1}{2}}\ A^{\alpha\beta}\right)_{,\beta}$ in a coordinate frame, if $A^{\alpha\beta}$ is

(j) $\Box S = S_{;\alpha};\alpha = \frac{1}{|\ g|^{\frac{1}{2}}}\left(|\ g|^{\frac{1}{2}}\ g^{\alpha\beta}S_{,\beta}\right)_{,\alpha}$ in a coordinate frame.

Problem 7.8. Let $A \equiv \det(A_{\mu\nu})$ where $A_{\mu\nu}$ is a second rank tensor.
Show that A is not a scalar. (i.e. Show that its value changes under coordinate transformations.) Since A is not a scalar one cannot define $A_{;a} = A_{,a}$. How should $A_{;a}$ be defined (in terms of $A_{,a}$ and A)?
Problem 7.9. If a geodesic is timelike at a given/point P , show that it is timelike everywhere along its length, and similarly for spacelike or null, geodesics.

Problem 7.10. Derive the geodesic equation from the definition of a geodesic as a curve of extremal length.

Problem 7.11. An affine parameter λ is one for which the equation of geodesic motion has the form

$$\frac{dx^a}{d\lambda^2} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\frac{dx\beta}{d\lambda}\frac{dx\gamma}{d\lambda} = 0$$

Show that all affine parameters are related by linear transformations with constant coefficients.

Problem 7.12. Show that in flat spacetime, the conservation law for the 4 -momentum of a freely moving particle can be written $\nabla_p p = 0$. Show that particles with nonzero rest mass move along timelike geodesics.

Problem 7.13. Suppose the coordinate x^1 is a cyclic coordinate, i.e. the metric functions $g_{\alpha\beta}$ are independent of x^1. If p is the momentum of an unaccelerated particle, show that the component p_1 is constant along the particle world line.

Problem 7.14. Prove the general relativity version of Fermat's principle: In any static metric ($g_{0j} = g_{\alpha\beta,0} = 0$), consider all null curves between two points in space, $x^j = a^j$ and $x^j = b^j$. Each such null curve $x^j(t)$ requires a particular coordinate time Δt to get from a^j to b^j. Show that the curves of extremal time Δt are null geodesics of the spacetime.

7.15.

Show that the geodesics of the velocity space metric defined in 6.8 are paths of minimum fuel use for a rocket ship changing its

11. A rocket ship in interstellar space with velocity $\underset{\sim}{V}_1$ (with respect th) changes its velocity to a new velocity $\underset{\sim}{V}_2$, in a manner that item the least fuel. What is the ship's smallest velocity relative to toring the change?

7.16. On the surface of a two-sphere, $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$, Wetcor A is equal to e_θ at $\theta = \theta_0, \phi = 0$. What is A after it is 1 transported around the circle $\theta = \theta_0$? What is the magnitude of A ?

7.17. Consider an observer with 4 -velocity **u** who transports his Lissis vectors e_α along with him according to the transport law $_d = A_\alpha{}^\beta e_\beta$. What is the most general form of $A_\alpha{}^\beta$ if:
(6) the basis vectors are to be orthonormal?
(ii) in addition $e_{\hat{0}} = u$? (i.e. the frame is his rest-frame).
(ii) in addition the spatial vectors are to be nonrotating? (i.e. He sees a freely-falling particle move with no Coriolis forces.)

Estem 7.18. Show that the scalar product of two vectors is not altered Ithey are both Fermi-Walker transported along a curve $\mathcal{C}$.

Esslem 7.19. Show that Fermi-Walker transport along a geodesic curve the same as parallel transport.

Poblem 7.20. Write the following expressions in index-free notation:
(a) $U_{\alpha;\beta}U^\beta U^\alpha$
(b) $V^\alpha_{;\beta}U^\beta - U^\alpha_{;\beta}V^\beta$
(c) $T_{a\beta;\gamma}V^\alpha W^\beta U^\gamma$
(d) $W^{a;\beta}V_{\beta;\gamma}U^\gamma$
(e) $w^a{}_{;\gamma\beta}U^\gamma U^\beta + w^a{}_{;\gamma}U^\gamma{}_{;\beta}U^\beta - U^\alpha{}_{;\beta}W^\beta{}_{;\gamma}U^\gamma$.

Froblem 7.21. Show that the paths of light rays in a static, isotropic spacetime can be described by taking the space to have a certain spatially
varying "index of refraction" $n\left(x^j\right)$. What is n in terms of $g_{\alpha\beta}$? Assum $g_{\alpha\beta}$ has the form

$$ds^2 = g_{00}dt^2 - f\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right).$$

Problem 7.22. An inebriated astronaut pulses his rocket, firing in a random direction for each pulse. As measured in a momentarily comoving frame, each pulse corresponds to a velocity boost of $\Delta_v \ll c$. Find the probability distribution of his resultant velocity after n boosts, where is a very large number. Show that the drunk astronaut achieves highly relativistic velocities less efficiently than a sober astronaut (who fires his rocket always in the same direction), and takes on the average $3c/\Delta v$ times as many pulses to achieve the same velocity.

Problem 7.23.

(a) Suppose a vector field **k** is orthogonal to a family of hypersurface ("hypersurface-orthogonal"). Show that this implies $k_{[\mu;\nu}k_{\lambda]} = 0$.
(b) What is the geometric interpretation if $k[\mu;\nu]$ also vanishes?

Problem 7.24. Prove that any congruence of null curves that is hypersurfa orthogonal consists of null geodesics.

Problem 7.25. Show that the variational principle

$$\delta \int (\mathrm{g}_{\alpha\beta}\dot{\mathrm{x}}^{\alpha}\dot{\mathrm{x}}\beta)\,\mathrm{ds} = 0$$

gives the same geodesics as the defining property for geodesics

$$\delta \int \left(\mathrm{g}_{\alpha\beta}\dot{\mathrm{x}}^{\alpha}\dot{\mathrm{x}}^{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{ds} = 0$$

when s is proper length (not an arbitrary parameterization) and $\dot{x} \equiv \mathrm{dxx}^{\alpha}/\mathrm{ds}$. If $\mathrm{y} \equiv \left(\mathrm{g}_{\alpha\beta}\dot{\mathrm{x}}^{\alpha}\dot{\mathrm{x}}^{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}$, show that

$$\delta \int \mathrm{F(y)ds} = 0$$

gives the same geodesics for any monotonic function $F(y)$.

7: Solutions

Solution 7.1. Let the transformation be given by $\mathrm{e}_{\mu'} = \mathrm{L}^{\sigma}_{\mu'}\mathrm{e}_{\sigma}$, then

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\mathrm{e}'_{\beta}}\mathrm{e}'_{\alpha} = \Gamma^{\tau'}_{\alpha\beta'}\mathrm{e}_{\tau'} = \nabla_{(\mathrm{L}^{\lambda}{}_{\beta'}\mathrm{e}_{\lambda})}\left(\mathrm{L}_{\alpha'}\mathrm{e}_{\mu}\right) = \mathrm{L}^{\lambda}\beta'\nabla_{\mathrm{e}_{\lambda}}\left(\mathrm{L}_{\alpha'}\mathrm{e}_{\mu'}\right)\\
&= \mathrm{L}^{\lambda}{}_{\beta}\left(\mathrm{L}^{\mu}{}_{a',\lambda}\mathbf{e}^{\mu} + \mathrm{L}^{\mu}{}_{a'}\Gamma^{\tau}{}_{\mu\lambda}\mathbf{e}_{\tau}\right)\\
&= \mathrm{L}^{\lambda}\beta'\left(\mathrm{L}^{\mu}{}_{a',\lambda'}\mathrm{L}^{\tau'}{}_{\mu}\mathbf{e}' + \mathrm{L}^{\mu}{}_{a'}\mathrm{L}^{\tau'}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu\lambda}\mathrm{e}_{\tau'}\right),
\end{aligned}$$

and therefore

$$\Gamma^{\gamma'}_{a\beta'} = \mathrm{L}^{\lambda}_{\beta'}\mathrm{L}^{\mu}_{\alpha'}\mathrm{L}^{\tau'}_{\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\mu\lambda} + \mathrm{L}^{\lambda}_{\beta'}\mathrm{L}^{\tau'}_{\mu}\mathrm{L}^{\mu}_{\alpha',\lambda}$$

The second term in this equation would not be present in a tensor transformation.

Solution 7.2.

(a) First consider the line $\theta = 0, r = s$, where s is the affine parameter (length). The geodesic equation $\mathrm{d}^2\mathrm{x}^{\mu}/\mathrm{dr}^2 + \Gamma^{\mu}_{\mathrm{rr}} = 0$, gives

$$\Gamma^{r}_{rr} = \Gamma^{\theta}_{rr} = 0$$

Next, for nonradial lines, reparameterize the geodesic equation using θ as a non-affine parameter:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}^{\mu}}{\mathrm{d}\theta^2} + \frac{\mathrm{d}^2\theta/\mathrm{ds}\ \mathrm{s}^2}{(\ \mathrm{d}\theta/\mathrm{ds})^2}\frac{\mathrm{dx}\mu}{\mathrm{d}\theta} + \frac{\mathrm{dx}\alpha}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{dx}\beta}{\mathrm{d}\theta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = 0 \tag{1}$$

The general straight line is

$$\mathrm{r}\cos(\theta - a) = \mathrm{R}_0 \tag{2}$$

where α and R_0 are arbitrary constants. This equation, and $ds^2 = dr^2 + \mathrm{r}^2\ \mathrm{d}\theta^2$, give $\mathrm{ds}/\mathrm{d}\theta = \mathrm{R}_0/\cos^2\Psi$, where $\Psi \equiv \theta - a$, and this in turn yields

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{ds}^2}\Big/\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{ds}}\right)^2 = -2\tan\Psi$$

The geodesic equation now reads

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}^{\mu}}{\mathrm{d}\theta^2} - 2\tan\Psi\frac{\mathrm{dx}\mu}{\mathrm{d}\theta} + \frac{\mathrm{dx}a}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{d}\theta}\Gamma^{\mu}_{a\beta} = 0 \tag{3}$$

Consider the point $\theta = a$ (i.e. $\Psi = 0$) and $\mathrm{r} = \mathrm{R}_0$ on the line. At this point (3) becomes

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}^{\mu}}{\mathrm{d}\theta^2} + \Gamma^{\mu}\theta\theta = 0$$

which gives $\Gamma^{\theta}{}_{\theta\theta} = 0$, and $\Gamma^{\mathrm{r}}_{\theta\theta} = -\mathrm{r}$ (where Equation (2) has been used). Since a and R_0 are arbitrary these expressions are true in general.

Finally, consider an arbitrary point on the line and write out the geodesic equation in full glory, putting in the Γ 's known so far. The $\mu = \mathrm{r}$ component of the result gives $\Gamma^{\mathrm{r}}_{r}\theta = \frac{1}{\mathrm{r}}$.

(b) From $\mathrm{r}^2 = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2$, and $\cot\theta = \mathrm{x/y}$ we get a transformation matrix

$$\mu = \mathrm{x} \quad \mu = \mathrm{y}$$
$$\mathrm{L}_{\mu}^{a'} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{\mathrm{r}} & \frac{\cos\theta}{\mathrm{r}} \end{bmatrix}$$

and its inverse

$$\beta' = \mathrm{r} \quad \beta' = \theta$$
$$\mathrm{L}_{\beta'}^{\mu} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{r}\sin\theta \\ \sin\theta & \mathrm{r}\cos\theta \end{bmatrix}$$

(Example: $x = r\cos\theta \Rightarrow dx = dr\cos\theta - r\sin\theta d\theta \Rightarrow$ first row above.)
The transformation law for the Γ 's (Problem 7.1) is

$$\Gamma_{\beta'\gamma'}^{a'} = \mathrm{L}_{\rho'}^{a'}\mathrm{L}_{\beta'}\mathrm{L}_{\gamma'}^{\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} + \mathrm{L}_{\mu}^{a'}\mathrm{L}_{\beta',\gamma'}$$

Since $\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} = 0$ in cartesian coordinates, only the second term contributes, and straightforward differentiation and matrix multiplication gives the desired results.
(c) We now use

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{a} = \frac{1}{2}\,\mathrm{g}^{\alpha\mu}\left(\mathrm{g}_{\mu\beta,\gamma} + \mathrm{g}_{\mu\gamma,\beta} - \mathrm{g}_{\beta\gamma,\mu}\right)$$

For the metric $\mathrm{ds}^2 = \mathrm{dr}^2 + \mathrm{r}^2\,\mathrm{d}\theta^2$ the only nonvanishing derivative is $\mathbf{s}_{\theta\theta,\mathbf{r}} = 2\mathbf{r}$. Thus $\Gamma^{a}{}_{\beta\gamma} = 0$ unless 2 indices are θ' s and one is an $\mathbf{r}$:

$$\Gamma_{\theta\theta}^{\mathrm{r}} = \mathrm{g}^{\mathrm{rr}}\left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{g}_{\theta\theta,\mathrm{r}}\right) = -\mathrm{r}$$
$$\Gamma_{\mathrm{r}\theta}^{\theta} = \mathrm{g}^{\theta\theta}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{g}_{\theta\theta,\mathrm{r}}\right) = \frac{1}{\mathrm{r}}$$

Solution 7.3.

(a) The geodesic equation is

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{r}}{\mathrm{ds}^2} + \Gamma^{\mathrm{r}}{}_{\theta\theta}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{ds}}\right)^2 = 0 \quad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{ds}^2} + 2\Gamma_{\mathrm{r}\theta}^{\theta}\left(\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{ds}}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{ds}}\right) = 0$$

Using the results of Problem 7.2, we have

$$\frac{d^2r}{ds^2} = r\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2$$
$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{ds}\right)\left(\frac{d\theta}{ds}\right) = 0$$

Now $(\mathrm{dr/ds})^2 + \mathrm{r}^2(\,\mathrm{d}\theta/\mathrm{ds})^2 = 1$ follows from the metric so

$$\frac{\mathrm{dR}_0}{\mathrm{ds}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}\left[\mathrm{r}^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{ds}}\right] = \mathrm{r}^2\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{ds}^2} + 2\mathrm{r}\left(\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{ds}}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{ds}}\right)$$
$$= \mathrm{r}^2\left[\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{ds}^2} + \frac{2}{\mathrm{r}}\left(\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{ds}}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{ds}}\right)\right] = 0,$$

and therefore

$$\mathrm{R}_0 \equiv \mathbf{r}^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{ds}} = \text{ constant }.$$

(b) From one of the first integrals above:

$$\left(\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{ds}}\right)^2 + \mathrm{r}^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{ds}}\right)^2 = 1$$

Now substitute $d\theta/ds = R_0/r^2 \quad (R_0 =$ some constant $)$:

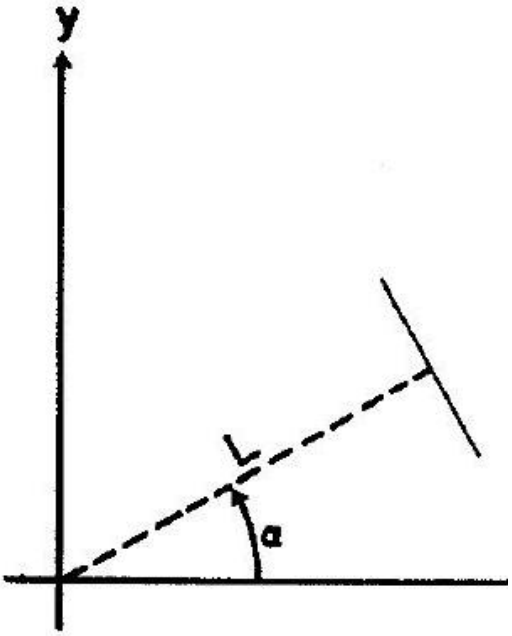
$$\left(\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \mathrm{r}^2 = \mathrm{r}^4/\mathrm{R}_0^4$$

(c) The equation for a straight line is

$$\mathrm{r} = \mathrm{L}/\cos(\theta - \alpha)$$

$$\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos^2(\theta-\alpha)}\mathrm{L}$$

$$\left(\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \mathrm{r}^2 = \mathrm{L}^2\left[\frac{\sin^2(\theta-a)}{\cos^4(\theta-a)} + \frac{1}{\cos^2(\theta-a)}\right] = \frac{\mathrm{L}^2}{\cos^4(\theta-a)} = \frac{\mathrm{r}^4}{\mathrm{L}^2}.$$



Thus, all straight lines satisfy the geodesic equation.

Solution 7.4. The nonvanishing derivatives of the metric tensor are $g_{xx,t} = -g_{tt,t} = -2/t^3$. Thus the nonvanishing connection coefficients are

$$\Gamma_{ttt} = 1/t^3, \quad \Gamma_{xxt} = \Gamma_{xtx} = -\Gamma_{txx} = -1/t^3.$$

To find the geodesics it is easiest to proceed directly from their definition as curves of extreme length. Let a geodesic be $x(t)$. Then (dot represents d/dt)

$$0 = \delta \int \left(ds^2\right)^{\frac{1}{2}} = \delta \int \left(1 - \dot{x}^2\right)^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t}$$

The Euler-Lagrange equation for this extremization is

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{x}}{t\left(1-\dot{x}^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right] = 0.$$

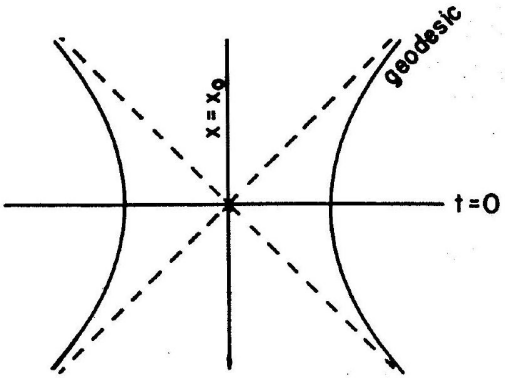
This is easily solved by letting $\tanh\theta \equiv \dot{\mathrm{x}}$:

$$\frac{\sinh\theta}{t} = \text{ constant },$$

which integrates to

$$(x - x_0)^2 = t^2 + a^2.$$

Thus the geodesics are hyperbolas asymptotic to the light cones:



Solution 7.5. The calculation of $g_{\alpha\beta;\gamma}$ is straightforward in a coordinate basis:

$$g_{a\beta;\gamma} = g_{a\beta,\gamma} - g_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma} - g_{a\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}$$

Solution 7.6. In a coordinate frame:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}\left(g_{a\nu,\lambda} + g_{a\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,a}\right) g^{\mu a}. \tag{1}$$

(a) If the metric is diagonal, a must be equal to μ. But since $\mu \neq \nu \neq \lambda$, all of the terms in parentheses in Equation (1) obviously vanish.
(b) $\Gamma^{\mu}_{\lambda\lambda} = \frac{1}{2}\left(g_{a\lambda,\lambda} + g_{a\lambda,\lambda} - g_{\lambda\lambda,a}\right) g\mu a$, setting $\nu = \lambda$ in Equation (1).

$$\Gamma^{\mu}_{\lambda\lambda} = -\frac{1}{2}\, g_{\lambda\lambda,a}\, g^{\mu\alpha} = -\frac{1}{2}\, g_{\lambda\lambda,a}\left(g_{\mu\alpha}\right)^{-1} = -\frac{1}{2}\left(g_{\mu\mu}\right)^{-1}\, g_{\lambda\lambda,\mu}.$$

Here we have repeatedly used diagonality of the metric [e.g. $g^{\mu\alpha} = (g_{\mu\alpha})^{-1}$].
(c)

$$\begin{aligned}\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} &= \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\mu,\lambda} + g_{a\lambda,\mu} - g_{\mu\lambda,a}\right)(g_{\mu a})^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\left(g_{\mu\mu}\right)^{-1}\left(g_{\mu\mu,\lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\log\left(g_{\mu\mu}\right|^{\frac{1}{2}}\right)\right).\end{aligned}$$

(d) Setting $\lambda = \mu$ in (c) gives

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\mu} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^{\mu}}\left(\log\left(g_{\mu\mu}\right|^{\frac{1}{2}}\right)\right)$$

Solution 7.7.

(a) $$\begin{aligned} g_{a\beta,\gamma} = \nabla_{\gamma}\left(\mathrm{e}_{\alpha}\cdot \mathrm{e}_{\beta}\right) &= \left(\nabla_{\gamma}\mathrm{e}_{\alpha}\right)\cdot \mathrm{e}_{\beta} + \mathrm{e}_{a}\cdot\left(\nabla_{\gamma}\mathrm{e}_{\beta}\right) \\ &= \Gamma^{\mu}_{a\gamma}\mathbf{e}_{\mu}\cdot\mathbf{e}_{\beta} + \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}\mathbf{e}_{\mu}\cdot\mathbf{e}_{\alpha} \\ &= \Gamma_{\beta\alpha\gamma} + \Gamma_{a\beta\gamma}.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{gathered} g_{\alpha\mu}g^{\mu\beta} = \delta_{\alpha}\beta \\ g_{\alpha\mu,\gamma}g^{\mu\beta} + g_{\alpha\mu}g^{\mu\beta},\gamma = 0 \\ g_{\alpha\mu}g^{\mu\beta},\gamma = -g_{a\mu,\gamma}\, g^{\mu\beta}\end{gathered}$$

(c)

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta}_{,\gamma} &= -g_{\lambda\mu,\gamma}g^{\mu\beta}g^{\lambda a} = -\left(\Gamma_{\lambda\mu\gamma} + \Gamma_{\mu\lambda\gamma}\right) g^{\mu\beta}g^{\lambda a} \\ &= -\Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}g^{\mu\beta} - \Gamma_{\lambda\gamma}g^{\lambda a}\end{aligned}$$

(Here we have used the result in (a).)
(d) For any matrix $\|g_{a\beta}\|$,

$$\left(\log\det\|g_{\alpha\beta}\|\right)_{,a} = \mathrm{Tr}\,\|g_{\alpha\beta}\|^{-1}\left\|\, g_{\mu\nu,a}\right\|$$

therefore

$$(\log g)_{,a} = g^{\mu\nu}g_{\mu\nu,a}$$

and

$$\frac{\mathrm{g}_{,\alpha}}{\mathrm{g}} = \mathrm{g}^{\mu\nu}\mathrm{g}_{\mu\nu,a}$$

And so, by (b)

$$\mathrm{g}_{,a} = \mathrm{g}\mathrm{g}^{\mu\nu}\mathrm{g}_{\mu\nu,a} = -\mathrm{g}\mathrm{g}_{\mu\nu}\mathrm{g}^{\mu\nu}_{,a}$$

(e) In a coordinate frame, $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\ \mathrm{g}^{\mu\nu}\left(\mathrm{g}_{\nu\alpha,\beta} + \mathrm{g}_{\nu\beta,a} - \mathrm{g}_{\alpha\beta,\nu}\right)$, and since the last two terms cancel $\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\ \mathrm{g}^{\alpha\nu}\mathrm{g}_{\nu\alpha,\beta}$. Thus, by (d)

$$\Gamma^{a}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\ \mathrm{g}_{,\beta}/\mathrm{g} = \frac{1}{2}(\log|\ \mathrm{g}|)_{,\beta} = \left(\log|\mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\right)_{,\beta}.$$

(f) $\mathrm{g}^{\mu\nu}\Gamma^{a}_{\mu\nu} = -\mathrm{g}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} - \Gamma^{\beta}_{\lambda\beta}\mathrm{g}^{\lambda\alpha}$ (putting $\beta = \gamma$ in (c) and summing)

$$\begin{aligned}
&= -\mathrm{g}^{\alpha\beta},\beta - \left(\log|\mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\right)_{,\lambda}\mathrm{g}^{\lambda\alpha} \text{ by (e)}\\
&= -\mathrm{g}^{\alpha\nu},\nu - \left(\log|\mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\right)_{,\nu}\mathrm{g}^{\alpha\nu} \quad \text{changing dummy indices}\\
&= -\mathrm{g}^{\alpha\nu},\nu - |\mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}_{,\nu}\ \mathrm{g}^{\alpha\nu}|\mathrm{g}|^{-\frac{1}{2}}\\
&= -\frac{1}{|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}}\left(\ \mathrm{g}^{\alpha\nu}|\mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\right)_{,\nu}
\end{aligned}$$

(g) $\mathrm{A}^{\alpha}{}_{;\alpha} = \mathrm{A}^{\alpha}{}_{,\alpha} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta a}\ \mathrm{A}^{\beta} = \mathrm{A}^{\alpha}{}_{,a} + \frac{1}{|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}}\left(|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\right),\beta^{\mathrm{A}}\beta$
by (e)

$$= \frac{1}{|g|^{\frac{1}{2}}}\left(|g|^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{A}^{a}\right),a$$

(h) $\mathrm{A}_{a}{}^{\beta}{}_{;\beta} = \mathrm{A}_{a}{}^{\beta}{}_{,\beta} + \Gamma^{\beta}{}_{\mu\beta}\mathrm{A}_{a}{}^{\mu} - \Gamma^{\lambda}{}_{a\beta}\ \mathrm{A}_{\lambda}{}^{\beta}$

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{A}^{\beta}_{a},\beta + \frac{1}{|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}}\left(|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\right),\mu\mathrm{A}^{\mu}_{a} - \Gamma^{\lambda}_{a\mu}\mathrm{A}^{\mu}_{\lambda}\\
&= \frac{1}{|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}}\left(|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{A}^{\beta}_{a},_{,\beta} - \Gamma^{\lambda}_{a\mu}\mathrm{A}^{\mu}_{\lambda}\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}^{a\beta}_{;\beta} &= \mathrm{A}^{a\beta},\beta + \Gamma^{a}_{\mu\beta}\ \mathrm{A}^{\mu\beta} + \Gamma^{\beta}_{\mu\beta}\mathrm{A}^{a\mu} \qquad \text{(i)}\\
&= \mathrm{A}^{a\beta},\beta + \Gamma^{a}_{\mu\beta}\ \mathrm{A}^{\mu\beta} + \frac{1}{|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}}\left(|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\right),\mu^{\mathrm{A}\mu}\\
&= \frac{1}{|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}}\left(\ \mathrm{A}^{a\beta}|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\right),\beta + \Gamma^{a}_{\mu\beta}\ \mathrm{A}^{\mu\beta}
\end{aligned}$$

But $\Gamma^{a}_{\mu\beta} = \Gamma^{a}_{(\mu\beta)}$ in a coordinate frame, so if $\mathrm{A}^{\mu\beta} = \mathrm{A}^{[\mu\beta]}$, the last term vanishes, and

$$\mathrm{A}^{\alpha\beta}_{;\beta} = \frac{1}{|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}}\left(\mathrm{lg}|^{\frac{1}{2}}\ \ \mathrm{A}^{\alpha\beta}\right)_{,\beta}.$$

$$\Box\mathrm{S} = \left(\mathrm{S}_{,a}\ \mathrm{g}^{a\beta}\right)_{;\beta} = \frac{1}{|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}}\left(|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{S}_{,a}\ \mathrm{g}^{a\beta}\right)_{,\beta}. \qquad \text{(j)}$$

(Here (g) has been used.)

Solution 7.8. Under a coordinate transformation,

$$\mathrm{A}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \frac{\partial \mathrm{x}^{\mu}}{\partial \mathrm{x}^{\bar{\mu}}}\frac{\partial \mathrm{x}^{\nu}}{\partial \mathrm{x}^{\bar{\nu}}}\mathrm{A}_{\mu\nu}$$

implies that

$$\overline{\mathbf{A}} = \det\left(\frac{\partial \mathbf{x}^{\mu}}{\partial \mathbf{x}^{\bar{\mu}}}\right)\det\left(\mathbf{A}_{\mu\nu}\right)\det\left(\frac{\partial \mathbf{x}^{\nu}}{\partial \mathbf{x}^{\bar{\nu}}}\right)^{\mathrm{T}} = \mathrm{J}^{2}\ \mathrm{A}$$

where J is the Jacobian, $\det\left(\partial_{\mathrm{x}}{}^{\mu}/\partial_{\mathrm{x}}\bar{\mu}\right)$, and where the superscript T denotes matrix transpose. We want $\mathrm{A}_{;\alpha}$ to transform according to the vector analog of the transformation law for A . (A is called a "density of weight $2''$.) Since $\mathrm{A}_{;a}$ must be linear in A , set

$$A_{;a} = A_{,a} + K_a\ A$$

where K_a must be determined. This can be done by demanding that g , the determinant of the metric tensor, have vanishing covariant derivative:

$$0 = g_{;a} = g_{,a} + K_\alpha g = 2\ g\Gamma^\beta_{\beta a} + K_\alpha g$$

by Problem 7.7. Thus

$$K_a = -2\Gamma^\beta{}_{\beta a}.$$

The generalization to densities of weight W (i.e. they transform with a J^W) can be done by considering powers of g . The result is that

$$K_\alpha = -W\Gamma^\beta_{\beta a}.$$

Solution 7.9. A geodesic with tangent vector $\mathbf{u}$ is spacelike, timelike, or null according to whether $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$ is $>0, =0, <0$. But $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$ is conserved along the geodesic, since

$$\nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) = 2\mathbf{u}\cdot\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0,$$

since the geodesic equation is $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0$.
Solution 7.10. The integral for length is

$$\int ds = \int \left(-g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}\right)^{\frac{1}{2}} ds$$

To extremize length take $\delta\int ds = 0$. According to the Euler-Lagrange equations

$$\frac{d}{ds}\left(\ g_{a\beta}u^\alpha\right) = \frac{1}{2}\ g_{\alpha\gamma,\beta}u^{a^\alpha u^\gamma} \tag{1}$$

where $\left(-g_{a\beta}\frac{dx}{ds}\frac{dx}{ds}\right) = 1$ and $u^a \equiv \frac{dx}{ds}$ have been used. Now since

$$\frac{d}{ds}\left(\ g_{a\beta}u^\alpha\right) = g_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{ds} + \frac{dx^\gamma}{ds}\ g_{\alpha\beta,\gamma}u^\alpha = g_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{ds} + u^\gamma u^\alpha g_{\alpha\beta,\gamma}$$

Equation (1) becomes

$$g_{\alpha\beta}\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + u^\alpha u^\gamma\left(g_{\alpha\beta,\gamma} - \frac{1}{2}\ g_{\alpha\gamma,\beta}\right) = 0. \tag{2}$$

Now, use

$$\mathbf{u}^\alpha\mathbf{u}^\gamma\mathbf{g}_{\alpha\beta,\gamma} = \mathbf{u}^\alpha\mathbf{u}^\gamma\cdot\frac{1}{2}\left(\mathbf{g}_{\alpha\beta,\gamma} + \mathbf{g}_{\gamma\beta,\alpha}\right)$$

and multiply Equation (2) by $g^{\beta\tau}$ to obtain

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^\tau}{ds^2} + \frac{1}{2}\ g^{\beta\tau}\left(g_{a\beta,\gamma} + g_{y\beta,\alpha} - g_{\alpha\gamma,\beta}\right)u^\alpha u^\gamma \\ = \frac{d^2x^\tau}{ds^2} + \Gamma^\tau_{\alpha\gamma}\frac{dx}{ds}\frac{dx}{ds} = 0\end{aligned} \tag{3}$$

Solution 7.11. Define a new curve parametrization by the functional relationship $s = f(\lambda)$. Then derivatives are related by

$$\frac{d}{d\lambda} = f'\frac{d}{ds} \quad \frac{d^2}{d\lambda^2} = f''\frac{d}{ds} + f'^2\frac{d^2}{ds^2}, \tag{1}$$

where $f' \equiv \frac{df}{d\lambda}$. With the new parametrization then the geodesic equation becomes

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \frac{f^\alpha}{f'^2}\frac{dx^\alpha}{ds} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds} = 0. \tag{2}$$

Equation (2) is in the "standard form" (s an affine parametrization) if the second term vanishes. For s to be an affine parameter, f'' must vanish i.e. s and λ must be linearly related.
Solution 7.12. The components of $\nabla_p p$ are

$$(\nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{p})^\beta = mu^\alpha\left(p^\beta_{,a} + \Gamma^\beta_{\sigma a}p^\sigma\right) = m\left(\frac{dp^\beta}{d\tau} + u^\alpha p^\sigma\Gamma^\beta_{\sigma\alpha}\right). \tag{1}$$

In flat space time, one can always find a global coordinate system (Minkowski coordinates) in which all of the Christoffel symbols vanish. In that coordinate system, conservation of 4 -momentum, $\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{d}\tau} = 0$, can be written as

$$\nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{p} = 0 \tag{2}$$

by Equation (1), but Equation (2) is a tensor equation so it must be the correct expression for momentum conservation in any frame. The momentum vector is proportional to the 4 -velocity of particles with mass; for these particles $p \cdot p = -m^2$, so the geodesics are timelike.

Solution 7.13. Let λ be an affine parameter such that $\mathrm{p}^\alpha = \mathrm{dx}^\alpha/\mathrm{d}\lambda$; then for geodesic motion of the particle

$$0 = (\nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{p}) \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{p}_{1;\alpha}\mathrm{p}^\alpha = \frac{\mathrm{dp}_1}{\mathrm{d}\lambda} - \mathrm{p}_\sigma \Gamma^\sigma_{a1^1}\mathrm{p}^\alpha,$$

and therefore

$$\frac{\mathrm{dp}_1}{\mathrm{d}\lambda} = \mathrm{p}^{\sigma\,\alpha}_{\mathrm{p}}\Gamma_{(\sigma\alpha)1} = \mathrm{p}^{\sigma\,\alpha}\frac{1}{2}\,\mathrm{g}_{\sigma\alpha,1} = 0.$$

Solution 7.14. Start with the geodesic equation

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}^a}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\mathrm{dx}\beta}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{dx}\gamma}{\mathrm{d}\lambda} = 0.$$

Change variables from affine parameter λ to coordinate time t and use

$$0 = dt^2 + (g_{ij}/g_{00})\,dx^i dx^k \tag{1}$$

to get

$$g_{jk}\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma_{jkl}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt} - \Gamma_{j00}\frac{g_{kl}\ell}{g_{00}}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^l}{dt} + \frac{d^2t/d\lambda^2}{(dt/d\lambda)^2}g_{jk}\frac{dx^k}{dt} = 0.$$

Combine this with the time part of the geodesic equation

$$\frac{\left(\mathrm{d}^2\mathrm{t}/\mathrm{d}\lambda^2\right)}{(\mathrm{dt}/\mathrm{d}\lambda)^2} = -2\Gamma_{0\mathrm{k}0}\frac{\mathrm{dx}/\mathrm{dt}}{\mathrm{g}_{00}}$$

and use the expression for the Γ 's in terms of the metric to get

$$\gamma_{\mathrm{jk}}\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}^\mathrm{k}}{\mathrm{dt}^2} + \frac{1}{2}\left(\gamma_{\mathrm{jk},\ell} + \gamma_{\mathrm{j}\ell,\mathrm{k}} - \gamma_{\mathrm{k}\ell,\mathrm{j}}\right)\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = 0, \tag{2}$$

where $\gamma_{\mathrm{jk}} \equiv -\mathrm{g}_{\mathrm{jk}}/\mathrm{g}_{00}$. Notice that this is just a geodesic equation with affine parameter t in the 3 -dimensional manifold with metric γ_{jk}. From Equation (1) it is clear then that the solution of Equation (2) extremizes $\int \mathrm{dt}$; Fermat's principle holds. [See also C. Moller, The Theory of Relativity (Oxford University Press, 2nd ed., 1972), p. 308.].

Solution 7.15.

(a) The geodesic is the path between two velocities which minimizes the arc-length between them; but arc-length in the velocity space is just the magnitude of a small change of velocity. Since a rocket expends fuel monotonically for the boost it requires, the geodesics of velocity space are paths of minimum fuel use.

(b) We need to find the velocity geodesic connecting $\underset{\sim}{V}_1$ and $\underset{\sim}{V}_2$. In principle, we could solve the geodesic equation for the metric in Problem 6.8 , but this is very tedious. An easier way is to notice that, by symmetry, a geodesic passing through the origin of the velocity space coordinates is $\theta = \phi =$ constant, $\chi = s$ (where s is an affine parameter). To get a more general geodesic let us view this geodesic from a moving frame. Since $\chi = \tanh^{-1}\overline{\mathrm{V}}$ is a monotonic function of $\rho = \gamma\overline{\mathrm{V}}$ [where $\gamma \equiv \left(1 - \overline{\mathrm{V}}^2\right)^{-\frac{1}{2}}$], we can write the geodesics in terms of the non-affine parameter ρ(s). In terms of this parameter $\gamma = \left(1 + \rho^2\right)^{\frac{1}{2}}$ and, if we choose the geodesic to be in the x -direction,

$$\mathbf{u} = \left[\left(1 + \rho^2\right)^{\frac{1}{2}}, \rho, 0, 0\right] \quad -\infty < \rho < +\infty$$

A boost in the x -direction just takes this trajectory onto itself so we need only find its transformation under a perpendicular boost, say in the y -direction. Under a boost by β in the y -direction u becomes:

$$\mathbf{u}' = \left[\gamma'\left(1 + \rho^2\right)^{\frac{1}{2}}, \rho, \left(1 + \rho^2\right)^{\frac{1}{2}}\gamma'\beta, 0\right] \tag{1}$$

where $\gamma' = \left(1 - \beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}$.

The 4 -velocity in Equation (1) may be represented now in terms of the corresponding 3-velocity

$$\underset{\sim}{V}/\left(1-V^2\right)^{\frac{1}{2}} = \rho\underset{\sim}{n} + \left(1+\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}\gamma'\beta\underset{\sim}{m} \tag{2}$$

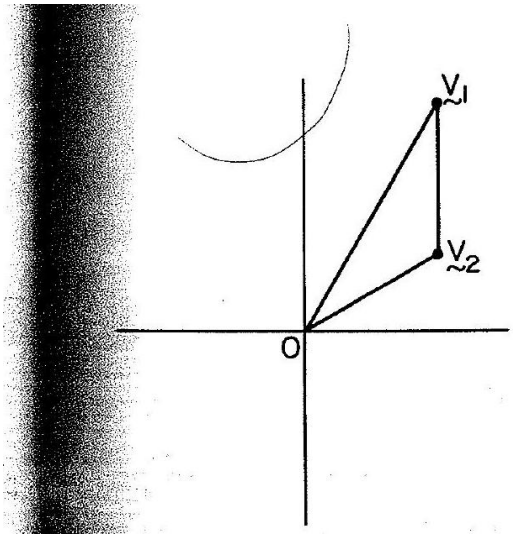
There $\underset{\sim}{n}$ and $\underset{\sim}{m}$ are perpendicular unit vectors, and may be manipulated if they lived in a cartesian space. We can solve for V^2 and write
Equation (2) as

$$\underset{\sim}{\mathbf{V}} = \left[\frac{1-\beta^2}{1+\rho^2}\right]^{\frac{1}{2}}\rho\underset{\sim}{\mathbf{n}} + \beta\underset{\sim}{\mathbf{m}} \tag{3}$$

This equation gives us the general geodesic of velocity space. One picks a. $\beta(|\beta| < 1)$, two perpendicular vectors m, n and gets a geodesic parameterized by $\rho(-\infty < \rho < +\infty)$. From Equation (3) it is clear that the peneral geodesic is a "straight line." (This does not mean the space is flat!)

For our problem there are two cases. In case (i), in which either angle OV_1V_2 or OV_2V_1 is obtuse, the distance of closest approach to the origin O of the geodesic (straight line) connecting V_1 and V_2 is simply $|V_1|$ or $|V_2|$. In case (ii) in which both OV_1 V_2 and OV_2 V_1 are acute, the distance of closest approach β is (by simple geometric arguments)

$$\beta = \frac{|\underline{V}_1 \times \underline{V}_2|}{|\underline{V}_1 - \underline{V}_2|}$$



(i)

Solution 7.16. A is parallel transported along the ϕ-coordinate line (i.e. θ = constant), so

$$0 = \mathrm{A}^{\alpha}{}_{;\phi} = \mathrm{A}^{\alpha}{}_{,\phi} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\phi}\mathrm{A}^{\beta}. \tag{1}$$

The only nonzero Christoffel symbols are $\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta$ and $\Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} = \cot\theta$, so Equation (1) gives

$$\mathrm{A}^{\theta}_{,\phi} - \sin\theta\cos\theta\mathrm{A}^{\phi} = 0 \tag{2}$$

$$\mathrm{A}^{\phi}_{,\phi} + \cot\theta\mathrm{A}^{\theta} = 0. \tag{3}$$

Throughout this problem, θ is kept constant at θ_0. Equations (2) and (3) are easily solved, e.g., by differentiating Equation (2) with respect to ϕ :

$$\mathrm{A}^{\theta}_{,\phi\phi} = \sin\theta\cos\theta\mathrm{A}^{\phi}_{,\phi} = -\cos^2\theta\ \mathrm{A}^{\theta}$$

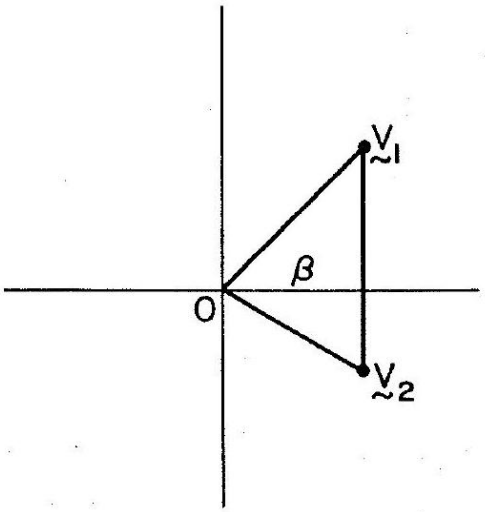
The solution then is

$$A^{\theta} = a\cos(\phi\cos\theta) + \beta\sin(\phi\cos\theta)$$

where α, β are constants. Equation (2) now gives

$$\mathrm{A}^{\phi} = -\alpha\sin(\phi\cos\theta)/\sin\theta + \beta\cos(\phi\cos\theta)/\sin\theta.$$

At $\phi = 0$, $\mathrm{A} = \mathrm{e}_{\theta}$, i.e. $\mathrm{A}^{\theta} = 1$, $\mathrm{A}^{\phi} = 0$. Thus $\alpha = 1, \beta = 0$, and



(ii)

$$\mathrm{A}^{\theta} = \cos(\phi\cos\theta)$$
$$\mathrm{A}^{\phi} = -\sin(\phi\cos\theta)/\sin\theta$$

At $\phi = 2\pi$, after transport around the circle, the vector is

$$A = \cos(2\pi\cos\theta)e_\theta - \sin(2\pi\cos\theta)/\sin\theta e_\phi \neq e_\theta$$

but the magnitude is unchanged

$$(\mathrm{A}\cdot\ \mathrm{A})_{2\pi} = \cos^2(2\pi\cos\theta)\mathrm{e}_\theta\cdot\mathrm{e}_\theta + \sin^2(2\pi\cos\theta)/\sin^2\theta\mathrm{e}_\phi\cdot\mathrm{e}_\phi = 1 = (\mathrm{A}\cdot\ \mathrm{A})_0.$$

Solution 7.17.
(i)

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{u}}(\eta_{\alpha\beta}) = \nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{e}_\beta) &= (\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_\alpha)\cdot\mathbf{e}_\beta + \mathbf{e}_\alpha\cdot(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_\beta)\\ &= \mathbf{A}_\alpha{}^{\gamma_{\mathbf{e}}}\cdot\mathbf{e}_\beta + \mathbf{A}_\beta{}^{\gamma_{\mathbf{e}}}{}_\gamma\cdot\mathbf{e}_\alpha\\ &= \mathbf{A}_{\alpha\beta} + \mathbf{A}_{\beta\alpha}\end{aligned}$$

The tensor A must be antisymmetric.
It is conventional to write the transport law in this case as

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_\alpha = \mathrm{A}^{\beta}_{\alpha}\mathrm{e}_\beta = \left(\mathrm{A}^{\gamma\beta}\mathrm{e}_\beta^{\otimes}\mathrm{e}_\gamma\right)\cdot\mathrm{e}_\alpha \equiv -\Omega\cdot\mathrm{e}_\alpha \tag{1}$$

Dhere $\Omega^{\beta\gamma} = \mathrm{A}^{\beta\gamma}$ is the 4-dimensional version of a 3-dimensional antiSymmetric rotation matrix.
(ii) Since $\mathbf{u} = \mathbf{e}_0$ is singled out, decompose Ω along u and orthogonal to u :

$$\Omega^{\alpha\beta} = v^\alpha u^\beta - u^\alpha v^\beta + \omega^{\alpha\beta} \tag{2}$$

where $\omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta a}, \omega^{\alpha\beta}\mathrm{u}_\beta = 0$ and v^α is as yet unspecified; without loss of generality we can take $\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = 0$.
Now Equation
(1) gives

$$\Omega\cdot\mathbf{u} = -\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = -\mathbf{a}$$

where a is the 4-acceleration of the observer. But Equation
(2) gives

$$\Omega\cdot\mathbf{u} = -\mathbf{v}$$

so $\mathbf{v} = \mathbf{a}$ and hence

$$\Omega = \mathbf{a}\otimes\mathbf{u} - \mathbf{u}\otimes\mathbf{a} + \boldsymbol{\omega}\ .$$

$\alpha\beta$ has only three independ

(iii) The tensor $\omega^{\alpha\beta}$ has only three independent components and is spatial since $\omega\cdot u = 0$. It therefore

represents a purely spatial rotation of the basis vectors and vanishes if the spatial vectors are non-rotating. One often uses an angular velocity vector ω, with $\omega \cdot \mathbf{u} = 0$, to represent the three degrees of freedom in $\omega^{\alpha\beta}$. The relation between ω and ${}_{\omega}\alpha\beta$ is

$$\omega^{\alpha\beta} = \varepsilon^{a\beta\lambda\sigma_{\mathrm{u}_\lambda}\omega_\sigma}, \quad \omega^{\alpha} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\mu\lambda\sigma_{\mathrm{u}_\mu}\omega_{\lambda\sigma}}$$

Note that a spatially non-rotating frame ($\omega = 0$) satisfies

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_\alpha = (\mathbf{u}\otimes\mathbf{a} - \mathbf{a}\otimes\mathbf{u})\cdot\mathbf{e}_\alpha$$

Any vector e_α satisfying an equation of this form is said to be "FermiWalker" transported.
Solution 7.18. Let the two vectors be x and y . Then the Fermi-Walker transport law reads

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{x} = (\mathbf{u}\otimes\mathbf{a} - \mathbf{a}\otimes\mathbf{u})\cdot\mathbf{x}$$
$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{y} = (\mathbf{u}\otimes\mathbf{a} - \mathbf{a}\otimes\mathbf{u})\cdot\mathbf{y}$$

where $\mathbf{u}$ is the tangent vector to the curve $\mathcal{C}$ and $\mathbf{a} = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}$. Using the product rule we evaluate the change in the dot product along the curve:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{u}}(x\cdot y) &= (\nabla_u x)\cdot y + x\cdot(\nabla_u y)\\ &= (a\cdot x)(u\cdot y) - (a\cdot y)(u\cdot x) + (u\cdot x)(a\cdot y) - (a\cdot x)(u\cdot y) = 0\end{aligned}$$

The scalar product is unaltered.
Solution 7.19. Fermi-Walker transport has the differential equation

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{x} = (\mathbf{u}\otimes\mathbf{a} - \mathbf{a}\otimes\mathbf{u})\cdot\mathbf{x}$$

where $\mathbf{u}$ is the tangent vector to the curve and $\mathbf{a} = \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} \equiv \mathrm{Du}/\mathrm{d}\pi$. If the curve is a geodesic, it satisfies the geodesic equation $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0$, so the Fermi-Walker transport law becomes

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{x} = 0$$

which is just the parallel transport equation.

Solution 7.20.

(a) $\mathrm{U}_{\alpha;\beta}\mathrm{U}^\beta\mathrm{U}^\alpha = \mathrm{U}^{\alpha}_{;\beta}\mathrm{U}^\beta\mathrm{U}_\alpha = (\nabla_{\mathrm{U}}\mathrm{U})\cdot\mathrm{U}$
(b) $\mathrm{V}^{\alpha}{}_{;\beta}\mathrm{U}^\beta - \mathrm{U}^{\alpha}{}_{;\beta}\mathrm{V}^\beta = \nabla_{\mathrm{U}}\mathrm{V} - \nabla_{\mathrm{V}}\mathrm{U} \equiv [\mathrm{U},\mathrm{V}]$
(c) $\mathrm{T}_{\alpha\beta;\gamma}\mathrm{V}^a\ \mathrm{W}^\beta\mathrm{U}^\gamma = \mathrm{V}\cdot(\nabla_{\mathrm{U}^{\mathrm{T}}})\cdot\mathrm{W}$
(d) $\mathrm{W}^{a;\beta}\mathrm{V}_{\beta;\gamma}\mathrm{U}^\gamma = \mathrm{W}^{a}{}_{;\beta}\left(\mathrm{V}^{\beta}{}_{;\gamma}\mathrm{U}^\gamma\right) = \nabla_{(\nabla_{\mathbf{U}}\mathrm{V})}\mathrm{W}$
(e) Combine the first two terms of the given expression,

$$\left(\mathbb{W}_{;\gamma^\alpha}\mathbb{U}^\gamma\right);\beta^{\mathbb{U}^\beta} - \mathbb{U}_{;\beta^\alpha}\left(\mathbb{W}^\beta;\gamma^\gamma\right) = \nabla_{\mathbf{U}^(}\nabla_{\mathbf{U}^W}\Big) - \nabla_{\left(\nabla_{\mathbf{U}^W}\right.}\mathbf{U} = [\mathbf{U},\nabla_{\mathbf{U}^W}]\,.$$

Solution 7.21. The paths of light rays can be obtained from the geometrical optics limit of Maxwell's equations $\mathrm{F}^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$. With the identity in Problem 7.7 (i), these equations can be written as

$$\left[\mathrm{g}^{\alpha\tau}\mathrm{g}^{\beta\mu}\mathrm{F}_{\tau\mu}(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\right]_{,\beta} = 0$$

Using the spatially isotropic, diagonal form of the metric and noting that $\mathrm{E_i} = \mathrm{F_{0i}}, \mathrm{B_k} = \varepsilon^{\mathrm{kj}\ell}\mathrm{F_{j\ell}}$, one sees that the above equations have the form

$$\nabla\cdot(\epsilon\underset{\sim}{E}) = 0$$
$$\nabla\times\left(\mu^{-1}\underset{\sim}{B}\right) = \partial(\epsilon\underset{\sim}{E})/\partial\mathrm{t}$$

where $\epsilon = \mu = (\mathrm{f}/\mathrm{g_{00}})^{\frac{1}{2}}$. Thus light moves as if in a medium with an effective index of refraction

$$\mathrm{n} = (\epsilon\mu)^{-\frac{1}{2}} = (\mathrm{g_{00}}/\mathrm{f})^{\frac{1}{2}}$$

Solution 7.22. For clarity first consider the Newtonian case. Let $\mathrm{P}(\underset{\sim}{\vee},\mathrm{n})$ be the probability of the velocity being $\underset{\sim}{v}$ after n boosts. We want to find a differential equation for P. To accomplish this note that if the velocity is $\underset{\sim}{v}$ at step n then at step $n-1$ the velocity must have been somewhere in velocity space at a distance Δv from $\underset{\sim}{v}$. By symmetry $P(v,n)$ has equal contributions from points on the sphere of radius Δv about $\underline{v}$ so we can equate $P(v,n)$ with the isotropic average of P, at $n-1$, over that sphere:

$$
\begin{aligned}
P(\underset{\sim}{v},n) =& \langle P(\underset{\sim}{v}+\Delta v, n-1)\rangle_{\text{sphere}} \\
=& (1/6)\left[P\left(\underset{\sim}{v}+\Delta v\underset{\sim}{e}_x, n-1\right)+P\left(\underset{\sim}{v}+\Delta\underset{\sim}{e}_y, n-1\right)+P\left(\underset{\sim}{v}+\Delta\underset{\sim}{e}\,\underset{\sim}{e}_z, n-1\right)\right. \qquad (7)\\
&\left.+P\left(\underset{\sim}{v}-\Delta\underset{\sim}{e}_x, n-1\right)+P\left(\underset{\sim}{v}-\Delta\underset{\sim}{e}_y, n-1\right)+P\left(\underset{\sim}{v}-\Delta\underset{\sim}{e}_z, n-1\right)\right] \\
\approx& P(\underset{\sim}{v},n-1)+(\Delta v)^2\nabla^2 P/6 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

The differential equation then, is

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{n}}=\frac{(\Delta \mathrm{v})^2}{6}\cdot\nabla^2\mathrm{P} \qquad (2)$$

the standard diffusion equation. Its solution, with $\mathrm{P}(\underset{\sim}{v},0)=\delta^3(\underset{\sim}{v})$ is

$$\mathrm{P(v,n)}=(4\pi)^{-\frac{3}{2}}\left(\mathrm{n}\Delta\mathrm{v}^2/6\right)^{-\frac{3}{2}}\exp\left(\frac{-3\mathrm{v}^2}{2\mathrm{n}\Delta\mathrm{v}^2}\right)$$

In the relativistic problem the same arguments hold except that velocities do not add linearly; we must use the relativistic velocity addition formulas. Since $\Delta v \ll c$, however, the proper velocity Δv does add linearly in a frame momentarily comoving with the rocket ship. Thus, the diffusion Equation (2) is locally valid in velocity space; we only need take into account that the global metric of relativistic velocity space is different. This is done by solving Equation (2) with ∇^2 representing the Laplacian in a curved-metric velocity space, with metric (see
Problem 6.8).

$$dv^2_{\text{proper}} = d\Psi^2+\sinh^2\Psi\left(dv_\theta^2+\sin^2\theta dv_\phi^2\right) \qquad (4)$$

where Ψ is the rapidity parameter, that is $\tanh\Psi\equiv|\underset{\sim}{v}|$. Using the relation [Problem 7.7 (j)]

$$\mathrm{P}^{;\alpha}_{;\alpha}=\mathrm{g}^{-\frac{1}{2}}\left(\ \mathrm{g}^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{g}^{\alpha\beta}\mathrm{P},\beta\right),\alpha \qquad (5)$$

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{n}}=\frac{\Delta \mathrm{v}^2}{6}\left[\frac{1}{\sinh^2\Psi}\frac{\partial}{\partial\Psi}\left(\sinh^2\Psi\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial\Psi}\right)\right] \qquad (6)$$

It is not difficult to check that this has the solution

$$P(\underset{\sim}{v},n)=(4\pi)^{-\frac{3}{2}}e^{-t}t^{-\frac{3}{2}}\frac{\Psi}{\sinh\Psi}e^{-\left(\Psi^2/4t\right)}$$

where $t\equiv n\Delta v^2/6$. This agrees with the Newtonian solution Equation (3) when $t\ll 1,\Psi\ll 1$, (no restriction on $\Psi^2/4t$).

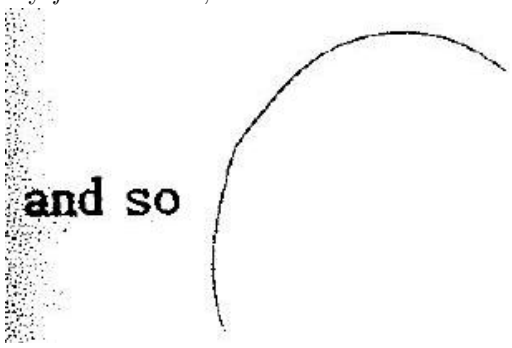
The probability of Ψ between Ψ and $\Psi+d\Psi$ is (using the velocityspace metric) $4\pi\sinh^2\Psi\,\mathrm{P}\,\mathrm{d}\,\Psi$ which for $t\gg 1,\Psi\gg 1$ has the asymptotic behavior

$$\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}\Psi}\approx(4\pi)^{-\frac{1}{2}}\frac{\Psi}{\mathrm{t}^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{-\Psi^2/4\mathrm{t}-\mathrm{t}+\Psi}=(4\pi)^{-\frac{1}{2}}\frac{\Psi}{\mathrm{t}^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{t}\left(1-\frac{\Psi}{2}\right)^2}$$

Only the exponential is of significance here, and this tells us that Ψ has a mean value $\langle\Psi\rangle\approx 2t$, and a standard deviation $\Delta\Psi\sim\sqrt{2t}$, so $\Delta\Psi/\langle\Psi\rangle\to 0$ as $t\to\infty$. The mean rapidity $\langle\Psi\rangle$ increases linearly with number of steps, but the average boost per step is $\Delta v^2/3$. A sober pilot would increase his rapidity by Δv each step, $3c/\Delta v$ times as much. Nevertheless it is amazing that the drunk astronaut does as well as he does; in the Newtonian case velocity or rapidity increased only as $n^{\frac{1}{2}}$, not as n. The reason here has to do with the Lorentz transformation: if an observer moving away from you chooses a random direction to fire a bullet, the directions look biased outward from you (headlight effect).

Solution 7.23.

(a) If the hypersurfaces are given by $f=$ constant, then



$$\mathrm{k} \propto \nabla \mathrm{f} \quad \mathrm{k}_\mu = \mathrm{hf}_{,\mu}$$

$$\mathrm{k}_{\mu;\nu} = \mathrm{h}_{,\nu}\mathrm{f}_{,\mu} + \mathrm{hf}_{,\mu;\nu} \tag{1}$$

and the fact that by spherical symmetry $\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{v}_\phi} = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{v}_\theta} = 0$, we get

$$\mathrm{k}_{[\mu;\nu}\mathrm{k}_{\lambda]} = \mathrm{h}_{,[\nu}\mathrm{f}_{,\mu}\mathrm{hf}_{,\lambda]} + \mathrm{h}^2\mathrm{f}, \left[\mu; \nu^{\mathrm{f}}, \lambda\right] \tag{2}$$

The first term obviously vanishes and the second term vanishes because $\mathrm{f}_{,\mu;\nu} = \mathrm{f}_{,\nu;\mu}$. The converse of this, that $\mathrm{k}_{[\mu;\nu}\mathrm{k}_{\lambda]}$ implies that k is hypersurface-orthogonal, is called Frobenius' theorem.
(b) From Equation (1) the extra condition $\mathrm{k}[\mu;\nu] = 0$ is equivalent to $k = \nabla f$ for some f.

Solution 7.24. Let $\mathbf{k}$ be the tangent vector to the congruence of null curves. Since $\mathbf{k}$ is hypersurface orthogonal,

$$\mathrm{k}_\alpha = \mathrm{hf}_{,\alpha}$$

for some scalar functions f and h (see Problem 7.23). Because k is null,

$$\mathbf{f}_{,a}\mathbf{f}^{,a} = 0$$

From these two equations we have

$$\mathrm{k}_{\alpha;\beta}\mathrm{k}\beta = \left(\mathrm{h}_{,\beta^{\mathrm{f}},a} + \mathrm{hf}_{,a;\beta}\right)\mathrm{hf}^{\mathrm{f}}\beta$$
$$\mathrm{f}_{,\alpha;\beta}\mathrm{f}^{\mathrm{f}}, \beta = \mathrm{f}_{,\beta;\mathrm{f}^{\mathrm{f}}}\beta = \frac{1}{2}\left(\mathrm{f}_{,\beta^{\mathrm{f}}}, \beta\right)_{;a} = 0$$

and thus

$$\mathrm{k}_{\alpha;\beta}\mathrm{k}^\beta = \left(\mathrm{h}, \beta^{\mathrm{f}}, \beta\right)\mathrm{k}_\alpha$$

so the geodesic equation $\nabla_{\mathbf{k}}\mathbf{k} \propto \mathbf{k}$ is satisfied. If $\mathbf{k}^a = \mathrm{dx}^a/\mathrm{d}\lambda$, we can introduce an affine parameter $\lambda' = \lambda'(\lambda)$ to write the equation in the standard form $\nabla_{\mathbf{k}}\overline{\mathbf{k}} = 0$ where $\overline{\mathbf{k}}^\alpha = \mathrm{dx}^\alpha/\mathrm{d}\lambda'$.

Solution 7.25. The general case gives an Euler-Lagrange equation

$$0 = \frac{d^2F}{dy^2}\frac{dy}{ds}\frac{\partial y}{\partial \dot{x}} + \frac{dF}{dy}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial y}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial y}{\partial x}\right)\right].$$

Since $\mathrm{dy/ds} = 0$ (for s an affine parameter) and since $\mathrm{dF/dy} \neq 0$, this is the same as the Euler-Lagrange equation obtained from $\delta \int \mathrm{yds} = 0$.

13.7.8 8 Differential Geometry: Further Concepts

Vector $\mathbf{B}$ is related to its contravariant components B^μ by

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^\mu \mathbf{e}_\mu$$

the e_μ are basis vectors. The covariant components B_μ repreEve same vector, but represent it as a different type of "vector", a one-form. (Loosely, one-forms are often called "covariant 3.) For one-forms the analog of the above equation is

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathrm{B}_\mu \tilde{\omega}^\mu,$$

indicates a one-form and $\tilde{\omega}^\mu$ are basis one-forms with covariant Wonents $(1,0,0,0), (0,1,0,0)$, etc. For an arbitrary tensor T , with Aponents $\mathrm{T}_{\alpha\beta\ldots}{}^{\gamma\delta\cdots}$,

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_{a\beta\ldots}{}^{\gamma\delta\cdots}\tilde{\omega}^\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta \otimes \cdots \otimes \mathrm{e}_\gamma^{\otimes}\mathrm{e}_\delta^{\otimes\cdots}$$

The scalar product of two vectors, or of two one-forms, involves the ic tensor, and is denoted by a "dot":

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathrm{g}_{\mu\nu}\mathrm{A}^\mu\mathbf{B}^\nu$$
$$\tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = \mathrm{g}^{\mu\nu}\mathrm{A}_\mu\mathrm{B}_\nu$$

Wre $\mathrm{g}^{\mu\nu}$ is the matrix inverse of $\mathrm{g}_{\mu\nu}$.) The scalar product of a vector Wha a one-form does not involve the metric, only a summation over an
deve. This is sometimes distinguished notationally as

$$\tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{A} \equiv \langle \tilde{\mathbf{B}}, \mathbf{A} \rangle \equiv \mathbf{B}_\mu \mathbf{A}^\mu$$

Since $\langle \tilde{\boldsymbol{\omega}}^\mu, \mathbf{e}_\nu \rangle = \delta^\mu{}_\nu$, the basis $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^\mu$ is said to be "dual" to the basis $\mathbf{e}_\mu$. If $\tilde{\mathbf{B}}$ and $\tilde{\mathbf{A}}$ are one-forms corresponding to vectors $\mathbf{B}$ and $\mathbf{A}$ we have, of course, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = \langle \tilde{\mathbf{B}}, \mathbf{A} \rangle = \langle \tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{B} \rangle$.

A one-form of particular usefulness is $\widetilde{\mathrm{df}}$, the gradient of any scalar function f. When combined with a vector v, it gives the directional derivative of f along v.

$$\langle \widetilde{\mathrm{df}}, \mathrm{v} \rangle = \nabla_{\mathrm{v}} \mathrm{f} = \mathrm{f}_{,a} \mathrm{v}^a.$$

The basis vectors e_α corresponding to a coordinate system are tangent to the coordinate lines. This motivates the notation for a coordinate basis vector

$$\mathrm{e}_\alpha = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^\alpha}$$

Similarly, the coordinate basis one-forms are gradients of the coordinate surfaces,

$$\tilde{\omega}^\alpha \equiv \widetilde{\mathbf{dx}}^\alpha$$

Alternatively, since a spacetime metric can locally be transformed to the Minkowski metric, it is always possible to find a set of orthonormal basis vectors and one-forms at every point. These are not necessarily tangents to or gradients of the coordinates; they are denoted by $\mathbf{e}_{\hat{\mu}}, \hat{\omega}^{\hat{\mu}}$, where a dicates orthonormality. Note that the relations $\langle \tilde{\omega}^\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle = \delta^\alpha{}_\beta$, $\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \mathrm{g}_{\alpha\beta}$, and $\tilde{\omega}^\alpha \cdot \tilde{\omega}^\beta = \mathrm{g}^{\alpha\beta}$ always hold. When the basis is orthonormal, then in addition $\mathrm{g}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ and $\mathrm{g}^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$. If a local orthonormal frame in spacetime is freely falling (i.e. the basis is that of a freely falling observer), then all the $\Gamma^a \beta y$ vanish at the center of the frame.

The commutator of two basis-vector fields

$$\nabla_{\mathbf{e}_\alpha} \mathbf{e}_\beta - \nabla_{\mathbf{e}_\beta} \mathbf{e}_\alpha = [\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta] \equiv \mathrm{c}_{\alpha\beta}{}^\gamma \mathbf{e}_\gamma$$

vanishes identically, $\mathrm{c}_{\alpha\beta}{}^\gamma = 0$, if and only if e_α and e_β are the tangent vectors to come coordinate system (a coordinate basis). In a
il (not necessarily a coordinate) basis ,

$$y = \mathbf{e}_\mu \cdot (\nabla_\gamma{}^{\mathrm{e}} \beta) = \frac{1}{2} \left(\mathrm{g}_{\mu\beta,\gamma} + \mathrm{g}_{\mu\gamma,\beta} - \mathrm{g}_{\beta\gamma,\mu} + \mathrm{c}_{\mu\beta\gamma} + \mathrm{c}_{\mu\gamma\beta} - \mathrm{c}_{\beta\gamma\mu} \right)$$

Stersor of rank p with all of its indices covariant, and which is A antisymmetric on all indices, is called a p-form. A totally antimized direct product of forms is denoted by a wedge " Λ ".
Will concepts of Lie differentiation, Lie transport, and exterior differof forms are developed in problems.
11. A spacetime has coordinates x^α with basis vectors $\partial/\partial \mathrm{x}^\alpha$ and is one-forms $\widetilde{\mathrm{dx}}^a$. What are the values of:

$$\mathrm{CU}^0, \partial/\partial \mathrm{x}^0 \rangle \,, \left\langle \widetilde{\mathrm{dx}}^2, \partial/\partial \mathrm{x}^3 \right\rangle, \left(\partial/\partial \mathrm{x}^0\right) \cdot \left(\partial/\partial \mathrm{x}^1\right), \widetilde{\mathrm{dx}}^0 \cdot \widetilde{\mathrm{dx}}^1, \widetilde{\mathrm{dx}}^0 \cdot \widetilde{\mathrm{dx}}^0 ?$$

|x| To what vector does the one-form $\widetilde{\mathrm{dx}}^1$ correspond?

blem 8.2. The usual basis for polar coordinates, $\mathbf{e}_{\hat{\mathrm{r}}} = \mathbf{e}_{\mathrm{r}}$, $\mathbf{e}_{\hat{\theta}} = \mathrm{r}^{-1} \mathbf{e}_\theta$ est a coordinate basis. Consider the one-form basis $\hat{\omega}^{\hat{\mathbf{i}}}$ dual to this

$$\left\langle \hat{\omega}^{\hat{\mathrm{i}}}, \mathrm{e}_{\hat{\mathrm{j}}} \right\rangle = \delta^{\mathrm{i}}{}_{\mathrm{j}}.$$

Wid the function f such that $\hat{\omega}^{\hat{\mathrm{r}}} = \widetilde{\mathrm{df}}$ and prove that there does not Wance function g such that $\tilde{\omega}^{\hat{\theta}} = \widetilde{\mathrm{d}g}$. Do this without imposing any Nexe on the polar coordinates.

Notelem 8.3. In 3-dimensional Euclidean space, what is a necessary and extraticant condition on a field of one-forms $\tilde{\sigma}$ for there to exist a function Exach that $\tilde{\sigma} = \widetilde{\mathrm{df}}$?
Q. Elem 8.4. If Ω_1 is a p-form and Ω_2 a q-form, show that

$$\Omega_1 \wedge \Omega_2 = (-1)^{\mathrm{pq}} \Omega_2 \wedge \Omega_1.$$

Problem 8.5. The exterior derivative of a differential form Ω can be defined axiomatically by the following properties:
(i) If Ω is a p-form, $\mathrm{d}\Omega$ is a $(\mathrm{p}+1)$-form;
(ii) $\mathrm{d}(\Omega_1 + \Omega_2) = \mathrm{d}\Omega_1 + \mathrm{d}\Omega_2$;
(iii) For a zero form f (scalar), $\widetilde{\mathrm{df}}$ is defined by $\langle \widetilde{\mathrm{df}}, v \rangle = \nabla_v \mathrm{f}$ for any v;
(iv) $\mathrm{d}(\Omega_1 \wedge \Omega_2) = \mathrm{d}\Omega_1 \wedge \Omega_2 + (-1)^{\mathrm{p}} \Omega_1 \wedge \mathrm{d}\Omega_2$ where Ω_1 is a p-form;
[Note: If $p = 0$ (i.e. f a scalar) this reads: $\widetilde{d}(f\Omega) = \widetilde{df} \wedge \Omega + f\widetilde{d}\Omega$.]
(v) $\mathrm{dd}\Omega = 0$ for any Ω.

An alternative definition notes that a p-form is a completely antisymmetri covariant tensor of rank p, and defines the exterior derivative as the cort pletely antisymmetrized covariant derivative. Show that these definitions are equivalent.

Problem 8.6. Consider a 2 -form in n-dimensional space:

$$\alpha = f\left(x^1, x^2, \cdots, x^n\right) \widetilde{dx}^1 \wedge \widetilde{dx}^2$$

Suppose for some region of space including $x^1 = 0$, that

$$\mathrm{d}\alpha = 0$$

Construct the 1 -form

$$\tilde{\beta} = \left[x^1 \int_0^1 f\left(\xi x^1, x^2, \cdots, x^n\right) d\xi \right] \widetilde{dx}^2$$

and show that $\alpha = \mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{\beta}}$.

Problem 8.7. The components of the Maxwell tensor $\mathrm{F}_{\alpha\beta}$ can be regarde as the components of a 2 -form F . Show that Maxwell's equations in vacuum can be written $\mathrm{dF} = 0,\ \mathrm{d} * \mathrm{F} = 0$.

Problem 8.8. A 3-surface in spacetime is spacelike, timelike, or null, if its normal vector is timelike, spacelike, or null respectively. It is desire to find three orthogonal linearly independent vectors in a 3 -surface. Show that for a spacelike surface, these are all spacelike; for a timelike surfact

Spacelike and one timelike; for a null surface, one null and two elike.

Nem 8.9. Show that the integral $\int_S F^\mu d^3\Sigma_\mu$, where F^μ is some Side field and S is some oriented 3-dimensional hypersurface in space$x$ is independent of the parametrization $x^\mu = x^\mu(a, b, c)$ used to nibe. S. [See Problem 3.30 for the definition of $d^3\Sigma_\mu$.]

Nem 8.10. [Note: This problem assumes a familiarity with the Cartan His, beyond the scope of most relativity texts. Succeeding problems $\mathrm{y}_{\mathrm{and}}$ depend on it.] In the language of differential forms the generalized theorem is

$$\int_\Omega \mathrm{d}\theta =\therefore \int_{\partial\Omega} \theta$$

ill diat does this theorem reduce, in the following cases

(a) Ω is 3-dimensional, $\theta = f^k d^2 S_k$

(b) Ω is 4-dimensional, $\theta = \mathrm{f}^\mu \mathrm{d}^3\Sigma_\mu$.

(c) Ω is 3-dimensional, $\theta = \mathrm{F}^{\mu\nu}\mathrm{d}^2\Sigma_{\mu\nu}$ where $\mathrm{F}^{\mu\nu}$ is antisymmetric.

(a) Use the generalized Stokes theorem to derive the familiar relation

$$\oint \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{dl} = \int (\underset{\sim}{\nabla} \times \underset{\sim}{A}) : dS.$$

Wem 8.11. Show that there exists no tensor with components conefted from the 10 metric coefficients $\mathrm{g}_\alpha\beta$ and their 40 first derivatives

s, g - except g itself and products of it with itself, e.g. $\mathrm{g} \otimes \mathrm{g}$.

Slem 8.12.

(a) Show that, in a coordinate frame, $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ is symmetric on the last indices.

(b) Show that in an orthonormal frame, $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ is antisymmetric on the travoindices.

Exalem 8.13. The Lie derivative of a scalar function is defined to be Sidirectional derivative: $\mathcal{L}_{\mathbf{x}} f = \nabla_{\mathbf{x}} f$. For a vector field y, we define

Lie differentiation as $\mathcal{L}_x y \equiv [x, y] = \nabla_x y - \nabla_y x$. The Lie derivative obeys all the usual rules for a derivative operator and always gives a tensor of the same rank as the tensor differentiated.

(a) What is the Lie derivative of a 1 -form?

(b) What is the Lie derivative of a tensor whose components are $\mathrm{T}^\alpha\beta$?

Problem 8.14. Suppose $\mathrm{A} = \mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ is the tangent vector field to a congruence (set of curves) $\mathrm{x}^a = \mathrm{x}^a(\lambda)$ and B is a vector field. Show that the geometrical interpretation of the transport law $\mathcal{L}_A B = 0$ is that B connects points of equal λ on neighboring curves of the congruence.

Problem 8.15. Show that Lie differentiation commutes with the operation of contraction.

Problem 8.16. Show that

$$\mathcal{L}_{\mathbf{u}}\mathcal{L}_{\mathbf{v}} - \mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathcal{L}_{\mathbf{u}} = \mathcal{L}'_{[\mathbf{u},\mathbf{v}]}$$

Problem 8.17. Another definition of the Lie derivative of a geometric object $\Phi^A\left[x^\mu(P)\right]$ (A represents all the tensor indices, $x^\mu(P)$ are the coordinates of a point P) is as follows: Make an infinitesimal point transformation $\mathrm{P}_0 \rightarrow \mathrm{P}_\mathrm{N}$ by $\mathrm{x}^\mu\left(\mathrm{P}_0\right) = \mathrm{x}^\mu\left(\mathrm{P}_\mathrm{N}\right) + \xi^\mu\left(\mathrm{P}_\mathrm{N}\right)$. (Since ξ^μ is infinitesimal, it can in fact be evaluated at either P_0 or P_N.) Also make an infinitesimal coordinate transformation that makes the numerical values of the coordinates of P_N the same as those of P_0 in the original coordinates:

$$\bar{x}^\mu\left(P_N\right) = x^\mu\left(P_0\right)$$

Then define

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}}\Phi^\mathrm{A}\left(\mathrm{P}_0\right) = \mathrm{LIM}_{\boldsymbol{\xi}\rightarrow 0}\left[\Phi^\mathrm{A}\left(\mathrm{P}_0\right) - \bar{\Phi}^\mathrm{A}\left(\mathrm{P}_\mathrm{N}\right)\right]$$

Show that this definition is equivalent to that of Problem 8.13 by examining the cases (i) Φ^A = a scalar field (ii) $\Phi^\mathrm{A} = \mathrm{A}_\mu$ (iii) $\Phi^\mathrm{A} = \mathrm{T}_\mu{}^\nu$.

blem 8.18. It is desired to transport a vector v along a curve with went vector u. Which of the following are necessary for parallel ramport? - for Fermi-Walker transport? - for Lie transport?: metric; xtwe connection; $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ defined off the curve.

Dem 8.19. You are given a vector field $v^i = (-y, x, z^a), a$ = constant, Q3-space with metric $\mathrm{ds}^2 = \mathrm{dx}^2 + \mathrm{dy}^2 + \mathrm{d}z^2$. A certain vector $\underset{\sim}{\mathbf{u}}$ ie transported along $\underset{\sim}{v}$ from a point A to a point B and is then Illel transported

back to A by the reverse route. For what value of a Eere a $\underset{\sim}{\mathbf{u}}$ which is always left unchanged by this process?

\$1em 8.20. Find the most general vector field which is everywhere Well-propagated along itself. Fermi-Walker transported along itself. mansported along itself.

Slem 8.21. If Ω is a p-form, show that $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}(d\Omega) = d\left(\mathcal{L}_{\mathbf{x}}\Omega\right)$.

Sistem 8.22. Vector analysis in 3-dimensional orthogonal curvilinear dinates is a special case of tensor analysis where $\mathrm{g_{ij}} = \mathrm{h_i^2}\delta_{\mathrm{ij}}$ (not dreded). The h_i 's are functions of the coordinates called "scale nons". Vector components are often referred to the ("physical") ortho4. al basis $\hat{\omega}^{\hat{\mathrm{i}}} = \mathrm{h_i}\widetilde{\mathrm{dx}}^{\mathrm{i}}$ (not summed). Derive expressions for (i) ∇S, D. $\nabla \times V$, (iii) $\nabla \cdot \underset{\sim}{V}$ and (iv) $\nabla^2 S$, where S is a scalar field and $\underset{\sim}{V}$ |coctor field.

Sintem 8.23. Derive expressions for $\underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{A}$ and $\underset{\sim}{\nabla} \times \underset{\sim}{A}$ in spherical polar wordinates.

Entlem 8.24. If $\mathrm{F}_{\mu\nu} = \mathrm{A}_{\nu;\mu} - \mathrm{A}_{\mu;\nu}$, prove that $\mathrm{F}_{[\mu\nu;\lambda]} = 0$.

Xolem 8.25. In an arbitrary spacetime manifold (not necessarily homogeSeas or isotropic), pick an initial spacelike hypersurface S_I, place an Extrary coordinate grid $\left(x^1, x^2, x^3\right)$ on it, eject geodesic world lines Dogonal to it, and give these world lines the coordinates $\left(x^1, x^2, x^3\right)$ = Sidestant, $\mathrm{x}^0 \equiv \mathrm{t} = \mathrm{t_I} + \tau$ where τ is proper time along the world line,
beginning with $\tau = 0$ on $\mathrm{S_I}$. Show that in this coordinate system ("Gaussian normal coordinates") the metric takes on the synchronous form

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j.$$

Problem 8.26.
(a) If $\mathrm{g}_{\mu\nu}$ and $\overline{\mathrm{g}}_{\mu\nu}$ are the components of two symmetric tensors, show that

$$\mathrm{S}^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \bar{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$$

are the components of a tensor. Here the Γ 's and $\bar{\Gamma}$'s are Christoffel symbols formed from the tensors g and $\bar{g}$ in the usual way.
(b) Suppose $\mathrm{g}_{\mu\nu}$ and $\overline{\mathrm{g}}_{\mu\nu}$ have the same geodesics. Then show that

$$S^{\lambda}_{\mu\nu} = \delta^{\lambda}_{\mu}\Psi_{\nu} + \delta^{\lambda}_{\nu}\Psi_{\mu}$$

where Ψ_{μ} are the components of a vector.
Problem 8.27. Compute the connection coefficients of the following metric in an orthonormal frame

$$\mathrm{ds}^2 = -\mathrm{e}^{2a}\mathrm{dt}^2 + \mathrm{e}^{2\beta}\mathrm{dr}^2 + \mathrm{e}^{2\gamma}\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\ \mathrm{d}\phi^2\right)$$
$$a, \beta, \gamma = \text{ functions of r and t.}$$

Problem 8.28. The redshift between two observers (with 4 -velocities $\mathbf{u}_A$ and u_B) can be defined in two ways: (i) by the energies of a photon (4-momentum p) travelling along a null geodesic between them: $1 + z \equiv \mathbf{u}_A \cdot \mathbf{p}/\mathbf{u}_B \cdot \mathbf{p}$, or (ii) by the proper time between two null geodesics, emitted $\Delta\tau_{\mathrm{A}}$ apart and received $\Delta\tau_{\mathrm{B}}$ apart, $1 + z \equiv \Delta\tau_{\mathrm{A}}/\Delta\tau_{\mathrm{B}}$. Show that these definitions are equivalent.

8: Solutions

Solution 8.1.

(a) The key relations are $\left\langle \widetilde{\mathrm{dx}}^a, \partial/\partial\mathrm{x}^\beta \right\rangle \equiv \widetilde{\mathrm{dx}}^a \cdot \partial/\partial\mathrm{x}^\beta = \delta^a_\beta, (\partial/\partial\mathrm{x}^a)$. $(\partial/\partial\mathrm{x}) = \mathrm{g}_\alpha\beta$, and $\widetilde{\mathrm{dx}}^a \cdot \widetilde{\mathrm{dx}}^\beta = \mathrm{g}^{\alpha\beta}$. The answers are:

$$1, \quad 0, \quad \mathrm{g}_{01}, \quad \mathrm{g}^{01}, \quad \mathrm{g}^{00}.$$

(b) The vector $\mathrm{g}^{1\alpha}\partial/\partial\mathrm{x}^\alpha \equiv \mathrm{g}^{1\alpha}\mathrm{e}_a$ corresponds to $\widetilde{\mathrm{dx}}^1$ since, for any vector v

$$v \cdot g^{1a}e_a = v^\mu e_\mu \cdot g^{1a}e_a = v^\mu g_{\mu a}g^{1a} = v^\mu\delta^1_\mu = v^1 = \left\langle \widetilde{dx}^1, v \right\rangle$$

Solution 8.2. It is easy to see that f is just the coordinate r, that is $\widehat{\mathrm{df}} = \widetilde{\mathrm{dr}}$, since

$$\left\langle \widetilde{dr}, \mathrm{e}_{\hat{r}} \right\rangle = \left\langle \widetilde{dr}, \mathrm{e}_r \right\rangle = 1$$
$$\left\langle \widetilde{dr}, \mathrm{e}_{\hat{\theta}} \right\rangle = \mathrm{r}^{-1}\left\langle \widetilde{dr}, \mathrm{e}_\theta \right\rangle = 0$$

Now suppose there exists a g such that $\widetilde{\mathbf{dg}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$ then

$$0 = \left\langle \widetilde{\mathrm{dg}}, \mathrm{e}_{\hat{\mathrm{r}}} \right\rangle = \left\langle \widetilde{\mathrm{dg}}, \mathrm{e}_{\mathrm{r}} \right\rangle = \partial\mathrm{g}/\partial\mathrm{r}$$
$$1 = \left\langle \widetilde{\mathrm{dg}}, \mathrm{e}_{\hat{\theta}} \right\rangle = \mathrm{r}^{-1}\left\langle \widetilde{\mathrm{dg}}, \mathrm{e}_\theta \right\rangle = \mathrm{r}^{-1}\partial\ \mathrm{g}/\partial\theta$$

Clearly the conditions $\partial g/\partial r = 0$ and $\partial g/\partial\theta = r$ are incompatible.
Solution 8.3. In a cartesian coordinate basis the condition is that $\sigma_{i,j} = \sigma_{j,i}$. This is equivalent to the basis-free requirement that the curl of σ (the vector equivalent of $\bar{\sigma}$) vanish.
Solution 84Choose a basis $\tilde{\omega}_1 \cdots \tilde{\omega}_N$ Any pform can be written as a sum $\sum_{i,j} A_{ij} \cdots (\tilde{\omega}_i \wedge \tilde{\omega}_j \cdots)$ in which there are exactly p elements in each term in parenthesesSince the distributive law holds for wedge multipli cation and additionit will be sufficient to prove the identity for monomial p and q forms and to evaluate eg

$$(\tilde{\omega}_1 \wedge \tilde{\omega}_2 \wedge \cdots \wedge \tilde{\omega}_p) \wedge (\tilde{\omega}_1, \wedge\tilde{\omega}_2 \wedge \wedge \cdots \wedge \tilde{\omega}_{q'})$$

Wedge multiplication is associativeso the parentheses are not important First move $\tilde{\omega}_1$ to the extreme left by interchanging it repeatedly with its left neighborEach interchange brings in a minus signa total of $(-1)^p$ Now move $\tilde{\omega}_2$ left to the second positionThis brings in p more minus signsAnd continueBy the time we are done with $\tilde{\omega}_q$ the sign will have been changed pq timeshence the desired identity
Solution 85We show that the two definitions are equivalent by showing that $d\Omega$ has the same components in an arbitrary coordinate basis when calculated from either definitionStart with the definition in terms of the covariant derivativeLet the components of Ω be $\Omega_{a\beta\cdots\gamma} = \Omega_{[a\beta\cdots\gamma]}$ p indicesThen the components of $d\Omega$ are

$$\begin{aligned}\Omega_{[\alpha\beta\cdots\gamma;\delta]} &= \Omega_{[\alpha\beta\cdots\gamma,\delta]} - \Gamma_{\epsilon[a\delta}{}^{\epsilon}\cdots\gamma] \\ &\quad - \Gamma_{\epsilon[\beta\delta}{}^{\epsilon}\cdots\gamma^{-\cdots} - \Gamma_{\epsilon[\gamma\delta}{}_{a\beta\cdots} = \Omega_{[a\beta\cdots\gamma,\delta]}.\end{aligned} \tag{1}$$

The Γ terms vanish since $\Gamma_{\mu[\nu\sigma]} = 0$ in a coordinate basisNow start with

$$\Omega = \Omega_{\alpha\beta\cdots\gamma}\widetilde{dx}^{\alpha} \wedge \widetilde{dx}^{\beta} \wedge \ldots\widetilde{dx}\gamma$$

By propertyiid does not disturb the summation conventionso

$$\begin{aligned}d\Omega = (d\Omega_{a\beta}\cdots\gamma) \wedge \left(\widetilde{dx}^{a} \wedge \widetilde{dx}^{\beta} \wedge \cdots \wedge \widetilde{dx}\gamma\right) \\ + \Omega_{a\beta}\cdots\gamma\ d\left(\widetilde{dx}^{a} \wedge \widetilde{dx}\beta \wedge \cdots \wedge \widetilde{dx}\gamma\right)\end{aligned} \tag{2}$$

onere we have used propertyivwith $p = 0$ since $\Omega_{a\beta\ldots y}$ is simply a functionzero formNow from propertyiwe know that

$$\widetilde{df} = f_{,a}\widetilde{dx}^{a}$$

for any zero form fFrom propertyiii$\left\langle \widetilde{df}, \partial/\partial x^{\beta} \right\rangle = \left\langle f, a\widetilde{dx}^{a}, \partial/\partial x^{\beta} \right\rangle Ef^{f}, \beta$ thus $\widetilde{d}_{a\beta}\cdots\gamma = \Omega_{a\beta\ldots\gamma,\delta}\widetilde{dx}\delta$ The second term in Equation2 is zeroAccording to propertyivit can be reduced to a sum of terms Each of which contains a ddxwhich vanishes by propertyvThus Equation2becomes

$$d\Omega = \Omega_{a\beta\ldots\gamma,\delta}\widetilde{dx}^{\delta} \wedge \widetilde{dx}^{a} \wedge \widetilde{dx}^{\beta} \ldots \wedge \widetilde{dx}\gamma$$

Since $d\Omega$ is a $(p+1)$ formpropertyiand the wedge product is anti symmetricthe components of $d\Omega$ are $\Omega_{[a\beta\ldots\gamma,\delta]}$ as in Equation1
Solution 86Define

$$g \equiv \left[x^1 \int_0^1 f\left(\xi x^1, x^2, \cdots x^n\right) d\xi\right]$$

so that $\tilde{\beta} = g\widetilde{dx}^{2}$ and

$$\begin{aligned}d\tilde{\boldsymbol{\beta}} = g_{,i}\widetilde{dx}^{i} \wedge \widetilde{dx}^{2} = g_{,1}\widetilde{dx}^{1} \wedge \widetilde{dx}^{2} + g_{,3}\widetilde{dx}^{3} \wedge \widetilde{dx}^{2} + \cdots \\ g_{,1} = \left[\int_0^1 f\left(\xi x^1, x^2, \cdots x^n\right) d\xi\right] + \left[x^1 \int_0^1 \xi f'\left(\xi x^1, x^2, \cdots x^n\right) d\xi\right]\end{aligned}$$

Now
There f' indicates a derivative with respect to the first argumentThe second term above can be written as

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^1\xi f'\left(\xi x^1, x^2\cdots\right) d\xi &= \int_0^1 \xi\frac{\partial}{\partial\xi} f\left(\xi x^1, x^2, \cdots\right) d\xi \\ &= \xi f\left(\xi x^1, x^2, \cdots\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 f\left(\xi x^1, x^2, \cdots\right) d\xi\end{aligned}$$

where we have integrated by parts; we have then

$$\mathrm{g}_{,1} = \xi \mathrm{f}\left(\xi \mathrm{x}^1, \mathrm{x}^2, \cdots \mathrm{x}^\mathrm{n}\right)\Big|_0^1 = \mathrm{f}\left(\mathrm{x}^1, \mathrm{x}^2, \cdots \mathrm{x}^\mathrm{n}\right)$$

Next, $d\alpha = 0$ tells us that

$$\mathrm{d}\alpha = \mathrm{f}_{,3}\mathrm{dx}^3 \wedge \mathrm{dx}^1 \wedge \mathrm{dx}^2 + \mathrm{f}_{,4}\mathrm{dx}^4 \wedge \mathrm{dx}^1 \wedge \mathrm{dx}^2 + \cdots = 0$$

which can only be true if $f_{,3} = f_{,4} = f_{,5} = \cdots f_{,n} = 0$, and hence

$$\mathrm{g}_{,3} = \left[\mathrm{x}^1 \int_0^1 \mathrm{f}_{,3}\left(\xi \mathrm{x}^1, \mathrm{x}^2, \cdots, \mathrm{x}^\mathrm{n}\right) \mathrm{d}\xi\right] = 0$$

Similarly $\mathrm{g}_{,4} = \mathrm{g}_{,5} = \cdots \mathrm{g}_{,\mathrm{n}} = 0$, so that finally

$$d\tilde{\boldsymbol{\beta}} = g_{,1}\widetilde{dx}^1 \wedge \widetilde{dx}^2 = f\left(x^1, x^2, \cdots x^n\right)\widetilde{dx}^1 \wedge \widetilde{dx}^2 = \alpha$$

Solution 8.7. The 2 -form is $\mathrm{F} = \mathrm{F}_{\mu\nu}\widetilde{\mathrm{dx}}^\mu \wedge \widetilde{\mathrm{dx}}^\nu$ so that

$$\mathbf{0} = \mathrm{dF} = \mathrm{F}_{\mu\nu,\lambda}\widetilde{\mathrm{dx}}^\lambda \wedge \widetilde{\mathrm{dx}}^\mu \wedge \widetilde{\mathrm{dx}}^\nu$$

gives us the Maxwell's equations $\mathbf{F}_{[\mu\nu;\lambda]} = 0$. Similarly $\mathbf{d} * \mathbf{F} = \mathbf{0}$ gives ${}^* \mathrm{F}_{[\lambda\sigma;\nu]} = 0$, but. this is equivalent to (see Problem 3.25)

$$0 = \varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} * \mathrm{F}_{\lambda\sigma;\nu} = 2 * * \mathrm{F}^{\mu\nu}_{;\nu} = -2\,\mathrm{F}^{\mu\nu}_{;\nu}$$

and so we have the remaining Maxwell's equations $\mathrm{F}^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$.

Solution 8.8. At any point on the surface choose a local orthonormal tetrad $\mathbf{e}_{\hat{\mathrm{t}}}, \mathbf{e}_{\hat{\mathrm{x}}}, \mathbf{e}_{\hat{\mathrm{y}}}, \mathbf{e}_{\hat{\mathrm{z}}}$. If the surface is spacelike, we can choose the tetrad so that $\mathbf{e}_{\hat{\mathrm{t}}}$ is the unit normal. The 3 orthogonal, linearly independent vectors lying in the surface are then spacelike ($\mathrm{e}_{\hat{\mathrm{x}}}, \mathrm{e}_{\hat{\mathrm{y}}}, \mathrm{e}_{\hat{\mathrm{z}}}$). Now any other orthonormal tetrad we might have chosen is related to the first one by a Lorentz transformation, which does not affect whether a vector is spacelike or not. Hence the three vectors are always spacelike when the surface is spacelike.

In the null case, choose $\mathrm{e}_{\hat{\mathrm{t}}} + \mathrm{e}_{\hat{\mathrm{x}}}$ to be normal to the surface. A null vector is orthogonal to itself, so the 3 orthogonal vectors in the surface are $\mathrm{e}_{\hat{\mathrm{y}}}$ and $\mathrm{e}_{\hat{\mathrm{z}}}$ (spacelike) and $\mathrm{e}_{\hat{\mathrm{t}}} + \mathrm{e}_{\hat{\mathrm{x}}}$ (null). In the timelike case, choose $\mathrm{e}_{\hat{\mathrm{x}}}$ to be normal. Then in the surface, $\mathrm{e}_{\hat{\mathrm{f}}}$ is timelike; $\mathrm{e}_{\hat{\mathrm{y}}}$ and e_2 are spacelike. Again these results are unchanged by Lorentz transformations.

Solution 8.9. The volume element is

$$\mathrm{d}^3\Sigma_\mu(\mathrm{a},\ \mathrm{b}, \mathrm{c}) = \frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\beta\sigma}\frac{\partial\left(\mathrm{x}^\nu, \mathrm{x}^\beta, \mathrm{x}^\sigma\right)}{\partial(\mathrm{a},\ \mathrm{b}, \mathrm{c})}\mathrm{dadbdc}$$

If we change parameterization from $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}$ to α, β, γ then

$$\mathrm{dadbdc} \rightarrow \left|\frac{\partial(\mathrm{a},\ \mathrm{b}, \mathrm{c})}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)}\right| \mathrm{d}\alpha\ \mathrm{d}\beta\ \mathrm{d}\gamma$$

Provided (α, β, γ) has the same orientation as $(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c})$, the Jacobian is positive (definition of same orientation!), so we can drop the absolute value signs, and

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^3\Sigma_\mu(\mathrm{a},\ \mathrm{b}, \mathrm{c}) &\rightarrow \frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\frac{\partial\left(\mathrm{x}^\nu, \mathrm{x}^\rho, \mathrm{x}^\sigma\right)}{\partial(\mathrm{a},\ \mathrm{b}, \mathrm{c})}\frac{\partial(\mathrm{a},\ \mathrm{b}, \mathrm{c})}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)}\mathrm{d}a\ \mathrm{d}\beta\ \mathrm{d}\gamma \\
&= \frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\frac{\partial\left(\mathrm{x}^\nu, \mathrm{x}^\rho, \mathrm{x}^\sigma\right)}{\partial(a, \beta, \gamma)}\mathrm{d}a\ \mathrm{d}\beta\ \mathrm{d}y \\
&= \mathrm{d}^3\Sigma_\mu(a, \beta, \gamma)
\end{aligned}$$

which completes the proof. With differential forms, the invariance is obvious since $d^3\Sigma_\mu$ can be viewed as a 3 -form

$$\mathrm{d}^3\Sigma_\mu = \frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\widetilde{\mathrm{dx}}^\nu \wedge \widetilde{\mathrm{dx}}^\rho \wedge \widetilde{\mathrm{dx}}^\sigma$$

Solution 8.10.

(a) The 2 -form θ and its exterior derivative are

$$\theta = f^k d^2 S_k = f^k \frac{1}{2}\varepsilon_{k1m}\widetilde{dx}^1 \wedge \widetilde{dx}^m$$

$$d\theta = f^k_{,n}\frac{1}{2}\varepsilon_{k1m}\widetilde{dx}^n \wedge \widetilde{dx}^1 \wedge \widetilde{dx}^m + f^k\frac{1}{2}\left(d\varepsilon_{k1m}\right) \wedge \widetilde{dx}^1 \wedge \widetilde{dx}^m$$

Define the symbol [klm] to be $+1(-1)$ if $\mathrm{k}, 1,\ \mathrm{m}$ is an even (odd) permutation of $1, 2, 3$, and zero otherwise. We then have

$$\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{k1\ m}} = \mathrm{d}\left(|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}[\mathrm{k1\ m}]\right) = [\mathrm{k1\ m}]\frac{1}{2}\ \mathrm{g}_{,\mathrm{n}}\widetilde{\mathrm{dx}}^{\mathrm{n}}/|\mathrm{g}|^{\frac{1}{2}} = \varepsilon_{\mathrm{k1\ m}}\frac{1}{2}\ \mathrm{g}_{,\mathrm{n}}\widetilde{\mathrm{dx}}^{\mathrm{n}}/\mathrm{g}.$$

Thus we have

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{f}^{\mathrm{k}},\mathrm{n} + \frac{1}{2}\ \mathrm{g}_{,\mathrm{n}}/\mathrm{g}\right)\varepsilon_{\mathrm{k1\ m}}\widetilde{\mathrm{dx}}^{\mathrm{n}}\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}^{1}\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}^{\mathrm{m}}\\ &= \frac{1}{2}|\ \mathrm{g}|^{-\frac{1}{2}}\left(|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\mathrm{f}^{\mathrm{k}}\right)_{,\mathrm{n}}\varepsilon_{\mathrm{k1\ m}}\widetilde{\mathrm{dx}}^{\mathrm{n}}\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}^{1}\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}^{\mathrm{m}}.\end{aligned}$$

But in three dimensions, $\widetilde{dx}^{n}\wedge\widetilde{dx}^{1}\wedge\widetilde{dx}^{m} = |g|^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{n1m}\widetilde{dx}^{1}\wedge\widetilde{dx}^{2}\wedge\widetilde{dx}^{3}$ and $\varepsilon_{\mathrm{k1\ m}}\varepsilon^{\mathrm{nlm}} = 2\delta^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}$, so

$$d\theta = f^{k}_{;k}|g|^{\frac{1}{2}}\widetilde{dx}^{1}\wedge\widetilde{dx}^{2}\wedge\widetilde{dx}^{3}.$$

Thus, in ordinary vector notation, the theorem becomes

$$\int_{V}\nabla\cdot\underset{\sim}{f}dV = \int_{\partial V}\underset{\sim}{f}\cdot\underset{\sim}{dS}.$$

(b)

$$\begin{aligned}\theta = \mathrm{f}^{\mu}\mathrm{d}^{3}\Sigma_{\mu} &= \mathrm{f}^{\mu}\frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\widetilde{\mathrm{dx}}^{\alpha}\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}^{\beta}\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}\gamma\\ \mathbf{d}\theta &= \frac{1}{3!}\left(\mathrm{f}^{\mu},{}_{\lambda}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\widetilde{\widetilde{\mathrm{dx}}^{\lambda}} + \mathrm{f}^{\mu}\mathbf{d}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\right)\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}^{\alpha}\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}\beta\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}\gamma\\ &= \frac{1}{3!}\left(\mathrm{f}^{\mu},\lambda\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\widetilde{\mathrm{dx}}^{\lambda} + \mathrm{f}^{\mu}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{g},\lambda}{\mathrm{g}}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\widetilde{\mathrm{dx}}^{\lambda}\right)\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}^{\alpha}\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}\beta\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}\gamma\\ &= \frac{1}{3!}|\mathrm{g}|^{-\frac{1}{2}}\left(|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\mathrm{f}^{\mu}\right)_{,\lambda}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}\widetilde{\mathrm{dx}}\wedge\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}^{\alpha}\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}\beta\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}\gamma\\ &= \frac{-1}{3!|\mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}}\left(|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\mathrm{f}^{\mu}\right)_{,\lambda}\varepsilon_{\mu a\beta\gamma}\varepsilon^{\lambda\alpha\beta\gamma}|\mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\widetilde{\mathrm{dx}}x^{0}\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}^{1}\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}^{2}\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}^{3}\\ &= \frac{1}{3!|\mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}}\left(|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\mathrm{f}^{\mu}\right)_{,\lambda}\delta^{\lambda}{}_{\mu}3!|\mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\widetilde{\mathrm{dx}}^{0}\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}^{1}\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}^{2}\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}^{3}\\ &= \mathrm{f}^{\mu}{}_{;\mu}|\mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\widetilde{\mathrm{dx}}^{0}\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}^{1}\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}^{2}\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}^{3}\end{aligned}$$

The theorem then reduces to

$$\int_{\Omega}\nabla\cdot\mathbf{f}|g|^{\frac{1}{2}}d^{4}x = \int_{\partial\Omega}f^{\mu}d^{3}\Sigma_{\mu}$$

(c) $\theta = \mathrm{F}^{\mu\nu}\mathrm{d}^{2}\Sigma_{\mu\nu} = \mathrm{F}^{\mu\nu}\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\widetilde{\mathrm{dx}}^{\alpha}\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}^{\beta}$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2}\ \mathrm{d}\left(\ \mathrm{F}^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu a\beta}\right)\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}^{\alpha}\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}\beta\\ &= \frac{1}{2}|\ \mathrm{g}|^{-\frac{1}{2}}\left(|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{F}^{\mu\nu}\right)_{,\lambda}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\widetilde{\mathrm{dx}}^{\lambda}\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}^{\alpha}\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}\beta\end{aligned}$$

where we have taken $\mathrm{d}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ as in part b. Now

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mu\nu a\beta}\widetilde{\mathrm{dx}}^{\lambda}\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}^{a}\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}^{\beta} &= \varepsilon_{\mu\nu a\beta}(1/6)\delta^{\lambda a\beta}_{\kappa\sigma\tau}\widetilde{\mathrm{dx}}^{\kappa}\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}^{\sigma}\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}^{\tau}\\ &= -(1/6)\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon^{\gamma\lambda\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\kappa\sigma\tau}\widetilde{\mathrm{dx}}^{\kappa}\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}^{\sigma}\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}^{\tau}\\ &= -\varepsilon_{\mu\nu a\beta}\varepsilon^{\gamma\lambda a\beta}\ \mathrm{d}^{3}\Sigma_{\gamma}\\ &= 2\delta^{\gamma\lambda}_{\mu\nu}\mathrm{d}^{3}\Sigma_{\gamma}\end{aligned}$$

and by Problem 7.7 (i) we have

$$\begin{aligned}\mathbf{d}\theta &= |\mathrm{g}|^{-\frac{1}{2}}\left(|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{F}^{\mu\nu}\right),\lambda^{\delta\gamma\lambda}_{\mu\nu}\mathrm{d}^{3}\Sigma_{\gamma}\\ &= 2\ \mathrm{F}^{\mu\nu}_{;\nu}\mathrm{d}^{3}\Sigma_{\mu},\end{aligned}$$

and finally

$$\int_{\partial\Omega}\mathrm{F}^{\mu\nu}\mathrm{d}^{2}\Sigma_{\mu\nu} = 2\int_{\Omega}\mathrm{F}^{\mu\nu}_{;\nu}\mathrm{d}^{3}\Sigma_{\mu}$$

(d) Let $\theta = A_k dx^k = \underset{\sim}{A} \cdot d\ell$, and let Ω be 2-dimensional; then the exterior derivative is

$$\begin{aligned} d\theta &= A_{k,j}\widetilde{dx}^j \wedge \widetilde{dx}^k \\ &= A_{k,j}\delta^{[k}_m \delta^{j]}_n \widetilde{dx}^m \wedge \widetilde{dx}^n \\ &= \frac{1}{2} A_{k,j}\varepsilon^{rkj}\varepsilon_{rmn}\widetilde{dx}^m \wedge \widetilde{dx}^n \\ &= (\nabla \times \underset{\sim}{A})^r d^2 S_r \end{aligned}$$

which completes the derivation.

Solution 8.11. Suppose there were such a tensor. What would be its components at some arbitrary point in a freely falling local orthonormal frame? In this frame all the $g_{\alpha\beta,\mu}$ vanish (because all the $\Gamma_{\alpha\beta\mu}$ vanish), and $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$. Thus the tensor must be some algebraic combination of $\eta_{\alpha\beta}$, "zero," and possibly $\delta^a{}_\beta$ and $\varepsilon^{a\beta y\delta}$. You can very quickly convince yourself that the only nontrivial one is $\eta\otimes\eta\otimes\cdots\otimes\eta$ (the δ only renames indices, e.g. $\delta^\alpha{}_\beta\eta_{\alpha\gamma} = \eta_{\beta\gamma}$ and the $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ gives zero by its antisymmetries, or else just gets some of its indices lowered). Since we chose an arbitrary point, the conclusion holds at all points.

Solution 8.12.

(a) The general definition of the Γ 's is

$$\Gamma_{\mu\alpha\beta} = \mathbf{e}_\mu \cdot \nabla_\beta \mathbf{e}_\alpha$$

In a coordinate frame

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu a\beta} - \Gamma_{\mu\beta a} &= \mathbf{e}_\mu \cdot (\nabla_\beta \mathbf{e}_\alpha - \nabla_\alpha \mathbf{e}_\beta) \\ &= \mathbf{e}_\mu \cdot [\mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\alpha] \\ &= 0 \end{aligned}$$

since in a coordinate frame basis vectors commute.

(b) In an orthonormal frame

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\mu\beta} &= \mathbf{e}_\mu \cdot \nabla_\beta \mathbf{e}_\alpha + \mathbf{e}_\alpha \cdot \nabla_\beta \mathbf{e}_\mu \\ &= \nabla_\beta (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\alpha) = \nabla_\beta (\eta_{\mu\alpha}) = 0. \end{aligned}$$

Solution 8.13.

(a) We use the fact ("usual rule for a derivative operator") that for any vector field v

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}} \langle \tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{v} \rangle = \left\langle \mathcal{L}_{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{v} \right\rangle + \left\langle \tilde{\mathbf{A}}, \mathcal{L}_{\mathbf{x}} \mathbf{v} \right\rangle. \tag{1}$$

Thus for the components of the 1 -form $\mathcal{L}_{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{A}}$ we have

$$\begin{aligned} \left(\mathscr{L}_{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{A}}\right)_\alpha \equiv \mathscr{L}_{\mathbf{x}} \mathbf{A}_\alpha &= \left\langle \mathcal{L}_{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{e}_\alpha \right\rangle \\ &= \mathcal{L}_{\mathbf{x}} \left\langle \tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{e}_\alpha \right\rangle - \left\langle \tilde{\mathbf{A}}, \mathcal{L}_{\mathbf{x}} \mathbf{e}_\alpha \right\rangle \qquad (1) \\ &= \mathbf{A}_{\alpha,\beta^{\mathrm{x}}}\beta - \left\langle \tilde{\mathbf{A}}, [\mathbf{x}, \mathbf{e}_\alpha] \right\rangle \\ &= \mathbf{A}_{\alpha,\beta^{\mathrm{x}}}\beta - \mathbf{A}_\gamma \left\langle \tilde{\omega}^\gamma, \left[\mathbf{x}^\beta \mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}_\alpha\right] \right\rangle \\ &= \mathbf{A}_{\alpha,\beta^{\mathrm{x}}}\beta - \mathbf{A}_\gamma \left\langle \tilde{\omega}^\gamma, \left(\mathbf{x}^\beta \mathbf{c}_{\beta a}{}^\delta \mathbf{e}_\delta - \mathbf{x}^\beta, a^{\mathrm{e}}\beta\right) \right\rangle \\ &= \mathbf{A}_{\alpha,\beta^{\mathrm{x}}}\beta + \mathbf{x}^\beta{}_{,a}\mathbf{A}_\beta - \mathbf{A}_\gamma{}^{\mathrm{x}}\mathbf{c}_{\beta a}\gamma \qquad (2) \end{aligned}$$

The last term vanishes in a coordinate frame. An alternative form is, from Equation (1),

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{L}_{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{A}}\right)_a &= \nabla_{\mathbf{x}} \left\langle \tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{e}_a \right\rangle - \left\langle \tilde{\mathbf{A}}, (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{e}_a - \nabla_{\mathbf{e}_a} \mathbf{x}) \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla_{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{A}}, \mathbf{e}_a \right\rangle + \left\langle \tilde{\mathbf{A}}, \nabla_{\mathbf{e}_\alpha} \mathbf{x} \right\rangle \\ &= \mathbf{A}_{a;\beta^{x}}{}^\beta + \mathbf{x}^\beta;{}_a \mathbf{A}_\beta \qquad (3) \end{aligned}$$

The connection coefficients do not really enter into the definition of the Lie derivative; they cancel out of Equation (3) to leave Equation (2).

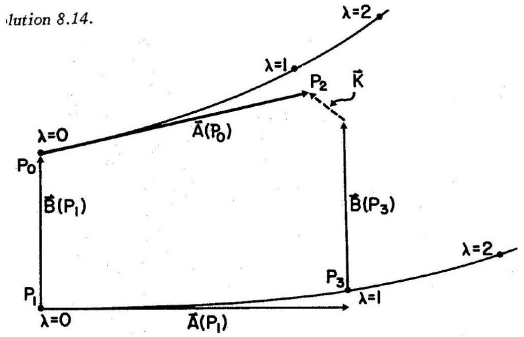
(b) For simplicity, work in a coordinate basis:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{\mathbf{x}} \mathbf{T} &= \mathscr{L}_{\mathbf{x}} \left(\mathrm{T}^a{}_\beta \mathbf{e}_\alpha \otimes \tilde{\omega}^\beta\right) \\ &= \left(\mathscr{L}_{\mathbf{x}} \mathrm{T}^\alpha{}_\beta\right) \mathbf{e}_a \otimes \tilde{\omega}^\beta + \mathrm{T}^a{}_\beta \left(\mathscr{L}_{\mathbf{x}} \alpha\right) \otimes \tilde{\omega}^\beta + \mathrm{T}^a{}_\beta \mathbf{e}_\alpha \otimes \left(\mathscr{L}_{\mathbf{x}} \beta\right) \\ &= \mathrm{T}^\alpha{}_{\beta,\gamma}{}^\gamma{}_{\mathbf{e}a}{}^\otimes \tilde{\omega}^\beta - \mathrm{T}^\alpha{}_\beta{}^\gamma{}_{,a\gamma}\gamma\tilde{\omega}^\beta + \mathrm{T}^a{}_\beta{}^{\mathrm{x}}{}_{,\gamma}{}^{\mathrm{e}}\alpha^\otimes\tilde{\omega}^\gamma \\ &= \left(\mathrm{T}^\alpha{}_{\beta,\gamma}{}^\gamma - \mathrm{T}^\mu{}_\beta{}^a{}_{,\mu} + \mathrm{T}^\alpha{}_\mu{}^\mu{}_{,\beta}\right) \mathbf{e}_a \otimes \tilde{\omega}^\beta. \end{aligned}$$

This is often written

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}\mathrm{T}^{\alpha}{}_{\beta} = \mathrm{T}^{\alpha}{}_{\beta,\gamma}{}^{\gamma\gamma} - \mathrm{T}^{\mu}{}_{\beta}{}^{\alpha}{}_{,\mu} + \mathrm{T}^{\alpha}{}_{\mu}{}^{\mu}{}_{,\beta}$$

and the commas can be replaced by semicolons as in part (a).



At the points P_0 and P_1 consider two tangent vectors $A\,(P_0)$ and $\mathrm{A}\,(\mathrm{P}_1)$ each extending from $\lambda = 0$ to $\lambda = \Delta\lambda = \mathcal{O}(\epsilon)$. (Note: In the figure $\Delta\lambda$ is taken to be unity so that the A vectors are large and the "difference vector" K is exaggerated for clarity.) Suppose that at point P_1 the vector $B\,(P_1)$ connects P_1 and P_0. Let us compute the amount by which the vector field $\mathbf{B}$ fails to connect points of equal λ along the congruence A, i.e. let us compute the vector K :

$$\begin{aligned} K &= [B\,(P_1) + A\,(P_0)] - [A\,(P_1) + B\,(P_3)] \\ &= [B\,(P_1) - B\,(P_3)] - [A\,(P_1) - A\,(P_0)] \\ &= A^{\tau}B_{,\tau}e_{\gamma} + \mathcal{O}\left(A^2B\right) - B^{\tau}A_{,\tau}e_{\gamma} + \mathcal{O}\left(B^2A\right) \\ &= [A,B] + \mathcal{O}\left(\epsilon^3\right) \text{ if } |A| \sim \mathcal{O}(\epsilon) \sim |B|. \end{aligned}$$

Thus in the limit of infinitesimal vectors A and B,

$$K = [A,B] = \mathcal{L}_A B$$

Thus K vanishes if $\mathscr{L}_A B = 0$, i.e. if B is "Lie-dragged" along A.

Solution 8.15. Contraction may be thought of as multiplication by the constant Kronecker-delta tensor $\delta^{\mu}{}_{\nu}$. But the Lie derivative of the tensor δ^{μ}_{ν} is zero, as we can easily prove in a coordinate frame,

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}\left(\delta^{\mu}_{\nu}\right) = \delta^{\mu}_{\nu,\lambda}\mathrm{x}^{\lambda} + \delta^{\mu}_{\lambda}\mathrm{x}^{\lambda}_{,\nu} - \delta^{\lambda}_{\nu}\mathrm{x}^{\mu}_{,\lambda} = 0 + \mathrm{x}^{\mu}_{,\nu} - \mathrm{x}^{\mu}_{,\nu} = 0$$

and therefore the contraction operator $\delta^{\mu}{}_{\nu}$ can go on either side of $\mathscr{L}_{\mathbf{x}}$.

Solution 8.16. If the operator identity holds for scalar functions and for vector fields, it will hold for arbitrary tensors. This is because the action of the Lie derivative on arbitrary tensors is determined by its action on scalars and vectors (see Problem 8.13). Let f be a scalar function, then

$$\mathcal{L}_u\mathcal{L}_v f - \mathcal{L}_v\mathcal{L}_u f = \mathcal{L}_u\nabla_v f - \mathcal{L}_v\nabla_u f = [u,v]f = \mathcal{L}_{[u,v]}f$$

Now let w be a vector field, then

$$\mathcal{L}_{\mathbf{u}}\mathcal{L}_{\mathbf{v}}w - \mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathcal{L}_{\mathbf{u}}w - \mathcal{L}_{[\mathbf{u},\mathbf{v}]^w} = [\mathbf{u},[\mathbf{v},\mathbf{w}]] - [\mathbf{v},[\mathbf{u},\mathbf{w}]] - [[\mathbf{u},\mathbf{v}],\mathbf{w}] = 0$$

The vanishing of this last expression (the Jacobi identity for commutators) can easily be checked e.g. by writing out all terms. This completes the proof for scalars and for vectors, and hence in general.

Solution 8.17.

(i) First the scalar case:

$$\begin{aligned} \Phi\,(\mathrm{P_N}) &= \Phi\,(\mathrm{P}_0) + \left[\mathrm{x}^{\mu}\,(\mathrm{P_N}) - \mathrm{x}^{\mu}\,(\mathrm{P}_0)\right]\Phi_{,\mu}\,(\mathrm{P}_0) + \cdots \\ &= \Phi\,(\mathrm{P}_0) - \xi^{\mu}\Phi_{,\mu} \end{aligned}$$

and $\bar{\Phi}\,(P_N) = \Phi\,(P_N)$ since Φ is a scalar, hence

$$\mathscr{L}_{\xi}\Phi = \Phi_{,\mu}\xi^{\mu}$$

(ii) Since $\bar{x}^{\mu}\,(P_N) = x^{\mu}\,(P_0) = x^{\mu}\,(P_N) + \xi^{\mu}$, we have for vector fields

$$\overline{\mathrm{A}}_{\mu}\,(\mathrm{P_N}) = \left(\partial\mathrm{x}^{\alpha}/\partial\bar{\mathrm{x}}^{\mu}\right)\mathrm{A}_{\mu}\,(\mathrm{P_N}) = \left(\delta^{\alpha}_{\mu} - \xi^{\alpha}_{,\mu}\right)\mathrm{A}_{\mu}\,(\mathrm{P_N})$$

Now we combine this with

$$\mathrm{A}_{\mu}\,(\mathrm{P_N}) = \mathrm{A}_{\mu}\,(\mathrm{P}_0) - \mathrm{A}_{\mu,\beta}\xi^{\beta}$$

to get

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\xi \mathrm{A}_\mu &= \mathrm{A}_\mu\left(\mathrm{P}_0\right) - \overline{\mathrm{A}}_\mu\left(\mathrm{P}_\mathrm{N}\right) \\ &= \mathrm{A}_\mu\left(\mathrm{P}_0\right) - \left(\delta_\mu^a - \xi^a_{,\mu}\right)\left(\mathrm{A}_a\left(\mathrm{P}_0\right) - \mathrm{A}_{a,\beta}\xi^\beta\right) \\ &= \mathrm{A}_{\mu,\beta}\xi^\beta + \mathrm{A}_a\xi^a_{,\mu}\end{aligned}$$

(iii) The tensor case is handled similarly:

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{T}}^\mu_\nu\left(\mathrm{P}_\mathrm{N}\right) &= \left(\partial\overline{\mathrm{x}}^\mu/\partial\mathrm{x}^a\right)\left(\partial\mathrm{x}^\beta/\partial\overline{\mathrm{x}}^\nu\right)\mathrm{T}^a_\beta\left(\mathrm{P}_\mathrm{N}\right) \\ &= \left(\delta^\mu_a + \xi^\mu_{,a}\right)\left(\delta^\beta_\nu - \xi^\beta{}_{,\nu}\right)\left[\mathrm{T}^a{}_\beta\left(\mathrm{P}_0\right) - \mathrm{T}^a_{\beta,\gamma}\xi^\gamma\right] \\ &= \mathrm{T}^\mu_\nu\left(\mathrm{P}_0\right) - \mathrm{T}^\mu_{\nu,\gamma}\xi^\gamma - \mathrm{T}^\mu_\beta\xi^\beta{}_{,\nu} + \mathrm{T}^a_\nu\xi^\mu, a \\ {}_\xi\mathrm{T}^\mu_\nu &= \mathrm{T}^\mu_{\nu,\gamma}\xi^\gamma + \mathrm{T}^\mu_\beta\xi^\beta{}_{,\nu} - \mathrm{T}^a_\nu\xi^\mu{}_{,a}\end{aligned}$$

Solution 8.18. The parallel transport law $u^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} = 0$ requires only the affine connection $\Gamma^a\beta\gamma$. The Fermi-Walker transport law

$$\nabla_\mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{u}(a\cdot\mathbf{v}) - a(u\cdot\mathbf{v}) \quad a \equiv \nabla_\mathbf{u}\mathbf{u}$$

requires, in addition, a metric for the dot products. The Lie transport equation $\nabla_\mathbf{u}v - \nabla_\mathbf{v}\mathbf{u} = 0$ requires $\mathbf{u}$ to be a vector field defined off the curve, not just a tangent vector along the curve, because the gradient of $\mathbf{u}$ in the $\mathbf{v}$-direction must be defined, and $\mathbf{v}$ is not in general along the curve. Although the formula above includes ∇ 's, a connection is actually not needed, because the Γ 's cancel out due to the antisymmetry of the equation. Obviously no metric is required for Lie differentiation.

Solution 8.19. If $\underset{\sim}{u}$ can be returned to A unchanged, then in principle it can be extended into a vector field which is both parallel transported and Lie transported from A to B. Let $\underset{\sim}{u} = (u^x, u^y, u^z)$, and consider the identity

$$\nabla_\mathbf{u}\mathbf{v} - \nabla_\mathbf{v}\mathbf{u} = [\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}] = \mathcal{L}_\mathbf{u}\mathbf{v} = -\mathcal{L}_\mathbf{v}\mathbf{u} \tag{1}$$

Setting the appropriate terms to zero in Equation (1), i.e. $\nabla_v u = \mathcal{L}_v u = 0$, and noting that the Christoffel symbols vanish, we have

$$\begin{aligned}\nabla_\mathbf{u}\mathbf{v} = 0 = \mathbf{u}^\mathrm{i}\mathbf{v}^\mathrm{k}_{;\mathrm{i}} = 0 \\ -\mathbf{u}^\mathrm{y} = \mathbf{u}^\mathrm{x} = a\mathbf{u}^z\mathbf{z}^{\alpha-1} = 0.\end{aligned} \tag{2}$$

So $\underline{u}$ can be nonzero (and have $u^z \neq 0$) only if

$$\alpha = 0 \tag{3}$$

Solution 8.20. Let the vector field be $\mathbf{u}(\mathrm{p})$. If it is parallel propagated along itself, we have $\nabla_\mathbf{u}\mathbf{a} = 0$. This is just the geodesic equation, so the field must be a field of tangent vectors to a space-filling congruence of geodesics.

If the field is F-W transported along itself, we have

$$\nabla_\mathbf{u}\mathbf{u} = (\mathbf{u}\otimes\mathbf{a} - \mathbf{a}\otimes\dot{\mathbf{u}})\cdot\mathbf{u} \tag{1}$$

where $\mathbf{a} = \nabla_\mathbf{u}\mathbf{u}$. Thus

$$\mathbf{a} = \mathbf{u}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}) - \mathbf{a}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) \tag{2}$$

Now dot $\mathbf{u}$ into this and get $\mathbf{a}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{u}^2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}^2 = 0$. From (2) we have that either $u^2 = -1$ or $a = 0$. The first possibility means that any field of properly normalized 4-velocities is F-W transported along itself. The second says that the tangent vectors of any congruence of geodesics are also, even if they are not normalized to -1 .

The Lie transport law is

$$\mathbf{0} = \mathscr{L}_\mathbf{u}\mathbf{u} \equiv [\mathbf{u}, \mathbf{u}]$$

which is satisfied by any vector field.

Solution 8.21. Consider a 1 -form $\tilde{\mathrm{U}} = \mathrm{U}_a\widetilde{\mathrm{dx}}^a$. First calculate $\mathrm{d}_\mathrm{x}{}^{\tilde{U}}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\mathbf{x}\tilde{\mathbf{U}} &= \left(\mathrm{x}^\alpha\mathrm{U}_{\beta,\alpha} + \mathrm{U}_\alpha\mathrm{x}^\alpha{}_{,\beta}\right)\widetilde{\mathrm{dx}}\beta \\ \mathbf{d}\left(\mathscr{L}_\mathbf{x}\tilde{\mathbf{U}}\right) &= \left(\mathrm{x}^\alpha\mathrm{U}_{\beta,a} + \mathrm{U}_\alpha\mathrm{x}^\alpha{}_{,\beta}\right)_{;\gamma}\widetilde{\mathrm{dx}}^\gamma \wedge \widetilde{\mathrm{dx}}\beta\end{aligned} \tag{1}$$

Now calculate $\mathcal{L}_\mathbf{x}(\mathrm{d}\tilde{\mathbf{U}})$:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\tilde{\mathrm{U}} = \mathrm{U}_{a,\gamma}\widetilde{\mathrm{dx}}\gamma_{\wedge}\widetilde{\mathrm{dx}}^{a} \\
&\mathcal{L}_{\mathbf{x}}(\mathrm{d}\tilde{\mathrm{U}}) = \mathcal{L}_{\mathbf{x}}\left(\mathrm{U}_{\alpha,\gamma}\right)\widetilde{\mathrm{dx}}^{\gamma}\gamma_{\wedge}\widetilde{\mathrm{dx}}^{\alpha} + \mathrm{U}_{\alpha,\gamma}\mathcal{P}_{\mathbf{x}}\left(\widetilde{\mathrm{dx}}^{\gamma}\right)\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}^{\alpha} \\
&+ \mathrm{U}_{\alpha,\gamma}\widetilde{\mathrm{dx}}\gamma_{\wedge}\mathcal{L}_{\mathrm{x}}\left(\widetilde{\mathrm{dx}}^{\alpha}\right) \\
&= \mathrm{x}^{\tau}\mathrm{U}_{a,\gamma\tau}\widetilde{\mathrm{dx}}^{\gamma}\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}^{a} + \mathrm{U}_{a,\gamma}\mathrm{x}^{\gamma}{}_{,\tau}\widetilde{\mathrm{dx}}^{\tau}\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}^{a} + \mathrm{U}_{a,\gamma}\mathrm{x}^{a}{}_{,\tau}\widetilde{\mathrm{dx}}\gamma\wedge\widetilde{\mathrm{dx}}^{\tau} \\
&= \left[\left(\mathrm{x}^{\tau}\mathrm{U}_{\beta,r} + \mathrm{U}_{a}\mathrm{x}^{a},\beta\right),\gamma^{-}\mathrm{U}_{a}\mathrm{x}^{a},\beta\gamma^{]}\right]\widetilde{\mathrm{dx}}\gamma_{\wedge}\widetilde{\mathrm{dx}}\beta. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Equation (2) is obtained merely by relabeling indices. By symmetry of partial derivatives and antisymmetry of wedge product, the last term in brackets on the right hand side of Equation (2) vanishes. Comparing Equations (1) and (2), we have for 1 -forms:

$$\mathrm{d}\left(\mathfrak{L}_{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{U}}\right) = \mathcal{L}_{\mathbf{x}}(\mathrm{d}\tilde{\mathbf{U}})$$

The generalization of this method from 1 -form to p -form is straightforward.

Solution 8.22.

$$(\nabla S)^{\hat{i}} = \tilde{\omega}^{\hat{i}}\cdot\nabla S = h_i\widetilde{dx}^{i}\cdot\nabla S = h_i\partial S/\partial x^{i} \qquad \text{(i)}$$

(ii) The general expression for the curl must be

$$(\nabla\times V)^{i} = |g|^{-\frac{1}{2}}\varepsilon^{ijk}V_{k;j} = |g|^{-\frac{1}{2}}\varepsilon^{ijk}V_{k,j}$$

since it is a covariant relation and it is true in a locally flat (cartesian) coordinate basis. (See Problems 3.20 and 3.21 for the relevant properties of the antisymmetric tensor ε^{ijk}.) In the orthonormal basis

$$(\nabla\times V)^{\hat{i}} = \hat{\omega}^{\hat{i}}\cdot(\nabla\times V) = h_i(\nabla\times V)^{i} = h_i\left(h_1h_2h_3\right)^{-1}\varepsilon^{ijk}\partial\left(h_kV_{\hat{k}}\right)/\partial x^{j}.$$

(iii) Using the result in Problem 7.7 (g), we have

$$\nabla\cdot V = |g|^{-\frac{1}{2}}\left[|g|^{\frac{1}{2}}V^{i}\right]_{,i} = \left(h_1h_2h_3\right)^{-1}\left[\left(h_1h_2h_3\right)h_i^{-1}V_{\hat{i}}\right]_{,i}$$

(iv) With the expression in Problem 7.7 (j), ∇^2 S becomes

$$\nabla^2 S = |g|^{-\frac{1}{2}}\left(|g|^{\frac{1}{2}}g^{\alpha\beta}S_{,\beta}\right)_{,\alpha} = \left(h_1h_2h_3\right)^{-1}\left[h_1h_2h_3h_i^{-2}S_{,i}\right]_{,i}$$

Solution 8.23. We use results (ii) and (iii) of Problem 8.22 with $\mathrm{x}^1 = \mathrm{r}$, $\mathrm{x}^2 = \theta, \mathrm{x}^3 = \phi$ and with $\mathrm{h}_1 = 1$, $\mathrm{h}_2 = r$, $\mathrm{h}_3 = r\sin\theta$. (For simplicity we follow the usual notation here and omit the carets indicating physical components.)

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\underset{\sim}{\mathbf{A}} &= \left(r^2\sin\theta\right)^{-1}\left[r^2\sin\theta\ \mathrm{h_i^{-1}}\ \mathrm{A_i}\right]_{,\mathrm{i}} \\
&= \left(r^2\sin\theta\right)^{-1}\left[\left(r^2\sin\theta\ \mathrm{A_r}\right)_{,\mathrm{r}} + \left(r\sin\theta\ \mathrm{A}_{\theta}\right)_{,\theta} + r\ \mathrm{A}_{\phi,\phi}\right] \\
(\nabla\times\mathrm{A})^{r} &= (r\sin\theta)^{-1}\left[\left(\sin\theta\ \mathrm{A}_{\phi}\right)_{,\theta} - \mathrm{A}_{\theta,\phi}\right] \\
(\nabla\times\mathrm{A})^{\theta} &= (r\sin\theta)^{-1}\left[\ \mathrm{A}_{r,\phi} - \left(r\sin\theta\ \mathrm{A}_{\phi}\right)_{,\mathrm{r}}\right] \\
(\nabla\times\mathrm{A})^{\phi} &= r^{-1}\left[\left(r\ \mathrm{A}_{\theta}\right)_{,r} - \mathrm{A}_{r,\theta}\right]
\end{aligned}
$$

Solution 8.24. If forms and exterior differentiation are used, this problem is trivial. The first equation gives $\mathrm{F} = \mathrm{d}\tilde{\mathrm{A}}$ so, $\mathrm{dF} = \mathrm{dd}\tilde{\mathrm{A}} = 0$, since d d is always zero. $\mathrm{F}_{[\mu\nu;\lambda]}$ is exactly the components of dF , so we are done. The trick is that the total antisymmetrization implicit in the d's keeps any connection coefficient from entering the problem. If components are used, the proof is straightforward but more tedious.

Solution 8.25. In general, $\mathrm{ds}^2 = \mathrm{g}_{\alpha\beta}\mathrm{dx}^{\alpha}\mathrm{dx}\beta$. Since x^{i} = constant along any of the geodesics, $\mathrm{ds}^2 = \mathrm{g}_{00}\mathrm{dt}^2$ along any of the geodesics. But along the geodesics $\mathrm{ds}^2 = -\mathrm{d}\tau^2$, so $\mathrm{g}_{00} = -1$ everywhere. Let e_a be the coordinate basis vectors, and let $\mathbf{u} = \mathrm{d}/\mathrm{d}\tau$ be the tangent vector field to the geodesics (i.e. $\mathbf{u} = \mathbf{e}_0$). Since $\mathbf{u}$ is orthogonal to S_1, then $\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_0\cdot\mathbf{e}_{\mathrm{i}} = \mathrm{g}_{0\mathrm{i}} = 0$ at $\tau = 0$, and

$$d\left(u\cdot e_i\right)/dr = \nabla_u\left(u\cdot e_i\right) = 0 + u\cdot\nabla_u e_i = u\cdot\nabla^{u}_{e_i}$$

since the curves are geodesics ($\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0$) and since $\mathbf{e}_i$ and $\mathbf{u}$ form a coordinate basis ($[\mathrm{e_i},\mathrm{u}] = 0$). This last result vanishes

$$\mathbf{u}\cdot\nabla_{\mathbf{e_i}}\mathbf{u} = \frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{e_i}}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) = 0$$

and therefore $\mathbf{u}\cdot\mathbf{e_i} = \mathbf{g_{0i}} = 0$ everywhere.

Solution 8.26.

(a) From the point of view of modern differential geometry, $\bar{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$ and $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ are the component description of "machines" which map two vectors and a form into a number; i.e.

$$(\text{number}) \ = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\sigma_{\lambda}\mathrm{u}^{\mu}\mathrm{v}^{\nu} \equiv \langle\tilde{\sigma}, \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u}\rangle$$

where the covariant derivative is taken using the metric corresponding to whichever Γ is used. A tensor is a "machine" which is linear on all "slots" (i.e. in all its arguments). By itself Γ or $\bar{\Gamma}$ is not a tensor since

$$\mathbf{f}\,\langle\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u}\rangle \neq \langle\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{f}\mathbf{u})\rangle = \mathbf{f}\,\langle\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u}\rangle + \langle\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{u}\rangle\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{f}$$

and likewise with "bars" over the ∇ 's for $\bar{g}$. If however we subtract the two equations, the linearity-spoiling $\langle\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{u}\rangle\,(\nabla_{\mathbf{v}} - \nabla_{\mathbf{v}})\,\mathrm{f}$ term is identically zero since all covariant derivatives acting on a scalar function give the same result, i.e. are just directional derivatives. Thus $\mathrm{S}^{\lambda}_{\mu\nu}$ is a tensor.

(b) We cannot compare the geodesic equations of $\mathbf{g}$ and $\overline{\mathbf{g}}$ directly since they would involve different affine parameters τ and $\bar{\tau}$. If t is an arbitrary function of τ, a change of variable makes the geodesic equation

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}^{\lambda}}{\mathrm{dt}^2} + \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\frac{\mathrm{dx}^{\mu}}{\mathrm{dt}}\frac{\mathrm{dx}^{\nu}}{\mathrm{dt}} - \frac{\mathrm{dx}^{\lambda}}{\mathrm{dt}}\frac{\mathrm{d}^2\tau}{\mathrm{dt}^2}\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{d}\tau} = 0.$$

To eliminate the $\mathrm{d}\tau/\mathrm{dt}$ term, multiply by $\mathrm{dx}^a/\mathrm{dt}$ and antisymmetrize on α and λ to get

$$\mathrm{u}^{\alpha}\frac{\mathrm{du}^{\lambda}}{\mathrm{dt}} - \mathrm{u}^{\lambda}\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dt}} + \left(\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\mathrm{u}^{\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\mathrm{u}^{\lambda}\right)\mathrm{u}^{\mu}\mathrm{u}^{\nu} = 0,$$

where $\mathrm{u}^a \equiv \mathrm{dx}^a/\mathrm{dt}$. If the world lines $\mathrm{u}^a(\mathrm{t})$ are geodesics for both $\underline{\mathrm{g}}$ and $\bar{g}$ then the above equation must also hold with Γ replaced by $\bar{\Gamma}$. Subtracting these two equations gives

$$\left(\delta^a{}_{\sigma}\mathrm{S}^{\lambda}_{\mu\nu} - \delta^{\lambda}{}_{\sigma}\mathrm{S}^{\alpha}_{\mu\nu}\right)\mathrm{u}^{\sigma}\mathrm{u}^{\mu}\mathrm{u}^{\nu} = 0$$

which implies that

$$\delta^a_{(\sigma}S^{\lambda}_{\mu)\nu} - \delta^{\lambda}_{(\sigma}S^{a}_{\mu)\nu} = 0$$

When this equation is contracted on a and ν the result is

$$\mathrm{S}^{\lambda}_{\sigma\mu} = \delta^{\lambda}_{\sigma}\Phi_{\mu} + \delta^{\lambda}_{\mu}\Phi_{\sigma}$$
$$\Phi_a \equiv \frac{1}{5}\,\mathrm{S}^{\mu}_{a\mu}$$

[See also L. P. Eisenhart, Riemannian Geometry (Princeton University Press, 1962), Section 40.]

Solution 8.27. The difficult way to do this problem is to compute connection coefficients in a coordinate frame. Here we will use the method of "rotation 1-forms." (See MTW, Section 14.5 for details.) Choose an orthonormal frame as follows:

$$\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}} = \mathrm{e}^{a}\widetilde{\mathrm{dt}}$$
$$\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{r}}} = \mathrm{e}^{\beta}\widetilde{\mathrm{dr}}$$
$$\tilde{\omega}^{\hat{\theta}} = \mathrm{e}^{\gamma}\widetilde{\mathrm{d}\theta}$$
$$\tilde{\omega}^{\hat{\phi}} = \mathrm{e}^{\gamma}\sin\theta\widetilde{\mathrm{d}\phi}$$

The key formulas are the definition of $\tilde{\omega}_{\hat{\beta}}$

$$\mathbf{d}\tilde{\omega}^{\hat{a}} = -\tilde{\omega}^{\hat{a}}\hat{\beta}\wedge\tilde{\omega}^{\hat{\beta}},$$

and the relation of the forms to the Christoffel symbols

$$\Gamma^{\hat{\nu}_{\tilde{\omega}}}_{\hat{\mu}\hat{\lambda}}\hat{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\lambda}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\nu}_{\hat{\mu}}}_{\hat{\mu}}.$$

We now use these formulas for the given metric; let dot denote $\partial/\partial\mathrm{t}$ and prime denote $\partial/\partial\mathbf{r}$:

$$d\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}} = e^{\alpha}\alpha'\widetilde{d\mathrm{r}}\wedge\widetilde{d\mathrm{t}} = a'e^{-\beta\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{r}}}}\wedge\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}} \tag{1}$$
$$d\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{r}}} = e^{\beta}\dot{\beta}\widetilde{d\mathrm{t}}\wedge\widetilde{d\mathrm{r}} = e^{-\alpha}\dot{\beta}\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}}\wedge\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{r}}} \tag{2}$$
$$d\tilde{\omega}^{\hat{\theta}} = e^{\gamma}\dot{\gamma}\widetilde{d\mathrm{t}}\wedge\widetilde{d\theta} + e^{\gamma}\gamma'\widetilde{d\mathrm{r}}\wedge\widetilde{d\theta}$$
$$= e^{-\alpha}\dot{\gamma}\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}}\wedge\tilde{\omega}^{\hat{\theta}} + e^{-\beta}\gamma'\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{r}}}\wedge\tilde{\omega}^{\hat{\theta}} \tag{3}$$
$$d\tilde{\omega}^{\hat{\phi}} = e^{\gamma}\dot{\gamma}\sin\theta\widetilde{d\ \mathrm{d}}\wedge\widetilde{d\phi} + \mathrm{e}^{\gamma}\gamma'\sin\theta\widetilde{d\mathrm{r}}\wedge\widetilde{d\phi} + \mathrm{e}^{\gamma}\cos\theta\widetilde{d\theta}\wedge\widetilde{d\phi}$$
$$= e^{-\alpha}\dot{\gamma}\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}}\wedge\tilde{\omega}^{\hat{\phi}} + e^{-\beta}\gamma'\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{r}}}\wedge\tilde{\omega}^{\hat{\phi}} + \cot\theta e^{-\gamma}\tilde{\omega}^{\hat{\theta}}\wedge\tilde{\omega}^{\hat{\phi}} \tag{4}$$

But we also know that $d\tilde{\omega}^{\hat{\alpha}} = -\tilde{\omega}^{\hat{a}}\hat{\beta} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\beta}}$ and $\tilde{\omega}_{\hat{a}\hat{\beta}} = -\tilde{\omega}\hat{\beta}\hat{a}$, where indices are raised and lowered with $\eta_{\hat{\alpha}}\hat{\beta}$. For $\hat{a} = \hat{\mathrm{t}}$ we have

$$d\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}} = -\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}}_{\hat{\mathrm{r}}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{r}}} - \tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}}\hat{\theta} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\theta}} - \tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}}_{\hat{\phi}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\phi}}.$$

Comparing this with Equation (1), we guess that

$$\tilde{\omega}^{\widehat{\mathrm{t}}}_{\widehat{\mathrm{t}}} = \tilde{\omega}^{\widehat{\mathrm{t}}}_{\widehat{\mathrm{t}}} \tag{5}$$
$$\tilde{\omega}^{\hat{t}_{\hat{\theta}}} = \tilde{\omega}'\hat{\omega}_{\widehat{\mathrm{t}}} = K_2\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}} + K_1\tilde{\omega}^{\widehat{\mathrm{r}}} \tag{6}$$
$$\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}}\hat{\phi} = \tilde{\omega}_{\hat{\mathrm{t}}} = K_3\tilde{\omega}^{\hat{\phi}} \tag{7}$$

where K_1, K_2, K_3 are functions we must find. Similarly, Equation (2) implies that

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\hat{\mathrm{t}}} = e^{-a}\dot{\beta}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\mathrm{r}}} + \mathrm{K}_4\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\mathrm{t}}} \tag{8}$$
$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\mathrm{r}}}\hat{\theta} = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\hat{\mathrm{r}}} = \mathrm{K}_5\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\theta}} \tag{9}$$
$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\mathrm{r}}}\hat{\phi} = -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\hat{\mathrm{r}}} = \mathrm{K}_6\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\phi}}. \tag{10}$$

Equation (3) implies

$$\tilde{\omega}^{\hat{\theta}}_{\hat{\mathrm{t}}} = \mathrm{e}^{-\alpha}\dot{\gamma}\tilde{\omega}^{\hat{\theta}} \tag{11}$$
$$\tilde{\omega}^{\hat{\theta}}_{\hat{\mathrm{r}}} = \mathrm{e}^{-\beta}\gamma'\tilde{\omega}^{\hat{\theta}} \tag{12}$$
$$\tilde{\omega}^{\hat{\theta}}\hat{\phi} = -\tilde{\omega}^{\hat{\phi}}\hat{\theta} = \mathrm{K}_7\tilde{\omega}^{\hat{\phi}}, \tag{13}$$

and Equation (4) gives

$$\tilde{\omega}_{\hat{\mathrm{t}}} = \mathrm{e}^{-\alpha}\dot{\gamma}\tilde{\omega}^{\hat{\phi}} \tag{14}$$
$$\tilde{\omega}^{\hat{\phi}}_{\hat{\Gamma}} = \mathrm{e}^{-\beta}\gamma'\tilde{\omega}^{\hat{\phi}} \tag{15}$$
$$\tilde{\omega}_{\hat{\theta}} = \cot\theta\mathrm{e}^{-\gamma}\tilde{\omega}^{\hat{\phi}} \tag{16}$$

Comparing Equations (5)-(16), we find

$$\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}}_{\hat{\mathrm{r}}} = a'\mathrm{e}^{-\beta}\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}} + \dot{\beta}\mathrm{e}^{-\alpha}\hat{\omega}^{\hat{\mathrm{r}}}$$
$$\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}}\hat{\theta} = \mathrm{e}^{-\alpha}\dot{\gamma}\tilde{\omega}^{\hat{\theta}}$$
$$\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}}\widehat{\phi} = \mathrm{e}^{-\alpha}\dot{\gamma}\tilde{\omega}^{\hat{\phi}}$$
$$\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{r}}}\hat{\theta} = -\mathrm{e}^{-\beta}\gamma'\tilde{\omega}^{\hat{\theta}}$$
$$\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{r}}}\hat{\phi} = -\mathrm{e}^{-\beta}\gamma'\tilde{\omega}^{\hat{\phi}}$$
$$\tilde{\omega}_{\hat{\phi}} = -\cot\theta\mathrm{e}^{-\gamma}\tilde{\omega}^{\hat{\phi}}$$

But $\Gamma^{\hat{\nu}}\hat{\mu}\hat{\omega} - \hat{\lambda} = \bar{\omega}_{\hat{\mu}}$, so the nonvanishing connection coefficients are

$$\Gamma^{\widehat{\mathrm{t}}}_{\widehat{\mathrm{r}}\widehat{\mathrm{t}}} = \widehat{\Gamma}_{\widehat{\mathrm{r}}\widehat{\mathrm{t}}} = a'\mathrm{e}^{-\beta}$$
$$\Gamma^{\hat{\mathbf{t}}}_{\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}} = \Gamma^{\hat{\mathbf{r}}}_{\hat{\mathbf{t}}\hat{\mathbf{r}}} = \dot{\beta}\mathrm{e}^{-\alpha}$$
$$\Gamma^{\hat{t}}\hat{\theta}\hat{\theta} = \Gamma^{\hat{\theta}}\hat{\mathrm{t}}\hat{\theta} = \Gamma^{\hat{t}}\hat{\phi}\hat{\phi} = \Gamma^{\hat{\phi}}\hat{\mathrm{t}}\hat{\phi} = \dot{\gamma}\mathrm{e}^{-\alpha}$$
$$\Gamma^{\hat{\mathrm{r}}}\hat{\theta}\hat{\theta} = -\Gamma^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\mathrm{r}}\hat{\theta}} = \Gamma^{\hat{\mathrm{r}}}\hat{\phi}\hat{\phi} = -\Gamma^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\mathrm{r}}\hat{\phi}} = -\gamma'\mathrm{e}^{-\beta}$$
$$\Gamma^{\hat{\theta}}\hat{\phi}\hat{\phi} = -\Gamma^{\hat{\phi}}\hat{\theta}\hat{\phi} = -\cot\theta\mathrm{e}^{-\gamma}.$$

Solution 8.28. Start with $1 + \mathrm{z} = \Delta\tau_{\mathrm{A}}/\Delta\tau_{\mathrm{B}}$. To show that this is equivalent to the other definition, recall that p is proportional to k, the wave vector, which is the gradient of the surfaces of constant phase:

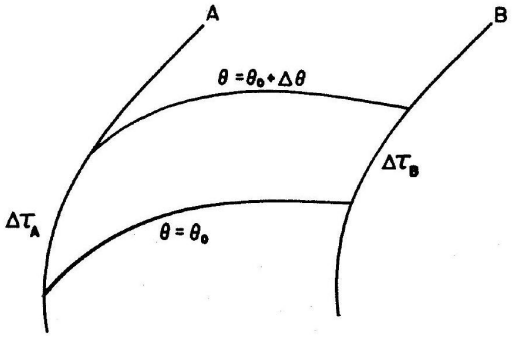
$$\mathbf{k} = \nabla\theta.$$

Since k is a null vector,

$$0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \nabla\theta = \nabla_{\mathbf{k}}\theta$$

i.e. θ = constant along the rays. Consider two rays differing in phase by $\Delta\theta$. Observer A computes $\Delta\theta$ as

$$\Delta\theta = \theta\left(\tau + \Delta\tau_{\mathrm{A}}\right) - \theta(\tau) = \left(\Delta\tau_{\mathrm{A}}\right) \nabla_{\mathbf{u}_{\mathrm{A}}}\theta = \left(\Delta\tau_{\mathrm{A}}\right) \mathbf{u}_{\mathrm{A}} \cdot \mathbf{k}.$$



ilarly observer B finds

$$\Delta\theta = \left(\Delta\tau_{\mathrm{B}}\right) \mathbf{u}_{\mathrm{B}} \cdot \mathbf{k}$$

Were $\mathbf{k}$ is now evaluated at B . Since $\Delta\theta$ is the same for A and B , have

$$\frac{\Delta\tau_{\mathrm{A}}}{\Delta\tau_{\mathrm{B}}} = \frac{(\mathrm{u} \cdot \mathrm{k})_{\mathrm{B}}}{(\mathrm{u} \cdot \mathrm{k})_{\mathrm{A}}} = \frac{(\mathrm{u} \cdot \mathrm{p})_{\mathrm{B}}}{(\mathrm{u} \cdot \mathrm{p})_{\mathrm{A}}}$$

the two definitions are equivalent.

13.7.9 9 Curvature

The study of curvature is based on the Riemann curvature tensor:

$$\mathrm{R}^{\mu}_{\nu\alpha\beta} \equiv \frac{\partial\Gamma^{\mu}_{\nu\beta}}{\partial \mathrm{x}^{a}} - \frac{\partial\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}}{\partial \mathrm{x}^{\beta}} + \Gamma^{\mu}_{\rho\alpha}\Gamma^{\rho}_{\nu\beta} - \Gamma^{\nu\alpha}_{\rho\beta\mu}$$

coordinate frame. The covariant components of the Riemann tensor connected by several symmetries

$$\mathrm{R}_{a\beta\gamma\delta} = \mathrm{R}_{\gamma\delta\alpha\beta}, \quad \mathrm{R}_{a\beta\gamma\delta} = -\mathrm{R}_{\beta a\gamma\delta}$$
$$\mathrm{R}_{a\beta\gamma\delta} = -\mathrm{R}_{a\beta\delta y}, \quad \mathrm{R}_{a[\beta\gamma\delta]} = 0$$

Ite (symmetric) Ricci tensor and the Ricci scalar are formed from the emann tensor:

$$\mathrm{R}_{a\beta} \equiv \mathrm{R}^{\mu}_{a\mu\beta}$$
$$\mathrm{R} \equiv \mathrm{R}^{a}_{a}$$

De Weyl tensor,

$$\mathrm{C}_{\lambda\mu\nu\kappa} \equiv \mathrm{R}_{\lambda\mu\nu\kappa} - \frac{1}{2}\left(\mathrm{g}_{\lambda\nu}\mathrm{R}_{\mu\kappa} - \mathrm{g}_{\lambda\kappa}\mathrm{R}_{\mu\nu} - \mathrm{g}_{\mu\nu}\mathrm{R}_{\lambda\kappa} + \mathrm{g}_{\mu\kappa}\mathrm{R}_{\lambda\nu}\right)$$
$$+ \frac{1}{6}\left(\mathrm{g}_{\lambda\nu}\mathrm{g}_{\mu\kappa} - \mathrm{g}_{\lambda\kappa}\mathrm{g}_{\mu\nu}\right)\mathrm{R}$$

ss also called the conformal tensor due to its invariance under conformal bansformations. It vanishes if and only if the metric is conformally flat E.e. reducible to Minkowski space by a conformal transformation).

The extrinsic curvature tensor of a hypersurface which has unit normal $_3$ and which is spanned by basis vectors $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \cdots$ is denoted $\mathbf{K}$, with components

$$K_{ij} = -e_j \cdot \nabla_i \mathbf{n}.$$

Problem 9.1. On a sphere of radius a try to construct a local Cartesian system in two ways (a) from geodesics and (b) from the (orthogonal) lines of longitude and latitude. Either way there will be deviations from a good Cartesian system (e.g. the sum of the angles in a coordinate box will differ from 2π, or the fractional difference in length between "parallel" sides of a coordinate box will not vanish). Show that such deviations are of order [Area of coordinate patch $/a^2$].

Problem 9.2. How many independent components does the Riemann tensor have in n dimensions?

Problem 9.3. Mathematical manipulations with the Riemann tens or are often done with computers. Rather than calculate and store the $4^4 = 256$ components of the tensor as R(I, J, K, L) with I, J, K, L $= 0, 1, 2, 3$, the symmetries of the Riemann tensor can be used to reduce the size of the stored array. Design a subprogram which stores or recalls all components of $R(I, J, K, L)$ in a linear array of dimensions ≤ 21.

Problem 9.4. Compute all the nonvanishing components of the Riemann tensor $\mathrm{R_{ijkl}(i,j,k,1=\theta,\phi)}$ for the 2 -sphere metric

$$\mathrm{ds^2 = r^2\left(\, d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\phi^2\right).}$$

Problem 9.5. Find the Christoffel symbols and Riemann curvature components for the two dimensional spacetime:

$$ds^2 = dv^2 - v^2 du^2.$$

Problem 9.6. Set up a coordinate system on a torus (the 2 -dimensional surface of a doughnut in Euclidean 3-space). Calculate all components of $\mathrm{g_{\mu\nu}}, \mathrm{\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}}$ and $\mathrm{R_{\alpha\beta\gamma\delta}}$.

Problem 9.7. In a space of fewer than 4 dimensions simple expressions can be given for the Riemann tensor.
(a) What is the Riemann tensor in a 1-dimensional space?
(b) Express the Riemann tensor for a 2 -dimensional space in terms the metric and the Ricci scalar.
(c) Express the Riemann tensor for a 3 -dimensional space in terms the metric and the Ricci tensor.
obolem 9.8. Prove the relation

$$\mathrm{2\ V_{a;[\nu\kappa]} \equiv V_{a;\nu\kappa} - V_{a;\kappa\nu} = V_{\sigma} R^{\sigma}_{a\nu\kappa}}$$

201 find its generalization to the commutator of second derivatives for a ,
roblem 9.9. Show that the second derivatives of a scalar field commute Ide, show that $\mathrm{S_{;a\beta} = S_{;\beta a}}$). For third derivatives $\mathrm{S_{;a\beta\gamma}}$, compute $S_N(a\beta)y$ and $S_{;\alpha[\beta\gamma]}$.
Troblem 9.10. Prove that for any second rank tensor

$$\mathrm{A^{\mu\nu}_{;\mu\nu} = A^{\mu\nu}_{;\nu\mu}.}$$

Froblem 9.11. An infinitesimal circuit in the shape of a parallelogram can Se specified by the differential displacements u, v representing the sides of the parallelogram. Let a vector $\mathbf{A}$ be parallel transported around this circuit. (i.e. Displace it successively by $\mathbf{u}, \mathbf{v}, -\mathbf{u}, -\mathbf{v}$.) Show that the change in A due to the transport around this circuit is

$$\mathrm{\delta A^{\alpha} = -R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} A^{\beta} u^{\gamma_{\mathrm{v}}\delta}.}$$

Froblem 9.12. Riemann curvature can also be computed with the Riemann sperator R

$$R(A,B)C = \left(\nabla_A \nabla_B - \nabla_B \nabla_A - \nabla_{[A,B]}\right) C$$

(a) Show that the value of R at a point P is linear in the arguments $\mathrm{A, B, C}$ and depends only on their values at P and not on the way in which they vary around P.
(b) Show that

$$\mathrm{(R(A,B)C)^{a} = R^{a}{}_{\mu\lambda\sigma} C^{\mu} A^{\lambda} B^{\sigma}.}$$

Problem 9.13. Two nearby geodesics have affine parameters such that nearby points on the two geodesics have very close values of affine parameter λ. Let $u^{\alpha} \equiv \mathrm{dx^{\alpha}/d\lambda}$ be the tangent to one of the geodesics, and let $\mathbf{n}$ be the differential vector connecting points of equal affine parameter on the two geodesics. Prove the equation of geodesic deviation

$$\mathrm{\frac{D^2 n^{\alpha}}{d\lambda^2} + R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} u^{\beta}_{\mathrm{n}} u^{\delta} = 0}$$

Problem 9.14. In a suitable coordinate system the gravitational field of the Earth is approximately (to lowest nontrivial order in M/r)

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(1-2M/r)dt^2 + (1+2M/r)\left(dx^2+dy^2+dz^2\right) \\ r &\equiv \left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ M &= \text{ mass of Earth } (c=G=1) \end{aligned}$$

Suppose a Skylab satellite orbits the Earth in a circular equatorial orbit. What is the orbital period? An astronaut jettisons a bag of garbage into a nearby orbit and watches it move relative to the satellite. At a given time the separation of the Skylab and its garbage is described by the vector

$$\mathrm{\xi^{i} \equiv x^{i}(\ garbage\ ) - x^{i}(\ skylab\ )}$$

Using the equation of geodesic deviation, find the components of the relative motion ξ^i as a function of time.

Problem 9.15. Prove the cyclic identity

$$\mathrm{R_{a\beta\gamma\delta} + R_{a\delta\beta y} + R_{a\gamma\delta\beta} = 0}$$

and the Bianchi identities

$$\mathrm{R_{a\delta\beta\gamma;\nu} + R_{a\delta\nu\beta;\gamma} + R_{a\delta\gamma\nu;\beta} = 0}$$

xoblem 9.16. Show that Bianchi identities imply that the Einstein tens or

$$\mathrm{G}_{\mu\nu} \equiv \mathrm{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, \mathrm{g}_{\mu\nu}\mathrm{R}$$

vanishing divergence (i.e. $\mathrm{G}^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$).

Eloblem 9.17. Show that the vanishing of the Riemann tensor is a suffi<k>t condition for a spacetime to be Minkowskian, i.e. a coordinate transantion will bring $\mathrm{g}_{\mu\nu}$ into the form $\eta_{\mu\nu}$.

dolem 9.18. A beam of light has a circular cross section at some point Nong its path. Show that the beam experiences no shear (i.e. the crossstion is not deformed into an ellipse) when the Weyl tensor is zero.

Noblem 9.19. Compute the Riemann tensor, Ricci tensor, and scalar Wature of the conformally-flat metric $\mathrm{g}_{\mu\nu} = \mathrm{e}^{2\phi}\eta_{\mu\nu}$ where $\phi = \phi\left(\mathrm{x}^{\mu}\right)$ an arbitrary function.

Noblem 9.20. Compute the Riemann tensor of the following metric in an dionormal frame:

$$\mathrm{ds}^2 = -\mathrm{e}^{2a}\mathrm{dt}^2 + \mathrm{e}^{2\beta}\mathrm{dr}^2 + \mathrm{e}^{2\gamma}\left(\, \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\, \mathrm{d}\phi^2\right)$$
$$\alpha, \beta, \gamma = \text{ functions of } \mathrm{r}, \mathrm{t}$$

Dat is the Ricci tensor for this metric? The scalar curvature? The minstein tens or?

Problem 9.21. Consider a Riemann tensor representing a plane gravitaonal wave, i.e. $\mathrm{R}_{a\beta\gamma\delta} = \mathrm{R}_{a\beta\gamma\delta}(\mathrm{u})$, where u is "retarded time" Qu. $\nabla u = 0$). Find the number of independent components of such a RieDann tensor. Do not assume that $\mathrm{R}_{a\beta\gamma\delta}$ satisfies the Einstein field quations.

Problem 9.22. At a given instant, the coordinate accelerations of n nearby Est particles are measured. What is the smallest n required to measure DII components of $\mathrm{F}^{\mu\nu}$? of $\mathrm{R}^{\mu}_{\nu\rho\sigma}$?

Problem 9.23. Let **A** and **B** be two linearly independent vectors tangen at a point to a two dimensional surface, in a space of dimension ≥ 2. The Riemannian curvature of the 2 -surface at that point is defined as

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{R}_{a\gamma\beta\delta}\ \mathrm{A}^{a}\ \mathrm{A}^{\beta}\mathrm{B}^{\gamma}\mathrm{B}^{\delta}}{\left(\mathrm{g}_{\alpha\beta}\mathrm{g}_{\gamma\delta} - \mathrm{g}_{\alpha\delta}\mathrm{g}_{\beta\gamma}\right)\mathrm{A}^{\alpha}\mathrm{A}^{\beta}\mathrm{B}^{\gamma}\mathrm{B}^{\delta}}$$

Show that K is unchanged if A and B are replaced by linear combinations of **A** and **B**.

Problem 9.24. Suppose K is the curvature at a point in a 2 -dimensional surface, as defined in Problem 9.23. If **A** and **B** are two vectors tange at a point to the two surface, and A is parallel transported around a small circuit lying in the 2 -surface, show that the change in the angle between A and B is of magnitude

$$\Delta\theta = |K\Delta\Sigma|$$

where $\Delta\Sigma$ is the area enclosed by the circuit.

Problem 9.25. Suppose that the curvature K at a point P , as defined in Problem 9.23, does not depend on the 2 -surface which is chosen through that point. Show then that

$$\mathrm{R}_{a\beta\gamma\delta} = \mathrm{K}\left(\, \mathrm{g}_{\alpha\gamma}\mathrm{g}_{\beta\delta} - \mathrm{g}_{a\delta}\ \mathrm{g}_{\beta\gamma}\right)$$

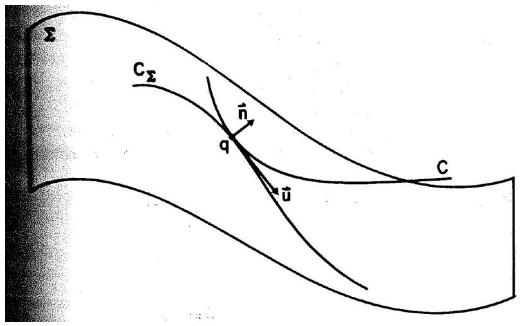
Problem 9.26. If the Riemann curvature is isotropic, the Riemann curvature tensor can be written as

$$\mathrm{R}_{a\beta\gamma\delta} = \mathrm{K}\left(\, \mathrm{g}_{\alpha\gamma}\mathrm{g}_{\beta\delta} - \mathrm{g}_{a\delta}\ \mathrm{g}_{\beta\gamma}\right)$$

Use the Bianchi identities to show (Schur's theorem) that K must be a constant.

Problem 9.27. Show that a space is conformally flat if the Riemann tensor can be written as

$$\mathrm{R}_{\lambda\mu\nu\kappa} = \mathrm{K}\left(\, \mathrm{g}_{\lambda\nu}\mathrm{g}_{\mu\kappa} - \mathrm{g}_{\lambda\kappa}\mathrm{g}_{\mu\nu}\right)$$



- oblem 9.28. Suppose at a point q in a 3 -surface Σ two curves are (i) C_{Σ} a curve in the 3 -surface and (ii) C a geodesic of the Aimensional space in which Σ is embedded. Let **n** be the unit wall to Σ. The vector $\xi^{\alpha} = \frac{1}{2}\mathrm{u}^{\alpha}; \beta^{\mathrm{u}}$. (where u is the tangent Settor to C_{Σ}) measures the rate at which C and C_{Σ} separate. Show State the rate of separation $n \cdot \xi$ is

$$\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\xi}=\frac{1}{2}\,\mathrm{K}_{a\beta}\mathrm{u}^{\alpha}\mathrm{u}^{\beta}$$

Were $\mathrm{K}_{\alpha\beta}$ is the extrinsic curvature tensor for Σ.

34.0blem 9.29. What is the extrinsic curvature of the τ = constant slice of metric, $\mathrm{ds}^2=-\mathrm{d}\tau^2+\mathrm{a}^2(\tau)\left[\gamma_{\mathrm{ij}}\left(\mathrm{x}^{\mathrm{k}}\right)\mathrm{dxx}^{\mathrm{i}}\mathrm{dxx}^{\mathrm{j}}\right]$?

Foblem 9.30. Prove that the extrinsic curvature of a timelike hypersurface Why unit normal vector n is $-\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathrm{n}}\mathrm{P}_{a\beta}$, where $\mathrm{P}_{a\beta}=\mathrm{g}_{a\beta}-\mathrm{n}_{a}\mathrm{n}\beta$ is projection tensor into the hypersurface.

Problem 9.31. If we neglect gravity, the potential energy due to surface seasion of a soap film is proportional to its area. Thus in equilibrium a
soap film spanning a fixed closed wire loop will assume a shape of minimum area. Show that this implies that the surface is one whose "mean curvature" $K\equiv K_i^i$ is zero.

Problem 9.32. Let $\mathbf{n}$ be the unit normal to a hypersurface Σ, with $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}\equiv\varepsilon=+1$ or -1 if Σ is timelike or spacelike respectively. In Gaussian normal coordinates (see Problem 8.25) based on Σ, the metric is

$$\mathrm{ds}^2=\varepsilon\mathrm{dn}^2+{}^{(3)}\mathrm{g}_{\mathrm{ij}}\mathrm{dx}^{\mathrm{i}}\mathrm{dx}^{\mathrm{j}}$$

Derive the Gauss-Codazzi equations

$$\begin{aligned}{}^{(4)}R^m_{ijk}&={}^{(3)}R^m_{ijk}+\varepsilon\left(K_{ij}K^m_k-K_{ik}K^m_j\right)\\ {}^{(4)}R^n_{ijk}&=\varepsilon\left(K_{ik|j}-K_{ij|k}\right)\end{aligned}$$

Here 4 and 3 refer respectively to the spacetime geometry and to the geometry of Σ; a slash denotes covariant differentiation with respect to ${}^{(3)}g_{ij}$; the n index denotes the component on the n basis vector. Also derive the equation for the remaining component of the Riemann tensor:

$${}^{(4)}\mathrm{R}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{ink}}=\varepsilon\left(\mathrm{K}_{\mathrm{ik,n}}+\mathrm{K}_{\mathrm{im}}\ \mathrm{K}^{\mathrm{m}}_{\mathrm{k}}\right).$$

Problem 9.33. Using the results of Problem 9.32, derive expressions for ${}^{(4)}\mathrm{G}^{\alpha}{}_{\beta}$, the components of the Einstein tensor, in Gaussian normal coordinates.

Problem 9.34. The eigenvalues and eigenvectors of the extrinsic curvature tensor are called the principal curvatures and principal directions. Find the principal curvatures and directions for the following surfaces embedded in a 3-dimensional Euclidean space.

(i) sphere: $x^2+y^2+z^2=a^2$.

(ii) cylinder: $x^2+y^2=a^2$.

(iii) quadratic surface (compute at origin only): $z=\frac{1}{2}\left(ax^2+2bxy+cy^2\right)$

deblem 9.35. Show that if Σ is a 2 -dimensional surface in a flat Epace, then the scalar curvature of Σ is

$${}^{(2)}\mathrm{R}=\frac{2}{\rho_1\rho_2}$$

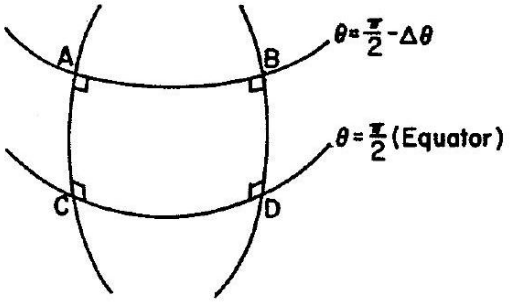
Tere ρ_1 and ρ_2 are the principal radii of curvature of Σ. What is the alogous formula for a 3 -surface embedded in a flat 4 -space?

9: Solutions

Solution 9.1. If we construct a coordinate patch from geodesics we can then bisect that coordinate box with a geodesic diagonal, forming two geodesic triangles. The angular excess of a triangle made from great circles is π [Area $/a^2$]. Since the sum of the interior angles of the coordinate box will be the sum of the interior angles of the two triangles, the angular excess of the coordinate box is π [Area $/\mathrm{a}^2$].

The best coordinate patch constructed of lines of longitude and latitude is that near the equator. Clearly there is no angular excess, and

$$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}},\ \text{but}$$



$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{CD}}-\overline{\mathrm{AB}} &= \mathrm{a}\Delta\phi-\mathrm{a}\Delta\phi\sin\left(\frac{\pi}{2}-\Delta\theta\right)\\ &\approx \mathrm{a}\Delta\phi\frac{1}{2}(\Delta\theta)^2\end{aligned}$$

so

$$\frac{\overline{\mathrm{CD}}-\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AC}}}\approx\frac{1}{2}\Delta\phi\Delta\theta\approx\frac{1}{2}\frac{\text{Area}}{\mathrm{a}^2}$$

In both these examples, the departure from flatness is measured by $1/a^2$, the curvature of the sphere.

Solution 9.2. The antisymmetry of $(\alpha\beta)$ and $(y\delta)$ in $\mathrm{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ means that there are $M=\frac{1}{2}n(n-1)$ ways of choosing nontrivial pairs $(\alpha\beta)$ and similarly M ways of nontrivially choosing $(y\delta)$. Since the tensor is symmetric with respect to interchange of the pairs $(\alpha\beta)$ and $(\gamma\delta)$ there are $\frac{1}{2}\mathrm{M}(\mathrm{M}+1)$ independent ways of choosing $a\beta\gamma\delta$ when the pair symmetries are considered.

The Riemann tensor also possesses the cyclic symmetry

$$\mathbf{A}_{a\beta\gamma\delta}=\mathbf{R}_{a\beta\gamma\delta}+\mathbf{R}_{a\delta\beta\gamma}+\mathbf{R}_{a\gamma\delta\beta}=0$$

The pair symmetries guarantee that $\mathrm{A}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ is totally antisymmetric so That the constraint $\mathrm{A}_{a\beta\gamma\delta}=0$ is trivial unless $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ are all distinct. The number of added constraints is then the number of combinations of 4 objects which can be taken from n objects $=n!/(n-4)!4!$ (This formula gives zero, and is therefore valid, if $n<4$ in which case the permutation symmetry gives no additional constraints.) The number of independent components is then

$$\frac{1}{2}M(M+1)-n!/(n-4)!4!=n^2\left(n^2-1\right)/12$$

Solution 9.3. The problem requires ordering 21 independent components in some canonical way and assigning a number $N\leq 21$ to each nonequivalent quadruple $\mathrm{I},\mathrm{J},\mathrm{K},\mathrm{L}$. The following program accomplishes this and reads the value of $R(I,J,K,L)$ from $R(N),\quad 1\leq N\leq 21$.

READ I, J, K, L
SET SIGN $=1$
IF $I=J$ OR $K=L$ SET RIEMANN $=0$ AND RETURN
1F I $>$ J EXCHANGE I, J AND SET SIGN $=-1$
IF K $>$ L EXCHANGE K, L AND SET SIGN $=-$ SIGN
SET N1 $=(5*\mathrm{I}-\mathrm{I}*\mathrm{I})/2+\mathrm{J}$
SET N2 $=(5*\ \mathrm{K}-\mathrm{K}*\ \mathrm{K})/2+\mathrm{L}$
IF N1 $>$ N2 EXCHANGE N1, N2
SET N $=(13*\ \mathrm{N1}-\mathrm{N1}*\ \mathrm{N1}-12)/2+\mathrm{N2}$
SET RIEMANN $=\mathrm{R(N)}*$ SIGN
RETURN.

Solution 9.4. According to the discussion in Problem 9.2, there is only one independent component. We can choose it to be

$$\mathrm{R}_{\theta\phi\theta\phi}=\mathrm{g}_{\theta\theta}\mathrm{R}^{\theta}_{\phi\theta\phi}=\mathrm{g}_{\theta\theta}\left\{\Gamma^{\theta}_{\phi\phi,\theta}-\Gamma^{\theta}_{\theta\phi,\phi}+\Gamma^{\theta}_{\theta\alpha}\Gamma^{a}_{\phi\phi}-\Gamma^{\theta}_{\phi\alpha}\Gamma^{a}_{\phi\theta}\right\}.$$

From the metric $g_{\theta\theta}=r^2, g_{\phi\phi}=r^2\sin^2\theta$ we find that the only nonvanishing Christoffel symbols are

$$\Gamma^{\theta}_{\phi\phi}=-\sin\theta\cos\theta,\quad \Gamma^{\phi}_{\theta\phi}=\cot\theta,$$

and, therefore,

$$\mathrm{R}_{\theta\phi\theta\phi}=\mathrm{r}^2\sin^2\theta=\mathrm{R}_{\phi\theta\phi\theta}=-\mathrm{R}_{\theta\phi\phi\theta}=-\mathrm{R}_{\phi\theta\theta\phi}.$$

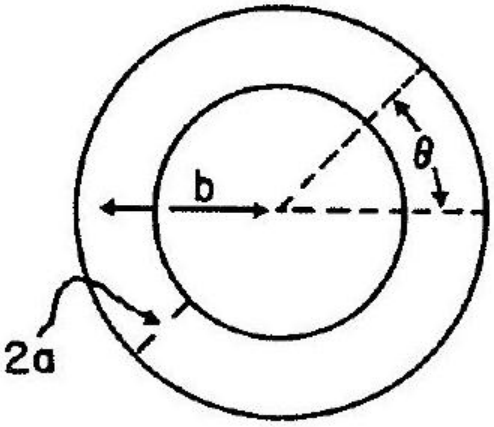
Solution 9.5. The only nonvanishing Christoffel symbols are $\Gamma^{\mathrm{v}}_{\mathbf{uu}}=\mathrm{v}$ and $\Gamma^{\mathrm{u}}_{\mathrm{uv}}=\Gamma^{\mathrm{u}}_{\mathrm{vu}}=\mathrm{v}^{-1}$, so that

$$\begin{aligned}\mathrm{R}_{\mathrm{vuvu}}=\mathrm{R}^{\mathrm{v}}_{\mathrm{uvu}} &= \Gamma^{\mathrm{v}}_{\mathrm{uu,v}}-\Gamma^{\mathrm{v}}_{\mathrm{vu,u}}+\Gamma^{\mathrm{v}}_{\mathrm{v}\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mathrm{uu}}-\Gamma^{\mathrm{v}}_{\mathrm{u}\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mathrm{uv}}\\ &= 1-0+0-1=0.\end{aligned}$$

Since there is only one independent Riemann component in two dimensions we conclude that $\mathrm{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}=0$, and the spacetime is flat. (This was also shown by a coordinate transformation in Problem 6.1.)

Solution 9.6. From the diagram, two orthogonal infinitesimal displacements have length $ad\phi$ and $(b+a\sin\phi)d\theta$ so $ds^2=a^2d\phi^2+(\mathrm{b}+\mathrm{a}\sin\phi)^2\ \mathrm{d}\theta^2$ or $\mathrm{g}_{\theta\theta}=(\mathrm{b}+\mathrm{a}\sin\phi)^2,\ \mathrm{g}_{\phi\phi}=\mathrm{a}^2,\ \mathrm{g}_{\theta\phi}=\mathrm{g}_{\phi\theta}=0$. The formula for the Christoffel symbols now gives the nonvanishing Γ 's directly

$$\begin{aligned}\Gamma^{\phi}_{\theta\theta}&=-a^{-1}(b+a\sin\phi)\cos\phi\\ \Gamma^{\theta}_{\theta\phi}=\Gamma^{\theta}_{\phi\theta}&=a\cos\phi(b+a\sin\phi)^{-1}.\end{aligned}$$



In 2 dimensions the Riemann tensor has only one independent comonent. Take it to be $\mathrm{R}_{\phi\theta\phi\theta}$, then the standard formula gives

$$\mathrm{R}_{\phi\theta\phi\theta} = \mathrm{a}\sin\phi(\ \mathrm{b} + \mathrm{a}\sin\phi)$$

Solution 9.7.

(a) In one dimension there can only be one component R_{1111}, and So the symmetries of the Riemann tensor, this component must vanish.
(b) In two dimensions the relations, due to symmetries, among the components of the Riemann tensor may be summarized in any coordinate mstem as

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = (\mathbf{g}_{\alpha\gamma}\mathbf{g}_{\beta\delta} - \mathbf{g}_{\alpha\delta}\mathbf{g}_{\beta\gamma})\,\mathbf{f}$$
$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^{\alpha\beta}{}_{\alpha\beta} = \left(\mathbf{g}^{\alpha}{}_{a}\mathbf{g}^{\beta}{}_{\beta} - \mathbf{g}^{\alpha}{}_{\beta}\mathbf{g}_{\alpha}\right)\mathbf{f} = (4-2)\mathbf{f} = 2\mathbf{f}.$$

Thus, in any coordinate system

$$\mathrm{R}_{a\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\left(\ \mathrm{g}_{a\gamma}\ \mathrm{g}_{\beta\delta} - \mathrm{g}_{a\delta}\ \mathrm{g}_{\beta\gamma}\right)\mathrm{R}$$

(c) In three dimensions there are six independent components of the Riemann tensor. Since the independent components of the Ricci tensor represent six independent linear combinations of the Riemann components, we should be able to invert such a relation to get the independent Riemann components in terms of the Ricci components.
To have the correct symmetries, we must have

$$\begin{aligned}\mathrm{R}_{\mu\nu\lambda\sigma} = {} & \mathrm{a}\left(\ \mathrm{g}_{\mu\lambda}\mathrm{R}_{\nu\sigma} - \mathrm{g}_{\nu\lambda}\mathrm{R}_{\mu\sigma} - \mathrm{g}_{\mu\sigma}\mathrm{R}_{\nu\lambda} + \mathrm{g}_{\nu\sigma}\mathrm{R}_{\mu\lambda}\right) \\ & + \mathrm{b}\left(\ \mathrm{g}_{\mu\lambda}\mathrm{g}_{\nu\sigma} - \mathrm{g}_{\mu\sigma}\mathrm{g}_{\nu\lambda}\right)\mathrm{R}\end{aligned}$$

Now we find a and b by contracting:

$$\mathrm{R}_{\nu\sigma} = \mathrm{a}\,(3\mathrm{R}_{\nu\sigma} - \mathrm{R}_{\nu\sigma} - \mathrm{R}_{\nu\sigma} + \mathrm{g}_{\nu\sigma}\mathrm{R}) + \mathrm{b}\,(3\ \mathrm{g}_{\nu\sigma} - \mathrm{g}_{\nu\sigma})\,\mathrm{R}$$

So we must have

$$a = 1 \quad b = -\frac{1}{2}.$$

Contract again to check:

$$R = a(R + 3R) + b \cdot 6R = (4-3)R$$

Solution 9.8. We give the proof for a tensor of arbitrary rank. Choose locally flat coordinates so that all Christoffel symbols (but not their derivatives!) vanish at a point. At that point

$$\mathrm{R}^{\lambda}_{\gamma\nu\kappa} = \Gamma^{\lambda}_{\gamma\kappa,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\gamma\nu,\kappa} = -2\Gamma^{\lambda}_{\gamma[\nu,\kappa]}$$

and

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{T}_{a\cdots}{}^{\beta\cdots}\right)_{;\nu\kappa} &= \left(\mathrm{T}_{a\cdots}{}^{\beta\cdots}{}_{,\nu} + \mathrm{T}_{a\cdots}{}^{\sigma\cdots}\Gamma^{\beta}_{\sigma\nu} + \cdots - \mathrm{T}_{\sigma\cdots}{}^{\beta\cdots}\Gamma^{\sigma}_{a\nu} - \cdots\right)_{,\kappa} \\ &= \mathrm{T}_{a\cdots}{}^{\beta\cdots}{}_{,\nu\kappa} + \mathrm{T}_{a\cdots}{}^{\sigma\cdots}\Gamma^{\beta}_{\sigma\nu,\kappa} + \cdots - \mathrm{T}_{\sigma\cdots}{}^{\beta\cdots}\Gamma^{\sigma}_{a\nu,\kappa} - \cdots\end{aligned}$$

It follows that

$$2\left(\begin{array}{c}T^{\beta\cdots}\\ {}_{a\cdots}\end{array}\right)_{;[\nu\kappa]} = -T_{\alpha\cdots}{}^{\sigma\cdots}R^{\beta}_{\sigma\nu\kappa} - \cdots + T_{\sigma\cdots}{}^{\beta\cdots}R^{\sigma}_{\alpha\nu\kappa} + \cdots$$

Since this relation is covariant it is true in any coordinate system.
Solution 9.9. The second derivates of a scalar are

$$S_{;a\beta} = (S_{,a})_{;\beta} = S_{,a\beta} - S_{,\sigma}\Gamma^{\sigma}_{a\beta}.$$

This expression is obviously symmetric in α and β.
To investigate third derivatives use local flat coordinates as in Problem 9.8. We have then

$$S_{;a\beta\gamma} = \left(S_{,a\beta} - S_{\sigma}\Gamma^{\sigma}_{a\beta}\right)_{,\gamma} = S_{,a\beta\gamma} - S_{\sigma}1^{\sigma}_{a\beta,\gamma} = S_{;(a\beta)\gamma}.$$

From this expression and from the result of Problem 9.8 we also have

$$S_{;a[\beta\gamma]} = \frac{1}{2}\, S_{;\sigma}R^{\sigma}_{a\beta\gamma}$$

Solution 9.10. Form the tensor

$$\mathbf{C}^{a\beta}_{\mu\nu} \equiv \mathbf{A}^{a\beta}_{;\mu\nu} - \mathbf{A}^{a\beta}_{;\nu\mu}$$

From Problem 9.8 we have

$$C^{a\beta}_{\mu\nu} = -A^{\sigma\beta}R^{a}_{\sigma\mu\nu} - A^{a\sigma}R^{\beta}_{\sigma\mu\nu}$$

oo that

$$C^{\mu\nu}_{\mu\nu} = -A^{\sigma\nu}R^{\mu}_{\sigma\mu\nu} - A^{\mu\sigma}R^{\nu}_{\sigma\mu\nu} = -A^{\sigma\nu}R_{\sigma\nu} + A^{\mu\sigma}R_{\sigma\mu} = 0$$

Solution 9.11. Choose locally flat coordinates at the starting point P. Thus $\Gamma^{a}{}_{\beta\gamma} = 0$ at $\mathbf{P}$ but $\Gamma^{a}{}_{\beta\gamma} = \Gamma^{a}{}_{\beta\gamma,\delta}\mathbf{u}^{\delta}$ after displacement $\mathbf{u}$. When ge displace A from P by u we find that its components become

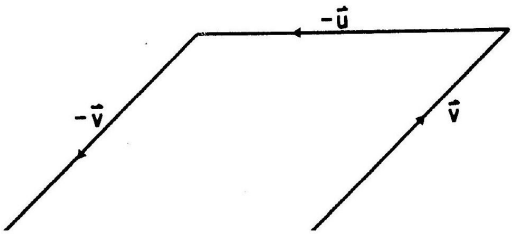
$$\begin{aligned}[\text{A (displaced by u)}]^{\alpha} &= A^{\alpha} + A^{a},\beta^{u}\beta \\ &= A^{a} + A^{a};\beta^{u}\beta - \Gamma^{a}{}_{\gamma}A^{\gamma}u^{\beta} = A^{a}.\end{aligned}$$

Then we displace, again, by v the new components are
$[\text{A(displaced by u then v)}]^{\alpha} = A^{\alpha} + A^{a}_{;\beta}v^{\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}A^{\gamma}v^{\beta}$

$$= A^{a} - \Gamma^{a}_{\gamma\beta}\, A^{\gamma_{v}\beta} = A^{a} - \Gamma^{a}_{\gamma\beta,\delta}\, A^{\gamma_{v}}\beta^{\delta}_{u}.$$

We could have reached this same point by travelling around the other side of the parallelogram to find, similarly
$[\text{A(displaced by } -\text{v then } -\text{u)}]^{\alpha} = A^{\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta,\delta}A^{\gamma_{u}}\beta_{v}{}^{\delta}$.
The change in $\mathbf{A}$ in making the complete circuit is our first result minus our second

$$\delta A^{\alpha} = -\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta,\delta}A^{\gamma_{v}}\beta_{u}{}^{\delta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta,\delta}A^{\gamma_{u}}\beta_{v}{}^{\delta} = -R^{\alpha}{}_{\gamma\delta\beta}A^{\gamma_{v}}\beta_{u}{}^{\delta}.$$



Solution 9.12.
(a) First consider the linearity in A. It is clear that

$$\mathbf{R}\left(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2, \mathbf{B}\right)\mathbf{C} = \mathbf{R}\left(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}\right)\mathbf{C} + \mathbf{R}\left(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}\right)\mathbf{C}.$$

Furthermore,

$$\begin{aligned}&\nabla_{fA}\nabla_B - \nabla_B\nabla_{fA} - \nabla_{[fA,B]} \\ &= f\nabla_A\nabla_B - f\nabla_B\nabla_A - (\nabla_B f)\,\nabla_A - \nabla_{f[A,B]} - A\nabla_B f. \qquad (1)\end{aligned}$$

The two "extra" terms cancel and hence

$$R(fA,B)C = fR(A,B)C. \qquad (2)$$

It is easy now to prove that the value of $R(A,B)C$ at a point P depends only on the value of A at P, not on the way in which A varies: Consider $f(P)=0$; then Equation (2) tells us that $R=0$ at P whenever the first argument vanishes at P. Now let A_1 and A_2 be two vector fields which are the same at P but different elsewhere. From (1) we know

$$R\left(A_1,B\right)C-R\left(A_2,B\right)C=R\left(A_1-A_2,B\right)C=0.$$

This completes the proof for **A** and, by symmetry, for **B**. The proof for C follows similarly.
(b) Since only the values of A,B,C at point P are important, we can arbitrarily choose all three to be covariantly constant in a neighborhood of P; then we have

$$\begin{aligned}(\mathrm{R}(\ \mathrm{A},\ \mathrm{B})\mathrm{C})^{\alpha}&=\left(\nabla_{\mathrm{A}}\nabla_{\mathrm{B}}\mathrm{C}-\nabla_{\mathrm{B}}\nabla_{\mathrm{A}}\mathrm{C}\right)^{\alpha}\\&=2\ \mathrm{A}^{[\sigma}\left(\mathrm{B}^{\lambda]}\mathrm{C}^{\alpha}_{;\lambda}\right)_{;\sigma}=2\ \mathrm{A}^{\sigma}\mathrm{B}^{\lambda}\mathrm{C}^{\alpha}_{;[\lambda;\sigma]}\end{aligned}$$

According to Problem 9.8, this is equal to

$$\mathrm{R}^{\alpha}_{\mu\lambda\sigma}\mathrm{C}^{\mu}\mathrm{A}^{\lambda}\mathrm{B}^{\sigma}$$

and the proof is complete.
Dolution 9.13. Let $\mathrm{x}^{\mu}=\mathrm{x}^{\mu}(\lambda,\mathrm{n})$ be a family of geodesics with affine wrameter λ. The parameter n labels the individual geodesics. The sungent to the geodesics is $\mathrm{u}^{\alpha}\equiv\partial\mathrm{x}^{\alpha}/\partial\lambda$ and the differential vector which comnects points of equal affine parameter on adjacent curves is

$$\mathrm{n}^{a}=\partial\mathrm{x}^{a}/\partial\mathrm{n}.$$

The solution to this problem is most transparent in abstract notation: Lite

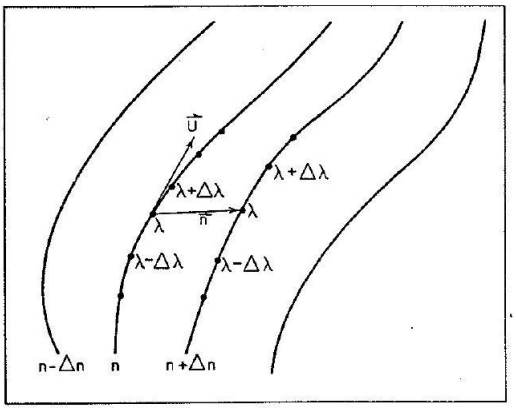
$$\mathbf{u}=\partial/\partial\lambda,\quad \mathbf{n}=\partial/\partial\mathbf{n}.$$

Wote that $[\mathbf{u},\mathbf{n}]=0$ since the partial derivatives commute. (The vanishEgs of this commutator in fact is the definition of $\mathbf{n}$ as the connecting Nector, according to Problem 8.14.) Now use the Riemann operator (see Problem 9.12):

$$R(\mathbf{u},\mathbf{n})\mathbf{u}\equiv\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{n}}\mathbf{u}-\nabla_{\mathbf{n}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}-\nabla_{[\mathbf{u},\mathbf{n}]}\mathbf{u}=\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{n}}\mathbf{u}=\nabla_{\mathbf{u}}\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{n}$$

there the last equality follows from the vanishing of $[\mathbf{u},\mathbf{n}]$. In components our result, according to Problem 9.12 (b), reads

$$\frac{\mathrm{D}^2\mathrm{n}^{a}}{\mathrm{d}\lambda^2}=\left(\nabla_{\mathrm{u}}\nabla_{\mathrm{u}}\mathrm{n}\right)^{a}=-\mathrm{R}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}{}^{\beta}\mathrm{n}^{\gamma}\gamma^{\delta}_{\mathrm{u}}$$



Solution 9.14. It is convenient to transform the spatial coordinates to spherical polars and to write the metric as

$$ds^2=-(1-2M/r)dt^2+(1+2M/r)\left(dr^2+r^2\left[d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2\right]\right).$$

For a circular equatorial orbit, $u^r=u^{\theta}=0$ so

$$\mathrm{Duu}^{\mathrm{r}}/\mathrm{d}r=0=\mathrm{u}^{\alpha}\Gamma^{\mathrm{r}}_{\alpha\beta}\mathrm{u}^{\beta}=\left(\mathrm{u}^{0}\right)^2\Gamma^{\mathrm{r}}_{00}+\left(\mathrm{u}^{\phi}\right)^2\Gamma^{\mathrm{r}}_{\phi\phi}$$

and therefore

$$(\mathrm{d}\phi/\mathrm{dt})^2=\omega^2=-\Gamma^{\mathrm{r}}_{00}/\Gamma^{\mathrm{r}}_{\phi\phi}.$$

The Christoffel symbols are easily calculated and we find

$$\omega^2 = (2\pi/\text{ Period })^2 = M/r^3.$$

This is the same as the Newtonian result. In Problem 9.13 the equation of motion is derived for n, the vector joining points of equal proper time on two geodesics. We are required in this problem to deal with $\underset{\sim}{\xi}$, the separation of points on the two geodesics at a given coordinate time. From the diagram, however, it is clear that the fractional difference between $\underset{\sim}{n}$ and $\underset{\sim}{\xi}$ is proportional to the relative velocity of garbage and the Skylab, and hence can be ignored to lowest order.

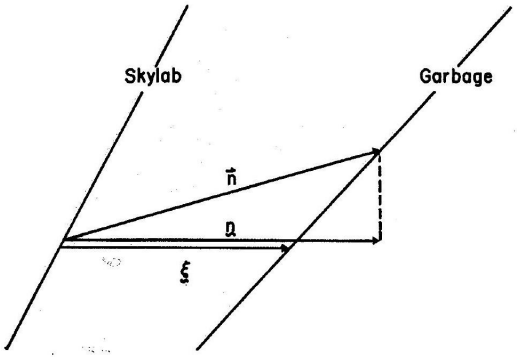
Since all the Christoffel symbols in the t, x, y, z system are of order M/r^2, and d/dr is of order $\omega \sim (M/r)^{\frac{1}{2}} r^{-1}$, we can approximate

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma \mathrm{u} \approx \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}.$$

Furthermore

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} = \mathrm{u}^0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} = \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{r}}\right)\right] \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}},$$

so we can approximate $\mathrm{D}^2/\mathrm{d}\tau^2 \approx \mathrm{d}^2/\mathrm{dt}^2$. Using these approximations and the equation of geodesic deviation we have



To lowest order the Riemann components are

$$\mathrm{R}^{\mathrm{i}}_{0\mathrm{j}0} \approx \Gamma^{\mathrm{i}}_{00,\mathrm{j}} - \Gamma^{\mathrm{i}}_{0\mathrm{j},0} = -\frac{1}{2}\, \mathrm{g}_{00,\mathrm{ij}} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{r}^3}\left(\delta_{\mathrm{ij}} - \frac{3\mathrm{x}^{\mathrm{i}}\mathrm{x}^{\mathrm{j}}}{\mathrm{r}^2}\right).$$

If we choose to describe the Skylab orbit as

$$x = r\cos\omega t, \quad y = r\sin\omega t,$$

then the equations of motion for $\underset{\sim}{\xi}$ become

$$\ddot{\xi}^z + \omega^2 \xi^z = 0$$

$$\ddot{\xi}^{\mathrm{x}} + \omega^2 \xi^{\mathrm{x}} = 3\omega^2 \cos\omega\mathrm{t}\,(\cos\omega\mathrm{t}\xi^{\mathrm{x}} + \sin\omega\mathrm{t}\xi^{\mathrm{y}})$$
$$\ddot{\xi}^{\mathrm{y}} + \omega^2 \xi^{\mathrm{y}} = 3\omega^2 \sin\omega\mathrm{t}\,(\cos\omega\mathrm{t}\xi^{\mathrm{x}} + \sin\omega\mathrm{t}\xi^{\mathrm{y}})$$

The relative motion in the z-direction is obviously

$$\xi^z \propto \sin\omega t$$

if the garbage was jettisoned at $t = 0$.

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi^{\mathrm{i}}}{\mathrm{dt}^2} + \mathrm{R}^{\mathrm{i}}_{0\mathrm{j}0}\left(\mathrm{u}^0\right)^2 \xi^{\mathrm{j}} = 0 \quad \mathrm{i} = \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$$

To find the relative motion in the xy plane introduce new variables η^1, η^2 defined by

$$\xi^{\mathrm{x}} = \eta^1 \cos\omega\mathrm{t} + \eta^2 \sin\omega\mathrm{t}, \quad \xi^{\mathrm{y}} = \eta^1 \sin\omega\mathrm{t} - \eta^2 \cos\omega\mathrm{t}$$

and the equations of motion become:

$$\ddot{\eta}^2 - 2\omega\dot{\eta}^1 = 0$$
$$\ddot{\eta}^1 + 2\omega\dot{\eta}^2 - 3\omega^2\eta^1 = 0.$$

These can be solved quite easily to find the four independent solutions:

$$\left[\eta^1, \eta^2\right] = \left[1, \frac{3}{2}\omega t\right], \quad [0,1], \quad [\cos\omega t, 2\sin\omega t], \quad [\sin\omega t, -2\cos\omega t].$$

The linear combination of solutions which correspond to the garbage jettisoned at t = 0 (i.e. $\xi^{\mathrm{x}} = \xi^{\mathrm{y}} = 0$ at t = 0) is
$\xi^{\mathrm{x}} = \mathrm{A}[\cos 2\omega\mathrm{t} - 3 + 2\cos\omega\mathrm{t} + 3\omega\mathrm{t}\sin\omega\mathrm{t}] + \mathrm{B}[4\sin\omega\mathrm{t} - \sin 2\omega\mathrm{t}]$
$\xi^{\mathrm{y}} = \mathrm{A}[\sin 2\omega\mathrm{t} + 2\sin\omega\mathrm{t} - 3\omega\mathrm{t}\cos\omega\mathrm{t}] + \mathrm{B}[\cos 2\omega\mathrm{t} + 3 - 4\cos\omega\mathrm{t}]$.
The constants A and B depend on the x and y components of the velocity with which the garbage was jettisoned. The nonperiodic terms in the solution correspond to the fact that the two orbits are of a slightly different period, so the relative distance will exhibit a secular growth in time.

Solution 9.15. Choose locally flat coordinates so that

$$\mathrm{R}^{a}_{\beta\gamma\delta} = 2\Gamma^{\alpha}_{\beta[\delta,\gamma]}$$

In these coordinates then

$$\mathrm{R}^{\alpha}_{[\beta\gamma\delta]} = 2\Gamma^{\alpha}[\beta[\delta,\gamma]] = 2\Gamma^{\alpha}_{[\beta\delta,\gamma]}$$

Since the Christoffel symbols are symmetric on their lower indices the right side must vanish, and by lowering the first index we have
$\nabla_{\alpha}[\beta\gamma\delta] = 0$. The Riemann tensor is antisymmetric in its last two indices, Wothis is equivalent to the cyclic identity.

From Problem 9.8 we have for any U^{a} that

$$2\mathrm{U}^{a}_{;[\beta\gamma]} = -\mathrm{U}^{\sigma}\mathrm{R}^{a}_{\sigma\beta\gamma}$$

Wee U^{α} to be fixed at some point and parallel transported along geodesics Wall nearby points in some neighborhood, then at the point $\mathrm{U}^{\alpha}_{;\beta} = 0$ for il β, and hence

$$2\mathrm{U}^{a}_{;[\beta\gamma]\delta} = -\mathrm{U}^{\sigma}\mathrm{R}^{a}_{\sigma\beta\gamma;\delta}$$
$$2\mathrm{U}^{a}_{;}; [\beta\gamma]\delta\big] = 2\mathrm{U}^{a}_{;}; \beta\gamma\delta\big] = -\mathrm{U}^{\sigma}\mathrm{R}^{a}_{\sigma[\beta\gamma;\delta]}$$

Trom Problem 9.8 we have for the tensor $\mathrm{U}^{\alpha}; \beta$ that

$$2\mathrm{U}^{a}_{;\beta[\gamma\delta]} = -\mathrm{U}^{\sigma}_{;\beta}\mathrm{R}^{\alpha}_{\sigma\gamma\delta} + \mathrm{U}^{a}_{;\sigma}\mathrm{R}^{\sigma}_{\beta\gamma\delta}$$

Since $\mathrm{U}^{a}; \beta = 0$ at the point we have $\mathrm{U}^{a}; \beta[\gamma\delta] = 0$ and hence $\mathrm{U}^{a}; [\beta\gamma\delta] = 0$. Te could have chosen the direction of U^{a} at the point in any way so it follows that

$$\mathbf{R}^{\alpha}_{\sigma[\beta\gamma;\delta]} = 0$$

Since the Riemann tensor is antisymmetric on its last two indices, this is equivalent to the Bianchi identities. (The Bianchi identities can also, of course, be derived by the straightforward but tedious process of differentiating and manipulating the formula for Riemann components in terms of Christoffel symbols. This is best done in locally flat coordinates.)

Solution 9.16. By contracting the Bianchi identities,

$$\mathrm{R}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta;\epsilon} + \mathrm{R}^{\alpha}_{\beta\epsilon\gamma;\delta} + \mathrm{R}^{\alpha}_{\beta\delta\epsilon;\gamma} = 0$$

first on α and γ then on β and δ we get

$$\mathrm{R}_{\beta\delta;\epsilon} + \mathrm{R}_{\beta\epsilon;\delta} + \mathrm{R}^{\alpha}_{\beta\delta\epsilon;\alpha} = 0$$
$$\mathrm{R}_{;\epsilon} - \mathrm{R}^{\beta}_{\epsilon;\beta} - \mathrm{R}^{\alpha}_{\epsilon;\alpha} = 0$$

Thus the divergence of the Einstein tensor

$$\mathrm{G}^{\nu}_{\epsilon;\nu} = \left(\mathrm{R}^{\nu}_{\epsilon} - \frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\epsilon}\mathrm{R}\right)_{;\nu} = \mathrm{R}^{\nu}_{\epsilon;\nu} - \frac{1}{2}\mathrm{R}_{;\epsilon}$$

must vanish.

Solution 9.17. Choose A, B, C, D to be mutually orthogonal at a point P and to satisfy $A \cdot A = -1, B \cdot B = C \cdot C = D \cdot D = 1$. Since spacetime is Riemann flat, parallel transport around a closed curve does not change a vector, so we can define A, B, C, D away from P by parallel transport.

If we do this we have e.g.

$$\frac{\partial \mathrm{A}_{a}}{\partial \mathrm{x}_{\mathrm{x}}\beta} = -\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\mathrm{A}_{\gamma}$$

therefore

$$\frac{\partial \mathrm{A}_{a}}{\partial \mathrm{x}^{\beta}\beta} = \frac{\partial \mathrm{A}_{\beta}}{\partial \mathrm{x}^{a}}$$

so we can choose $A_\alpha = \phi_{,a}$, and similarly for B, C, and D . We can summarize by defining

$$\mathbf{A} = \mathbb{W}^{(0)}, \quad \mathbf{B} = \mathbb{W}^{(1)}, \quad \mathbf{C} = \mathbb{W}^{(2)}, \quad \mathbf{D} = \mathbb{W}^{(3)}$$

and we can define four functions $\Phi^{(0)}, \Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \Phi^{(3)}$ such that

$$\mathbb{W}^{(\mu)} = \nabla \Phi^{(\mu)}$$

Since inner products are preserved by parallel transport

$$\mathbb{W}^{(\mu)} \cdot \mathbb{W}^{(\nu)} = \left[\mathbb{W}^{(\mu)} \cdot \mathbb{W}^{(\nu)}\right]_{\mathbf{P}} = \eta^{\mu\nu}$$

and this tells us that

$$\mathrm{g}^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi^{(\alpha)}}{\partial \mathrm{x}^\mu} \frac{\partial \Phi^{(\beta)}}{\partial \mathrm{x}^\nu} = \eta^{\alpha\beta}$$

ad hence there exists a coordinate transformation, namely

$$\overline{\mathrm{x}}^\mu = \Phi^{(\mu)}{}_{(\mathrm{x}^\mu)}$$

which takes the metric to the Minkowskian form.
Solution 9.18. If the Weyl tensor vanishes, the metric can be written in conformally flat form

$$\mathrm{ds}\ \mathrm{s}^2 = \mathrm{e}^{2\phi} \mathrm{ds}\ \mathrm{s}_0^2 = \mathrm{e}^{2\phi} \eta_{\mu\nu} \mathrm{dx}^\mu \mathrm{dx} \mathrm{x}^\nu$$

where ϕ is a function of x^a. The null geodesics

$$\mathrm{dt} = \underset{\sim}{n} \cdot \mathrm{dx}, \quad \underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{n} = 1$$

ds_0^2 remain null curves for ds^2. If we can show that they remain null goodesics, then clearly a cone of null geodesics, will remain a cone;
Were will be no preferred direction for squashing of the cross section.
To show the curves $dt = \underset{\sim}{n} \cdot dx$ are geodesics we need only show that

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathrm{x}^\alpha}{\mathrm{d}\lambda^2} = \frac{\mathrm{dp}^\alpha}{\mathrm{d}\lambda} = 0$$

for null geodesics. Note that the Christoffel symbols are

$$\Gamma^\alpha_{\gamma\beta} = \eta^{\alpha\mu} \left[-\phi, \mu \eta^{+\phi}_{\gamma\beta}, \beta \eta^{+\phi}_{\gamma\mu}, \gamma \eta_{\mu\beta}\right]$$
$$\mathrm{p}^\gamma \mathrm{p}^\beta \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} = 2\mathrm{p}^\alpha (\nabla\phi \cdot \mathrm{p})$$

and

$$0 = \frac{\mathrm{dp}^\alpha}{\mathrm{d}\lambda} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \mathrm{p}^\beta \mathrm{p}^\gamma = \frac{\mathrm{dp}^\alpha}{\mathrm{d}\lambda} + 2\mathrm{p}^\alpha (\nabla\phi \cdot \mathrm{p})$$

By rescaling λ, then we have $\mathrm{dp}^a/\mathrm{d}\lambda = 0$ and the straight null lines of Δs_0^2 are null geodesics of ds^2.
Notice that, while beams of light have undistorted cross section the cross sectional area, like all areas, is affected by the scaling factor $\mathrm{e}^{2\phi}$.
Since ϕ is in general anistropic, beams propagating in different directions will grow in cross section at different rates.
Section 9.19. In a conformally flat spacetime the Weyl tensor vanishes, so the Riemann tensor can easily be computed from the Ricci tensor

$$\mathrm{R}_{\mu\nu} = -\left(\log |\mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\right), \mu\nu + \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} + \left(\log |\mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\right), \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\beta_{\mu a} \Gamma^a_{\nu\beta}.$$

The expressions we need are

$$\Gamma^\alpha_{\gamma\beta} = -\phi^{,a} \eta_{\gamma\beta} + \phi_{,\beta} \delta^\alpha_\gamma + \phi_{,\gamma} \delta^\alpha_\beta$$
$$\Gamma^\alpha_{\gamma\beta,\alpha} = -\nabla^2 \phi \eta_{\gamma\beta} + 2\phi, \beta\gamma$$
$$\Gamma^\alpha_{\gamma\beta} \Gamma^\gamma_{\mu\alpha} = 6\phi, {}^{\phi}_{\mu}, \beta - 2(\nabla\phi)^2 \eta_{\mu\beta}$$
$$-\mathrm{g} = \mathrm{e}^{8\phi}, \quad \log |\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}} = 4\phi$$
$$\left(\log |\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\right)_{,\alpha} \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} = -4(\nabla\phi)^2 \eta_{\gamma\beta} + 8\phi, \beta^\phi, \gamma$$
$$\left(\log |\mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}{}_{,\gamma\beta} = 4\phi, \gamma\beta\right.$$

In the above expressions raising and lowering have been done with $\eta_{\mu\nu}$,

$$\phi^{,a} \equiv \eta^{\mu a}\phi_{,\mu}; \quad \nabla^2\phi \equiv \eta^{\mu a}\phi_{,\mu a}; \quad (\nabla\phi)^2 \equiv \eta^{\mu a}\phi_{,\mu}\phi_{,a}.$$

The Ricci tensor and scalar are then

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_{\mu\nu} &= -2\phi,\mu\nu + 2\phi,\mu\phi,\nu - \eta_{\mu\nu}\left[\nabla^2\phi + 2(\nabla\phi)^2\right] \\
\mathrm{R} \equiv \mathrm{R}^{\mu}_{\mu} &= \mathrm{e}^{-2\phi}\eta^{\mu\nu}\mathrm{R}_{\mu\nu} = -6\mathrm{e}^{-2\phi}\left[\nabla^2\phi + (\nabla\phi)^2\right]
\end{aligned}$$

and the Riemann tensor is

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_{a\beta\gamma\delta} =& \mathrm{C}_{a\beta\gamma\delta} + \frac{1}{2}\left(\mathrm{g}_{a\gamma}\mathrm{R}_{\beta\delta} - \mathrm{g}_{a\delta}\mathrm{R}_{\beta\gamma} - \mathrm{g}_{\beta\gamma}\mathrm{R}_{a\delta} + \mathrm{g}_{\beta\delta}\mathrm{R}_{a\gamma}\right) \\
&- \frac{1}{6}\left(\mathrm{g}_{a\gamma}\,\mathrm{g}_{\beta\delta} - \mathrm{g}_{a\delta}\,\mathrm{g}_{\beta\gamma}\right)\mathrm{R} \\
=& \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\phi}\left(\eta_{a\gamma}\mathrm{R}_{\beta\delta} - \eta_{a\delta}\mathrm{R}_{\beta\gamma} - \eta_{\beta\gamma}\mathrm{R}_{a\delta} + \eta_{\beta\delta}\mathrm{R}_{a\gamma}\right) \\
&- \frac{1}{6}\mathrm{e}^{4\phi}\left(\eta_{a\gamma}\eta_{\beta\delta} - \eta_{a\delta}\eta_{\beta\gamma}\right)\mathrm{R} \\
=& \mathrm{e}^{2\phi}\left[\eta_{a\gamma}\left(\phi,\beta^{\phi},\delta - \phi,\beta\delta\right) - \eta_{a\delta}\left(\phi,\beta^{\phi},\gamma - \phi,\beta\gamma\right)\right. \\
&- \eta_{\beta\gamma}\left(\phi,a^{\phi},\delta - \phi,a\delta\right) + \eta_{\beta\delta}\left(\phi,a^{\phi},\gamma - \phi,a\gamma\right) \\
&\left.+(\nabla\phi)^2\left(-\eta_{a\gamma}\eta_{\beta\delta} + \eta_{a\delta}\eta_{\beta\gamma}\right)\right]
\end{aligned}$$

Dolution 9.20. We use the same orthonormal tetrad as in Problem 8.27:

$$\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}} = \mathrm{e}^{a}\widetilde{\mathrm{dt}}, \quad \tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{r}}} = \mathrm{e}^{\beta}\widetilde{\mathrm{dr}}, \quad \tilde{\omega}^{\hat{\theta}} = \mathrm{e}^{\gamma}\widetilde{\mathrm{d}\theta}, \quad \tilde{\omega}^{\hat{\phi}} = \mathrm{e}^{\gamma}\sin\theta\widetilde{\mathrm{d}\phi} \tag{1}$$

Problem 8.27, we computed the 6 connection 1 -forms $\hat{\omega}^{\hat{\mu}}{}_{\nu}$ from the oppations

$$\mathrm{d}\,\tilde{\omega}^{\hat{\mu}} = -\tilde{\omega}^{\hat{\mu}}\hat{\nu}^{\tilde{\omega}^{\hat{\nu}}}, \quad \tilde{\omega}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = -\tilde{\omega}_{\hat{\nu}\hat{\mu}} \tag{2}$$

The Riemann tensor is most easily found from the 6 curvature 2 -forms $\Re_{\hat{\nu}}$:

$$\Re_{\hat{\nu}} = \mathrm{di}\omega_{\hat{\nu}} + \tilde{\omega}_{\hat{a}}\hat{\mu}_{\hat{\nu}}\hat{\omega}_{\hat{\nu}} \tag{3}$$

$$\Re^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \frac{1}{2}\mathrm{R}^{\hat{\mu}\hat{\nu}}\hat{a}\hat{\beta}\tilde{\omega}^{\hat{a}} \wedge \tilde{\omega}\hat{\beta} \tag{4}$$

The advantage of this method is that only non-zero components of the Biemann tensor are computed. Using the results of Problem 8.27 in Bquation (3), we find

$$\begin{aligned}
\hat{\Re}^{\hat{\mathrm{t}}}_{\hat{\mathrm{r}}} &= \mathrm{d}\left(\alpha'\mathrm{e}^{(\alpha-\beta)}\widetilde{\mathrm{dt}} + \dot{\beta}\mathrm{e}^{\beta-\alpha\widetilde{\mathrm{dr}})+\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}}\hat{\theta}\wedge\tilde{\omega}^{\hat{\theta}}_{\hat{\mathrm{r}}}+\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}}}\hat{\phi}\wedge\tilde{\omega}^{\hat{\phi}}_{\hat{\mathrm{r}}}\right. \\
&= \left[a'' + (a')^2 - a'\beta'\right]\mathrm{e}^{\alpha-\beta\widetilde{\mathrm{dr}}\wedge\widetilde{\mathrm{dt}}+\left(\ddot{\beta}+\dot{\beta}^2-\dot{\alpha}\dot{\beta}\right)\mathrm{e}^{\beta-a\widetilde{dt}}\wedge\widetilde{\mathrm{dr}}} \\
&= \left[\mathrm{e}^{-2a}\left(\ddot{\beta} + \dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}\dot{\beta}\right) - \mathrm{e}^{-2\beta}\left(\alpha'' + a'^2 - \alpha'\beta'\right)\right]\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{r}}}
\end{aligned} \tag{5}$$

Here a dot denotes $\partial/\partial\mathrm{t}$ and a prime $\partial/\partial\mathrm{r}$. Notice how the term $\mathrm{d}\tilde{\omega}_{\hat{\mathrm{r}}}\hat{\mathrm{t}}$ is computed by writing $\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}}_{\hat{\mathrm{f}}}$ in the coordinate basis and using $\mathrm{dd} = 0$. The remaining curvature 2 -forms are

$$\mathcal{R}^{\hat{\mathrm{t}}}_{\hat{\mathrm{t}}} = \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{\gamma-\alpha}\dot{\gamma}\widetilde{\mathbf{d}\theta}\right) + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\mathrm{t}}}_{\hat{\mathrm{r}}} \wedge \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\hat{\theta}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\mathrm{t}}}_{\hat{\phi}} \wedge \tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\phi}}\hat{\theta}$$

$$= \left[\mathrm{e}^{-2\alpha}\left(\ddot{\gamma} + \dot{\gamma}^2 - \dot{\alpha}\dot{\gamma}\right) - \mathrm{e}^{-2\beta\alpha'\gamma'}\right]\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\theta}} \tag{11}$$

$$+ \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)}\left(\dot{\gamma}\gamma' - \alpha'\dot{\gamma} + \dot{\gamma}' - \gamma'\dot{\beta}\right)\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{r}}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\theta}} \tag{6}$$

$$\Re^{\hat{\mathrm{t}}}\hat{\phi} = \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{\gamma-\alpha}\dot{\gamma}\sin\theta\widetilde{\mathrm{d}\phi}\right) + \tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}}_{\hat{\mathrm{r}}} \wedge \hat{\omega}^{\hat{\mathrm{r}}}\hat{\phi} + \tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}}\hat{\theta} \wedge \hat{\omega}^{\hat{\theta}}\hat{\phi}$$

$$= \left[\mathrm{e}^{-2\alpha}\left(\ddot{\gamma} + \dot{\gamma}^2 - \dot{\alpha}\dot{\gamma}\right) - \mathrm{e}^{-2\beta}\alpha'\gamma'\right]\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\phi}}$$

$$+ \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)}\left(\dot{\gamma}\gamma' - \alpha'\dot{\gamma} + \dot{\gamma}' - \gamma'\dot{\beta}\right)\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{r}}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\phi}} \tag{7}$$

$$\hat{R}^{\hat{\mathrm{s}}}\hat{\theta} = -\mathbf{d}\left(\mathrm{e}^{\gamma-\beta}\gamma'\widetilde{\mathbf{d}\theta}\right) + \hat{\omega}^{\hat{\mathrm{r}}}\hat{\mathbf{t}} \wedge \hat{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}}\hat{\theta} + \hat{\omega}^{\hat{\mathrm{r}}}\hat{\phi} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\phi}}\hat{\theta}$$

$$= \left[\mathrm{e}^{-2\beta}\left(\gamma'' + \gamma'^2 - \beta'\gamma'\right) - \mathrm{e}^{-2\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}\right]\hat{\omega}^{\hat{\theta}} \wedge \hat{\omega}^{\hat{\mathrm{s}}} \tag{12}$$

$$+ \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)}\left(\dot{\gamma}\gamma' - \alpha'\dot{\gamma} + \dot{\gamma}' - \gamma'\dot{\beta}\right)\tilde{\omega}^{\hat{\theta}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}}. \tag{8}$$

$$\hat{\Re}^{\hat{\mathrm{r}}}\hat{\phi} = -\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{\gamma-\beta}y'\sin\theta\widetilde{\mathrm{d}\phi}\right) + \tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{r}}}_{\hat{\mathrm{t}}} \wedge \hat{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}}\hat{\phi} + \hat{\omega}^{\hat{\mathrm{r}}}\hat{\theta} \wedge \hat{\omega}_{\hat{\phi}}$$

$$= \left[\mathrm{e}^{-2\beta}\left(\gamma'' + \gamma'^2 - \beta'\gamma'\right) - \mathrm{e}^{-2a}\dot{\beta}\dot{\gamma}\right]\tilde{\omega}^{\hat{\phi}} \wedge \hat{\omega}^{\hat{\tau}}$$

$$+ \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)}\left(\dot{\gamma}\gamma' - a'\dot{\gamma} + \dot{\gamma}' - \gamma'\dot{\beta}\right)\tilde{\omega}^{\widehat{\phi}} \wedge \tilde{\omega}^{\widehat{\mathrm{t}}} \tag{9}$$

$$\Re_{\hat{\phi}}\hat{\theta}_{\hat{\phi}} = -\mathbf{d}(\cos\theta\widetilde{\mathbf{d}\phi}) + \tilde{\omega}_{\hat{\mathrm{t}}} \wedge \tilde{\omega}_{\hat{\phi}}{}^{\hat{t}} + \tilde{\omega}_{\hat{\mathrm{r}}} \wedge \tilde{\omega}_{\hat{\phi}}$$

$$= \left(\mathrm{e}^{-2\gamma} + \mathrm{e}^{-2\alpha}\dot{\gamma}^2 - \mathrm{e}^{-2\beta}\gamma'^2\right)\tilde{\omega}^{\hat{\theta}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\phi}}. \tag{10}$$

$\mathrm{R}^{\hat{\mathrm{t}}\hat{\mathrm{r}}}{}_{\hat{\mathrm{t}}\hat{\mathrm{r}}} = \mathrm{A}$
$R^{\hat{\mathrm{t}}\hat{\theta}}\hat{\mathrm{t}}\hat{\theta} = R^{\hat{\mathrm{t}}\hat{\phi}}\hat{\mathrm{t}}\hat{\phi} = B$
$\mathrm{R}^{\hat{\mathrm{t}}\hat{\theta}}{}_{\hat{r}\hat{\theta}} = \mathrm{R}^{\hat{\mathrm{t}}\hat{\phi}}{}_{\hat{r}\hat{\phi}} = -\mathrm{R}^{\hat{r}\hat{\theta}}{}_{\hat{\mathrm{t}}\hat{\theta}} = -\mathrm{R}^{\hat{r}\hat{\phi}}{}_{\hat{\mathrm{t}}\hat{\phi}} = \mathrm{C}$
$\mathrm{R}^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\theta}\hat{\phi}}{}^{\hat{\phi}} = \mathrm{D}$
$\mathrm{R}^{\hat{\mathrm{r}}\hat{\phi}}\hat{\mathrm{r}}\hat{\phi} = \mathrm{R}^{\hat{\mathrm{r}}\hat{\theta}}\hat{\mathrm{r}}\hat{\theta} = \mathrm{E}$
Nere
$\mathrm{A} = \mathrm{e}^{-2a}\left(\ddot{\beta} + \dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}\dot{\beta}\right) - \mathrm{e}^{-2\beta}\left(a'' + a'^2 - a'\beta'\right)$
$\mathrm{B} = \mathrm{e}^{-2a}\left(\ddot{\gamma} + \dot{\gamma}^2 - \dot{\alpha}\dot{\gamma}\right) - \mathrm{e}^{-2\beta}\alpha'\gamma'$
$\mathrm{C} = \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)}\left(\dot{\gamma}' + \dot{\gamma}\gamma' - \alpha'\dot{\gamma} - \dot{\beta}\gamma'\right)$
$\mathrm{D} = \mathrm{e}^{-2\gamma} + \mathrm{e}^{-2a}\dot{\gamma}^2 - \mathrm{e}^{-2\beta}\gamma'^2$
$\mathrm{E} = \mathrm{e}^{-2a}\dot{\beta}\dot{\gamma} - \mathrm{e}^{-2\beta}\left(y'' + \gamma'^2 - \beta'\gamma'\right)$.

The Ricci tensor is obtained by contracting the Riemann tensor:

$$\mathbf{R}^{\hat{a}}\hat{\beta} = \mathbf{R}^{\hat{\gamma}\hat{a}}\hat{\gamma}\hat{\beta}$$

This gives

$$\mathrm{R}^{\hat{\mathrm{t}}}_{\hat{\mathrm{t}}} = \mathrm{A} + 2\ \mathrm{B}$$
$$\mathrm{R}^{\hat{\mathrm{t}}}_{\hat{\mathrm{r}}} = 2\mathrm{C}$$
$$\mathrm{R}^{\hat{\mathrm{r}}}_{\hat{\mathrm{r}}} = \mathrm{A} + 2\mathrm{E}$$
$$\mathrm{R}_{\hat{\theta}} = \mathrm{R}^{\hat{\phi}}\hat{\phi} = \mathrm{B} + \mathrm{D} + \mathrm{E}$$
$$\mathrm{R}_{\hat{\theta}} = \mathrm{R}^{\hat{\mathrm{t}}}_{\hat{\phi}} = \mathrm{R}^{\hat{\mathrm{r}}}_{\hat{\theta}} = \mathrm{R}^{\hat{\mathrm{r}}}_{\hat{\phi}} = \mathrm{R}^{\hat{\theta}}_{\hat{\phi}} = 0. \tag{13}$$

We can now read off the non-zero components of the Riemann tensor from Equation (4):
The scalar curvature is

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}^{\hat{a}\hat{a}}_{\hat{a}} = 2\ \mathrm{A} + 4\ \mathrm{B} + 2\mathrm{D} + 4\mathrm{E} \tag{14}$$

The Einstein tensor is found from

$$\mathrm{G}^{\hat{a}}\hat{\beta} = \mathrm{R}^{\hat{a}}\hat{\beta} - \frac{1}{2}\delta^{\hat{a}}{}_{\hat{\beta}}\mathrm{R}$$

i.e.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{G}^{\hat{t}}_{\hat{\mathbf{t}}} = -(\mathrm{D}+2\mathrm{E}) \\
&\mathrm{G}^{\hat{t}}_{\hat{\mathbf{r}}} = 2\mathrm{C} \\
&\mathrm{G}^{\hat{r}}_{\hat{\mathbf{r}}} = -(\mathrm{D}+2\ \mathrm{B}) \\
&\mathrm{G}^{\hat{\theta}}_{\hat{\theta}} = \mathrm{G}^{\hat{\phi}}_{\hat{\phi}} = -(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{E}) \\
&\mathrm{G}^{\hat{t}}_{\hat{\theta}} = \mathrm{G}^{\hat{t}}_{\hat{\phi}} = \mathrm{G}^{\hat{r}}_{\hat{\theta}} = \mathrm{G}^{\hat{r}}_{\hat{\phi}} = \mathrm{G}^{\hat{\theta}}_{\hat{\phi}} = 0
\end{aligned} \tag{15}$$

Solution 9.21. Choose an orthonormal basis $\mathrm{e}_{\hat{\alpha}}$ and construct a complex, null tetrad basis oriented so that the wave vector $\nabla u \equiv k$ is one of the tetrad legs:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{k} = (2)^{-\frac{1}{2}}\,(\mathrm{e_t} + \mathrm{e}_{\hat{z}}) \\
&\mathrm{l} = (2)^{-\frac{1}{2}}\,(\mathrm{e_t} - \mathrm{e}_{\hat{z}}) \\
&\mathbf{m} = (2)^{-\frac{1}{2}}\,(\mathrm{e}_{\hat{x}} + i\mathrm{e}_{\hat{y}}) \\
&\overline{\mathbf{m}} = (2)^{-\frac{1}{2}}\,(\mathrm{e}_{\hat{x}} - i\mathrm{e}_{\hat{y}})
\end{aligned} \tag{1}$$

and consider the components of the Riemann tensor in this basis: e.g. $\mathrm{R}_{1\ \mathrm{m}\overline{\mathrm{m}}1} = \mathrm{R}_{a\beta\gamma\delta}1^a\beta_{\overline{\mathrm{m}}}\gamma_1\delta$ etc. Since the Riemann tensor is a function only of retarded time and since the only nonvanishing dot products of the basis vectors in Equation (1) are

$$-\mathbf{k}\cdot\mathbf{l} = \mathbf{m}\cdot\overline{\mathbf{m}} = 1 \tag{2}$$

one finds

$$\mathrm{R}_{\mathrm{abcd,p}} = 0 \tag{3}$$

where ($\mathrm{a,b,c,d}$) range over ($\mathrm{k},1,\ \mathrm{m},\overline{\mathrm{m}}$) and ($\mathrm{p,q,r}\cdots$) range over ($\mathrm{k,m},\overline{\mathrm{m}}$). Now, consider the following subset of Bianchi identities for the Riemann tensor:

$$\mathrm{R}_{\mathrm{ab[pq,1]}} = 0 \tag{4}$$

Xire 1 is the 1 index of Equation (1). Using Equation (3), we get

$$\mathrm{R}_{\mathrm{abpq,1}} = 0 \tag{5}$$

Equation (4), and Equations (5) and (3) imply

$$\mathrm{R}_{\mathrm{abpq}} = \mathrm{R}_{\mathrm{pqab}} = 0 \tag{6}$$

Wide from a trivial, nonwavelike constant. Consequently, all nonvanishAccomponents of the Riemann tensor must have the form R_{p1q1} and, Wing into account the symmetries of the Riemann tensor, we see that Tane are only six independent components. These six components correTond to the number of degrees of freedom in the most general gravitaGonal wave in the generic metric theory of gravity. Einstein's theory has Nily two degrees of freedom in a gravitational wave.

Wolution 9.22. In a local Lorentz frame, the acceleration of any particle related to $\mathrm{F}^{\mu\nu}$ by the Lorentz force law:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}^a}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{m}}\ \mathrm{F}^{\alpha\beta}_{\beta\beta}$$

$\mathbb{Z}$ is convenient to think of the 6 components of $\mathrm{F}^a\beta$ as the vectors $\underset{\sim}{\mathrm{E}}$ and B. In the comoving frame of one particle, it has zero velocity and so feels no magnetic forces. Measuring its three components of acceleradon gives $\underset{\sim}{E}$. Measuring the acceleration of a second particle as seen in Hat frame gives only two components of B, since the components of B Ilong the direction of motion of the second particle produces no acceleradion. Thus at least three particles are required to measure all components of $\mathrm{F}^\alpha\beta$.

The reader is invited to figure out the answer for the Riemann tensor trom the geodesic deviation equation

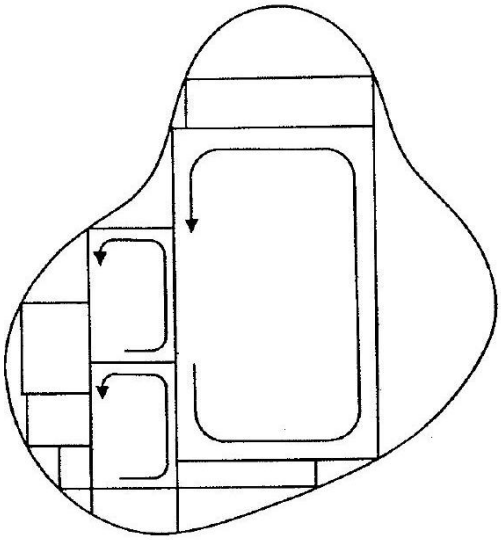
$$\frac{\mathrm{D}^2\xi^a}{\mathrm{d}\tau^2} = -\mathrm{R}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}\mathrm{u}^\beta\gamma^\delta_{\mathrm{u}}$$

Solution 9.23. Choose a coordinate system geared to the surface. Let x^1, x^2 vary, and x^3, x^4 be constant on the surface. The only contravariant components of $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$ are then the 1 and 2 components. We are interested then only in the Riemann components with indices 1 and 2 , but there is only one such independent component, R_{1212}. The nonvanishing Riemann components of this type are related by symmetries which can be expressed as

$$R_{ijk1} \propto (g_{ik}g_{i1} - g_{i1}g_{jk}) \quad i,j,k,1 = 1,2.$$

It follows immediately that in this coordinate system K is independent of A and B. Since K is clearly coordinate independent the desired result is proved.

Solution 9.24. Let the interior of the circuit be subdivided into infinitesimal parallelograms, and consider the change in angle for one small rectangle. If **u** and **v** represent the sides of one rectangle then from Problems 9.23 and 9.11 we have that the change in A after transport is



Circuit Σ - approximated w ith rectangles

$$\delta \mathrm{A}_\alpha = -\mathrm{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\mathrm{A}^\beta{}_\mathrm{u}\mu_\mathrm{v}\nu = \mathrm{K}\left(\ \mathrm{g}_{\alpha\mu}\mathrm{g}_{\beta\nu} - \mathrm{g}_{\alpha\nu}\mathrm{g}_{\beta\mu}\right)\mathrm{A}\beta_\mathrm{u}\mu_\mathrm{v}\nu.$$

Wite that $\mathrm{A}^a\delta\ \mathrm{A}_a = \frac{1}{2}\delta(\ \mathrm{A}\cdot\ \mathrm{A}) = 0$ so the length of A is unchanged. The Arange in angle θ between **A** and **B** can be calculated from

$$\mathbf{B}^a\delta\mathbf{A}_\alpha = \delta\left(\mathbf{A}^a\mathbf{B}_\alpha\right) = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\delta(\cos\theta) = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta\delta\theta$$
$$\mathbf{B}^a\delta\mathbf{A}_a = \mathbf{K}[(\mathbf{B}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}) - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{A}\cdot\mathbf{u})]$$

Now choose a locally flat coordinate system on the surface with $\mathbf{u} \sim \mathbf{e}_1 v \sim e_2$ then

$$\begin{aligned}\|A||B|\sin\theta\delta\theta| &= K\left(B^1A^2 - B^2A^1\right)uv \\ &= K|A\times B|uv = K\sin\theta|A||B|\cdot(\text{ area enclosed })\end{aligned}$$

Hence, for transport around a small rectangle $|\delta\theta| = \mathrm{K}\delta\Sigma$. If we now consider a more general circuit, the change in A due to transport around that circuit will be equal to the change in A due to transport around all the rectangles into which the circuit is divided, and the area of the circuit is the sum of the areas of the rectangles, thus $|\Delta\theta| = K\Delta\Sigma$.

Solution 9.25. Define

$$\mathrm{W}_{\alpha\gamma\beta\delta} \equiv \mathrm{K}\left(\ \mathrm{g}_{a\beta}\ \mathrm{g}_{\gamma\delta} - \mathrm{g}_{a\delta}\ \mathrm{g}_{\beta\gamma}\right) - \mathrm{R}_{\alpha\gamma\beta\delta} \tag{1}$$

and note that $\mathrm{W}_{\alpha\gamma\beta\delta}$ has the same symmetries as $\mathrm{R}_{\alpha\gamma\beta\delta}$. If K is independent of the vectors A and B at the given point, then by the definition of K (Problem 9.23)

$$\mathrm{w}_{\alpha\gamma\beta\delta}\mathrm{A}^\alpha\mathrm{A}^\beta\mathrm{B}^\gamma\mathrm{B}^\delta = 0 \tag{2}$$

for all A, B, thus

$$\mathrm{w}_{a\gamma\beta\delta} + \mathrm{w}_{\beta\delta\alpha\gamma} + \mathrm{w}_{\alpha\delta\beta\gamma} + \mathrm{w}_{\beta\gamma a\delta} = 0. \tag{3}$$

The symmetries of $\mathrm{W}_{a\gamma\beta\delta}$ allow us to rewrite Equation (3) as

$$\mathrm{w}_{a\gamma\beta\delta} = \mathrm{w}_{a\delta\gamma\beta} \tag{4}$$

Permute $(\gamma\beta\delta)$ cyclically:

$$\mathrm{w}_{a\delta\gamma\beta} = \mathrm{w}_{a\beta\delta\gamma} \tag{5}$$

Substitute Equations (4) and (5) in the cyclic identity

$$\mathrm{W}_{a\gamma\beta\delta}+\mathrm{W}_{a\delta\gamma\beta}+\mathrm{W}_{a\beta\delta\gamma}=0$$

and find

$$\mathrm{w}_{a\gamma\beta\delta}=0$$

which is the required result.
Solution 9.26 . Since the metric is always covariantly constant

$$\mathrm{R}_{a\beta\gamma\delta;\lambda}=\mathrm{K}_{,\lambda}\left(\mathrm{g}_{a\gamma}\ \mathrm{g}_{\beta\delta}-\mathrm{g}_{a\delta}\ \mathrm{g}_{\beta\gamma}\right)$$

Now substitute in the Bianchi identities

$$0=\mathrm{R}_{a\beta\gamma\delta;\lambda}+\mathrm{R}_{a\beta\lambda y;\delta}+\mathrm{R}_{a\beta\delta\lambda;y}$$

and contract on α,γ and β,δ to find $\mathrm{K}_{,\lambda}=0$ i.e. K is constant.
Solution 9.27. By contracting we see

$$\begin{aligned}\mathrm{R}_{\mu\kappa}&=3\mathrm{K}\mathrm{g}_{\mu\kappa}\\ \mathrm{R}&=12\ \mathrm{K}\end{aligned}$$

The definition of the Weyl tensor is

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_{\lambda\mu\nu\kappa}=&\mathrm{R}_{\lambda\mu\nu\kappa}-\frac{1}{2}\left(\ \mathrm{g}_{\lambda\nu}\mathrm{R}_{\mu\kappa}-\mathrm{g}_{\lambda\kappa}\mathrm{R}_{\mu\nu}-\mathrm{g}_{\mu\nu}\mathrm{R}_{\lambda\kappa}+\mathrm{g}_{\mu\kappa}\mathrm{R}_{\lambda\nu}\right)\\&+\frac{1}{6}\left(\ \mathrm{g}_{\lambda\nu}\mathrm{g}_{\mu\kappa}-\mathrm{g}_{\lambda\kappa}\mathrm{g}_{\mu\nu}\right)\mathrm{R}\end{aligned}$$

so that

$$\begin{aligned}C_{\lambda\mu\nu\kappa}=&K\left(g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa}-g_{\lambda\mu}g_{\nu\kappa}\right)-\frac{1}{2}\cdot 3K\left(2g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa}-2g_{\lambda\mu}g_{\nu\kappa}\right)\\&+\frac{1}{6}\cdot 12K\left(g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa}-g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu}\right)=0\end{aligned}$$

Sidion 9.28. Since $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}=0$ we have immediately

$$\begin{aligned}\mathrm{u}^{a}\left(\mathrm{n}^{\beta}\mathrm{u}_{\beta}\right)_{;a}=0&=\mathrm{n}^{\beta}_{;a}\mathrm{u}^{\alpha}\mathrm{u}_{\beta}+\mathrm{n}^{\beta}\mathrm{u}_{\beta;a}\mathrm{u}^{\alpha}\\&=-\mathrm{K}_{\alpha\beta}\mathrm{u}^{\alpha}\mathrm{u}^{\beta}+2\mathrm{n}\cdot\xi\end{aligned}$$

Strition 9.29. The metric has the form

$$\begin{aligned}ds^{2}&=-d\tau^{2}+g_{ij}dx^{i}dx^{j}\\g_{ij}&=a^{2}(\tau)\gamma_{ij}\left(x^{k}\right)\end{aligned}$$

Die normal vector to the $\tau=$ constant surfaces is $n=\partial/\partial\tau$. Thus

$$K_{ij}=-e_{j}\cdot\nabla_{i}n=n\cdot\nabla_{i}e_{j}=\Gamma_{nji}=-\frac{1}{2}g_{ij,n}=\frac{-a,r}{a}g_{ij}$$

Solution 9.30. From the definition of the Lie derivative (Problem 8.13) have

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathbf{n}}\mathrm{P}_{\alpha\beta}&=\mathrm{P}_{\alpha\beta;\gamma^{\mathrm{n}}}\gamma+\mathrm{P}_{\gamma\beta^{\mathrm{n}};\alpha}+\mathrm{P}_{\alpha\gamma^{\mathrm{n}}};\beta\\&=\left(\mathrm{g}_{a\beta}-\mathrm{n}_{a}\mathrm{n}\beta\right);\gamma^{\mathrm{n}}+\left(\mathrm{g}_{\gamma\beta}-\mathrm{n}^{\mathrm{n}}_{\gamma}\beta\right)\mathrm{n}^{\gamma}_{;\alpha}+\left(\mathrm{g}_{\alpha\gamma}-\mathrm{n}_{\alpha}\mathrm{n}_{\gamma}\right)\mathrm{n}^{\gamma};\beta\\&=-\left(\mathrm{n}_{\alpha}\mathrm{n}_{\beta}\right);\gamma^{\mathrm{n}}+\mathrm{n}_{\beta;\alpha}+\mathrm{n}_{\alpha;\beta}\end{aligned}\tag{1}$$

Where we have used $\mathrm{n}_{\gamma}\mathrm{n}_{;\alpha}=\frac{1}{2}\left(\mathrm{n}_{\gamma}\mathrm{n}^{\gamma}\right)_{;\alpha}=0$. If $\mathrm{e_i}$ are three basis Yectors in the hypersurface, then

$$K_{ij}=-e_{j}\cdot\nabla_{i}n=-n_{i;j}=-\frac{1}{2}\left(n_{i;j}+n_{j;i}\right)\tag{2}$$

ohere we have used the fact that K_{ij} is symmetric. If we are using a general coordinate system (i.e. not one in which i,j lie in the hypersurface), then Equation (2) can be rewritten

$$\mathrm{K}_{a\beta}=-\frac{1}{2}\left(\mathrm{n}_{\gamma;\delta}+\mathrm{n}_{\delta;\gamma}\right)\mathrm{P}^{\gamma}{}_{\alpha}\mathrm{P}^{\delta}{}_{\beta}\tag{3}$$

i.e. as the symmetrized covariant derivative of n projected into the hypersurface. Using the explicit form of $\mathrm{P}^{\gamma}_{\alpha}$ in Equation (3), and comparing with Equation (1), we find

$$\mathrm{K}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\mathfrak{P}_{\mathbf{n}}\mathrm{P}_{\alpha\beta}$$

Solution 9.31. Let the surface be $\mathrm{x}^3 = 0$, where $\left(\mathrm{x}^1, \mathrm{x}^2, \mathrm{x}^3\right)$ are Gaussian normal coordinates (see Problem 8.25) based on this surface. Then the area is

$$A = \int g^{\frac{1}{2}} dx^1 dx^2 \tag{1}$$

where g is the determinant of the two-dimensional metric g_{ij} in the surface. Vary the area by displacing surface elements a distance δx^3 along the normal $n = \partial/\partial x^3$:

$$\delta\mathrm{A} = \int \delta \mathrm{g}^{\frac{1}{2}} \mathrm{dx}^1 \mathrm{dx}^2$$

In Problem 21.1 it is shown that

$$\delta \mathrm{g}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ \mathrm{g}^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{g}^{\mathrm{ij}}\delta\ \mathrm{g}_{\mathrm{ij}} = \frac{1}{2}\ \mathrm{g}^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{g}^{\mathrm{ij}}\ \mathrm{g}_{\mathrm{ij},3}\delta \mathrm{x}^3.$$

But we have chosen Gaussian normal coordinates, so

$$K_{ij} = -\frac{1}{2} g_{ij,3}$$

$$\delta A = -\int g^{ij} K_{ij} g^{\frac{1}{2}} dx^1 dx^2 \delta x^3$$

Since A is a minimum, $\delta\mathrm{A} = 0$ for all $\delta \mathrm{x}^3$, and hence we must have

$$K = g^{ij} K_{ij} = 0$$

Wition 9.32. Let $\mathrm{e_i}$ be a coordinate basis in Σ; the equations to be Aved are tensor equations and so will be valid independent of the basis Ed to derive them. The vectors e_i along with n form a basis for the speetime, so

$$(4)\ \nabla_i \mathbf{e}_j = \alpha_{ij}\mathbf{n} + \beta^k{}_{ij}\mathbf{e}_k. \tag{1}$$

Decoefficients in Equation (1) can be found by dotting in n and e_k -0):

$$\varepsilon\alpha_{ij} = n \cdot {}^{(4)}\nabla_i e_j = {}^{(4)}\nabla_i \left(n \cdot e_j\right) - e_j \cdot {}^{(4)}\nabla_i n = 0 + K_{ij}$$
$$\beta_{kij} = e_k \cdot {}^{(4)}\nabla_i e_j = {}^{(4)}\Gamma_{kji} = {}^{(3)}\Gamma_{kji}$$

De last equality follows from the fact that the Christoffel symbol can be computed directly from ${}^{(3)}\mathrm{g}_{\mathrm{ij}}$. With these coefficients Equation (1) beomes the "Gauss-Weingarten equation."

$$(4)\ \nabla_{\mathbf{i}}\mathbf{e}_{\mathrm{j}} = \varepsilon \mathrm{K}_{\mathrm{ij}}\mathbf{n} + {}^{(3)}\Gamma^{\mathrm{k}}_{\mathbf{ji}}\mathbf{e}_{\mathrm{k}}. \tag{2}$$

The Riemann tensor can be computed from derivatives of the Γ 's; it ss somewhat quicker to use the curvature operator (see Problem 9.12):

$$\mathbf{R}_{a\beta\gamma\delta} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{R}\left(\mathbf{e}_\gamma, \mathbf{e}_\delta\right)\mathbf{e}_\beta \tag{3}$$
$$\mathbf{R}\left(\mathbf{e}_\gamma, \mathbf{e}_\delta\right) = \left[\nabla_\gamma, \nabla_\delta\right] - \nabla_{\left[\mathbf{e}_\gamma, \mathbf{e}_\delta\right]} \tag{4}$$

There
Evaluate Equation (4) for $\mathrm{e_j}$ and $\mathrm{e_k}$. The last term vanishes because $[e_{\mathrm{j}}, \mathrm{e_k}] = 0$ for a coordinate basis, and

$$\begin{aligned} \nabla_j {}^{(4)}\nabla_k e_i =& {}^{(4)}\nabla_j \left(\varepsilon K_{ik} n + {}^{(3)}\Gamma^m_{ik} e_m\right) \\ (4) \qquad =& \varepsilon K_{ik,j} n - \varepsilon K_{ik} K^m_j e_m + {}^{(3)}\Gamma^m_{ik,j} e_m \\ &+ {}^{(3)}\Gamma^m_{ik}\left(\varepsilon K_{jm} n + {}^{(3)}\Gamma^n_{mj} e_n\right) \end{aligned} \tag{5}$$

Evaluate Equation (5) with j and k interchanged and subtract the two equations. The result is

$$R\left(e_j, e_k\right) e_i = \varepsilon\left(K_{ik|j} - K_{ij|k}\right) n + e_m\left[\varepsilon\left(K_{ij}K^m_k - K_{ik}K^m_j\right) + {}^{(3)}R^m_{ijk}\right]. \tag{6}$$

Dotting Equation (6) with n and e_n respectively gives the GaussCodazzi equations.
The components of the Riemann tensor with two n 's can be found from $R\left(e_k, n\right) n$. Since n has been chosen to be a coordinate basis vecto $[\mathrm{n}, \mathrm{e_k}] = 0$ so the last term in Equation (4) vanishes and thus

$$R\left(e_k, n\right) n = {}^{(4)}\nabla_k {}^{(4)}\nabla_n n - {}^{(4)}\nabla_n {}^{(4)}\nabla_k n.$$

But ${}^{(4)}\nabla_n n = 0$ because n is tangent to a geodesic (Gaussian normal coordinates), so that

$$e_i \cdot R\left(e_k, n\right) n = e_i \cdot {}^{(4)}\nabla_n \left(K_k m e_m\right) = K_{ki,n} - K_k m_m e_m \cdot \nabla_n e_i.$$

Now [e, n] = 0 implies that

$$(4)\ \nabla_n e_i = {}^{(4)}\nabla_i n = -K_i^j e_j$$

so finally

$$R_{inkn} = \varepsilon R^n_{ink} = K_{ki,n} + K_i^j K_{jk}.$$

Solution 9.33. The Riemann components were found in Problem 9.32. Contraction gives

$$\begin{aligned} (4)\ R^i_j &= g^{ik}\left({}^{(4)}R^n_{knj} + {}^{(4)}R^m_{kmj}\right) \\ &= {}^{(3)}R^i_j + \varepsilon\left(g^{ik}K_{kj,n} + 2K^i_m K^m_j - K^i_j K\right) \end{aligned} \tag{1}$$

where $K \equiv K^i_i$. Now $g^{ik}_{,n} = -g^{im}g^{ks}g_{ms,n}$ (see e.g. Problem 21.1) and $-\mathrm{g_{ms,n}} = 2\ \mathrm{K_{ms}}$ in Gaussian normal coordinates, so

$$\mathrm{g^{ik}_{,n}} = 2\ \mathrm{g^{im}}\ \mathrm{g^{ks}}\ \mathrm{K_{ms}} = 2\ \mathrm{K^{ik}}$$

tition (1) can now be rewritten:

$$\begin{aligned} (4)\ \mathrm{R^i_j} &= {}^{(3)}\mathrm{R^i_j} + \varepsilon\left(\mathrm{g^{ik}}\ \mathrm{K_{kj,n}} + \mathrm{g^{ik}_{,n}}\ \mathrm{K_{kj}} - \mathrm{K^i_j}\ \mathrm{K}\right) \\ &= {}^{(3)}\mathrm{R^i_j} + \varepsilon\left(\mathrm{K^i_{j,n}} - \mathrm{K^i_j}\ \mathrm{K}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

the other components of the Ricci tensor we have:

$${}^{(4)}R^n_j = \varepsilon {}^{(4)}R^\alpha_{naj} = -{}^{(4)}R^{ni}_{ij} = \varepsilon\left(K_{|j} - K^i_{j|i}\right) \tag{3}$$

$${}^{(4)}R^n_n = \varepsilon {}^{(4)}R^i_{nin} = \varepsilon g^{ij}\left(K_{ij,n} + K_{im}K^m_j\right) = \varepsilon\left(K_{,n} - K_{im}K^{mi}\right). \tag{4}$$

Ricci scalar is then

$${}^{(4)}\mathrm{R} = {}^{(4)}\mathrm{R^n_n} + {}^{(4)}\mathrm{R^i_i} = {}^{(3)}\mathrm{R} + \varepsilon\left(2\ \mathrm{K_{,n}} - \mathrm{K_{im}}\ \mathrm{K^{im}} - \mathrm{K^2}\right) \tag{5}$$

It the components of the Einstein tensor are:

$$\mathrm{G^n_n} = {}^{(4)}\mathrm{R^n_n} - \frac{1}{2}{}^{(4)}\mathrm{R} = -\frac{1}{2}{}^{(3)}\mathrm{R} + \frac{1}{2}\varepsilon\left(\ \mathrm{K^2} - \mathrm{K_{im}}\ \mathrm{K^{im}}\right) \tag{6}$$

$${}^{(4)}\mathrm{G^n_j} = {}^{(4)}\mathrm{R^n_j} = \varepsilon\left(\mathrm{K_{|j}} - \mathrm{K^i_{j|i}}\right) \tag{7}$$

$$\begin{aligned} {}^{(4)}\mathrm{G^i_j} &= {}^{(4)}\mathrm{R^i_j} - \frac{1}{2}\delta^i_j{}^{(4)}\mathrm{R} \\ &= {}^{(3)}\mathrm{G^i_j} + \varepsilon\left[\mathrm{K^i_{j,n}} - \mathrm{K^i_j}\ \mathrm{K} - \frac{1}{2}\delta^i_j\left(2\ \mathrm{K_{,n}} - \mathrm{K_{im}}\ \mathrm{K^{im}} - \mathrm{K^2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Imputing (6) and (7) to the corresponding components of the stress-energy ensor gives "initial value equations" for the gravitational field.

Solution 9.34.
(i) Since there is no favored direction in the spherical surface the extrinsic curvature tensor must be $\mathrm{K_{ij}} \propto \delta_{\mathrm{ij}}$ in an orthonormal basis; this implies that any vector is an eigenvector. From the definition of K as the rate of change of n, the eigenvalue must be $-1/$ sphere's radius $= -1/\mathrm{a}$.

We can give a mathematical development of these intuitive results by going to the usual spherical coordinates r, θ, ϕ. These are clearly
Gaussian normal coordinates and

$$ds^2 = {}^{(2)}g_{ik}dx^i dx^k = r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

Now $\mathrm{K_{ij}} = -\frac{1}{2}\ \mathrm{g_{ij,n}} = -\frac{1}{2}\ \mathrm{g_{ij,r}}$ so

$$\mathrm{K}_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = \frac{1}{\mathrm{g}_{\theta\theta}}\mathrm{K}_{\theta\theta} = \frac{1}{\mathrm{r}^2}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{r}^2\right)_{,\mathrm{r}} = -1/\mathrm{a}$$
$$\mathrm{K}_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = \frac{1}{\mathrm{g}_{\phi\phi}}\mathrm{K}_{\phi\phi} = \frac{1}{\mathrm{r}^2\sin^2\theta}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{r}^2\sin^2\theta\right)_{,\mathrm{r}} = -1/\mathrm{a}. \tag{1}$$

(ii) Again we can argue intuitively: The "special" directions must" be the axial and circumferential directions. From the definition of K the values of the curvature (rate of change of n) in these directions should be 0 and $-1/a$.
Mathematically: Again the usual coordinates are Gaussian normal and the 2 -geometry is

$$\mathrm{ds}^2 = \mathbf{r}^2\ \mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}z^2$$

The orthonormal components of K are then

$$\mathrm{K}_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = \frac{1}{\mathrm{g}_{\phi\phi}}\left(-\frac{1}{2}\ \mathrm{g}_{\phi\phi,\mathrm{r}}\right) = -1/\mathrm{a}$$
$$\mathrm{K}_{\hat{z}\hat{z}} = \frac{1}{\mathrm{g}_{zz}}\left(-\frac{1}{2}\ \mathrm{g}_{zz,\mathrm{r}}\right) = 0 \tag{2}$$

and our intuitive answers are correct.
(iii) In cartesian coordinates

$$\mathrm{ds}^2 = \mathrm{dx}^2 + \mathrm{dy}^2 + \mathrm{dz}^2 \tag{3}$$

the surface is

$$f(x, y, z) = 0 \tag{4}$$

$$\mathrm{f} = -\frac{1}{2}\left(\mathrm{ax}^2 + 2\mathrm{bxy} + \mathrm{cyy}^2\right) + z \tag{5}$$

We unit normal is

$$\mathbf{n} = \nabla\mathbf{f}/|\nabla\mathbf{f}| = \frac{1}{\mathbf{N}}\left[-(a\mathbf{x} + by)\mathbf{e}_x - (bx + cy)\mathbf{e}_y + (e_z)\right] \tag{6}$$

$$N \equiv \left[(ax + by)^2 + (bx + cy)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

Wote that since $n = e_z$ at the origin, e_x and e_y can be used as basis dectors in the surface there. Thus

$$K_{ij} = -e_j \cdot \nabla_i n = -n_{j;i} = -n_{j,i}$$

Ence the connection coefficients vanish for the metric (3). Because $\mathrm{i}_\mathrm{x} = \mathrm{N}_{,\mathrm{y}} = 0$ at the origin, we have

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

The secular equation is

$$0 = \det\left(K_{ij} - Kg_{ij}\right) = \begin{vmatrix} a - K & b \\ b & c - K \end{vmatrix} \tag{8}$$

"here g_{ij} is found by restricting (3) to the surface (5). Since $\mathrm{d}z = 0$ at the origin, $\mathrm{g}_{\mathrm{ij}} = \delta_{\mathrm{ij}}$ at the origin. The principal curvatures are found from Equation (8) to be

$$K_\pm = \frac{c + a}{2} \pm \frac{c - a}{2}\left[1 + \frac{4b^2}{(c - a)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

With these eigenvalues, the principal vectors are found from

$$\begin{bmatrix} a - K_\pm & b \\ b & c - K_\pm \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_\pm^x \\ V_\pm^y \end{bmatrix} = 0. \tag{10}$$

The solutions are:

$$\mathrm{V}_{\pm} = \left(\mathrm{e_x} + a_{\pm}\mathrm{e_y}\right)/\beta_{\pm}$$
$$\alpha_{\pm} \equiv \gamma\left[1 \pm \left(1+\gamma^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$\beta_{\pm} \equiv \left(1+a_{\pm}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\gamma \equiv (a-\mathrm{c})/2\ \mathrm{b}$$

Solution 9.35. From the Gauss-Codazzi equation (Problem 9.32), we have

$${}^{(3)}R^m_{ijk} = {}^{(2)}R^m_{ijk} + \varepsilon\left(K_{ij}K^m_k - K_{ik}K^m_j\right)$$

Contract on m and j and on i and k, and set ${}^{(3)}R^m_{ijk} = 0$ because the 3 -space is flat. Thus find

$${}^{(2)}R = -\varepsilon\left(K_i{}^j K_j{}^i - K_i{}^i K_j{}^j\right) \tag{1}$$

At any point P on Σ, choose the principal directions as axes and let the coordinates x^i measure lengths away from P. Then ${}^{(2)}g_{ij} = \delta_{ij}$ at P and K_{ij} is diagonal, with the principal curvatures as the diagonal elements. Hence

$${}^{(2)}\mathrm{R} = -\varepsilon\left[\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} - \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)^2\right] = \frac{2}{\rho_1\rho_2}$$

where we have set $\varepsilon = \mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = +\mathbf{1}$.
For $\sum$ 3-dimensional in a flat 4 -space, Equation (1) gives

13.7.10 10 Killing Vectors and Symmetries

Suppose that a geometry has a symmetry such that a vector field $\boldsymbol{\xi}$ exists with the following property: If any set of points is displaced by $\xi \mathrm{d}\lambda$ ($\mathrm{d}\lambda$ a small number) then all distance relationships are unchanged. The vector field is then called a Killing vector for the geometry, and it satisfies Killing's equation

Problem 10.1. Solve Killing's equations to find the Killing vector fields of the 2 -sphere:

$$\mathbf{ds}^2 = \mathbf{d}\theta^2 + \sin^2\theta\ \mathrm{d}\phi^2$$

Problem 10.2. Show that Killing's equation $\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0$ is equivalent to $\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{g} = 0$, where $\mathbf{g}$ is the metric tensor. Interpret this result geometrically.

Problem 10.3.

(a) Show that the commutator of two Killing vector fields is a Killing vector field.
(b) Show that a linear combination of Killing vectors with constant coefficients is a Killing vector.

Problem 10.4. In Euclidean 3-space show that the 3 Killing vectors describing rotations around the x, y, and z axes are linearly dependent at any given point but that no constant coefficient combination of them is zero. Show that the generators of the rotation group $O(3)$ are thus 2 -surface forming, even though the group is 3 -dimensional. Explain.

Problem 10.5. The metric for an axially symmetric rotating star admits Rio Killing vectors, $\boldsymbol{\xi}_{(t)}$ and $\boldsymbol{\xi}_{(\phi)}$. Assume there are no other indepenSent Killing vectors. Prove that $\boldsymbol{\xi}_{(\mathrm{t})}$ and $\boldsymbol{\xi}_{(\phi)}$ commute.

Problem 10.6. Show that any Killing vector is a solution of the equation

$$\xi^{\nu;\lambda}_{;\lambda} + \mathbf{R}^{\nu}_{\sigma}\xi^{\sigma} = 0$$

Nind a Lagrangian-type variational principle from which this equation can ederived.

Etoblem 10.7. If $\boldsymbol{\xi}$ is a Killing vector, prove that

$$\xi_{\mu;a\beta} = \mathbf{R}_{\gamma\beta a\mu}\xi^{\gamma}$$

Problem 10.8. A metric is "stationary" if and only if it has a Killing sector field ξ which is timelike at infinity (the "time" direction is $\partial/\partial\mathrm{t}$). There are two ways to define a "static" metric:
(i) stationary and invariant under time reversal, $\partial/\partial\mathrm{t} \rightarrow -\partial/\partial\mathrm{t}$, or
(ii) stationary and $\partial/\partial\mathrm{t}$ is hypersurface orthogonal (see Problem 7.23). Show that the two definitions are equivalent.

Problem 10.9. In flat Minkowski spacetime find ten Killing vectors that are linearly independent.

Problem 10.10. If $\boldsymbol{\xi}\left(\mathrm{x}^{\mu}\right)$ is a Killing vector field and u is the tangent vector to a geodesic, show that $\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{u}$ is constant along the geodesic.

Problem 10.11. If ξ is a Killing vector and T is the stress-energy tensor, show that $\mathrm{J}^{\mu} \equiv \mathrm{T}^{\mu\nu}\xi_{\nu}$ is a conserved quantity i.e. $\mathrm{J}^{\mu}_{;\mu} = 0$. Interpret J when ξ is a timelike Killing vector.

Problem 10.12. If T is the energy-momentum tensor, and ξ is a time Killing vector, show that the integral over a whole spacelike hypersurface

$$\int_{\mathrm{F}} \mathrm{T}^{\alpha}_{\beta}\xi^{\beta}\mathrm{d}^3\Sigma_{\alpha}$$

is independent of the choice of spacelike hypersurface F.

Problem 10.13. Given a divergenceless stress energy tensor in flat spacetime, i.e.

$$\mathrm{T}^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad \mathrm{R}_{a\beta\gamma\delta} = 0$$

show that one may construct ten global conservation laws and hence ten conserved quantities.

Problem 10.14. If $\boldsymbol{\xi}$ is a timelike Killing vector and $\mathbf{u} = \boldsymbol{\xi}/|\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}|^{\frac{1}{2}}$ is a 4 -velocity, prove that $\mathrm{a} \equiv \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = \frac{1}{2}\nabla \log|\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}|$.

Problem 10.15. In a stationary metric with time Killing vector ξ the "energy at infinity" $E = -p\cdot\xi$ of a test particle with 4 -momentum p is conserved. Find the minimum value of E/μ (where μ = particle mass) that the particle can have at a given point in the spacetime, in terms of the norm of $\boldsymbol{\xi}$.

Problem 10.16. Show that a Killing vector is an admissible solution for the vector potential of Maxwell's equations for a test field in a vacuum spacetime. What electromagnetic field corresponds to the Killing vector

10: Solutions

attion 10.1. The metric is $\mathrm{ds}^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\ \mathrm{d}\phi^2$; the connection efficients are $\Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} = \Gamma^{\phi}{}_{\phi\theta} = \cot\theta; \Gamma^{\theta}{}_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta$; all others Ezero. Now:

$$\xi_{a;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = \xi_{a,\beta} + \xi_{\beta,a} - 2\Gamma^{\mu}_{a\beta}\xi_{\mu} = 0$$

$$a = \beta = \phi : \xi_{\phi,\phi} = -\xi_{\theta}\sin\theta\cos\theta \tag{1}$$

$$a = \beta = \theta : \xi_{\theta,\theta} = 0; \quad \therefore \xi_{\theta} = \mathbf{f}(\phi) \tag{2}$$

$$a = \theta, \beta = \phi : \xi_{\theta,\phi} + \xi_{\phi,\theta} = 2\cot\theta\xi_{\phi}. \tag{3}$$

Sabstitution of Equation (2) in Equation (1) gives $\xi_{\phi,\phi} = -\mathrm{f}(\phi)\sin\theta\cos\theta$ bich implies

$$\xi_{\phi} = -\mathrm{F}(\phi)\sin\theta\cos\theta + \mathrm{g}(\theta) \tag{4}$$

shere $\mathrm{F}(\phi) \equiv \int \mathrm{fd}\phi$. Next substitute Equations (4) and (2) in Equation (3):

$$\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{d}\phi} + \frac{\mathrm{dg}}{\mathrm{d}\theta} - \mathrm{F}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) = 2\cot\theta\ \mathrm{g} - 2\cos^2\theta\ \mathrm{F}$$

$$\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{d}\phi} + \mathrm{F}(\phi) = -\left(\frac{\mathrm{dg}}{\mathrm{d}\theta} - 2\cot\theta\ \mathrm{g}(\theta)\right)$$

$$^{(3)}\mathrm{R} = -\varepsilon\left[\tfrac{1}{\rho_1^2} + \tfrac{1}{\rho_2^2} + \tfrac{1}{\rho_3^2} - \left(\tfrac{1}{\rho_1} + \tfrac{1}{\rho_2} + \tfrac{1}{\rho_3}\right)^2\right]$$

$$= \varepsilon\left(\frac{2}{\rho_1\rho_2} + \frac{2}{\rho_2\rho_3} + \frac{2}{\rho_1\rho_3}\right) \tag{5}$$

Since the left side is a function only of ϕ and the right side only of θ, each side must be a constant:

$$df/d\phi + \int f d\phi = b$$

$$dg/d\theta - 2\cot\theta g = -b \tag{6}$$

Equation (6) has an integrating factor $\exp\left[-2\int\cot\theta d\theta\right] = \sin^{-2}\theta$, giving

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{g}{\sin^2\theta}\right) = \frac{-b}{\sin^2\theta}$$

$$g(\theta) = (b\cot\theta + c)\sin^2\theta \tag{7}$$

Equation (5) is solved by differentiation:

$$\frac{d^2 f}{d\phi^2} + f = 0$$

$$f = d\cos\phi + e\sin\phi$$

$$F = d\sin\phi - e\cos\phi$$

(The integration constant is included in $g(\theta)$.) Substituting this result in Equation (5)

$$-\mathrm{d}\sin\phi + \mathrm{e}\cos\phi + \mathrm{d}\sin\phi - \mathrm{e}\cos\phi = \mathrm{b}$$

shows that $b = 0$, and hence from Equations (2) and (7) that

$$\xi_\theta = \mathrm{d}\cos\phi + \mathrm{e}\sin\phi = \xi^\theta$$

$$\xi_\phi = c\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta(d\sin\phi - e\cos\phi) = \sin^2\theta\xi^\phi$$

Thus

$$\xi = (d\cos\phi + e\sin\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} + [c - \cot\theta(d\sin\phi - e\cos\phi)]\frac{\partial}{\partial\phi}$$

is the most general Killing vector. Note that it is a linear combination of the three Killing vectors

$$\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$-\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}$$

which are just the usual angular momentum operators L_z, L_x and L_y, the generators of the rotation group.
Didetion 10.2. It is straightforward to prove this statement in component diation. Alternately, "dot" $^{\rho}\boldsymbol{\xi}$ g with two arbitrary vector fields A B :

$$\begin{aligned} 0 &= A\cdot\mathscr{L}_\xi g\cdot B = \mathscr{L}_\xi(A\cdot B) - B\cdot\mathscr{L}_\xi A - A\cdot\mathscr{L}_\xi B \\ &= \nabla_\xi(A\cdot B) - B\cdot(\nabla_\xi A - \nabla_A\xi) - A\cdot(\nabla_\xi B - \nabla_B\xi) \\ &= B\cdot\nabla_A\xi + A\cdot\nabla_B\xi = 2A^a B^\beta\xi_{(\alpha;\beta)} \end{aligned}$$

wese A and B are arbitrary, $\xi_{(\alpha;\beta)}$ must vanish. To interpret this Sult geometrically recall that the Lie derivative of any geometricalantity, ϕ_A, is the functional change of that quantity, $\delta\phi_A \equiv \phi_A^{\mathrm{new}}\ (x^a)\,\boldsymbol{o}_{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{old}}\ (\mathrm{x}^\alpha)$ under a displacement of coordinates by $\boldsymbol{\xi}$. This is equivaat to the change in ϕ_A upon moving it in the manifold along ξ. For Lie derivative of g along ξ to vanish, therefore, requires that the -ometry to be unchanged as one moves in the ξ direction, i.e. ξ reprePats a direction of symmetry of spacetime.

Solution 10.3.

(a) We use the equivalence proven in Problem 10.2. If u and v are Elling vectors then $\mathcal{L}_u g = \mathcal{L}_v g = 0$ and, with the result of Problem 8.16,

$$\mathcal{L}_{[u,v]}g = (\mathcal{L}_u\mathcal{L}_v - \mathcal{L}_v\mathcal{L}_u)\,g = 0$$

Whus [u, v] is a Killing vector.
(b) If a and b are constants, then

$$(\mathrm{au}_\alpha + \mathrm{bv}_\alpha)_{;\beta} = \mathrm{au}_{\alpha;\beta} + \mathrm{bv}_{\alpha;\beta}$$

Thus if u and v satisfy Killing's equation, so does $au + bv$.
Solution 10.4. The three Killing vectors describing rotations are just the engular momentum operators, $J_z = x\partial_y - y\partial_x$, etc. (See Problem 10.1.) At a point (x_0, y_0, z_0)

$$\begin{aligned} J_z &= (-y_0, x_0, 0) \\ J_y &= (z_0, 0, -x_0) \\ J_x &= (0, -z_0, y_0)\,, \end{aligned}$$

so $\mathrm{J_y} = -(\mathrm{z_0/y_0})\,\mathrm{J_z} - (\mathrm{x_0/y_0})\,\mathrm{J_x}$ and the three vectors only span a 2 -dimensional surface at the point.
Suppose, however, that for some constants a and b

$$aJ_x + bJ_y + J_z = 0$$

were true at every point, then we would have

$$\mathrm{a}\,[\,\mathrm{J_x},\ \mathrm{J_y}] + \mathrm{b}\,[\,\mathrm{J_y},\ \mathrm{J_y}] + [\mathrm{J_z},\ \mathrm{J_y}] = 0$$

This requires $\mathrm{J}_z \propto \mathrm{J_x}$; a result which is obviously false. Thus, over the whole sphere, $\mathrm{J_x}, \mathrm{J_y}, \mathrm{J_z}$ span a 3-dimensional space. The explanation is that 2 -spheres are 2 -dimensional, but orientations of 2 -spheres are 3-dimensional (e.g. the 3 Euler angles).

Solution 10.5. The commutator must be a Killing field according to Problem 10.3. By hypothesis any Killing vector must be a sum (with constant coefficients) of $\xi_{(t)}$ and $\xi_{(\phi)}$:

$$\left[\xi_{(\phi)}, \xi_{(\mathrm{t})}\right] = \mathrm{a}\xi_{(\phi)} + \mathrm{b}\xi_{(\mathrm{t})}$$

At infinity $\boldsymbol{\xi}_{(\phi)} \to \partial/\partial\phi$ and $\boldsymbol{\xi}_{(\mathrm{t})} \to \partial/\partial\mathrm{t}$ so the commutator $\to 0$. This means that a and b must be zero, i.e. that the commutator vanishes everywhere. (B. Carter, [Commun. Math. Phys. 17, 233 (1970)] has proven that $\left[\xi_{(\phi)}, \xi_{(t)}\right] = 0$ under very general conditions even when there are other Killing vectors.)

Solution 10.6. For the commutation of second derivatives of any vector

$$\xi_{\mu;\nu\lambda} - \xi_{\mu;\lambda\nu} = \mathrm{R}_{\mu\sigma\lambda\nu}\xi^{\sigma}$$

$^{\tau}$ we use the Killing equation $\xi_{\mu;\nu} = -\xi_{\nu;\mu}$ and contract on μ and λ

$$\xi^{\nu;\lambda}_{;\lambda} + \mathrm{R}^{\nu}_{\sigma}\xi^{\sigma} = -\left(\xi^{\mu}_{;\mu}\right)^{;\nu}$$

Determ on the right vanishes since $\xi^{\mu}_{;\mu} = 0$ by the Killing equation, and we are left with the desired result. The variational principle is easy $. write down if we note that $\xi_{\mu;\nu}$ is antisymmetric, just like the electroSonetic field tensor $\mathrm{F}_{\mu\nu}$. We know that the Lagrangian $\frac{1}{4}\,\mathrm{F}_{\mu\nu}\mathrm{F}^{\mu\nu}$ jves a term $\mathrm{F}^{\mu\nu}{}_{;\nu}$ when we write $\mathrm{F}_{\mu\nu} = \mathrm{A}_{\nu;\mu} - \mathrm{A}_{\mu;\nu} = \mathrm{A}_{\nu,\mu} - \mathrm{A}_{\mu,\nu}$ and Ey. A_{μ}. Thus the Lagrangian density can be taken to be

$$\mathscr{L} = \xi_{\mu;\nu}\xi^{\mu;\nu} - \frac{1}{2}\mathrm{R}_{\mu\nu}\xi^{\mu}\xi^{\nu}$$

I. $\delta\int\mathscr{L}|g|^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}^4\mathrm{x} = 0$ will give the correct equation. This can be verified 7 finding the Euler-Lagrange equations for this Lagrangian.

Solution 10.7. For any vector ξ

$$\xi_{\sigma;\rho\mu} - \xi_{\sigma;\mu\rho} = \mathrm{R}^{\lambda}_{\sigma\rho\mu}\xi_{\lambda} \tag{1}$$

the definition of $\mathrm{R}_{a\beta\gamma\delta}$. Add to Equation (1) its two permutations and the cyclic identity for the Riemann tensor

$$\mathrm{R}^{\lambda}_{\sigma\rho\mu} + \mathrm{R}^{\lambda}_{\mu\sigma\rho} + \mathrm{R}^{\lambda}_{\rho\mu\sigma} = 0$$

to obtain the identity

$$0 = \xi_{\sigma;\rho\mu} - \xi_{\sigma;\mu\rho} + \xi_{\mu;\sigma\rho} - \xi_{\mu;\rho\sigma} + \xi_{\rho;\mu\sigma} - \xi_{\rho;\sigma\mu} \tag{2}$$

For a Killing vector, Equation (2) becomes

$$0 = \xi_{\sigma;\rho\mu} - \xi_{\sigma;\mu\rho} - \xi_{\mu;\rho\sigma} \tag{3}$$

and substituting Equation (3) into Equation (1), one obtains

$$\xi_{\mu;\rho\sigma} = \mathrm{R}^{\lambda}_{\sigma\rho\mu}\xi_{\lambda} \tag{4}$$

Solution 10.8. We first show that "stationarity" is equivalent to the existence of a time coordinate for which $\mathrm{g}_{\alpha\beta,\mathrm{t}} = 0$. Choose the time coordinate such that $\xi = \partial/\partial\mathrm{t}$, then (see Problems 10.2, 8.13) $\mathcal{L}_{\xi}g = 0$,

$$\mathrm{g}_{\alpha\beta,\gamma}\xi^{\gamma} + \mathrm{g}_{\alpha\gamma}\xi^{\gamma}{}_{,\beta} + \mathrm{g}_{\beta\gamma}\xi^{\gamma}{}_{,a} = 0.$$

Since $\xi^{\gamma} = (1,0,0,0)$ this proves that $g_{\alpha\beta,\mathrm{t}} = 0$.

Time reversibility (definition (i)) means $\mathrm{g}_{\alpha\beta}$ is independent of t and $g_{ti} = 0$. To show equivalence of the definitions it remains to show that $\mathrm{g}_{\mathrm{ti}} = 0$ is equivalent to the hypersurface orthogonality of $\xi = \partial/\partial\mathrm{t}$.

If $\mathrm{g}_{\mathrm{ti}} = 0$, then $\xi_a = \mathrm{g}_{a\beta}\xi^{\beta} = \mathrm{g}_{a\mathrm{t}} = 0$ unless $a = \mathrm{t}$. Hence ξ_{α} is proportional to $\mathrm{t}_{,a}$ i.e. ξ is orthogonal to the surfaces t = constant. If $\boldsymbol{\xi}$ is hypersurface orthogonal (see Problem 7.23),

$$\xi_{[\alpha;\beta}\xi_{y]} = 0$$

With Killing's equation $\xi_{(\alpha;\beta)} = 0$, this becomes

$$\xi_{a;\beta}\xi_{\gamma} + \xi_{\gamma;a}\xi_{\beta} + \xi_{\beta;\gamma}\xi_{\alpha} = 0$$

Dotting with ξ^{α} and using Killing's equation on the first and third terms gives

$$\frac{1}{2}\left(\xi_{\alpha;\beta} - \xi_{\beta;\alpha}\right)\xi^2 + \frac{1}{2}\xi^2_{,\alpha}\xi_{\beta} - \frac{1}{2}\xi^2_{,\beta}\xi_{\alpha} = 0$$

$$\xi^2 \equiv \xi\cdot\xi$$

that is

$$\left(\xi^{-2}\xi_{\beta}\right)_{;\alpha} - \left(\xi^{-2}\xi_{\alpha}\right)_{;\beta} = 0$$

Thus $\xi^{-2}\xi_\alpha$ is a gradient and

$$\xi_\alpha = \xi^2 \ \mathrm{h}_{,\alpha}$$

for some h . Since $\xi^2 = \mathrm{g_{tt}}$ and $\xi_\alpha = \mathrm{g}_{\alpha\mathrm{t}}$, we have $\mathrm{g}_{\alpha\mathrm{t}} = \mathrm{g_{tt}h}, \alpha$. Putting $\alpha = \mathrm{t}$ we see that $\mathrm{h}_{,\mathrm{t}} = 1$ or $\mathrm{h} = \mathrm{t} + \mathrm{f}\left(\mathrm{x}^{\mathrm{i}}\right)$. By choosing a new time coordinate $t' = t + f\left(x^i\right)$, we have

$$\mathrm{g_{it}}' = \mathrm{g_{tt}} \ \mathrm{h}_{,\mathrm{i}} = \mathrm{g_{tt}t}_{,\mathrm{i}} = 0$$
$$\xi^{\alpha'} = \frac{\partial \mathrm{x}'}{\partial \mathrm{x}'\beta}\xi^\beta = \frac{\partial \mathrm{x}'}{\partial \mathrm{t}} = (1,0,0,0)$$

$\mathbf{g}_a\beta$ is still independent of $\mathbf{t}'$.
Ountion 10.9. Choose a coordinate system in which the metric is $\eta_{\mu\nu}$ 11 of the Christoffel symbols vanish). Then Killing's equation for a Diling vector $\boldsymbol{\xi}$ becomes

$$2\xi_{(\mu;\nu)} = \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} = 0 \tag{1}$$

now enumerate and classify linearly independent solutions of quation (1):
(i) Translation Killing vectors:

$$\xi^\mu_{\mathrm{i}} = \mathrm{a}^\mu_{\mathrm{i}} \quad \mathrm{i} = 1 - 4 \tag{2}$$

where $\mathrm{a_i}$ are constant vectors.
(ii) Rotational Killing vectors:

$$\xi^0_{\mathrm{k}} = 0, \quad \xi^1_{\mathrm{k}} = \varepsilon^{1 \ \mathrm{km}}\mathrm{x_m} \quad \mathrm{k} = 1 - 3 \tag{3}$$

Check:

$$\begin{aligned}\xi_{\mathrm{k}}(\mu,\nu) = \xi_{\mathrm{k(i,j)}} &= \mathrm{x}_{\mathrm{m,(j}}\varepsilon_{\mathrm{i)km}} \\ &= \delta_{\mathrm{m(j}}\varepsilon_{\mathrm{i)km}} = -\varepsilon_{\mathrm{k(ij)}} = 0.\end{aligned}$$

(iii) Boost Killing vectors:

$$\xi^{\mathrm{k}}_\mu = \delta^{[0\mathrm{x}\mathrm{k}]}_\mu \quad \mathrm{k} = 1,3 \tag{4}$$

Check:

$$\xi^{\mathrm{k}}_{(\mu,\nu)} = \frac{1}{2}\left[\delta^{[0}_\mu\delta^{\mathrm{k}]}_\nu + \delta^{[0}_\nu\delta^{\mathrm{k}]}_\mu\right] = 0$$

There are ten Killing vectors in Equations (2)-(4), given in the coordinate system in which $\mathrm{g}_{\mu\nu} = (-1,1,1,1)$. In any other coordinate system one can find the components of the ξ^μ_i, for $i = 1 - 10$, by transforming them as vectors.
Solution 10.10. The change in $\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\xi}$ along the geodesic is given by

$$\nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}\cdot\xi) = (\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u})\cdot\xi + \mathbf{u}\cdot(\nabla_{\mathbf{u}}\xi)\,.$$

Now $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0$ since $\mathbf{u}$ is tangent to a geodesic, and $\mathbf{u}\cdot\nabla_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\xi} = 0$ since ξ is a Killing vector. In components,

$$\mathbf{u}\cdot\nabla_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{u}^\alpha\mathbf{u}^\beta\xi_{\alpha;\beta} = \mathbf{u}^\alpha\mathbf{u}^\beta\xi_{(\alpha;\beta)} = 0$$

Thus $\mathbf{u}\cdot\xi =$ constant along a geodesic.
Solution 10.11. The divergence of $\mathbf{J}$ is

$$\begin{aligned}\mathrm{J}^\mu_{;\mu} &= \left(\mathrm{T}^{\mu\nu}\xi_\nu\right)_{;\mu} \\ &= \mathrm{T}^{\mu\nu}_{;\mu}\xi_\nu + \mathrm{T}^{\mu\nu}\xi_{\nu;\mu} \\ &= 0 + \mathrm{T}^{\mu\nu}\xi_{(\nu;\mu)} = 0.\end{aligned}$$

When $\xi = \partial/\partial\mathrm{t}$, then $\mathrm{J}^\mu = \mathrm{T}^\mu_0 = -\mathrm{T}^{\mu 0}$ at infinity where $\mathrm{g}_{00} = -1$. Thus J is the negative of the energy flux vector for a stationary observes
Solution 10.12. From Problem 10.11, the integrand $\mathrm{J}^\alpha \equiv \mathrm{T}^\alpha_\beta\xi^\beta$ is a conserved quantity: $\mathrm{J}^\alpha{}_{;\alpha} = 0$. The result then follows from the identity $\mathrm{J}^a_{;\alpha} = \left(|\mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{J}^\alpha\right)_{,a}|\ \mathrm{g}|^{-\frac{1}{2}}$ and from Gauss's theorem:

$$\begin{aligned}0 = \int \mathrm{J}^a_{;a}|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}^4\mathrm{x} &= \int \left(|\mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{J}^a\right)_{,a}\ \mathrm{d}^4\mathrm{x} = \oint \mathrm{J}^a\ \mathrm{d}^3\Sigma_a \\ &= \int_{\mathrm{F}_2} \mathrm{J}^a\ \mathrm{d}^3\Sigma_a - \int_{\mathrm{F}_1} \mathrm{J}^a\ \mathrm{d}^3\Sigma_a\end{aligned}$$

Dide we have assumed that $J \to 0$ sufficiently rapidly at infinity that the Wetributions to the integral from the edges can be neglected. Thus the Degral is independent of the spacelike hypersurface F.

Antion 10.13. From Problem 10.11, we know that for each Killing vector $\mathrm{I}^{\mu} \equiv \mathrm{T}^{\mu\nu}\xi_{\nu}$ is a conserved vector, i.e.

$$\mathrm{J}^{\mu}_{;\mu} = |\mathrm{g}|^{-\frac{1}{2}} \left(|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{J}^{a} \right)_{,a} = 0. \tag{1}$$

Tom Problem 10.9, we know that in flat spacetime there are ten linearly Iependent Killing vectors $\xi^{\mu}_{(\mathrm{i})}, \mathrm{i} = 1 - 10$. Thus there are ten coninved vectors

$$\mathrm{J}^{\mu}_{(\mathrm{i})} \equiv \mathrm{T}^{\mu\nu}\xi_{(\mathrm{i})\nu} \tag{2}$$

[10] om Equations (1) and (2), one may construct ten globally conserved mantities
ince

$$\mathrm{Q}_{(\mathrm{i})} \equiv \int |\mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{J}^{0}_{(\mathrm{i})}\ \mathrm{d}^{3}\mathrm{x}, \quad \mathrm{i} = 1 - 10 \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ_{(i)}}{dt} &= \int \left(|g|^{\frac{1}{2}} J^{0}_{(i)} \right), 0 d^{3}x = - \int \left(|g|^{\frac{1}{2}} J^{k}_{(i)} \right), k d^{3}x \\ &= - \int |g|^{\frac{1}{2}} J^{k}_{(i)} d^{2}\Sigma_{k} \end{aligned}$$

This last expression represents the flux of the $J_{(i)}$ current through the 2 -dimensional) surface bounding the integration volume. If T falls off fast enough at large distances, and the integration volume is infinite, this flux term vanishes and $dQ_{(i)}/dt = 0$. [Alternative proof: apply Solution 10.12.]

The four Q's derived from translation Killing vectors correspond to conserved energy and momentum; the three derived from rotation Killing vectors correspond to conserved angular momenta. To see the meaning of the three derived from boost Killing vectors, write (e.g. in flat cartesian coordinates with $\xi_{\nu} = [\mathrm{x}, -\mathrm{t}, 0, 0]$)

$$\begin{aligned} Q &= \int T^{0\nu}\xi_{\nu} dx dy dz \\ &= \int x T^{00} dx dy dz - t \int T^{0x} dx dy dz \\ &= x_{(C.M.)} M_{(C.M.)} - t P_{x_{(C.M.)}} = M_{(C.M.)} \left(x_{(C.M.)} - v_{(C.M.)} t \right) \end{aligned}$$

which is a component of the conserved "origin of uniform motion" for the center of mass (C.M.) of the system. ($x_{(\mathrm{C.M.})}$ is defined to be $\int \mathrm{xT}^{00}\mathrm{dxdydz} / \int \mathrm{T}^{00}\mathrm{dxdydz}$.)

Solution 10.14. The components of $\mathbf{u}$ are

$$\mathbf{u}_{a} = \xi_{a} / \left(-\xi_{\gamma}\xi^{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(the minus sign is chosen to make the term in parentheses positive), so

$$\mathrm{a}_{a} = \mathrm{u}_{a;\beta^{\mathrm{u}}} = \left[\frac{\xi_{a;\beta}}{\left(-\xi_{\gamma}\xi^{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\xi_{a}\xi_{\gamma;\beta}\xi^{\gamma}}{\left(-\xi_{\tau}\xi^{\tau} \right)^{\frac{3}{2}}} \right] \frac{\xi^{\beta}}{\left(-\xi_{\mu}\xi^{\mu} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

The second term vanishes because $\xi_{\gamma;\beta'}\xi^{\gamma}\xi^{\beta} = \xi_{(\gamma;\beta)}\,\xi^{\gamma}\xi^{\beta} = 0$. Since $\xi_{a;\beta} = -\xi_{\beta;\alpha}$, the first term gives

$$\mathrm{a}_{a} = \frac{\xi_{\beta;\alpha}\xi^{\beta}}{+\xi_{\gamma}\xi^{\gamma}} = \frac{1}{2} \frac{\left(\xi_{\beta}\xi^{\beta} \right)_{;\alpha}}{\left(\xi_{\gamma}\xi^{\gamma} \right)} = \frac{1}{2} \left[\log \left(-\xi_{\beta}\xi^{\beta} \right) \right]_{,\alpha}$$

Solution 10.15. Consider a particle of rest mass μ and conserved energy $E = -p \cdot \xi$ where p is the 4 -momentum and ξ is the time Killing vector. Not all values of E/μ are possible for trajectories through a given point in spacetime. For example, particles at radial infinity must have $\mathrm{E}/\mu \geq 1$. To find the bound on E/μ for a general point, pick an orthonormal frame at the point. The 4 -velocity of a particle has components $\mathbf{u} = (\gamma, \gamma \underset{\sim}{v})$

With : v a 3 -vector and $\gamma = \left(1 - \mathrm{v}^{2} \right)^{-\frac{1}{2}}$; the time Killing vector has comDuents $\xi = \left(\xi_{0}, \underset{\sim}{\xi} \right)$, with $\underset{\sim}{\xi}$ a 3 -vector. The particle's ratio of energy direst mass is given by

$$\mathrm{E}/\mu = -\mathbf{u} \cdot \xi_{(\mathrm{t})} = \gamma \left(\xi_{0} - \underset{\sim}{\mathrm{v}} \cdot \underset{\sim}{\xi} \right) \tag{1}$$

Were the dot denotes the scalar product in the local Euclidean 3-space.
Aidently, a necessary (but not a sufficient) condition for an extremum Lance a bound) on E/μ is

$$\underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{\xi} = \pm \mathrm{v}\xi. \tag{2}$$

Size $v \equiv |v|, \underset{\sim}{\xi} \equiv |\underset{\sim}{\xi}|$. Now we distinguish two cases: If $\boldsymbol{\xi}$ is spacelike U.S. in the ergosphere of a Kerr blackhole), then we have $\xi_0 < \xi$; and spection of Equation (1) shows that all values of E/μ are possible, Sat is $-\infty < \mathrm{E}/\mu < +\infty$. This is the answer for regions in which ξ is spacelike. The infinite limits correspond to $v \to 1$ with the two signs of Iquation (2). If, instead, $\boldsymbol{\xi}$ is timelike (e.g. at radial infinity), so that $\xi_0 > \xi$, then the right-hand side of Equation (1) is always positive, and there is a nontrivial lower bound on E/μ. Writing Equation (1) and using Equation (2) with the upper sign, we obtain

$$\left(\xi^2 + \mathrm{E}^2/\mu^2\right) \mathrm{v}^2 - 2\xi\xi_0 \mathrm{v} + \left(\xi_0^2 - \mathrm{E}^2/\mu^2\right) = 0$$

The extremum in E/μ is obtained by setting the discriminant of this equation, a quadratic in v, equal to zero; this gives

$$0 = (\mathrm{E}/\mu)^2 \left[(\mathrm{E}/\mu)^2 - \xi^2 + \xi_0^2\right]$$

The root $\mathrm{E}/\mu = 0$ is spurious, and the lower bound on E/μ is

$$(\mathbf{E}/\mu)^2 = \xi_0^2 - \xi^2 = -\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}$$

We see that the allowed range of E/μ at a point depends only on the norm of the time Killing vector at that point:

$$(-\xi \cdot \xi)^{\frac{1}{2}} \leq E/\mu < +\infty$$

for ξ timelike.
Solution 10.16. For a test electromagnetic field, all we have to check is that Maxwell's equations are satisfied in the given background metric. If A^μ, the vector potential, is a Killing vector, then

$$\mathrm{A}^\mu_{;\mu} = 0$$

i.e. the Lorentz condition is satisfied, and the wave equation

$$\mathrm{A}^{\mu;\nu}{}_{\nu} - \mathrm{R}^\mu_\nu \mathrm{A}^\nu = 0$$

is satisfied by Problem 10.6 and the fact that $\mathrm{R}^\mu_\nu = 0$ in vacuum.
If in Minkowski space in spherical polar coordinates $\mathrm{A} \propto \partial/\partial\phi$, i.e. only A^ϕ = constant is nonzero, then $\mathrm{A}^{\hat{\phi}} \propto \mathrm{r}\sin\theta$, or in conventional 3 -dimensional notation,

$$\underset{\sim}{A} = \mathrm{ar}\sin\theta \underset{\sim}{e}\hat{\phi} \quad (a = \text{ constant })$$

Hence $\underset{\sim}{E} = 0$ and $\underset{\sim}{B} = \nabla \times \underset{\sim}{A} = 2a\left(\cos\theta \underset{\sim\uparrow}{e} - \sin\theta e\hat{\theta}\right) = 2a\underset{\sim}{e}\hat{\gamma}$. Thus there is a uniform magnetic field parallel to the z axis. (This problem is due to Robert M. Wald.)

13.7.11 11 Angular Momentum

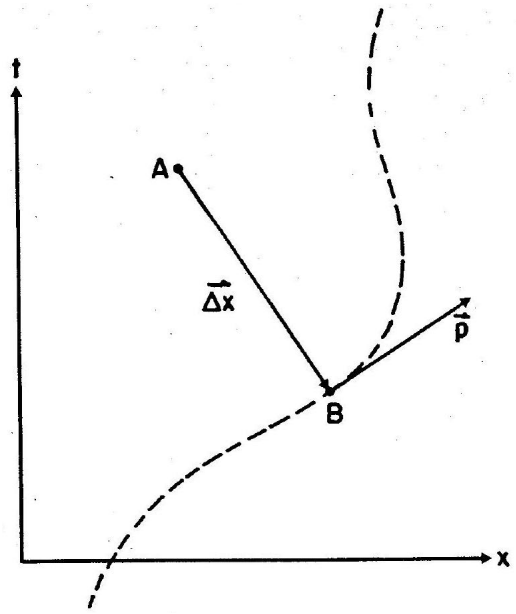
This chapter contains problems dealing with rotation, angular momensum, spin, etc. in general relativity. Definitions are developed in the problems.

21-0-0 0 — 0 — 0 — 0 — 0 ——

$\partial/\partial\phi$ in Minkowski space?
Froblem 11.1. In special elativity, when a particle is at an event B and has 4 momentum p, its angular domentum about event A 15

$$J = \Delta x \otimes p - p \otimes \Delta x$$

where Δx is the 4 -vector from event A to event B
(i) Show that for a freely moving (i.e. unaccelerated) particle J is con-served-i.e. $\mathrm{dJ}/\mathrm{d}r = 0$.
(ii) Suppose that several particles



collide at an event B, thereby producing several other particles. Show that the sum of the angular momenta of the particles about an event A is the same after the collision as before:

$$\sum_{(\mathrm{k})} J_{(\mathrm{k})}\Big|_{\text{after}} = \sum_{(\mathrm{k})} J_{(\mathrm{k})}\Big|_{\text{before}} .$$

Problem 11.2. Show

(a) that the total angular momentum of an isolated system in flat space

$$\mathrm{J}^{\alpha\beta} \equiv \int \mathrm{d}^3\mathrm{x}\left(\mathrm{x}^{\alpha}\mathrm{T}^{\beta 0} - \mathrm{x}^{\beta}\mathrm{T}^{\alpha 0}\right)$$

is a conserved tensor (when $\mathrm{T}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$), but
(b) that it is not invariant under the coordinate translation $\mathrm{x}^a \rightarrow \mathrm{x}^a + \mathrm{a}^a$ Show also that
(c) the spin 4 -vector defined by

$$\mathrm{s}_{\alpha} \equiv -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\mathrm{J}^{\beta\gamma}\mathbf{u}^{\delta}$$

is both conserved and
(d) invariant under translations. Here u^{α} is the "center of mass 4-velocity" $\mathrm{u}^{\alpha} \equiv \mathrm{P}^{\alpha}/\left(-\mathrm{P}^{\beta}\mathrm{P}_{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}$ and P^{α} is the total momentum $\mathrm{P}^{\alpha} \equiv \int \mathrm{d}^3 \times \mathrm{T}^{a0}$.

Problem 11.3. Show that a system's intrinsic spin 4-vector S_{α} is orthogonal to its 4 -velocity u^{α}.

Problem 11.4. Show that a gyroscope with no applied torques FermiWalker transports its spin vector.

Problem 11.5.

(a) If angular momentum is computed about the center of mass of a system show that $J^{\alpha\beta}u_{\beta} = 0$.
(b) In this case show that the angular momentum ("intrinsic angular momentum") can be found from the spin vector as

$$\mathbf{J}^{a\beta}_{(\text{C.M. })} \equiv \mathrm{S}^{a\beta} = -\varepsilon^{a\beta\gamma\delta}\,\mathrm{S}_{\gamma}\mathrm{u}_{\delta}.$$

Problem 11.6. Two bodies A and B have momenta $\mathrm{P_A}$ and $\mathrm{P_B}$ and spin S_A and S_B; their centers of mass are on a collision course. After
colliding they stick together to form a composite body C (spin S_C). Calculate S_C in terms of P_A, P_B, S_A and S_B.

Problem 11.7. Thomas Precession: Consider a ("classical") spinning Wectron which Fermi-Walker transports its spin angular momentum, S , as imoves in a circular orbit around an atomic nucleus. As seen in the thoratory frame, the electron moves in a circular orbit of radius r in the it. plane with constant angular velocity, ω. Calculate S(t), the spin as function of laboratory time.

Problem 11.8. A nonspherical spinning body in an inhomogeneous gravitadonal field experiences a torque which causes its intrinsic spin 4 -vector 5 to change with time. If u is the 4 -velocity of the center of mass of object, freely moving along a geodesic, show that

$$\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{d}\tau} = \varepsilon^{\kappa\beta a\mu'} \mathrm{u}_\mu \mathrm{u}^\sigma \mathrm{u}^\lambda \mathrm{t}_{\beta\eta} \mathrm{R}^\eta_{\sigma\alpha\lambda}.$$

Here ${}^{\mathrm{t}}\beta\eta$ is the "reduced quadrupole moment tensor" $\mathrm{t}^{\mathrm{ij}} = \int \rho \left(\mathrm{x}^{\mathrm{i}}\mathrm{x}^{\mathrm{j}} - \frac{1}{3}\mathrm{r}^2\delta^{\mathrm{ij}}\right) \mathrm{d}^3\mathrm{x}$ in the rest frame of the center of mass, $\mathrm{t}^\alpha{}_{\beta\mathrm{u}_a} = 0$ and the Riemann tensor is generated externally to the body in question and is assumed to be approximately constant over the body.

Problem 11.9. Calculate the period of precession of the Earth's axis due to the coupling of tidal forces from the sun and moon with the quadrupole moment of the (slightly nonspherical) Earth.

Problem 11.10. Consider a family of stationary observers in a stationary spacetime, i.e. their 4 -velocity is proportional to the time Killing vector ξ. Each observer arranges his spatial bas is vectors so that they connect to the same neighboring observers for all time t, where $\boldsymbol{\xi} = \frac{\partial}{\partial t}$.

(1) Show that $\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}} \mathrm{e}_{\hat{\alpha}} = 0$, where e_α is a basis vector of the stationary observer.

(2) Show that the rate of change of the components of any tensor quantity Q as measured by the stationary observer in units of t, is

$\frac{\mathrm{dQ}^{\hat{\alpha}\cdots\hat{\beta}}}{\mathrm{dt}} = (\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{Q})^{\hat{\alpha}\cdots\hat{\beta}}$. What is $\frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dt}}\hat{a}\cdots\hat{\beta}$.

(3) The stationary observer carries a gyroscope with him applying no torques to it. Show that the gyroscope's spin vector precesses (Lens Thirring effect) with an angular velocity relative to the stationary observer, as measured in units of proper time,

$$\omega^\alpha = \frac{\varepsilon^{\alpha\nu\sigma\lambda}\xi_\nu\xi_{\sigma;\lambda}}{2\xi^\gamma\xi_y}$$

(4) Show that $\omega = 0$ if the spacetime is static, and not merely stationary.

Problem 11.11. A gyroscope is placed in a circular orbit about the Earth and no torques are applied to it. What is the angular velocity of precession for its spin vector relative to a reference frame fixed with respect to the distant stars? ("geodetic precession" and "Lens-Thirring effect".)

11: Solutions

ation 11.1.

(i)

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{J}/\mathrm{d}\tau &= \frac{\mathrm{d}(\Delta\mathbf{x})}{\mathrm{d}\tau} \otimes \mathbf{p} + \Delta\mathbf{x} \otimes \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}\tau} - \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}\tau} \otimes \Delta\mathbf{x} - \mathbf{p} \otimes \frac{\mathrm{d}(\Delta\mathbf{x})}{\mathrm{d}\tau} \\
&= \mathbf{u} \otimes \mathbf{p} - \mathbf{p} \otimes \mathbf{u} \\
&= \frac{1}{\mathrm{m}}\mathbf{p} \otimes \mathbf{p} - \mathbf{p} \otimes \frac{1}{\mathrm{m}}\mathbf{p} = 0
\end{aligned}$$

(ii) Consider times immediately before and immediately after the collision. Since all particles are at the same point at the collision,

$$\Delta\mathbf{x}_{(\mathrm{k})|_{\mathrm{before}}} = \Delta\mathbf{x}_{(\mathrm{k})|_{\mathrm{after}}} = \Delta\mathbf{x}$$

(where Δx is the displacement to the point) and thus

$$\begin{aligned}
\sum_{(k)} J_{(k)}\Big|_{\mathrm{after}} &= \Delta x \otimes \sum_{(k)} p_{(k)}\Big|_{\mathrm{after}} - \left(\sum_{(k)} p_{(k)}\Big|_{\mathrm{after}}\right) \otimes \Delta x \\
&= \Delta x \otimes \sum_{(k)} p_{(k)}\Big|_{\mathrm{before}} - \left(\sum_{(k)} p_{(k)}\Big|_{\mathrm{before}}\right) \otimes \Delta x \\
&= \sum_{(k)} J_{(k)}\Big|_{\mathrm{before}}
\end{aligned}$$

since total momentum $\sum_{(k)} p_{(k)}$ is conserved.

Solution 11.2.

(a) For the "angular momentum density" $\mathrm{J}^{\alpha\beta y}$ defined by

$$\mathrm{J}^{\alpha\beta\gamma} = .2\mathrm{x}^{[a}\mathrm{T}^{\beta]\gamma} = \mathrm{x}^\alpha\mathrm{T}^{\beta\gamma} - \mathrm{x}^\beta\mathrm{T}^{\alpha\gamma}$$

we have

$$\mathrm{J}^{a\beta\gamma}{}_{,\gamma} = \delta^a{}_\gamma\mathrm{T}^{\beta\gamma} + \mathrm{x}^\alpha\mathrm{T}^{\beta\gamma}{}_{,\gamma} - \delta^\beta{}_\gamma\mathrm{T}^{\alpha\gamma} - \mathrm{x}^\beta\mathrm{T}^{\alpha\gamma}{}_{,\gamma} = \mathrm{T}^{\beta a} - \mathrm{T}^{\alpha\beta} = 0.$$

Thus $J^{\alpha\beta} \equiv \int J^{a\beta\gamma}\, d^3\Sigma\gamma$ is a conserved quantity, by Gauss' theorem.

(b) $J^{\alpha\beta}\left(x^\sigma + a^\sigma\right) = \int \left(a^\alpha T^{\beta\gamma} - a^\beta T^{\alpha\gamma}\right) d^3\Sigma_\gamma + J^{\alpha\beta}\left(x^\sigma\right)$.

Thus $J^{a\beta}$ is not invariant under coordinate translations (different angular momentum about different points).

(c) Consider the time derivative of the spin:

$$\frac{dS_\alpha}{dt} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\left(\frac{dJ^{\beta\gamma}}{dt}u^\delta + J^{\beta\gamma}\frac{du^\delta}{dt}\right).$$

The first term on the right vanishes from part (a). The second term vanishz because the system has no forces acting on it ($du^\delta/dt = 0$). Thus $dSS^a/dt = 0$.

(d) From (b),

$$J^{\alpha\beta}\left(x^\sigma + a^\sigma\right) = a^\alpha p^\beta - a^\beta p^\alpha + J^{\alpha\beta}\left(x^\sigma\right)$$

and thus

$$S_\alpha\left(x^\sigma + a^\sigma\right) = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\left(a^\alpha P^\beta - a^\beta P^\alpha\right)P^\delta/|P| + S_\alpha\left(x^\sigma\right)$$

The first term on the right vanishes (ε is totally antisymmetric and P^μ occurs quadratically) so $S_a\left(x^\sigma + a^\sigma\right) = S_\alpha\left(x^\sigma\right)$.

Solution 11.3. From the definition of S_a,

$$u^\alpha S_\alpha = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}J^{\beta\gamma}u^\delta u^\alpha = 0$$

by antisymmetry of ε and symmetry of $u^\delta u^a$.

Solution 11.4. Consider an observer in the local inertial frame comoving with the center of mass of the gyroscope. Because there are no torques,

sees no precession of the spin axis, so $dS/dt = 0$. But in this frame 4 -velocity of the gyroscope is $\mathbf{u} = (1, 0)$, so we can write the condiof zero torque as

$$\nabla_{\mathbf{u}} S = g\mathbf{u}$$

Where g is some constant of proportionality. We find g from the fact Ent $\mathbf{S}\cdot\mathbf{u} = 0$:

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{S}\cdot\mathbf{u}) &= (\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{S})\cdot\mathbf{u} + \mathbf{S}\cdot(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}) \\ &= \mathbf{g}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{S}\cdot\mathbf{a} \\ &= -\mathbf{g} + \mathbf{S}\cdot\mathbf{a} \end{aligned}$$

dus

$$\nabla_{\mathbf{u}} S = (S\cdot a)\mathbf{u}$$

Wich is the equation for Fermi-Walker transport

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{S} = (\mathbf{S}\cdot\mathbf{a})\mathbf{u} - (\mathbf{S}\cdot\mathbf{u})\mathbf{a}$$

With $S\cdot u = 0$.

Solution 11.5.

(a) About the center of mass in the center-of-momentum frame: $\int x^i\, T^{00}\, d^3x = 0$ (center of mass) and $\int T^{i0}\, d^3x = 0$ (center of momentum).

Thus we have

$$J^{i0} = \int d^3x\left(x^i T^{00} - tT^{i0}\right) = 0$$

or, in frame independent notation $J^{\alpha\beta}u_\beta = 0$.

(b) From the definition of S_δ :

$$-\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}S_\gamma u_\delta = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\gamma\mu\nu\sigma}J^{\mu\nu}u^\sigma u_\delta.$$

Now perform the summation over γ [see Problems 3.27, 3.28]:

$$-\frac{1}{2}\delta^{\alpha\beta\delta}_{\mu\nu\sigma}J^{\mu\nu}u^\sigma u_\delta = -J^{\alpha\beta}u^\delta u_\delta = J^{\alpha\beta} \equiv S^{\alpha\beta}.$$

[Only the $J^{a\beta}$ terms are kept in the sum; by part (a) we cannot have a δ index on J due to the presence of u_δ.]

Solution 11.6. First we calculate the total angular momentum. We work in the center-of-momentum frame and take as our origin 0 the event at which the center of mass of A and that of B would collide. About this origin both systems A and B have only intrinsic angular momentum (see Problem 11.5), so

$$\underset{\mathbf{A+B}}{J^{a\beta}}(\mathbf{0}) = \underset{\mathbf{A}}{S^{a\beta}} + \underset{\mathbf{B}}{S^{\alpha\beta}} = -\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\left(\underset{\mathbf{A}}{S}\underset{\mathbf{A}}{u}\underset{\mathbf{A}_\nu}{} + \underset{\mathbf{B}^\mu}{S_{\mathbf{B}}}\underset{\mathbf{D}}{u}\right)$$

and by conservation of angular momentum this is equal to $\int_C^{a\beta}(0)$. We can now use this result in the definition of the spin vector to find

$$\begin{aligned}\underset{\mathrm{C}\,\sigma}{\mathrm{S}} &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{\sigma\alpha\beta\lambda}\mathrm{J}_{\mathrm{C}}^{\alpha\beta}\mathrm{u}_{\mathrm{C}}^{\lambda} \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\sigma\alpha\beta\lambda}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu_{\mathrm{A}}}\left.\mathrm{S}_\mu\mathrm{u}_\nu + \mathrm{S}_{\mathrm{B}}\mathrm{u}_{\mathrm{B}}\right)\mathrm{u}_{\mathrm{C}}^{\lambda}.\end{aligned}$$

According to Problem 3.28 (see also Problem 3.27)

$$\varepsilon_{\sigma\alpha\beta\lambda}\varepsilon^{a\beta\mu\nu} = -2\delta_{\sigma\lambda}^{\mu\nu}$$

so that

$$\begin{aligned}\underset{\mathbf{C}}{\mathbf{S}_\sigma} &= -\delta_{\sigma\lambda}^{\mu\nu}\left.\underset{\mathbf{A}}{\mathbf{S}}\underset{\mathbf{A}}{\mathbf{u}}\underset{\mathbf{A}_\nu}{} + \underset{\mathbf{B}}{\mathbf{S}_\mu}\underset{\mu_{\mathbf{B}}}{\mathbf{u}_\nu}\right)\mathbf{u}_{\mathbf{C}}^{\lambda} \\ &= -\underset{\mathbf{A}}{\mathbf{S}_\sigma}\overset{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})}{} - \underset{\mathbf{AC}}{\mathbf{S}}\underset{\mathbf{BC}}{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})} + \underset{\mathbf{A}_\sigma}{\mathbf{u}}(\mathbf{S}\cdot\mathbf{u}) + \underset{\mathbf{A}_\sigma}{\mathbf{u}}((\underset{\mathbf{BC}}{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{u})\end{aligned}$$

We can now substitute $(P + \underset{A}{P})/|P + P|$ for u to complete the solution.

Solution 11.7. The basic equation (see Problem 11.4) is

$$\mathrm{dS}/\mathbf{d}\tau = \mathbf{u}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{S}).$$

In the lab frame, the world line of the particle is

$$\begin{aligned}x &= r\cos\omega t \\ y &= r\sin\omega t\end{aligned}$$

Were ω and r are constants) and hence

$$\mathbf{u^0} = \gamma, \quad \mathbf{u^x} = \gamma\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = -\omega\mathbf{r}\gamma\sin\omega\mathrm{t}, \quad \mathbf{u^y} = \gamma\omega\mathrm{r}\cos\omega\mathrm{t}, \quad \mathbf{u}^z = 0$$

gre $\gamma \equiv \left(1 - \mathrm{r}^2\omega^2\right)^{-\frac{1}{2}}$. Now $\mathrm{a} = \mathrm{du}/\mathrm{d}\tau$ so

$$\mathbf{a^0} = 0(\gamma = \text{ const }), \quad \mathbf{a^x} = \gamma\frac{\mathbf{du^x}}{\mathrm{dt}}, \quad \mathbf{a^y} = -\gamma^2\omega^2\mathbf{r}\sin\omega t, \quad \mathbf{a}^z = 0$$

hence

$$\mathrm{S}\cdot\mathrm{a} = \mathrm{S^x a^x} + \mathrm{S^y a^y} = -\omega^2\mathrm{r}\gamma^2\cos\omega\mathrm{t}\ \mathrm{S^x} - \omega^2\mathrm{r}\gamma^2\sin\omega\mathrm{t}\ \mathrm{S^y}.$$

have therefore

$$\frac{\mathrm{dS}^0}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\frac{\mathrm{dS}^0}{\mathrm{dt}} = \mathbf{u}^0(\mathbf{a}\cdot\mathbf{S}) = \gamma(\mathbf{a}\cdot\mathbf{S}) \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{dS^X}}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\frac{\mathrm{dS^x}}{\mathrm{dt}} = \mathbf{u^x}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{S}) = -\omega\mathbf{r}\gamma\sin\omega t(\mathbf{a}\cdot\mathbf{S}) \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{dS^y}}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\frac{\mathrm{dS^y}}{\mathrm{dt}} = \mathbf{u^y}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{S}) = \omega\mathrm{r}\gamma\cos\omega\mathrm{t}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{S}) \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{4}$$

Introduce radial and tangential components:

$$\begin{aligned}S^x &= S^r\cos\omega t - S^\theta\sin\omega t \\ S^y &= S^r\sin\omega t + S^\theta\cos\omega t\end{aligned}$$

Equations (2) and (3) imply:

$$dS^r/dt = \omega S^\theta \tag{5}$$
$$dS^\theta/dt = -\omega\gamma^2 S^r. \tag{6}$$

Equations (5) and (6) imply:

$$\mathrm{d}^2\ \mathrm{S}^\mathrm{r}/\mathrm{dt}^2 = -\omega^2\gamma^2\ \mathrm{S}^\mathrm{r} \Longrightarrow\ \mathrm{S}^\mathrm{r} = \mathrm{A}\cos(\omega\gamma\mathrm{t}+\alpha), \mathrm{A}, a\ \text{const.} \tag{7}$$

and from Equation (5)

$$\mathrm{S}^\theta = -\gamma\mathrm{A}\sin(\omega\gamma\mathrm{t}+\alpha). \tag{8}$$

From Equations (4), (7), (8) we obtain

$$\mathrm{S}^\mathrm{x} = \mathrm{A}[\cos\omega\mathrm{t}\cos(\omega\gamma\mathrm{t}+\alpha) + \gamma\sin\omega\mathrm{t}\sin(\omega\gamma\mathrm{t}+\alpha)] \tag{9a}$$
$$\mathrm{S}^\mathrm{y} = \mathrm{A}[\sin\omega\mathrm{t}\cos(\omega\gamma\mathrm{t}+\alpha) - \gamma\cos\omega\mathrm{t}\sin(\omega\gamma\mathrm{t}+\alpha)] \tag{9b}$$
$$\mathrm{S}^z = \ \text{const.} \tag{9c}$$

Consider initial conditions $S^x = \hbar(2)^{-\frac{1}{2}}, S^y = 0, S^z = \frac{1}{2}\hbar$. (Although we are not treating the electron spin quantum mechanically, we want $\mathrm{S}^2 = 3\ \mathrm{h}^2/4$.) These conditions imply $a = 0,\ \mathrm{A} = \hbar(2)^{-\frac{1}{2}}$; and Equations (9) can be written as

$$S^x + iS^y = 2^{-\frac{1}{2}}\hbar\left[e^{-i(\gamma-1)\omega t} + i(1-\gamma)\sin(\omega\gamma t)e^{i\omega t}\right] \tag{10}$$

The first term on the right hand side of Equation (10) and Equation (9c) indicate a precession around the z-axis with angular velocity

$$\omega_{\text{Thomas}}\ = (\gamma-1)\omega \approx \frac{1}{2}\mathrm{v}^2\omega \tag{11}$$

while the second term in Equation (10) is small $\left(1-\gamma \approx -\frac{1}{2}v^2\right)$ for an electron in an atom.

Solution 11.8. Do the computation in the local comoving Lorentz frame of the center of mass of the body. Treating the center of mass as the reference point in the equation of geodesic deviation, the relative accelera tion of a mass element at position $x^{\hat{j}}$ is

$$\frac{d^2x^{\hat{j}}}{dt^2} = -R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}}x^{\hat{k}}. \tag{1}$$

The i^{th} component of the torque per unit volume is then $-\varepsilon_{\mathrm{iij}}\ x^{\hat{1}}\rho R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}}x^{\hat{k}}$ where ρ is the mass density at $x^{\hat{j}}$. The total torque, which is just the time derivative of the intrinsic angular momentum, is

$$\frac{dS_{\hat{i}}}{dt} = -\varepsilon_{\hat{1}\tilde{\mathrm{j}}}R^{\hat{j}}{}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}}\int \rho x^{\hat{1}}x^{\hat{k}}d^3x \tag{2}$$

Que approximate $\mathrm{R}^{\hat{j}}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}}$ as constant over the body. Because of the Qunetry properties of $\underset{\sim}{\varepsilon_{\hat{i}\hat{i}\hat{j}}}R^{\hat{j}}{}_{\hat{j}\hat{k}\hat{0}}$, Equation (2) is equivalent to

$$\frac{dS_{\hat{i}}}{dt} = -\varepsilon_{\hat{i}\hat{j}}t_{\hat{k}}R_{\hat{j}\hat{0}\hat{k}\hat{0}} \tag{3}$$
$$t_{\hat{1}\hat{k}} \equiv \int \rho\left(x^{\hat{1}}x^{\hat{k}} - \frac{1}{3}r^2\delta^{\hat{k}}\right)d^3x$$

(one now defines the quadrupole tensor, $\mathrm{t}^{a\beta}$ to be such that $\mathrm{t}^{a\beta}\mathrm{u}_\beta = 0$ Se. to have only spatial components in a comoving local frame, then the Evariant tensor expression of Equation (3) is

$$\frac{\mathrm{DS}^\kappa}{\mathrm{d}\tau} = \varepsilon^{\kappa\beta a\mu_\mathrm{u}}\mathrm{u}^\sigma\mathrm{u}^\lambda\mathrm{t}_{\beta\eta}\mathrm{R}^\eta_{\sigma\alpha\lambda} \tag{4}$$

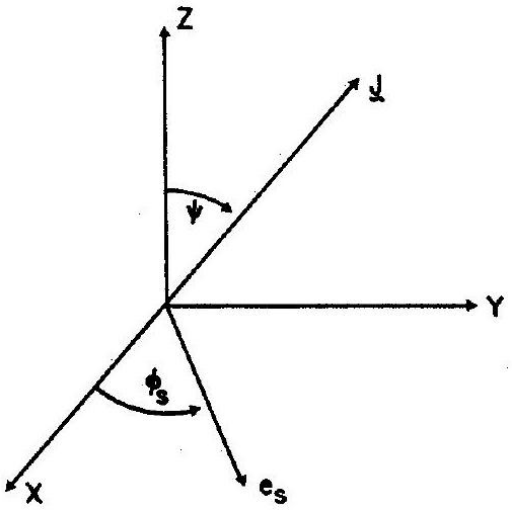
Sote that either in the case of a spherical body, or a body small enough so that Riemann $\times$(size of body)$^2 \approx$ 0, Equation (4) reduces to $\mathrm{DS}^\mathrm{K}/\mathrm{d}r = 0$. (Cf. Problem 11.4 with a = 0.)

Solution 11.9. We shall use two coordinate systems: the XYZ coordimates are the spatial coordinates of a local Lorentz frame with spatial origin at the center of mass of the Earth. The ecliptic plane is the XY plane, and we shall assume that the Sun and the Moon move in circular orbits in this plane as seen from the Earth. The xyz coordinates are The spatial coordinates of a similar Lorentz frame, but with the z-axis parallel to the

Earth's angular momentum J . Choose the x -axis parallel to the X -axis. The relation between basis vectors for the two coordinate systems is

$$\begin{aligned} \underset{\sim x}{e} &= \underset{\sim x}{e} \\ \underset{y_y}{e} &= \cos\psi \underset{\sim Y}{e} - \sin\psi \underset{e_Z}{e} \\ \underset{\sim Z}{e} &= \sin\psi \underset{\sim Y}{e} + \cos\psi \underset{\sim Z}{e} \end{aligned} \tag{1}$$

sere the torque is



$$N_i = -\varepsilon_{ijk} t_{jm} R_{k0m0}$$

We the "reduced quadrupole moment tensor" is

$$\mathrm{t_{jm}} = \int \rho \left(\mathrm{x^j x^m} - \frac{1}{3} \mathrm{r^2 \delta^{jm}} \right) \mathrm{d^3 x}$$

The the Earth to be spheroidal, with moment of inertia C about the ation axis and A about an equatorial axis. Then in xyz coordinates

$$C = \int \rho \left(x^2 + y^2 \right) d^3 x$$

$$A = \int \rho \left(x^2 + z^2 \right) d^3 x = \int \rho \left(y^2 + z^2 \right) d^3 x$$

Here $\psi \approx 23\frac{1}{2}^0$ is the angle between J and the Z-axis, which remains constant if we ignore the small nutation. As time goes on, J precesses about the Z-axis with a period T which we wish to find.

Let $\underset{\sim s}{e}$ be a unit vector pointing to the Sun. If the sun has polar coordinates ($\mathrm{r_s}, \theta, \phi$) with respect to the xyz coordinates and ($\mathrm{r_s}, \frac{\pi}{2}, \phi$) with respect to the XYZ coordinates, then

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \underset{e_Z}{\mathrm{e}} \cdot \underset{\mathrm{e}}{\mathrm{s}} \\ &= \left(\sin\psi \underset{\sim Y}{\mathrm{e}} + \cos\psi \underset{e_Z}{\mathrm{e}} \right) \cdot \left(\cos\phi_{\mathrm{S}} \underset{e_X}{\mathrm{e}} + \sin\phi_{\mathrm{S}} \underset{e_Y}{\mathrm{e}} \right) \\ &= \sin\psi \sin\phi_{\mathrm{S}} \end{aligned}$$

and similarly,

$$\sin\theta \sin\phi = \underset{e_y}{\mathrm{e}} \cdot \underset{e_s}{\mathrm{s}} = \cos\psi \sin\phi_{\mathrm{s}}$$

$$\sin\theta \cos\phi = \underset{e_x}{\mathrm{e}} \cdot \underset{\mathrm{e}}{\mathrm{s}} = \cos\phi_{\mathrm{s}}$$

$$\mathrm{t}_{zz} = -\frac{2}{3}(\mathrm{C} - \mathrm{A})$$

$$\mathrm{t_{xx}} = \mathrm{t_{yy}} = \frac{1}{2}(\mathrm{C} - \mathrm{A})$$

so that

$$N_x = -(C-A)R_{z0y0}$$
$$N_y = (C-A)R_{z0x0}$$
$$N_z = 0.$$

In the weak-field, slow-motion limit,

$$\mathrm{R}_{z0\mathrm{i}0} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial \mathrm{x}^{\mathrm{i}}}$$

From Problem 11.8, the equation of motion of the spin vector $\underset{\sim}{J}$ of the Earth in an external gravitational field is

The nonzero components of t_{jm} are
that

Where Φ is the Newtonian gravitational potential:

$$\Phi = \Phi_{\mathrm{SUN}} + \Phi_{\mathrm{MOON}}$$

Since

$$\Phi_{\mathrm{SUN}}(\mathrm{x},\mathrm{y},z) = \frac{\mathrm{M_s}}{\left[(\mathrm{x}-\mathrm{x_s})^2 + (\mathrm{y}-\mathrm{y_s})^2 + (z-z_{\mathrm{s}})^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

we find

$$\left.\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x}\right|_0 = -\frac{3M_s \sin\theta\cos\theta\cos\phi}{r_s^3}$$
$$\left.\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y}\right|_0 = -\frac{3M_s \sin\theta\cos\theta\sin\phi}{r_s^3}$$

Thus $\underset{\sim \mathrm{SUN}}{N}$ has (x,y,z) components

$$\overset{N}{SUN} = 3\mathrm{a}(\mathrm{C}-\mathrm{A})\sin\theta\cos\theta(\sin\phi, -\cos\phi, 0)$$
$$= 3\mathrm{a}(\mathrm{C}-\mathrm{A})\sin\psi\sin\phi_{\mathrm{s}}\,(\cos\psi\sin\phi_{\mathrm{s}}, -\cos\phi_{\mathrm{s}}, 0)$$

where $\mathrm{a} \equiv \mathrm{M_s}/{\mathrm{r_s}}^3$. Since the Sun's angular velocity about the Earth is much greater than the precession angular velocity we wish to find, we can average $\underset{\sim \mathrm{SUN}}{N}$ over the Sun's orbit. The term $\sin^2\phi_S$ gives $\frac{1}{2}$, while $\sin\phi_{\mathrm{s}}\cos\phi_{\mathrm{s}}$ averages to zero. Thus the only nonzero component of $\mathrm{N_{SUN}}$ is

$$\mathrm{N_x^{SUN}} = \mathrm{N_X^{SUN}} = \frac{3}{2}\mathrm{a}(\mathrm{C}-\mathrm{A})\sin\psi\cos\psi$$

A similar expression holds for the average torque exerted by the Moon, with a replaced by $b = M_M/r_M^3$. Thus, at $t=0$, there is a torque in the X direction of magnitude

$$N = \frac{3}{2}(a+b)(C-A)\sin\psi\cos\psi$$

In a small time dt therefore J changes by an amount $dJ = Ndt$ perpendicular to itself. Thus J rotates about the Z axis by an amount

$$\mathrm{d}\chi = \frac{\mathrm{dJ}}{\mathrm{J}\sin\psi} = \frac{\mathrm{Ndt}}{\mathrm{J}\sin\psi}$$

precession period is the time for χ to change by 2π :

$$T = \frac{2\pi J \sin\psi}{N}$$

$\mathrm{J} = \mathbf{C}\omega$, where ω is the angular velocity of rotation of the Earth.

$$T = \frac{4\pi}{3}\frac{C}{C-A}\frac{1}{\cos\psi}\frac{\omega}{a+b}$$

$$\mathrm{C}/(\mathrm{C}-\mathrm{A}) = 305.3$$
$$\psi = 23.45^0$$
$$\omega = 7.292 \times 10^{-5}\mathrm{sec}^{-1}$$
$$\because \mathrm{M_s} = 1.989 \times 10^{33}\ \mathrm{g}$$
$$\mathrm{r_s} = 1.496 \times 10^{13}\ \mathrm{cm}$$
$$\mathrm{M_M} = 7.349 \times 10^{25}\ \mathrm{g}$$
$$\mathrm{r_M} = 3.844 \times 10^{10}\ \mathrm{cm}$$
$$\mathrm{T} = 25,600\ \text{years}$$

This agrees with observation to better than 1%; some error in the calculadon arises because we treated the orbits as circular and because the thoon's orbit is not exactly in the ecliptic.

Solution 11.10. The observers have 4velocity $\mathbf{u} = \boldsymbol{\xi}/|\boldsymbol{\xi}|$, where $|\boldsymbol{\xi}| = (-\xi\cdot\xi)^{\frac{1}{2}}$. Thus

$$\mathscr{L}_\xi e_{\hat{0}} = \mathscr{L}_\xi \mathbf{u} = [\xi, \mathbf{u}] = \left[\nabla_\xi (-\xi\cdot\xi)^{-\frac{1}{2}}\right]\xi$$

where we have used the fact that $[\xi, \xi] = 0$. But

$$\nabla_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}) = \left(\xi^a \xi_\alpha\right)_{;\beta}\xi^\beta = 2\xi_{\alpha;\beta}\xi^\alpha\xi^\beta = 0$$

Since $\xi_{(\alpha;\beta)} = 0$ by Killing's equation. Thus $\mathscr{L}_{\boldsymbol{\xi}\hat{0}} = 0$. Also $\mathscr{L}_{\boldsymbol{\xi}\hat{j}} = 0$
since $\mathrm{e}_{\hat{j}}$ connects points of equal t along any observer's world line. (See Problem 8.14.)

(2) $\mathscr{L}_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{Q} = \mathscr{L}_{\boldsymbol{\xi}}\left(Q^{\hat{\alpha}\cdots\hat{\beta}}\mathrm{e}_{\hat{\alpha}}\otimes\cdots\otimes\mathrm{e}_{\hat{\beta}}\right)$

$$= \left(\mathscr{L}_{\boldsymbol{\xi}}\mathrm{Q}^{\hat{\alpha}\cdots\hat{\beta}}\right)^{\otimes\cdots\otimes}_{\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}}\hat{\mathbf{e}}_{\hat{\beta}} + \mathrm{Q}^{\hat{\alpha}\cdots\hat{\beta}}\left(\mathscr{L}_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}\right)\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{\hat{\beta}}$$
$$+\cdots+\mathrm{Q}^{\hat{\alpha}\cdots\hat{\beta}}\mathrm{e}^{\otimes\cdots\otimes\left(\mathscr{L}_\xi \mathrm{e}\hat{\beta}\right)}_{\hat{\alpha}}.$$

Only the first term on the right-hand side is nonvanishing by part (1), so

$$\left(\mathscr{L}_{\boldsymbol{\xi}}Q\right)^{\hat{\alpha}\cdots\hat{\beta}} = \mathscr{L}_{\boldsymbol{\xi}}\left(Q^{\hat{\alpha}\cdots\hat{\beta}}\right) = \nabla_{\boldsymbol{\xi}}Q^{\hat{\alpha}\cdots\hat{\beta}} = \frac{d}{dt}Q^{\hat{\alpha}\cdots\hat{\beta}}$$

(since $Q^{\hat{\alpha}\cdots\hat{\beta}}$ is just a scalar function). Measured in units of proper time, the rate is

$$\frac{d}{d\hat{t}}\mathrm{Q}^{\hat{\alpha}\cdots\hat{\beta}} = \nabla_{\mathbf{u}}\mathrm{Q}^{\hat{\alpha}\cdots\hat{\beta}} = \frac{1}{|\xi|}\nabla_\xi \mathrm{Q}^{\hat{\alpha}\cdots\hat{\beta}} = \frac{1}{|\xi|}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{Q}^{\hat{\alpha}\cdots\hat{\beta}}.$$

(3) In the observer's local rest frame, the precession equation is

$$\frac{dS_{\hat{j}}}{d\hat{t}} = \varepsilon_{\hat{j}\hat{k}\hat{1}}\omega^{\hat{k}}S^{\hat{1}}$$

where S is the gyroscope spin vector. Now $\varepsilon_{\hat{j}\hat{k}\hat{1}} = \varepsilon_{\hat{0}\hat{j}\hat{k}\hat{1}} = u^{\hat{\alpha}}\varepsilon_{\hat{\alpha}\hat{k}\hat{1}}$, so the 4 -dimensional version of the precession equation is

$$\frac{\mathrm{dS}\hat{\beta}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{u}_{\hat{\alpha}}\varepsilon^{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}\omega_{\hat{\gamma}}\mathrm{S}\hat{\delta}$$

that is

$$\frac{\mathrm{dS}\hat{\beta}}{\mathrm{dt}} = \xi_{\hat{\alpha}}\varepsilon^{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}\omega_{\hat{\gamma}}\mathrm{S}\hat{\delta} \tag{1}$$

We wish to derive an equation with the form of Equation (1) and read off ω. We know that S is Fermi-Walker transported (see Problem 11.4), i.e.

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{S} = (\mathbf{S}\cdot\mathbf{a})\mathbf{u}$$

and

$$\mathrm{S}\cdot\mathbf{u} = 0 \tag{3}$$

ion (2) becomes

$$\nabla_{\boldsymbol{\xi}}S = \left(S\cdot\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{\xi}\right)\boldsymbol{\xi}/|\boldsymbol{\xi}|^2 \tag{4}$$

Equation (3) implies

$$S \cdot \xi = 0 \tag{5}$$

part (2),

$$\frac{dS}{dt} = \mathcal{L}_\xi S = \nabla_\xi S - \nabla_S \xi \tag{6}$$

ξ plays the part of a 4 -velocity (unnormalized), it is convenient decompose $\nabla\boldsymbol{\xi}$ analogously to the decomposition of $\nabla\mathbf{u}$ (see Problem (8). Since $\boldsymbol{\xi}$ is a Killing vector, $\nabla\boldsymbol{\xi}$ is antisymmetric, so we write

$$\nabla\boldsymbol{\xi} = \omega + \mathbf{A} \otimes \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^{\otimes}\mathbf{A} \tag{7}$$

where ω is antisymmetric and $\omega \cdot \boldsymbol{\xi} = 0$. Since

$$(\nabla\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\xi} = \nabla_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{\xi} = -\boldsymbol{\xi} \cdot (\nabla\boldsymbol{\xi})$$

we must have

$$A = (\nabla_\xi \xi)\,(\xi \cdot \xi)^{-1}$$

Thus Equations (6) and (4) give

$$\frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{dt}} = -\left(\mathrm{S} \cdot \nabla_\xi \xi\right) \xi (\xi \cdot \xi)^{-1} + \mathrm{S} \cdot \nabla\xi = \mathrm{S} \cdot \omega \tag{8}$$

(In the first equality we used $\nabla_{\mathrm{S}}\boldsymbol{\xi} = (\nabla\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathrm{S} = -\mathrm{S} \cdot \nabla\boldsymbol{\xi}$.) We now want to express ω in terms of a vector as in Equation (1). It is convenient to work in component notation to keep track of which slots are contracted into which. Equation (7) is

$$\xi_{a;\beta} = \omega_{a\beta} + \mathrm{A}_a \xi_\beta - \xi_a\ \mathrm{A}_\beta$$

and from this we can get a vector independent of A :

$$\mathrm{B}^\lambda \equiv \varepsilon^{\lambda\alpha\beta\gamma}\xi_{a;\beta}\xi_\gamma = \varepsilon^{\lambda\alpha\beta\gamma}\omega_{\alpha\beta}\xi_\gamma.$$

Express $\omega_{\alpha\beta}$ in terms of $\mathbf{B}$:

$$\varepsilon_{\lambda\rho\sigma\kappa}\mathrm{B}^\lambda = -\omega_{a\beta}\xi_\gamma \delta^{\alpha\beta\gamma}_{\rho\sigma\kappa}$$
$$\varepsilon_{\lambda\rho\sigma\kappa}\mathrm{B}^\lambda \xi^\kappa = -\omega_{a\beta}\xi_\gamma \delta^{\alpha\beta\gamma}_{\rho\sigma\kappa}\xi^\kappa$$

Since $\omega_{a\beta}\xi^\beta = 0$, the only non-vanishing terms occur when $\gamma = \kappa$, so

$$\varepsilon_{\lambda\rho\sigma\kappa}\mathbf{B}^\lambda \xi^\kappa = -2\omega_{\rho\sigma}\xi_\kappa \xi^\kappa$$

Substitute in Equation (8),

$$\frac{\mathrm{dS}\hat{\beta}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{S}_{\hat{\alpha}}\omega^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = -\frac{1}{2}\ \mathrm{S}_{\hat{\alpha}}\varepsilon^{\hat{\gamma}\hat{\alpha}\hat{\beta}}\hat{\kappa}_{\mathrm{B}\hat{\gamma}}\xi_{\hat{\kappa}}\left(\xi_{\hat{\delta}}\xi^{\hat{\delta}}\right)^{-1}$$

which is of the form of Equation (1) with

$$\omega^\gamma = \frac{1}{2}\ \mathrm{B}^\gamma\,(\xi_a \xi^\alpha)^{-1}$$

and, by Equation (9) this is equal to $\varepsilon^{\gamma\alpha\beta\sigma}\xi_{\alpha;\beta}\xi_\sigma / 2\xi_\alpha\xi^\alpha$.
(4) The vanishing of ω occurs if and only if $\xi_{[a;\beta}\xi_{\sigma]} = 0$. But this is the condition that ξ be hypersurface-orthogonal (Problem 7.23) i.e. that the metric be static. (See Problem 10.8.)

Solution 11.11. The equation of transport for the gyroscope spin is

$$\frac{\mathrm{DS}^a}{\mathrm{d}\tau} = (\mathrm{S} \cdot \mathbf{a})\mathrm{u}^a, \qquad \mathrm{S}^a \mathrm{u}_a = 0 \tag{1}$$

The locally measured time derivative of the j^{th} component (relative to a local Lorentz frame) of the spin vector is

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\ \mathrm{S}_{\hat{\mathrm{j}}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\ \mathrm{S} \cdot \mathrm{e}_{\hat{\mathrm{j}}}\right) = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau}\left(\ \mathrm{S} \cdot \mathrm{e}_{\mathrm{j}}\right) = \mathrm{S} \cdot \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{e}_{\hat{\mathrm{j}}} \\ &= \mathrm{S} \cdot \Gamma^{\hat{\alpha}}_{\hat{\mathrm{j}}\hat{0}}\mathrm{e}_{\hat{\alpha}} = \Gamma^{\hat{\alpha}}_{\hat{\mathrm{j}}\hat{0}}\mathrm{S}_{\hat{a}} = \Gamma_{\hat{\mathrm{i}}\hat{\jmath}\hat{0}}\ \mathrm{S}^{\hat{\mathrm{i}}}\end{aligned} \tag{2}$$

(9) we have used Equation (1) and the definition of the Christoffel Wols. Now, using the fact that the Christoffel symbols, in an orthoQuil frame, are antisymmetric in the first two indicates, Equation (2) be written as

$$\frac{d\hat{S}^{\hat{j}}}{dt} = \varepsilon_{\hat{j}\hat{k}\hat{1}}\Omega_{\hat{k}}S_{\hat{1}} \tag{3a}$$

$$\Omega_{\hat{k}} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{\hat{k}}{}_{\hat{j}}{}^{\cdot\cdot}\Gamma_{\hat{1}\hat{j}\hat{0}} \tag{3b}$$

Te must now compute the Christoffel symbols, $\Gamma_{\hat{1}\hat{0}}\hat{0}$. The approximate tric of the earth is

$$d\mathbf{s}^2 = -(1+2\phi)d\mathbf{t}^2 + (1-2\phi)\delta_{jk}dx^i dx^k - 4h_j dx^j dt \tag{4}$$

$$\phi = -M/r = 0\left(\epsilon^2\right)$$

$$\underline{h} = \frac{J\times r}{\mathbf{t}^3} = 0\left(\epsilon^3\right) \tag{5}$$

Where J is the angular momentum of the earth. We are working in the Stewtonian limit, where velocities are $\mathcal{O}(\epsilon)$, and will keep terms of order 4. A coordinate-stationary observer in the metric (4) has orthonormal basis 1-forms

$$\tilde{\omega}^{\bar{0}} = (1+\phi)\widetilde{dt} + 2h_j\widetilde{dx}, \quad \tilde{\omega}^{\bar{j}} = (1-\phi)\widetilde{dx}^j \tag{6}$$

The dual basis vectors, found from the relation $\left\langle\tilde{\omega}^{\bar{\alpha}}, \mathrm{e}^{-}\bar{\beta}\right\rangle = \delta^{\bar{\alpha}}\bar{\beta}$ are

$$\mathbf{e}_{\bar{0}} = (1-\phi)\partial/\partial\mathrm{t}, \quad \mathbf{e}_{\bar{\mathrm{j}}} = (1+\phi)\frac{\partial}{\partial\mathrm{x}^{\mathrm{j}}} - 2\ \mathrm{h_j}\partial/\partial\mathrm{t} \tag{7}$$

If the gyroscope has coordinate velocity v_j, related to the 4 -velocity by

$$u^j = v_j u^0, \quad u^0 = 1 - \phi + \frac{1}{2}v^2 \quad (\text{ from } u\cdot u = -1) \tag{8}$$

then in the stationary observer's frame

$$v_{\bar{j}} = \frac{u^{\bar{j}}}{u^{\bar{0}}} = \left\langle\tilde{\omega}^{\bar{j}}, u\right\rangle / \left\langle\tilde{\omega}^{\bar{0}}, u\right\rangle = (1-2\phi)v_j.$$

The basis vectors in the orthonormal frame comoving with the gyroscope are obtained from those of Equation (7) by a Lorentz transformation, a boost $-v_{\bar{j}}$:

$$\mathrm{e}_{\hat{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}_{\hat{\alpha}}\mathrm{e}_{\bar{\alpha}}$$

where

$$\Lambda^{\bar{0}}\hat{0} = \gamma \equiv 1 + \frac{1}{2}v^2, \quad \Lambda^{\bar{0}}_{\hat{j}} \equiv \gamma v_{\bar{j}} = \Lambda^{\hat{\bar{j}}}\hat{0}$$

$$\Lambda^{\bar{j}}_{\hat{k}} = \delta^{jk} + (\gamma-1)v^{\bar{j}}v^{\bar{k}}/v^2 \tag{10}$$

This gives

$$e_{\hat{0}} = \left(1 - \phi + \frac{1}{2}v^2\right)\partial/\partial t + \left(1 - \phi + \frac{1}{2}v^2\right)v^k\partial/\partial x^k$$

$$e_{\hat{j}} = \left[\left(1 - 3\phi + \frac{1}{2}v^2\right)v_j - 2h_j\right]\partial/\partial t + \left[\delta_{jk}(1+\phi) + \frac{1}{2}v_j v_k\right]\partial/\partial x^k \tag{11}$$

The Christoffel symbols in an orthonormal frame can be found from the formula

$$\Gamma_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{a}} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{c}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{a}} + \mathrm{c}_{\hat{\mu}\hat{a}\hat{\nu}} - \mathrm{c}_{\hat{\nu}\hat{a}\hat{\mu}}\right) \tag{12}$$

$$\mathrm{c}_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{a}} = [\mathrm{e}_{\hat{\mu}}, \mathrm{e}_{\hat{\nu}}]\cdot\mathrm{e}_{\hat{\alpha}}$$

Using Equation (11) and working to $\mathcal{O}\left(\epsilon^3\right)$, we find

$$\left[e_{\hat{j}}, e_{\hat{0}}\right] = \left(-\phi, j + \frac{1}{2}v_{,j}^2 - v_{j,t} - \frac{1}{2}v^2 v_{j,t} - v_k v_{j,k}\right) \partial/\partial t$$
$$+ \left[v_{k,j} - \phi, j v_k + \frac{1}{2}v_{,j}^2 v_k + \frac{1}{2}v^2 v_{k,j} + v_j v_{k,t}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}v_j v_m v_{k,m} - \frac{1}{2}\left(v_j v_k\right)_{,t} - v_m \phi_{,m}\delta_{jk} - v_m \frac{1}{2}\left(v_j v_k\right)_{,m}\right] \partial/\partial x^k$$

Since $(\partial/\partial \mathrm{x}^\alpha) \cdot \left(\partial/\partial \mathrm{x}^\beta\right) = \mathrm{g}_{\alpha\beta}$, we get

(9) $$e_{0}] \cdot e_{\hat{k}} = \left(1 - \phi + \tfrac{1}{2}v^2\right) v_{k,j} + v_k v_{j,t} + v_j v_{k,t} + \tfrac{1}{2}v_j v_m v_{k,m} + v_m v_k v_{j,m}$$
$$+ \frac{1}{2}v_m v_k v_{m,j} - \frac{1}{2}\left(v_j v_k\right)_{,t} - v_m \phi, \delta_{jk} - v_m \frac{1}{2}\left(v_j v_k\right)_{,m}.$$

$$[e_j, e_{\hat{0}}] \cdot e_{\hat{k}} - \left[e_{\hat{k}}, e_{\hat{0}}\right] \cdot e_{\hat{j}} = \left(1 - \phi + \frac{1}{2}v^2\right)\left(v_{k,j} - v_{j,k}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}v_m \left(v_k v_{j,m} - v_j v_{k,m} + v_k v_{m,j} - v_j v_{m,k}\right) \tag{13)}$$

$$\left[e_{\mathrm{j}}, e_{\hat{\mathrm{k}}}\right] = \left[\left(1 - 2\phi + \frac{1}{2}\mathrm{v}^2\right)\mathrm{v_{k,j}} + \mathrm{v_j v_{k,t}} - 3\phi, \mathrm{j v_k} + \frac{1}{2}\mathrm{v_{,j}^2 v_k} - 2\ \mathrm{h_{k,j}}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\mathrm{v_j v_m v_{k,\ m}}\right] \partial/\partial \mathrm{t}$$
$$+ \left[\phi, \delta_{\mathrm{k\ m}} + \frac{1}{2}\left(\mathrm{v_k v_m}\right)_{,\mathrm{j}} + \frac{1}{2}\mathrm{v_j}\left(\mathrm{v_k v_m}\right)_{,\mathrm{t}}\right] \partial/\partial \mathrm{x^m} - \{\mathrm{j} \leftrightarrow \mathrm{k}\}$$

$$P\text{`}e_{\hat{k}}] \cdot e_{\hat{0}} = \left(1 - \phi + \frac{1}{2}v^2\right)\left(v_{j,k} - v_{k,j}\right) + 4\left(\phi_{,j} v_k - \phi_{,k} v_j\right) + 2\left(h_{k,j} - h_{j,k}\right) \tag{14}$$
$$+ v_k v_{j,t} - v_j v_{k,t} + \frac{1}{2}v_m \left(v_j v_{m,k} - v_k v_{m,j} + v_k v_{j,m} - v_j v_{k,m}\right)$$

The Christoffel symbols are then

$$\Gamma_{\hat{j}\hat{k}\hat{0}} = \frac{1}{2}\left(\left[e_{\hat{j}}, e_{\hat{k}}\right] \cdot e_{\hat{0}} + \left[e_{\hat{j}}, e_{\hat{0}}\right] \cdot e_{\hat{k}} - \left[e_{\hat{k}}, e_{\hat{0}}\right] \cdot e_{\hat{j}}\right)$$
$$= 2\left(\phi_{,j} v_k - \phi_{,k} v_j\right) + h_{k,j} - h_{j,k} + \frac{1}{2}\left(v_k \frac{dv_j}{d\tau} - v_j \frac{dv_k}{d\tau}\right) \tag{15}$$

Dhere

$$\frac{dv_j}{d\tau} \equiv \frac{\partial v_j}{\partial t} + v_m \frac{\partial v_j}{\partial x^m} = -\phi_{,j} + a_j \tag{16}$$

Here $\underset{\sim}{a}$ is the acceleration produced by non-inertial forces; we get $\mathrm{a} = 0$ for geodesic motion. Thus

$$\Gamma_{\hat{j}\hat{k}\hat{0}} = \frac{3}{2}\left(\phi_{,j} \mathrm{v_k} - \phi_{,k} \mathrm{v_j}\right) + \mathrm{h_{k,j}} - \mathrm{h_{j,k}} \tag{17}$$

and Equation (3b) can be written

$$\underset{\sim}{\Omega} = \underset{\sim}{\nabla} \times \underset{\sim}{\mathrm{h}} + \frac{3}{2}\underset{\sim}{\nabla}\phi \times \underset{\sim}{\mathrm{v}}. \tag{18}$$

Had we not set $\underset{\sim}{a} = 0$, there would have been an extra term $\frac{1}{2}\underset{\sim}{a} \times \underset{\sim}{v}$ which is the Thomas precession. The term $\frac{3}{2}\underset{\sim}{\nabla}\phi \times \underset{\sim}{v}$ is called the "geodetic precession." For a particle in a circular orbit of radius r,

$$\underset{\text{geodetic}}{\Omega} = \frac{3}{2}\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{r^2}}\left(\mathrm{v_{\bar{\theta}}} \mathrm{e_{\bar{\phi}}} - \mathrm{v^-}\,\bar{\phi}^{\mathrm{e}}\right)$$

where

$$v_{\bar{\theta}} = \left(\frac{M}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\sin^2\theta - \sin^2\alpha\right)^{\frac{1}{2}}}{\sin\theta}$$

$$v_{\bar{\phi}} = \left(\frac{M}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}$$

are the spherical components of the particle's velocity and a is the in clination of the orbital plane to the polar axis. To this order, it does not matter what we use, indices with or without carets. In order of magnitude

$$\Omega_g \sim \frac{3}{2}\left(\frac{M}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{M}{R^2} \sim 8'' \text{ per year}$$

where R is the radius of the earth. The term independent of v is the Lens-Thirring precession:

$$\underline{\Omega}_{L.T.} = \frac{1}{r^3}\left(-\underline{J} + \frac{3(J\cdot r)r}{r^2}\right) \sim \frac{J}{R^3} \sim 0.1'' \text{ per year.}$$

This term could also have been obtained from Problem 11.10 since, to order ϵ^3,

$$\Omega^{\hat{j}} \sim \Omega^j \approx \frac{\varepsilon^{j0k1}\xi_0\xi_{[k,1]}}{2\xi^\gamma\xi_\gamma}$$

$\xi^0 = 1, \quad \xi_0 = -(1+2\phi) \quad$ and $\quad \xi_j = -2\ h_j,$

$$\Omega^{\hat{j}} = \varepsilon_{jk1}h_{1,k}, \quad \underline{\Omega} = \underset{\sim}{\nabla}\times \overset{h}{\underset{\sim}{}} .$$

difference of these two equations gives us

$$0 = 2hg'(r_\oplus) + r_\oplus\left(R^{\text{sun}}_{2020} - R^{\text{sun}}_{1010} + R^{\text{moon}}_{2020} - R^{\text{moon}}_{1010}\right) \tag{3}$$

13.7.12 12 Gravitation Generally

This chapter contains problems dealing with the physical consequences gravitational interactions. Most of the problems use the Newtonian Wit, in which gravity is represented by a scalar potential U satisfying

$$\nabla^2 U = -4\pi\rho$$

and generating a gravitational acceleration

$$\underline{g} = \nabla U.$$

(Alternatively, one sometimes uses a potential $\Phi \equiv -U$.) Tidal forces depend on $\partial^2\Phi/\partial x^i\partial x^k$ in Newtonian theory; these forces appear as the $\mathbf{R_{j0k0}}$ terms of the Riemann tensor in the appropriate limit of the equation of geodesic deviation in general relativity. Some of the problems explore consequences of gravity's spin- 2 nature, and of its weakness in comparison to other fields.

Problem 12.1. A small satellite has a circular frequency ω in an orbit of radius r about a central object of mass m. From the known value of ω show that it is possible to determine neither r nor m individually, but only the effective "Kepler density" $3\ m/4\pi r^3$ of the object as averaged over a sphere of the same radius as the orbit. Give the formula for ω^2 in terms of this Kepler density.

Problem 12.2. Estimate the height of spring tides and neap tides.

Problem 12.3. If the amplitude of solid-earth tides as a function of time is fourier transformed, there are peaks at certain frequencies. What are the frequencies (or periods) of the 10 strongest peaks?

Problem 12.4. The position of the sun in the sky can in principle be measured by a sensitive tidal gravimeter. What is the angular difference between this position and its position as measured optically? If the actual position of the sun were at its optical position, there would be a force in the direction of the earth's motion. (Why?) If this were the case find the radius of the earth's orbit as a function of time.

Problem 12.5. The "Eddington limit" for the luminosity of a star of mass M is defined as the luminosity at which outward light pressure just balances inward gravitational force everywhere within the star. Calculate the luminosity. (You may assume that all matter is fully ionized hydrogen.)

Problem 12.6. Show that an electron does not fall down when released in the center of an evacuated perfectly conducting closed container in a uniform gravitational field. ("Perfect conductor" $\equiv$ perfectly rigid positive lattice with perfectly mobile conduction electrons.)

Problem 12.7. A tall, cylindrical, insulated bottle of height h is filled with air at 300°K. It is then sealed and set on a scale at sea level. The scale reads a weight W. For what range of h does the weight W decrease as the contents of the bottle are slowly heated.

Problem 12.8. Define a stress tensor for the Newtonian gravitational potential U as follows:

$$\mathrm{T_{jk}} \equiv \frac{1}{4\pi}\left(\mathrm{U_{,j}U_{,k}} - \frac{1}{2}\delta_{\mathrm{jk}}\mathrm{U_{,n}U^{,n}}\right).$$

Show that the Newtonian equations of motion for stressed matter with proper density ρ_0 and velocity $\underset{\sim}{v}$ can be written in the form

$$\rho_0 \frac{dv_j}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(T_{jk} + t_{jk}\right)$$
$$\left(\rho_0 v_j\right)_{,t} + \left(T_{jk} + t_{jk} + \rho_0 v_j v_k\right)_{,k} = 0,$$

ohere t_{jk} is the ordinary 3-dimensional stress tensor.

Problem 12.9. Consider an extended body of mass M with several forces $\mathrm{I_i}$ acting on it. Using the equivalence of gravitational mass and energy drow that the condition for equilibrium of the body is

$$\sum \underset{\sim}{F_i}\left(1 - g \cdot x_i/c^2\right) = -Mg$$

Where $\underline{g}$ is the acceleration of gravity and $\underline{x}_i$ denotes the point of application of each of the forces, measured in a local Lorentz frame.

Problem 12.10. From the result of Problem 12.9 show that the equation of Lydrostatic equilibrium in a star is

$$\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dr}} = -\frac{\mathrm{GM(r)}}{\mathrm{r^2}}\left(\rho + \mathrm{p/c^2}\right)$$

where $M(r)$ is defined as the "active" mass interior to the fluid shell at radius r. This shows that in a fluid the "effective inertial mass" density is $\rho + p/c^2$. Notice that this result does not depend on the field equations of general relativity.

Problem 12.11. Show that the Newtonian equation of motion of a test particle in a Newtonian gravitational potential Φ can be written as a geodesic equation in 4 -dimensional spacetime. Compute the Christoffel symbols and the Riemann tensor, and show that they are not derivable from a metric.

Problem 12.12. By examining the relative acceleration of a family of testparticle trajectories in Newtonian gravity and comparing with the Newtonian limit of the equation of geodesic deviation, derive the correspondence

$$R_{j0k0} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^k}$$

between the Newtonian potential and the Riemann tensor. (A Newtonian test particle is acted on only by gravity; a test particle in a relativistic theory of gravity follows a geodesic.)

Problem 12.13. Write a Newtonian gravitational force law in covariant 4-dimensional language, using a scalar field as the universal Newtonian time function. Show that the resulting theory is consistent with special relativity. Show that signals can be sent faster than the speed of light. Is the theory acausal, i.e. can an observer send signals into his own past?

Problem 12.14. Consider two particles of equal mass in a freely falling elevator. One carries a charge q and the other is neutral. There is a vertical electrical field E in the elevator. Write an equation for the separation of the particles as a function of time, including tidal and electrical effects. Reconcile the existence of both terms with the equivalence principle.

Problem 12.15. New particles of mass $\mathrm{m_0}$ are created which carry a new kind of charge, evidenced by a classical inverse-square force law. A container holds a perfect monatomic gas of these particles in thermal equilibirum. The total charge Q in the container is measured by the average force on test particles outside, and it is observed to vary with temperature as $Q \propto Q_0\left(1 + 6\mathrm{kT/m_0}\right)$. What is the spin of the new force field?

Problem 12.16. Show (nonrigorously) that gravity is the only classical, infinite range (massless quanta) pure spin- 2 field; i.e. that any other field would couple identically to bulk matter and would thus be indistinguishable from gravity.

Problem 12.17. In "geometrized units of length" (units in which the gravitational constant G, the speed of light c and the Boltzmann constant k are all taken to be unity) give the values of the following, expressed in terms of centimeters: $\hbar$; the charge of an electron; e/m for an electron; the mass of the sun; the luminosity of the sun; 300^0 K; one year; one volt.

Problem 12.18. Form "natural" units of mass, length, and time out of the physical constants t, G, and c .

Problem 12.19. Estimate the Bohr radius of a "gravitational atom", e.g. wom neutrons bound by their gravitational attraction in their lowest energy state.

12: Solutions

Solution 12.1. Equating gravitational acceleration $\mathrm{Gm/r^2}$ to centripetal acceleration $\omega^2 \mathrm{r}$ gives Kepler's law: $\omega = \left(\mathrm{Gm/r^3}\right)^{\frac{1}{2}}$. The average density inside the sphere of radius r is $\bar{\rho} = 3\ \mathrm{m}/4\pi\mathrm{r}^3$, so $\omega = (4\pi\mathrm{G}\bar{\rho}/3)$ This result means, for example, that a grain of sand would orbit a steel ball bearing at the ball bearings surface with about the same 90 min . period as a satellite orbiting just above the earth's surface.

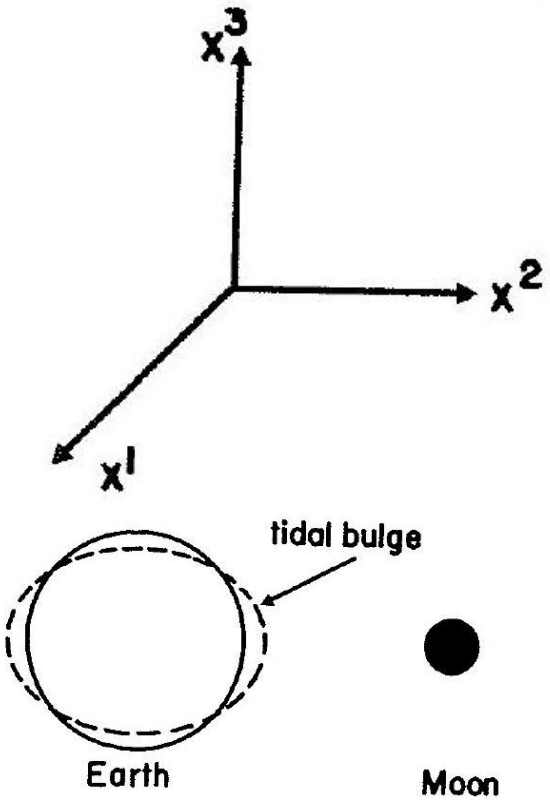
Solution 12.2. Spring tides occur when the sun and the moon are in the same line as the earth (new moon or full moon); neap tides occur when the sun and the moon are at right angles. Let the height of the tide be

h. For a rough estimate, take the sun and the moon to be in the equatorial plane. An ocean element on the equator at high tide is in equilibrium between the earth's gravitational acceleration $g(r) = -M_\oplus/r^2$ at a height $r = r_\oplus + h$ ($M_\oplus =$ mass of earth, $r_\oplus =$ radius of earth) and the tidal accelera tions of the sun and moon relative to the center of the earth:

$$0 = g\,(r_\oplus + h) + r_\oplus R^{\text{sun}}_{2020} + r_\oplus R^{\text{moon}}_{2020} \tag{1}$$

An element 90° away in longitude experiences low tide:

$$0 = g\,(r_\oplus - h) + r_\oplus R^{\text{sun}}_{1010} + r_\oplus R^{\text{moon}}_{1010} \tag{2}$$



that if we had put in centrifugal forces, they would have cancelled Wation (3). Compute the Riemann tensor in the Newtonian limit (see mem 12.12):

$$\mathrm{O}^{10} = \frac{\partial^2 \Phi^{\text{sun}}}{\partial^2 x^2}\bigg|_{x=y\approx 0} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{M_\odot}{\left[(x-x_{\text{sun}})^2+(y-y_{\text{sun}})^2+(z-z_{\text{sun}})^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right]$$

similarly for the other components. This gives

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}^{\text{sun}}_{1010}\,(\mathrm{x}_{\text{sun}} &= z_{\text{sun}} = 0, \mathrm{y}_{\text{sun}} = \mathrm{R}) = \mathrm{M}_\odot/\mathrm{R}^3\\
\mathrm{R}^{\text{sun}}_{1010}\,(\mathrm{y}_{\text{sun}} &= z_{\text{sun}} = 0, \mathrm{x}_{\text{sun}} = \mathrm{R}) = -2\mathrm{M}_\odot/\mathrm{R}^3\\
\mathrm{R}^{\text{sun}}_{2020}\,(\mathrm{x}_{\text{sun}} &= z_{\text{sun}} = 0, \mathrm{y}_{\text{sun}} = \mathrm{R}) = -2\mathrm{M}_\odot/\mathrm{R}^3\\
\mathrm{R}^{\text{sun}}_{2020}\,(\mathrm{y}_{\text{sun}} &= z_{\text{sun}} = 0, \mathrm{x}_{\text{sun}} = \mathrm{R}) = \mathrm{M}_\odot/\mathrm{R}^3
\end{aligned}$$

Sid similar expressions for the moon. Spring tides occur when the sun and the moon are in a line, say both on the y-axis. Equation (3) then

$$h_{\text{spring}} = \frac{3}{4}\left(\frac{M_\odot}{R^3_\odot} + \frac{M_{\text{moon}}}{R^3_{\text{moon}}}\right)\frac{r^4_\oplus}{M_\oplus} = 39 \text{ cm}$$

Meap tides occur when e.g. the moon is on the y-axis and the sun on the z-axis. This gives

$$h_{\text{neap}} = \frac{3}{4}\left(\frac{M_{moon}}{R^3_{moon}} - \frac{M_\odot}{R^3_\odot}\right)\frac{r^4_\oplus}{M_\oplus} = 15 \text{ cm}$$

The actual tides are, of course, considerably larger than this in many places because of hydrodynamical effects (like "sloshing" of water in shallow seas and against irregular coastlines).

Solution 12.3. To good approximation the solid earth responds linearly to the tidal driving force of the Riemann tensor. (This is not true for $\mathrm{t}^{\mathrm{t}}_{\mathrm{t}}\mathrm{t}^{\mathrm{t}}_{\mathrm{t}}$ hydrodynamic ocean tides.) Thus the fourier spectrum of the earth tides will be the same as that of the Riemann tensor at earth. Since (in Newt ian order at least) the tidal force is linear in its sources we can treat th sun and moon separately. The gravitational potential of a mass M at a position x, y, z in geocentric coordinates is

$$\mathrm{U} = \mathrm{M}/\left(\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

The Newtonian components of the Riemann tensor are thus

$$R_{x0x0} = \partial^2 U/\partial x^2 = \frac{M}{r^3}\left(\frac{3x^2}{r^2} - 1\right)$$
$$R_{x0y0} = \partial^2 U/\partial x \partial y = \frac{M}{r^3}\left(\frac{3xy}{r^2}\right)$$

etc. for yy, zz, yz, xz. In the frame of the rotating earth, the apparem orbit of the sun or moon is given by the standard formula of Keplerian spherical astronomy (see e.g. MTW, p. 648)

$$x = r\cos(\bar{\omega} + v)\cos\phi t - r\sin(\bar{\omega} + v)\cos\epsilon\sin\phi t$$
$$y = r\sin(\bar{\omega} + v)\cos\epsilon\cos\phi t + r\cos(\bar{\omega} + v)\sin\phi t$$
$$z = r\sin(\bar{\omega} + v)\sin\epsilon$$

Here $\bar{\omega}$ and ϵ are constants, the longitude of perigee and inclination to the equatorial plane, respectively. The angle ϕt is the hour angle of the rotating earth,

$$\phi\mathrm{t} = \frac{2\pi}{1 \text{ sidereal day}}\mathrm{t}$$

r is the "radius vector" and v is the "true anomaly," given by

$$r = a(1 - e\cos E), \quad \cos v = (\cos E - e)(1 - e\cos E)^{-1}$$

where a is the semimajor axis, e is the eccentricity and E is the eccentric anomaly defined by

$$E - e\sin E = \frac{2\pi}{T}t \equiv \Omega t$$

Where T is the period of the orbit. Working only to first order in the ii) eccentricity e, we compute

$$\begin{aligned} E &= \Omega t + e\sin\Omega t \\ \cos E &= \cos\Omega t - e\sin^2\Omega t \\ r^{-3} &= a^{-3}(1 + 3e\cos\Omega t) \\ \cos v &= \cos\Omega t + e\cos 2\Omega t - e. \end{aligned} \tag{3}$$

substituting Equation (3) into Equation (2) and substituting the reinto Equation (1), we get

$$R_{j0k0} = \frac{M}{a^3} \times (\text{ constant terms } + \text{ time varying terms })$$

generic time-varying term has the form (here scos means either cos sin and an exponent mN means any integer between zero and m dusive)

(scos) $2\mathrm{t} - 2\mathrm{es}\cos\Omega\mathrm{t} + 2\mathrm{e}\,\mathrm{scos}\,\Omega\mathrm{t}\,\mathrm{scos}\,2\Omega\mathrm{t}) \times \begin{cases} \sin^2\epsilon \text{ or} \\ \sin\epsilon\cos^{\mathrm{N}}\epsilon\mathrm{s}\cos\phi\mathrm{t} \\ \cos^{2\ \mathrm{N}}\epsilon\,\mathrm{scos}^2\,\phi\mathrm{t}. \end{cases}$ or Nitis expression is analyzed into individual frequencies by repeated use If the trigonometric identities for products of scos 's in terms of sum and difference frequencies. The following components result:

Angular Frequency	
(i)	2ϕ
(ii)	ϕ
(iii)	$2\Omega \pm 2\phi$
(iv)	$2\Omega \pm \phi$
(v)	2Ω
(vi)	$\Omega \pm 2\phi$
(vii)	$\Omega \pm \phi$
(viii)	Ω
(ix)	$3\Omega \pm 2\phi$
(x)	$3\Omega \pm \phi$
(xi)	3Ω

Amplitudes (leading order in e)

$$\tfrac{3}{4}\cos^{2N}\epsilon$$
$$\tfrac{3}{2}\sin\epsilon\cos^2\epsilon$$
$$\tfrac{3}{8}\cos^{2N}\epsilon$$
$$\tfrac{3}{4}\sin^2\cos^2\epsilon$$
$$\tfrac{3}{2}\sin^2\epsilon \text{ and } \tfrac{3}{4}\cos^{2N}\epsilon$$
$$3\mathrm{e}\cos^{2N}\epsilon$$
$$6\mathrm{e}\sin\epsilon\cos^2\epsilon$$
$$6\mathrm{e}\left(\sin^2\epsilon \text{ or } \tfrac{1}{2}\cos^{2N}\epsilon\right)$$
$$\tfrac{3}{2}\mathrm{e}\cos^{2N}\epsilon$$
$$3\mathrm{e}\sin^2\cos^2\epsilon$$
$$3\mathrm{e}\sin^2\epsilon$$

For the Earth-Sun system: $\epsilon = 23\frac{1}{2}^\circ, \mathrm{e} = .017, \Omega = 2\pi/1$ year, and $\phi = 2\pi/1$ sidereal day. For the Earth-Moon system $\mathrm{e} = .054, \Omega = 2\pi/1$ sidereal month, $\phi = 2\pi/1$ sidereal day, and ϵ varies between $23\frac{1}{2}^\circ \pm 5^\circ$ due to the 18.6 year nutation of the moon's node. (This induces further splitting of the spectrum that we have neglected.) With these values, and using the fact that ($\mathrm{M/a^3}$) is 2.2 times larger for the moon's orbit than for the sun's, we get the following estimate for the ordering of former components by strength (M = moon, S = sun) :

$$\mathrm{M(i)}, \mathrm{M(v)}, \mathrm{M(ii)}, \mathrm{M(iii)}, \mathrm{S(i)}, \mathrm{S(v)}, \mathrm{M(iv)}, \mathrm{S(ii)}, \mathrm{S(iii)}, \mathrm{M(vi)}, \mathrm{M(viii)} \cdots$$

Solution 12.4. Laplace first realized that there must be a difference in positions. The position of the sun in the sky is displaced by the finite velocity of light; in other words, is aberrated by the velocity v of the earth in its orbit, by an angle $\theta = \mathrm{v/c}$. The Coulomb gravitational field is not aberrated: If the force of gravity pointed in this direction, there would be a component of solar acceleration $\left(\mathrm{GM_\odot/r^2}\right)(\mathrm{v/c})$ in the direc $^-$ tion of the earth's motion, so the earth's energy would increase at a rate given by

$$\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{E/M_\oplus}\right)}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{GM_\odot}}{\mathrm{r^2}}\frac{\mathrm{v^2}}{\mathrm{c}}$$

but $E/M_\oplus = -\frac{1}{2}GM_\odot/r$, so the energy loss rate implies $dr/dt = 2v^2/c$. Since $v^2 = \mathrm{GM_\odot}/r$ this is easily integrated to give

$$t - t_0 = \frac{c}{4GM}\left(r^2 - r_0^2\right)$$

In particular, the earth's orbit has $r = 1.5\times10^{13}$ cm, $v = 30$ km/sec, th radius of the sun is $r_0 = 7\times10^{10}$ cm, so $\theta \approx 10^{-4}$, and $t - t_0 \approx 1.3\times10^{10}$sec ≈ 400 years. This is much less than the known geologit cal time during which the radius of the earth's orbit is known to have bee-cal constant.

Oldation 12.5. Light pressure within the star is given by $P_{\mathrm{rad.}} = (1/3)U_{\mathrm{rad.}}$, Diere $U_{\mathrm{rad.}}$ is the energy density of radiation. Since the light diffuses sutward in many scatterings, $U_{\mathrm{rad.}}$ satisfies a diffusion equation and Ev radiative flux F is proportional to a gradient in $U_{\mathrm{rad.}}$

$$\mathrm{F} = \frac{-\mathrm{c}}{3\kappa\rho}\nabla\mathrm{U_{rad}}$$

Were κ is the opacity (given here by the Thompson value $\kappa_{\mathbf{T}} = \sigma_{\mathbf{T}}/\mathrm{m_pE}/4\ \mathrm{cm^2/gm}$). The relation $\mathrm{L} = 4\pi\mathrm{r^2}\ \mathrm{F}$ between flux and total luminosity I. of the star gives

$$\mathrm{dP_{rad.}} = -\frac{\kappa\rho}{4\pi\mathrm{c}}\frac{\mathrm{Ldr}}{\mathrm{r^2}}$$

Dich is the net light pressure on a unit area slab of matter of thickness 8. We equate this to the downward gravitational force $-\mathrm{GM}\rho\mathrm{dr/r^2}$ to it the Eddington limit

$$\mathrm{L} = \frac{4\pi\mathrm{GMc}}{K_{\mathrm{T}}} = 1.38\times10^{38}\left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M_\odot}}\right)\mathrm{ergs/sec}$$

Iticroscopically, we could also get this result by noting that since the Seattering cross section is forward-backward symmetric $\left(\propto 1+\cos^2\theta\right)$, a Shoton of momentum p deposits on the average a momentum p to the electron per collision, and a radial component p_r. The energy of the photon is pc, but its contribution to the outward luminosity is reduced Dy the factor $v_r/c = p_r/p$. Thus the radial momentum deposited to an electron at radius r per unit time is just proportional to the net radial Inminosity $\mathcal{L}$ (constant at all radii)

$$\frac{(\text{ momentum })}{(\text{ time })} = \frac{\mathrm{L}}{4\pi \mathrm{r}^2(\hbar\omega)} \times \sigma_{\mathrm{T}} \times \left(\frac{\mathrm{h}\omega}{\mathrm{c}}\right) = \frac{\mathrm{L}\sigma_{\mathrm{T}}}{4\pi \mathrm{r}^2 \mathrm{c}}$$

Momentum per unit time is a force, and we equate this to the inward gravi tational force on the proton which is associated with the electron:

$$\frac{\mathrm{L}\sigma_{\mathrm{T}}}{4\pi \mathrm{r}^2 \mathrm{c}} = \frac{\mathrm{GM\ m_p}}{\mathrm{r}^2}$$

which gives the same result as above.

Solution 12.6. Let ϕ^{g} and ϕ^{e} be respectively the gravitational and electrostatic potentials. The potential energy of an electron is then

$$\Phi = m\phi^g + e\phi^e$$

(m, e = electron mass, charge) and the force on an electron is $\underset{\sim}{F} = -\nabla\Phi$ In a static situation there can be no force component tangential to the cof ducting surface, and hence Φ must be a constant on the inside surface. Now there is neither mass ($\nabla^2\phi^{\mathrm{g}} = 0$) nor charge ($\nabla^2\phi^{\mathrm{e}} = 0$) inside the container so $\nabla^2\Phi = 0$. The solution to Laplace's equation $\nabla^2\Phi = 0$ inside the conductor equipotential is then $\Phi =$ constant. If an electron then introduced into this field, it will feel no force. [Note: Since the electron is introduced at the center of the container, image-charge forces can be ignored by symmetry.]

Solution 12.7. As the contents are heated, mass-energy is added according to $c^2 dM = \frac{7}{2}\mathrm{kNdT}$ ($\frac{7}{2}$ since air is diatomic; N is the total number of molecules in the cylinder). However the center of gravity of the gas rises which acts to decrease the weight (distance to earth's center increases). The position of the center of gravity is:

$$z_{\mathrm{cg}} = \int_0^{\mathrm{h}} \rho z \ \mathrm{d}z \Big/ \int_0^{\mathrm{h}} \rho \ \mathrm{d}z, \quad \rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{kT}} z\right)$$

so the change of z_{cg} with temperature is given by

$$\frac{\mathrm{d}z_{\mathrm{cg}}}{\mathrm{dT}} = \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{mg}}\left[1 - \left(\frac{\eta}{\sinh\eta}\right)^2\right], \quad \eta \equiv \frac{\mathrm{mgh}}{2\mathrm{kT}}$$

me m is the average mass of an air molecule.

The weight change is thus

$$= \left(\mathrm{g}\frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{dT}} + \mathrm{M}\frac{\mathrm{dg}}{\mathrm{d}z_{\mathrm{cg}}}\frac{\mathrm{d}z_{\mathrm{cg}}}{\mathrm{dT}}\right)\mathrm{dT} = \left(\frac{7}{2}\frac{\mathrm{gkN}}{\mathrm{c}^2} - \mathrm{mN}\frac{2}{\mathrm{R}_\oplus}\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mg}}\frac{\mathrm{k}}{}\left[1 - \frac{\eta^2}{\sinh^2\eta}\right]\right)\mathrm{dT}.$$

Everight-hand side is negative when

$$1 - \frac{\eta^2}{\sinh^2\eta} > \frac{7}{4}\frac{\mathrm{gR}_\oplus}{\mathrm{c}^2} = .122 \times 10^{-8}$$

ins implies that $\eta > 6.05 \times 10^{-5}$ and that $\mathrm{h} = 2\mathrm{kT}\eta/\mathrm{mg} > 218$ cm.

Solution 12.8. Since Poisson's equation is $\mathrm{U}_{,\mathrm{kk}} = 4\pi\rho_0$ we have

$$T_{jk,k} = \frac{1}{4\pi}\left(U_{,jk}U_{,k} + U_{,j}U_{,kk} - U_{,nj}U_{,n}\right) = \rho_0 U_{,j}$$

Thus the Newtonian equation of motion can be written as

$$\rho_0 \frac{dv_j}{dt} = -\frac{\partial t_{jk}}{\partial x^k} - \rho_0 \frac{\partial U}{\partial x^j} = \frac{-\partial}{\partial x^k}\left(T_{jk} + t_{jk}\right)_{,k} \tag{1}$$

Now use the Newtonian equation of mass conservation

$$\partial\rho_0/\partial\mathrm{t} + \left(\rho_0\nabla^{\mathrm{k}}\right)_{,\mathrm{k}} = 0 \tag{2}$$

From Equation (2) and the expression for the convective derivative $\mathrm{d}/\mathrm{dt} = \partial/\partial\mathrm{t} + \mathrm{v_k}\partial/\partial\mathrm{x^k}$, one can write

$$\rho_0 \frac{dv_j}{dt} = \rho_0\left(\frac{\partial v_j}{dt} + v^k v^j_{,k}\right) = \left(\rho_0 v_j\right)_{,t} + \left(\rho_0 v_j v_k\right)_{,k}$$

and thus Equation (1) can be written as

$$\left(\rho_0 v_j\right)_{,t} + \left(T_{jk} + t_{jk} + \rho_0 v_j v_k\right)_{,k} = 0 \tag{3}$$

Solution 12.9. Consider a virtual displacement $\underset{\sim}{\delta}$; the energy must be stationary in $\underset{\sim}{\delta}$. If we include in the energy, the gravitational potential energy of the work done on or by forces, then the change in energy for any one force is

$$\mathrm{dEi_i} = -\underset{\sim}{\mathrm{F}}_{\mathrm{i}} \cdot \underset{\sim}{\delta} + (\mathrm{dEi_i})\left(\underline{\mathrm{g}}/\mathrm{c}^2\right) \cdot \underset{\sim}{\mathrm{x}}_{\mathrm{i}}$$

and the change in energy from raising the object mass is

$$\mathrm{dE} = -\mathrm{Mg} \cdot \underset{\sim}{\delta}$$

Thus

$$\mathrm{dEtota1} = -\sum \underset{\sim}{F}\ \mathrm{F_i} \cdot \underset{\sim}{\delta}\left(1 - \frac{\mathrm{g} \cdot \mathrm{x_i}}{\mathrm{c}^2}\right) - \mathrm{Mg} \cdot \underset{\sim}{\delta}$$

for any $\underset{\sim}{\delta}$ and hence

$$\sum_i \underset{\sim}{F_i}\left(1 - \frac{g \cdot \underset{\sim i}{x}}{c^2}\right) = -M\underset{\sim}{g}.$$

Note that by taking the gravitational potential relative to the center of gravity, we avoid having to add the gravitational potential energy of the gravitational potential energy. (This argument is due to K. Nordtvedt.)

Solution 12.10. From the previous problem

$$\sum \underset{\sim}{F}\left(1 - g \cdot \underset{\sim}{x_i}/c^2\right) = -M\underset{\sim}{g}$$

If p is pressure and $\underset{\sim}{dA}$ is directed surface area, then $\underset{\sim}{F} = \mathrm{pd}\,\underset{\sim}{A}$ and the above result becomes

$$-\int p(x)\left(1 - g \cdot \underset{\sim}{x}/c^2\right)\underset{\sim}{dA} = -M\underset{\sim}{g}$$

or

$$-\int \mathrm{pd}\ \underset{\sim}{\mathrm{A}} + \int \mathrm{pg} \cdot \frac{\underset{\sim}{x}}{\mathrm{c}^2}\ \mathrm{d}\ \underset{\sim}{\mathrm{A}} = -\mathrm{Mg}$$

for $\underline{g}$ constant. Now with $\underline{g} = -\frac{GM}{r^2}\underset{r}{e}_r$, $\underset{\sim}{x} = dr\underset{r}{e}_r$, $\underset{\sim}{dA} = \pm dA\underset{\sim}{e}_r$, we have

$$-A[p(r+dr) - p(r)]\underset{\sim r}{e} - dr\frac{GM}{c^2r^2}\underset{\sim r}{e}\int pdA = -Mg = Adr\rho\frac{GM}{r^2}\underset{\sim r}{e}$$

thus

$$\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dr}} = -\frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{r}^2}\left(\rho + \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{c}^2}\right)$$

This result holds in any theory of gravity that satisfies $\mathrm{T}^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ Wach theories are called metric theories) and is independent of the field guations. Each theory, however, gives its own prescription for finding (t), which is defined such that the local acceleration of gravity is $\mathrm{I} = -\mathrm{GM}/\mathrm{r}^2$.

Solution 12.11. The preferred coordinates of Newtonian theory are universal time" t and Galilean space coordinates x^j. The equation of motion

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}^{\mathrm{j}}}{\mathrm{dt}^2} = -\frac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{x}^{\mathrm{j}}}$$

can be written in 4-dimensional form:

$$\frac{d^2t}{d\lambda^2} = 0$$
$$\frac{d^2x^j}{d\lambda^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 = 0$$

From this we read off the Christoffel symbols:

$$\Gamma^{\mathrm{j}}_{00} = \frac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{x}^{\mathrm{j}}}; \quad \text{all other } \Gamma^a_{\beta\gamma} \text{ vanish.}$$

The standard formula for the components of the Riemann tensor gives

$$\mathrm{R}^{\mathrm{j}}_{0\mathrm{k}0} = -\mathrm{R}^{\mathrm{j}}_{00\mathrm{k}} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\mathrm{x}^{\mathrm{j}}\partial\mathrm{x}^{\mathrm{k}}}; \quad \text{all other } \mathrm{R}^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} \text{ vanish}$$

Suppose these were derivable from a metric, then we would have

$$R_{j0k0} = g_{ja}R^a_{0k0} = g_{jm}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^m\partial x^k},$$

but

$$\mathrm{R_{0jk0}} = \mathrm{g_{0\alpha}R^{a}{}_{jk0}} = 0 \neq -\mathrm{R_{j0k0}}.$$

This violates the antisymmetry property $\mathrm{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ has if it is derived from a metric.

Solution 12.12. Let the Newtonian test-particle trajectories be

$$x^j = x^j(t, n).$$

Here n is a parameter telling which trajectory we are considering. The vector

$$\underline{n} = \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial x^k}{\partial n}\frac{\partial}{\partial x^k} = n^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

is a connecting vector between neighboring trajectories. The relative acceleration of neighboring trajectories is

$\frac{\partial^2 n^j}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial x^j}{\partial n}\right) = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial t^2}\right) = \frac{\partial}{\partial n}\left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x^j}\right) = -n^k \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^j}\right) = -n^k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^k \partial x^j}$

where we have used the equation of motion $\partial^2 x^j/\partial t^2 = -\partial\Phi/\partial x^j$. The equation of geodesic deviation is

$$\frac{\mathrm{D}^2 \mathrm{n}^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} = -\mathrm{R}^\alpha \beta\gamma\delta^\gamma{}_{\mathrm{u}}\beta_{\mathrm{u}}\delta.$$

In the Newtonian limit (velocities $\sim \epsilon$, gravitational fields $\sim \epsilon^2$)

$$\mathbf{u}^0 = 1 + \mathcal{O}(\epsilon), \quad \mathbf{u}^{\mathrm{j}} = \mathcal{O}(\epsilon), \quad \Gamma^a_{\beta\gamma} = \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right)$$

and n, which connects events of equal proper time, connects events of equal coordinate time to $\mathcal{O}(\epsilon)$. Thus, $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} + \mathcal{O}(\epsilon)$ and so

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathrm{n}^{\mathrm{j}}}{\mathrm{dt}^2} = -\mathrm{R}^{\mathrm{j}}_{0\mathrm{k}0}\mathrm{n}^{\mathrm{k}} + \mathcal{O}(\epsilon)$$

Riemann components are then

$$R^j_{0k0} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^k \partial x^j}$$

The Newtonian limit. Note that, unless the velocities involved approach speed of light, the other components of $\mathrm{R}^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ do not enter into the * mation of relative motion of test particles.

Wition 12.13. Newtonian gravity is characterized by instant "action at distance," where simultaneity is defined by the slices of a "universal field t. We want a relativistically invariant expression for the mitational acceleration at a point in terms of the matter density $\mathrm{T}^{\mu\nu}$ the rest of the universe. Spacetime is taken to have the Minkowski Setric everywhere. Only T^{00} should enter, so we first dot into two siversal time vectors:

$$\nabla \mathrm{t} \cdot \ \mathrm{T} \cdot \nabla \mathrm{t} \quad \left(\text{ or } \quad \mathrm{t}_{,\alpha}\mathrm{T}^{a\beta}\mathrm{t}, \beta \right).$$

Ithus the inverse square law acceleration of a particle at position x Secomes

$$a_{\mathrm{grav}} \ = G \int_{t=\text{ constant}} 1 \frac{\nabla t \cdot T\left(x'\right) \cdot \nabla t}{(l \cdot l)^{\frac{3}{2}}} d^3 x'$$

where 1 is the spacelike vector connecting x' to x and d^3x' is the proper volume element on the constant t slice. This is not yet consistent with special relativity, because a is not necessarily orthogonal to the particle's 4 -velocity u. We must apply a projection operator, giving a final answer

$$\mathbf{a}_{\mathrm{grav}} \ = G \int \frac{\nabla t \cdot T \cdot \nabla t}{(l \cdot l)^{\frac{3}{2}}} [1 + (\mathbf{u} \cdot l)\mathbf{u}] d^3\mathbf{x}'.$$

This is manifestly consistent with special relativity because it is (i) written in terms of geometrical objects, and (ii) defines a geometrical object (a with $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = 0$). Signals can be sent faster than light by changin the distribution of masses at a point. The gravitational field then changes on surfaces of constant t. Since these surfaces are spacelike, they are outside the lightcone of every observer. Nevertheless the theory is not acausal; since every observer's worldline is timelike, t is always increasing in his future direction. Likewise, t increases along any light ray he emits. So any signal can at best connect events of constant t; no sequence of signals can return to an observer at an earlier t than they started. This is to be contrasted with the case of tachyons (Problem 1.6) which are acausal. The reason for the difference is that this problem has some "pregeometry" in the scalar field t, which slices up spacetime in a universally time-ordered fashion. Tachyons "slice" spacetime in a manner that varies from observer to observer.

Solution 12.14. Take the separation as $\underset{\sim}{\eta} = (\text{ separation }) \underset{\sim}{e}_z$; then due to gravitational forces

$$\frac{\mathrm{d}^2 \eta^z}{\mathrm{dt}^2} = -\mathrm{R}^z \beta\gamma\delta \mathrm{u}^\beta \eta^\gamma \mathrm{u}^\delta.$$

Since the particles start from rest, if we confine our observations to short time, $u^{\mathrm{j}} \approx 0$, so that

$$\frac{\mathrm{d}^2\eta^z}{\mathrm{dt}^2} = -\mathrm{R}^z_{0z0}\eta^z$$

The Riemann component for a weak field is easily calculated

$$\mathrm{R}^z_{0z0} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(-\frac{\mathrm{M}}{z}\right) = -\frac{2\mathrm{M}}{z^3}.$$

Due to the E field, there is an acceleration of the lower particle

$$\underline{a} = \frac{q}{m}E_{\underline{e}_z}.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\eta^z}{\mathrm{dt}^2} = \frac{2\mathrm{M}}{z^3}\eta^z - \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{m}}\mathrm{E}$$

may seem disturbing at first that the two terms look as if they can be emparable. But suppose our laboratory is limited to a chunk of space$\Delta_{\mathrm{x}}{}^{\mu} \approx \mathrm{L}$. Then at the end of the experiment the gravitational forces II have caused a change in η^z :

$$\delta\eta^z \sim \frac{1}{2}\frac{2\mathrm{M}}{z^3}\eta^z L^2.$$

int $\eta^z < \mathrm{L}$ so

$$\delta\eta^z = \mathcal{O}\left(\mathbf{L}^3\right).$$

Ine change in η^Z due to the electric field is

$$\delta\eta^z \sim -\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{m}}\cdot\mathrm{E}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{L}^2 = \mathrm{O}\left(\,\mathrm{L}^2\right)$$

so, if we sufficiently limit the "size" of our experiment we can ignore gravitational effects.

Solution 12.15. The geometrical object which tells about the charge is a scalar, vector, 2 -tensor, etc. for spins $0, 1, 2$, etc. For example, the charge density of a particle of rest-charge q_0 moving along a worldline $\mathbf{x}^{\mu} = z^{\mu}(\tau)$ with 4 velocity $\mathbf{u}$ is

$$\rho\left(\mathrm{x}^{\sigma}\right) = \mathrm{q}_0\int\delta^4\left[\mathrm{x}^{\mu} - z^{\mu}(r)\right]\mathrm{d}r \qquad \text{(scalar)}$$

$$\mathrm{J}^{\mu}\left(\mathrm{x}^{\sigma}\right) = \mathrm{q}_0\int\mathrm{u}^{\mu}\delta^4\left[\mathrm{x}^{\sigma} - z^{\sigma}(r)\right]\mathrm{d}r \qquad (1)$$

$$\mathrm{T}^{\mu\nu}\left(\mathrm{x}^{\sigma}\right) = \mathrm{q}_0\int\mathrm{u}^{\mu}\mathrm{u}^{\nu}\delta^4\left[\mathrm{x}^{\sigma} - z^{\sigma}(r)\right]\mathrm{d}r \qquad \text{(spin)}$$

$$\mathrm{T}^{\mu\nu\cdots\rho}\left(\mathrm{x}^{\sigma}\right) = \mathrm{q}_0\int\mathrm{u}^{\mu}\mathrm{u}^{\nu}\cdots\mathrm{u}^{\rho}\delta^4\left[\mathrm{x}^{\sigma} - z^{\sigma}(r)\right]\mathrm{d}r$$

The charge of a particle in a laboratory volume, measured by the "Coulomb" part of its interaction in the lab is

$$\begin{aligned}\mathbf{q} &= \int\mathrm{T}^{00\cdots0}\,\mathrm{d}^3\mathrm{x}\\ &= (-1)^{\mathrm{s}}\int\,\mathrm{T}^{\alpha\beta\cdots\gamma}\mathrm{u}^{\mathrm{LAB}}_{\alpha}\mathrm{u}^{\mathrm{LAB}}_{\beta}\cdots\mathrm{u}^{\mathrm{LAB}}_{\gamma}\,\mathrm{d}^3\mathrm{x}\end{aligned} \qquad (2)$$

(lab frame)

Substituting Equation (1) into Equation (2) gives the measured charge of a single particle

$$\begin{aligned}\mathrm{q} &= \mathrm{q}_0\int\,\mathrm{d}^3\mathrm{x}\int\,\mathrm{d}\tau\left(-\mathrm{u}\cdot\mathrm{u}^{\mathrm{LAB}}\right)^{\mathrm{s}}\delta^4\left[\mathrm{x}^{\sigma} - \mathrm{z}^{\sigma}(\tau)\right]\\ &= \mathrm{q}_0\int\,\mathrm{d}^3\mathrm{x}\mathrm{dt}\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{dt}}\right)\left(-\mathrm{u}\cdot\mathrm{u}^{\mathrm{LAB}}\right)^{\mathrm{s}}\delta^4\left[\mathrm{x}^{\sigma} - \mathrm{z}^{\sigma}(\tau)\right]\end{aligned}$$

Integrating out the delta function, and using $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}^{\mathrm{LAB}} = -\gamma$ and $\mathrm{d}\tau/\mathrm{dt} = 1/\gamma$, we get $\mathrm{q} = \mathrm{q}_0\gamma^{\mathrm{s}-1} \approx \mathrm{q}_0\left(1 + \frac{\mathrm{s}-1}{2}\mathrm{v}^2\right)$ for $\mathrm{v} \ll \mathrm{c}$. Now for a perfect gas we have $\left\langle\mathrm{v}^2\right\rangle = 3\mathrm{kT}/\mathrm{m}_0$. So when we sum the charges of all the particles in the gas we get

$$Q = \sum_n q = nq_0 \left[1 + \frac{s-1}{2}\left(\frac{3kT}{m_0}\right)\right],$$

and from the temperature dependence given in the problem we now read off $s = 5$.

Solution 12.16. Suppose, to the contrary, that there were another spin-2 field. Since it is massless, and has infinite range, it must admit weak, plane waves as solutions. Also since the field is spin-2 it must couple to a symmetric, traceless "charge" tensor $J^{\mu\nu}$. Moreover, for weak fields and slow velocities, "charged" particles which are much smaller than a wavelength must couple predominantly through their J^{00} (i.e. the "Coulomb" limit).

Consider a plane wave incident on two particles (initially located at We same point) of charge $J^{00} = q_1$, $J^{00} = q_2$. For a sinusoidal plane Save of a definite linear polarization the particles must execute linear unusoidal motion whose amplitude is proportional to their charge and 3. Nersely proportional to their mass. Hence, at an instant in time, we and define a polarization vector (analog of the electric field E) for the theld

$$\underset{\sim}{v} \equiv \left(\frac{q_1}{m_1} - \frac{q_2}{m_2}\right)^{-1} \left(\underset{\sim 1}{x} - \underset{\sim 2}{x}\right)$$

which is independent of the numerical value of $q_1, q_2,\ m_1,\ m_2$. But this Wa contradiction! Since the field has spin- 2 structure, a polarization state should be unchanged by 180° rotation, but under 180° rotation $\underset{\sim}{V} - V$ implying $V = 0$. What is wrong? We assumed that the particles zesponded differently to the field. We now see that $\underset{\sim 1}{x} = \underset{\sim 2}{x}$ for all charges and masses is the only possibility. This is equivalent to saying that all particles have a fixed charge-to-mass ratio: q/m = constant. By choice of units we can make $q = m$. Hence, in the weak field, plane-wave Limit $J^{00} = T^{00}$, the stress energy. But by Lorentz invariance we must have $J^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}$ (e.g. we cannot introduce T^{μ}_{μ} since this is not spin-2).

We have shown that our "arbitrary" spin- 2 field is coupled to $T^{\mu\nu}$. Hence, it is just a piece of gravity, i.e. whatever we measure experimentally as gravity. (No claim that it is general relativity is made.) R. P. Feynman has pointed out that the assumption of a "point" particle, with no intrinsic polarization vector, has entered crucially. Thus it is possible to have the field couple to individual particles with spin; but for unpolarized bulk matter, there can be no net force.

Solution 12.17. In c.g.s. units we have

$$\begin{aligned} \mathrm{c} &= 2.998 \times 10^{10}\ \mathrm{cm/sec} \\ \mathrm{c}^2 &= 8.998 \times 10^{20} \mathrm{erg/gm} \\ \mathrm{G/c}^2 &= 0.7425 \times 10^{-28}\ \mathrm{cm/gm} \\ \mathrm{G}^{\frac{1}{2}} &= 2.582 \times 10^{-4} \mathrm{esu/gm} \end{aligned}$$

(The value of $\mathrm{G}^{\frac{1}{2}}$ comes from the fact that in Coulomb's or Newton's lad force $= \mathrm{e}^2/\mathrm{r}$ or $\mathrm{Gm}^2/\mathrm{r}^2$.) Thus, in gravitational units, the values are

(a) $\hbar = \hbar\left(\frac{G}{c^2}\right) c \left(\frac{1}{c^2}\right) = \frac{\hbar G}{c^3} \simeq \frac{(\mathrm{ergsec})(\mathrm{cm/gm})(\mathrm{cm/sec})}{(\mathrm{erg/gm})} \simeq 2.611 \times 10^{-66}\mathrm{c}$

(b) $\mathrm{e} = \mathrm{e}\left(\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{c}^2}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{G}^{\frac{1}{2}}}\right) \simeq \frac{(\mathrm{esu})(\mathrm{cm/gm})}{(\mathrm{esu/gm})} \simeq \frac{\mathrm{eG}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{c}^2} 1.381 \times 10^{-34}\ \mathrm{cm}$

(c) $\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{G}^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{m}} \simeq \frac{(\mathrm{esu})}{(\mathrm{gm})(\mathrm{esu/gm})} \simeq 2.042 \times 10^{21}$

(d) $\mathrm{M}_\odot = \frac{\mathrm{GM}_\odot}{\mathrm{c}^2} \simeq (\mathrm{gm})(\mathrm{cm/gm}) \simeq 1.48 \times 10^5\ \mathrm{cm}$

(e) $\mathrm{L}_\odot = \mathrm{L}_\odot\left(\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{c}^2}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{c}^2}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{c}}\right) \simeq \frac{(\mathrm{erg/sec})(\mathrm{cm/gm})}{(\mathrm{erg/gm})(\mathrm{cm/sec})} \simeq 1.07 \times 10^{-26}$

(f) $300°\mathrm{K} = \frac{(300°\mathrm{K})\mathrm{k}\left(\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{c}^2}\right)}{\mathrm{c}^2} \simeq \frac{(°\mathrm{K})(\mathrm{erg}/°\mathrm{K})(\mathrm{cm/gm})}{(\mathrm{erg/gm})} \simeq 3.42 \times 10^{-63}\ \mathrm{cm}$

(g) (1 year) = (1 year)c $= 9.460 \times 10^{17}$ cm

(h) (1 volt) $= \left(\frac{1}{299.8}\frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{esu}}\right)\mathrm{G}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\mathrm{c}^2}\right) \simeq \frac{(\mathrm{erg/esu})(\mathrm{esu/gm})}{(\mathrm{erg/gm})} \simeq 9.58 \times 10^{-28}$.

Solution 12.18.

$$\begin{aligned} \mathrm{L}^* &= \left(\hbar G/c^3\right)^{\frac{1}{2}} = 1.616 \times 10^{-33}\ \mathrm{cm} \\ \mathrm{T}^* &= \left(\hbar G/c^5\right)^{\frac{1}{2}} = 5.391 \times 10^{-44} \mathrm{sec} \\ \mathrm{M}^* &= (\hbar \mathrm{c/G})^{\frac{1}{2}} = 2.177 \times 10^{-5} \mathrm{gm} \end{aligned}$$

These combinations were noticed by Planck, immediately after he discovered his constant. They are now called the Planck length, mass, and time. They are uniquely defined up to factors of order unity (e.g. using h instead of $\hbar$), since by dimensional analysis there is only one way of
ping three dimensional quantities into three specified dimensional $1. (i.e. there are no free dimensionless combinations).
tion 12.19. Force balance gives us

$$\mathrm{Gm}_\mathrm{N}^2/\mathrm{r}^2 = \mathrm{m}_\mathrm{N}\omega^2\left(\frac{1}{2}\mathrm{r}\right).$$

ording to Bohr quantization the separation radius must satisfy

$$2m\omega\left(\frac{1}{2}r\right)^2 = n\hbar.$$

these two equations, the separation is

$$\therefore \mathrm{r} = 2\mathrm{n}^2\ \mathrm{h}^2/\mathrm{Gm}_\mathrm{N}^3.$$

lowest energy level is the $n = 1$ level. In this level the separation is $\mathrm{r} = 2\mathrm{t}^2/\mathrm{Gm}_\mathrm{N}^3 = 6 \times 10^{24}$ cm $\approx 6 \times 10^6$ light years!

$$\mathrm{R} \approx -6\nabla^2\phi$$

13.7.13 13 Gravitational Field Equations and Linearized Theory

The gravitational field, described by the metric of spacetime $\mathrm{g}_{\mu\nu}$, is generated by the stress-energy $\mathrm{T}^{\mu\nu}$ of matter. Various field equations relating $g_{\mu\nu}$ to $T^{\mu\nu}$ have been proposed. The most successful to date are the Einstein equations which are the foundation of general relativity:

$$\mathbf{G}_{\mu\nu} \equiv \mathbf{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathbf{g}_{\mu\nu}\mathbf{R} = 8\pi\mathbf{T}_{\mu\nu} \tag{1}$$

where $\mathrm{R}_{\mu\nu}$ and R are the Ricci tensor and scalar curvature derived from the metric $\mathrm{g}_{\mu\nu}$, and $\mathrm{G}_{\mu\nu}$ is the Einstein tensor. The equations are nonlinear, since the left hand side is not a linear function of the metric.

Some other (less successful) field equations are discussed in the problems, but unless specifically stated, the Einstein field equations are to be assumed.

The equations of motion $\mathrm{T}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ are a consequence of Equation (1). Other desirable properties of $\mathrm{T}^{\mu\nu}$, called "energy conditions", must be independently postulated on physical grounds.

When the gravitational field is weak, the geometry of spacetime is nearly flat and one writes

$$\mathrm{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \mathrm{h}_{\mu\nu}$$

where all $|\mathrm{h}_{\mu\nu}|$ are $\ll 1$. In this case Equation (1) can be solved approximately, by keeping only first-order terms in $\mathrm{h}_{\mu\nu}$. A number of problems make use of this "linearized theory."

Problem 13.1. A somewhat generalized form of the Einstein field equations is

$$\mathrm{R}_{\mu\nu} - \alpha\mathrm{g}_{\mu\nu}\mathrm{R} = 8\pi\ \mathrm{T}_{\mu\nu}$$

There a is some dimensionless constant. Show that if a is not $\frac{1}{2}$ field equations disagree with experiment, even in the Newtonian limit.

Problem 13.2. A metric theory (devised by Nordström in 1913) relates $\mathrm{K}_{\mu\nu}$ to $\mathrm{T}_{\mu\nu}$ by the equations

$$\mathrm{C}_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$$
$$\mathrm{R} = \kappa\mathrm{g}_{\mu\nu}\mathrm{T}^{\mu\nu}$$

where C is the Weyl tensor. Show that this theory, in the Newtonian bait and with the proper choice of κ, agrees with Newtonian gravitation Aleory, but that this theory predicts no deflection of starlight passing near the Sun. Does this theory agree with the Pound-Rebka experiments, i.e. are photons redshifted as they rise against the gravitational pull near the surface of the Earth?

Problem 13.3. In the Brans-Dicke theory of gravity (see MTW p. 1070 or Teinberg p. 160 for field equations), the locally measured Newtonian gravitational constant G varies with position and time. Its value at infinity is G_∞. Show that G is a constant inside a self-gravitating spherical shell of mass M and circumference $2\pi R$. If $R \gg G_\infty M/c^2$, express G inside the shell in terms of G_∞, M, and R, to lowest order in ($\mathrm{G}_\infty\mathrm{M}/\mathrm{Rc}^2$).

Problem 13.4. In relativistic quantum mechanics empty space contains virtual particles. It is speculated that the vacuum therefore, has a nonzero stress-energy.

(1) What form must the vacuum stress-energy tensor take, if there is to be no preferred vacuum frame? Show that there is a resulting term in the field equations which can be interpreted as an effective cosmological constant.

(2) Suppose that the vacuum energy is due to the rest mass of virtual
protons or electrons, produced with an average spacing of their Compton wavelength. Is such vacuum stress-energy ruled out by observations?

(3) Ya. B. Zel'dovich has suggested that the mass-energy density should be associated only with the gravitational interaction energy of nearby virtual particles (separated by their Compton wavelength). What is the predicted magnitude of the vacuum stress energy here? Is it ruled out by observation?

Problem 13.5. In a local region of spacetime, an observer finds that the Ricci curvature scalar is nearly constant, $R \approx +1/a^2$. Why will the sign to be " + "? If the region of spacetime is filled only with electromagnetic energy what is R ?

Problem 13.6. Normally it is assumed that a physically possible $\mathrm{T}^{\mu\nu}$ must satisfy the (weak) energy condition, $\mathrm{T}^{00} \geq 0$ for all physical observers. Assume that $\mathrm{T}^{\mu\nu}$ has a timelike eigenvector; how can a given single observer determine whether the $T^{\mu\nu}$ he measures satisfies the condition?

Problem 13.7. The "dominant energy condition" on $T^{\mu\nu}$ requires that the weak energy condition be satisfied (all observers see a nonnegative energy density) and furthermore, that all observers see energy density greater or equal to the magnitude of the energy-flux 3 -vector. Show that the statement

$$u \cdot (-T)^n \cdot u \leq 0$$

for all nonspacelike vectors u reduces to the weak energy condition for n = 1 and to the dominant energy condition for n = 2. What about n > 2 ? [Here $\left(T^2\right)_{\mu\nu} \equiv T_\mu{}^\sigma T_{\sigma\nu}$ and so forth.]

Problem 13.8. Is it possible to have a solution of the Einstein field equations in which space is empty to the past of some surface of constant time t = 0, but in which there is a nonvanishing $T_{\mu\nu}$ to the future of this surface?

Problem 13.9. A static metric is generated by a perfect fluid. Show that fluid 4 -velocity is parallel to the time Killing vector.

Dioblem 13.10. At each point on an initial Cauchy hypersurface how many sumbers must be specified, to determine uniquely the evolution of the Detric field above that hypersurface. [Hint: First show that only spatial components of the Einstein tensor contain second time derivatives of the etric.]

Froblem 13.11. For the "nearly Newtonian" metric

$$ds^2 = -(1+2\Phi)dt^2 + (1-2\Phi)\delta_{jk}dx^j dx^k$$

calculate, to lowest nonvanishing order in Φ, the components of the Landau-Lifschitz stress-energy pseudotens or $t^{\alpha\beta}_{L.L}$ (Landau and Lifschitz P. 306). Assume that the field is changing so slowly in time that time derivatives of Φ can be neglected compared to spatial derivatives.

Problem 13.12. A gauge transformation is an infinitesimal coordinate transformation which relabels the coordinates of a point P according to

$$x^\mu_{new}(P) = x^\mu_{old}(P) + \xi^\mu(P)$$

Such transformations induce changes, to first order in $\boldsymbol{\xi}$, of the functional forms of tensors. Find the gauge transformation laws for scalars, and components of vectors and second rank tensors. For the linearized metric perturbations $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ show in particular that

$$h^{new}_{\mu\nu}(x) = h^{old}_{\mu\nu}(x) - 2\xi_{(\mu,\nu)}$$

Problem 13.13. Show that in linearized theory the components of the Riemann tensor are

$$R_{a\mu\beta\nu} = \frac{1}{2}\left(h_{a\nu,\mu\beta} + h_{\mu\beta,\nu a} - h_{\mu\nu,a\beta} - h_{a\beta,\mu\nu}\right)$$

Also show explicitly that this Riemann tensor is invariant under a gauge transformation.

Problem 13.14. In linearized theory one often uses the "trace reversed" form of the metric perturbations $\overline{h}_{\alpha\beta} \equiv h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h_\sigma{}^\sigma$. Show that there always exists a gauge transformation to the "Lorentz gauge", in which the divergence of $\bar{h}_{\alpha\beta}$ vanishes. Is this gauge transformation unique?

Problem 13.15. Show that in the Lorentz gauge (see Problem 13.14) the linearized field equations reduce to

$$\Box\overline{h}_{\mu\nu} \equiv \overline{h}_{\mu\nu,a}, a = -16\pi\ T_{\mu\nu},$$

where $\bar{h}_{\mu\nu}$ is trace-reversed $h_{\mu\nu}$.

Problem 13.16. In linearized theory a plane gravitational wave propagating in empty spacetime can be represented as the real part of a complex expression

$$\overline{h}_{\mu\nu} = \mathrm{Re}\left[A_{\mu\nu}e^{ik\alpha^x}\right]$$

where $A_{\mu\nu}$ is a constant tensor. Show that k must be a null vector, and that A is orthogonal to k .

For a particular observer with 4 -velocity u the "transverse-traceless" gauge (a further specialization of the Lorentz gauge) is defined in the observer's unperturbed rest frame ($u^0 = 1, u^i = 0$) such that

$$\bar{h}_{\mu 0} = 0, \quad \bar{h}_\mu{}^\mu = 0$$

Find the gauge transformation which accomplishes this. Does A remain orthogonal to k ?

Problem 13.17. Show that in linearized theory there is no attractive gravitational force between two thin parallel beams of light.

Problem 13.18. A rigid spherical shell of radius R and total mass M (distributed uniformly on the shell), with negligible thickness, rotates slowly with constant angular velocity Ω with respect to inertial frames far away. Use the linearized equations of gravity to determine ω, the

Magular velocity of dragging of inertial frames inside the shell, to first exder in $\Omega R \ll 1$. Show that

$$\omega \equiv -\frac{g_{0\phi}}{g_{\phi\phi}} = \frac{4}{3}\frac{M\Omega}{R} + \mathcal{O}\left(\Omega^2 R^2\right)$$

Which is constant everywhere inside the shell. [The constancy of ω in the cavity has been interpreted by some to mean that Einstein's equations atisfy Mach's principle to some degree.]

Problem 13.19. In the linearized gravitational theory, show that the equadions of motion for matter $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ are inconsistent with the field equations for the metric perturbation. Show that this inconsistency is of second order in the metric perturbation, hence negligible to first order.

Problem 13.20. A hypothetical particle of negative gravitational mass -M Is released from rest at a distance $\ell \gg M$ from another fixed particle of equal positive mass +M . As seen by a static observer, what is the magnitude and direction of the acceleration of each particle? Calculate the motion of the particles after they are released, making any reasonable approximations necessary.

13: Solutions

Solution 13.1. According to the Bianchi identities the Einstein tensor $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}R$ is divergenceless so that the divergence of our generalized field equation is

$$\left(\frac{1}{2} - a\right) R_{,\mu} = 8\pi\ T^{\nu}_{\mu;\nu}$$

On the other hand, if we contract our field equations first and then differentiate we find

$$(1 - 4a)R_{,\mu} = 8\pi\ T_{,\mu}$$

so that the equations of motion must be

$$T^{\nu}_{\mu;\nu} = \kappa T_{,\mu}, \quad \kappa \equiv \frac{\frac{1}{2} - a}{1 - 4a}$$

In the Newtonian limit, and for a fluid with density ρ and negligible pressures, the $\mu = 0$ component of this equation is

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \kappa \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

where $\underset{\sim}{v}$ is the velocity of fluid flow. If κ were not zero (i.e. if a were not $\frac{1}{2}$) this would differ from the Newtonian continuity equation, and violate the conservation of mass in Newtonian order.

Solution 13.2. The vanishing of the Weyl tensor allows us to write the metric in the conformally flat form

$$g_{\mu\nu} = e^{2\phi}\eta_{\mu\nu}$$

where $\phi \ll 1$ in the Newtonian limit (nearly flat spacetime). We have then (see Problem 9.19) nonrelativistic stress energies $T^{\mu}{}_{\mu} \approx T^{0}_{0} \approx -\rho$ and the field ations become

$$-6\phi, a\beta\eta^{\alpha\beta} = \kappa T = -\kappa\rho$$

We Newtonian limit time variations will be slow compared to spatial strations (in $c = 1$ units) so we have

$$6\phi_{,ij}\delta^{ij} = \kappa\rho$$

Dor $\kappa = 24\pi$ this is the usual Newtonian equation for the Newtonian Nitential ϕ. The solution to Problem 12.11 implies that Newtonian trainctories are geodesics in a geometry with $g_{00} \approx -(1 + 2\phi)$. Thus in the Lewtonian limit the proposed theory agrees with Newtonian theory and ϕ Dlays the role of the Newtonian potential.

For the metric of a massive object like the sun the function ϕ must All off far from the object where spacetime approaches flatness. To see Itat light is not deflected we need only notice [see Problem 9.18] that the enll geodesics of $g_{\mu\nu} = e^{2\phi}\eta_{\mu\nu}$ are identical to the null geodesics of $U_{\mu\nu}$, which are certainly not deflected by the massive object. Thus when De compare, in the asymptotically flat distant regions, the directions of a photon's motion before and after it interacts with the massive object, we will observe no deflection.

Near the earth's surface the metric is of the form

$$ds^2 = e^{2\phi(z)}\left(-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2\right)$$

where z corresponds to height above the surface. If particles are to fall with the proper acceleration we must have $\phi \approx -gz$. From the geodesic equation we find that for the energy of a photon moving vertically

$$\frac{dp^0}{dz} = -\Gamma^0_{0z}p^0 = -\phi_{,z}p^0$$

Thus a photon loses energy at the same rate as a particle and the propose theory agrees with Pound-Rebka experiment, as any theory based on geodesic motion must.

Solution 13.3. The static field equation for the Brans-Dicke scalar field

$$\nabla^2\phi = \frac{8\pi T}{(3 + 2\omega)} \tag{1}$$

Now, for a spherical shell of mass M, radius R,

$$\mathrm{T} = -\rho = \frac{\mathrm{M}\delta(\mathrm{r}-\mathrm{R})}{4\pi \mathrm{r}^2} \tag{2}$$

so that the ϕ field inside and outside the shell is

$$\phi_I = \phi_1; \quad r < R \tag{3a}$$

$$\phi_{II} = \phi_\infty + \frac{2}{3+2\omega}\frac{M}{r}, \quad r > R \tag{3b}$$

where ϕ_1 and ϕ_∞ are constants. Matching ϕ_I and ϕ_{II} at $r = R$ gives

$$\phi_1 = \phi_\infty + \frac{2}{3+2\omega}\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}} \tag{4}$$

Now, we also know that in the Brans-Dicke theory, the local gravitational constant, in terms of ϕ, is (Weinberg, Equation 9.9.11)

$$G = \phi^{-1}\left(\frac{4+2\omega}{3+2\omega}\right) \tag{5}$$

Thus

$$\phi_\infty = \frac{4+2\omega}{3+2\omega}\frac{1}{\mathrm{G}_\infty}$$

$$\mathrm{G}_1 = \phi_1^{-1}\left(\frac{4+2\omega}{3+2\omega}\right) \approx \left(\frac{4+2\omega}{3+2\omega}\right)\phi_\infty^{-1}\left[1 - \frac{2\mathrm{M}}{\phi_\infty \mathrm{R}(3+2\omega)}\right]$$

and finally

$$G_1 = G_\infty\left[1 - \frac{G_\infty M}{R}\frac{1}{(2+\omega)}\right]$$

IS solution is correct only to lowest order in M/R, not only because We terms neglected here, but also because in higher order one would Eve to account for the changed metric $\mathrm{g}_{\mu\nu}$ due to the mass and use the Yed space ∇ in Equation (1) rather than the flat space one.

Nition 13.4. If there is to be no preferred frame for the vacuum, the in any Lorentz frame. The No, $\eta_{\mu\nu}$ looks the same in any Lorentz frame so that the stress-energy, $\eta_{\mu\nu}$, or in general coordinates $\rho_{\mathrm{vac}}\ \mathrm{g}_{\mu\nu}$, does not single out any We. [The uniqueness of $\mathrm{g}_{\mu\nu}$ can be seen as follows: if there is no Nerred frame there can be no preferred vectors, hence no preferred genvectors. This is only possible if all vectors are eigenvectors, but $\mathrm{S}^\nu_\mu \mathrm{V}_\nu = \mathrm{KV}_\mu$ for all K , then S^ν_μ must be proportional to δ^ν_μ.] The field equations with vacuum and matter sources are

$$\mathrm{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\mathrm{g}^{\mu\nu}\mathrm{R} = 8\pi\left(\ \mathrm{T}^{\mu\nu}_{\mathrm{matter}} + \mathrm{g}^{\mu\nu}\rho_{\mathrm{vac}}\ \right)$$

Then we compare this with the field equations including the cosmological term

$$\mathrm{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\mathrm{g}^{\mu\nu}\mathrm{R} + \Lambda \mathrm{g}^{\mu\nu} = 8\pi\ \mathrm{T}^{\mu\nu}_{\mathrm{matter}}$$

Te see that we can identify the cosmological constant with the vacuum energy density according to $\Lambda = 8\pi\rho$ vac.

If the vacuum contains particles of mass m at a separation of $\mathrm{I} \sim \mathrm{h/mc}$ then the energy density would be of order $\mathrm{m(mc/h)}^3$. This is of order 10^4 grams /cc for electrons and 10^{17} grams /cc for protons: both absurdly large.

If the vacuum energy is to be considered as arising from the gravitational interaction, of energy $\sim \mathrm{G}\frac{\mathrm{m}^2}{\lambda}$, of nearby particles, the equivalent mass density would be $c^{-2}\left(\mathrm{Gm}^2/\lambda\right)/\lambda^3 = \mathrm{Gm}^6\mathrm{c}^2/\mathrm{n}^4$. For protons this is of order 10^{-22} grams /cc and for electrons 10^{-41} grams /cc. The density of our Galaxy is 10^{-23} grams /cc so the 10^{-22} grams /cc
associated with protons would have measurable consequences even for Galactic dynamics. The 10^{-41} grams /cc associated with electrons, on the other hand, is small even compared with cosmological densities $\left(10^{-31}\mathrm{grams/cc}\right)$ and would have no measurable effects.

These arguments should be considered only suggestive and somewhat ad hoc. On dimensional grounds ρ_{vac} must be of form

$$\frac{m^4c^3}{\hbar^3}\left(\frac{Gm^2}{c\hbar}\right)^n$$

For n = 1 we get somewhat reasonable mass densities. The Zel'dovich argument is an attempt to give a physical justification for n = 1.

Solution 13.5. If we contract the Einstein field equations we get a relation between the trace of $\mathrm{T}_{\mu\nu}$ and the Ricci scalar: $\mathrm{R} = -8\pi\ \mathrm{T}^{\mu}_{\mu}$.In the local Lorent z frame in which T^{ν}_{μ} is diagonal, $\mathrm{T}^{\mu}_{\mu} = -\rho + \mathrm{p_x} + \mathrm{p_y} + \mathrm{p}$ where $\mathrm{p_x}, \mathrm{p_y}, \mathrm{p}_z$ are the (principal) pressures. For all known equations of state $\rho \geq 3\mathrm{p}$ so T^{μ}_{μ} should always be negative and R should be positive.

The electromagnetic stress-energy is traceless (see Problem 4.16) so $R = 0$ if the only stress-energy is electromagnetic.

Solution 13.6. Given $\mathrm{T}^{\beta}_{\alpha}$ in his own orthonormal frame, the observer can find its four eigenvalues and eigenvectors:

$$\mathrm{T}^{\beta}_{a}\mathrm{W}_{\beta} = \lambda \mathrm{W}_{a} \tag{1}$$

We are given that one eigenvector is timelike. Normalize it so that $\mathrm{W}_{\alpha}\mathrm{W}^{\alpha} = -1$. If its components are $\mathrm{W}^{\alpha} = \left(\gamma, \gamma v^{\mathrm{j}}\right)$, then perform a Lorentz transformation with velocity v^j to the rest frame of W. In that frame $\mathrm{W}^{\hat{\alpha}} = (1, \underline{0})$ and Equation (1) gives $\mathrm{T}^{\hat{0}\hat{0}} = -\lambda_{\text{timelike}} \equiv \rho$, and $\mathrm{T}^{\hat{0}\hat{k}} = 0$. The 3×3 matrix $\mathrm{T}_{\hat{\mathrm{j}}\hat{\mathrm{k}}}$ can be diagonalized by a spatial rotation, and from Equation (1) we see that the diagonal elements are the remaining deavalues $\lambda_i = p_i$ with $i = 1, 2, 3$. Now let u be an arbitrary Dlocity, with components $u^{\hat{\alpha}} = \left(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}^{\mathrm{j}}\right)$ in the frame of the observer for 1. $\mathrm{T}^{a\beta}$ is diagonal. The weak energy condition is that $\mathrm{T}^{a\beta}\mathrm{u}_{a}\mathrm{u}\beta \geq 0$,

$$\rho + \bar{\mathrm{v}}_1^2\mathrm{p}_1 + \bar{\mathrm{v}}_2^2\mathrm{p}_2 + \bar{\mathrm{v}}_3^2\mathrm{p}_3 \geq 0 \tag{2}$$

We $\bar{v}^j$ is arbitrary and $\bar{v}^2 \leq 1$. The necessary and sufficient condithat Equation (2) be satisfied is

$$\rho \geq 0 \quad \rho + \mathrm{p_i} \geq 0 \tag{3}$$

Est which can be made by the original observer after he has solved wation (1). For the case when $\mathrm{T}^{\alpha\beta}$ has no timelike eigenvector, see dring and Ellis, p. 89.

Ontion 13.7. For $\mathrm{n} = 0$ the statement reads $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \leq 0$ and is trivial. For $\mathrm{Q} = 1$ the statement is $\mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ for all timelike $\mathbf{u}$. This is just the quak energy condition. For $n = 2$ the statement is that $(u \cdot T) \cdot (u \cdot T) \leq 0$ that $\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}$ must be nonspacelike. But for an observer with 4 -velocity $\mathbf{u}$, $\mathbf{I} = \left(-\rho, [\text{ Energy flux }]^{\mathbf{i}}\right)$ so, by the dominant energy condition, $|\rho| >$ Energy flux $|$ and $\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}$ is indeed nonspacelike.

Now consider any n and the statement

$$(-1)^{\mathrm{n}}\mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \cdots \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} \leq 0$$

Since $\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}$ is nonspacelike, the statement for any n is equivalent to the statement for $n - 2$. But we have shown that the dominant energy condition implies the $n = 1$ and $n = 2$ cases so it follows that the dominant energy condition implies the statement for all n . The converse follows immediately, any stress energy satisfying the statement for $\mathrm{n} = 1$ and $n = 2$ satisfies all the requirements of the dominant energy condition.

Solution 13.8. Yes. Write down a metric $\mathrm{g}_{\mu\nu}$ such that $\mathrm{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ for $\mathrm{t} < 0$ (this is clearly empty space) and $\mathrm{g}_{\mu\nu} =$ (arbitrary functions of your
choice) for $t \geq 0$. The only constraint on the arbitrary functions is that they be twice differentiable and match smoothly to the flat-space values at the $\mathrm{t} = 0$ surface. Now from this metric $\mathrm{g}_{\mu\nu}$ we can calculate the Ricci tensor and scalar and we can define a tensor $\mathrm{T}_{\mu\nu} \equiv (8\pi)^{-1}\left(\mathrm{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\right.$ This tensor is obviously symmetric, and by the contracted Bianchi identi ties is divergenceless. If we fill spacetime with a stress-energy equal to this, then $\mathrm{g}_{\mu\nu}$ is a solution of the Einstein field equations. (However, for a physically meaningful solution there must be further requirements for $\mathrm{T}_{\mu\nu}$, e.g. energy density should be everywhere nonnegative. This will not in general be true for the procedure above.)

Solution 13.9. We use Killing's equation $\xi_{(a;\beta)} = 0$ and the "hypersurfa" orthogonal" statement (see Problem 10.8) of staticity $\xi_{[\alpha;\beta}\xi_{\gamma]} = 0$, to derive

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\xi_{[a;\beta}\xi_{\gamma]}\right)^{;\gamma} \\
&= \frac{1}{3}\left(\xi_{a;\beta}\xi_{\gamma} + \xi_{\gamma;a}\xi_{\beta} + \xi_{\beta;\gamma}\xi_{a}\right)^{;\gamma} \\
&= \frac{1}{3}\left(\mathrm{R}_{\lambda\gamma\beta a}\xi^{\lambda}\xi^{\gamma} + \mathrm{R}^{\gamma}_{\lambda\alpha\gamma}\xi^{\lambda}\xi_{\beta} + \mathrm{R}^{\gamma}_{\lambda\gamma\beta}\xi^{\lambda}\xi_{a}\right)
\end{aligned}$$

where we have used the result $\xi_{\mu;\alpha\beta} = \mathrm{R}_{\gamma\beta a\mu}\xi^{\gamma}$ from Problem 10.7. The first term above vanishes by symmetry and the remaining terms give Ricci components, so we have

$$\begin{aligned}
0 = \xi^{\lambda}\mathrm{R}_{\lambda[\alpha}\xi_{\beta]} &= 8\pi\xi^{\lambda}\left(\mathrm{T}_{\lambda[\alpha} - \frac{1}{2}\ \mathrm{g}_{\lambda[a}\mathrm{T}\right)\xi_{\beta]} \\
&= 8\pi\xi^{\lambda}\left((\rho + \mathrm{p})\mathrm{u}_{\lambda}\mathrm{u}_{[\alpha} + \frac{1}{2}(\rho - \mathrm{p})\mathrm{g}_{\lambda[\alpha}\right)\xi_{\beta]}
\end{aligned}$$

The last term vanishes trivially so we can conclude $\mathrm{u}_{[\alpha}\xi_{\beta]} = 0$ and hence $\mathbf{u} \propto \boldsymbol{\xi}$.

A less rigorous proof is possible if the equivalent "stationary and time reversible" condition for staticity (see Problem 10.8) is used. In this case we see immediately that if $\mathbf{u}$ is not parallel to $\boldsymbol{\xi}$ then $\mathrm{T}^{0\mathrm{i}} \neq 0$ in the "time reversible frame." But this implies $\mathrm{G}^{0\mathrm{i}} \neq 0$ which is incompatible with time reversibility of the metric.

Olution 13.10. From the Bianchi identities $G^{\nu\mu};\mu \equiv 0$ we have

$$\frac{\partial}{\partial t}G^{\nu 0} \equiv -G^{\nu i}_{,i} - G^{\sigma\mu}\Gamma^{\nu}_{\sigma\mu} - G^{\nu\sigma}_{\sigma\mu}\Gamma^{\mu}_{\sigma\mu}$$

Derms on the right cannot involve third derivatives of the metric with G^2 − spect to time, hence $G^{\nu 0}$ cannot contain second time derivatives. It Dillows then that the four equations $G^{\nu 0} = 8\pi\ T^{\nu 0}$ serve as initial value quations, i.e. constraints on the data on the Cauchy hypersurface, while $d^f\frac{f}{d} = 8\pi\ T^{ij}$ are the dynamical equations.

An examination of the constraints on initial data is obscured by the sitrariness in the metric associated with the arbitrariness in the coordiNate system. To eliminate this confusion we can choose at the outset Worr constraints on the metric. A convenient choice is Gaussian normal wordinates: $g_{00} = -1$ and $g_{0i} = 0$. We now appear to have six field mariables g_{ij}, six dynamical equations $G^{ij} = 8\pi T^{ij}$ which we can solve for $\partial^2\ g_{ij}/\partial t^2$, and four initial value equations $G^{\nu 0} = 8\pi\ T^{\nu 0}$ giving Selations among the initial data g_{ij} and $\partial g_{ij}/\partial t$ on the initial hypersurface.

We can now differentiate the four initial value equations with respect to time and use the dynamical equations to eliminate terms of the form $\partial^2\ g_{ij}/\partial t^2$. This generates four new relations among the initial value data. These new relations must be independent of the original four because $\partial G^{\nu 0}/\partial t = 8\pi\partial\ T^{\nu 0}/\partial t$, and we can specify $\partial T^{\nu 0}/\partial t$ independently of any previously considered constraints.]

We have now eight constraints on the twelve initial value functions g_{ij} and $\partial g_{ij}/\partial t$. It follows that we can independently specify four initial value functions on the hypersurface.

If we think of these four initial value functions as the values of two field variables and their time derivatives on the cauchy hypersurface, then we can picture the time evolution of the gravitational field as being described by the dynamics of these two fields. For this reason we usually speak of the gravitational field as having two dynamical degrees of freedom.

Solution 13.11. The components of the Landau-Lifschitz pseudotensor are given by the rather awesome expression

$$\begin{aligned}(-g)t^{\alpha\beta}_{L-L} =& (16\pi)^{-1}\Big[\ g^{\alpha\beta}{}_{,\lambda}g^{\lambda\mu}{}_{,\mu} - g^{\alpha\lambda}{}_{,\lambda}g^{\beta\mu}{}_{,\mu} + \frac{1}{2}\ g^{\alpha\beta}g_{\lambda\mu}g^{\lambda\nu}{}_{,\rho}g^{\rho\mu}{}_{,\nu}\\ &- g^{\alpha\lambda}g_{\mu\nu}g^{\beta\nu}{}_{,\rho}g^{\mu\rho}{}_{,\lambda} - g^{\beta\lambda}g_{\mu\nu}g^{\alpha\nu}{}_{,\rho}g^{\mu\rho}{}_{,\lambda} + g_{\lambda\mu}g^{\nu\rho\alpha\lambda}_{\ \ g}{}_{,\nu}g^{\beta}\\ &+\frac{1}{8}\left(2\ g^{\alpha\lambda}_{,}g^{\beta\mu} - g^{\alpha\beta}g^{\lambda\mu}\right)\left(2\ g_{\nu\rho}g_{\sigma\tau} - g_{\sigma\rho}g_{\nu\tau}\right)_{g}{}^{\nu\tau}{}_{,\lambda}g^{\rho\sigma}{}_{,\mu}\Big]\end{aligned}$$

where

$$g^{\alpha\beta} \equiv (-g)^{\frac{1}{2}}g^{\alpha\beta}$$

For the metric we are considering

$$g^{00} = -(1-2\phi)^{\frac{3}{2}}(1+2\Phi)^{-\frac{1}{2}}, \quad g^{ij} = \left(1-4\Phi^2\right)^{\frac{1}{2}}\delta^{ij}, \quad g^{0i} = 0$$

Notice that all terms in the expression for $t^{a\beta}{}_{L-L}$ involve the product of the derivatives of two g 's, so to lowest order $t^{\alpha\beta}$ will go as the product of the first derivative of Φ. We need to keep therefore, only the terms proportioned to $\Phi_{,i}$ when we calculate the derivatives of the g 's

$$g^{00}_{,i} \approx 4\phi_{,i} \quad g^{ij}_{,k} \approx -4\phi\phi_{,k}\delta^{ij} \approx 0.$$

If we keep only the g^{00}, i type terms, only the underlined terms in the expression for $t^{\alpha\beta}_{L-L}$, survive and we find

$$t^{\alpha\beta}_{L-L} = (16\pi)^{-1}\left[-g^{ij}\ g^{\alpha 0\beta 0}_{,i\ \ ,j} + \frac{1}{8}\left(2\ g^{\alpha 1}\ g^{\beta m} - g^{\alpha\beta}g^{1\ m}\right)g^{0000}_{,1\ ,m}\right]$$

From this, with $g^{\alpha\beta} \approx \eta^{\alpha\beta}$ and $g^{00}_{,i} = 4\phi$, i we easily find

$$t^{00}_{L-L} = (16\pi)^{-1}\left[-\delta^{ij}{}_{g}^{00}{}_{,i}g^{00}{}_{,j} + \frac{1}{8}\delta^{1\ m}{}_{g}^{00}{}_{,1}g^{00},\ m\right] = \frac{-7}{8\pi}\delta^{ij}\Phi^0,\Phi^0,j$$

$$t^{0i}\ L - L = 0$$

$$t^{ij}_{L-L} = (16\pi)^{-1}\left[\frac{1}{8}\left(2\delta^{i1}\delta^{jm} - \delta^{ij}\delta^{Im}g^{00}{}_{,1}\ g^{00},\ m\right] = (4\pi)^{-1}\left(\Phi^0,\Phi^0,j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\Phi_{,m}\Phi^{,m}\right)$$

that the spatial components t^{ij}_{L-L} agree with the stress tensor in Problem 12.8.

10n 13.12. At a given point the value of a scalar is unchanged so

$$\phi^{\text{new}}\ (x^{\text{new}}\ (P)) = \phi^{\text{old}}\ \left(x^{\text{old}}\ (P)\right) = \phi^{\text{old}}\ (x^{\text{new}}\ (P) - \xi(P))$$

$$\phi^{\text{new}}\ (x^{\text{new}}\ ) \approx \phi^{\text{old}}\ (x^{\text{new}}\ ) - \xi^{\alpha}\phi_{,a}$$

vector field

$$\begin{aligned}\mathrm{V}_{\mu}^{\mathrm{new}} &= \frac{\partial\left(\mathrm{x}^{\mathrm{old}}\right)^{\nu}}{\partial\left(\mathrm{x}^{\mathrm{new}}\right)^{\mu}}\mathrm{V}_{\nu}^{\mathrm{old}}\left(\mathrm{x}^{\mathrm{old}}\right)\\ &= \left(\delta_{\mu}^{\nu}-\xi^{\nu},\mu\right)\left(\mathrm{V}_{\nu}^{\mathrm{old}}\left(\mathrm{x}^{\mathrm{new}}\right)-\mathrm{V}_{\nu,\sigma}^{\mathrm{old}}\,\xi^{\sigma}\right)\\ &\approx \mathrm{V}_{\mu}^{\mathrm{old}}\left(\mathrm{x}^{\mathrm{new}}\right)-\mathrm{V}_{\nu}\xi^{\nu},\mu-\mathrm{V}_{\mu,\sigma}\xi^{\sigma}\end{aligned}$$

dor a tensor field, similarly

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_{\mu\nu}^{\mathrm{new}}\left(\mathrm{x}^{\mathrm{new}}\right) &= \frac{\partial\left(\mathrm{x}^{\mathrm{old}}\right)^{\alpha}}{\partial\left(\mathrm{x}^{\mathrm{new}}\right)^{\mu}}\frac{\partial\left(\mathrm{x}^{\mathrm{old}}\right)^{\beta}}{\partial\left(\mathrm{x}^{\mathrm{new}}\right)^{\nu}}\mathrm{T}_{\alpha\beta}^{\mathrm{old}}\left(\mathrm{x}^{\mathrm{old}}\right)\\ &= \left(\delta_{\mu}^{\alpha}-\xi_{,\mu}^{\alpha}\right)\left(\delta_{\nu}^{\beta}-\xi_{,\nu}^{\beta}\right)\left(\mathrm{T}_{\alpha\beta}^{\mathrm{old}}\left(\mathrm{x}^{\mathrm{new}}\right)-\mathrm{T}_{\alpha\beta,\sigma}\xi^{\sigma}\right)\\ &\approx \mathrm{T}_{\mu\nu}^{\mathrm{old}}-\mathrm{T}_{\mu\beta}\xi_{,\nu}^{\beta}-\mathrm{T}_{\beta\nu}\xi_{,\mu}^{\beta}-\mathrm{T}_{\mu\nu,\sigma}\xi^{\sigma}\end{aligned}$$

Notice that

$$\xi_{\mu;\nu}=\mathrm{g}_{\mu\sigma}\xi_{;\nu}^{\sigma}=\mathrm{g}_{\mu\sigma}\left(\xi_{,\nu}^{\sigma}+\xi^{\alpha}\Gamma_{a\nu}^{\sigma}\right)=\mathrm{g}_{\mu\sigma}\xi_{,\nu}^{\sigma}+\xi^{\alpha}\Gamma_{\mu\alpha\nu}$$

and that

$$\xi_{(\mu;\nu)}=\mathrm{g}_{\sigma(\mu}\xi_{,\nu)}^{\sigma}+\xi^{a}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{g}_{\mu\nu,a}\right).$$

For the metric tensor then

$$\begin{aligned}\mathrm{g}_{\mu\nu}^{\mathrm{new}}\left(\mathrm{x}^{\mathrm{new}}\right) &= \mathrm{g}_{\mu\nu}^{\mathrm{old}}\left(\mathrm{x}^{\mathrm{new}}\right)-\mathrm{g}_{\mu\nu,\sigma}\xi^{\sigma}-2\,\mathrm{g}_{\sigma(\mu}\xi_{,\nu)}^{\sigma}\\ &= \mathrm{g}_{\mu\nu}^{\mathrm{old}}\left(\mathrm{x}^{\mathrm{new}}\right)-2\xi_{(\mu;\nu)}\\ &= \eta_{\mu\nu}+\mathrm{h}_{\mu\nu}^{\mathrm{old}}\left(\mathrm{x}^{\mathrm{new}}\right)-2\xi_{(\mu;\nu)}\end{aligned}$$

and we have

$$h_{\mu\nu}^{\mathrm{new}}\left(x^{\mathrm{new}}\right)=h_{\mu\nu}^{\mathrm{old}}\left(x^{\mathrm{new}}\right)-2\xi_{(\mu;\nu)}.$$

Since, to lowest order, the metric is Minkowskian we can take

$$\xi_{(\mu;\nu)}=\xi_{(\mu,\nu)}+\mathcal{O}(\xi\mathrm{h})$$

Solution 13.13. Since the Christoffel symbols $\Gamma_{a\mu\beta}=\frac{1}{2}\left(\mathrm{h}_{a\beta,\mu}+\mathrm{h}_{a\mu,\beta}-{}^{\mathrm{h}}\beta\mu,\alpha\right)$ are of order h we may ignore the terms that are products of the Γ 's in the formula relating the Riemann components to the Γ 's, thus we are left with

$$\begin{aligned}\mathrm{R}_{\alpha\mu\beta\nu} &\approx \mathrm{g}_{a\lambda}\left(\Gamma_{\mu\nu,\beta}^{\lambda}-\Gamma_{\mu\beta,\nu}^{\lambda}\right)\approx 2\Gamma_{\alpha\mu[\nu,\beta]}\\ &= \left(\mathrm{h}_{a[\nu,\beta],\mu}-\mathrm{h}_{\mu[\nu,\beta],\alpha}\right)\end{aligned}$$

and the formula is verified.
Under a gauge transformation $\mathrm{h}_{\mu\nu}\rightarrow\mathrm{h}_{\mu\nu}-2\xi_{(\mu,\nu)}$ and

$$\mathrm{R}_{a\mu\beta\nu}\rightarrow\mathrm{R}_{a\mu\beta\nu}-\xi_{a[,\nu,\beta],\mu}+\xi_{\mu[,\nu,\beta],a}-\xi_{\nu[,a,\beta],\mu}+\xi_{\nu[,\mu,\beta],a}.$$

Since partial derivatives commute the added terms cancel and the form of the Riemann tensor is unchanged.
Solution 13.14. Under a gauge transformation (see Problem 13.12) the metric perturbations become

$$\mathrm{h}_{\alpha\beta}^{\prime}=\mathrm{h}_{\alpha\beta}-2\xi_{(\alpha,\beta)}$$

If we contract this we see that the trace ($\mathrm{h}\equiv\mathrm{h}_{\sigma}^{\sigma}\equiv\eta^{\sigma\lambda}\mathrm{h}_{\sigma\lambda}$) transforms
W. $\mathrm{h}^{\prime}=\mathrm{h}-2\xi^{\sigma}$, a , (where $\xi^{\sigma}\equiv\eta^{\sigma\lambda}\xi_{\lambda}$). The transformation law for $F_{2\beta}$ is then

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{h}}_{a\beta}^{\prime} &= \mathrm{h}_{\alpha\beta}^{\prime}-\frac{1}{2}\eta_{a\beta}\;\mathrm{h}^{\prime}=\mathrm{h}_{a\beta}-2\xi_{(\alpha,\beta)}-\frac{1}{2}\eta_{a\beta}\left(\mathrm{h}-2\xi_{,\sigma}^{\sigma}\right)\\ &= \overline{\mathrm{h}}_{a\beta}-\xi_{a,\beta}-\xi_{\beta,a}+\eta_{a\beta}\xi_{,\sigma}^{\sigma}\\ \overline{\mathrm{h}}_{a\beta}^{\prime}{}^{\beta} &= \eta^{\lambda\beta}\overline{\mathrm{h}}_{\alpha\beta,\lambda}^{\prime}=\overline{\mathrm{h}}_{a\beta^{\prime}}{}^{\beta}-\xi_{a,\beta^{\prime}}{}^{\beta}-\xi_{\beta,a}{}^{,\beta}+\xi_{\sigma,a}^{;\sigma}\\ &= \overline{\mathrm{h}}_{a\beta^{\prime}}{}^{,\beta}-\xi_{a,\beta^{\prime}}{}^{\beta}=\overline{\mathrm{h}}_{a\beta^{\prime}}{}^{\beta}-\mathrm{u}\xi_{a}\end{aligned}$$

So we need only choose the four functions ξ_{α} such that they satisfy the Amiliar wave equation $\Box\xi_{\alpha}=\overline{\mathrm{h}}_{\alpha\beta}\beta$.
Such a solution can always be found (e.g. the retarded integral of classical electromagnetic wave theory). The solution, of course, is not unique. We can always add to ξ_{a} any solution of $\Box\xi_{a}=0$.

Solution 13.15. In Problem 13.13 we found an expression for the linearized Riemann tensor. By contracting this we can get the linearized Ricci tensor

$$\mathrm{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{h}^{a}_{;\nu a},\mu + \mathrm{h}^{a}_{;\mu a},\nu - \Box \mathrm{h}_{\mu\nu} - \mathrm{h}_{,\mu\nu}\right)$$

where $\mathrm{h} \equiv \mathrm{h}_{\sigma}\sigma$. In the Lorentz gauge $\overline{\mathrm{h}}_{a\beta}\beta^{\beta} = 0$ implies $\mathrm{h}_{\alpha\beta}\beta^{\beta} = \frac{1}{2}\ \mathrm{h}, a$ so that

$$\mathrm{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{h}_{,\mu\nu} - \Box \mathrm{h}_{\mu\nu} - \mathrm{h}_{,\mu\nu}\right) = -\frac{1}{2}\Box\ \mathrm{h}_{\mu\nu}$$

and by contracting again we have $R = -\frac{1}{2}\Box h$. The field equations then are

$$\mathrm{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\ \mathrm{g}_{\mu\nu}\mathrm{R} = -\frac{1}{2}\left(\Box\ \mathrm{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\Box \mathrm{h}\right) = -\frac{1}{2}\Box\ \overline{\mathrm{h}}_{\mu\nu}$$

so that

$$\Box \overline{\mathrm{h}}_{\mu\nu} = -16\pi\ \mathrm{T}_{\mu\nu}$$

Solution 13.16. For $\overline{\mathrm{h}}_{\mu\nu}$ to satisfy the Lorentz gauge condition (see Problem 13.14), and the linearized field equations, we must have

$$0 = \overline{\mathrm{h}}^{,\nu}_{\mu\nu} = \mathrm{Re}\left[\mathrm{ik}^{\nu}\mathrm{A}_{\mu\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{ik}\alpha^{\alpha}}\right]$$
$$0 = \overline{\mathrm{h}}^{,\sigma}_{\mu\nu,\sigma} = \mathrm{Re}\left[-\mathrm{k}_{\sigma}\mathrm{k}^{\sigma}\mathrm{A}_{\mu\nu}\mathrm{e}^{\mathrm{ik}\alpha^{\alpha}}\right].$$

So the 4 -vector k must be null and must be orthogonal to A .
The gauge transformation of $\bar{h}_{\mu\nu}$ is given in Problem 13.14 as

$$\overline{\mathrm{h}}^{\mathrm{new}}_{\mu\nu}\ = \overline{\mathrm{h}}^{\mathrm{old}}_{\mu\nu}\ - 2\xi_{(\mu,\nu)} + \eta_{\mu\nu}\xi^{\sigma}_{,\sigma}.$$

Clearly the gauge transformation must be of a plane wave $\mathrm{e}^{\mathrm{ik}\alpha^{\mathrm{x}\alpha}}$ form. With $\xi_{\mu} = -\mathrm{iC}_{\mu}\mathrm{e}^{\mathrm{ik}a^{\mathrm{x}a}}$ we have

$$A^{\mathrm{new}}_{\mu\nu}\ = A^{\mathrm{old}}_{\mu\nu}\ - (C_{\mu}\mathrm{k}_{\nu} + C_{\nu}\mathrm{k}_{\mu}) + \eta_{\mu\nu}\mathrm{C}^{\alpha_{\mathrm{k}}}{}_{\alpha}.$$

If this equation is contracted with k^{μ} we see that

$$\mathrm{A}^{\mathrm{new}}_{\mu\nu}\ \mathrm{k}^{\mu} = -\mathrm{k}^{\nu}\mathrm{C}_{\mu}\mathrm{k}^{\mu} + \mathrm{k}^{\nu}\mathrm{C}^{a}\mathrm{k}_{\alpha} = 0$$

so A remains orthogonal to k . We can now apply the transversetraceless condition, $(\mathrm{A}^{\mathrm{new}}\ )^{\mu}_{\mu} = 0$ and $\mathrm{A}^{\mathrm{new}}_{\mu 0}\ = 0$, to our equation to get

$$0 = \left(\mathrm{A}^{\circ\mathrm{ld}}\right)^{\mu}_{\mu} + 2\mathrm{C}\cdot\mathrm{k}$$
$$0 = \mathrm{A}^{\mathrm{old}}_{\mu 0} - (\mathrm{C}_{0}\mathrm{k}_{\mu} + \mathrm{C}_{\mu}\mathrm{k}_{0}) + \eta_{\mu 0}\mathrm{C}\cdot\mathrm{k}.$$

These can be combined into

$$0 = A^{\mathrm{old}}_{\mu 0}\ - (C_{0}k_{\mu} + C_{\mu}k_{0}) - \frac{1}{2}\eta_{\mu 0}A^{\mathrm{old}\ \mu}_{\mu}.$$

Taking $\mu = 0$ we have $C_{0} = (2k_{0})^{-1}\left(A^{\mathrm{old}}_{00}\ + \frac{1}{2}\left(A^{\mathrm{old}}\ \right)^{\mu}_{\mu}\right)$. The spatial components are then easily found from

$$0 = A^{\mathrm{old}}_{i0}\ - (C_{0}k_{i} + C_{i}k_{0}).$$

Wation 13.17. For a beam of light moving in the x -direction nonzero aponents of the stress-energy tensor are $T_{00} = T_{xx} = -T_{0x}$. From the sum of the linearized field equations

$$\Box \overline{\mathrm{h}}_{\alpha\beta} \equiv \overline{\mathrm{h}}_{a\beta,\gamma}{}^{,\gamma} = -16\pi\ \mathrm{T}_{\alpha\beta}$$

[4] did from the fact that all components of $h_{a\beta}$ should be retarded integrals ser the source, the solutions must be related in the same way that the sarces are:

$$\overline{\mathrm{h}}_{00} = \overline{\mathrm{h}}_{\mathrm{xx}} = -\overline{\mathrm{h}}_{0\mathrm{x}},$$

inth all other components zero. Since the trace of $\overline{\mathrm{h}}_{\alpha\beta}$ is zero, $\overline{\mathrm{h}}_{\alpha\beta} = v_{2\beta}$ and the above relation is also true if we remove the bars on the h 's. For a photon moving in the x -direction with affine parameter λ,

$$\frac{\mathrm{d}^{2}\mathrm{y}}{\mathrm{d}\lambda^{2}} = -\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{dx}\beta}{\mathrm{d}\lambda}\Gamma^{\mathrm{y}}_{a\beta} = -\left(\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{d}\lambda}\right)^{2}\left(\Gamma^{\mathrm{y}}_{00^{+}} + \Gamma^{\mathrm{y}}_{\mathrm{xx}} + 2\Gamma^{\mathrm{y}}_{0\mathrm{x}}\right).$$

But the right hand side vanishes

$$2\Gamma^y_{0x} + \Gamma^y_{00} + \Gamma^y_{xx} = -\frac{1}{2}\left(h_{00,y} + h_{xx,y} - 2h_{0x,y}\right) = 0$$

so that $d^2y/d\lambda^2 = 0$ and similarly $d^2z/d\lambda^2 = 0$. Thus the photon continues to move parallel to the beam of light and therefore two thin beams of light initially moving parallel will not attract each other to the lowest order in each of their mass-energies. (In fact, it turns out that there is no attraction even in higher order.)

Solution 13.18. From linearized theory we know that in the Lorentz gauge

$$\Box\overline{\mathrm{h}}_{a\beta} = -16\pi\ \mathrm{T}_{a\beta}.$$

Since the source, and hence the field, is stationary this becomes a Poisson equation $\nabla^2\overline{\mathrm{h}}_{a\beta} = -16\pi\ \mathrm{T}_{a\beta}$. To calculate $\overline{\mathrm{h}}_{0\mathrm{y}}$ we need $\mathrm{T}_{0\mathrm{y}}$. For a spherical mass configuration of mass density ρ rotating (in the positive sense about the z-axis) with angular velocity Ω, we have $\mathrm{T}_{0\mathrm{y}} = \mathrm{r}\Omega\rho\sin\theta\cos\phi$. Notice that $\mathrm{T}_{0\mathrm{y}}$ is proportional to the real part of the spherical harmonic $\mathrm{Y}_{11}(\theta,\phi)$ and hence $\overline{\mathrm{h}}_{0\mathrm{y}}$ will also be. We therefore write $\overline{\mathrm{h}}_{0\mathrm{y}} = \mathrm{f(r)}\sin\theta\cos\phi$ and the Poisson equation becomes

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{d}{dr}f(r)\right] - \frac{2f(r)}{r^2} = 16\pi r\Omega\rho.$$

If the source is a spherical shell of mass M, radius R, then $\rho = \mathrm{M}\delta(\mathrm{r}-\mathrm{R})/4\pi\mathrm{R}^2$ and the equation can easily be integrated to show

$$f(r) = -\frac{4M\Omega}{3}\times\begin{bmatrix} r/R & \text{for} & r<R \\ \left(\frac{R}{r}\right)^2 & \text{for} & r>R\end{bmatrix}$$

and hence inside the shell

$$g_{0y} \approx h_{0y} = \bar{h}_{0y} = -\frac{4\Omega}{3}M\frac{r}{R}\sin\theta\cos\phi.$$

By symmetry

$$g_{\hat{0}\hat{\phi}} = g_{0y}|_{\phi=0} = -\frac{4}{3}\Omega M\left(\frac{r}{R}\right)\sin\theta$$

and

$$\omega = -\frac{\mathrm{g}_{0\phi}}{\mathrm{g}_{\phi\phi}} = -\frac{\mathrm{g}_{\hat{0}\hat{\phi}}}{\left(\ \mathrm{g}_{\phi\phi}\right)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\mathrm{g}_{\hat{0}\hat{\phi}}}{\mathrm{r}\sin\theta} = \frac{4\Omega\mathrm{M}}{3\mathrm{R}}.$$

Inside the shell then locally inertial frames will rotate relative to inertial frames far away. Mach's principle states that the inertial properties of spacetime depend on the motion of distant matter. The dragging of inertial frames certainly is an example of the influence of matter on the inertial properties of spacetime. The constancy of ω suggests that the influence of distant matter on inertial properties might be viewed as a $\frac{1}{2}$ law, so that the inertial properties are not primarily determined by nearby matter, but rather the influence of all the matter in the universe must be considered. (But aside from a few idealized examples such as this one, no one has ever been very successful in "deriving" Mach's principal from the field equations of general relativity.)

170n 13.19. The equations of motion $\mathrm{T}^{\mu\nu}_{\ ;\nu} = 0$ are clearly gauge in$\mathrm{T}^{2,\infty}$, but in the Lorentz gauge (see Problem 13.15) $\mathrm{T}^{\mu\nu}{}_{,\nu} =$
$(6)^{-1}\Box\big)^{-1}{}_{\nu\nu} = 0$ rather than $\mathrm{T}_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0$. The difference between $\mathrm{T}^{\mu\nu}{}_{;\nu}\mathrm{I}^{\mu\nu}_{\alpha},\nu$ is of order TΓ. But both T and Γ are of the order of $\mathrm{h}_{\alpha\beta}$ De inconsistent terms are of second order in the deviation of the metric flatness.
distion 13.20. By the principle of equivalence, the acceleration of a ⇒ is independent of the magnitude of its mass, and depends only on er masses with which it gravitates. Thus a positive mass attracts both itive and negative masses, and a negative mass repels them both.
Here, then, the acceleration of the negative mass is toward the posiS. 2 mass, and of magnitude GM/ℓ^2. (Since $\ell \gg \mathrm{M}$, we are in the Antonian limit.) The acceleration of the positive mass is in the same Strection and of the same magnitude: the two masses try to chase each ther.

The problem is more complicated once the particles are moving, because each sees the retarded field of the other.

Since we are given $M \ll \ell$, we shall solve the problem using linearized theory which will be justified as long as their distance in a frame comoving with either remains much greater than M . The equation

$$\Box\overline{\mathrm{h}}_{\mu\nu} = -16\pi\ \mathrm{T}_{\mu\nu}$$

has the retarded integral solution

$$\overline{\mathrm{h}}_{\mu\nu}(\mathrm{t},\underset{\sim}{x}) = 4\int\frac{\mathrm{T}_{\mu\nu}\left(\mathrm{t}',\underset{\sim}{x}'\right)}{|\underline{x}-\underline{x}'|}\delta\left(\mathrm{t}'+|\underline{x}-\underline{x}'|-\mathrm{t}\right)\mathrm{d}^3\mathrm{x}'\mathrm{dt}'. \tag{2}$$

In linearized theory we can superpose the $\mathrm{T}_{\mu\nu}$'s (that is the $\mathrm{h}_{\mu\nu}$'s) of each particle. For a particle of mass m moving along a world-line

$$\mathbf{x}^{\mu} = z^{\mu}(r) \tag{3}$$

we have

$$\mathrm{T}_{\mu\nu}(\mathrm{t}, \underset{\sim}{\mathrm{x}}) = \mathrm{m} \int \mathrm{u}_{\mu}\mathrm{u}_{\nu}\delta^{4}(\mathrm{x} - \mathrm{z}(r))\mathrm{d}r = \mathrm{m}\mathrm{u}_{\mu}\mathrm{u}_{\nu}\delta^{3}(\underset{\sim}{\mathrm{x}} - \underset{\sim}{z}(\mathrm{t}))/\mathrm{u}^{0} \tag{4}$$

where we have used $\mathrm{d}\tau = \mathrm{dt}/\mathrm{u}^{0}$ to do the integral. Substitute Equation in Equation (2):

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{h}}_{\mu\nu}(\mathrm{t}, \underset{\sim}{\mathrm{x}}) &= 4\ \mathrm{m} \int \frac{\mathrm{u}_{\mu}\mathrm{u}_{\nu}\delta^{3}\left[\underset{\sim}{x}' - \underset{\sim}{z}\left(\mathrm{t}'\right)\right]\delta\left(\mathrm{t}' + \left|\underset{\sim}{\mathrm{x}} - \underset{\sim}{x}'\right| - \mathrm{t}\right)\mathrm{d}^{3}\mathrm{x}'\mathrm{d}\mathrm{t}'}{\mathrm{u}^{0}\left|\underset{\sim}{\mathrm{x}} - \underset{\sim}{x}'\right|} \\ &= 4\ \mathrm{m} \int \frac{\mathrm{u}_{\mu}\left(\mathrm{t}'\right)\mathrm{u}_{\nu}\left(\mathrm{t}'\right)\delta\left(\mathrm{t}' + \left|\underset{\sim}{\mathrm{x}} - \underset{\sim}{z}\left(\mathrm{t}'\right)\right| - \mathrm{t}\right)\mathrm{d}\mathrm{t}'}{\mathrm{u}^{0}\left(\mathrm{t}'\right)\left|\underset{\sim}{\mathrm{x}} - \underset{\sim}{z}\left(\mathrm{t}'\right)\right|}\end{aligned} \tag{5}$$

By symmetry everything depends only on one spatial coordinate, say x. Let

$$\mathrm{R}\left(\mathrm{t}'\right) = \left|\mathrm{x} - \mathrm{z}\left(\mathrm{t}'\right)\right| = \epsilon\left[\mathrm{x} - \mathrm{z}\left(\mathrm{t}'\right)\right] \tag{6}$$

where $\epsilon = \pm 1$ for $x \gtrless z$. Then

$$\overline{\mathrm{h}}_{\mu\nu}(\mathrm{t}, \mathrm{x}) = 4\ \mathrm{m} \int \frac{\mathrm{u}_{\mu}{}^{\mathrm{u}}\nu\delta\left(\mathrm{t}' + \mathrm{R} - \mathrm{t}\right)\mathrm{d}\mathrm{t}'}{\mathrm{u}^{0}\mathrm{R}}. \tag{7}$$

The 4 -velocity $\mathbf{u}$ is determined from the equation of motion

$$\mathrm{d}\mathrm{u}^{\mu}/\mathrm{d}\tau = -\Gamma^{\mu}_{a\beta}\mathrm{u}^{\alpha}\mathrm{u}^{\beta}$$

i.e.

$$\mathrm{d}\mathrm{u}^{\mu}/\mathrm{d}\tau + \eta^{\mu\nu}\mathrm{u}^{\alpha}\mathrm{u}^{\beta}\left(\mathrm{h}_{\nu\alpha,\beta} + \mathrm{h}_{\nu\beta,\alpha} - \mathrm{h}_{\alpha\beta,\nu}\right)/2 = 0. \tag{8}$$

Here the $\mathrm{h}_{\alpha\beta}$ of particle 2 evaluated at the position of particle 1 is used to find u^{μ} of particle 1 and vice versa. By symmetry $u^{y} = u^{z} = 0$ for both particles. Write out Equation (8) for $\mu = 0$ and $\mu = \mathrm{x}$, using $h_{00} = h_{xx}$ (easily verified from Equation (7)):

$$\mathrm{d}\mathrm{u}^{0}/\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\ \mathrm{h}_{00,0}\left(\mathrm{u}^{0^{2}} - \mathrm{u}^{\mathrm{x}^{2}}\right) + \mathrm{h}_{00,\mathrm{x}^{0}}\mathrm{u}^{\mathrm{x}} + \mathrm{h}_{0\mathrm{x},\mathrm{x}^{1}}\mathrm{u}^{\mathrm{x}^{2}} \tag{10}$$

$$\mathrm{d}\mathrm{u}^{\mathrm{x}}/\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\ \mathrm{h}_{00,\mathrm{x}}\left(\mathrm{u}^{0^{2}} - \mathrm{u}^{\mathrm{x}^{2}}\right) - \mathrm{h}_{0\mathrm{x},\mathrm{u}^{0^{2}}} - \mathrm{h}_{00,0}\mathrm{u}^{0}\mathrm{u}^{\mathrm{x}}. \tag{11}$$

Now evaluate the derivatives of the $h_{\alpha\beta}$ from Equation (7):

$$\mathrm{T}_{00,0} = 4\ \mathrm{m}\frac{\partial}{\partial\mathrm{t}} \int \frac{\mathrm{u}^{0}\left(\mathrm{t}'\right)\delta\left(\mathrm{t}' + \mathrm{R}\left(\mathrm{t}'\right) - \mathrm{t}\right)\mathrm{d}\mathrm{t}'}{\mathrm{R}\left(\mathrm{t}'\right)} = -4\ \mathrm{m} \int \frac{\mathrm{u}^{0}\delta'\left(\mathrm{t}' + \mathrm{R} - \mathrm{t}\right)\mathrm{d}\mathrm{t}'}{\mathrm{R}}$$

Mere δ' denotes differentiation with respect to the argument of the in function. Let

Let

$$\begin{aligned} & f\left(t'\right) = t' + R\left(t'\right) \\ & \frac{df}{dt'} = 1 - \epsilon v\left(t'\right), \quad v = \frac{dz}{dt} \\ \bar{h}_{00,0} &= -4m \int \frac{u^{0}}{R}\left[\frac{d}{df}\delta(f - t)\right]\frac{dt'}{df}df \\ &= 4m \int \frac{d}{df}\left[\frac{u^{0}}{R}\frac{dt'}{df}\right]\delta(f - t)df \\ &= 4m\left[\frac{dt'}{df}\frac{d}{dt}\left(\frac{u^{0}}{R}\frac{dt'}{df}\right)\right]_{f=t} \\ &= 4m\left[\frac{1}{1 - \epsilon v}\frac{d}{dt'}\frac{u^{0}}{(1 - \epsilon v)R}\right]_{t'=t-R(t')}\end{aligned}$$

Since $\mathrm{du}^0/\mathrm{dt}' \sim \mathrm{m}$, to linear order in m we need not differentiate u^0 and v in Equation (12). Thus

$$\overline{\mathrm{h}}_{00,0} = 4\ \mathrm{m}\left[\frac{\epsilon \mathrm{v u}^0}{(1-\epsilon \mathrm{v})^2 \mathrm{R}^2}\right]_{\mathrm{ret.}} \tag{13}$$

where ret. means evaluated at the retarded time $t' = t - R(t')$. But

$$\begin{aligned} v(t') &= v(t) + (dv/dt)(t'-t) + \cdots \\ &= v(t) + \mathcal{O}(m) \end{aligned}$$

and similarly for $u^0 = \left(1-v^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, and

$$\begin{aligned} \mathrm{R}(\mathrm{t}') &= \epsilon\left[\mathrm{x} - z(\mathrm{t}')\right] \\ &= \epsilon\left[\mathrm{x} - z(\mathrm{t}) - \mathrm{v}(\mathrm{t})(\mathrm{t}'-\mathrm{t})\right] + \mathcal{O}(\mathrm{m}) \\ &= \epsilon\left[\mathrm{x} - z(\mathrm{t}) + \mathrm{v}(\mathrm{t})\mathrm{R}(\mathrm{t}')\right], \end{aligned}$$

thus

$$\mathrm{R}(\mathrm{t}')(1-\epsilon \mathrm{v}) = \epsilon[\mathrm{x} - z(\mathrm{t})].$$

Since $\bar{h}_{00,0}$ is being evaluated at the position of the other particle, we have

$$\overline{\mathrm{h}}_{00,0} = 4\ \mathrm{m}\frac{\epsilon \mathrm{v u}^0}{(z_1 - z_2)^2} \tag{14}$$

where the quantities are evaluated at the instantaneous time t. Similarly

$$\bar{h}_{0x,0} = \frac{-u^x}{u^0}\bar{h}_{00,0} \tag{15}$$

$$\bar{h}_{xx,0} = \left(\frac{u^x}{u^0}\right)^2 \bar{h}_{00,0} \tag{16}$$

The spatial derivatives can be evaluated by noting that x occurs only in R in Equation (7). Thus

$$\begin{aligned} \bar{h}_{00,x} &= \epsilon\frac{\partial}{\partial R} 4m \int \frac{u^0 \delta(t' + R - t)\, dt'}{R} \\ &= 4m\epsilon\left[-\int \frac{u^0\delta(t'+R-t)\,dt'}{R^2} + \int \frac{u^0\delta'(t'+R-t)\,dt'}{R}\right] \\ &= 4m\epsilon\left[-\int \frac{u^0}{R^2}\delta(f-t)\frac{dt'}{df}df + \int \frac{u^0}{R}\frac{dt'}{df}\frac{d}{df}\delta(f-t)df\right] \\ &= -4m\epsilon\left[\frac{u^0}{(1-\epsilon v)R^2} + \frac{1}{(1-\epsilon v)}\frac{d}{dt}\left\{\frac{u^0}{(1-\epsilon v)R}\right\}\right]_{\mathrm{ret.}} \\ &= -4m\epsilon\left[\frac{u^0}{(1-\epsilon v)R^2} + \frac{u^0\epsilon v}{(1-\epsilon v)^2 R^2}\right]_{\mathrm{ret.}} \\ &= -\frac{4m\epsilon u^0}{(z_1 - z_2)^2} \end{aligned} \tag{17}$$

illarly

$$\overline{\mathrm{h}}_{0\mathrm{x},\mathrm{x}} = -\frac{\mathrm{u}^{\mathrm{x}}}{\mathrm{u}^0}\overline{\mathrm{h}}_{00,\mathrm{x}} \tag{18}$$

$$\overline{\mathrm{h}}_{\mathrm{xx},\mathrm{x}} = \left(\frac{\mathrm{u}^{\mathrm{x}}}{\mathrm{u}^0}\right)^2 \overline{\mathrm{h}}_{00,\mathrm{x}} \tag{19}$$

Are that the gauge condition $h^{\alpha}_{\mu,\alpha} = 0$ is satisfied by Equations (14)8). Write out the equations of motion, Equations (10) and (11), for ticle 1 letting $u^0 = \gamma, u^x = \gamma v, g = m/(z_1 - z_2)^2$. Take particle 1 be the positive mass particle at $z_1 > z_2$, so that $\epsilon = +1$ and the orce mass in Equations (14)-(19) is negative.

$$\mathrm{d}y_1/\mathrm{d}\tau = -\mathrm{g}y_2\mathrm{v}_2\left(1+\mathrm{v}_2^2\right) + 2\ \mathrm{g}y_2\left(1+\mathrm{v}_2^2\right)\gamma_1^2\mathrm{v}_1 - 4\ \mathrm{g}y_2\mathrm{v}_2\gamma_1^2\mathrm{v}_1^2 \tag{20}$$

$$\mathrm{d}\left(\gamma_1\mathrm{v}_1\right)/\mathrm{d}r = \mathrm{g}\gamma_2\left(1+\mathrm{v}_2^2\right) - 4\ \mathrm{g}\gamma_2\mathrm{v}_2^2\gamma_1^2 + 2\ \mathrm{g}\gamma_2\mathrm{v}_2\left(1+\mathrm{v}_2^2\right)\gamma_1^2\mathrm{v}_1 \tag{21}$$

Sow the equations for $\mathrm{d}\gamma_2/\mathrm{d}\tau_2$ and $\mathrm{d}\left(\gamma_2 \mathrm{v}_2\right)/\mathrm{d}\tau_2$ have the same rightWand sides as Equations (20)-(21), with $v_2 \leftrightarrow v_1$. (εm keeps the same sign.) Since $v_1 = v_2$ at $t = 0$, then $v_1 = v_2$ for all t. Thus $z_1 - z_2$ is constant for all t, i.e. $z_1 - z_2 = \ell$. We can drop the subscripts 1 and 2 in Equations (20) and (21) and get, after some simplification

$$\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}\tau = \mathrm{gv}/\gamma \tag{22}$$
$$\mathrm{d}(\gamma \mathrm{v})/\mathrm{d}\tau - \mathrm{g}/\gamma \tag{23}$$

These equations are not independent, because of the relation $\gamma = \left(1 - \mathrm{v}^2\right)^{-\frac{1}{2}}$. We find then that the differential equation for the motion is

$$\mathrm{dv}/\mathrm{d}r = \mathrm{g}\left(1 - \mathrm{v}^2\right)^2, \tag{24}$$

and hence

$$2gr = v/\left(1 - v^2\right) + \tanh^{-1} v \tag{25}$$

where $\tau = 0$ when $\mathrm{v} = 0$. Thus

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{dv}} = \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}} \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{dv}} = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{g}} \left(1 - \mathrm{v}^2\right)^{-5/2}$$

implies

$$z_2 = \frac{1}{3g}\left[\left(1 - v^2\right)^{-\frac{3}{2}} - 1\right] \tag{26}$$
$$z_1 = z_2 + \ell$$

and similarly

$$\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dv}} = \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{d}\pi} \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{dv}} = \frac{1}{\mathrm{g}} \left(1 - \mathrm{v}^2\right)^{-5/2} \tag{27}$$

implies

$$t = \frac{v}{g}\left[\left(1 - v^2\right)^{-\frac{t}{2}} + \frac{v^2}{3}\left(1 - v^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right]. \tag{28}$$

Equations (26) and (28) are parametric equations for the trajectories with v as parameter. Note that while the coordinate separation of the particles remains constant, the proper separation as measured by an observer comoving with one of the particles increases, approximately as $\gamma\ell$. Proof: Suppose particle 1 has velocity v at some instant t_1 at position $z_1\left(t_1\right)$. The Lorentz transformation to the locally comoving inertial frame is

$$\mathrm{x}' = y\left[\mathrm{x} - z_1\left(\mathrm{t}_1\right) - \mathrm{v}\left(\mathrm{t} - \mathrm{t}_1\right)\right]$$
$$\mathrm{t}' = y\left[\mathrm{t} - \mathrm{t}_1 - \mathrm{v}\left\{\mathrm{x} - z_1\left(\mathrm{t}_1\right)\right\}\right].$$

Thus the trajectory of particle 2 in these coordinates is $z_2'\left(t_2'\right)$ where

$$z_2' = \gamma\left[z_2\left(\mathrm{t}_2\right) - z_1\left(\mathrm{t}_1\right) - \mathrm{v}\left(\mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_1\right)\right]$$
$$\mathrm{t}_2' = \gamma\left[\mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_1 - \mathrm{v}\left\{z_2\left(\mathrm{t}_2\right) - z_1\left(\mathrm{t}_1\right)\right\}\right].$$

The distance to particle 2 is $-z_2'\left(t_2' = 0\right)$. Let

$$\beta = z_2\left(t_2\right) - z_1\left(t_1\right).$$

Now $\mathrm{t}_2' = 0$ implies

$$\mathrm{t}_2 = \mathrm{t}_1 + \mathrm{v}\beta$$

$$\begin{aligned}\beta &= z_2\left(t_1 + v\beta\right) - z_1\left(t_1\right) \\ &\approx z_2\left(t_1\right) + v\beta dz_2/\left.dt\right|_{t=t_1} + \left.\frac{v^2\beta^2}{z}\frac{d^2 z_2}{dt^2}\right|_{t=t_1} - z_1\left(t_1\right) \\ &= -\ell + v^2\beta + \mathcal{O}(\mathrm{m/L})\end{aligned}$$

Solve for β :

$$\beta = \frac{-\ell}{\left(1 - v^2\right)}.$$

Thus

$$-z_2'\left(t_2' = 0\right) = -\gamma\left(\beta - v^2\beta\right) \approx \gamma\ell.$$

13.7.14 14 Physics in Curved Spacetime

This chapter deals with the generalization of the laws of specialrelativistic physics (e.g. hydrodynamics, electrodynamics) to curved spacetime. Often this generalization involves only the replacement of partial differentiation by covariant differentiation ("comma-goes-tosemicolon rule"); for example the generalization of the equations of motion is from $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ to $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$; this latter equation, with semicolons, includes the effects of gravity.

Problem 14.1. Write the stress-energy tensor for a single free particle, and show that the equation of geodesic motion follows from $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$.

Problem 14.2. Show that the condition for thermal equilibrium of a static system in general relativity is

$$T\,(-g_{00})^{\frac{1}{2}} = \text{ constant}$$

(where T is the temperature measured by a local static observer) rather than the Newtonian relation $T =$ constant.

Problem 14.3. Derive the Euler equation $(\rho + p)\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = -\left[\nabla p + (\nabla_{\mathbf{u}} p)\,\mathbf{u}\right]$ from $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, and show that this equation has the correct Newtonian limit.

Problem 14.4. Derive the general relativistic equation of hydrostatic equilibrium,

$$\frac{-\partial p}{\partial x^{\nu}} = (\rho + p)\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \log\,(-g_{00})^{\frac{1}{2}}$$

and compare it to the Newtonian equation.

Problem 14.5. Show that a highly relativistic fluid ($p = \frac{1}{3}\rho$) in hydrostatic equilibrium in a gravitational field can never have a free surface (i.e. a surface where $\rho \to 0$).

Problem 14.6. Two identical containers in a static uniform gravitational field contain different substances. The containers and contents have identical time-independent densities of mass-energy, but different (and possibly anisotropic) stresses. Do the containers weigh the same if "eighed on the same scale?

Problem 14.7. If $\mathbf{u}$ is the 4 -velocity of a perfect gas undergoing adiabatic stationary flow in a stationary gravitational field, prove (the relativistic Bernoulli equation) that along the flow lines

$$u_0 = \text{ constant } \times n/(\rho + p)$$

where $n =$ baryon number density.

Problem 14.8. Show that the relativistic Bernoulli equation of Problem 14.7 reduces to the correct Newtonian limit for slow velocities and weak gravitational fields.

Problem 14.9. Consider a moving medium with four-vel city $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Choose two arbitary neighboring particles A and B. At each event along the world line of A define the four-vector separation of B from A, ξ, as follows: (i) $\boldsymbol{\xi}$ is an infinitesimal vector from a given event on A 's world line to B's world line; (ii) ξ has vanishing time component, $\xi^{\hat{0}} = 0$, relative to the orthonormal tetrad carried by A .

(a) Define the motion of the medium to be a rigid-body motion if and only if the distance, $(\xi \cdot \xi)^{\frac{1}{2}}$, between any two neighboring particles e.g., A and B above - is constant for all time. Show that a medium undergoes rigid body motion if and only if $\sigma_{\alpha\beta} = 0$ and $\theta = 0$, where $\sigma_{\alpha\beta}$ and θ are the quantities defined in Problem 5.18.

(b) How many independent equations do these conditions constitute? How many degrees of freedom are there in relativistic rigid-body motion?

Problem 14.10. If θ is the expansion of a fluid, derive the Raychaudhuri equation

$$\frac{d\theta}{d\tau} = a^{a}_{;\alpha} + 2\omega^2 - 2\sigma^2 - \frac{1}{3}\theta^2 - R_{a\beta}u^{a}u^{\beta}$$

where $\omega^2 = \frac{1}{2}\omega_{a\beta}\omega^{\alpha\beta}, \sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma_{a\beta}\sigma^{\alpha\beta}$, and the notation is the same as in Problem 5.18.

Problem 14.11. In a certain spacetime fluid flows along geodesics with zero shear and expansion. (See Problem 5.18 for the definitions of shear $\sigma_{a\beta}$ and expansion θ.) Show that the spacetime has a timelike Killing vector.

Problem 14.12. An observer in a closed box (not necessarily in free fall) measures positions and times inside his box with rulers and a clock. Show that the equation of motion for a particle, correct to first order in its measured velocity $v \ll 1$ and position x^j is

$$\begin{aligned} dv^j/dt = {} & 2(\underset{\sim}{v} \times \underset{\sim}{\omega})^j - [(\underset{\sim}{x} \times \underset{\sim}{\omega}) \times \underset{\sim}{\omega}]^j + (\underset{\sim}{x} \times d\underset{\sim}{\omega}/dt)^j \\ & - a^j(1 + \underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{x}) - R^j_{0k0}x^k \end{aligned}$$

Here $\underset{\sim}{\omega}$ is the angular velocity of the box, a its acceleration, and R^{j}_{0kO} the Riemann tensor evaluated at the origin.

Problem 14.13. The stress-energy tensor of a massless scalar field is taken to be

$$T_{\mu\nu} = (4\pi)^{-1}\left(\Phi_{,\mu}\Phi_{,\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\Phi_{,a}\Phi^{,a}\right)$$

Derive the equation of motion of this scalar field from $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$.

Problem 14.14. The equation for a scalar field, in flat spacetime, is $\Phi, \nu = \rho_s$ where ρ_s is the density of "scalar charge." We are tempted to conclude that in curved spacetime the equation should be

$$\Phi_{;\nu};\nu = \rho_{\mathrm{s}} \tag{1}$$

but another possible generalization is

$$\Phi_{;\nu};\nu - \frac{1}{6}\mathrm{R}\Phi = \rho_{\mathrm{s}} \tag{2}$$

Where R is the Ricci scalar. (Equation (2) is "conformally invariant" Thile (1) is not.) Does Equation (2), in principle, violate the strong equivalence principle? Find the influence of the R term on the force ($\sim \nabla\Phi$) between two "scalar charged" particles, assuming that $R = 1/a^2$ waries very slowly on a laboratory scale. In a practical laboratory experiaent what would be the magnitude of such anomalous R-term forces compared to the ordinary scalar forces?

Problem 14.15. Show that Maxwell's equations $\mathrm{F}^{\mu\nu}_{\ \ ;\nu} = 4\pi\ \mathrm{J}^{\mu}$, imply $\mathrm{j}^{\mu};\mu = 0$.

Problem 14.16. The generalization of Maxwell's equations to curved spacetime by the "comma-goes-to-semicolon" rule (or principle of equivalence) is not completely unambiguous. Show that the use of this rule with the vector potential A^{μ} can lead to two different results for a relativistic equation.

Problem 14.17. Estimate the fractional error introduced into Maxwell's equations (applied to some earth-bound process of characteristic frequency ϑ and size ℓ) by our ignorance of what curvature coupling terms there may be.

Problem 14.18. Show that except in the case $\underset{\sim}{\mathrm{E}} \cdot \underset{\sim}{\mathrm{B}} = 0$, the sourceless Maxwell equations $\mathrm{F}^{\beta\nu}{}_{;\nu} = 0$ follow from the requirements $\nabla \cdot \mathrm{T} = 0$, where T is the electromagnetic stress-energy tensor, and from the fact that $\mathrm{F}^{\mu\nu}$ is derived from a vector potential.

Problem 14.19. Show that $\mathrm{H} = \frac{1}{2}\ \mathrm{g}^{\mu\nu}\left(\pi_{\mu} - \mathrm{eA}_{\mu}\right)\left(\pi_{\nu} - \mathrm{eA}_{\nu}\right)$ is a Hamiltonjan giving the equations of motion of a test particle of charge e. Here π_{μ} is the canonical momentum. (The canonical momentum π^{μ} is not equal to p^{μ}, the particles 4 -momentum unless the 4-potential A^{μ} is zero.)

Problem 14.20. Suppose $\boldsymbol{\xi}$ is a Killing vector for a solution of the Einstein-Maxwell equations. Write down an integral of the motion for charged test particles. (Assume $\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{A} = 0$ where $\mathbf{A}$ is the 4 -potential.)

Problem 14.21. Show that Maxwell's equations are invariant under the "conformal transformation"

$$\begin{aligned} \mathrm{g}_{a\beta} \rightarrow\ & \tilde{\mathrm{g}}_{a\beta} = \mathrm{f}_{a\beta} \\ \mathrm{F}_{a\beta} \rightarrow\ & \tilde{\mathrm{F}}_{a\beta} = \mathrm{F}_{a\beta} \\ \mathrm{J}_{\mu} \rightarrow\ & \tilde{\mathrm{J}}_{\mu} = \mathrm{f}^{-2}\ \mathrm{J}_{\mu}, \end{aligned}$$

where f is an arbitrary function of position.

14: Solutions

Solution 14.1. First we determine what is the appropriate $T^{\mu\nu}$ for a point particle, say of mass m . In the momentarily comoving frame it should have only a T^{00} component, and this should be a δ-function of position, so

$$\mathrm{T}^{\mu\nu} \propto \int \delta^4\left(\mathrm{x}^a - \mathrm{x}^a(\tau)\right)\mathrm{u}^{\mu}\mathrm{u}^{\nu}\mathrm{d}\tau$$

where $\mathrm{x}^{\alpha}(r)$ is the particle's trajectory in spacetime as a function of its proper time τ. Now we want $\mathrm{T}^{\mu\nu}$ to transform like a tensor. The product $\mathrm{u}^{\mu}\mathrm{u}^{\nu}$ already transforms as a tensor, but $\delta^4\left(\mathrm{x}^{\alpha} - \mathrm{x}^{\alpha}(\tau)\right)$ is not a scalar; $\delta^4\left(\mathrm{x}^{\alpha} - \mathrm{x}^{\alpha}(\tau)\right)(-\mathrm{g})^{-\frac{1}{2}}$, however, is a scalar:

$$1 = \text{ scalar } = \int \delta^4\left(\mathrm{x}^a - \mathrm{x}^a(\tau)\right)\mathrm{d}^4\mathrm{x} = \int \frac{\delta^4}{(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}}(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}^4\mathrm{x} \tag{1}$$

Thus, normalizing to mass m, we have

$$\mathrm{T}^{\mu\nu} = \mathrm{m}\int \delta^4\left(\mathrm{x}^{\alpha} - \mathrm{x}^{\alpha}(\tau)\right)\frac{\mathrm{u}^{\mu}\mathrm{u}^{\nu}}{(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}}\ \mathrm{d}\tau \equiv \int \rho\mathrm{u}^{\mu}\mathrm{u}^{\nu}\mathrm{d}\tau \tag{2}$$

where ρ contains all the terms except the u's. Now

$$0 = \mathbf{T}^{\mu\nu}_{\ \ ;\nu} = \int \left[\left(\rho\mathrm{u}^{\nu}\right)_{;\nu}\mathrm{u}^{\mu} + \left(\rho\mathrm{u}^{\nu}\right)\mathrm{u}^{\mu}_{;\nu}\right]\mathrm{d}\tau \tag{3}$$

Dotting with u^{μ} gives

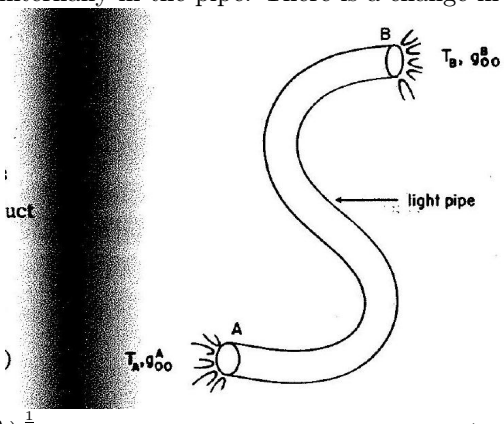
$$\mathbf{0} = \int \left[-\left(\rho\mathbf{u}^{\nu}\right)_{;\nu} + \rho\left(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}\right)\cdot\mathbf{u}\right]\mathrm{d}\tau \tag{4}$$

The second term vanishes because 4 -acceleration $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u}$ is orthogonal to 4 -velocity. We conclude therefore that the first term vanishes and hence, from Equation (3)

$$0 = \int (\rho \mathrm{u}^\nu)\, \mathrm{u}^\mu_{;\nu} \mathrm{d}\tau$$

This implies that $\mathrm{u}^\nu \mathrm{u}^\mu_{;\nu} = 0$ wherever the (delta function) ρ is nonzero, that is, wherever the particle is! But $\mathrm{u}^\nu \mathrm{u}^\mu_{;\nu} = 0$ is just the geodesic equation.

Solution 14.2. If a system is in thermal equilibrium, then no net energy will flow between two locations A and B if they are allowed to exchange energy. In particular, imagine a "light pipe" between the two locations which transmits a thermal flux of photons. Since the pipe and the system are static, there is no change in a photon's energy when it reflects internally in the pipe. There is a change in energy between A and B due to



in the pipe. $\mathrm{T}\left(-\mathrm{g_{00}}^{\mathrm{B}}\right)^{\frac{1}{2}} / \left(-\mathrm{g_{00}}^{\mathrm{A}}\right)^{\frac{1}{2}}$. Now use the gravitational redshift: $(\mathrm{h}\nu)_{\mathrm{A}}/(\mathrm{h}\nu)_{\mathrm{B}} = \left(-\mathrm{g_{00}}^{\mathrm{B}}\right)^{\frac{1}{2}} / \left(-\mathrm{g_{00}}^{\mathrm{A}}\right)^{\frac{1}{2}}$. Now us
the fact that a black-body intensity $\mathrm{B}_\nu(\mathrm{T_A})$ at A is changed by any kind of redshift to precisely another black-body spectrum with a temperature $\mathrm{T_B} = [(\mathrm{h}\nu)_{\mathrm{B}}/(\mathrm{h}\nu)_{\mathrm{A}}]\,\mathrm{T_A}$. If thermal equilibrium holds, this must be the ambient temperature at B, so that the fluxes up the pipe and down the pipe are identical. Thus $T_B = \left[\left(-{g_{00}}^A\right)^{\frac{1}{2}} / \left(-{g_{00}}^B\right)^{\frac{1}{2}}\right] T_A$, and

$$\mathrm{T}\left(-\mathrm{g_{00}}\right)^{\frac{1}{2}} = \text{ constant}$$

throughout the system.

Solution 14.3. For a perfect fluid the stress-energy tensor is $\mathrm{T}^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}$, thus the equations of motions read

$$0 = \mathrm{T}^{\mu\nu}_{;\nu} = (\rho + \mathrm{p})_{;\nu} \mathrm{u}^\mu \mathrm{u}^\nu + (\rho + \mathrm{p})\left(\mathrm{u}^\mu_{;\nu} \mathrm{u}^\nu + \mathrm{u}^\mu \mathrm{u}^\nu_{;\nu}\right) + \mathrm{p}_{,\nu} \mathrm{g}^{\mu\nu}.$$

To get the Euler equation, project this equation perpendicular to u using the projection tensor

$$\mathrm{P}_{\alpha\beta} = \mathrm{u}_\alpha \mathrm{u}_\beta + \mathrm{g}_{\alpha\beta}$$

The result is

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{P}_{\alpha\mu} \mathrm{T}^{\mu\nu}_{;\nu} \\ &= 0 + \mathrm{P}_{a\mu}(\rho + \mathrm{p}) \mathrm{u}^\mu_{;\nu} \mathrm{u}^\nu + 0 + \mathrm{p}_{,\nu} \mathrm{g}^{\mu\nu} \mathrm{P}_{\alpha\mu} \\ &= (\rho + \mathrm{p}) \mathrm{u}_{a;\nu} \mathrm{u}^\nu + \mathrm{p}_{,a} + \mathrm{p}_{,\nu} \mathrm{u}^\nu \mathrm{u}_a \end{aligned}$$

which is the Euler equation.

To take the Newtonian limit (see Solution 14.8), write the Euler equation as

$$\rho_0 \left(1 + \pi + \mathrm{p}/\rho_0\right)\left(\mathrm{u}_{\mathrm{j},\nu} \mathrm{u}^\nu - \Gamma^a_{\nu \mathrm{j}} \mathrm{u}_\alpha \mathrm{u}^\nu\right) = -\mathrm{p}_{,\mathrm{j}} - \mathrm{u}_\mathrm{j} \mathrm{dp}/\mathrm{d}\tau$$

Set $u^0 = 1, u_0 = -1, u_j = v_j$ and get

$$\rho_0 \left(\mathrm{dv_j}/\mathrm{d}\tau + \Gamma^0_{0\mathrm{j}}\right) \approx -\mathrm{p,j}$$

But

$$\Gamma^0_{0j} \approx -\Gamma_{00j} = -\frac{1}{2}\, \mathrm{g}_{00,j} \approx \phi_{,j}$$

Thus

$$\frac{\mathrm{dv_j}}{\mathrm{d}\tau} = -\phi_{,\mathrm{j}} - \frac{1}{\rho_0} \mathrm{p}_{,\mathrm{j}}$$

Solution 14.4. The Euler equation for a perfect fluid is

$$(\rho + \mathrm{p}) \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{u} = -\nabla_\mathrm{p} - \mathbf{u} \nabla_{\mathbf{u}} \mathrm{p}$$

Hydrostatic equilibrium implies the existence of a time Killing vector $\boldsymbol{\xi}$. The fluid 4 -velocity, according to Problem 13.9, must be parallel to this Killing vector, so

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\xi}/|\boldsymbol{\xi}|.$$

(In components, this means that only $u^i = 0$, where $\boldsymbol{\xi} = \partial/\partial t$.) From Problem 10.14 we know

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = \frac{1}{2}\nabla \log|\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}|$$

We also know that $\partial \mathrm{p}/\partial \mathrm{t} = 0$, or $\nabla_{\mathrm{u}}\mathrm{p} \propto \nabla_{\xi}\mathrm{p} = 0$, and therefore

$$\nabla \mathbf{p} = -(\rho + \mathbf{p})\nabla \log|\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}|^{\frac{1}{2}}$$

But $\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi} = (\partial/\partial \mathrm{t})\cdot(\partial/\partial \mathrm{t}) = \mathrm{g}_{00}$, so $|\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}|^{\frac{1}{2}} = (-\mathrm{g}_{00})^{\frac{1}{2}}$, from which the result follows.
In the Newtonian limit, $\mathrm{p} \ll \rho$ and $\mathrm{g}_{00} \approx -(1+2\Phi)$ where the Newtonian potential $\Phi \ll 1$. Thus

$$\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x}^{\nu}} \approx -\rho\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^{\nu}}\frac{1}{2}\log(1+2\Phi) \approx -\rho\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{x}^{\nu}}.$$

Solution 14.5. Using $\mathrm{p} = \frac{1}{3}\rho$ in the equation of hydrostatic equilibrium (Problem 14.4) $\mathrm{p}_{,\lambda} = (\rho + \mathrm{p})\left[\log(-\mathrm{g}_{00})^{\frac{1}{2}}\right]_{,\lambda}$ we get

$$-\log(-\mathrm{g}_{00})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}$$

This integrates to $\rho = \text{constant} \times (-\mathrm{g}_{00})^{-2}$. As long as g_{00} is finite, therefore, ρ cannot vanish and thus there is no free surface.
Solution 14.6. A static uniform gravitational field has a line element

$$\mathrm{ds}^2 = \mathrm{g}_{\mathrm{tt}}\mathrm{dt}^2 + \mathrm{g}_{zz}\,\mathrm{d}z^2 + \mathrm{dx}^2 + \mathrm{dy}^2 \tag{1}$$

where g_{tt} and g_{zz} depend only on z. The nonzero Christoffel symbols are easily computed (Problem 7.6). The weight as measured by a scale at $z = 0$ is $W(0)$, where

$$\mathrm{W}(z) = \int \mathrm{T}^{\hat{z}\hat{z}}\mathrm{dxdy} = \int \mathrm{g}_{zz}\ \mathrm{T}^{zz}\mathrm{dxdy} \tag{2}$$

We wish to show that W(0) depends only on $\mathrm{T}^{\hat{\mathrm{t}}\hat{\mathrm{t}}} = \mathrm{g}_{\mathrm{tt}}\mathrm{T}^{\mathrm{tt}}$ and on no other $\mathrm{T}^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$. We have

$$0 = \mathrm{T}^{\alpha\beta};\beta = |\mathrm{g}|^{-\frac{1}{2}}\left(\left|\ \mathrm{g}^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{T}^{\alpha\beta}\right)_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\mathrm{T}^{\beta\gamma}.\right. \tag{3}$$

Take $\alpha = \mathrm{t}$ and integrate over x, y, using the fact that $\mathrm{g}_{\alpha\beta}$ is independent of x, y and t :

$$\begin{aligned} 0 = \int \mathrm{T}^{\mathrm{tt}}_{,\mathrm{t}}\mathrm{dxdy} + \int \mathrm{T}^{\mathrm{tx}}_{,\mathrm{x}}\mathrm{dxdy} + \int \mathrm{T}^{\mathrm{ty}}_{,\mathrm{y}}\mathrm{dxdy} + |\mathrm{g}|^{-\frac{1}{2}}\left(|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\int\ \mathrm{T}^{\mathrm{tz}}\mathrm{dxdy}\right), \\ + 2\Gamma^{\mathrm{t}}_{\mathrm{tz}}\int\ \mathrm{T}^{\mathrm{tz}}\mathrm{dxdy} \end{aligned} \tag{4}$$

The 1^{st} term vanishes because $T^{\hat{\mathrm{tf}}}$ is time-independent. The 2^{nd} and 3^{rd} terms give terms proportional to T^{tx} and T^{ty} on the boundary of the integration region. These vanish for a boundary outside the container. Equation (4) can be put in the form

$$0 = |g|^{-\frac{1}{2}}{g_{tt}}^{-1}\left(|g|^{\frac{1}{2}}g_{tt}\int T^{tz}dxdy\right)_{,z} \tag{5}$$

Thus $|g|^{\frac{1}{2}}g_{tt}\int T^{tz}dxdy$ is independent of z. Since this term vanishes above the top of the container, it vanishes everywhere.
Now put $\alpha = z$ in Equation (3) and integrate over x and y :

$$\begin{aligned} 0 = \int \mathrm{T}^{z\mathrm{t}},\mathrm{tdxdy} + \int \mathrm{T}^{z\mathrm{x}},\mathrm{xdxdy} + \int \mathrm{T}^{z\mathrm{y}},\mathrm{ydxdy} + |\mathrm{g}|^{-\frac{1}{2}}\left(|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\int\ \mathrm{T}^{zz}\mathrm{dxdy}\right), \\ + \Gamma^{z}{}_{\mathrm{tt}}\int\ \mathrm{T}^{\mathrm{tt}}\mathrm{dxdy} + \Gamma^{z}{}_{zz}\int\ \mathrm{T}^{zz}\mathrm{dxdy} \end{aligned} \tag{6}$$

The 1^{st} term vanishes as above, while the 2^{nd} and 3^{rd} give boundary contributions which vanish. Using Equation (2), we find

$$\left(\mathrm{g_{tt}}|^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{W}\right)_{,z} = |\mathrm{g_{tt}}|^{\frac{1}{2}}{}_{,z} \int\ \mathrm{T}^{\hat{\mathrm{tf}}}\mathrm{dxdy}. \tag{7}$$

Integrate Equation (7) from $z = 0$ to the top of the container, and use the fact that $W(\text{ top }) = 0$ to get

$$\mathrm{W}(0) = |\mathrm{g_{tt}}|^{-\frac{1}{2}}_{z=0} \int_0^{\mathrm{top}} \mathrm{d}z \int \mathrm{dxdy}\, \mathrm{lg_{tt}}\Big|_{,z}^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{T}^{\hat{t}\hat{t}} \tag{8}$$

which depends only on the component $\mathrm{T}^{\hat{\mathrm{tf}}}$. (Solution due to W. Unruh.)

Solution 14.7. Since the gravitational field is stationary, there is a timeKilling vector $\boldsymbol{\xi} = \partial/\partial \mathrm{t}$. Dot this into the Euler equation (Problem 14.3) for the flow of a perfect gas:

$$(\rho + \mathrm{p})\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = -\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla_{\mathrm{p}} - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u}\nabla_{\mathbf{u}}\mathrm{p}. \tag{1}$$

But

$$\xi \cdot \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = \nabla_{\mathbf{u}}(\xi \cdot \mathbf{u}) - (\nabla_{\mathbf{u}}\xi) \cdot \mathbf{u} = \nabla_{\mathbf{u}}(\xi \cdot \mathbf{u})$$

since by Killing's equation $\nabla\boldsymbol{\xi}$ is antisymmetric. Also, $\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \mathrm{p} = \partial \mathrm{p}/\partial \mathrm{t} = 0$ for stationary flow. Putting $\mathrm{u_0} = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\xi}$, we find $(\rho + \mathrm{p})\mathrm{du_0/d}\tau = \mathrm{u_0 dp/d}\tau$ [Equation 2]. For adiabatic flow of a perfect fluid, the first law of thermodynamics (Problem 5.19) is $\mathrm{d}\rho = (\rho + \mathrm{p})\mathrm{dn/n}$. [Equation 3]. From Equations (2) and (3)

$$\frac{\mathrm{du_0}}{\mathrm{u_0}} = \frac{\mathrm{dn}}{\mathrm{n}} - \frac{\mathrm{d}(\rho + \mathrm{p})}{\rho + \mathrm{p}}$$

and hence $u_0 = \text{constant} \times \frac{n}{\rho + p}$.

Solution 14.8. The Newtonian limit of relativistic hydrodynamics is obtained by choosing a global, nearly-Lorentz, frame in which

$$\begin{array}{cc} \rho = \rho_0(1 + \pi), & \pi \ll 1 \\ \mathrm{g_{00}} = -(1 + 2\phi), & |\phi| \ll 1 \\ \mathrm{p}/\rho_0 \ll 1, & \mathrm{v}^2 \ll 1. \end{array}$$

Here $\rho_0 = \mathrm{nm_B}$ is the rest-mass density ($\mathrm{m_B}$ = mean baryon rest mass), π is the specific internal energy, ϕ is the Newtonian potential and v is 3 -velocity of the fluid. Since

$$\mathrm{u}^{\hat{0}} = \left(1 - \mathrm{v}^2\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\mathrm{v}^2,$$

and

$$\mathrm{u_0} = (-\mathrm{g_{00}})^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{u}^{\hat{0}} \approx 1 + \frac{1}{2}\mathrm{v}^2 + \phi,$$

the Bernoulli equation becomes

$$\left(1 + \frac{1}{2}\mathrm{v}^2 + \phi\right) = \frac{\text{constant } \times \mathrm{n}}{\rho_0\,(1 + \pi + \mathrm{p}/\rho_0)}$$

that is

$$\left(1 + \frac{1}{2}\mathrm{v}^2 + \phi\right)(1 + \pi + \mathrm{p}/\rho_0) = \text{constant}$$

and finally

$$\frac{1}{2}\mathrm{v}^2 + \phi + \pi + \mathrm{p}/\rho_0 = \text{ constant }.$$

Solution 14.9.

(a) The condition that $\boldsymbol{\xi}$ be a connecting vector between the world lines of neighboring particles can be written

$$\mathcal{L}_{\mathbf{u}}\xi = a\mathbf{u} \tag{1}$$

where a is a scalar function. In Problem 8.14, a was zero since $\boldsymbol{\xi}$ connected events of equal proper time; here we find a from the condition $\boldsymbol{\xi}^{\hat{\mathbf{0}}} = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{u} = 0$ along the world lines:

$$0 = \nabla_{\mathbf{u}}(\xi \cdot \mathbf{u}) = \xi \cdot \mathbf{a} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{u}}\xi.$$

Compare this with Equation (1) dotted with $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u}\cdot(\nabla_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\xi}-\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{u})=-a$$

and find $a=\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{a}$. (Recall that $\mathbf{u}\cdot\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{u}=\frac{1}{2}\nabla_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})=0$.) Thus we have

$$\nabla_{\mathbf{u}}\xi=\nabla_{\xi}\mathbf{u}+(\xi\cdot\mathbf{a})\mathbf{u}. \tag{3}$$

The condition for rigid body motion, $\nabla_{\mathbf{u}}(\xi\cdot\xi)=0$, is equivalent to $\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\xi}=0$, or by Equation (3) to

$$\xi^{\alpha}\xi^{\beta}\left(\mathrm{u}_{\alpha;\beta}+\mathrm{u}_{\alpha}{}^{\mathrm{a}}\beta\right)=0.$$

Since this must be true for any ξ it follows that

$$\mathrm{u}_{(\alpha;\beta)}+\mathrm{u}_{(a}{}^{\mathrm{a}}\beta\big)=0$$

and hence (see Problem 5.18 for definitions) that

$$\sigma_{a\beta}+\frac{1}{3}\theta\mathrm{P}_{a\beta}=\mathrm{u}_{(a;\beta)}+\mathrm{u}_{(\alpha}{}^{\mathrm{a}}\beta\Big)=0.$$

Rigid body motion therefore can occur if and only if $\sigma_{a\beta}=\theta=0$.

(b) The symmetry $\sigma^{\alpha\beta}=\sigma\quad\beta\alpha$ reduces the condition $\sigma^{\alpha\beta}=0$ to 10 equations. The 5 identities $\mathrm{u}^{\alpha}\sigma_{\alpha\beta}$ and $\mathrm{P}^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}=\sigma_{a}^{\alpha}=0$ leave 5 independent equations. With the condition $\theta=0$, we have 6 independent constraints altogether.

The rigid-body conditions do not constrain a^{α} or $\omega^{\alpha\beta}$. Each of these has 3 independent components (${}^{a}\mathrm{u}_{\alpha}=0,\omega^{\alpha\beta}=-\omega^{\beta\alpha}$) so there are 6 degrees of freedom as in nonrelativistic rigid-body motion.

Solution 14.10. From the definition of $\theta=\nabla\cdot\mathbf{u}$ we have

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}=\mathrm{u}^{\beta}\left(\mathrm{u}_{;\alpha}^{\alpha}\right);\beta&=\mathrm{u}^{\beta}\mathrm{u}_{;\alpha\beta}^{\alpha}=\mathrm{u}^{\beta}\left(\mathrm{u}_{;\beta a}^{\alpha}-\mathrm{R}_{\beta a\gamma}^{\alpha}\mathrm{u}^{\gamma}\right)\\&=\mathrm{u}^{\beta}\mathrm{u}_{;\beta\alpha}^{\alpha}-\mathrm{R}_{\beta\gamma}\mathrm{u}^{\beta}\mathrm{u}^{\gamma}\end{aligned} \tag{1}$$

But

$$\begin{aligned}\mathrm{u}_{;\beta a^{\alpha}}{}^{\beta}&=\left(\mathrm{u}_{;\beta}^{\alpha}\mathrm{u}^{\beta}\right)_{;\alpha}-\mathrm{u}_{;\beta}^{\alpha}\mathrm{u}_{;\alpha}^{\beta}\\&=\mathrm{a}_{;\alpha}^{\alpha}-\left(\omega^{\alpha}\beta^{+\alpha^{\alpha}}\beta^{+\frac{1}{3}}\theta\mathrm{P}^{\alpha}\beta^{-\mathrm{a}^{\alpha}\mathrm{u}_{\beta}}\right)\\&\quad\times\left(\omega_{a}^{\beta}+\sigma_{a}^{\beta}+\frac{1}{3}\theta\mathrm{P}_{a}^{\beta}-\mathrm{a}^{\beta}\mathrm{u}_{a}\right)\end{aligned} \tag{2}$$

where we have used Problem 5.18. Using the symmetry properties of $\omega_{a\beta},\sigma_{a\beta}$, and $\mathrm{P}_{a\beta}$ and the fact that they are orthogonal to n , Equations (1) and (2) imply

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}&=\mathrm{a}_{;\alpha}^{\alpha}-\omega^{\alpha}{}_{\beta\omega\,\alpha}-\sigma^{\alpha}{}_{\beta\sigma\,\alpha}-\frac{1}{3}\theta^{2}-\mathrm{R}_{a}\beta^{\mathrm{u}^{\alpha}\mathrm{u}^{\beta}}\\&=\mathrm{a}_{;\alpha}^{\alpha}+2\omega^{2}-2\sigma^{2}-\frac{1}{3}\theta^{2}-\mathrm{R}_{a}\beta^{\mathrm{u}^{\alpha}\mathrm{u}^{\beta}}\end{aligned}$$

Solution 14.11. Since the fluid flows on geodesics $\mathrm{a}_{\alpha}\equiv\mathrm{u}^{\beta}\mathrm{u}_{\alpha;\beta}=0$, and since the flow is shear and expansion free $\sigma_{\alpha\beta}=\theta=0$. The decomposition of ∇u in Problem 5.18 then gives

$$\mathrm{u}_{a;\beta}=\omega_{a\beta}$$

But ω is antisymmetric, so $u_{(\alpha;\beta)}=0$ and hence u satisfies Killing's equation.

Solution 14.12. In geometrical language the observer sets up his local coordinates x^{α} as follows: If u is the 4 -velocity of the center of his box along its worldline, he chooses $\mathbf{e}_0=\mathbf{u}$ and $\mathbf{e}_{\alpha}\cdot\mathbf{e}_{\beta}=\eta_{\alpha\beta}$ along his world line. From each point $\mathrm{P}(\tau)$ on his world-line ($\tau=$ proper time), he sends out spatial geodesics orthogonal to u, with affine parameter equal to proper length s. If n is the tangent vector to the spatial geodesic through the point P near his world-line, then he assigns to P the coordinates $\mathrm{x}^0=\tau,\mathrm{x}^{\mathrm{k}}=\mathrm{sn}^{\mathrm{k}}$.

The equation of motion is now

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}^{a}}{\mathrm{d}\lambda^2}+\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}\frac{\mathrm{dx}\beta}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{dx}\gamma}{\mathrm{d}\lambda}=0 \tag{1}$$

where we can take λ to be the proper time of the particle. The 4 -velocity of the particle is $\mathrm{dx}^{\alpha}/\mathrm{d}\lambda=(\gamma,\gamma\underset{\sim}{v})$, where $\gamma=\left(1-v^2\right)^{-\frac{1}{2}}$. First change $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ to d/dt in Equation (1) using $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda=y\ \mathrm{d}/\mathrm{dt}$:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}^\alpha}{\mathrm{dt}^2}+\frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dt}}\frac{\mathrm{dx}^\alpha}{\mathrm{dt}}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\mathrm{dx}\beta}{\mathrm{dt}}\frac{\mathrm{dx}\gamma}{\mathrm{dt}}=0. \tag{2}$$

Putting $a=0$, we get

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{dt}}+\Gamma^0{}_{\beta\gamma}\frac{\mathrm{dx}\beta}{\mathrm{dt}}\frac{\mathrm{dx}\gamma}{\mathrm{dt}}=0.$$

Substitute this in Equation (2) and get, for $a=\mathrm{j}$,

$$\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}}+\left(-\mathrm{v}^\mathrm{j}\Gamma^0_{\beta\gamma}+\Gamma^\mathrm{j}_{\beta\gamma}\right)\frac{\mathrm{dx}\beta}{\mathrm{dt}}\frac{\mathrm{dx}\gamma}{\mathrm{dt}}=0. \tag{3}$$

do first order in v, Equation (3) is

$$\frac{dv^j}{dt}-v^j\Gamma^0_{00}+\Gamma^j_{00}+2\Gamma^j_{k0}v^k=0. \tag{4}$$

Phus, to first order in $\underset{\sim}{x}$ and $\underset{\sim}{v}$, we have

$$\frac{dv^j}{dt}=v^j\Gamma^0{}_{00}\big|_{\underset{\sim}{x}=0}-\Gamma^j{}_{00}\big|_{\underset{\sim}{x}=0}-x^k\Gamma^j{}_{00,k}\big|_{\underset{\sim}{x}=0}-2v^k\Gamma^j{}_{k0}\big|_{\underset{\sim}{x}=0}. \tag{5}$$

The Christoffel symbols at $\underset{\sim}{x}=0$ are found using a result of Problem 7.17:

$$\Gamma^\beta_{a0\mathrm{e}\beta}=\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{e}_\alpha=-\Omega^\beta_a\mathbf{e}_\beta$$
$$\Gamma_{\beta a0}=-\Omega_{\beta a}\equiv\mathbf{a}_a\mathbf{u}_\beta-\mathbf{a}_\beta\mathbf{u}_a+\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\sigma}\mathrm{u}^\lambda\omega^\sigma.$$

Since $u^\alpha=(1,\underline{0}),u_\alpha=(-1,\underline{0}),a_\alpha=(0,\underline{a}),\omega^\sigma=(0,\underline{\omega})$ we get

$$\begin{gathered}\Gamma_{\beta a0}=0\quad\text{if}\quad\beta=\alpha\\ \Gamma_{0j0}=-\Gamma_{j00}=-a_j\\ \Gamma_{kj0}=-\Gamma_{jk0}=\varepsilon_{jk0m}\omega^m=\varepsilon_{jkm}\omega^m\end{gathered} \tag{6}$$

The Γ 's with no 0 -index are found from the condition that the coordinate lines $\mathrm{x}^\alpha=\left(\tau,\mathrm{sn}^\mathrm{k}\right)$, where τ and n^k are independent of s , are geodesics.
Thus,

$$\begin{aligned}0&=\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}^\alpha}{\mathrm{ds}^2}+\Gamma^\alpha\beta\gamma\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{ds}}\frac{\mathrm{dx}^\gamma}{\mathrm{ds}}\\ &=0+\Gamma^\alpha{}_{\mathrm{jk}}\mathrm{n}^\mathrm{j}\mathrm{n}^\mathrm{k}\end{aligned}$$

This is satisfied at $\underset{\sim}{x}=0$ for arbitrary $\underset{\sim}{n}$, so

$$\Gamma_{ajk}=0. \tag{7}$$

We find $\Gamma^\mathrm{j}{}_{00,\mathrm{k}}$ from the expression for the Riemann tensor:

$$\mathrm{R}^\alpha_{\beta\gamma\delta}=\Gamma^a_{\beta\delta,\gamma}-\Gamma^a_{\beta\gamma,\delta}+\Gamma^\alpha_{\gamma\mu}\Gamma^\mu_{\beta\delta}-\Gamma^a_{\delta\mu}\Gamma^\mu_{\beta\gamma}.$$

This gives

$$\Gamma^j_{00,k}=\mathrm{R}^j_{0\mathrm{k}0}+\Gamma^j_{0\mathrm{k},0}-\Gamma^j_{\mathrm{k}\mu}\Gamma^\mu_{00}+\Gamma^j_{0\mu}\Gamma^\mu_{0\mathrm{k}}.$$

At $\underset{\sim}{x}=0$:

$$\begin{gathered}\Gamma^j_{0k,0}=-\varepsilon_{jkm}\omega^m_{,0}\\ \Gamma^j_{k\mu}\Gamma^\mu_{00}=0\\ \Gamma^j_{0\mu}\Gamma^\mu_{0k}=\Gamma^j_{00}\Gamma^0_{0k}+\Gamma^j_{0m}\Gamma^m_{0k}\\ =a_ja_k+\varepsilon_{mjn}\omega^n\varepsilon_{km1}\omega^1\\ \text{and thus}\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}\frac{dv^j}{dt}&=-a_j-x^k\left(R^j_{0k0}\varepsilon_{jkm}\omega^m_{,0}+a_ja_k+\varepsilon_{mjn}\omega^n\varepsilon_{km1}\omega^1\right)+2\varepsilon_{jkm}\omega^mv^k\\ &=-a_j(1+\underline{a}\cdot\underline{x})-R^j_{0k0}x^k+(\underline{x}\times\underline{\omega},0)^j-[(\underline{x}\times\underline{\omega})\times\underline{\omega}]^j+2(\underline{v}\times\underline{\omega})^j\end{aligned}$$

The first term is the "inertial force" due to the acceleration of the reference frame. The $1 + \underset{\sim}{a} \cdot \underset{\sim}{x}$ is a relativistic correction factor (see MTW Exercise 37-4). The second term is the "true" gravitational force. In the weak-field limit, a Newtonian physicist would separate a into a contribution from the local acceleration of gravity, $\partial\Phi/\partial \mathrm{x_j}$, plus an "absolute" acceleration $\underset{abs_{\mathrm{abs}}}{a}$. Thus,

$$\begin{aligned} a_j + R^j_{0k0}x^k &= (a_j)_{abs} + \partial\Phi/\,\partial x^j\big|_{\underset{\sim}{x}=0} + \partial^2\Phi/\,\partial x^j\partial x^k\big|_{\underset{\sim}{x}=0}\, x^k \\ &= (a_j)_{abs} + \partial\Phi/\,\partial x^j\big|_{\underset{\sim}{x}=\underset{\sim}{x}} \text{ particle .} \end{aligned}$$

The terms involving $\underset{\sim}{\omega}$ are the same as in nonrelativistic mechanics; the second and third are the centrifugal and Coriolis forces respectively.

Solution 14.13. Setting the divergence of the stress-energy tensor to zero, re have

$$\begin{aligned} 0 = 4\pi\ \mathrm{T}^{\nu}_{\mu;\nu} &= \Phi_{,\mu;\nu}\Phi^{,\nu} + \Phi_{,\mu}\Phi^{;\nu}_{;\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\mu}\left(2\Phi_{a;\nu}\Phi^{,a}\right) \\ &= \left(\Phi_{,\mu;\nu} - \Phi_{,\nu;\mu}\right)\Phi^{,\nu} + \Phi_{,\mu}\Phi^{;\nu}_{;\nu} \end{aligned}$$

But second covariant derivatives of a scalar commute $\left(\Phi_{[,\mu;\nu]} = \Phi_{[,\mu,\nu]} + \mathbf{9}, {}^{\sigma}\Gamma^{\sigma}[\mu\nu] = 0\ \right)$ so only the last term in our equation survives and the equation of motion must be

$$\Box\Phi \equiv \Phi^{,\nu};\nu = 0.$$

Solution 14.14. In the proposed Equation (2) the term $\frac{1}{6}R\Phi$ is independent of the size of the laboratory in the same way that the ρ term is. In principle then, if we measure the Φ field we can measure the Ricci curvature; the conformally invariant Equation (2) then violates the spirit of the strong equivalence principle.

To find the anomalous R -term forces between two particles, let us go to the local Lorentz frame in which one of the particles is stationary. The Φ field due to this stationary particle of charge μ_1 satisfies

$$\Phi^{,\mathrm{j}}_{,\mathrm{j}} - \frac{1}{6}\mathrm{R}\Phi = \mu_1\delta(\mathrm{r})$$

In writing this equation we have assumed a global (or at least laboratory sized) inertial coordinate system. That is, we have ignored aspects of curvature other than the Ricci scalar. Presumably (and in fact) these other aspects of curvature do not violate strong equivalence.

The equation for Φ has the solution

$$\Phi = -\frac{\mu_1}{r}\exp\{-r/a\sqrt{6}\}, \quad a = R^{-\frac{1}{2}}$$

so that the force on a particle of charge μ_2 is

$$\begin{aligned} F^r = \mu_2\Phi_{,r} &= \mu_1\mu_2/r^2[1 + r/\sqrt{}6a]\exp\{-r/a\sqrt{6}\} \\ &\approx \mu_1\mu_2/r^2\left[1 + r^2/12a^2 + \mathcal{O}\left(r^3/a^3\right)\right] \end{aligned}$$

The anomalous R -term force $\approx \mu_1\mu_2/12\mathrm{a}^2$ is then independent of particle separation, clearly violating the strong equivalence principle.

From the Einstein equations it is clear that the magnitude of the Ricci scalar is of the order of the density of mass-energy, so that the ratio of anomalous forces to "ordinary" scalar forces is

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{12a^2} &\sim r^2\rho_{\text{mass-energy}} \\ &\sim [r(\text{ cm.})]^2\,[\rho/\rho_{\text{nuclear }}]\cdot 10^{-14} \end{aligned}$$

Thus, even if the scalar forces are being measured inside matter at nuclear densities, $\rho_{\text{nuclear}} = 10^{14}\ \mathrm{g/cm^3}$, a very large (r $\sim$ 100 km) matter filled "laboratory" is necessary before the R-term forces become important. In any practical experiment the R -term forces would be miniscule.

Solution 14.15. According to Problem 7.7 (i) and Maxwell's equations

$$\begin{aligned} 4\pi\ \mathrm{J}^{\mu} = \mathrm{F}^{\mu\nu}_{;\nu} &= \frac{1}{|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}}\left(\lg|^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{F}^{\mu\nu}\right)_{,\nu} \\ 4\pi\ \mathrm{J}^{\mu}_{;\mu} = 4\pi\frac{1}{|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}}\left(\ \mathrm{J}^{\mu}|\mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\right)_{,\mu} &= \frac{1}{|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}}\left(|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{F}^{\mu\nu}\right)_{,\nu\mu}. \end{aligned}$$

Since $\mathbf{F}$ is antisymmetric this must vanish.

Solution 14.16. In flat spacetime we have

$$\begin{aligned} \mathrm{F}^{\mu\nu}_{,\nu} &= 4\pi\ \mathrm{J}^{\mu} \\ \mathrm{F}_{\mu\nu} &= \mathrm{A}_{\nu,\mu} - \mathrm{A}_{\mu,\nu} \\ -\mathrm{A}^{\mu,\nu}_{,\nu} + \mathrm{A}^{\nu,\mu}_{,\nu} &= 4\pi\ \mathrm{J}^{\mu} \end{aligned} \tag{1}$$

Gwe interchange μ and ν differentiation on the second term, as is Nlowed in flat spacetime, and then apply the "comma to semicolon" rule e get

$$-\mathrm{A}^{\mu;\nu}_{;\nu} + \mathrm{A}^{\nu}_{;\nu};\mu = 4\pi\ \mathrm{J}^{\mu} \tag{2}$$

If, on the other hand, we apply the rule directly to Equation (1) we get

$$-\mathrm{A}^{\mu;\nu}_{;\nu} + \mathrm{A}^{\nu;\mu}_{;\nu} = 4\pi\ \mathrm{J}^{\mu}$$

The derivates on the second term can be exchanged by introducing a curvature term (see Problem 9.8)

$$-\mathrm{A}^{\mu;\nu}_{;\nu} + \mathrm{A}^{\nu}_{;\nu};\mu + \mathrm{R}^{\mu}_{\sigma}\mathrm{A}^{\sigma} = 4\pi\ \mathrm{J}^{\mu}. \tag{3}$$

Equations (2) and (3) have, in principle, measurably different consequences. As of 1975 , there is no experimental evidence to tell which is correct.

Solution 14.17. If the curvature coupling term is of the sort found in Problem 14.16, we have (in a Lorentz gauge i.e. $A^{\mu}{}_{;\mu} = 0$) $\Box A^{\mu} + (R^{\mu}{}_{\nu}A^{\nu}) = 4\pi\ \mathrm{J}^{\mu}$, where the term in parentheses may or may not be present. Since the Ricci tensor vanishes in vacuum, the only hope of detecting its term would be by experiments in matter (e.g. in glass). The first term is of order $A^{\mu}\left[\text{minimum}\left(\frac{c}{\nu}, l\right)\right]^{-2}$. The magnitude of the Ricci tensor is (by the field equations) of order $\mathrm{G}\rho/\mathrm{c}^2 \approx .74 \times 10^{-28}\ \mathrm{cm}^{-2} \times \left(\frac{\rho}{\mathrm{gm.\cdot cm^{-3}}}\right)$.

$$\frac{\delta \mathrm{A}^{\mu}}{\mathrm{A}^{\mu}} \sim \left(\frac{\text{minimum}\ \left(\frac{\mathrm{c}}{\nu}, \ell\right)\left(\rho/\mathrm{gm}^{-}\cdot\mathrm{cm}^{-3}\right)^{\frac{1}{2}}}{1.16 \times 10^{14}\ \mathrm{cm}}\right)^{2}$$

Since an earthbound processes is presumably no larger than the size of the earth $\sim 6 \times 10^{8}$ cm, this is bounded by $(\delta \mathrm{A}^{\mu}/\mathrm{A}^{\mu}) \leq \left(5 \times 10^{-6}\right)^{2}$ for

$\rho = 1$. One can also dream up fancier curvature coupling terms like $\mathrm{KR}^{\alpha\beta\gamma\delta}\mathrm{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\mathrm{A}^{\mu}$ where K is a dimensional constant. Because there is no natural value to assume for K, there is no a priori way to estimate the magnitude of the effect resulting from such terms. Since the equations are similar to the Proca equation $\Box \mathrm{A}^{\mu} + \mathrm{mA}^{\mu} = 0$, experiments to measure the photon rest mass do put some limits on K, but so far they are not useful ones.

Solution 14.18. For the electromagnetic stress-energy

$$4\pi\ \mathrm{T}^{\mu\nu} = -\left(\mathrm{F}^{\mu}_{\alpha}\mathrm{F}^{\alpha\nu} + \frac{1}{4}\ \mathrm{g}^{\mu\nu}\mathrm{F}_{\alpha\beta}\mathrm{F}^{\alpha\beta}\right) \tag{1}$$

$$4\pi\ \mathrm{T}^{\mu\nu}_{;\nu} = -\left(\mathrm{F}^{\mu}_{\alpha;\nu}\mathrm{F}^{\alpha\nu} + \mathrm{F}^{\mu}_{a}\mathrm{F}^{a\nu}_{;\nu} + \frac{1}{2}\ \mathrm{F}_{\alpha\beta}\mathrm{F}^{\alpha\beta;\mu}\right) = 0. \tag{2}$$

Now, the first and last terms above equal

$$\begin{aligned}
-\mathrm{F}^{\alpha\beta}\mathrm{g}^{\mu\tau}\left(\frac{1}{2}\ \mathrm{F}_{\alpha\beta;\tau} + \mathrm{F}_{\tau\alpha;\beta}\right) &= -\frac{1}{2}\ \mathrm{F}^{\alpha\beta}\mathrm{g}^{\mu\tau}\left(\mathrm{F}_{a\beta;\tau} + \mathrm{F}_{\tau\alpha;\beta} - \mathrm{F}_{\tau\beta;\alpha}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\ \mathrm{F}^{\alpha\beta}\mathrm{g}^{\mu\tau}\left(\mathrm{F}_{\alpha\beta;\tau} + \mathrm{F}_{\tau\alpha;\beta} + \mathrm{F}_{\beta\tau;\alpha}\right) \\
&\propto \mathrm{F}^{\alpha\beta}\mathrm{g}^{\mu\tau}\mathrm{F}_{[\alpha\beta;\tau]} = 0
\end{aligned}$$

If F is derivable from a potential A in the usual way, then $\mathrm{F}_{[\alpha\beta;r]} = 0$ and we are left with

$$0 = 4\pi\ \mathrm{T}^{\mu\nu}_{;\nu} = -\mathrm{F}^{\mu}_{a}\mathrm{F}^{\alpha\nu}_{;\nu}$$

This implies that $\mathrm{F}^{\alpha\nu}{}_{;\nu} = 0$ except in the case that the determinant of the coefficients $\mathrm{F}^{\mu}_{\alpha}$ vanishes. But $\det\left(\mathrm{F}^{\mu}_{\alpha}\right) = -(\underset{\sim}{\mathrm{E}} \cdot \underset{\sim}{\mathrm{B}})^{2}$.

Solution 14.19. First note that H has been normalized to have dimensions of (mass) ^{2}; this means that Hamilton's equations are

$$\mathrm{dx}^{\mu}/\mathrm{d}\lambda = \partial \mathrm{H}/\partial \pi_{\mu} \tag{1}$$

$$\partial \pi_{\mu}/\mathrm{d}\lambda = -\partial \mathrm{H}/\partial \mathrm{x}^{\mu} \tag{2}$$

Where λ is an affine parameter ($= \tau/m$ for a particle of mass m where d , is proper time). If H were divided by m , one would replace $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ by $2/d\tau$ in Equations (1) and (2); $d/d\lambda$ has the advantage of being valid for dussless particles as well.

Since the particle's 4 -momentum is $\mathrm{p}^{\mu} = \mathrm{dx}^{\mu}/\mathrm{d}\lambda$, and since $\mathrm{g}^{\mu\nu}$ and are functions of x^{α} not π_{α}, Equation (1) gives

$$\mathrm{p}^{\mu} = \mathrm{g}^{\mu\nu}\left(\pi_{\nu} - \mathrm{e}\ \mathrm{A}_{\nu}\right) \tag{3}$$

Equation (2) gives

$$\frac{\mathrm{d}\pi_a}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{g}^{\mu\nu}_{,a}\,(\pi_\mu - \mathrm{eA}_\mu)\,(\pi_\nu - \mathrm{eA}_\nu) + \mathrm{g}^{\mu\nu}\mathrm{eA}_{\mu,a}\,(\pi_\nu - \mathrm{eA}_\nu)$$

But from Equation (3) we get

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\pi_\alpha}{\mathrm{d}\lambda} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\,\mathrm{g}_{\alpha\mu}\mathrm{p}^\mu + \mathrm{eA}_\alpha\right)\\ &= \mathrm{g}_{\alpha\mu}\frac{\mathrm{dp}^\mu}{\mathrm{d}\lambda} + \mathrm{g}_{\alpha\mu,\beta}\mathrm{p}^\beta\mathrm{p}^\mu + \mathrm{eA}_{\alpha,\beta}\mathrm{p}^\beta\end{aligned}$$

(where we have used $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda = \mathrm{p}^\beta\partial/\partial\mathrm{x}^\beta$). Multiplying by $\mathrm{g}^{\alpha\gamma}$, we find

$$\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{d}\lambda} + \mathrm{g}^{\alpha\gamma}\mathrm{g}_{\alpha\mu,\beta}\mathrm{p}^\beta\mathrm{p}^\mu + \frac{1}{2}\,\mathrm{g}^{\alpha\gamma}\mathrm{g}^{\mu\nu}_{,\alpha}\,\mathrm{p}_\mu\mathrm{p}_\nu = .\mathrm{g}^{\alpha\gamma}\mathrm{e}_{(\mathrm{A}_{\mu,\alpha}-\mathrm{A}_{\alpha,\mu})}\mathrm{p}^\mu$$

Now rearrange the derivatives of $\mathrm{g}_{\alpha\beta}$ to form a Christoffel symbol.
Since

$$0 = \left(\mathrm{g}^{\mu\beta}\mathrm{g}_{\beta\gamma,a}\right) = \mathrm{g}^{\mu\beta}_{,a}\mathrm{g}_{\beta\gamma} + \mathrm{g}^{\mu\beta}\mathrm{g}_{\beta\gamma,a}$$

we have on multiplying by $g^{\gamma\nu}$

$$\mathrm{g}^{\mu\nu}_{,a} = -\mathrm{g}^{\gamma\nu}\mathrm{g}^{\mu\beta}\mathrm{g}_{\beta\gamma,a}$$

Thus

$$\frac{\mathrm{dp}\gamma}{\mathrm{d}\lambda} + \mathrm{g}^{\alpha\gamma}\left(\mathrm{g}_{\alpha\mu,\beta} - \frac{1}{2}\,\mathrm{g}_{\beta\mu,\alpha}\right)\mathrm{p}^\beta\mathrm{p}^\mu = \mathrm{g}^{\alpha\gamma_{\mathrm{eF}}}{}_{\alpha\mu}\mathrm{p}^\mu.$$

Since

$$\mathrm{g}_{a\mu,\beta}\mathrm{p}^\beta\mathrm{p}^\mu = \frac{1}{2}\left(\,\mathrm{g}_{a\mu,\beta+}\mathrm{g}_{a\beta,\mu}\right)\mathrm{p}^\beta\mathrm{p}^\mu,$$

we get, finally

$$\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{d}\lambda} + \Gamma^\gamma{}_{\beta\mu}\mathrm{p}^\beta\mathrm{p}^\mu = \mathrm{eF}^\gamma{}_\mu\mathrm{p}^\mu$$

which is the equation of motion.

Solution 14.20. For an uncharged test particle, $\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\xi}$ is conserved. We can guess that for a charged particle, $\pi\cdot\xi$ is conserved, where π is the canonical momentum $p + eA$ (see Problem 14.19). One way of seeing this is to note that corresponding to $\boldsymbol{\xi}$ there is an ignorable coordinate, i.e. we can choose coordinates so that the Hamiltonian H is independent of one coordinate. The conjugate canonical momentum is then a conserved quantity.

Alternatively, we can verify directly from the equation of motion

$$\nabla_{\mathbf{p}}\mathbf{p} = \mathbf{e}\mathbf{F}\cdot\mathbf{p}$$

that

$$\begin{aligned}\nabla_p(\pi\cdot\xi) &= (\nabla_p p)\cdot\xi + p\cdot\nabla_p\xi + e\,(\nabla_p A)\cdot\xi + eA\cdot\nabla_p\xi\\ &= e\xi\cdot F\cdot p + 0 + e\,(\nabla_p A)\cdot\xi - ep\cdot\nabla_A\xi.\end{aligned}$$

Here we have used Killing's equation to set the second term to zero and to rewrite the last term. Note that the order of vectors in the dot products in the first line is immaterial, but F has two "slots" and we must keep the vectors in the correct positions. Now the fact that the electromagnetic field admits an ignorable coordinate is expressed by the relation

$$0 = \mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{A} = \nabla_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{A} - \nabla_{\mathbf{A}}\boldsymbol{\xi}.$$

Using this in the last term, we get

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{p}}(\pi\cdot\boldsymbol{\xi}) &= \mathrm{e}\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{p} + \mathrm{e}\boldsymbol{\xi}\cdot(\nabla\mathbf{A})\cdot\mathbf{p} - \mathrm{ep}\cdot(\nabla\mathbf{A}):\boldsymbol{\xi}\\ &= \mathrm{e}\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{p} - \mathrm{e}\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{p}\\ &= 0\end{aligned}$$

where we have used the fact that $\mathbf{F}$ is $\nabla\dot{A}$ antisymmetrized. Thus $\pi\cdot\xi$ is a conserved quantity along the particle's trajectory.

Solution 14.21. Under the conformal transformation the four Maxwell equations

$$\mathrm{F}_{[a\beta,\nu]} = 0 = \tilde{\mathrm{F}}_{[\alpha\beta,\nu]}$$

are clearly invariant. The other four Maxwell equations are

$$\mathrm{F}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = |\mathrm{g}|^{-\frac{1}{2}} \left[\mathrm{F}^{\mu\nu} |\mathrm{g}|^{\frac{1}{2}} \right]_{,\nu} = 4\pi \ \mathrm{J}^{\mu}.$$

Since

$$\mathrm{F}^{\mu\nu} = \mathrm{g}^{\mu\alpha}\mathrm{g}^{\nu\beta}\mathrm{F}_{a\beta} = \mathrm{f}^2 \ \tilde{\mathrm{g}}^{\mu\alpha}\tilde{\mathrm{g}}^{\nu\beta}\tilde{\mathrm{F}}_{a\beta} = \mathrm{f}^2 \ \tilde{\mathrm{F}}^{\mu\nu}$$
$$\mathrm{g} \equiv \mathrm{Det}\left(\tilde{g}_{a\beta}\right) = \mathrm{f}^4 \ \mathrm{g}$$

it follows that $|\mathrm{g}|^{\frac{1}{2}} \ \mathrm{F}^{\mu\nu} = |\tilde{\mathrm{g}}|^{\frac{1}{2}} \ \tilde{\mathrm{F}}^{\mu\nu}$ so that

$$\mathrm{F}^{\mu\nu}_{\ ;\nu} = \frac{\mathrm{f}^2}{|\ \tilde{\mathrm{g}}|^{\frac{1}{2}}} \left[|\ \tilde{\mathrm{g}}|^{\frac{1}{2}} \ \tilde{\mathrm{F}}^{\mu\nu} \right]_{,\nu} = 4\pi \ \mathrm{J}^{\mu} = 4\pi \ \mathrm{g}^{\mu\alpha}\mathrm{J}_{\alpha}$$
$$= 4\pi \left(\tilde{\mathrm{g}}^{\mu\alpha} \right) \tilde{\mathrm{f}}_{\alpha} = 4\pi \mathrm{f}^2 \ \tilde{\mathrm{J}}^{\mu}$$

and therefore

$$\tilde{\mathrm{F}}^{\mu\nu}_{\ ;\nu} = 4\pi \ \tilde{\mathrm{J}}^{\mu}.$$

13.7.15 15 The Schwarzschild Geometry

The vacuum ($\mathrm{T}^{\mu\nu} = 0$) solution to the Einstein field equations which is spherically symmetric and static is called the Schwarzschild geometry. In "curvature coordinates" (where 2πr measures the proper circumference of 2 -spheres) the Schwarzschild metric has the form

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

(One sometimes abbreviates $\mathrm{d}\Omega^2 \equiv \ \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \ \mathrm{d}\phi^2$.) The constant M is the mass of the source of the field. If the metric is generated by a spherical star, the Schwarzschild metric holds outside the star and matches smoothly to the star's interior metric at its surface.

Problem 15.1. Prove that the total angular momentum squared

$$\mathrm{L}^2 = \mathrm{p}_{\theta}^2 + \sin^{-2}\theta \mathrm{p}_{\phi}^2$$

is a constant of motion along any Schwarzschild geodesic.
Problem 15.2.
(a) Prove that all orbits in the Schwarzschild geometry are planar.
(b) Prove that all orbits are stably planar.

Problem 15.3. A particle falls radially into a Schwarzschild metric. As measured by proper time at infinity, what is its inward coordinate velocity (dr/dt) at a (curvature-) radius r ? What is the locally-measured velocity relative to a stationary observer at the same radius?

Problem 15.4. Derive the equations of motion (equations relating t, r and τ) for a particle falling radially in the Schwarzschild geometry. Consider the three cases (i) particle released from rest at $r = R$ (ii) particle released from rest at infinity (iii) particle projected inward from infinity with velocity v_{∞}.

Problem 15.5. Derive a first-order differential equation for the trajectory (r as a function of ϕ) for equatorial orbits in the Schwarzschild geometry.

Problem 15.6. Show that the trajectory of light rays in the Schwarzschild metric obeys

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3u^2$$

where $u \equiv M/r$, and r is the Schwarzschild radial coordinate. Denote the minimum value of r along the trajectory by b, the "impact parameter In the case $M/b \ll 1$ what is the deflection of a photon as it passes a spherical gravitating body? Give a formula for the deflection angle to lowest nonvanishing order in (M/b).

Problem 15.7.

(a) For a nearly Newtonian planetary orbit (i.e. $M/r \ll 1$) calculate to lowest order in M/r the advance of the periastron, per orbit, predicted by general relativity.
(b) Suppose that the central star is somewhat oblate or prolate, so that the form of the classical Newtonian potential is $\Phi(\mathrm{r}) = -\mathrm{M/r} - \mathrm{AM/r}^3$, where A is related to the magnitude of the oblateness or prolateness. Calculate the advance (if oblate) of the periastron, to lowest order in $\mathrm{A/r}^2$, per orbit. (This is a purely Newtonian calculation.)
(c) Assume that the oblateness of the sun is so large that the rate of advance of the perihelion due to oblateness and the rate of advance due to general relativity are equal for the orbit of Mercury. Compute the rate of advance of the perihelion (in seconds of arc per century) for the four planets closest to the sun, due to each of the effects.

Note: to simplify
the calculations assume, throughout the problem, that the orbits are nearly circular - i.e. they all have negligible eccentricity.

Problem 15.8. A rocket ship in a circular orbit of circumference 2πr around a star of mass M fires a laser gun (rest frequency ν_0). The gun is aimed in the orbital plane, and at an angle a (in the ship's frame) outward from the tangential direction of motion. What is the frequency of the laser as seen by a stationary observer at infinity?

Problem 15.9. A test particle of relativistic velocity v flies past a mass II at an impact parameter b so great that the deflection $\theta_{\rm grav}$ is small. Calculate $\theta_{\rm grav.}$ In flat space, a test charge e flies with velocity v past a nucleus of charge Ze at an impact parameter b so great that the deflection $\theta_{\rm EM}$ is small.: Calculate $\theta_{\rm EM}$. Why is the formula for $\theta_{\rm grav}$ different from that for θ_{EM} ?

Problem 15.10. A radio commentator is describing his radial fall into a Schwarzschild black hole. Just before he crosses the Schwarzschild radius his broadcast frequency starts becoming redshifted enormously with a time dependence $\exp(-t/$ constant), where t measures proper time at infinity. From the constant deduce the mass of the hole.

Problem 15.11. Calculate the cross section for capture of particles by a Schwarzschild black hole of mass M, in the limits of very high velocity particles ($v \to c$) and very low velocity particles ($v \ll c$).

Problem 15.12. Suppose that Paul is orbiting a neutron star in a circular orbit at radial coordinate $r = 4$M. Peter, his colleague, has been fired radially from a cannon on the neutron star with less than escape velocity; he flies outward just meeting Paul as he crosses his orbit, reaches a maximum radius and falls back down just happening to meet Paul again. Between their two meetings Paul has completed 10 orbits of the neutron star. Peter and Paul have an obsession about comparing their clocks whenever they meet. They set their clocks to agree on their first meeting
as Peter flies outward. When they again compare their clocks, by how much do they disagree?

Problem 15.13. Give the coordinate transformation from Schwarzschild coordinates, in which $\mathrm{ds}^2 = -\mathrm{e}^2\phi_{\rm dt}{}^2 + \mathrm{e}^{2\Lambda}\mathrm{dr}^2 + \mathrm{r}^2\,\mathrm{d}\Omega^2$ to "isotropic coordinates", in which $ds^2 = -e^{2\phi}dt^2 + e^{2\mu}\left(d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2\right)$. Specialize to the vacuum Schwarzschild solution and construct coordinate diagrams showing the relation between (t, r) and ($t, \bar{r}$) coordinates. Is the area A of the surface $\bar{\mathrm{r}}$ = constant, t = constant given by $\mathrm{A} = 4\pi\bar{\mathrm{r}}^2$? Construct an embedding diagram (see MTW p. 613) for the spacelike hypersurface $\mathbf{t} = 0$, for $0 < \bar{\mathbf{r}} < \infty$.

Problem 15.14.

(a) Show that in general a boost in the spatial direction $\mathrm{e}_{\hat{j}}$ leaves invariant the physical components of the Riemann tensor $R_{\hat{t}\hat{j}\hat{j}\hat{j}}$ which are "parallel" to the boost. This is analogous to the invariance of $\mathrm{E_j}$ and $\mathrm{B_j}$ for a boost in the $\mathrm{e}_{\hat{\mathrm{j}}}$ direction.

(b) In the Schwarzschild geometry show that all the physical components of the Riemann tensor are invariant for a boost in the r-direction, but that all physical components are not invariant for a boost in the θ or ϕ direction.

Problem 15.15. Show that the spacelike slice v = constant($|\mathrm{v}| > 1$) of the Schwarzschild geometry in Kruskal coordinates u, v cannot be embedded in a Euclidean 3-space. What is the general condition on the slope dv/du of a spacelike slice of the Schwarzschild geometry that allows it to be embedded in a Euclidean 3 -space?

Problem 15.16. Prove that the metric,

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{4}{9}\left[\frac{9M}{2(r-t)}\right]^{2/3} dr^2 + \left[\frac{9M}{2}(r-t)^2\right]^{2/3} d\Omega^2$$

(which looks dynamical because the metric coefficients depend on t) is actually static. Show that it is in fact the Schwarzschild geometry.

Problem 15.17. In the preceding problem (15.16) show that the set of coordinate-stationary observers are all in free fall and have zero energy (i.e. they fell in from infinity with zero initial velocity).

Problem 15.18. A perfectly adiabatic gas with equation of state $\mathbf{p} = \mathrm{Kn}^\gamma$, $4/3 \le \gamma \le 5/3, \gamma$ constant, accretes spherically onto a Schwarzschild black hole of mass M . The speed of sound in the gas at radial infinity is a_∞. At what radius does the inward flow become supersonic? (Give answer only to leading term in $\mathrm{a}_\infty/\mathrm{c}$.)

Problem 15.19. A scalar field satisfies $\Box\Phi = 0$. Show that in the Schwarzschild geometry Φ can be decomposed into spherical harmonic components ($\mathrm{Y}_{\ell\mathrm{m}}$ = spherical harmonic) as

$$\Phi = \mathbf{r}^{-1}\psi(\mathbf{r}, \mathbf{t})Y_{\ell m}(\theta, \phi)$$

where ψ satisfies

$$\psi_{,\mathrm{tt}} - (1 - 2\mathrm{M/r})\left[(1 - 2\mathrm{M/r})\psi_{,\mathrm{r}}\right]_{,\mathrm{r}} + \mathrm{V}_\ell(\mathrm{r})\psi = 0$$

$$\mathrm{V}_\ell(\mathrm{r}) \equiv (1 - 2\mathrm{M/r})\left[\frac{2\mathrm{M}}{\mathrm{r}^3} + \frac{\ell(\ell+1)}{\mathrm{r}^2}\right]$$

Problem 15.20. Show that the Schwarzschild metric is also a solution of the Brans-Dicke theory of gravity. (For the Brans-Dicke field equations, see e.g. MTW p. 1070.)

15: Solutions

Solution 15.1. When the particle moves in the equatorial plane, we have $\mathrm{L}^2 = \mathrm{p}_\phi^2$, which is obviously a conserved constant since p_ϕ itself is. ($\boldsymbol{\xi} = \partial/\partial\phi$ is a Killing vector so $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{p}$ is conserved; see Problem 10.10.) But by spherical symmetry the motion is always in the equatorial plane of some rotated coordinate system. If we could write this p_ϕ^2 as an invariat quantity (under rotations) and then evaluated the invariant in the original system, we would be done.

At some instant when the particle is at radius r the covariant 4-velocity $\tilde{\mathrm{p}}$ has components ($\mathrm{p_t}, \mathrm{p_r}, \mathrm{p}_\theta, \mathrm{p}_\phi$). Consider the "reduced" 4-velocity $\tilde{\mathrm{p}}_\alpha^{\mathrm{red}} = (0, 0, \mathrm{rp}_\theta, \mathrm{rp}_\phi)$ whose construction from $\tilde{\mathrm{p}}_\alpha$ (e.g. by projection) is independent of θ and ϕ. Now when the motion is equatorial $\mathrm{p}_\theta = 0$ and $\theta = \pi/2$ we have

$$\mathrm{L}^2 = \mathrm{g}^{\alpha\beta}\tilde{\mathrm{p}}_\alpha^{\mathrm{red}}\,\tilde{\mathrm{p}}_\beta^{\mathrm{red}} = \mathrm{g}^{\phi\phi}\mathrm{r}^2\mathrm{p}_\phi^2 = \mathrm{p}_\phi^2 = \text{ conserved}$$

But in general

$$\mathrm{L}^2 = \mathrm{g}^{\theta\theta}\mathrm{r}^2\mathrm{p}_\theta^2 + \mathrm{g}^{\phi\phi}\mathrm{r}^2\mathrm{p}_\phi^2 = \mathrm{p}_\theta^2 + \frac{\mathrm{p}_\phi^2}{\sin^2\theta}$$

So this must be conserved in general, q.e.d.

Solution 15.2.

(a) Using the spherical symmetry of the metric we orient the coordinate axes so that the particle is at $\theta = \pi/2$ with $\dot\theta = 0$ at $r = 0$; then the unique solution of the geodesic equation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\mathrm{r}^2\dot\theta\right) = \mathrm{r}^2\sin\theta\cos\theta\dot\phi^2$$

is $\theta = \pi/2$ for all τ.

(b) Using the constant of motion L^2 of Problem 15.1, we have

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 = \left(\mathrm{g}^{\theta\theta}\mathrm{p}_\theta\right)^2 = \frac{1}{\mathrm{r}^4}\left(\mathrm{L}^2 - \frac{\mathrm{p}_\phi^2}{\sin^2\theta}\right) \tag{1}$$

Ippose that the unperturbed orbit is $\theta = \pi/2,\ \mathrm{L} = \mathrm{p}_\phi = \mathrm{K}$. Let the Sticle be perturbed out of the plane of the orbit i.e. $\theta = \pi/2 + \delta\theta$, \$ $-\mathrm{K} + \delta\mathrm{L}, \mathrm{p}_\phi = \mathrm{K} + \delta\mathrm{p}_\phi$. To first order in δL and $\delta\mathrm{p}_\phi$ and second Sider in $\delta\theta$, Equation (1) gives

$$\left[\frac{\mathrm{d}(\delta\theta)}{\mathrm{d}\lambda}\right]^2 = \frac{1}{\mathrm{r}^4}\left[2\ \mathrm{K}\delta\ \mathrm{L} - 2\ \mathrm{K}\delta\mathrm{p}_\phi - \mathrm{K}^2(\delta\theta)^2\right]$$

and hence

$$\frac{\mathrm{d}^2(\delta\theta)}{\mathrm{d}\lambda^2} = -\frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{r}^4}\delta\theta$$

This shows that $\delta\theta$ oscillates about $\theta = \pi/2$ and does not grow in time. Hence the orbits are stably planar.

Solution 15.3. We have two constants for radial fall: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = -1$ and $\mathrm{u}\cdot\partial/\partial\mathrm{t} = \mathrm{u}_0 = -(1 - 2\mathrm{M}/\mathrm{r})\mathrm{u}^0$. From these we get

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = -1 &= -(1-2\mathrm{M}/\mathrm{r})\left(\mathrm{u}^0\right)^2 + (1-2\mathrm{M}/\mathrm{r})^{-1}\left(\mathrm{u}^\mathrm{r}\right)^2 \\ &= \left[-(1-2\mathrm{M}/\mathrm{r}) + (1-2\mathrm{M}/\mathrm{r})^{-1}(\mathrm{dr}/\mathrm{dt})^2\right]\left(\mathrm{u}^0\right)^2 \\ &= \left[-(1-2\mathrm{M}/\mathrm{r}) + (1-2\mathrm{M}/\mathrm{r})^{-1}(\mathrm{dr}/\mathrm{dt})^2\right](\mathrm{u}_0)^2\,(1-2\mathrm{M}/\mathrm{r})^2\end{aligned}$$

Solving for $(\mathrm{dr}/\mathrm{dt})^2$ we find

$$(\mathrm{dr}/\mathrm{dt})^2 = (1-2\mathrm{M}/\mathrm{r})^2\left[1 - (1-2\mathrm{M}/\mathrm{r})\,(\mathrm{u}_0)^{-2}\right]$$

A stationary observer measures time intervals $\hat{dt} = (1-2\mathrm{M}/\mathrm{r})^{\frac{1}{2}}\mathrm{dt}$ and radial distances $\mathrm{dr} = (1-2\mathrm{M}/\mathrm{r})^{-\frac{1}{2}}\mathrm{dr}$ so he measures velocity

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{r}}}{\mathrm{dt}} = (1-2\mathrm{M}/\mathrm{r})^{-1}\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}}$$

Notice that independent of the value of u_0 this locally measured velocity approaches the velocity of light as r approaches 2 M .

Solution 15.4. From the first integrals of the geodesic equation (see Problem 15.3)

$$u_0 = -\tilde{E} = \text{ constant}$$
$$g^{00}u_0^2 + g_{rr}\,(u^r)^2 = -1$$

we get

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} = \frac{\tilde{E}}{1-2M/r} \tag{1}$$
$$u^r = \frac{dr}{d\tau} = -\left(\tilde{E}^2 - 1 + 2M/r\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

The minus sign for the square root in Equation (2) corresponds to an infalling particle.

Case (i). For this case $dr/d\tau = 0$ at $r = R$ implies $2M/R = 1 - \tilde{E}^2$, i.e. $\tilde{E} < 1$. Thus Equation (2) can be rewritten

$$d\tau = \frac{dr}{\left(\frac{2M}{r} - \frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{3}$$

This can be integrated in closed form to give

$$\tau = \left(\frac{R^3}{8M}\right)^{\frac{1}{2}}\left[2\left(\frac{r}{R} - \frac{r^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \cos^{-1}\left(\frac{2r}{R} - 1\right)\right] \tag{4}$$

where the constant of integration has been chosen so that $\tau = 0$ at $r = R$. It is convenient to rewrite Equation (4) in parametric form by introducing the "cycloid parameter"

$$\eta = \cos^{-1}\left(\frac{2r}{R} - 1\right)$$

so that we have

$$r = \frac{1}{2}R(1+\cos\eta) \quad (\eta = 0 \text{ at } r = R) \tag{5}$$
$$r = \left(\frac{R^3}{8M}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\eta + \sin\eta) \tag{6}$$

attion (1) gives

$$t = \int \frac{\tilde{E}\,d\tau}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} = \tilde{E}\int \frac{d\tau}{d\eta}\frac{1}{1-\frac{2M}{r}}\,d\eta$$
$$= \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}}\int \frac{\left(\frac{R^3}{8M}\right)^{\frac{1}{2}}(1+\cos\eta)d\eta}{1 - 4M[R(1+\cos\eta)]^{-1}}$$

Trom a table of integrals, we find

$$\frac{t}{2M} = \log\left|\frac{\left(\frac{R}{2M}-1\right)^{\frac{1}{2}} + \tan\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\left(\frac{R}{2M}-1\right)^{\frac{1}{2}} - \tan\left(\frac{\eta}{2}\right)}\right| + \left(\frac{R}{2M}-1\right)^{\frac{1}{2}}\left[\eta + \frac{R}{4M}(\eta + \sin\eta)\right] \tag{7}$$

where the constant of integration has been chosen so that $t = 0$ at $\eta = 0$ ie. at $r = R$. Note that $t \to \infty$ when $\tan(\eta/2) \to (R/2M - 1)^{\frac{1}{2}}$ i.e. when $r \to 2M$.

Case (ii). Here $\tilde{E} = 1$ and Equation (2) gives

$$\tau = -\frac{2}{3}\left(\frac{r^3}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} + \text{ constant} \tag{8}$$

and since

$$\frac{dt}{dr} = \frac{dt/d\tau}{dr/d\tau}$$

we get

$$t = -\frac{2}{3}\left(\frac{t^3}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} - 4M\left(\frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} + 2M\log\left|\frac{\left(\frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}}+1}{\left(\frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}}-1}\right| + \text{ constant} \tag{9}$$

Case (iii). By analogy with case (i), choose R such that

$$\frac{2\mathrm{M}}{\mathrm{R}} = \tilde{\mathrm{E}}^2 - 1 = \left(1-\mathrm{v}_\infty^2\right)^{-1} - 1 = \frac{\mathrm{v}_\infty^2}{1-\mathrm{v}_\infty^2}$$

Then changing the sign of R in Equation (4) gives

$$\tau = -\left(\frac{\mathrm{R}^3}{8\mathrm{M}}\right)^{\frac{1}{2}}\left[2\left(\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{R}}+\frac{\mathrm{r}^2}{\mathrm{R}^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \cosh^{-1}\left(\frac{2\mathrm{r}}{\mathrm{R}}+1\right)\right] \tag{10}$$

Note that $\tau = 0$ at $\mathrm{r} = 0$, and $\tau = -\infty$ at $\mathrm{r} = \infty$. Put

$$\mathrm{dr}/\mathrm{d}r = \pm\left\{\left[-1+\tilde{\mathrm{E}}^2\left(1-\frac{2\ \mathrm{m}}{\mathrm{r}}\right)^{-1} - \frac{\tilde{\mathrm{L}}^2}{\mathrm{r}^2}\right]\left(1-\frac{2\ \mathrm{m}}{\mathrm{r}}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

$$\eta = \cosh^{-1}\left(\frac{2\mathrm{r}}{\mathrm{R}}+1\right)$$

and get

$$\mathrm{r} = \frac{\mathrm{R}}{2}(\cosh\eta - 1) \quad (\mathrm{r}=0 \text{ at } \eta = 0) \tag{11}$$

$$r = -\left(\frac{\mathrm{R}^3}{8\mathrm{M}}\right)^{\frac{1}{2}}(\sinh\eta - \eta) \tag{12}$$

The equation corresponding to Equation (7) is

$$\frac{\mathrm{t}}{2\mathrm{M}} = \log\left|\frac{\left(\frac{\mathrm{R}}{2\mathrm{M}}+1\right)^{\frac{1}{2}}+\coth\frac{\eta}{2}}{\left(\frac{\mathrm{R}}{2\mathrm{M}}+1\right)^{\frac{1}{2}}-\coth\frac{\eta}{2}}\right| - \left(\frac{\mathrm{R}}{2\mathrm{M}}+1\right)^{\frac{1}{2}}\left[\eta + \frac{\mathrm{R}}{4\mathrm{M}}(\sinh\eta-\eta)\right]. \tag{13}$$

Note that t goes from $-\infty$ to $+\infty$ as r goes from ∞ to 2 M .

Solution 15.5. Choose the equatorial plane to be $\theta = \pi/2$. Then $u^\theta = 0$. One first integral of the motion is the normalization of the 4-velocity which implies

$$\mathrm{g}^{00}\mathrm{u}_0^2 + \mathrm{g}^{\phi\phi}\mathrm{u}_\phi^2 + \mathrm{g}_{\mathrm{rr}}\mathrm{u}^{\mathrm{r}^2} = -1. \tag{1}$$

From the Killing vectors $\partial/\partial\mathrm{t}$ and $\partial/\partial\phi$ two more first integrals are

$$\mathrm{u}_\phi = \tilde{\mathrm{L}} = \text{ constant}$$
$$\mathrm{u}_0 = -\tilde{\mathrm{E}} = \text{ constant}$$

where $\tilde{\mathrm{L}}$ and $\tilde{\mathrm{E}}$ are respectively the angular momentum per unit rest mass and energy per unit rest mass. Equation (1) now implies

$$\left(\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = \frac{-1-\mathrm{g}^{00}\tilde{\mathrm{E}}^2 - \mathrm{g}^{\phi\phi}\tilde{\mathrm{L}}^2}{\mathrm{g}_{\mathrm{rr}}} \tag{2}$$

or with the explicit metric functions:

Foom $\mathrm{u}^\phi = \mathrm{g}\phi\phi\tilde{\mathrm{L}}$ we have $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\tau = \tilde{\mathrm{L}}/\mathrm{r}^2$. Combining this with Equation 3) gives us finally

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi} = \pm\frac{r^2}{\tilde{\mathrm{L}}}\left\{\left[-1+\tilde{\mathrm{E}}^2(1\leqslant 2\mathrm{M}/\mathrm{r})^{-1} - \frac{\tilde{\mathrm{L}}^2}{\mathrm{r}^2}\right](1-2\mathrm{M}/\mathrm{r})\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Solution 15.6. Choose $\theta = \pi/2$ and $\mathrm{p}^\theta = 0$. If λ is an affine parameter assch that $\mathrm{p}^\mathrm{r} = \mathrm{dr}/\mathrm{d}\lambda$ and $\mathrm{p}^\phi = \mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\lambda = \mathrm{r}^{-2}\mathrm{p}_\phi$, then

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{p^r}{p^\phi}.$$

From $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = 0$ we get a relation amongst $\mathrm{p}^r, \mathrm{p}^\phi$, and p^0 which can be solved for $\mathrm{dr}/\mathrm{d}\phi$:

$$(\mathrm{dr/d}\phi)^2 = \mathrm{r}^4(1-2\mathrm{M/r})\left[\gamma(1-2\mathrm{M/r})^{-1} - 1/\mathrm{r}^2\right] \tag{1}$$

where $\gamma \equiv \mathrm{p}_0^2/\mathrm{p}_\phi^2 =$ constant. If we now introduce $\mathrm{u} \equiv \mathrm{M/r}$, Equation (1) becomes

$$(u')^2 = (1-2u)\left[yM^2(1-2u)^{-1} - u^2\right] = \gamma M^2 - u^2 + 2u^3 \tag{2}$$

where ' denotes $\mathrm{d/d}\phi$. If we differentiate this equation we get the very simple second-order equation

$$u'' + u = 3u^2 \tag{3}$$

In the limit $M/b \ll 1$ the zero $^{\text{th}}$ order solution can be taken to be the "straight line" solution $r\sin\phi = b$ or

$$u_0 = (M/b)\sin\phi.$$

Now write $u = u_0 + u_1 + \cdots$ with $u_1 \ll 1$ so that Equation (3) is approximately

$$u_1'' + u_1 \approx 3u_0^2 = 3\left(\frac{M}{b}\right)^2 \sin^2\phi = \frac{3}{2}\left(\frac{M}{b}\right)^2 (1-\cos 2\phi).$$

This can be solved by inspection, and we get

$$u \approx \left(\frac{M}{b}\right)\sin\phi + \frac{1}{2}\left(\frac{M}{b}\right)^2 (3+\cos 2\phi).$$

Now we can find the total deflection angle by calculating the two angles at which $\mathrm{r} = \infty(\mathrm{u} = 0)$. These angles must satisfy:

$$2\sin\phi \approx -(M/b)(3+\cos 2\phi)$$
$$\phi \approx -2(M/b) \quad \text{and} \quad \phi \approx \pi + 2(M/b).$$

Thus the total deflection angle is 4M/b.

Solution 15.7.

(a) The orbital equation was derived in Problem 15.5. If we introduce $\mathrm{u} \equiv \mathrm{M/r}$ and two new parameters ϵ and u_0 in place of $\tilde{\mathrm{E}}, \tilde{\mathrm{L}}$, we can rewrite the orbital equation as

$$(du/d\phi)^2 + (u-u_0)^2 - \epsilon^2 u_0^2 = 6u_0(u-u_0)^2 + 2(u-u_0)^3.$$

(See also MTW, Equation 25.47 or Weinberg, Equation 8.4.29.) The terms on the right are the relativistic terms; in Newtonian gravitation theory, the right side would be zero.

The lowest order solution, the Newtonian solution, is

$$\mathrm{u} = \mathrm{u}_0(1+\epsilon\cos\phi)$$

where ϵ is the eccentricity. Now note that the first correction term is

$$6u_0(u-u_0)^2 = \mathcal{O}\left(u_0^3\epsilon^2\right) = \mathcal{O}\left(\frac{m^3}{r_0^2}\epsilon^2\right)$$

and the second is $(u-u_0)^3 = \mathcal{O}\left(\frac{m^3}{r_0^3}\epsilon^3\right)$ so we can ignore it! Thus, first order corrections can be found from

$$(\mathrm{du/d}\phi)^2 + (1-6\mathrm{u}_0)(\mathrm{u}-\mathrm{u}_0)^2 = \mathrm{u}_0^2\epsilon^2.$$

define $\psi \equiv (1-6u_0)^{\frac{1}{2}}\phi, \mu = u - u_0$ so that

$$(\mathrm{du/d}\psi)^2 + \mu^2 = \mathrm{u}_0^2\epsilon^2/(1-6\mathrm{u}_0).$$

ate that the solution is periodic in ψ so that $\mathbf{r}$ is periodic in
I$= (1-6u_0)^{\frac{1}{2}}\phi$. One orbit corresponds therefore to $\psi = 2\pi$ or $y = 2\pi(1-6\mathrm{M/r}_0)^{-\frac{1}{2}}$ so that the change in the periastron is given by

$$\left.\frac{\delta\phi}{2\pi}\right|_{\text{per orbit}} = \frac{3\mathrm{M}}{\mathrm{r}_0}.$$

Nor another way of doing this, better suited to large eccentricity, see

1. S. Eddington, The Mathematical Theory of Relativity (Cambridge Unieversity Press (1922), Section 40).]
(b) From the Newtonian orbital equations, derive

$$\left(\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + \mathrm{u}^2 + \frac{2\Phi(\mathrm{u})}{\mathrm{L}^2} = \frac{2\mathrm{E}_\infty}{\mathrm{L}^2}.$$

With $\Phi = -\mathrm{M/r} - \mathrm{AM/r}^3$, this becomes

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 - \frac{2mu}{L^2} - \frac{2amu^3}{L^2} = \frac{2E_\infty}{L^2}.$$

Put this in the form

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + (1-c)\,(u-u_0)^2 - \frac{2am}{L^2}\,(u-u_0)^3 = \text{ constant.}$$

By comparing terms of order u^2, conclude that $c = 6a_0 m/L^2$. For nearly circular orbits $L^2 \approx mr$ so that $c = 6a/r_0^2$. From our experience with part (a) we know that the solution is periodic in the variable $(1+c)^{\frac{1}{2}}\phi$ so that the angular spread from periastron to periastron is

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{(1-c)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\pi}{\left(\frac{1-6a}{r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

and therefore

$$\left.\frac{\delta\phi}{2\pi}\right|_{\text{per orbit}} = \frac{3\mathrm{a}}{\mathrm{r}_0^2}.$$

(The periastron advances if $\mathrm{a} > 0$ (oblate) and regresses if $\mathrm{a} < 0$ (prolate).)
(c) In $\mathrm{c} = \mathrm{G} = 1$ units $\mathrm{M}_\odot = 1.5$ km. For Mercury $\mathrm{r}_0 = .58 \times 10^8$ km So the relativistic advance is

$$\begin{aligned}\delta\phi &= .105 \text{ seconds of arc per orbit} \\ &= 42 \text{ seconds of arc per century}\end{aligned}$$

since the orbital period is .241 years. If this advance were due to the oblateness of the sun, then for the other planets we would have,

$$\begin{aligned}\delta\phi &= (42\text{sec/ century }) \left(\mathrm{r}_{\text{Merc.}}\ /\mathrm{r}\right)^2 (\text{ Period of Merc. / Period }) \\ &= (42\text{sec/ century }) \left(\mathrm{r}_{\text{Merc.}}\ /\mathrm{r}\right)^{\frac{7}{2}}\end{aligned}$$

Numerical answers:

	r_{Merc} r	general relativity sec/century	oblateness sec/century
Mercury	1	42	42
Venus	. 536	8.8	4.7
Earth	. 386	3.9	1.51
Mars	. 245	1.25	. 3

Solution 15.8. We solve the problem in two stages: First, compute the laser frequency as measured by a static observer at r ("SOR"). Second, compute the redshift between this observer and a static observer at infinity (SOI).
Let u_R be the 4-velocity of the rocket and p_R the photon momentur at r.

$$\frac{\nu_{\text{SOR}}}{\nu_{\text{O}}} = \frac{\mathbf{u}_{\text{SOR}} \cdot \mathbf{p}_{\text{R}}}{\mathbf{u}_{\text{R}} \cdot \mathbf{p}_{\text{R}}} \tag{1}$$

II v is the proper relative velocity between the rocket (R) and SOR Asserver, then in the rocket frame Equation (1) gives us

$$\begin{aligned}\frac{\nu_{\text{SOR}}}{\nu_0} &= \frac{\gamma\nu_0(1+\mathrm{v}\cos a)}{\nu_0} \\ \nu_{\text{SOR}} &= \gamma\nu_0(1+\mathrm{v}\cos a)\end{aligned} \tag{2}$$

shere $\gamma \equiv \left(1-\mathrm{v}^2\right)^{-\frac{1}{2}}$. To compute v , recall that circular orbits have an mgular velocity

$$\Omega \equiv \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{dt}}$$

exactly the same as Kepler's Third Law in Newtonian gravity:

$$\Omega = \left(\frac{M}{r^3}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

(See Problem 17.4.) Thus

$$v = \frac{d\hat{\phi}}{d\hat{t}} = \frac{r d\phi}{(1-2M/r)^{\frac{1}{2}} dt} = \left[\frac{M}{r(1-2M/r)}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

The observer at infinity then measures a frequency

$$\nu_{\mathrm{SOI}} = \frac{\nu_{\mathrm{SOR}}}{u^0_{\mathrm{SOR}}} = \nu_{\mathrm{SOR}}(1-2\mathrm{M/r})^{\frac{1}{2}}$$
$$\nu_{\mathrm{SOI}} = \gamma\nu_0(1+v\cos a)(1-2\mathrm{M/r})^{\frac{1}{2}}$$

where v is given by Equation (4).

Solution 15.9.

(a) From the first integral of the motion, one has the equation

$$(dr/dt)^2 + V^2(r) = \bar{E}^2 \tag{1}$$

where V is as defined in Problem 15.11. If one now uses

$$\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\tau = \mathrm{p}^\phi = \tilde{\mathrm{L}}/\mathrm{r}^2 \tag{2}$$

and defines the variable $u \equiv M/r$, then an equation relating u and ϕ may be obtained:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{\tilde{E}^2 - (1-2u)\left(1+\bar{L}^2u^2\right)}{\bar{L}^2} \tag{3}$$

where $\bar{L} \equiv \tilde{L}/M$. Differentiate Equation (3) with respect to ϕ :

$$2u'u'' = -\left(2u\bar{L}^2 - 2 - 6\bar{L}^2u^2\right)u'\bar{L}^{-2}$$

or

$$\mathrm{u}'' + \mathrm{u} = \frac{1}{\overline{\mathrm{L}}^2} + 3\mathrm{u}^2 \tag{4}$$

For large impact parameter, the right side of Equation (4) is small. Let $\mathrm{u} = \mathrm{u}_0 + \epsilon\mathrm{v}$, with the right hand side of Equation (4) $= \mathcal{O}(\epsilon)$, then

$$\mathrm{u}_0 = \mathrm{A}\cos\phi, \qquad \mathrm{A} = \text{ constant} \tag{5}$$

for suitable choice of x, y, axes.

Substitution of u_0 into Equation (4) yields

$$v'' + v = \bar{L}^{-2} + 3A^2\cos^2\phi = \bar{L}^{-2} + \frac{3}{2}A^2(1+\cos 2\phi) \tag{6}$$

The solution to Equation (6) is

$$\mathrm{v} = \overline{\mathrm{L}}^{-2} + \frac{3}{2}\,\mathrm{A}^2 - \frac{\mathrm{A}^2}{2}\cos 2\phi = \overline{\mathrm{L}} - 2 + 2\,\mathrm{A}^2 - \mathrm{A}^2\cos^2\phi$$

and hence

$$\mathrm{u} = \mathrm{A}\cos\phi - \mathrm{A}^2\cos^2\phi + \overline{\mathrm{L}}^{-2} + 2\,\mathrm{A}^2 \tag{7}$$

The asymptotes of the orbit are given by $\mathrm{u} = 0$ i.e.

$$A^2\cos^2\phi - A\cos\phi - B = 0$$
$$B \equiv \frac{1}{\bar{L}^2} + 2A^2$$
$$\cos\phi = \frac{A - \left(A^2 + 4A^2B\right)^{\frac{1}{2}}}{2A^2} \approx -\frac{B}{A}$$

Since B/A is a small quantity, the solution to Equation (8) is

$$\phi \approx \pi/2 - \mathrm{B/A}. \tag{9}$$

Since there is equal deflection at both asymptotes, ($\phi \approx \pi/2, -\pi/2$) the total deflection angle is

$$\Delta\phi = 2\ \mathrm{B/A} \tag{10}$$

If b is the distance of closest approach, then by the definition of A in Equation (5)

$$A = M/b \tag{11}$$

Also,

$$\begin{aligned} \bar{L}^2 &= \frac{L^2}{M^2 m^2} = \frac{b^2\left(E^2 - m^2\right)}{M^2 m^2} = \frac{b^2\beta^2}{M^2\left(1-\beta^2\right)} \\ B &= \frac{M^2\left(1-\beta^2\right)}{b^2\beta^2} + \frac{2M^2}{b^2} = \frac{M^2\left(1+\beta^2\right)}{b^2\beta^2} \end{aligned} \tag{12}$$

Combining Equations (10), (11), (12) one has

$$\Delta\phi_{\mathrm{grav}} = \frac{2\mathrm{M}\left(1+\beta^2\right)}{\mathrm{b}\beta^2} \tag{13}$$

(b) The differential equation describing the trajectory is

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\ \mathrm{m}\gamma\dot{\mathrm{r}}) = \gamma\mathrm{mr}\omega^2 - \frac{Z\mathrm{e}^2}{\mathrm{r}^2} \tag{14a}$$

$$\mathrm{m}\gamma\mathrm{r}^2\omega \equiv\ \mathrm{L} =\ \text{constant} \tag{14b}$$

$$\mathrm{m}\gamma - \frac{Z\mathrm{e}^2}{\mathrm{r}} \equiv \mathrm{E} = \text{constant} \tag{14c}$$

From Equation (14b), $d/dt = \left(L/m\gamma r^2\right) d/d\phi$ so Equation (14a) becomes

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\phi^2}\mathrm{u} + \left(1 - \frac{\mathrm{Z}^2\mathrm{e}^4}{\mathrm{L}^2}\right)\mathrm{u} = \frac{\mathrm{Ze}^2\mathrm{E}}{\mathrm{L}^2} \tag{15}$$

where $u \equiv 1/r$. The solution to Equation (15) is

$$u = \frac{1}{b}\cos r\phi + \frac{Ze^2E}{L^2 - Z^2e^4} \tag{16a}$$

$$r \equiv \left(1 - \frac{Z^2e^4}{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{16b}$$

which reduces, for large L, to

$$\mathrm{u} = \frac{1}{\mathrm{b}}\cos\phi + \frac{Z\mathrm{e}^2\mathrm{E}}{\mathrm{L}^2}. \tag{17}$$

Now, the asymptotes are given by the equation

$$0 = \frac{1}{\mathrm{b}}\cos\phi + \frac{Z\mathrm{e}^2\mathrm{E}}{\mathrm{L}^2}$$

or $\phi \approx \frac{\mathrm{bZe}^2\mathrm{E}}{\mathrm{L}}$, so that the total deflection angle is

$$\Delta\phi_{\mathrm{EM}} = \frac{2\ \mathrm{bZe}^2\mathrm{E}}{\mathrm{L}} \tag{18}$$

From the relations,

$$E = m\left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$L^2 = \frac{b^2m^2\beta^2}{1-\beta^2}$$

Equation (18) becomes

$$\Delta\phi_{\mathrm{EM}} = \frac{2Z\mathrm{e}^2\left(1-\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{mb}\beta^2} \tag{19}$$

Equations (13) and (19) differ because of the difference in the tensor nature of gravity and vector nature of electromagnetism: the fields Lorentz transform differently and this induces a different dependence of the deflection on β when β is not small.

Solution 15.10. It is convenient to work in "outgoing Eddington-Finkelstein coordinates": Define r^* by $\mathrm{dr}^*/\mathrm{dr} = (1 - 2\mathrm{M}/\mathrm{r})^{-1}$, that is

$$r^* = r + 2M \log(r/2M - 1) + \text{ constant}$$

and define a retarded time coordinate

$$\mathrm{u} = \mathrm{t} - \mathrm{r}^*.$$

The Schwarzschild metric in these coordinates is

$$\mathrm{ds}s^2 = -(1 - 2\mathrm{M}/\mathrm{r})\mathrm{du}^2 - 2\mathrm{dudr} + \mathrm{r}^2\ \mathrm{d}\Omega^2 \tag{1}$$

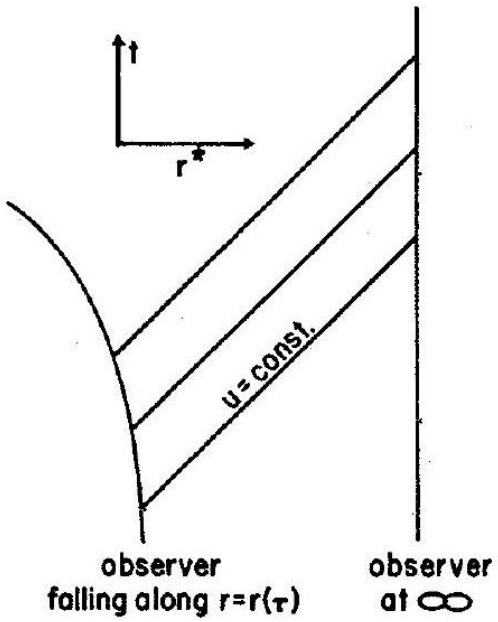
Putting $\mathrm{ds} = 0$, we see that outgoing radial photons travel along lines $\mathrm{u} = \text{constant}$. The redshift is calculated by comparing the time between reception of photons and emission of photons:

$$\frac{\lambda_\infty}{\lambda_{\text{emitter}}} = \frac{(\Delta \mathrm{t})_\infty}{(\Delta\tau)_{\text{em}}} = \frac{(\Delta \mathrm{u})_\infty}{(\Delta\tau)_{\text{em}}} = \frac{(\Delta \mathrm{u})_{\text{em}}}{(\Delta\tau)_{\text{em}}} = \left.\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\text{em}} \tag{2}$$

Note how we can relate times at infinity to times at the emitter by using $u = \text{constant}$ along the rays. We must therefore find the component $\mathrm{du}/\mathrm{d}\tau = \mathrm{U}^{\mathrm{u}}$ of the emitter's 4-velocity $\mathbf{U}$ as a function of t.

Now u and t are both ignorable coordinates and

$$\mathrm{U}_{\mathrm{t}} = \mathrm{U}_{\mathrm{u}} = \text{ constant } = -\tilde{\mathrm{E}} \tag{3}$$



and $\mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = -1$ implies

$$\mathrm{U}_{\mathrm{r}} = \frac{-\tilde{\mathrm{E}} - \left(\tilde{\mathrm{E}}^2 - 1 + 2\mathrm{M}/\mathrm{r}\right)^{\frac{1}{2}}}{1 - 2\mathrm{M}/\mathrm{r}}, \tag{4}$$

therefore

$$U^u = g^{uu}U_u + g^{ur}U_r = 0 + \left[\tilde{E} + \left(\tilde{E}^2 - 1 + 2M/r\right)^{\frac{1}{2}}\right](1 - 2M/r)^{-1} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} U^r = g^{ur}U_u + g^{rr}U_r &= \tilde{E} + \left[-\tilde{E} - \left(\tilde{E}^2 - 1 + 2M/r\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &= -\left(\tilde{E}^2 - 1 + 2M/r\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{6}$$

Thus

$$\frac{dr}{du} = \frac{U^r}{U^u} = \frac{-\left(\tilde{E}^2 - 1 + 2M/r\right)^{\frac{1}{2}}(1 - 2M/r)}{\tilde{E} + \left(\tilde{E}^2 - 1 + 2M/r\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{7}$$

Near r = 2M, Equation (7) gives

$$\begin{gathered} \mathrm{du} \approx -2(1 - 2\mathrm{M}/\mathrm{r})^{-1}\mathrm{dr} \approx -2(\mathrm{r}/2\mathrm{M} - 1)^{-1}\mathrm{dr} \\ \mathrm{u} \approx -4\mathrm{M}\log(\mathrm{r}/2\mathrm{M} - 1) + \text{ constant} \\ 1 - 2\mathrm{M}/\mathrm{r} \sim \exp(-\mathrm{u}/4\mathrm{M}) \end{gathered}$$

Thus Equation (5) implies that, as r → 2M

$$\mathrm{U}^{\mathrm{u}} \sim \mathrm{e}^{+\mathrm{u}/4\mathrm{M}}.$$

But u = t+ constant for an observer at fixed (large) r , so finally

$$\lambda_{\text{emitter}} / \lambda_\infty \simeq \exp(-t/4\mathrm{M}).$$

Solution 15.11. For particle motion $u_t \equiv \tilde{E}$ and $u_\phi \equiv \tilde{L}$ are both constants of motion, so $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = -1$ gives us

$$(\mathrm{dr}/\mathrm{d}\tau)^2 + \mathrm{V}^2(\mathrm{r}) = \tilde{\mathrm{E}}^2 \tag{1a}$$

$$\mathrm{V} \equiv \left[(1 - 2\mathrm{M}/\mathrm{r})\left(1 + \tilde{\mathrm{L}}^2/\mathrm{r}^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1b}$$

(See also MTW, Equation 25.15 or Weinberg, Equation 8.4.13.) By setting $\partial V^2/\partial r = 0$ we can find the maximum of V^2

$$V_{\max}^2 = \frac{\bar{L}^2 + 36 + \left(\bar{L}^2 - 12\right)\left(1 - 12/\bar{L}^2\right)^{\frac{1}{2}}}{54} \tag{2a}$$

$$\bar{L} \equiv \tilde{L}/M \tag{2b}$$

If a particle has $\tilde{E} > V_{\max}$, it is captured. Thus, the limiting $\bar{L}$ for capture is found by equating

$$\tilde{\mathrm{E}}^2 = \mathrm{V}_{\max}^2. \tag{3}$$

(a) For large E (large $\overline{\mathrm{L}}$), Equation (2a) reduces to

$$V_{\max}^2 \approx \frac{\bar{L}^2 + 36 + \left(\bar{L}^2 - 12\right)\left(1 - 6/\bar{L}^2\right)}{54} = \frac{\bar{L}^2 + 9}{27},$$

and Equation (3) becomes

$$\overline{\mathrm{L}}_{\mathrm{crit}}^2 = 27\tilde{\mathrm{E}}^2 - 9. \tag{4}$$

Corresponding to L_{crit} is a critical impact parameter, b_{crit} , given by

$$b_{\mathrm{crit}} = \frac{L_{\mathrm{crit}}}{p} = \frac{L_{\mathrm{crit}}}{(E^2 - m^2)^{\frac{1}{2}}},$$

where m is the particle mass. Capture takes place for impact parameters $\mathrm{b} < \mathrm{b}_{\mathrm{crit}}$. Thus the cross section for capture then becomes

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathrm{cap}} &= \pi \mathrm{b}_{\mathrm{crit}}^2 = \frac{\pi \mathrm{L}_{\mathrm{crit}}^2}{(\mathrm{E}^2 - \mathrm{m}^2)} = \frac{\pi \mathrm{M}^2 \overline{\mathrm{L}}_{\mathrm{crit}}^2}{\left(\tilde{\mathrm{E}}^2 - 1\right)} \\ &\approx \frac{\pi \mathrm{M}^2}{\tilde{\mathrm{E}}^2}\left(1 + \frac{1}{\tilde{\mathrm{E}}^2}\right)\left(27\tilde{\mathrm{E}}^2 - 9\right) \\ \pi \mathrm{b}_{\mathrm{crit}}^2 &\approx 27\pi \mathrm{M}^2\left(1 + \frac{2}{3\tilde{\mathrm{E}}^2}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

(b) For $\tilde{\mathbf{E}} \approx 1$, (small β) we have $\tilde{\mathbf{E}}^2 \approx 1 + \beta^2$ and Equation (3) can be approximated by

$$18 + 54\beta^2 \approx \overline{\mathrm{L}}^2 + \left(\overline{\mathrm{L}}^2 - 12\right)^{\frac{3}{2}} / \overline{\mathrm{L}}.$$

We can solve for $\overline{\mathrm{L}}^2$ to first order in β^2 to find

$$\overline{\mathrm{L}}^2_{\mathrm{crit}} = 16\left(1 + 2\beta^2\right) + \mathcal{O}\left(\beta^4\right)$$

and

$$\sigma_{\mathrm{capt}} = \pi \mathrm{b}^2_{\mathrm{crit}} = \frac{\pi \mathrm{M}^2 \overline{\mathrm{L}}^2_{\mathrm{crit}}}{\left(\tilde{\mathrm{E}}^2 - 1\right)} \approx \frac{16\pi \mathrm{M}^2}{\beta^2}. \tag{6}$$

Solution 15.12. Choose Paul's orbit to be in the $\theta = \pi/2$ plane. Since the orbit is circular $u^r = 0$ and from the r-component of the geodesic equation, $\mathrm{Du}^{\mathrm{r}}/\mathrm{d}\tau = 0$, we get

$$\Gamma^r_{tt}\left(u^t\right)^2 + \Gamma^r_{\phi\phi}\left(u^\phi\right)^2 = 0$$

and hence

$$\omega^2 \equiv \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{dt}}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{u}^\phi}{\mathrm{u}^{\mathrm{t}}}\right)^2 = -\frac{\Gamma^{\mathrm{r}}_{\mathrm{tt}}}{\Gamma^{\mathrm{r}}_{\phi\phi}} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{r}^3} = \frac{1}{64\mathrm{M}^2}$$

for Paul's orbit. Since $\mathrm{d}\phi/\mathrm{dt} = 1/8\mathrm{M}$ and he traverses 20π radians between meetings, the coordinate time elapsed between meetings is

$$\Delta \mathrm{t} = 160\mathrm{mM}.$$

From $g_{tt}\left(u^t\right)^2 + g_{\phi\phi}\left(u^\phi\right)^2 = -1$ we get

$$\mathrm{u}^{\mathrm{t}} \equiv \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{d}\tau} = \left(1 - \frac{3\mathrm{M}}{\mathrm{r}}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2$$

for Paul's orbit. Thus Paul measures an elapsed proper time

$$\Delta\tau_{\mathrm{Paul}} = \frac{1}{2}\Delta \mathrm{t} = 80\pi\mathrm{M} \approx 251.5\mathrm{M}.$$

For Peter's orbit we use the equations describing radial fall (Problem. 15.4). The time for Peter to fall from R to $r = 4\mathrm{M}$ must be $\frac{1}{2}\Delta t = 80\pi\mathrm{M}$. We must find the values of R and η corresponding to a lapse in t . of $80\pi\mathrm{M}$. We can then find Peter's proper time from Solution 15.4, Equation (6)

$$\Delta\tau_{\mathrm{Peter}} = 2\left(\frac{\mathrm{R}^3}{8\mathrm{M}}\right)^{\frac{1}{2}}(\eta + \sin\eta). \tag{1}$$

The equations for R and η are Equations (7) and (5) of Solution 15.4

$$40\pi = \log\left[\frac{(\mathrm{X}-1)^{\frac{1}{2}} + \tan\frac{1}{2}\eta}{(\mathrm{X}-1)^{\frac{1}{2}} - \tan\frac{1}{2}\eta}\right] + (\mathrm{X}-1)^{\frac{1}{2}}\left[\eta + \frac{1}{2}\mathrm{X}(\eta + \sin\eta)\right] \tag{2}$$

$$4 = X(1 + \cos\eta) \tag{3}$$

where $\mathrm{X} \equiv \mathrm{R}/2\mathrm{M}$.
Now use physical intuition: Peter travels outward for a considerable time while Paul orbits. Therefore X should be quite large and $\eta \approx \pi$. Since logarithms are slowly varying functions, ignore the logarithm term and approximate

$$40\pi \approx \mathrm{X}^{\frac{1}{2}}\left(\pi + \frac{1}{2}\mathrm{X}\pi\right).$$

This gives $X^{\frac{3}{2}} \approx 80\pi$ and $X \approx 18.5$. From Equation (3) then, $1 + \cos\eta \approx .216$ implies $\eta = 2.47$. More accurately,

$$\eta = 2.46029 \quad \mathrm{X} = \frac{\mathrm{R}}{2\mathrm{M}} = 17.91737$$
$$\Delta\tau_{\mathrm{Peter}} = 468.72\mathrm{M}.$$

Paul measures a much smaller (about half) proper time interval than Peter. This makes sense because Paul remains in a highly relativistic orbit deep within a gravitational well - both factors make his clocks "go slow."

Peter spends most of his time at fairly small velocities and not very deep in a gravitational well (remember $\mathrm{R}/2\mathrm{M} \sim 18$).

Solution 15.13. We clearly need a transformation such that

$$\mathrm{r}^2 = \mathrm{e}^{2\mu \cdot \bar{\mathrm{r}}^2} \tag{1a}$$

$$\mathrm{e}^{2\Lambda}\mathrm{dr}^2 = \mathrm{e}^{2\mu}\overrightarrow{\mathrm{dr}}^2 \tag{1b}$$

When these are combined, we get a differential equation for the transformation $\bar{\mathrm{r}} = \bar{\mathrm{r}}(\mathrm{r})$ in terms of the known function Λ :

$$\frac{d\bar{r}}{r} = e^{\Lambda}\frac{dr}{r}$$

This can immediately be integrated, and our solution is

$$\bar{\mathrm{r}} = \text{ constant } \times \exp\left(\int \frac{\mathrm{e}^{\Lambda}}{\mathrm{r}}\mathrm{dr}\right) \tag{2a}$$

$$\mathrm{e}^{2\mu} = \mathrm{r}^2/\bar{\mathrm{r}}^2 \tag{2b}$$

For the Schwarzschild metric $e^{\Lambda} = (1 - 2M/r)^{-\frac{1}{2}}$ and we have from Equation (2a)

$$\bar{\mathrm{r}} = \text{ constant } \times \exp\left(\int \frac{\mathrm{dr}}{(\mathrm{r}^2 - 2\mathrm{Mr})^{\frac{1}{2}}}\right)$$

which gives

$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}}(1 + \mathrm{M}/2\mathbf{r})^2 \tag{3}$$

if we choose the integration constant so that $r \to \bar{r}$ as $r \to \infty$. Equation (3) can also be expressed as

$$\bar{\mathrm{r}} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{r} - \mathrm{M} \pm (\mathrm{r}(\mathrm{r} - 2\mathrm{M}))^{\frac{1}{2}}\right] \tag{4}$$

From Equation (2b) we have

$$\mathrm{e}^{2\mu} = (1 + \mathrm{M}/2\mathrm{r})^4 \tag{5}$$

From this it follows that the area of a sphere with r and t constant is

$$A = (1 + M/2\bar{r})^4\bar{r}^2\int d\theta \sin\theta d\phi = 4\pi\bar{r}^2(1 + M/2\bar{r})^4 \tag{6}$$

In constructing the embedding diagram note that (i) according to Equation (4) the mapping from r to $\bar{r}$ is double valued and (ii) the coordinate $\bar{\mathrm{r}}$ only describes the region of the Schwarzschild geometry with $r \geq 2M$ (In Equation (4), $\bar{r}$ is complex for $r < 2M$.)

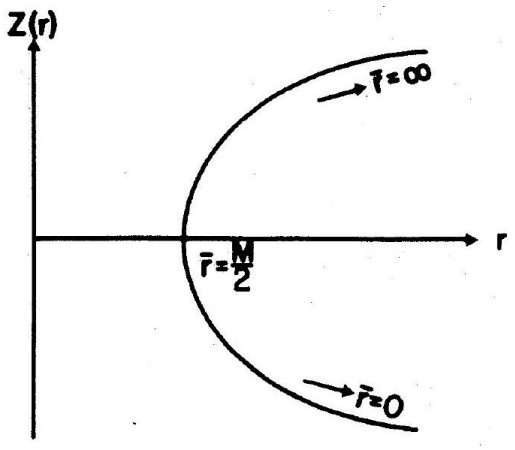
The embedding diagram for a surface of constant t and r requires a function $z(\mathrm{r})$ such that

$$\begin{aligned}\mathrm{ds}^2 &= \mathrm{dz}^2 + \mathrm{dr}^2 + \mathrm{r}^2\ \mathrm{d}\phi^2 = \left[1 + (\mathrm{dz}/\mathrm{dr})^2\right]\mathrm{dr}^2 + \mathrm{r}^2\ \mathrm{d}\phi^2 \\ &= (1 - 2\mathrm{M}/\mathrm{r})^{-1}\mathrm{dr}^2 + \mathrm{r}^2\ \mathrm{d}\phi^2\end{aligned}$$

The solution is

$$z = [8\mathrm{M}(\mathrm{r} - 2\mathrm{M})]^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

This parabola is plotted in the accompanying figure. The embedding surface is the paraboloid generated by rotating this curve about the r axis.



Solution 15.14.
(a) Let the boost be in the $\mathbf{e}_{\hat{x}}$ direction. For a velocity parameter $\psi = \tanh^{-1}\beta$ the transformation is given by

$$\Lambda^{\hat{t}'}_{\hat{t}} = \Lambda^{\hat{x}'}_{\hat{x}} = \cosh\psi \quad \Lambda^{\hat{t}'}_{\hat{x}} = \Lambda^{\hat{x}'}_{\hat{t}} = \sinh\psi$$

so that

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_{\hat{t},\hat{x}\hat{t}'\hat{x}'} =& \Lambda^{\alpha}\hat{t}'\Lambda^{\beta}\hat{x}'^{\Lambda}\gamma_{\hat{t}}\Lambda^{\delta}{}_{\hat{x}}\mathrm{R}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}} \\
=& \cosh^4\psi \mathrm{R}_{\hat{t}\hat{x}\hat{t}\hat{x}} + \cosh^2\psi\sinh^2\psi\mathrm{R}_{\hat{t}\hat{x}\hat{x}\hat{t}} \\
&+ \sinh^2\psi\cosh^2\psi\mathrm{R}_{\hat{x}\hat{t}\hat{t}\hat{x}} + \sinh^4\psi\mathrm{R}_{\hat{x}\hat{t}\hat{x}\hat{t}} \\
=& \left(\cosh^4\psi - 2\sinh^2\psi\cosh^2\psi + \sinh^4\psi\right)\mathrm{R}_{\hat{t}\hat{x}\hat{t}\hat{x}} \\
=& \left(\cosh^2\psi - \sinh^2\psi\right)^2\mathrm{R}_{\hat{t}\hat{x}\hat{t}\hat{x}} \\
=& \mathrm{R}_{\hat{t}\hat{x}\hat{t}\hat{x}}
\end{aligned}$$

(b) In the Schwarzschild geometry the nonvanishing physical components of the Riemann tensor are

$$R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}\hat{r}} = R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = -2M/r^3$$
$$R_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}} = R_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}} = -R_{\hat{r}\hat{r}\hat{r}\hat{\theta}} = -R_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} = M/r^3$$

and the components related to these by symmetry. To show that all physical components are invariant for a radial boost we can explicitly calculate 20 independent, boosted components in a straightforward manner. Another way is to define, in the Schwarzschild geometry, the vectors

$$1 \equiv e_{\hat{t}} + e_{\hat{r}} \quad n \equiv e_{\hat{t}} - e_{\hat{r}} \quad m \equiv e_{\hat{\theta}} + ie_{\hat{\phi}}$$

and to observe that the Riemann tensor can be written as a sum of products of the vectors:

$$\begin{aligned}
R =& \frac{1}{2}\frac{M}{r^3}\{-(n\wedge l)(n\wedge l) + (m\wedge m^*)(m\wedge m^*) \\
&+ \mathrm{Real}\left[(n\wedge m)(l\wedge m^*) + (l\wedge m^*)(n\wedge m)\right]\}
\end{aligned}$$

For a boost in the r -direction with velocity parameter ψ, clearly the components of $\mathbf{m}$ are invariant. From $\mathrm{e}_{\hat{\mathrm{t}}} = \cosh\psi\mathrm{e}_{\hat{\mathrm{t}}}, -\sinh\psi\mathrm{e}_{\hat{r}}$, and $\mathrm{e}_{\mathrm{r}} = \cosh\psi\mathrm{e}'_{\mathrm{r}} - \sinh\psi\mathrm{e}'_{\hat{\mathrm{t}}}$ it follows that

$$\begin{aligned}
1 &= e_t + e_{\hat{r}} = e^{-\psi}\left(e_{\hat{t}'} + e_{\hat{r}'}\right) \\
n &= e_t - e_r = e^{\psi}\left(e_{\hat{t}'} + e_{r'}\right)
\end{aligned}$$

so that

$${}^1\widehat{\mu}'\widehat{\nu}' = {}^1\widehat{\mu}^n\widehat{\nu}$$

From the form of $\mathbf{R}$ then, it is clear that all components are invariant.
To see that this same conclusion does not apply to boosts in other directions, notice that for a boost in the ϕ direction, with velocity parameter ψ

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_{\hat{\mathrm{r}},\hat{\mathrm{t}}'\hat{\mathrm{r}}'\hat{\phi}'} &= \Lambda^{\alpha}{}_{\hat{\mathrm{t}},}\Lambda^{\beta}\hat{\phi}'\mathrm{R}_{\hat{\mathrm{r}}\hat{\mathrm{t}}\hat{r}} \\
&= \sinh\psi\cosh\psi\left(\mathrm{R}_{\hat{\mathrm{r}}\hat{\mathrm{t}}\hat{\mathrm{r}}\hat{\mathrm{t}}} + \mathrm{R}_{\hat{\mathrm{r}}\hat{\phi}\hat{\mathrm{r}}\hat{\phi}}\right) \\
&= -\left(\mathrm{M}/\mathrm{r}^3\right)\sinh\psi\cosh\psi \\
&\neq \mathrm{R}_{\hat{\mathrm{r}}\hat{\mathrm{t}}\hat{\mathrm{r}}\hat{\phi}}
\end{aligned}$$

Solution 15.15. In Kruskal coordinates, the Schwarzschild geometry is given by

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r}e^{-r/2M}\left(-dv^2 + du^2\right) + r^2d\Omega^2 \tag{1a}$$

where

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right)e^{r/2M} = u^2 - v^2 \tag{1 b}$$

Setting v = constant, and $\theta = \pi/2$ in Equation (1a) and equating the line element to a Euclidean surface of revolution gives

$$\frac{32M^3}{r}e^{-r/2M}du^2 + r^2d\phi^2 = \left[1 + (dz/dr)^2\right]dr^2 + r^2d\phi^2 \tag{2}$$

or

$$1+\left(\frac{dz}{dr}\right)^2=\frac{32M^3}{r}e^{-r/2M}\left(\frac{du}{dr}\right)^2$$

We can calculate du/dr from Equation (1b) to arrive at

$$1+\left(\frac{dz}{dr}\right)^2=\frac{r}{2M}\frac{e^{r/2M}}{(r/2M-1)e^{r/2M}+v^2} \tag{3}$$

For embedding, z must be a real function, so we must have

$$\frac{r/2Me^{r/2M}}{(r/2M-1)e^{r/2M}+v^2}\geq 1 \tag{4}$$

From Equation (4), we conclude

$$\mathrm{r/2M}\geq\log\mathrm{v}^2$$

Thus, for $|v|>1$, there will be a minimum value of r inside which the embedding breaks down.
Geometrically, the necessary condition for embedding is that

$$\frac{d(\text{ circumference })}{d(\text{ proper radius })}\leq 2\pi$$

We now consider the general condition on dv/du which allows Euclidean embedding: Suppose we have a slice described by $v(u)$. Then

$$\begin{aligned}ds^2&=\frac{32M^3}{r}e^{-r/2M}\left[1-\left(\frac{dv}{du}\right)^2\right]du^2+r^2d\phi^2\\&=\frac{32M^3}{r}e^{-r/2M}\left[1-\left(\frac{dv}{du}\right)^2\right]\left[\frac{(r/8M^2)\,e^{r/2M}}{\left(u-v\frac{dv}{du}\right)}\right]^2dr^2+r^2d\phi^2\end{aligned} \tag{6}$$

and we require

$$\frac{r}{2M}e^{r/2M}\left[1-\left(\frac{dv}{du}\right)^2\right]\geq\left(u-v\frac{dv}{du}\right)^2 \tag{7}$$

at each r.
Solution 15.16. To avoid the suggestive connotations of coordinate names, relabel r and t as follows: $r\to z, t\to w$. The metric then takes the form

$$\mathrm{ds}^2=-\mathrm{dw}^2+\frac{4}{9}\left[\frac{(9/2)\mathrm{M}}{z-\mathrm{w}}\right]^{\frac{2}{3}}\cdot\ \mathrm{d}z^2+\left[(9/2)\mathrm{M}(z-\mathrm{w})^2\right]^{\frac{2}{3}}\ \mathrm{d}\Omega^2 \tag{1}$$

Now, define a new coordinate, r, by

$$\mathrm{r}=\left[\frac{9}{2}\mathrm{M}(z-\mathrm{w})^2\right]^{\frac{1}{3}} \tag{2}$$

(We are led to do this because Equation (1) is manifestly spherically symmetric and therefore, the coefficient of $d\Omega^2$ is a geometrically defined curvature radius.) With **r** thus defined we have

$$-\left(\frac{2r^3}{9M}\right)^{\frac{1}{2}}+z=w \tag{3a}$$

$$dw=dz-\left(\frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}}dr \tag{3b}$$

Substituting Equations (2), (3) into Equation (1) gives:

$$ds^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dz^2+2\left(\frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}}dzdr-\frac{r}{2M}dr^2+r^2d\Omega^2. \tag{4}$$

Next we want to try to diagonalize the $\mathrm{d}z^2$, $\mathrm{d}z\mathrm{d}r$, and $\mathrm{d}r^2$ terms: Define a coordinate t and a function $F(r)$ by

$$z = \mathrm{t} + \mathrm{F(r)} \tag{5}$$

substitute this into Equation (4):

$$\begin{aligned} ds^2 = &- \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(dt^2 + 2F'dtdr + F'^2dr^2\right) \\ &+ 2\left(\frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} dr\left(dt + F'dr\right) - \frac{r}{2M}dr^2 + r^2d\Omega^2 \end{aligned} \tag{6}$$

and choose F so that metric is diagonal, i.e.

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)F' = \left(\frac{r}{2M}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

With this choice for F', Equation (6) becomes

$$\begin{aligned} ds^2 = &- \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{r}{2M}\right)dr^2 \\ &+ 2\left(\frac{r}{2M}\right)\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 - \frac{r}{2M}dr^2 + r^2d\Omega^2 \\ ds^2 = &- \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 \end{aligned} \tag{8}$$

which is the Schwarzschild metric in curvature coordinates and is, of course, a static spacetime. The original coordinates of Equation (1) are called "Lemaitre coordinates." Its time coordinate w measures the proper time of freely-infalling observers; each observer moves along a line $z =$ constant.

Solution 15.17. A coordinate-stationary observer in Problem 15.16 satisfies $z =$ constant (see solution to 15.16). By Equation (5) of Solution 15.16 , this implies

$$\mathrm{dt} = -\mathrm{F'dr} = -\left(\frac{\mathrm{r}}{2\mathrm{M}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{2\mathrm{M}}{\mathrm{r}}\right)^{-1}\mathrm{dr} \tag{1}$$

according to Equation (7) of 15.16. From this equation we get

$$(\mathrm{dr/dt})^2 = (2\mathrm{M/r})\left(1 - \frac{2\mathrm{M}}{\mathrm{r}}\right)^2. \tag{2}$$

Comparison of Equation (2) with Equation (3) of Solution 15.3 (with $u_0 = 1$ for a particle falling from rest at infinity) shows that Equation (2) represents a radially falling particle, with unit energy-to-rest-mass ratio at infinity.

Solution 15.18. The relativistic Bernoulli equation (Problem 14.7)

$$\mathrm{u_0} = \left(\frac{\mathrm{n}}{\rho + \mathrm{p}}\right)\left(\frac{\mathrm{n_\infty}}{\mathrm{p_\infty} + \rho_\infty}\right)^{-1} \tag{1}$$

can be expressed in terms of the fluid's proper radial velocity $\mathrm{v} = (1 - 2\mathrm{M/r})\mathrm{dr/dt}$, by using the relationship between $\mathrm{u_0}$ and $\mathrm{dr/dt}$

$$\mathrm{g_{00}}\left(\mathrm{u^0}\right)^2 + \mathrm{g_{rr}}\left(\mathrm{u^r}\right)^2 = -1,$$

to yield

$$v^2 = 1 - \frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{\rho + p}{n}\right)^2}{\left(\frac{\rho_\infty + p_\infty}{n_\infty}\right)^2} \tag{2}$$

One can now use rest mass conservation $\left(\mathrm{u^\alpha n|g|^{\frac{1}{2}}}\right)_{,\alpha} = 0$ to obtain (after again expressing u^r in terms of v)

$$\frac{\mathrm{v}(1 - 2\mathrm{M/r})^{\frac{1}{2}}\mathrm{nr}^2}{(1 - \mathrm{v}^2)^{\frac{1}{2}}} = \text{ constant } \equiv \frac{\dot{\mathrm{M}}}{4\pi}. \tag{3}$$

Incidentally, in this solution n is a rest mass density, not a number density: $n_{\mathrm{here}} \equiv m_p n_{\mathrm{usual}}$.

Now, we would like to express n in terms of the sound speed a (using $\mathrm{p} = \mathrm{Kn}^\gamma$; compare Solution 5.25):

$$\mathrm{a}^2 = \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{d}\rho} = \frac{\gamma \mathrm{Kn}^{\gamma-1}}{1+\gamma \mathrm{Kn}^{\gamma-1}/(\gamma-1)}.$$

This implies

$$\gamma \mathrm{Kn}^{\gamma-1} = \frac{a^2}{1-a^2/(\gamma-1)} = \frac{a^2(\rho+p)}{n} \tag{4}$$

$$n = \left[\frac{a^2}{\gamma K\left(1-a^2/(\gamma-1)\right)}\right]^{\frac{1}{\gamma}-1} \tag{5}$$

or

For the purposes of finding a self-consistent solution for some constant $\dot{M}$ and some $v(r)$, Equations (2), (3) and (5) can be thought of as defining M as a function of r and v. We can then find the radius at which the flow becomes supersonic by setting $v = a$ and setting $dM = 0$. First we must express r in terms of a. Using Equations (3) and (4), (with $v = a$), we get

$$r = \frac{2M}{1-\left(1-a^2/(y-1)\right)^2\left(1-a^2\right)\tau_\infty} \tag{6}$$

where

$$\tau_\infty \equiv \left(\frac{\rho+\mathrm{p}}{\mathrm{n}}\right)_\infty$$

Substituting Equations (6), (5) into Equation (3), we get

$$\frac{\dot{M}}{4\pi} = \frac{4M^2 a\left(1-\frac{a^2}{\gamma-1}\right)\left[\frac{a^2}{\gamma K(1-a^2/(\gamma-1))}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}}{\left[1-\left(1-a^2\right)\left(1-a^2/(\gamma-1)\right)^2\tau_\infty\right]^2}. \tag{7}$$

Now, we expand Equation (4)

$$\tau_\infty \approx 1 + \frac{a_\infty^2}{\gamma-1}$$

and work to lowest order in a. From $\mathrm{d}\log \mathrm{M}/\mathrm{da} = 0$, we have

$$a^2 = \frac{2a_\infty^2}{5-3y}, \quad \gamma \neq 5/3 \tag{8a}$$

$$a^2 = 2\cdot 3^{-\frac{1}{2}} a_\infty, \quad y = 5/3. \tag{8b}$$

Using Equations (8) and Equation (6), we conclude finally that the radius at which the flow becomes supersonic is

$$\mathrm{r_s} = \left(\frac{5-3\gamma}{8}\right)\frac{2\mathrm{M}}{\mathrm{a}_\infty^2} \quad y \neq 5/3$$

$$\mathrm{r_s} = \frac{3^{\frac{1}{2}}\mathrm{M}}{4\mathrm{a}_\infty} \quad y = 5/3 \tag{9b}$$

(9a)

Solution 15.19. The form of $\Box\Phi$ for a diagonal metric is

$$\Box\Phi = \nabla\cdot(\nabla\Phi) = (-\mathrm{g})^{-\frac{1}{2}}\left[(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{g}^{\alpha\beta}\Phi_{,\beta}\right]_{,a} \tag{1}$$

$$\Box\Phi = (-\mathrm{g})^{-\frac{1}{2}}\left[\left\{(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{g}^{00}\Phi_{,0}\right\}_{,0} + \left\{(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{g}^{\mathrm{rr}}\Phi_{,\mathrm{r}}\right\},\mathrm{r}\right.$$
$$\left. + \left\{.(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{g}^{\theta\theta}\Phi_{,\theta}\right\}_{,\theta} + \left\{(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{g}^{\phi\phi}\Phi_{,\phi}\right\}_{,\phi}\right]. \tag{2}$$

In the Schwarzschild metric, curvature coordinates,

$$\mathrm{g}^{00} = -\left(1-\frac{2\mathrm{M}}{\mathrm{r}}\right)^{-1}, \quad \mathrm{g}^{\mathrm{rr}} = \left(1-\frac{2\mathrm{M}}{\mathrm{r}}\right) \tag{3}$$

and $g^{\theta\theta}$ and $g^{\phi\phi}$ have their flat space form. It is clear that the third and fourth terms of Equation (2) have their flat space form (with flat space angular operator L^2), and thus, Equation (2) has the form

$$\Box\Phi = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\Phi_{,00} + \frac{1}{r^2}\left[r^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)\Phi_{,r}\right]_{,r} + \frac{L^2\Phi}{r^2}. \tag{4}$$

The field equations $\Box\Phi = 0$ then imply that

$$0 = \Phi_{,00} - \frac{1}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left[r^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)\Phi_{,r}\right]_{,r} - \frac{L^2}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\Phi. \tag{5}$$

Let Φ have the form

$$\Phi = \frac{1}{r}\psi(r,t)Y_{\ell_m}(\theta,\phi) \tag{6}$$

Substituting Equation (6) into Equation (5), we have

$$\psi_{,00} - \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)\psi_{,r}\right];r + V_\ell(r)\psi = 0 \tag{7a}$$

where

$$V_\ell(r) = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left[\frac{2M}{r^3} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right] \tag{7b}$$

Solution 15.20. The Brans-Dicke field equations can be put into the form

$$G^{\mu\nu} + F^{\mu\nu}\left(\Phi_{;\alpha}, \Phi_{;\alpha\beta}\right) = T^{\mu\nu} \tag{1a}$$

$$\Box\Phi = T^{\mu}_{\mu} \tag{1b}$$

where every term of $F^{\mu\nu}$ is proportional to derivatives of the scalar field Φ. In vacuum, a solution of Equation (1b) is

$$\Phi = \text{ constant} \tag{2}$$

Substituting Equation (2) into (1a), one obtains

$$G^{\mu\nu} = 0$$

which are the vacuum Einstein equation. Consequently, the Schwarzschild metric is a solution of the vacuum Brans-Dicke equations. (The most general static, spherically symmetric vacuum metric in Brans-Dicke theory has two arbitrary parameters corresponding to mass and scalar charge. A spherical black hole has zero scalar charge and is the Schwarzschild solution.)

13.7.16 16 Spherical Symmetry and Relativistic Stellar Structure

The geometry generated by a nonrotating, perfect fluid star is spherically symmetric. Exterior to the star it is the Schwarzschild geometry, even if the star is nonstatic (radially pulsating or collapsing). If the star is static, the interior metric can be written

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + (1-2m/r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2$$

where $m = \int_0^r 4\pi r^2\rho dr$. The pressure gradient inside the star is given by the OV (Oppenheimer-Volkoff) equation of hydrostatic equilibrium

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho+p)\left(m+4\pi r^3 p\right)}{r(r-2\,m)}.$$

Here p and ρ are the pressure and mass-energy density of the fluid, satisfying the equations of state

$$p = p(n,\ T)$$
$$\rho = \rho(n,\ T).$$

If the entropy per baryon s is constant in the star, then p depends only on $\rho : p = p(\rho)$. The metric function Φ is determined by the Einstein field equations:

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m+4\pi r^3 p}{r(r-2\,m)} \quad \text{and} \quad e^{2\Phi} = 1-2M/R, \text{ at } r = R$$

where R is the radius of the star and $M = m(R)$ is its total mass (mass of the exterior Schwarzschild metric).

Equilibrium stellar models may be unstable against gravitational collapse. In this situation the relevant dynamical equations derive from the Einstein field equations and/or from $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$.

A stationary rotating star is not spherically symmetric, but rather is only axisymmetric. The structural equations for axisymmetric stars are quite complicated. However, certain general properties can be deduced (a) from the symmetries or (ii) when the star is assumed to be rigidly rotating.

Problem 16.1. Find basis vectors (and a dual basis of 1 -forms) for orthonormal tetrads in a spherical geometry. Take the legs of the tetrad to be in the t, r, θ, and ϕ directions of the isotropic coordinate system whose metric is

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + e^{2\mu}\left(dr^2 + r^2 d\Omega^2\right)$$

Problem 16.2. Suppose that an observer, at rest at some point inside a spherical relativistic star, measures the radial pressure-buoyant force, $F_{\rm buoy}$, on a small element of volume V, using the usual laboratory techniques. What value will he find for $F_{\rm buoy}$, in terms of ρ, p, m, V, and dp/dr ? If he equates this buoyant force to an equal and opposite gravitational force, $F_{\rm grav}$, what will $F_{\rm grav}$ be in terms of ρ, p, m, V, and r ? How do these results differ from the corresponding Newtonian results?

Problem 16.3. Prove Birkhoff's Theorem: a spherically symmetric vacuum gravitational field is always static, and is always the Schwarzschild solution.

Problem 16.4. Show that test particles experience no gravitational forces inside a self-gravitating hollow sphere.

Problem 16.5. In the Brans-Dicke theory of gravity (see MTW p. 1070 or Weinberg p. 160 for field equations), show that the only static spherically
vacuum solution which is regular at the origin is the flat-space metric η and constant scalar field Φ.

Problem 16.6. How many algebraically independent components of $T^{\mu\nu}$ are there in a spherically symmetric configuration?

Problem 16.7. Evaluate the 4 components of the equation $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$ for the stress energy tensor describing a static, spherically-symmetric perfect fluid star.

Problem 16.8. Polytropic stars (stars with fluids described by $p = K\rho^\gamma$) are unstable in Newtonian theory if $\gamma < 4/3$. Consider the influence of small relativistic effects on this stability criterion. Show that the effect is to increase the unstable range of γ to $\gamma < 4/3 + \varepsilon$ where ε may depend on the mass, radius, and structure of the star.

Problem 16.9. Express the Chandrasekhar and Oppenheimer-Volkoff upper mass limits (for white dwarfs and neutron stars, respectively) as dimensional combinations of fundamental constants and the mass of the nucleon and electron. Similarly express the limiting radii corresponding to these mass limits.

Problem 16.10. The mass m(r) inside radius r for a spherical star appears in the g_{rr} term of the line element

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + (1 - 2m(r)/r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Express $m(r)$ in a coordinate-independent manner in terms of the surface area and radial separation of spherical surfaces.

Problem 16.11.

(a) What is the form of the Schwarzschild metric in "outgoing Eddington Finkelstein coordinates", obtained from curvature coordinates by the transformation

$$dt = du + (1 - 2M/r)^{-1}dr$$

(b) Now let M be a function of the null coordinate u in part (a).

Show that the space-time is not vacuum, and find the corresponding $T^{\alpha\beta}$. Give a physical interpretation. (This is the "Vaidya" metric.)

Problem 16.12. Solve the relativistic equations of stellar structure for a static, spherically symmetric star of uniform density. Show that the mass and radius of the star satisfy $R/2M > 9/8$. What is the smallest R/2M can be if the dominant energy condition (see Problem 13.7) holds?

Problem 16.13. A static, spherically symmetric star is made out of a zerotemperature Fermi gas with Fermi energies much larger than the particle rest masses. Show that the equations of stellar structure have a solution $m(r) = 3r/14$. Find $\rho(r), p(r)$, and n(r). Although n is infinite at $r = 0$, show that the number of particles out to any radius is finite. Make an embedding diagram of the 3 -surface, $t =$ constant. What kind of singularity is at $r = 0$?

Problem 16.14. Calculate the surface stresses in a static self-gravitating shell of mass M and circumference $2\pi R$. What is the proper surface mass density? Compare the stresses to the Newtonian limit when $R \gg M$.

Problem 16.15. What is the smallest possible proper circumference of a self-supporting spherical shell of mass M, if its matter satisfies the dominant energy condition (as do all known forms of matter)?

Problem 16.16. What is the redshift to radial infinity from a thin spherical shell in static equilibrium, in terms of its proper surface density $\Lambda^{\hat{0}}{}_{\hat{0}}$ and proper surface stresses $\Lambda^{\hat{\theta}\hat{\theta}}$? What is the largest possible redshift if it satisfies the dominant energy condition?

Problem 16.17. Show that for a rigidly rotating, self-gravitating, perfect fluid star

$$\nabla p = (\rho + p)\nabla \log u^t$$

Here u^t is a component of the 4 -velocity of the fluid in the canonical coordinate system adapted to the Killing vectors (i.e. $\boldsymbol{\xi}_{(t)} = \partial/\partial t, \boldsymbol{\xi}_{(\phi)} = \partial/\partial\phi$).

Problem 16.18. Show that in a rigidly rotating, self-gravitating, perfect fluid star, the surfaces of constant p and ρ coincide.

Problem 16.19. Show that the surface of a rigidly rotating star, with angular velocity of rotation Ω as seen at ∞, is given by

$$\mathrm{g_{tt}} + 2\ \mathrm{g_{t\phi}}\Omega + \mathrm{g_{\phi\phi}}\Omega^2 = \text{ constant}$$

Problem 16.20. Find the Doppler broadening for a spectral line from a rigidly rotating star observed by an astronomer who is infinitely far away along the axis of rotation. (The Doppler broadening is the variation across the star in the Doppler shift:

$$z = \frac{\nu_{\mathrm{emitted}}}{\nu_{\mathrm{observed}}} - 1.\Big)$$

Problem 16.21. Derive the general relativistic criterion for convective stability in a static equilibrium configuration of perfect fluid.

Problem 16.22. Prove the equivalence of isentropy and constant injection energy $\left[(\rho + \mathrm{p})/\left(n\mathrm{u}^0\right)\right]$ for a rigidly rotating configuration.

Problem 16.23. Consider a stationary, axisymmetric star. There are two Killing vectors, $\boldsymbol{\xi}_{(\mathrm{t})}$ and $\boldsymbol{\xi}_{(\phi)}$. Show that

$$\mathrm{M} = -\int (2\ \mathrm{T}^{\mu}_{\nu} - \delta^{\mu}_{\nu}\mathrm{T})\,\xi^{\nu}_{(\mathrm{t})}\mathrm{d}^3\Sigma_{\mu}$$

is the mass of the star as measured from infinity. Here $d^3\Sigma_\mu$ is the volume element of the star at some instant of time t (the time coordinate t is chosen such that $\boldsymbol{\xi}_{(t)} = \partial/\partial t$). Similarly, show that

$$\mathrm{J} = \int \mathrm{T}^{\mu}_{\nu}\xi^{\nu}_{(\phi)}\mathrm{d}^3\Sigma_{\mu}$$

is the angular momentum as measured from infinity.

Problem 16.24. Show that the integral for M given in Problem 16.23, in the case of a static spherical star made of perfect fluid, is

$$\mathrm{M} = \int_0^{\mathrm{R}} (\rho + 3\mathrm{p})\mathrm{e}^{\Phi+\lambda}4\pi\mathrm{r}^2\mathrm{dr}$$

in curvature coordinates $\left(g_{00} = e^{2\Phi}, g_{rr} = e^{2\lambda}\right)$. Show that this is the same as the expression derived from the equation of stellar structure,

$$\mathrm{M} = \int_0^{\mathrm{R}} \rho 4\pi\mathrm{r}^2\mathrm{dr}$$

Problem 16.25. For collapsing spherical stars we can't simultaneously have the three nice properties: (i) radial coordinate is comoving with a fluid shell; (ii) time coordinate is proper time for the fluid; (iii) the metric is diagonal. Prove that we can have all three properties if and only if the pressure vanishes.

Problem 16.26. If R is a comoving coordinate, the metric for a spherically symmetric collapsing star (see Problem 16.25) can be written as

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + e^{2\Lambda}dR^2 + r^2(t,R)d\Omega^2$$

where Φ and Λ are functions of R, t. If the star is made of a perfect fluid it is often useful to define the following functions:

$$\mathrm{m} \equiv \int_0^{\mathrm{R}} 4\pi\mathrm{r}^2\rho\mathrm{r}'\mathrm{dR}$$
$$\mathrm{U} \equiv \mathrm{e}^{-\Phi}\mathrm{r}$$
$$\Gamma^2 \equiv \mathrm{e}^{-2\Lambda}\left(\mathrm{r}'\right)^2$$

Here primes denote partial differentiation with respect to R, and dots with respect to t. The function m is interpreted as the mass interior to the shell at R, and U is the rate at which a shell is moving with respect to the proper time of a comoving observer.

Prove the following relations:

$$\dot{\mathrm{m}} = -4\pi\mathrm{pr}^2\dot{\mathrm{r}} \tag{a}$$

[Hint: Use the first law of thermodynamics (Problem 5.19), baryon conservation, the equations of motion, and $G^t_R = 0$ (Problem 9.20).]

$$\Gamma^2 = 1 + U^2 - 2\ \mathrm{m/r}. \tag{b}$$

[Hint: Use $\mathrm{G^t_t} = -8\pi\rho$ and $\mathrm{G^t_R} = 0$ (Problem 9.20).]

Problem 16.27. In a collapsing star made of perfect fluid show that once a mass shell at comoving radius R has collapsed far enough so that $2m(R,t)/r(R,t) > 1$, the mass shell will collapse to $r = 0$ in a finite proper time.

Problem 16.28. For spherically symmetric pressure free collapse show that the fall of a shell is governed by the mass interior to that shell in the same manner as the radial fall of a particle in the Schwarzschild geometry is governed by the Schwarzschild mass:

$$\mathrm{d}^2\mathrm{r}/\mathrm{d}r^2 = -\mathrm{M}/\mathrm{r}^2.$$

Problem 16.29. For pressure free spherically symmetric collapse (see Problem 16.26), show that both m and Γ are independent of time. Solve the resulting dynamical equation

$$\left(\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \frac{2\ \mathrm{m(R)}}{\mathrm{r}} = \Gamma^2(\mathrm{R}) - 1$$

in the three physically distinct cases $\Gamma^2 - 1$ greater than, less than, and equal to, zero.

Problem 16.30. Consider the gravitational collapse of a spherically symmetric, perfect fluid star of zero pressure and uniform density (i.e. uniform throughout the star as seen by observers comoving with the fluid).
(i) Show that the metric inside the star is locally the Friedmann solution with $k = +1$ if the star collapses from rest at some finite radius, $k = 0$ if the star is at rest at infinity, or $k = -1$ if the star is projected with finite velocity from infinity.
(ii) By Birkhoff's theorem (Problem 16.3), the exterior metric is the Schwarzschild metric. Show that each point on the surface of the star moves along a radial geodesic of the Schwarzschild metric.
(iii) Show that the Friedmann and Schwarzschild metrics match together smoothly at the surface of the star. (It is necessary and sufficient to show that the intrinsic 3-geometry of the surface and the extrinsic curvature of the surface are the same whether measured in the exterior or the interior.)

16: Solutions

Solution 16.1. Since an observer's time axis points along his 4 -velocity, if he is stationary in the ($\mathrm{t}, \mathrm{r}, \theta, \phi$) coordinate system then his time axis must be along $\partial/\partial\mathrm{t}$ (and normalized properly). Accordingly, take $\mathrm{e}_{\hat{0}} = \mathrm{f}\partial/\partial\mathrm{t}$, where f is to be determined by normalization:

$$-1 = e_{\hat{0}} \cdot e_{\hat{0}} = f^2 \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} = f^2 g_{00} = -f^2 e^{2\Phi}.$$

Thus $f = e^{-\Phi}$ and

$$\mathrm{e}_{\hat{0}} = \mathrm{e}^{-\Phi} \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}. \tag{1}$$

The three directions, $\partial/\partial\theta, \partial/\partial\phi, \partial/\partial\mathrm{r}$ are all orthogonal to $\partial/\partial\mathrm{t}$ and choosing basis vectors along them, with unit normalization (same technique as above) yields

$$e_{\hat{\mathrm{r}}} = e^{-\mu} \frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}, \quad e_{\hat{\theta}} = e^{-\mu r_{\mathrm{r}} - 1} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad e_{\hat{\phi}} = e^{-\mu} (r \sin\theta)^{-1} \frac{\partial}{\partial \phi}. \tag{2}$$

The basis vectors in Equations (1) and (2) constitute an orthonormal proper reference frame for a stationary observer. Dual 1 -forms, $\tilde{\omega}^{\hat{a}}$, are found by the requirement

$$\left\langle \tilde{\omega}^{\hat{a}}, \mathrm{e}\hat{\beta} \right\rangle = \delta^a{}_\beta \tag{3}$$

and are easily seen to be

$$\tilde{\omega}^{\hat{0}} = \mathrm{e}^{\phi}\widetilde{\mathrm{dt}}, \quad \tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{r}}} = \mathrm{e}^{\mu}\widetilde{\mathrm{dr}}, \quad \tilde{\omega}^{\hat{\theta}} = \mathrm{e}^{\mu}\mathrm{r}\ \widetilde{\mathrm{d}\theta}, \quad \tilde{\omega}^{\hat{\phi}} = \mathrm{e}^{\mu}\mathrm{r}\sin\theta\ \widetilde{\mathrm{d}\phi}. \tag{4}$$

Solution 16.2. The observer makes measurements in his local orthonormal frame

$$e_{\hat{t}} = e^{-\Phi} e_t, \quad e_r = e^{-\lambda} e_r, \quad e\hat{\theta} = r^{-1} e_\theta, \quad e\hat{\phi} = (r\sin\theta)^{-1} e_\phi;$$
$$\tilde{\omega}^{\hat{t}} = e^{\Phi}\widetilde{dt}, \quad \tilde{\omega}^{\hat{r}} = e^{\lambda}\widetilde{dr}, \quad \tilde{\omega}^{\hat{\theta}} = r\widetilde{d\theta}, \quad \tilde{\omega}^{\hat{\phi}} = r\sin\theta\widetilde{d\phi}.$$

Here the metric is as given in the introduction, except $(1 - 2\ \mathrm{m/r})^{-1} \equiv \mathrm{e}^{2\lambda}$. The volume of a fluid element which he measures is

$$\begin{aligned} \mathrm{V} &= \tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{r}}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\theta}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{\phi}} \\ &= \mathrm{e}^{\lambda}\mathrm{r}^2 \sin\theta \widetilde{\mathbf{dr}} \wedge \widetilde{\mathbf{d}\theta} \wedge \widetilde{\mathbf{d}\phi} \\ &= e^{\lambda}\mathrm{r}^2 \sin\theta \mathrm{dr}\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

The pressure at opposite points on the vertical walls of the fluid element are the same, but because of the radial pressure gradient, the top and bottom pressures are not:

$$|p_{\text{top}} - p_{\text{bottom}}| = \left|p, \hat{\omega}^{\hat{\mathrm{r}}}\right| = \left|p, \mathrm{r} e^{-\lambda \hat{\omega}^{\hat{\mathrm{r}}}}\right|.$$

Thus,

$$\begin{aligned} |\mathrm{F}_{\text{buoy.}}| &= |(\mathrm{p}_{\text{top}} - \mathrm{p}_{\text{bottom}}) \times \text{ area }| \\ &= \left|\mathrm{p}_{,\mathrm{r}} \mathrm{e}^{-\lambda} \hat{\omega}^{\hat{\mathrm{r}}} \hat{\theta}_{\omega} \hat{\phi}\right| \\ &= \left|\mathrm{p}_{,\mathrm{r}} \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{V}\right| \end{aligned}$$

Since the direction of the buoyant force is radial,

$$\mathrm{F}_{\text{buoy.}} = \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{p}_{,\mathrm{r}} \mathrm{V} \mathrm{e}_{\hat{\mathrm{r}}} = \left(1 - \frac{2\ \mathrm{m}}{\mathrm{r}}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{p}_{,\mathrm{r}} \mathrm{V} \mathrm{e}_{\hat{\mathrm{r}}}.$$

Using the OV equation for $\mathrm{p}_{,\mathrm{r}}$, we find

$$F_{\text{grav.}} = -F_{\text{buoy.}} = -\frac{(\rho + p)\left(m + 4\pi r^3 p\right) V_{e\hat{r}}}{r^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

The Newtonian result is

$$\mathrm{p}_{,\mathrm{r}} \mathrm{V} \mathrm{e}_{\hat{\mathrm{r}}} = -\frac{\rho \mathrm{m} \mathrm{V}}{\mathrm{r}^2} \mathrm{e}_{\mathrm{r}}.$$

Solution 16.3. A spherically symmetric metric can depend only on t , dt , r, dr, and $\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\ \mathrm{d}\phi^2$:

$$ds^2 = -A(r,t)dt^2 + B(r,t)dr^2 + 2C(r,t)drdt + D(r,t)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right).$$

Choose a new radial variable $r' = D^{\frac{1}{2}}(r,t)$. Dropping the prime, we have

$$ds^2 = -E(r,t)dt^2 + F(r,t)dr^2 + 2G(r,t)drdt + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

Eliminate G by defining a new time variable

$$\mathrm{dt}' = \mathrm{H}(\mathrm{r},\mathrm{t})[\mathrm{E}(\mathrm{r},\mathrm{t})\mathrm{dt} - \mathrm{G}(\mathrm{r},\mathrm{t})\mathrm{dr}]$$

where H is an integrating factor chosen to make the right-hand side a perfect differential. The metric then takes the standard form (with the prime dropped)

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r,t)}dt^2 + e^{2\lambda(r,t)}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

From Problem 9.20, the Einstein tensor has nontrivial components

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = 2e^{-2\lambda}{}_{,\mathrm{r}}/\mathrm{r} + \left(1 - e^{-2\lambda}\right)/\mathrm{r}^2 \tag{1}$$

$$G_{\hat{t}\hat{r}} = 2e^{-(\Phi+\lambda)}\lambda_{,t}/\mathrm{r} \tag{2}$$

$$G_{\hat{r}\hat{r}} = \left(e^{-2\lambda} - 1\right)/\mathrm{r}^2 + 2e^{-2\lambda}\Phi_{,r}/\mathrm{r} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} G\hat{\theta}\hat{\theta} = G_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = e^{-2\lambda(\Phi_{,rr} + \Phi_{,r}{}^2 - \Phi_{,r}\lambda_{,r} + \Phi_{,r}/r - \lambda_{,r}/r)} \\ -e^{-2\Phi}(\lambda_{,tt} + \lambda_{,t}{}^2 - \Phi_{,t}\lambda_{,t}\Big) \end{aligned} \tag{4}$$

When the vacuum field equations $\mathrm{G}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = 0$ are imposed, Equation (2) shows that λ is independent of t and Equation (1) becomes

$$\frac{2\ \mathrm{d}\lambda}{1 - \mathrm{e}^{2\lambda}} = \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{r}}$$

from which we find

$$\mathrm{e}^{2\lambda} = \left(1 - \frac{2\mathrm{M}}{\mathrm{r}}\right)^{-1} \tag{5}$$

The constant of integration has been chosen as 2 M for convenience. Equations (3) and (4) are now equivalent equations determining Φ. (They
ad to be equivalent because of the identity ${}_{\mathrm{G}}\hat{\beta}\hat{\alpha}; \hat{\beta} = 0$.) The quickest ay to find Φ is to add Equation (1) to Equation (3). This gives Q, $r = -\lambda, \mathrm{r}$ so $\mathrm{e}^{2\Phi} = \mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{e}^{-2\lambda}$. By defining a new time variable $df = f^{\frac{1}{2}}(t)dt, f$ can be eliminated, so the final form of the metric is

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

This is the Schwarzschild metric which is static.
Note: The r coordinate used here is defined by $4\pi r^2$ = surface area of spheres defined by the spherical symmetry. If r were not a monotonic function, it could not be used as a coordinate. However, a detailed investigation of this case (MTW, p. 845) shows there are no other solutions.

Solution 16.4. From Birkhoff's Theorem (see Problem 16.3), we know that the line element in vacuum for a spherically symmetric system is the Schwarzschild solution. Inside a self-gravitating hollow sphere we therefore have a Schwarzschild solution, but here the point $r = 0$ is not a singularity; therefore, the mass M (which is actually an integration constant in the solution of Einstein's equations) must be set to zero to avoid infinite values of the M/r terms in the metric. The metric inside the hollow sphere is therefore a flat space metric and consequently a test particle there experiences no forces.

Solution 16.5. The vacuum field equations for the scalar field Φ and metric $g_{\mu\nu}$ in the Brans-Dicke theory are

$$\begin{aligned} R_{a\beta} - \frac{1}{2}\, g_{a\beta} R = & \frac{\omega}{\Phi^2}\left(\Phi_{,a}\Phi_{,\beta} - \frac{1}{2}\, g_{a\beta}\Phi_{,\gamma}\Phi^{,\gamma}\right) \\ & + \Phi^{-1}\left(\Phi_{,\alpha;\beta} - g_{a\beta}\Box\Phi\right) \end{aligned} \tag{1}$$

$$\Box\Phi = 0 \tag{2}$$

If the standard form of the spherically symmetric static metric $\left(-e^{2U}dt^2 + e^{2\lambda}dr^2 + r^2 d\Omega^2\right)$ is used, $\Box\Phi = 0$ becomes

$$\left(e^{U-\lambda} r^2 \Phi_{,r}\right), r = 0 \tag{3}$$

The general solution is

$$\Phi = a\int_r^\infty \frac{e^{\lambda - U}}{r^2} dr + b. \tag{4}$$

Near $r = 0$ the metric functions e^{2U} and $e^{2\lambda}$ approach unity. (The metric is Lorentzian near $r = 0$.) The integral in Equation (4) therefore blows up near $r = 0$ and Φ takes the form

$$\Phi \approx a/r + b \tag{5}$$

near the origin. But if a is nonzero, the right hand side of Equation (1) is of order a^2/r^2. (This is not a coordinate effect; the trace of the right hand side is of order a^2/r^2 so by Equation (1) the scalar curvature blows up as a^2/r^2.) For a solution regular at the origin, then, a must be zero, i.e. Φ must be constant. For Φ constant, Equation (1) reduces to the vacuum static spherically symmetric field equations of general relativity. From Birkhoff's theorem we know that the only solution to these equations which is well behaved at $r = 0$ is $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.

Solution 16.6. Examine the components at any point in an orthonormal tetrad $\left[e_{\hat{t}}, e_{\hat{r}}, e_{\hat{\theta}}, e_{\hat{\phi}}\right]$. Spherical symmetry implies the components are invariant under rotations:

$$\begin{aligned} e_{\hat{\theta}} &\to \cos\alpha e_{\hat{\theta}} + \sin\alpha e_{\hat{\phi}} \\ e_{\hat{\phi}} &\to -\sin\alpha e_{\hat{\theta}} + \cos\alpha e_{\hat{\phi}} \end{aligned}$$

The components $T_{\hat{t}\hat{t}}, T_{\hat{t}\hat{r}}$ and $T_{\hat{r}\hat{r}}$ are invariant under rotations. The pair $\left(T_{\hat{t}\hat{\theta}}, T_{\hat{t}\hat{\phi}}\right)$ transforms like a 2 -dimensional vector under rotations and so is not invariant. Thus $T_{\hat{t}\hat{\theta}} = T_{\hat{t}\hat{\phi}} = 0$ and similarly $T_{\hat{r}\hat{\theta}} = T_{\hat{r}\hat{\phi}} = 0$. The only 2 -dimensional matrix invariant under rotations is a multiple of the identity matrix, so

$$\begin{pmatrix} T\hat{\theta}\hat{\theta} & T\hat{\theta}\hat{\phi} \\ T\hat{\phi}\hat{\theta} & T\hat{\phi}\hat{\phi} \end{pmatrix} = T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Thus, there are four independent components: $T_{\hat{t}\hat{t}}, T_{\hat{t}\hat{r}}, T_{\hat{r}\hat{r}}$ and $\vec{\boldsymbol{\theta}}\vec{\boldsymbol{\theta}}\hat{\boldsymbol{\theta}} = T\hat{\phi}\hat{\phi}$.

Solution 16.7. The standard form for the metric of a static, spherically ymmetric star is

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + e^{2\Lambda}dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{1}$$

The equation $T^{\alpha\beta}; \beta = 0$ is most easily evaluated by recalling that it is equivalent to the first law of thermodynamics

$$d\rho/d\tau = \frac{\rho + p}{n}\frac{dn}{d\tau} \tag{2}$$

(see Problem 5.19) and the Euler equation

$$(\rho + \mathrm{p})\mathrm{u}_a ; \beta^{\mathrm{u}^\beta} = -\mathrm{p}, a - \mathrm{p}, \beta^{\mathrm{u}^\beta \mathrm{u}_a} \tag{3}$$

(see Problem 14.3). For a static star, both sides of Equation (2) vanish identically. The only nonzero component of $\mathbf{u}$ is $\mathbf{u^t}$ and $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1\mathrm{im}-$ plies $u^t = e^{-\Phi}$. Since only $p_{,r}$ is nonzero, the only nontrivial component of Equation (3) is

$$\begin{aligned} -\mathrm{p}_{,\mathrm{r}} &= (\rho + \mathrm{p})\mathrm{u}_{\mathrm{r};\beta}\mathrm{u}^\beta = -(\rho + \mathrm{p})\Gamma^\alpha_{r\beta}\mathrm{u}_a\mathrm{u}^\beta \\ &= -(\rho + \mathrm{p})\Gamma^{\mathrm{t}}_{rt}\mathrm{u}_t\mathrm{u}^t = (\rho + \mathrm{p})\Phi_{,\mathrm{r}} \end{aligned}$$

Solution 16.8. Let $m(r)$ be a solution to the Newtonian equations for a polytropic star, namely

$$\mathrm{dm/dr} = 4\pi \mathrm{r}^2 \rho \tag{1}$$

$$\mathrm{dp/dr} = -\frac{\mathrm{Gm}\rho}{\mathrm{r}^2} \tag{2}$$

$$\mathrm{p} = \mathrm{K}\rho^\gamma \tag{3}$$

When $\gamma = 4/3$ the star is neutrally stable; this is seen in the fact that

$$\begin{aligned} \tilde{\mathrm{m}}(\mathrm{r}) &= \mathrm{m}(\alpha \mathrm{r}) \\ \tilde{\rho}(\mathrm{r}) &= a^3 \rho(a\mathrm{r}) \\ \tilde{\mathrm{p}}(\mathrm{r}) &= a^4 \mathrm{p}(a\mathrm{r}) \end{aligned}$$

is also a solution to Equations (1), (2), (3) and has the same total mass $m(\infty)$ and adiabat K.

The relativistic version of Equation (1) is identical; Equation (3), the given equation of state, is also identical by hypothesis. The relativistic form of Equation (2) is [Weinberg, Equation 11.1.13 or MTW, Equation 23.22]

$$\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dr}} = -\frac{\mathrm{Gm}\rho}{\mathrm{r}^2}\left(1 + \frac{\mathrm{p}}{\rho}\right)\left(1 + \frac{4\pi \mathrm{r}^3 \mathrm{p}}{\mathrm{m}}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{r}}\right)^{-1} \tag{4}$$

Since the star we are considering is nearly Newtonian, the terms in brackets are all very close to unity. Hence, one can find an exact solution to Equation (4) which is nearly equal to the Newtonian solution to Equation (2) [e.g. by substituting into Equation (4) to find a small correction to p and by iterating]. Call this solution $\hat{m}(r), \hat{\rho}(r), \hat{p}(r)$. From this generate

$$\begin{aligned} \tilde{\mathrm{m}}(\mathrm{r}) &= \hat{\mathrm{m}}(\alpha \mathrm{r}) \\ \tilde{\rho}(\mathrm{r}) &= \alpha^3 \hat{\rho}(\alpha \mathrm{r}) \\ \tilde{\mathrm{p}}(\mathrm{r}) &= \alpha^4 \hat{\mathrm{p}}(\alpha \mathrm{r}) \end{aligned}$$

Equations (1) and (3) remain equalities, but the ratio of the right hand side of Equation (4) to the left hand side is, to lowest order,

$$\frac{\text{right}}{\text{left}} = 1 + (\alpha - 1)\left[\frac{\hat{\mathrm{p}}}{\hat{\rho}} + 4\pi(a\mathrm{r})^3 \frac{\hat{\mathrm{p}}}{\hat{\mathrm{m}}} + \frac{2\ \hat{\mathrm{m}}}{a\mathrm{r}}\right]. \tag{5}$$

For $a > 1$, which corresponds to shrinking the star to smaller radius, the right side is greater than the left side, hence the pressure gradient is everywhere insufficient to support the star and it must go to a smaller madius yet. This cannot be an equilibrium because it would still be almost Sewtonian and the same argument would apply. Therefore, $\gamma = 4/3$ is sinstable, and the range of stability must begin at $4/3 + \varepsilon$.

Solution 16.9. Increasing the mass of a degenerate star makes the material more compact until the Fermi energy of the gas (electron gas in case of thite dwarf; neutron gas in the case of neutron star) rises to a relativistic Tevel. If A is the number of baryons in the star, and R is the radius of the star, then the Fermi energy is approximately (in the relativistic regime)

$$E_F \sim \frac{\pi c}{R} A^{\frac{1}{3}} \tag{1}$$

(In this equation we have ignored such details as the fact that there are twice as many pressure supporting fermions per baryon in a neutron star as in a white dwarf.) The gravitational mass-energy per fermion is approximately

$$\mathrm{E_G} \sim -\frac{\mathrm{GAm_B^2}}{\mathrm{R}} \tag{2}$$

where m_B is the mass of a baryon.

Note that both the compressional and gravitational energy depend in the same way upon R. The decisive question is therefore the sign of the total coefficient of R^{-1}. When it is positive, R will increase, the Fermi energy will become nonrelativistic, the energy of compression will then fall faster than R^{-1} and a stable equilibrium

will be achieved at some finite R. When the coefficient is negative, collapse will set in and continue. The critical number of baryons at which the star becomes unstable is thus obtained by equating $\mathrm{E_G}$ and $\mathrm{E_F}$:

$$A_{\text{crit.}} = \left(\frac{\hbar \mathrm{c}}{\mathrm{G m_B^2}}\right)^{\frac{3}{2}} \approx 10^{57}. \tag{3}$$

Equation (3) corresponds to a critical limiting mass of

$$M_{\text{crit.}} = m_B A_{\text{crit.}} \approx 2M_\odot \tag{4}$$

$$\mathrm{L} = -\left(1 - \frac{2\mathrm{M}}{\mathrm{r}}\right)\dot{\mathrm{u}}^2 - 2\dot{\mathrm{u}}\dot{\mathrm{r}} + \mathrm{r}^2\dot{\theta}^2 + \mathrm{r}^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2. \tag{3}$$

and limiting radii of

$$R_{\text{crit.}} \sim \pi c A_{\text{crit.}}^{\frac{1}{3}} \times \begin{cases} \left(m_e c^2\right)^{-1} & \text{for white dwarf} \\ \left(m_B c^2\right)^{-1} & \text{for neutron star} \end{cases} \tag{4}$$
$$\approx \begin{cases} 5 \times 10^8 \text{ cm for white dwarf} \\ 2.7 \times 10^5 \text{ cm for neutron star} \end{cases}$$

Solution 16.10. At a particular point P let an observer construct a sphere S passing through P and defined such that the geometry is the same at all points on S. Then, from the line element, the measured area of this sphere will be

$$A(r) = 4\pi r^2. \tag{1}$$

The gradient of the scalar function A(r) is a 1 -form, i.e.

$$\nabla \mathrm{A(r)} \equiv \widetilde{\mathrm{dA}} = 8\pi \mathrm{r}\widetilde{\mathrm{dr}}. \tag{2}$$

Thus,

$$\widetilde{\mathrm{dA}} \cdot \widetilde{\mathrm{dA}} = 16\pi^2\mathrm{r}^2\widetilde{\mathrm{dr}} \cdot \widetilde{\mathrm{dr}} = 16\pi^2\mathrm{r}^2(1 - 2\ \mathrm{m/r}) \tag{3}$$

and

$$\mathrm{m(r)} = \frac{(\mathrm{A}/\pi)^{\frac{1}{2}}}{4}\left(1 - \frac{\widetilde{\mathrm{dA}} \cdot \widetilde{\mathrm{dA}}}{16\pi\ \mathrm{A}}\right). \tag{4}$$

Solution 16.11.
(a) Under the transformation, the metric

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{1}$$

becomes

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)du^2 - 2dudr + r^2 d\Omega^2. \tag{2}$$

(b) We wish to compute the Einstein tensor $\mathrm{G}_{\alpha\beta}$ when $\mathrm{M} = \mathrm{M(u)}$.
The Christoffel symbols are most easily found from the Lagrangian for geodesics (see Problem 7.25):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}\left(\frac{\partial\ \mathrm{L}}{\partial\dot{\mathrm{r}}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{r}} = 0$$

The Euler-Lagrange equation

$$\mathrm{G_{uu}} = -2\mathrm{M}'/\mathrm{r}^2$$

which implies that

$$\mathrm{T_{uu}} = -\mathrm{M}'/4\pi\mathrm{r}^2,$$

and that all other components of $\mathbf{T}$ are zero. Since the vector $\mathbf{k} = \nabla u$, that is $\mathrm{k}_\alpha = (1, 0, 0, 0)$, is null, the stress-energy tensor

$$\mathbf{T} = -\frac{\mathbf{M}'}{4\pi\mathbf{r}^2}\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}$$

corresponds to a pure radiation field. Thus a physical interpretation of this solution (called the Vaidya metric) is the exterior metric of a spherical star whose mass is decreasing because of the energy carried off in radiation.

Solution 16.12. The equations of stellar structure are (MTW, Equation 23.5 or Weinberg, Chapter 11.1)

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{1}$$

$$m = -\int_0^r 4\pi r^2 \rho dr \tag{2}$$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho + p)\left(m + 4\pi r^3 p\right)}{r(r - 2m)} \tag{3}$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 p}{r(r - 2m)} \tag{4}$$

Since $\rho = \rho_0$, a constant, Equation (2) gives

$$\mathrm{m} = 4\pi \mathrm{r}^3 \rho_0 / 3 \tag{5}$$

and

$$\mathrm{M} = 4\pi \mathrm{R}^3 \rho_0 / 3 \tag{6}$$

where R is the radius and M the total mass for the star. Substitute Equation (5) in Equation (3) to get

$$\frac{\mathrm{dp}}{4\pi\left(\rho_0 + \mathrm{p}\right)\left(\frac{1}{3}\rho_0 + \mathrm{p}\right)} = -\frac{\mathrm{rdr}}{1 - (8\pi/3)\mathrm{r}^2\rho_0}$$

Integrate and solve for p :

$$\frac{p}{\bar{\rho}_0} = \frac{\left(1 - 2Mr^2/R^3\right)^{\frac{1}{2}} - (1 - 2M/R)^{\frac{1}{2}}}{3(1 - 2M/R)^{\frac{1}{2}} - (1 - 2Mr^2/R^3)^{\frac{1}{2}}} \tag{7}$$

The constant of integration has been determined by demanding $p = 0$ at $\tau = R$. The quantity Φ is most easily found from the equation:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{dp}} = \frac{\mathrm{d}\Phi/\mathrm{dr}}{\mathrm{dp}/\mathrm{dr}} = -\frac{1}{\rho_0 + \mathrm{p}}$$

Integrate to find

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\Phi} &= \text{ constant } / \left(\rho_0 + \mathrm{p}\right) \\ &= \frac{3}{2}(1 - 2\mathrm{M}/\mathrm{R})^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(1 - 2\mathrm{Mr}^2/\mathrm{R}^3\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{8}$$

where Equation (7) has been used to fix the constant of integration so that

$$e^{\Phi(r=R)} = (1 - 2M/R)^{\frac{1}{2}}$$

(That is, so that the metric will match smoothly to the Schwarzschild metric outside the star.)

We thus have a 1-parameter family of stellar models, conveniently parametrized by the central pressure

$$\frac{\mathrm{p_c}}{\rho_0} = \frac{1 - (1 - 2\mathrm{M}/\mathrm{R})^{\frac{1}{2}}}{3(1 - 2\mathrm{M}/\mathrm{R})^{\frac{1}{2}} - 1} \tag{9}$$

The central pressure becomes infinite when

$$3\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0$$

i.e. the limiting value of R/2M is 9/8.

The dominant energy condition demands $\mathrm{p_c} < \rho_0$, so that the right side of Equation (9) is < 1. This implies $R/2M > 4/3$.

Solution 16.13. A relativistic zero-temperature Fermi gas has the equation of state $p = 1/3\rho$, so the equations of structure (see Problem 16.12) read

$$\mathrm{d}\rho/\mathrm{dr} = -\frac{4\rho\left(\mathrm{m} + 4\pi\mathrm{r}^3\rho/3\right)}{\mathrm{r}(\mathrm{r} - 2\ \mathrm{m})} \tag{1}$$

$$\mathrm{dm}/\mathrm{dr} = 4\pi\mathrm{r}^2\rho \tag{2}$$

Substitution of the suggested solution $m(r) = 3r/14$ into Equation (2) gives $\rho(r) = (3/14)\left(4\pi r^2\right)^{-1}$; substitution of this ρ and m into Equation (1) verifies that they are a solution. From the equation of state $p(r) = (1/14)\left(4\pi r^2\right)^{-1}$. To find $n(r)$ we use the relations for a relativistic Fermi gas (see Problem 5.24)

$$\mathrm{n} = \int_0^{\mathrm{p_F}} \left(\frac{2}{\mathrm{h}^3}\right) 4\pi\mathrm{p}^2\mathrm{dp} = \frac{8\pi}{3\ \mathrm{h}^3}\mathrm{p_F^3} \tag{3}$$

$$\rho = \int_0^{\mathrm{p_F}} \mathrm{p}\left(\frac{2}{\mathrm{h}^3}\right) 4\pi\mathrm{p}^2\mathrm{dp} = \frac{8\pi}{4\ \mathrm{h}^3}\mathrm{p_F^3} \tag{4}$$

Eliminating $\mathrm{p_F}$ (the Fermi momentum) from Equations (3) and (4) gives

$$n(r) = \frac{8\pi}{3h^3}\left(\frac{4h^3\rho}{8\pi}\right)^{\frac{3}{4}}$$

and substitution of $\rho(r)$ gives

$$n(r) = \frac{K}{r^{\frac{3}{2}}}, \quad K = \frac{8\pi}{3h^3}\left(\frac{4h^3}{8\pi}\cdot\frac{3}{14}\cdot\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{3}{4}} \tag{5}$$

The total number of particles inside radius r is

$$\begin{aligned} N(r) &= \int_0^r n(r)d\ (\text{proper volume}) \\ &= \int_0^r n(r)e^{\Lambda_4}4\pi r^2 dr \\ &= \frac{14\pi}{3}Kr^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \tag{6}$$

which is finite for all r. [Note: In deriving Equation (6) we have used

$$\mathrm{e}^{2\Lambda} \equiv g_{\mathrm{rr}} = \left(1 - \frac{2\ \mathrm{m(r)}}{\mathrm{r}}\right)^{-1} = 7/4\Bigg]$$

The 3-geometry of the t = constant hypersurface has the metric

$$(3)\ ds^2 = g_{rr}dr^2 + r^2d\Omega^2 = (7/4)dr^2 + r^2d\Omega^2.$$

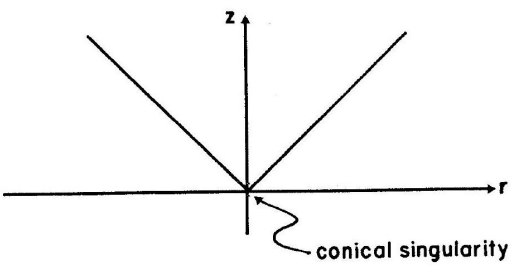
This obviously has a conical singularity at the origin, because a 2 -sphere of circumference 2πr will have a radius of $(7/4)^{\frac{1}{2}}$r which is greater than r.

The embedding equation for a radial cut is

$$^{(3)}\mathrm{ds}^2 = (7/4)\mathrm{dr}^2 = \mathrm{dr}^2 + \mathrm{dz}^2$$

which implies

$$z = \pm(3/4)^{\frac{1}{2}}\mathbf{r}$$



Solution 16.14. The metric cannot be continuous across the shell in curvature coordinates, because $g_{rr} = (1 - 2\ m(r)/r)^{-1}$ and m(r) changes across the shell. Therefore we use isotropic coordinates, in which the metric will be continuous and (matching flat space inside to mass M outside) has the form

$$ds^2 = -e^{\gamma}dt^2 + e^{a}\left(dr^2 + r^2 d\Omega^2\right) \tag{1}$$

$$e^{\gamma} = \begin{cases} \left(1 - \frac{M}{2r}\right)^2 \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^{-2} & r > R \\ \left(1 - \frac{M}{2R}\right)^2 \left(1 + \frac{M}{2R}\right)^{-2} & r < R \end{cases}$$

$$e^{a} = \begin{cases} \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^4 & r > R \\ \left(1 + \frac{M}{2R}\right)^4 & r < R \end{cases} \tag{2 b}$$

(2a)

In Equations (1) and (2) we have used the fact that the geometry is Schwarzschild outside the shell and flat in the interior (Birkhoff's Theorem - see Problem 16.3). Also, the surface of the shell is located at r = R (in isotropic radial coordinate distance).

Next we define the integrated stress, $\Lambda^{\hat{a}}{}_{\hat{\beta}}$ in the following invariant manner

$$\Lambda^{\hat{a}}{}_{\hat{\beta}} \equiv \mathrm{LIM}_{\epsilon\to 0} \int_{\mathrm{R}-\epsilon}^{\mathrm{R}+\epsilon} \mathrm{T}^{\hat{a}}{}_{\hat{\beta}} d\hat{\mathrm{r}} = \mathrm{LIM}_{\epsilon\to 0} \int_{\mathrm{R}-\epsilon}^{\mathrm{R}+\epsilon} \mathrm{T}^{\hat{a}}{}_{\hat{\beta}} \mathrm{e}^{\mathrm{e}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\alpha} \mathrm{dr} \tag{3}$$

The components of Λ may be evaluated by using the Einstein field equations and by noting that, according to Equations (2) and (3), only terms in $\mathrm{G}^{\mu}{}_{\nu}$ with second derivatives of the metric potentials can contribute.

The components of $G^{\mu}{}_{\nu}$ for the metric of Equation (1) are (see Problem 9.20)

$$\mathrm{G}^0_0 \sim a'' \mathrm{e}^{-\alpha} \sim -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}^2}\left(\mathrm{e}^{-\alpha}\right) \tag{4a}$$

$$\mathrm{G}^{\mathrm{r}}_{\mathrm{r}} \sim 0 \tag{4b}$$

$$\mathrm{G}^{\theta}_{\theta} = \mathrm{G}^{\phi}_{\phi} \sim \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-a}\left(a'' + \gamma''\right) \sim -\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dr}^2}\left(\mathrm{e}^{-a}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\left(\mathrm{e}^{-a}\gamma'\right)\right]$$

where $\sim$ denotes the process of discarding all terms not involving second derivatives. Using Equations (3) and (4), and the Einstein field equations, we get

$$\Lambda_{\hat{0}} = \Lambda^0_0 = -(8\pi)^{-1}\,\mathrm{LIM}_{\epsilon\to 0} \int_{\mathrm{R}-\epsilon}^{\mathrm{R}+\epsilon} \mathrm{e}^{\alpha/2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dr}^2}\left(\mathrm{e}^{-\alpha}\right) \mathrm{dr} \sim -\,(8\pi)^{-1}\,\mathrm{LIM}_{\epsilon\to 0}\, \mathrm{e}^{\alpha/2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\left(\mathrm{e}^{-\alpha}\right)\Big|_{\mathrm{R}-\epsilon}^{\mathrm{R}+\epsilon}$$

or

$$\Lambda^{\hat{0}}_{\hat{0}} = \frac{-\mathrm{M}}{4\pi \mathrm{R}^2 (1 + \mathrm{M}/2\mathrm{R})^3} \tag{4c}$$

$$\therefore \quad \hat{\Lambda}\mathbf{r} = \Lambda^{\mathrm{r}}_{\mathrm{r}} = 0 \tag{5}$$

$$\Lambda^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\theta}} = \Lambda^{\hat{\phi}}{}_{\hat{\phi}} = -(8\pi)^{-1}\,\mathrm{LIM}_{\epsilon\to 0} \int_{\mathrm{R}-\epsilon}^{\mathrm{R}+\epsilon} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha/2}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dr}^2}\left(\mathrm{e}^{-\alpha}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\left(\mathrm{e}^{-\alpha}\gamma'\right)\right] \mathrm{dr}$$

$$= -\,(8\pi)^{-1}\,\mathrm{LIM}_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\alpha/2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\left(\mathrm{e}^{-\alpha}\right) - \mathrm{e}^{-\alpha}\gamma'\right]\Big|_{\mathrm{R}-\epsilon}^{\mathrm{R}+\epsilon}$$

or

$$\Lambda^{\hat{\theta}}{}_{\hat{\theta}} = \frac{\mathrm{M}}{8\pi \mathrm{R}^2}\left(\frac{\mathrm{M}/2\mathrm{R}}{1 - \mathrm{M}/2\mathrm{R}}\right)\left(1 + \frac{\mathrm{M}}{2\mathrm{R}}\right)^{-3} \tag{6}$$

To have proper interpretation of Equations (4) to (6) we must remember that R denotes the radius of the shell in isotropic coordinates. In curvature coordinates, the radius $\Re$ is

$$R = \mathrm{R}(1 + \mathrm{M}/2\mathrm{R})^2 \tag{7}$$

The proper surface mass density is just

$$\frac{M}{4\pi\Re^2} = \frac{M}{4\pi R^2 (1 + M/2R)^4} \tag{8}$$

The Newtonian limit of Equations (4) to (6) is just

$$\Lambda_{\hat{0}}^{\hat{0}_{\hat{0}}} \to -\frac{\mathrm{M}}{4\pi \mathrm{R}^2}$$
$$\hat{\Lambda}_{\hat{\mathrm{r}}} = 0$$
$$\Lambda_{\hat{\theta}}^{\hat{\theta}_{\hat{\theta}}} = \Lambda^{\hat{\phi}_{\hat{\phi}}} \to \frac{\mathrm{M}^2}{16\pi \mathrm{R}^3}.$$

Solution 16.15. The dominant energy condition requires

$$\left|\mathrm{T}^{\hat{0}\hat{0}}\right| > \left|\mathrm{T}^{\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}}\right|. \tag{1}$$

Using the results of Problem 16.14, and integrating Equation (1) through the thin shell, we have the inequality

$$\left(1+\frac{M}{2R}\right)^{-3} > \frac{1}{2}\frac{M/2R}{1-M/2R}\left(1+\frac{M}{2R}\right)^{-3} \tag{2}$$

where R is the isotropic radial coordinate. Letting $x = M/2R$ we have $2-2x > x$ or $x < 2/3$, giving $R > \frac{3}{4}M$, or for the curvature radial coordinate $\Re$

$$R = R\left(1+\frac{M}{2R}\right)^2 > \frac{25}{12}M, \tag{3}$$

about 1.04 Schwarzschild radii.

Solution 16.16. In isotropic coordinates (see Problem 16.14), the redshift to radial infinity is

$$z = \frac{\lambda_{\text{infinity}}}{\lambda_{\text{surface}}} - 1 = \frac{(-\mathrm{g}_{00})_{\infty}^{\frac{1}{2}}}{(-\mathrm{g}_{00})_{S}^{\frac{1}{2}}} - 1 = \left(\mathrm{e}^{-\gamma/2}\right)_S - 1$$
$$= \frac{1+\mathrm{M}/2\mathrm{R}}{1-\mathrm{M}/2\mathrm{R}} - 1 = \frac{\mathrm{M}/\mathrm{R}}{1-\mathrm{M}/2\mathrm{R}}$$

The integrated energy density and transverse pressure are respectively

$$-\Lambda_{\hat{0}}^{\hat{0}} = \frac{M}{4\pi R^2}\left(1+\frac{M}{2R}\right)^{-3}$$
$$\Lambda_{\hat{\theta}}^{\hat{\theta}} = \Lambda^{\hat{\phi}\hat{\phi}} = \frac{M}{8\pi R^2}\left(\frac{M/2R}{1-M/2R}\right)\left(1+\frac{M}{2R}\right)^{-3}$$

Hence the ratio of integrated pressure to energy is

$$\frac{\Lambda_{\hat{\theta}}^{\hat{\theta}_{\hat{\theta}}}}{-\Lambda_{\hat{0}}^{\hat{O}_{\hat{0}}}} = \frac{\mathrm{M}/4\mathrm{R}}{1-\mathrm{M}/2\mathrm{R}} = \frac{1}{4}z$$

so the redshift to radial infinity is

$$z = -4\Lambda^{\hat{\theta}_{\hat{\theta}}/\Lambda_{\hat{0}}^{\hat{0}}}$$

If the dominant energy condition is satisfied, $\left|\Lambda^{\hat{\theta}_{\hat{\theta}}}\right| \le \left|\Lambda_{\hat{0}}^{\hat{0}}\right|$, so $z \le 4$.

Solution 16.17. The non-vanishing components of the fluid 4 -velocity are u^t and $u^\phi = \Omega u^t$, i.e.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\mathrm{t}}\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}} + \Omega\frac{\partial}{\partial\phi}\right).$$

Let

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}} + \boldsymbol{\Omega}\frac{\partial}{\partial\phi} = \boldsymbol{\xi}_{(\mathrm{t})} + \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\xi}_{(\phi)}.$$

Then ξ is a Killing vector, since Ω is a constant. By Problem 10.14, we have

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = \nabla \log|\xi\cdot\xi|^{\frac{1}{2}}$$

where, since $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = -1, |\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}|^{\frac{1}{2}} = 1/\mathbf{u}^{\mathrm{t}}$. Thus, the Euler equation (see Problem 14.3) for the fluid becomes

$$(\rho+\mathrm{p})\nabla\log\left(\mathrm{u}^{\mathrm{t}}\right)^{-1} = -\nabla_{\mathrm{p}} - \left(\nabla_{(\mathrm{u}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\xi})}^{\mathrm{p})\mathbf{u}}\right.$$

Since p is independent of t and ϕ, it follows that $\nabla_\xi p = 0$. Thus,

$$(\rho + \mathrm{p})\nabla \log \mathrm{u^t} = \nabla \mathrm{p}.$$

Solution 16.18. First, note that $\mathrm{dp} = (\rho + \mathrm{p})\mathrm{d}\log \mathrm{u^t}$ (hydrostatic equilibrium; see Problem 16.17). Next take the exterior derivative of this equation, and use $\mathrm{ddp} = 0$ to get

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{d}(\rho + \mathrm{p}) \wedge \mathrm{d}\log \mathrm{u^t} \\ &= \mathrm{d}(\rho + \mathrm{p}) \wedge (\rho + \mathrm{p})^{-1}\ \mathrm{d}\rho \end{aligned}$$

which implies that

$$\mathrm{d}\rho \wedge \mathrm{dp} = 0$$

and therefore that the surface $\rho =$ constant coincides with the surface $\mathrm{p} =$ constant.

Solution 16.19. The surface is a surface of constant p (that is $p = 0$). By Problem 16.18, it is a surface of constant ρ, and also of constant $\mathbf{u^t}$, since

$$\mathbf{dp} \propto d\mathbf{u^t}$$

But, in the notation of Solution 16.17,

$$\left(\mathrm{u^t}\right)^{-1} = |\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}|^{\frac{1}{2}} = \left|\mathrm{g_{tt}} + 2\ \mathrm{g_{t\phi}}\Omega + \mathrm{g_{\phi\phi}}\Omega^2\right|^{\frac{1}{2}}$$

so on the surface

$$\mathrm{g_{tt}} + 2\ \mathrm{g_{t\phi}}\Omega + \mathrm{g_{\phi\phi}}\Omega^2 = \text{ constant}$$

Problem 16.20. If $\mathbf{p}$ is the 4 -momentum of a photon and $\mathbf{u}_{\mathrm{em}}, \mathbf{u}_\infty$ are the 4 -velocities respectively of an emitting point on the star and of the observer at ∞, then the ratio of emitted and observed frequencies is

$$\frac{\nu_{\mathrm{em}}}{\nu_\infty} = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}_{\mathrm{em}}}{\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}_\infty}$$

But u_{em} has only t and ϕ components, so

$$p\cdot u_{em} = p_t u^t + p_\phi u^\phi = p_t u^t(1 + \Omega\ell)$$

where $\Omega \equiv \mathrm{u}^\phi/\mathrm{u^t}$ is the angular velocity of the star and $\ell \equiv \mathrm{p}_\phi/\mathrm{p_t}$ is the impact parameter of the photon relative to the axis of rotation. Note that p_ϕ and $\mathrm{p_t}$ are conserved along the photon's trajectory. Also, $\mathrm{p}\cdot\mathrm{u}_\infty = \mathrm{p_t}$ since $u^t = 1$ for an observer at infinity and thus

$$z = u^t(1 + \Omega\ell) - 1 = \frac{1 + \Omega\ell}{|g_{tt} + 2\Omega_{t\phi} + \Omega^2 g_{\phi\phi}|^{\frac{1}{2}}_{em}} - 1$$

Since $\mathrm{g_{tt}} + 2\Omega\ \mathrm{g_{t\phi}} + \Omega^2\ \mathrm{g_{\phi\phi}}$ is constant on the surface of a rigidly rotating star (see Problem 16.19), the variation in z across the surface of the star is

$$\Delta z = \frac{\Omega\Delta\ell}{|g_{tt} + 2\Omega g_{t\phi} + \Omega^2 g_{\phi\phi}|^{\frac{1}{2}}_{\text{surface}}}$$

All photons reaching an observer on the axis must have $\mathrm{p}_\phi = 0$, i.e. $\ell = 0$, i.e. $\Delta\ell = 0$. Thus $\Delta z = 0$ for such an observer.

Solution 16.21. The configuration of perfect fluid is convectively stable if its mass (i.e. rest mass + energy) does not change under a redistribution of baryons. We first calculate its change in mass, δM, due to an addition of δA baryons from infinity.

A distant astrophysicist drops a total mass-energy $\mu_{\mathrm{B}}\delta\mathrm{A} + \mathrm{W}_0$ onto the fluid, where μ_{B} is the average rest mass of the baryons and W_0 is additional energy to be used for injecting the baryons into the fluid. A static observer at radius r catches the baryons and energy and measures a total mass-energy of

$$\mathrm{W} = \mathrm{u}^0\mathrm{p}_0 = \mathrm{e}^{-\Phi}\left(\mu_{\mathrm{B}}\delta\ \mathrm{A} + \mathrm{W}_0\right) \tag{1}$$

where $e^{-\Phi}$ is the redshift factor and comes from the metric

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + (1 - 2m/r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{2}$$

With energy W, the local observer must heat and compress the baryons to local thermodynamic conditions and then open a space for them in the star

$$\mathrm{W}_{\delta\mathrm{A}_{(\text{local conditions})}} = (\rho/\mathrm{n})\delta\mathrm{A} \tag{3a}$$

$$\mathrm{W}_{\text{open}} = \mathrm{p}\delta\ \mathrm{V} = (\mathrm{p}/\mathrm{n})\delta\mathrm{A} \tag{3b}$$

where n is baryon number density. (Note that, since we have assumed that the star is already at an extremum of total mass-energy, the change in energy of the star due to readjustment of its structure as mass is displaced for the δA baryons can be neglected.) The excess energy left over is

$$\begin{aligned} W_{ex}(r) &= W - (W_{\delta A} + W_{open}) \\ &= e^{-\Phi}\left(\mu_B \delta A + W_0\right) - \frac{(\rho + p)}{n}\delta A \end{aligned} \tag{4}$$

The local observer then converts a fraction $\left(1 - \mathrm{e}^{\Phi}\right)$ of $\mathrm{W_{excess}}$ into kinetic energy so that he can throw the rest to the observer at infinity, who then catches energy

$$\mathrm{W_{ex}}(\infty) = \mathrm{W_{ex}(r)e^{\Phi}} = \mu_{\mathrm{B}}\delta\ \mathrm{A} + \mathrm{W}_0 - \mathrm{e}^{\Phi}\frac{(\rho + \mathrm{p})}{\mathrm{n}}\delta\ \mathrm{A} \tag{5}$$

The observer at infinity, therefore, measures a mass increase of the star, δM, of

$$\delta M = \mathrm{e}^{\Phi}\frac{(\rho + \mathrm{p})}{\mathrm{n}}\delta\ \mathrm{A} = \mathrm{e}^{\Phi}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{n}}\right)_{\mathrm{S}}\delta\ \mathrm{A} \tag{6}$$

where the second relation follows from the first law of thermodynamics.
For convective stability we require δM to be independent of r, i.e.

$$\mathrm{e}^{\Phi}(\rho + \mathrm{p})/\mathrm{n} = \text{ constant} \tag{7}$$

We can easily show, using the Euler equation,

$$\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dr}} = -(\rho + \mathrm{p})\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{dr}} \tag{8}$$

that Equation (7) is equivalent to adiabatic gradients of thermodynamic variables. Taking the derivative of Equation (7) with respect to r gives

$$-\frac{(\rho + \mathrm{p})}{\mathrm{n}}\frac{\mathrm{dn}}{\mathrm{dr}} + \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dr}} + \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dr}} + (\rho + \mathrm{p})\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{dr}} = 0 \tag{9}$$

Using Equation (8), we can put Equation (9) in the form

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dr}} = \frac{(\rho + \mathrm{p})}{\mathrm{n}}\frac{\mathrm{dn}}{\mathrm{dr}} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{n}}\right)_{\mathrm{s}}\frac{\mathrm{dn}}{\mathrm{dr}} \tag{10}$$

From this equation, it is obvious that the fluid must be isentropic.
Solution 16.22. Begin with the Euler equation for a rigidly rotating star:

$$(\rho + \mathrm{p})^{-1}\partial \mathrm{p}/\partial \mathrm{x}^{\mu} = \partial \log \mathrm{u}^0/\partial \mathrm{x}^{\mu} \tag{1}$$

and compare it with the equation for constant injection energy

$$(\rho + p)/nu^0 = \text{ constant} \tag{2}$$

Take the derivative of the logarithm of Equation (2) and substitute in from Equation (1), to obtain

$$(\rho + \mathrm{p})^{-1}\partial \mathrm{p}/\partial \mathrm{x}^{\mu} = \mathrm{n}^{-1}\partial \mathrm{n}/\partial \mathrm{x}^{\mu} \tag{3}$$

Equation (3) is the first law of thermodynamics specialized to isentropic systems.
Solution 16.23. Since T^{μ}_{ν} vanishes outside the star, we can take the volume integral to be over all space at time t. The field equations imply

$$8\pi\left(\ \mathrm{T}^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}\mathrm{T}\right) = \mathrm{R}^{\mu}_{\nu}$$

so the mass integral is

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= -\int (2\ \mathrm{T}^{\mu}_{\nu} - \delta^{\mu}_{\nu}\mathrm{T})\,\xi^{\nu}\mathrm{d}^3\Sigma_{\mu} \\ &= -(4\pi)^{-1}\int \mathrm{R}^{\mu}_{\nu}\xi^{\nu}\mathrm{d}^3\Sigma_{\mu} \\ &= (4\pi)^{-1}\int \xi^{\mu;\nu}_{;\nu}\mathrm{d}^3\Sigma_{\mu} \\ &= (8\pi)^{-1}\oint \xi^{\mu;\nu}\mathrm{d}^2\Sigma_{\mu\nu} \end{aligned}$$

[The third equality follows from Problem 10.6; the last equality follows from Stokes' theorem, Problem 8.10 (c).] If we choose coordinates (t, r, θ, ϕ) which reduce to spherical polar coordinates at infinity, then and thus

$$\mathrm{d}^2\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2!}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\frac{\partial\left(\mathrm{x}^\alpha, \mathrm{x}^\beta\right)}{\partial(\theta,\phi)}\mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi = \mathrm{r}^2\sin\theta\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi$$

$$\xi^{\mu;\nu}\mathrm{d}^2\Sigma_{\mu\nu} = 2\xi^{\mathrm{t};\mathrm{r}}\mathbf{r}^2\sin\theta\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi$$

The asymptotic form of the metric is
$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 - \frac{4J\sin^2\theta}{r}dtd\phi + \left(1+\frac{2M}{r}\right)\left(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2\right)$.
Since the only nonzero component of $\xi_{(\mathrm{t})}$ is $\xi^{\mathrm{t}} = 1$

$$\begin{aligned}\xi^{\mathrm{t};\mathrm{r}} &\approx \xi^{\mathrm{t}}_{;\mathrm{r}}\\ &= \xi^{\mathrm{t}}_{,\mathrm{r}} + \Gamma^{\mathrm{t}}_{ar}\xi^a = 0 + \Gamma^{\mathrm{t}}_{\mathrm{tr}}\\ &\approx -\frac{1}{2}\ \mathrm{g}_{\mathrm{tt},\mathrm{r}} = \mathrm{M}/\mathrm{r}^2\end{aligned}$$

For the mass integral then

$$\mathrm{I} = (8\pi)^{-1}\int\frac{2\mathrm{M}}{\mathrm{r}^2}\mathrm{r}^2\sin\theta\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi = \mathrm{M}$$

as required. Similarly, we have

$$\begin{aligned}\mathrm{S} &= \int \mathrm{T}^\mu_\nu\xi^\nu_{(\phi)}\mathrm{d}^3\Sigma_\mu\\ &= (8\pi)^{-1}\int \mathrm{R}^\mu_\nu\xi^\nu_{(\phi)}\mathrm{d}^3\Sigma_\mu - (16\pi)^{-1}\int \mathrm{R}\xi^\mu_{(\phi)}\mathrm{d}^3\Sigma_\mu\end{aligned}$$

Since $d^3\Sigma_\phi = 0$ the second term vanishes and

$$\begin{aligned}\mathrm{S} &= -(8\pi)^{-1}\int\xi^{\mu;\nu}_{;\nu}\mathrm{d}^3\Sigma_\mu - 0 = -(16\pi)^{-1}\oint\xi^{\mu;\nu}\mathrm{d}^2\Sigma_{\mu\nu}\\ &= -(16\pi)^{-1}\oint 2\xi^{\mathrm{t};\mathrm{r}^2\sin\theta\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi}\end{aligned}$$

But

$$\begin{aligned}\xi^{\mathrm{t};\mathrm{r}} &\approx \xi^{\mathrm{t}}_{,\mathrm{r}} + \Gamma^{\mathrm{t}}_{\alpha r}\xi^\alpha = 0 + \Gamma^{\mathrm{t}}_{\phi r}\\ &= \mathrm{g}^{\mathrm{tt}}\Gamma_{\mathrm{t}\phi r} + \mathrm{g}^{\mathrm{t}\phi}\Gamma_{\phi\phi r}\\ &\approx -\frac{1}{2}\ \mathrm{g}_{\mathrm{t}\phi,\mathrm{r}} + \left(\frac{-2\ \mathrm{J}}{\mathrm{r}^3}\right)\frac{1}{2}\ \mathrm{g}_{\phi\phi,\mathrm{r}}\\ &= -3\ \mathrm{J}\sin^2\theta/\mathrm{r}^2\end{aligned}$$

and thus

$$\mathrm{S} = (16\pi)^{-1}\int 6\ \mathrm{J}\sin^3\theta\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi = \mathrm{J}$$

Solution 16.24. In curvature coordinates, $\xi^\nu_{(\mathrm{t})} = \delta^\nu_{\mathrm{t}}$ and $\mathrm{d}^3\Sigma_\mu = \delta^t_\mu|g|^{\frac{1}{2}}drd\theta d\phi$, thus the integral is

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= -\int\left(2\ \mathrm{T}^\mu_\nu - \delta^\mu_\nu\mathrm{T}\right)\xi^\nu_{(\mathrm{t})}\mathrm{d}^3\Sigma_\mu\\ &= -\int\left(2\ \mathrm{T}^{\mathrm{t}}_{\mathrm{t}} - \mathrm{T}\right)\mathrm{e}^{\Phi+\lambda}\mathrm{r}^2\sin\theta\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi\mathrm{d}\mathrm{r}\end{aligned}$$

But

$$\begin{aligned}\mathrm{T}^{\mathrm{t}}_{\mathrm{t}} &= (\rho+\mathrm{p})\mathrm{u}^{\mathrm{t}}\mathrm{u}_{\mathrm{t}} + \mathrm{p}\delta^{\mathrm{t}}_{\mathrm{t}} = -\rho\\ \mathrm{T} &= -(\rho+\mathrm{p}) + 4\mathrm{p} = 3\mathrm{p} - \rho\end{aligned}$$

Since everything is independent of θ and ϕ, the integration over angles gives 4π and therefore

$$I = \int_0^R(\rho+3p)e^{\Phi+\lambda}4\pi r^2dr \tag{1}$$

We can transform this by integration by parts. Since
we have

$$\mathrm{m(r)} = \int_0^{\mathrm{r}} 4\pi \mathrm{r}^2 \rho \mathrm{dr} \tag{2}$$

$$\int_0^{\mathrm{R}} \rho \mathrm{e}^{\Phi+\lambda} 4\pi \mathrm{r}^2 \mathrm{dr} = \left[\mathrm{m e}^{\Phi+\lambda}\right]_0^{\mathrm{R}} - \int_0^{\mathrm{R}} \mathrm{m}\left(\mathrm{e}^{\Phi+\lambda}\right)' \mathrm{dr} \tag{3}$$

where a prime denotes d/dr. The stellar structure equations tell us p' so we write

$$\int_0^{\mathrm{R}} 3\mathrm{p e}^{\Phi+\lambda} 4\pi \mathrm{r}^2 \mathrm{dr} = \left[\mathrm{p e}^{\Phi+\lambda} 4\pi \mathrm{r}^3\right]_0^{\mathrm{R}} - \int_0^{\mathrm{R}} 4\pi \mathrm{r}^3 \left(\mathrm{p e}^{\Phi+\lambda}\right)' \mathrm{dr} \tag{4}$$

The first term on the right in Equation (3) is $m(R) = M$, since $m = 0$ at $r = 0$ and $\Phi = -\lambda$ at $r = R$. The first term on the right in Equation (4) is zero since $p = 0$ at $r = R$. Thus, $I = M$ provided the sum of the remaining terms in Equations (3) and (4) vanish. This sum is

$$\begin{aligned} &\int_0^{\mathrm{R}} \mathrm{m}\left(\mathrm{e}^{\Phi+\lambda}\right)' \mathrm{dr} + \int_0^{\mathrm{R}} 4\pi \mathrm{r}^3 \left(\mathrm{p e}^{\Phi+\lambda}\right)' \mathrm{dr} \\ &\qquad = \int_0^{\mathrm{R}} \mathrm{dr e}^{\Phi+\lambda} \left[\mathrm{m}\left(\Phi' + \lambda'\right) + 4\pi \mathrm{r}^3 \left\{\mathrm{p}' + \mathrm{p}\left(\Phi' + \lambda'\right)\right\}\right] \end{aligned} \tag{5}$$

Now

$$\mathrm{e}^{2\lambda} = (1 - 2\ \mathrm{m/r})^{-1}$$

so we get

$$\lambda' = \frac{\left(4\pi \mathrm{r}^3 \rho - \mathrm{m}\right)}{\mathrm{r(r} - 2\ \mathrm{m)}}$$

If this result and the relations

$$\Phi' = \frac{\mathrm{m} + 4\pi \mathrm{r}^3 \rho}{\mathrm{r(r} - 2\ \mathrm{m)}}$$

$$\mathbf{p}' = \frac{-(\rho + \mathrm{p})\left(\mathrm{m} + 4\pi \mathrm{r}^3 \mathrm{p}\right)}{\mathrm{r(r} - 2\ \mathrm{m)}}$$

are substituted in the expression in Equation (5), all terms cancel and it reduces to zero as required.

Solution 16.25. Let θ, ϕ and the radial coordinate R be comoving with the fluid of the star. We can then write the metric as

$$\begin{aligned} ds^2 =& g_{tt} dt^2 + g_{tR} dR dt + g_{RR} dR^2 + g_{ti} dt dx^i \\ &+ g_{Ri} dR dx^i + g_{ij} dx^i dx^j \quad (i, j = \theta, \phi) \end{aligned}$$

where $\mathrm{i, j} = \theta, \phi$. If the metric is spherically symmetric, then for $\mathrm{dt} = \mathrm{dR} = 0$ we must have

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = r^2(R, t)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

Furthermore, $\mathrm{g_{ti}}$ and $\mathrm{g_{Ri}}$ define vectors in the 2-dimensional θ, ϕ space, so by the isotropy of spherical shells g_{ti} and g_{Ri} must vanish. Finally, we can choose a new time coordinate $T = T(t, r)$ to remove the g_{tr} term, without affecting the comoving status of the radial coordinate, and we have

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mathrm{TT}} dT^2 + g_{\mathrm{RR}} dR^2 + r^2(R, T) d\Omega^2$$

Thus in general we can have both comoving coordinates and a diagonal metric.

Now consider the motion of a fluid element. From the fluid 4-velocity

$$\mathbf{u} = \left(-\mathrm{g_{TT}}\right)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e_T}$$

we have the fluid acceleration:

$$\nabla_{\mathrm{u}} \mathrm{u} = \mathrm{e_R}\left[\frac{\mathrm{du^R}}{\mathrm{d}\tau} + \left(\mathrm{u^T}\right)^2 \Gamma^{\mathrm{R}}\mathrm{TT}\right] = -\frac{1}{2}\mathrm{e_R}\left(\mathrm{u^T}\right)^2\ \mathrm{g^{RR}}\ \mathrm{g_{TT,R}}$$

It follows then that the fluid acceleration is zero (and hence the pressure gradient vanishes) if and only $\mathrm{g_{TT}}$ is a function of T only. But if that is so, we can define a new time coordinate τ(T) from the equation

$$\mathrm{d}\pi/\mathrm{dT} = \left(-\mathrm{g_{TT}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

representing proper time for the fluid. Thus the three nice properties are all satisfied if and only if the pressure gradient is zero; since the pressure must be zero on the surface of the star, a vanishing pressure gradient is equivalent to zero pressure.

Solution 16.26.

(a) The first law of thermodynamics (see Problem 5.19) in the comoving frame is

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho+p}=\frac{\dot{n}}{n}$$

where n is baryon density. The number of baryons in a shell of thickness dR is $\left(4\pi nr^2e^{\Lambda}\right)dR$, so the law of conservation of baryons in this shell

$$\partial\left(\mathrm{nr^2e^{\Lambda}}\right)/\partial\mathrm{t}=0$$

and thus

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho+\mathrm{p}}=-\frac{2\dot{\mathrm{r}}}{\mathrm{r}}-\dot{\Lambda}.$$

We can now combine this with

$$\mathrm{G}^{\hat{\mathrm{t}}}_{\hat{\mathrm{R}}}=0=\frac{2}{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{-\Phi-\lambda}\left(\dot{\mathrm{r}}'-\dot{\mathrm{r}}\Phi'-\mathrm{r}'\dot{\Lambda}\right)$$

(see Problem 9.20) and with

$$\mathrm{T}^{\beta}_{\mathrm{R};\beta}=0=\mathrm{p}'+(\mathrm{p}+\rho)\Phi'$$

to arrive at

$$-\dot{\rho}=(\rho+\mathrm{p})\left(\frac{2\dot{\mathbf{r}}}{\mathbf{r}}+\frac{\dot{\mathbf{r}}'}{\mathbf{r}'}\right)+\frac{\dot{\mathbf{r}}\mathbf{p}'}{\mathbf{r}'}.$$

This relation can now be substituted in the expression for $\dot{m}$,

$$\begin{aligned}\dot{\mathrm{m}}&=4\pi\int_0^{\mathrm{R}}\left(2\mathrm{rir}'\rho+\mathrm{r}^2\dot{\mathrm{r}}'\rho+\mathrm{r}^2\mathrm{r}'\rho\right)\mathrm{dR}\\&=-4\pi\int_0^{\mathrm{R}}\left(2\mathrm{rr}'\mathrm{rp}+\mathrm{r}^2\dot{\mathrm{r}}'\mathrm{p}+\mathrm{r}^2\dot{\mathrm{r}}'\right)\mathrm{dR}\\&=-4\pi\int_0^{\mathrm{R}}\left(\mathrm{r}^2\mathrm{rp}\right)'\mathrm{dR}\end{aligned}$$

Since $\mathrm{r}^2\mathrm{rp}=0$ at $\mathrm{R}=0$ it follows that

$$\dot{\mathrm{m}}=-4\pi\mathrm{r}^2\mathrm{pr}.$$

(b) From $G^{\hat{t}}_{\hat{t}}=-8\pi\rho$ (see Problem 9.20) we have

$$8\pi\rho\mathrm{r}^2=1-\mathrm{r}'^2\mathrm{e}^{-2\Lambda}+\dot{\mathrm{r}}^2\mathrm{e}^{-2\Phi}+2\dot{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{-2\Phi}\dot{\Lambda}+2\mathrm{re}^{-2\Lambda}\left(\mathrm{r}'\Lambda'-\mathrm{r}''\right).$$

Now use $\mathrm{G}^{\hat{t}}_{\hat{\mathrm{R}}}=0$ to eliminate $\dot{\Lambda}$, and note that $8\pi\mathrm{r}^2\rho\mathrm{r}'$ is an exact differential with respect to R

$$\begin{aligned}8\pi\rho\mathbf{r}^2\mathbf{r}'=&\mathbf{r}'-\left(\mathbf{r}'\right)^3\mathrm{e}^{-2\Lambda}+\dot{\mathrm{r}}^2\mathbf{r}'\mathrm{e}^{-2\Phi}+2\dot{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{-2\Phi}\left(\dot{\mathrm{r}}'-\dot{\mathrm{r}}\Phi'\right)\\&+2\mathrm{rr}'\mathrm{e}^{-2\Lambda}\left(\mathrm{r}'\Lambda'-\mathbf{r}''\right)\\=&\left[\mathrm{r}-\mathrm{e}^{-2\Lambda_{\mathrm{r}}\left(\mathrm{r}'\right)^2+\mathrm{r}(\dot{\mathrm{r}})^2}\mathrm{e}^{-2\Phi}\right]'\end{aligned}$$

Integration gives the desired relation

$$\begin{aligned}2\ \mathrm{m}&=\mathrm{r}\left(1-\mathrm{e}^{-2\Lambda}\left(\mathrm{r}'\right)^2+\dot{\mathrm{r}}^2\mathrm{e}^{-2\Phi}\right)\\&=\mathrm{r}\left(1-\Gamma^2+\mathrm{U}^2\right)\end{aligned}$$

Solution 16.27. From Problem 16.26 we have

$$\mathrm{dr}/\mathrm{d}\tau=\mathrm{U} \tag{1}$$

$$\mathrm{dm}/\mathrm{d}\tau=-4\pi\mathrm{r}^2\mathrm{pU} \tag{2}$$

$$\mathrm{U}=\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\tau}=\pm\left[\Gamma^2+\left(\frac{2\ \mathrm{m}}{\mathrm{r}}-1\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

The first two equations show that $\mathrm{dr}/\mathrm{d}\tau$ and $\mathrm{dm}/\mathrm{d}\tau$ have opposite signs, so for the shell to pass from $2\ \mathrm{m}/\mathrm{r} < 1$ to $2\ \mathrm{m}/\mathrm{r} > 1$ it must be that

$$\dot{\mathrm{r}} \leq 0, \quad \dot{\mathrm{m}} \geq 0$$

upon passage through $\mathrm{r} = 2\ \mathrm{m}$. From Equation (3) then

$$\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}r} = -\left[\Gamma^2 + \left(\frac{2\ \mathrm{m}}{\mathrm{r}} - 1\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

The radius therefore will continue to fall as long as $\Gamma^2 + \left(\frac{2m}{r} - 1\right) > 0$, but as long as the radius is decreasing, the mass must be increasing and the factor $\frac{2m}{r} - 1$ continues to increase, so the collapse cannot stop.

Suppose the shell has reached the point $2\ \mathrm{m}/\mathrm{r} - 1 = \varepsilon > 0$. Since this factor continues to increase, then

$$\mathrm{dr}/\mathrm{d}\tau \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

and the shell will reach $\mathrm{r} = 0$ in a proper time $\leq 2\ \mathrm{m}/\varepsilon^{\frac{1}{2}}$. [This solution is due to J. M. Bardeen.]

Solution 16.28. In Problem 16.25 we saw that we can choose $\Phi = 0$ for pressure-free collapse. From $\mathrm{G}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{R}} = 0$ (see Problem 9.20) with $\Phi = 0$ we have then

$$\begin{aligned} 0 &= 2\pi\ddot{\mathrm{r}} + 1 - \mathrm{r}^2\mathrm{e}^{-2\Lambda} + \dot{\mathrm{r}}^2 \\ &= 2\mathrm{r}\ddot{\mathrm{r}} + 1 - \Gamma^2 + \mathrm{U}^2 \end{aligned}$$

and therefore (see Problem 16.26)

$$\ddot{\mathrm{r}} = \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{r}}{\mathrm{d}r^2} = -\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{r}^2}$$

Solution 16.29. From the dynamical equation for mass (see Problem 16.26)

$$\dot{\mathrm{m}} = -4\pi\mathrm{pr}^2\dot{\mathrm{r}} = 0$$

mass is clearly time independent, as is physically obvious. By differentiating the Γ^2 equation in Problem 16.26 we get

$$2\Gamma\dot{\Gamma} = 2U\dot{U} + \frac{2m}{r^2}\dot{r} = 2\dot{r}\left(\ddot{r} + \frac{m}{r^2}\right)$$

and using the result of Problem 16.28 we see that Γ, too, is time independent.

The dynamical equation for $r(R, \tau)$ is now a simple first order equation and can be solved parametrically:

Case (i) $\Gamma^2 - 1 < 0$:

$$\mathrm{r} = \frac{\mathrm{m}(\ \mathrm{b})}{1 - \Gamma^2}(1 + \cos\eta) \tag{1a}$$

$$\tau = \frac{\mathrm{m}(\ \mathrm{b})}{(1 - \Gamma^2)^{\frac{3}{2}}}(\eta + \sin\eta) + \mathrm{F}(\ \mathrm{b}) \tag{1b}$$

onere F(b) is an arbitrary function.

Case (ii) $\Gamma^2 - 1 = 0$:

$$r = \left\{\frac{3}{2}(m(b))^{\frac{1}{2}}[g(b) - r]\right\}^{\frac{2}{3}} \tag{2}$$

where $g(b)$ is an arbitrary function.

Case (iii) $\Gamma^2 - 1 > 0$:

$$r = \frac{m(b)}{\Gamma^2 - 1}(\cosh\eta - 1) \tag{3a}$$

$$\tau = \frac{m(b)}{(\Gamma^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}(\sinh\eta - \eta) + H(b) \tag{3b}$$

where H(b) is an arbitrary function.

Note that there are three free functions - i.e. functions that we can choose by choosing the physical situation. By choosing $m(b)$ we can choose the distribution of mass at some initial time and forever after. The integration "constants" $\mathrm{F(b)}, \mathrm{g(b)}, \mathrm{H(b)}$ correspond to the choice of the r value of each fluid element on an initial hypersurface, i.e. the choice of $r(b, t = 0)$.

The choice of $\Gamma^2(b)$ corresponds to the choice of the velocity of a fluid element on an initial hypersurface. By comparison with the equation for a radial geodesic, $\Gamma^2 - 1$ can be thought of as the conserved "energy at ∞

" for the fluid shell. Therefore, it should not be surprising that there are three solution regimes: we can choose to give a fluid shell less than the escape velocity (a), precisely the escape velocity (b), or greater than the escape velocity (c). Note that the sign of t can be reversed in the above solutions so that, for example, solution (c) can correspond to shells falling inward. Note that in general if the three free functions are not chosen carefully, mass shells are going to cross!

Solution 16.30.

(i) The stress tensor is $\mathrm{T}_{\alpha\beta} = \rho \mathrm{u}_\alpha \mathrm{u}_\beta$. The assumptions of spherical symmetry and uniform density are equivalent to assuming isotropy and homogeneity, so the metric must be a Friedmann solution:

$$\mathrm{d}\mathbf{s}^2 = -\mathrm{d}r^2 + \mathrm{a}^2(r)\left[\mathrm{d}\chi^2 + \Sigma^2(\chi)\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\ \mathrm{d}\phi^2\right)\right] \tag{1}$$

where

$$\Sigma = \begin{cases} \sin\chi, & \mathrm{k} = 1 \\ \chi, & \mathrm{k} = 0 \\ \sinh\chi, & \mathrm{k} = -1. \end{cases}$$

The surface of the star is at some constant value of the "radial" coordinate, $\chi = \chi_0$ say. From Equation (1), the proper circumferential radius of the star is $R = a(r)\Sigma(\chi_0)$. The Einstein field equations (see Problems 19.16, 19.18) for zero pressure are

$$\left(\frac{a,r}{a}\right)^2 = -\frac{k}{a^2} + \frac{8\pi\rho}{3} \tag{2}$$

$$\rho a^3 = \text{ constant} \tag{3}$$

Equation (2) can be rewritten as

$$\rho = \frac{3}{8\pi}\left[\left(\frac{\mathrm{R},\tau}{\mathrm{R}}\right)^2 + \frac{\mathrm{k}\Sigma^2(\chi_0)}{\mathrm{R}^2}\right]. \tag{4}$$

Thus, if $\mathrm{R}_{,\tau} = 0$ at any finite value of R, k must be $+1$ so that ρ is positive. Conversely, if $\mathrm{k} = -1, \mathrm{R}_{,\tau}$ is never zero. The case $\mathrm{k} = 0$ corresponds to $\mathrm{R}_{,\tau} \to 0$ as $\mathrm{R} \to \infty$.

(ii) The Euler equation for zero pressure implies $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = 0$, i.e. each fluid element moves along a geodesic. By spherical symmetry the geodesics are radial.

(iii) We shall do the matching for $\mathrm{k} = +1$; the cases $\mathrm{k} = 0$ or $\mathrm{k} = -1$ are similar. For $k = +1$, Equations (2) and (3) give

$$(\mathrm{a}_{,\tau})^2 = \mathrm{a}_\mathrm{m}/\mathrm{a} - 1 \tag{5}$$

where the constant in Equation (3) has been fixed by setting $\mathrm{a} = \mathrm{a}_\mathrm{m} =$ maximum of a , when $\mathrm{a}_{,\tau} = 0$. Equation (5) can be integrated as it stands; it is convenient, however, to introduce a new time parameter by

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{a}\mathrm{d}\eta \tag{6}$$

Equations (5) and (6) then give

$$\mathrm{a} = \frac{1}{2}\mathrm{a}_\mathrm{m}(1 + \cos\eta) \tag{7}$$

$$\tau = \frac{1}{2}\mathrm{a}_\mathrm{m}(\eta + \sin\eta) \tag{8}$$

The constants of integration have been chosen to make $\mathrm{a} = \mathrm{a}_\mathrm{m}$ and $r = 0$ at $\eta = 0$, and to make $\mathrm{a} = 0$ and $r = \pi\mathrm{a}_\mathrm{m}/2$ at $\eta = \pi$.

The intrinsic 3-geometry of the surface of the star, as measured from the interior, is found by putting $\chi = \chi_0$ in Equation (1):

$$(3)\quad \begin{aligned} ds^2 &= -d\tau^2 + a^2(\tau)\sin^2\chi_0 d\Omega^2 \\ &= a^2(\eta)\left(-d\eta^2 + \sin^2\chi_0 d\Omega^2\right). \end{aligned} \tag{9}$$

The exterior metric is

$$ds^2 = -(1 - 2M/r)dt^2 + (1 - 2M/r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{10}$$

The surface of the star is at $r = R(r)$, and from the equations for radial geodesics (see Problem 15.4), $\mathrm{R}(\tau)$ is given by

$$\mathrm{R} = \frac{1}{2}\mathrm{R}_\mathrm{i}(1 + \cos\eta) \tag{11}$$

$$r = \left(\frac{\mathrm{R_i^3}}{8\mathrm{M}}\right)^{\frac{1}{2}} (\eta + \sin\eta) \tag{12}$$

$$\mathrm{u^t} = \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{(1 - 2\mathrm{M/R_i})^{\frac{1}{2}}}{1 - 2\mathrm{M/R}} \tag{13}$$

Thus the geometry of the surface is

$$\begin{aligned} {}^{(3)}\mathrm{ds_+^2} &= -\mathrm{d}r^2 + \mathrm{R}^2(r)\mathrm{d}\Omega^2 \\ &= -\left(\frac{\mathrm{R_i^3}}{8\mathrm{M}}\right)(1+\cos\eta)^2\ \mathrm{d}\eta^2 + \frac{\mathrm{R_i^2}}{4}(1+\cos\eta)^2\ \mathrm{d}\Omega^2 \end{aligned} \tag{14}$$

Comparison with Equation (9) shows that the 3-geometries match provided we identify

$$R_i = a_m \sin\chi_0, \quad 2M = a_m \sin^3\chi_0 \tag{15}$$

Now compute the extrinsic curvature $\mathrm{K_{ij}^{(-)}}$in the interior. The normal to the surface is

$$\mathbf{n} = \mathbf{a}^{-1}\partial/\partial\chi \tag{16}$$

(recall that $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1$), while the vectors $\mathbf{u} = \partial/\partial\tau, \partial/\partial\theta$ and $.\partial/\partial\phi$ lie in the surface. Let the indices $\mathrm{i,j}$ range over τ, θ, ϕ. Then

$$\begin{aligned} K_{ij} &\equiv -e_i \cdot \nabla_j n = -e_i \cdot \Gamma^\alpha_{nj} e_\alpha = -g_{i\alpha}\Gamma^\alpha_{nj} \\ &= -\Gamma_{inj} = -\frac{1}{2}\left(g_{in,j} + g_{ij,n} - g_{nj,i}\right) = -\frac{1}{2}g_{ij,n} \end{aligned} \tag{17}$$

since $g_{in} = a^{-1}g_{i\chi} = 0$. From the metric we see that

$$\mathrm{K^{(-)}_{\pi\tau}} = \mathrm{K^{(-)}_{\tau\theta}} = \mathrm{K^{(-)}_{\tau\phi}} = \mathrm{K^{(-)}_{\theta\phi}} = 0 \tag{18}$$

$$\mathrm{K^{(-)}_{\theta\theta}} = \mathrm{K^{(-)}_{\phi\phi}} \sin^{-2}\theta = -\frac{1}{2}\mathrm{a_m}(1+\cos\eta)\sin\chi_0\cos\chi_0. \tag{19}$$

In the exterior metric, the 4 -velocity is

$$u = u^t e_t + u^r e_r.$$

The normal vector

$$n = n^t e_t + n^r e_r$$

satisfies

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1 = g_{tt}\left(n^t\right)^2 + g_{rr}\left(n^r\right)^2 \tag{20}$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{u} = 0 = n^t u_t + n^r u_r. \tag{21}$$

Since

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = -1 = \mathrm{g^{tt}}\left(\mathrm{u_t}\right)^2 + \mathrm{g^{rr}}\left(\mathrm{u_r}\right)^2 \tag{22}$$

and

$$\mathrm{g^{rr}} = \left(\mathrm{g_{rr}}\right)^{-1} = -\left(\mathrm{g^{tt}}\right)^{-1} = -\mathrm{g_{tt}} = 1 - 2\mathrm{M/r}$$

the equations above imply that

$$n^t = u_r, \quad n^r = -u_t. \tag{23}$$

Let $\mathrm{i,j}$ range over τ, θ, ϕ as before. Then Equation (17) holds for the exterior metric, since $\mathrm{g_{in}} = \mathbf{n}\cdot\mathrm{e_i} = 0$. Equation (18) holds for the exterior metric because $\mathbf{e}_\tau\cdot\mathbf{e}_\tau = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = -1, \mathbf{e}_\tau\cdot\mathbf{e}_\theta = \mathrm{e}_\tau\cdot\mathrm{e}_\phi = \mathrm{e}_\theta\cdot\mathrm{e}_\phi = 0$. Also,

$$\begin{aligned} K^{(+)}_{\theta\theta} = K^{(+)}_{\phi\phi}\sin^{-2}\theta &= -\frac{1}{2}\left(r^2\right)_{,n} = -\frac{1}{2}\left(r^2\right)_{,r} r^r \\ &= r u_t = -R\left(1 - 2M/R_i\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}R_i(1+\cos\eta)\left(1 - 2M/R_i\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}a_m \sin\chi_0\cos\chi_0(1+\cos\eta) \end{aligned}$$

where we have used Equations (23), (13), (11) and (15). Thus $\mathrm{K_{ij}^{(+)}} = \mathrm{K_{ij}^{(-)}}$and the proof is complete.

13.7.17 17 Black Holes

The Kerr-Newman black hole is an exact solution of the Einstein field equations possessing mass, angular momentum, and (in principle but not in astrophysical cases) charge.

The metric describing this solution is (in "Boyer-Lindquist coordinates"):

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{\left(2Mr - Q^2\right) 2a \sin^2\theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{\left(2Mr - Q^2\right) a^2 \sin^2\theta}{\Sigma}\right) \sin^2\theta d\phi^2$$

where

$$a^2 + Q^2 \leq M^2$$

M $\equiv$ mass, Q $\equiv$ charge
a = angular momentum per unit mass
$\Delta \equiv \mathrm{r}^2 - 2\mathrm{Mr} + \mathrm{a}^2 + \mathrm{Q}^2$
$\Sigma \equiv \mathbf{r}^2 + \mathbf{a}^2 \cos^2\theta$.
The metric coefficients are independent of t and ϕ, so $\xi_{(\mathrm{t})} = \partial/\partial \mathrm{t}$ and $\boldsymbol{\xi}_{(\phi)} = \partial/\partial\phi$ are Killing vectors. Among the properties of this solution which follow from the metric are the orbital equations for test particles:

$$\Sigma \dot{\mathrm{r}} = \pm \left(\mathrm{V_r}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\Sigma \dot{\theta} = \pm \left(\mathrm{V}_\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\Sigma \dot{\phi} = -\left(a\mathrm{E} - \mathrm{L}_z / \sin^2\theta\right) + \frac{a}{\Delta}\mathrm{P}$$
$$\Sigma \dot{\mathrm{t}} = -\mathrm{a}\left(\mathrm{aE}\sin^2\theta - \mathrm{L}_z\right) + \frac{\mathrm{r}^2 + \mathrm{a}^2}{\Delta}\mathrm{P}$$

Here "dot" indicates derivative with respect to proper time or affine parameter, and
$P \equiv E\left(r^2 + a^2\right) - L_z a - eQr$
$\mathrm{V_r} \equiv \mathrm{P}^2 - \Delta\left[\mu^2 \mathrm{r}^2 + \left(\mathrm{L}_z - \mathrm{aE}\right)^2 + 2\right]$
$\mathrm{V}_\theta \equiv 2 - \cos^2\theta\left[\mathrm{a}^2\left(\mu^2 - \mathrm{E}^2\right) + \mathrm{L}_z^2 / \sin^2\theta\right]$,
E $\equiv$ conserved total energy
$\mathrm{L}_z \equiv$ conserved z component of angular momentum
2 $\equiv$ conserved quantity related to total angular momentum
$\mu \equiv$ rest mass of particle
e $\equiv$ charge of particle.
A Schwarzschild black hole is the special case for which a = Q = 0. A Reissner-Nordström black hole is the special case $a = 0, Q \neq 0$; it is spherically symmetric. A Kerr black hole is the case $a \neq 0, Q = 0$. The defining property of a black hole is that it have a horizon, a surface through which matter can fall, but from which no matter or information can escape to infinity. For a Kerr hole, it is located at r_+, the larger root of the equation $\Delta = 0$. The stationary limit of a rotating hole is the surface within which all observers are dragged around the hole. For Kerr, the stationary limit is at r_0, the larger root of $\mathrm{g_{tt}} = 0$. The region between the horizon and stationary limit is called the ergosphere.

Problem 17.1. Show that the constant M which occurs in the Kerr metric is the mass of the system, and that the constant a is the angular momentum per mass.

Problem 17.2. A suggested use of small ($\ll \mathrm{M}_\oplus$) black holes is to crush junked automobiles into neat spherical balls by allowing them to partially collapse around a black hole. Estimate what mass hole, in orbit around
the Earth, would be appropriate for this application. How many wrecks per hour could be processed?

Problem 17.3. Show that once a rocket ship crosses the gravitational radius (horizon) of a Schwarzschild black hole, it will reach r = 0 in a proper time $\tau \leq \pi\mathrm{M}$, no matter how the engines are fired.

Problem 17.4. Show that Kepler's law

$$\Omega^2 = M/r^3$$

holds exactly for circular orbits around a Schwarzschild black hole, if r is the curvature coordinate radius, and Ω is the angular frequency as measured from infinity. Derive an analogous law for equatorial orbits around a Kerr black hole of specific angular momentum a.

Problem 17.5. An observer in a circular orbit of circumference 2πr around a charged, spherical, black hole (a Reissner-Nördstrom black hole) of mass M and charge Q measures local electric and magnetic fields. What are their strengths and orientations?

Problem 17.6. By considering the mass, charge, and angular momentum of a "classical" electron, show that it cannot be a Kerr-Newman black hole.

Problem 17.7. For circular orbits in the equatorial plane of a Kerr black hole, prove that the marginally stable orbit has minimum energy E and minimum angular momentum L.

Problem 17.8. An observer (not necessarily freely-falling) orbits a Kerr black hole in the equatorial ($\theta = \pi/2$) plane.
(a) Let his orbit be at constant r. Define $\Omega = \mathrm{d}\phi/\mathrm{dt}$ to be his "angular velocity relative to a distant stationary observer." In terms of Ω, r, M, and a, find u^0, u^ϕ, u_0, u_ϕ.
(b) Suppose that the circular orbit lies in the ergosphere (the orbital radius is outside the horizon at r_+but inside the stationary limit at r_0).

Show that the observer cannot remain at rest with respect to a distant observer. That is, show that Ω for the observer must be nonzero.
(c) If the observer is in the region $r_- < r < r_+$, show that he cannot remain at constant radius.

Problem 17.9. Show that there are negative energy particle trajectories inside the ergosphere of a Kerr black hole (and outside the horizon!). Show that it is possible for a rocket ship to increase its total energy by firing a bullet into the hole during an orbital passage through the ergosphere.

Problem 17.10. Show that as a test particle approaches $\mathbf{r} = \mathbf{r}_+$, the horizon of a Kerr black hole, it has "angular velocity as seen from infinity" equal to

$$\Omega \equiv \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{a}}{2\mathrm{Mr}_+}$$

Problem 17.11. Prove that there exist "quasi-circular, polar" orbits in the Kerr geometry, i.e. orbits which pass alternately over the north and south poles at a fixed radial coordinate distance. What is the smallest possible polar radius of these orbits?

Problem 17.12. A Killing horizon is a null hypersurface generated by a Killing vector. An ergosurface ("stationary limit") is an infinite red-shift surface for static observers. Show that for a static black hole the ergosurface is a Killing horizon.

Problem 17.13. Show that the surface area of the horizon of a KerrNewman black hole (area of surface $r = r_+, t =$ constant, in BoyerLindquist coordinates) is $4\pi\left[\left\{M + \left(M^2 - Q^2 - a^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^2 + a^2\right]$.

Problem 17.14. According to Hawking's theorem (that in a collision of two black holes the total surface area must not decrease), what is the minimum mass M_2 of a Schwarzschild black hole that results from the collision of two Kerr black holes of equal mass M_1 and opposite angular
momentum parameter$a$ Suppose $|a| \approx M_1$ what fraction of the original mass can be radiated awayAre there any other uncharged blackhole collisions that can get this much energy out

Problem 1715Use the theorem that the area of a black hole is non decreasingcfProblem 1714to prove that a Kerr black hole amplifies rather than absorbscertain modes of an incident radiation field

Problem 1716
aWrite down the scalar wave equation $\Box\Phi = 0$ in the Kerr geometry in BoyerLindquist coordinates
bShow that the equation can be reduced to ordinary differential equations by separation of variables
cFind the asymptotic form of Φ for $\mathrm{r} \to \infty$
dFind the asymptotic form of Φ for $\mathbf{r} \to \mathbf{r}_+$
eWhat boundary condition on Φ corresponds to ingoing waves as seen by a physical observer on the horizon
fShow thatfor a wave of the form $\Phi = \exp(-i\omega t + im\phi)f(r,\theta)$ energy flows out of the hole if $0 < \omega/m < a/\left(2\mathrm{Mr}_+\right)$Compare to Problem 1715

Problem 1717Charged particles are dropped radially into a Reissner Nordström black hole with $Q^2 < M^2$ Show that it is never possible to drop in enough charge to make $Q^2 > M^2$a solution which would be a naked singularitynot a black hole

Problem 1718TheZero Angular Momentum ObserversZAMOsin the Kerr geometry have basis 1 forms

$$\begin{aligned}
\hat{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}} &= \left|\mathrm{g_{tt}} - \omega^2\ \mathrm{g}_{\phi\phi}\right|^{\frac{1}{2}}\widetilde{\mathrm{dt}} \\
\tilde{\omega}^{\hat{\phi}} &= \left(\mathrm{g}_{\phi\phi}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{\mathrm{d}\phi} - \omega\widetilde{\mathrm{dt}}\right) \\
\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{r}}} &= \left(\Sigma/\Delta\right)^{\frac{1}{2}}\widetilde{\mathrm{dr}} \\
\tilde{\omega}^{\hat{\theta}} &= \Sigma^{\frac{1}{2}}\ \widetilde{\mathrm{d}\theta}
\end{aligned}$$

where $\omega = -\mathrm{g}_{\mathrm{t}\phi}/\mathrm{g}_{\phi\phi}$
aShow that these basis 1 forms are orthonormal
bFind the dual basis vectors
cThe 4velocity of the ZAMO is $\mathbf{u} = \mathbf{e}_{\hat{\mathbf{t}}}$ show that $\mathbf{u}$ has zero rotation
dThe ZAMO is not an inertial observershow that the acceleration is $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\nabla\log\left|\ \mathrm{g_{tt}} - \omega^2\ \mathrm{g}_{\phi\phi}\right|$.

Problem 1719Calculate the Gaussian curvature of the horizon of a Kerr black hole and show that it becomes negative for $a > 3^{\frac{1}{2}}M/2$ This shows that the horizon cannot be globally embedded in a Euclidean 3space if as $> 3^{\frac{1}{2}}\mathrm{M}/2$ Use the GaussBonnet theorem to check that the horizon is topologically a 2 sphere

Problem 1720Show that a primordialrotatingblack hole $\sim 10^{10}$ years oldof mass $\leq 10^{15}$gm will have already lost most of its angular momen tum to spontaneous quantum emission of photons or gravitonsWhat frac tion of the angular momentum of a $1\mathrm{M}_\odot$ $\left(\sim 10^{33}\mathrm{gm.}\right)$ rotating hole would be lost in the same time

Problem 1721Consider the vacuum metric

$$ds^2 = -\frac{\left(1 - \frac{1}{2}m/\rho\right)^2}{\left(1 + \frac{1}{2}m/\rho\right)^2}dt^2 + \frac{\left(1 - \frac{1}{2}m/\rho\right)^2}{\left(1 - \frac{3}{2}m/\rho\right)^2}\left(d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2\sin^2\theta d\phi^2\right)$$

which is a particular solution to the staticspherically symmetric problem in the LightmanLee theory of gravityDoes the above metric describe a Black holeandif sohow do the holes properties differ from those of the corresponding hole in general relativity

17: Solutions

Solution 17.1. One finds the mass and angular momentum of an asymptotically Minkowskian (flat) metric by finding a coordinate system in which it takes the form

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2\tilde{M}}{r} + \mathcal{O}\left(r^{-2}\right)\right) \tag{1}$$

$$g_{0j} = -\left(4\varepsilon_{jk1}\tilde{S}^k \frac{x^1}{r^3} + \mathcal{O}\left(r^{-3}\right)\right) \tag{2}$$

The constants $\tilde{M}$ and $\tilde{S}^k$ which occur in the expansion are then the mass and intrinsic angular momentum (see Weinberg, Section 9.4 or MTW, Section 19.3).

Expanding the Kerr metric in Boyer-Lindquist coordinates in powers of r^{-1} gives the leading terms

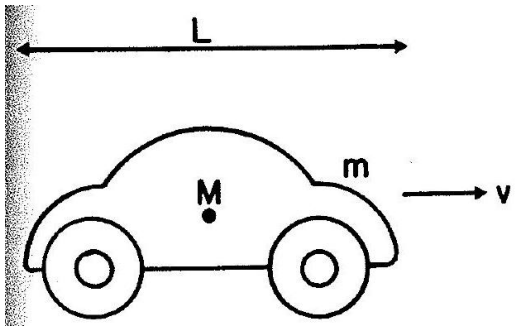
$$\begin{aligned}\mathrm{ds}^2 = &-\left(1 - \frac{2\mathrm{M}}{\mathrm{r}} + \cdots\right)\mathrm{dt}^2 - \left(\frac{4\mathrm{aM}}{\mathrm{r}}\sin^2\theta + \cdots\right)\mathrm{dt}\ \mathrm{d}\phi \\ &+ (1 + \cdots)\left[\mathrm{dr}^2 + \mathrm{r}^2\left(\ \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\ \mathrm{d}\phi^2\right)\right]\end{aligned}$$

Transforming to cartesian coordinates by $x \equiv r\sin\theta\cos\phi, y \equiv r\sin\theta\sin\phi,\ z \equiv \mathbf{r}\cos\theta$ gives

$$\begin{aligned}ds^2 = &-\left(1 - \frac{2M}{r} + \cdots\right)dt^2 - \left(\frac{4aM}{r^3} + \cdots\right)(xdy - ydx)dt \\ &+ (1 + \cdots)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)\end{aligned} \tag{3}$$

and comparison with Equations (1) and (2) gives at once

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{M}} &= \mathrm{M} \\ \tilde{\mathrm{S}} &= \mathrm{aMe}_{\hat{z}}\end{aligned}$$



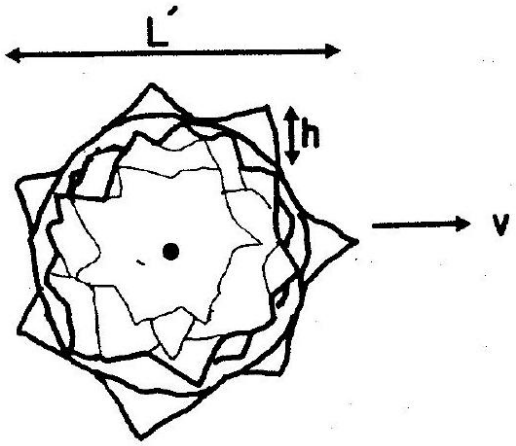
before

Solution 17.2. Suppose the car has mass m and length L before crushing and length L ' and "lumpiness" h afterward, and the hole has mass II. Suppose the internal stress per mass that steel can support is $\varepsilon(\sim 0.1$ electron volt per nuclear mass; see Problem 5.6). Comparing gravitational pressure forces to internal stresses, we see that the conditions for crushing are

$$\begin{aligned}&\left(\tfrac{\mathrm{GM}}{\mathrm{L}^2}\right)\mathrm{L} > \epsilon \quad \text{(condition for crushing to begin)} \\ &\left(\tfrac{\mathrm{GM}}{\mathrm{L}'^2}\right)^{\mathrm{h}} > \epsilon \quad \text{(condition for lumps no larger than h after crushing ends)}\end{aligned} \tag{2}$$

Since cars typically crush to .1 of their original dimension, we see that the two inequalities are equivalent for $h/L' = .1$, which is a reasonable value. Taking $L' \sim 100$ cm and $\epsilon \sim 10^9$ergs/gm gives $M \geq 10^{18}$gm.

The time to crush a wreck is set by the free-fall time $\left(\ \mathrm{L}^3/\mathrm{GM}\right)^{\frac{1}{2}} \sim 10^{-5}$sec, so on the order of 10^8 can be processed per hour.



after

Solution 17.3. For the rocket ship to be moving along a timelike worldline, its 4 -velocity must satisfy (from the Schwarzschild metric)

$1 = -\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \left(1-\frac{2\mathrm{M}}{\mathrm{r}}\right)\left(\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \left(1-\frac{2\mathrm{M}}{\mathrm{r}}\right)^{-1}\left(\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \mathrm{r}^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \mathrm{r}^2\sin^2\theta\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2.$

Inside the horizon all of these terms are negative, except the one in $(\mathrm{dr}/\mathrm{d}\tau)^2$, so

$$\left(\frac{2\mathrm{M}}{\mathrm{r}}-1\right)^{-1}\left(\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}r}\right)^2 > 1$$

We also know (e.g. from the Eddington-Finkelstein or Kruskal picture) that the sign of $\mathrm{dr}/\mathrm{d}\tau$ must be negative for a "future directed" (i.e. physical) observer and thus,

$$\mathrm{dr} < -\left(\frac{2\mathrm{M}}{\mathrm{r}}-1\right)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}\tau$$

and

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= -\int_{2M}^{0}\left(\frac{2M}{r}-1\right)^{-\frac{1}{2}}dr \\ &= \left[r^{\frac{1}{2}}(2M-r)^{\frac{1}{2}} + M\cos^{-1}\left(\frac{r}{M}-1\right)\right]_{2M}^{0} = \pi M\end{aligned}$$

Solution 17.4. We derive the case for a Kerr black hole and then obtain the Schwarzschild case by setting $a = 0$. The Kerr metric is (in the usual Boyer-Lindquist coordinates)

$$\begin{aligned}\mathrm{ds}s^2 = &-\left(1-\frac{2\mathrm{Mr}}{\Sigma}\right)\mathrm{dt}^2 - \left(4\,\mathrm{Mar}\,\frac{\sin^2\theta}{\Sigma}\right)\mathrm{dt}\mathrm{d}\phi + \frac{\Sigma}{\Delta}\mathrm{dr}^2 \\ &+ \Sigma\mathrm{d}\theta^2 + \left(\mathrm{r}^2+\mathrm{a}^2+2M\mathrm{a}^2\mathrm{r}\frac{\sin^2\theta}{\Sigma}\right)\sin^2\theta\ \mathrm{d}\phi^2 \qquad (1)\end{aligned}$$

where

$$\Delta \equiv \mathrm{r}^2 - 2\mathrm{Mr} + \mathrm{a}^2, \quad \Sigma \equiv \mathrm{r}^2 + \mathrm{a}^2\cos^2\theta$$

The geodesic equation is

$$\mathrm{d}^2\mathrm{x}^\mu/\mathrm{d}\tau^2 + \Gamma^\mu{}_{a\beta}\mathrm{u}^\alpha\mathrm{u}^\beta = 0 \qquad (2)$$

but the first term vanishes since u^t and u^ϕ, the nonvanishing components of $\mathbf{u}$, are both constant. The $\mathbf{r}$ component of Equation (2) is

$$0 = \Gamma_{\mathrm{r}\alpha}\beta^{\mathrm{u}\alpha\beta} = \left(\Gamma_{\mathrm{rtt}}\mathrm{dt}^2 + 2\Gamma_{\mathrm{rt}\phi}\mathrm{dt}\ \mathrm{d}\phi + \Gamma_{\mathrm{r}\phi\phi}\ \mathrm{d}\phi^2\right)(\mathrm{d}\tau)^{-2}. \qquad (3)$$

Stace the metric coefficients depend only on r and θ, the relevant Γ 's difthe equatorial ($\theta = \pi/2$) plane are

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathrm{rtt}} &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{g_{tt,r}} = \mathrm{M/r^2} \\ 2\Gamma_{\mathrm{rt}\phi} &= -\mathrm{g_{t\phi,r}} = -2\mathrm{Ma/r^2} \\ \Gamma_{\mathrm{r}\phi\phi} &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{g_{\phi\phi,r}} = \frac{\mathrm{Ma}^2}{\mathrm{r}^2} - \mathrm{r}\end{aligned} \tag{4}$$

So if $\Omega \equiv \mathrm{d}\phi/\mathrm{dt}$, Equations (3) and (4) give

$$0 = \Omega^2\left(\frac{Ma^2}{r^2} - r\right) - \frac{2Ma}{r^2}\Omega + \frac{M}{r^2}, \tag{5}$$

a quadratic whose two roots (corresponding to direct and retrograde orbits) are

$$\Omega = M^{\frac{1}{2}}/\left(\pm r^{\frac{3}{2}} + aM^{\frac{1}{2}}\right). \tag{6}$$

For a = 0 this becomes $\Omega^2 = \mathrm{M/r^3}$ which (by coincidence in these coordinates) is exactly the Newtonian Kepler's law.

Solution 17.5. The Reissner-Nordström metric is

$$ds^2 = -Adt^2 + A^{-1}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

where $\mathrm{A} \equiv 1 - 2\mathrm{M/r} + \mathrm{Q^2/r^2}$. We first find the Keplerian frequency $\Omega \equiv \mathrm{d}\phi/\mathrm{dt}$ of circular orbits, in the same manner as in Solution 17.4. Here

$$\begin{aligned}\Gamma_{rtt} &= -\frac{1}{2}g_{tt,r} = \frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} \\ 2\Gamma_{rt\phi} &= -g_{t\phi,r} = 0 \\ \Gamma_{r\phi\phi} &= -\frac{1}{2}g_{\phi\phi,r} = -r\end{aligned}$$

so the quadratic equation for Ω becomes

$$\Omega^2 r - \left(\frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3}\right) = 0$$

and the orbital frequency is

$$\Omega = \pm\left(\frac{M}{r^3} - \frac{Q^2}{r^4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

The proper velocity of the orbiting observer relative to a coordinate stationary observer is

$$\widehat{v} = \frac{d\hat{\phi}}{d\hat{t}} = \frac{rd\phi}{A^{\frac{1}{2}}dt} = \left(\frac{Mr - Q^2}{r^2 - 2Mr + Q^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(Carets indicate orthonormal components in the stationary frame.) In the stationary frame the local electromagnetic field has only the component

$$\mathrm{E_{\hat{r}}} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{r}^2}$$

Lorentz transforming this with the standard relations for E-M fields gives, in the orbiting frame, all components zero except

$$\begin{aligned}E_{\hat{r}} &= \left(1 - \hat{v}^2\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{Q}{r^2} = \frac{Q}{r^2}\left(\frac{r^2 - 2Mr + Q^2}{r^2 - 3Mr + 2Q^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ B_{\hat{\theta}} &= \left(1 - \hat{v}^2\right)^{-\frac{1}{2}}\hat{v}\frac{Q}{r^2} = \frac{Q}{r^2}\left(\frac{Mr - Q^2}{r^2 - 3Mr + 2Q^2}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Solution 17.6. The specific angular momentum a and charge e of a Kerr-Newman black hole of mass m cannot be arbitrarily large, but must satisfy the inequality

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{Ge^2}{c^4} \leq \frac{G^2}{c^4}M^2 \tag{1}$$

(Here the G's and c's have been put in for clarity.) Equation (1) follows from the requirement that there exist a horizon, located at

$$r_H = M + \left(M^2 - e^2 - a^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Equation (1) is violated, one has a "naked singularity," which also duns out to be acausal. Measurements of the electron indicate that its spin, charge and mass give the result that the a^2 term is of order $10 - 22$ cm^2, the e^2 term of order 10^{-68} cm^2 and the m^2 term of order 10^{-110} cm^2. Thus, the inequality is rather violently violated and the dectron is not a black hole.

Solution 17.7. Since we have three relations for the components of the 4 -momentum ($p \cdot p = -m^2, p_t = E, p_\phi = L$) the orbital equations can be seduced to the form

$$(\mathrm{dr/d}\lambda)^2 = \mathrm{V(E,\ L, r)}$$

where λ is an affine parameter and V is some effective potential. The condition for a circular orbit is that $dr/d\lambda$ remain zero, i.e.

$$V(E, L, r) = 0 \tag{1}$$
$$V'(E, L, r) = 0 \tag{2}$$

where $\mathrm{V}' \equiv \partial \mathrm{V}/\partial \mathrm{r}$. By the implicit function theorem, Equations (1) and (2) can be solved for

$$E = E(r), \quad L = L(r)$$

provided

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{E}} & \frac{\partial\ \mathrm{V}}{\partial\ \mathrm{L}} \\ \frac{\partial\ \mathrm{V}'}{\partial \mathrm{E}} & \frac{\partial\ \mathrm{V}'}{\partial \mathrm{L}} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3}$$

(This condition is in fact satisfied.) Then dE/dr and dL/dr can be found by differentiating Equations (1) and (2):

$$0 = \frac{dV}{dr} = \frac{\partial V}{\partial E}\frac{dE}{dr} + \frac{\partial V}{\partial L}\frac{dL}{dr} + V' \tag{4}$$
$$0 = \frac{dV'}{dr} = \frac{\partial V'}{\partial E}\frac{dE}{dr} + \frac{\partial V'}{\partial L}\frac{\partial L}{\partial r} + V'' \tag{5}$$

Now consider an orbit at $r = r_0$ perturbed to $r = r_0 + \epsilon$. The perturbed orbit equation is

$$(\mathrm{dr/d}\lambda)^2 = \mathrm{V}\left(\mathrm{r}_0\right) + \epsilon \mathrm{V}'\left(\mathrm{r}_0\right) + \frac{1}{2}\epsilon^2\ \mathrm{V}''\left(\mathrm{r}_0\right) + \cdots$$

where $V\left(r_0\right) = 0$ and $V'\left(r_0\right) = 0$ (condition for unperturbed circular orbit). The V'' term then governs stability and V'' must be negative if the orbit is stable. For a marginally stable orbit we have $\mathrm{V}'' = 0$ in addition to $\mathrm{V} = 0$ and $\mathrm{V}' = 0$, so the only solution to Equations (4) and (5) is $\mathrm{dE/dr} = 0$ and $\mathrm{dL/dr} = 0$. It is physically clear that these extrema are minima.

Solution 17.8.

(a) From $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -1$ and $\Omega \equiv u^\phi/u^0$ we have

$$\begin{aligned} -1 &= g_{00}\left(u^0\right)^2 + 2g_{0\phi^u}u^\phi + g_{\phi\phi}\left(u^\phi\right)^2 \\ &= \left(u^0\right)^2\left(g_{00} + 2\Omega g_{0\phi} + \Omega^2 g_{\phi\phi}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

and hence

$$\mathrm{u}^0 = \left(-\mathrm{g}_{00} - 2\Omega\ \mathrm{g}_{0\phi} - \Omega^2\ \mathrm{g}_{\phi\phi}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

where, in the $\theta = \pi/2$ plane,

$$-\mathrm{g}_{00} = 1 - 2\mathrm{M/r}, \quad -\mathrm{g}_{0\phi} = 2\mathrm{Ma/r}, \quad -\mathrm{g}_{\phi\phi} = -\left(\mathrm{r}^3 + \mathrm{a}^2\mathrm{r} + 2\mathrm{Ma}^2\right)/\mathrm{r}$$

The other components are easily found in terms of u^0 :

$$\mathbf{u}^\phi = \Omega \mathbf{u}^0$$
$$\mathbf{u}_0 = \mathrm{g}_{00}\mathbf{u}^0 + \mathrm{g}_{0\phi}\mathbf{u}^\phi = \mathbf{u}^0\left(\ \mathrm{g}_{00} + \Omega \mathrm{g}_{0\phi}\right)$$
$$\mathbf{u}_\phi = \mathrm{g}_{0\phi^u}\mathbf{u}^0 + \mathrm{g}_{\phi\phi^u}\mathbf{u}^\phi = \mathbf{u}^0\left(\ \mathrm{g}_{0\phi^+}\Omega \mathrm{g}_{\phi\phi}\right).$$

(b) From Equation (1) we have

$$\mathrm{Y} \equiv \ \mathrm{g}_{00} + 2\Omega\ \mathrm{g}_{0\phi} + \Omega^2\ \mathrm{g}_{\phi\phi} < 0. \tag{2}$$

The observer can be coordinate stationary ($\Omega = 0$) only where $g_{00} < 0$, Ie. only for $\mathrm{r} > \mathrm{r}_0 = 2\mathrm{M}$ in the equatorial plane.
(c) The discriminant of Y defined in Equation (2) is

$$(g_{0\phi})^2 - g_{00}g_{\phi\phi} = r^2 - 2Mr + a^2 = (r - r_+)\,(r - r_-)$$

and is negative if $r_- < r < r_+$. If the discriminant of Y is negative, then $\mathbf{Y}$ has the same sign for any Ω, i.e. the same sign as $\mathrm{g}_{\phi\phi}$ which is positive. This violates Equation (2), which assumed only timelike motion and constant r. The observer therefore cannot remain at constant r.

Note that as $\mathrm{r} \to \mathrm{r}_+$, then Ω goes to $-\mathrm{g}_{0\phi}/\mathrm{g}_{00} = \mathrm{a}/2\mathrm{Mr}$.

Solution 17.9. The conserved energy of a particle is the dot product of its 4 -momentum with the time Killing vector $\xi_{(\mathrm{t})} = \partial/\partial\mathrm{t}$:

$$E = -p \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = -p_t \tag{1}$$

The Kerr metric is of the form

$$ds^2 = -e^{2\nu}dt^2 + e^{2\psi}(d\phi - \omega dt)^2 + e^{2\mu_1}dr^2 + e^{2\mu_2}d\theta^2 \tag{2}$$

The contravariant components of $\mathrm{g}^{\alpha\beta}$ are

$$\begin{array}{ll} \mathrm{g}^{\mathrm{tt}} = -\mathrm{e}^{-2\nu} & \mathrm{g}^{\mathrm{t}\phi} = -\omega\mathrm{e}^{-2\nu} \quad \mathrm{g}^{\phi\phi} = \mathrm{e}^{-2\psi} - \omega^2\mathrm{e}^{-2\nu} \\ & \mathrm{g}^{\mathrm{rr}} = \mathrm{e}^{-2\mu_1} \quad \mathrm{g}^{\theta\theta} = \mathrm{e}^{-2\mu_2} \end{array} \tag{3}$$

If μ is the mass of the particle, then

$$\begin{aligned} -\mu^2 = p \cdot p = &- e^{-2\nu}p_t^2 - e^{-2\nu}2\omega p_t p_\phi \\ &+ \left(e^{-2\psi} - e^{-2\nu}\omega^2\right)p_\phi^2 + e^{-2\mu_1}p_r^2 + e^{-2\mu_2}p_\theta^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Solving the quadratic equation (4) for $E = p_t$, we get

$$\mathrm{E} = \omega\mathrm{p}_\phi + \left[\mathrm{e}^{2\nu-2\psi}\mathrm{p}_\phi^2 + \mathrm{e}^{2\nu}\left(\mathrm{e}^{-2\mu_1}\mathrm{p}_\mathrm{r}^2 + \mathrm{e}^{-2\mu_2}\mathrm{p}_\theta^2 + \mu^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

The sign of the square root in Equation (5) is positive so that $E = +\mu$ for a particle at rest at infinity. If $\mathbf{E}$ is to be negative, we must have p_ϕ negative and

$$\left[\mathrm{e}^{2\nu-2\psi}\mathrm{p}_\phi^2 + \mathrm{e}^{2\nu}\left(\mathrm{e}^{-2\mu}1\mathrm{p}_\mathrm{r}^2 + \mathrm{e}^{-2\mu_2}\mathrm{p}_\theta^2 + \mu^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} < -\omega\mathrm{p}_\phi \tag{6}$$

The boundary of the region of negative E can be found by letting $\mathrm{p}_\mathrm{r} = \mathrm{p}_\theta = 0$, and $\mu \to 0$ (i.e. highly relativistic particle). This gives $\mathrm{e}^{2\nu-2\psi} < \omega^2$ which is equivalent to $\mathrm{g}_{\mathrm{tt}} > 0$. That is, the orbit must be inside the ergosphere. (This result also follows from Problem 10.15.)

When a rocket ship fires a bullet we have conservation of 4 -momentum

$$p_{\text{before}} = p_{\text{after}} + p_{\text{bullet}} \tag{7}$$

Dotting this into the time Killing vector gives

$$E_{\text{before}} = E_{\text{after}} + E_{\text{bullet}} \tag{8}$$

Since the rocket ship can fall into the ergosphere from infinity, we have $\mathrm{E}_{\text{before}} > \mu$. In the ergosphere it can fire a bullet sufficiently fast with negative p_ϕ so that $\mathrm{E}_{\text{bullet}} < 0$. Then, by Equation (7), $\mathrm{E}_{\text{after}} > E_{\text{before}}$ and the rocket coasts off to infinity with increased total energy. Note that since both the rocket's trajectory and the bullet's negative energy trajectory are timelike, the bullet can be fired from the rocket with a locally measured velocity less than c.

Solution 17.10. In Problem 17.8 we saw that $\Omega \to a/2\mathrm{Mr}_+$when $\theta = \pi/2$. To prove this is so for any θ we write, in the notation of Problem 17.9:

$$\Omega = \frac{\mathrm{p}^\phi}{\mathrm{p}^\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{g}^{\phi\phi}\mathrm{p}_\phi + \mathrm{g}^{\phi\mathrm{t}}\mathrm{p}_\mathrm{t}}{\mathrm{g}^{\mathrm{tt}}\mathrm{p}_\mathrm{t} + \mathrm{g}^{\phi\mathrm{t}}\mathrm{p}_\phi} = \omega - \mathrm{e}^{2\nu}\frac{\mathrm{e}^{-2\psi}\mathrm{p}_\phi}{\mathrm{p}_\mathrm{t} + \omega\mathrm{p}_\phi}$$

At $\Delta = 0$ (that is, on the horizon) the metric function $e^{-2\psi}$ is finite but $e^{2\nu}$ vanishes, hence $\Omega = \omega$ and at $\Delta = 0$

$$\omega = \frac{-\mathrm{g}_{\phi\mathrm{t}}}{\mathrm{g}_{\phi\phi}} = \frac{\mathrm{a}}{2\mathrm{Mr}_+}$$

Dintion 17.11. Start with the r and θ equations for orbital motion in *, Kerr geometry (see e.g. MTW, Equation 33.32):

$$\left(\mathrm{r}^2+\mathrm{a}^2\cos\theta\right)\mathrm{dr}/\mathrm{d}\tau=\pm\mathrm{V}_{\mathrm{r}}^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

$$\left(\mathrm{r}^2+\mathrm{a}^2\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\tau=\pm\mathrm{V}_{\theta}^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

Dere

$$V_r=\left[E\left(r^2+a^2\right)-La\right]^2-\Delta\left[r^2+(L-aE)^2+Q\right] \tag{3}$$

$$V_\theta=Q-\cos^2\theta\left[a^2\left(1-E^2\right)+L^2/\sin^2\theta\right] \tag{4}$$

$$\Delta\equiv\mathrm{r}^2-2\mathrm{Mr}+\mathrm{a}^2$$

and where $\mathrm{E},\mathrm{L},\mathrm{Q}$ are constants of the motion. To have θ motion ecross $\theta=0$ and $\theta=\pi$ we must have V_θ positive at both $\theta=0$ and $q=\pi$. By Equation (4) this implies $L=0$ and $Q>a^2\left(1-E^2\right)$. Equation (3) then is

$$V_r=E^2\left(r^2+a^2\right)^2-\Delta\left[r^2+a^2+I\right] \tag{5}$$

onere

$$\mathrm{I}\equiv\mathrm{Q}-\mathrm{a}^2\left(1-\mathrm{E}^2\right)>0$$

The condition that the orbit be at constant coordinate r is $V_r=0$ and $dV_r/dr=0$ (condition for a turning point and a perpetual turning point). The condition on the derivative gives

$$0=2E^2r\left(r^2+a^2\right)-(r-M)E^2\left(r^2+a^2\right)^2/\Delta-r\Delta \tag{6}$$

where $V_r=0$ and Equation (5) have been used to eliminate the constant I. This result can be rewritten

$$E^2=r\Delta^2\left[\left(r^2+a^2\right)\left(r^3-3Mr^2+a^2r+a^2M\right)\right]^{-1} \tag{7}$$

For very large r we have $\mathrm{E}\approx\left(1-\frac{\mathrm{M}}{2\mathrm{r}}+\cdots\right)$ which is the Newtonian binding energy of a circular orbit. As we decrease r, Equation (7) tells how E changes. Clearly, since the numerator is positive, the only way Equation (7) can fail to provide a solution is for the denominator to go to zero (its going to ∞ is obviously impossible outside the horizon). Thus there exist circular polar orbits down to a radius r given by

$$\mathbf{r}^3-3\mathbf{Mr}^2+\mathbf{a}^2\mathbf{r}+\mathbf{a}^2\mathbf{M}=0 \tag{8}$$

This is easily solved with the cubic formula to give the minimum radius of a polar orbit

$$r=M\left[1+\frac{2\left(3-\tilde{a}^2\right)^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}}\cos\left\{\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{3^{\frac{3}{2}}\left(1-\tilde{a}^2\right)}{\left(3-\tilde{a}^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\right\}\right]$$

where $\tilde{\mathrm{a}}\equiv\mathrm{a}/\mathrm{M}$. Note that $\mathrm{E}^2\to\infty$ in the limiting case, so the limiting case is a photon orbit. The limiting radius decreases from $r=3M$ for $a=0$ to $r=\left(1+2^{\frac{1}{2}}\right)M$ for $a=M$.

Solution 17.12. Let $\boldsymbol{\xi}$ be the timelike Killing vector present because the black hole is static. Then Killing's equation tells us

$$\xi_{a;\beta}=-\xi_{\beta;\alpha} \tag{1}$$

and the requirement for a static geometry (see Problem 10.8) is

$$\xi_{[\alpha;\beta}\xi_{\gamma]}=0 \tag{2}$$

A static observer has 4 -velocity parallel to $\boldsymbol{\xi}$, i.e.

$$\mathbf{u}=\boldsymbol{\xi}/\mathrm{v}^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

$$\mathrm{v}=-\xi^a\xi_\alpha. \tag{4}$$

For a photon of momentum $\mathbf{p}$, the infinite red-shift surface occurs when

$$0=(p\cdot u)_\infty/(p\cdot u)_{\text{emitter}}=v_{\text{emitter}}^{\frac{1}{2}}$$

Where we have used the fact that $p \cdot \xi$ is constant along the geodesic Wajectory of the photon and v is normalized to unity at infinity. Thus, the ergosurface is the surface at which $\boldsymbol{\xi}$ becomes null. We now prove that the ergosurface, $v = 0$, is a null hypersurface, i.e. that its normal Sector is null: We use Equation (1) to write Equation (2) in the form

$$\xi_{\alpha;\beta}\xi_{\gamma} + \xi_{\gamma;\alpha}\xi_{\beta} - \xi_{\gamma;\beta}\xi_{a} = 0 \tag{5}$$

then we dot ξ^{γ} into Equation (5):

$$v\xi_{\alpha;\beta} + v, \left[\alpha\xi_{\beta]} = 0 \right. \tag{6}$$

Equation (6) shows that $\mathrm{v}_{,a}$ is parallel to ξ_a wherever $\mathrm{v} = 0$. But $\mathrm{v}_{,a}$ is the normal to $v = 0$, i.e. the normal is a null vector.

The proof has to be modified in the degenerate case when $\mathrm{v}_{,a} = 0$, since it is possible that $\mathrm{v} = 0$ in a finite region, not just on a hypersurface. However, a detailed investigation [B. Carter, J. Math. Phys. 10, 70, (1969)] shows that this is not so.

The theorem proven here corresponds to a Schwarzschild black hole, where $\mathrm{r} = 2\mathrm{M}$ is both the horizon and infinite red-shift surface for static observers (in fact, for all observers). A Kerr black hole is an example of the case where the ergosurface does not coincide with the horizon.

Solution 17.13. At the outer horizon ($\mathrm{r} = \mathrm{r}_{+}$) the metric with $\mathrm{dt} = \mathrm{dr} = 0$ becomes

$$ds^2 = \left(r_{+}^2 + a^2\cos^2\theta\right)d\theta^2 + \frac{\left(r_{+}^2 + a^2\right)^2 \sin^2\theta d\phi^2}{\left(r_{+}^2 + a^2\cos^2\theta\right)}$$

The area of the horizon is then

$$A = \iint g^{\frac{1}{2}} d\theta d\phi = \iint \left(r_{+}^2 + a^2\right)\sin\theta d\theta d\phi = 4\pi\left(r_{+}^2 + a^2\right)$$

Since $r_{+}$is the larger solution of $\Delta = 0$ we have $r_{+} = M + \left(M^2 + Q^2 - a^2\right)^{\frac{1}{2}}$ from which the result follows.

Solution 17.14. The two initial black holes have the same area, so the total initial surface area ($Q = 0$ in Problem 17.13) is

$$A_i = 16\pi M_1\left[M_1 + \left(M_1^2 - a^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

The final black hole is a Schwarzschild black hole, so

$$A_f = 4\pi\left(2M_2\right)^2 = 16\pi M_2^2$$

The inequality $A_f \geq A_i$ becomes

$$M_2^2 \geq M_1^2 + M_1\left(M_1^2 - a^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

If $a = M_1$, this means $M_2 \geq M_1$. The total initial mass was $2M_1$, so the final mass must be at least half of this. According to Hawking's theorem then, up to 50% of the original mass can be radiated away!

This is the most efficient of the collisions without charge. Suppose two black holes of masses M_1 and M_2, and angular momentum parameters a_1 and a_2 coalesce to form a black hole of mass M_3, and parameter a_3; then $A_f \geq A_i$ implies that

$$M_1\left[M_1 + \left(M_1^2 - a_1^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] + M_2\left[M_2 + \left(M_2^2 - a_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \leq M_3\left[M_3 + \left(M_3^2 - a_3^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

One gets the most energy out when the equality obtains. Moreover, for given M_1, M_2, a_1, a_2 the smallest M_3 (hence the largest radiation of energy) will occur for $a_3 = 0$. Similarly, for given M_3 (with $a_3 = 0$), the largest $M_1 + M_2$ (hence the largest radiation of energy) will occur for $|a_1| = |a_2| = M_1 = M_2$. Since $a_3 = 0$, conservation of angular momentum implies that $a_1 = -a_2$. This is just the situation we worked in detail above. The conclusion, therefore, is that when two Kerr holes collide and coalesce, no more than 50% of their original mass can be radiated away.

Solution 17.15. The area A and "reduced area" $\tilde{A}$ of a Kerr black hole

$$\mathrm{A} \equiv 8\pi\ \tilde{\mathrm{A}} = 8\pi\left[\mathrm{M}^2 + \left(\mathrm{M}^4 - \mathrm{J}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \tag{1}$$

equivalently,

$$\tilde{\mathrm{A}}^2 - 2\ \tilde{\mathrm{A}}\mathrm{M}^2 + \mathrm{J}^2 = 0. \tag{2}$$

Taking the first variation, we have

$$\left(\tilde{\mathrm{A}} - \mathrm{M}^2\right)\delta\tilde{\mathrm{A}} = 2\ \tilde{\mathrm{A}}\mathrm{M}\delta\mathrm{M} - \mathrm{J}\delta\ \mathrm{J}. \tag{3}$$

The left-hand side is nonnegative by the second law. Let a particular Save mode have the t and ϕ dependence $\exp(-\mathrm{i}\omega\mathrm{t} + \mathrm{im}\phi)$. All scalar, electromagnetic and gravitational waves satisfy

$$\delta \mathrm{M} = \frac{\omega}{\mathrm{m}} \delta \ \mathrm{J} \tag{4}$$

so we have

$$\left(2\mathrm{AM} - \mathrm{J}\frac{\mathrm{m}}{\omega}\right) \delta \mathrm{M} \geq 0 \tag{5}$$

For an amplified wave conservation of energy requires that the mass of the hole decrease, so we want $\delta \mathrm{M} < 0$; thus the term in parentheses in Equation (5) must be negative. This condition can be rewritten as

$$\frac{2\mathrm{Mr}_+}{\mathrm{a}} - \frac{\mathrm{m}}{\omega} < 0 \tag{6}$$

where $r_+$is the coordinate radius of the event horizon, or (if we take into account that m and ω can have either sign) the condition is

$$0 \lesseqgtr \omega \lesseqgtr \frac{ma}{2Mr_+} \tag{7}$$

where $\lesseqgtr$ means "lies between." Note that $\mathrm{a}/2\mathrm{Mr}_+$is just Ω the "angular velocity of the black hole" (see Problem 17.10).

Solution 17.16.

(a) Using the results of Problem 7.7,

$$\Box\Phi = (-g)^{-\frac{1}{2}} \left[(-g)^{\frac{1}{2}} g^{a\beta}\Phi_{,\alpha}\right], \beta,$$

and $(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}} = \left(\mathrm{r}^2 + \mathrm{a}^2\cos^2\theta\right)\sin\theta$, we have

$$\begin{aligned} 0 = &\left[-\frac{\left(\mathrm{r}^2+\mathrm{a}^2\right)^2}{\Delta} + \mathrm{a}^2\sin^2\theta\right]\frac{\partial^2\Phi}{\partial \mathrm{t}^2} - \frac{\mathrm{Mar}}{\Delta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial \mathrm{t}\partial\phi} + \left(\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{a^2}{\Delta}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} \\ &+ \frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}\left(\Delta\frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}\Phi\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

(b) In Equation (1) we take the t and ϕ dependence to be

$$\Phi(\mathrm{t},\mathrm{r},\theta,\phi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\mathrm{R}(\mathrm{r})\mathrm{S}(\theta)$$

and we divide through by Φ. This gives us

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}\left(\Delta\frac{\mathrm{dR}}{\mathrm{dr}}\right) + \omega^2\cdot\frac{\left(\mathrm{r}^2+\mathrm{a}^2\right)^2}{\Delta} - \frac{4\,\mathrm{Mar}\,\omega\ \mathrm{m}}{\Delta} + \frac{\mathrm{a}^2\ \mathrm{m}^2}{\Delta} \\ &\qquad = \frac{-1}{\mathrm{S}\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{d}\theta}\right) + \mathrm{a}^2\omega^2\sin^2\theta + \frac{\mathrm{m}^2}{\sin^2\theta} \end{aligned}$$

(2)

Since the left-hand side of Equation (2) is a function of r alone and the right-hand side must be a function of θ alone; each side must be a constant A, thus

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dS}{d\theta}\right) - \left(a^2\omega^2\sin^2\theta + \frac{m^2}{\sin^2\theta} - A\right)S = 0 \tag{3}$$

and

$$\frac{d}{dr}\left(\Delta\frac{dR}{dr}\right) + \left[\frac{\omega^2\left(r^2+a^2\right)^2 - 4\,\mathrm{Mar}\,\omega m + a^2m^2}{\Delta} - A\right]R = 0. \tag{4}$$

Since S must be regular at $\theta = 0$ and π, Equation (3) is an eigenvalue equation for A. The function S is in fact a "spheroidal wave function", in the simplest case when $\mathrm{a}\omega = 0$, we have $S = \mathrm{P}_{\ell_\mathrm{m}}(\cos\theta)$ and $\mathrm{A} = \ell(\ell+\ell)$

(c) It is convenient (but not essential) to introduce a "tortoise"

coordinate r^* which satisfies $\mathrm{dr}^*/\mathrm{dr} = \left(\mathrm{r}^2+\mathrm{a}^2\right)/\Delta$. Note that the interval $(\mathbf{r}_+, \infty)$ in the $\mathbf{r}$-coordinate is stretched to $(-\infty, \infty)$ in $\mathbf{r}^*$. Equation (4) now becomes

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{R}}{\mathrm{dr}^{*2}} + \frac{2\mathrm{r}\Delta}{\left(\mathrm{r}^2+\mathrm{a}^2\right)^2}\frac{\mathrm{dR}}{\mathrm{dr}} + \left[\omega^2 + \frac{\mathrm{a}^2\ \mathrm{m}^2 - 4\,\mathrm{Marm}\,\omega - \Delta\mathrm{A}}{\left(\mathrm{r}^2+\mathrm{a}^2\right)^2}\right]\mathrm{R} = 0 \tag{5}$$

As $r \to \infty$, we get

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{R}}{\mathrm{dr}^{*2}} + \frac{2}{\mathrm{r}}\frac{\mathrm{dR}}{\mathrm{dr}^*} + \omega^2\mathrm{R} \approx 0$$

which has solutions

$$\mathrm{R} \sim \mathrm{r}^{-1}\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\omega \mathrm{r}^*}$$

corresponding to ingoing and outgoing waves.
(d) As $\Delta \to 0$, Equation (5) gives

$$\frac{d^2\mathrm{R}}{dr^{*2}} + \left[\omega^2 - \frac{2\mathrm{am}\omega}{2\mathrm{Mr}_+} + \frac{a^2\ \mathrm{m}^2}{(2\mathrm{Mr}_+)^2}\right]\mathrm{R} = 0$$

and hence

$$\mathrm{R} \sim \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}(\omega - \mathrm{m}\omega_+)\mathrm{r}^*}$$

where

$$\omega_+ \equiv \mathrm{a}/2\mathrm{Mr}_+.$$

(e) Since all physical observers at the horizon are related by Lorentz transformations, they will all agree whether a particular solution represents ingoing or outgoing waves. Thus we can calculate with any convenient observer. We choose an observer at constant r just outside the horizon. Since he is inside the ergosphere, he is dragged around in the positive ϕ direction with some $\Omega = \mathrm{d}\phi/\mathrm{dt} > 0$ where, from Problem 17.10, $\Omega = \omega_+$. This observer sees the local (t, r) dependence of the solution

$$\Phi = e^{-i\omega t}e^{im\phi}e^{\pm i(\omega - m\omega_+)\tau^*}S(\theta) \tag{6}$$

as

$$\Phi = e^{-i(\omega - m\omega_+)t}e^{\pm i(\omega - m\omega_+)r^*}e^{im\tilde{\phi}}S(\theta).$$

where we have put $\tilde{\phi} = \phi - \omega_+\mathrm{t}$. Thus $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega - \mathrm{m}\omega_+)\mathrm{r}^*}$ corresponds to ingoing waves.
(f) The stress-energy tensor for a scalar field is

$$4\pi\ \mathrm{T}_{a\beta} = \Phi_{,(\alpha}\Phi^*_{,\beta)} - \frac{1}{2}\ \mathrm{g}_{a\beta}\left|\Phi, \gamma^{\Phi,\gamma}\right|.$$

(The complex conjugation is necessary because the representation of Φ is complex.) The energy flux vector is $\mathrm{J}_\beta = -\mathrm{T}_{\alpha\beta}\xi^\alpha$, where $\boldsymbol{\xi}$ is the time Killing vector $\partial/\partial\mathrm{t}$ (see Problem 10.11). The energy flux into the horizon is found by integrating the radial component of J over the
2-surface $r = r_+$:

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{dt}} = \int \mathrm{T}^{\mathrm{r}}_{\mathrm{t}}|\ \mathrm{g}|^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi.$$

Since

$$4\pi\ \mathrm{T}^{\mathrm{r}}_{\mathrm{t}} = \mathrm{Re}\left(\Phi, {}_{\mathrm{t}}\Phi^{*,\mathrm{r}}\right) = \mathrm{Re}\left(\Phi, \Phi^*_{,\mathrm{r}}\frac{\mathrm{r}^2 + \mathrm{a}^2}{\Sigma}\right)$$
$$= \omega\left(\omega - \mathrm{m}\omega_+\right)\mathrm{S}^2(\theta)\frac{2\mathrm{Mr}}{\Sigma}$$

we have

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{dt}} = \omega\left(\omega - \mathrm{m}\omega_+\right)\frac{2\mathrm{Mr}}{4\pi}\int\ \mathrm{S}^2(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi$$

and dE/dt is negative, i.e. energy flows out of the horizon if $\omega - m\omega_+$ i.e. if $0 < \omega/m < \omega_+$in agreement with Problem 17.15.
Solution 17.17. Suppose charge δQ and energy δE are dropped into the hole. We then have

$$\delta\left(Q^2 - M^2\right) = 2Q\delta Q - 2M\delta E \tag{1}$$

Not all values of δQ and δE are allowed, however. The radial "effective potential" equation (see e.g. MTW, Equation 33.32) for a charged particle falling in the Reissner-Nordström geometry is

$$\mathrm{r}^2\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\tau} = -\left\{\left(\mathrm{r}^2\delta\mathrm{E} - \mathrm{Q}\delta\mathrm{Qr}\right)^2 - \Delta\left(\mu_0^2\mathrm{r}^2 + \mathrm{L}_z^2 + \mathcal{Q}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

Where E, L_z and 2 are conserved quantities, and μ_0 is the particle sust mass. A particle which crosses the event horizon into the black hole $\mathrm{dr}/\mathrm{d}r \leq 0$ at the event horizon $\mathrm{r} = \mathrm{r}_+$. Since $\Delta = 0$ at $\mathrm{r} = \mathrm{r}_+$, (2) ecomes

$$\mathrm{r}^2\frac{\mathrm{dr}}{dr} = -\left(\mathrm{r}_+^2\delta\mathrm{E} - \mathrm{Q}\delta\mathrm{Q}\mathrm{r}_+\right) \le 0 \tag{3}$$

and hence $\delta\mathrm{E} > \mathrm{Q}\delta\mathrm{Q}/\mathrm{r}_+$. Combining this with Equation (1) we see that

$$\delta\left(Q^2 - M^2\right) \le 2\delta E\left(r_+ - M\right) = 2\delta E\left(M^2 - Q^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

As $Q^2 \to M^2$ the right side goes to zero as a square root, so no sequence of adding δ E's can make the integrated left side positive.

Solution 17.18.

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}}\cdot\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}} &= \left|\mathrm{g}_{\mathrm{tt}} - \omega^2\ \mathrm{g}_{\phi\phi}\right|^{\frac{1}{2}}\widetilde{\mathrm{dt}}\cdot\left|\ \mathrm{g}_{\mathrm{tt}} - \omega^2\ \mathrm{g}_{\phi\phi}\right|^{\frac{1}{2}}\widetilde{\mathrm{dt}} \\ &= -\left(\mathrm{g}_{\mathrm{tt}} - \omega^2\ \mathrm{g}_{\phi\phi}\right)\mathrm{g}^{\mathrm{tt}}\end{aligned} \tag{a}$$

[The minus sign is chosen because $\mathrm{g}_{\mathrm{tt}} - \omega^2\ \mathrm{g}_{\phi\phi} < 0$.] The Kerr metric has only the $\mathrm{g}_{\mathrm{t}\phi}$ term off the diagonal. Inverting $\mathrm{g}_{\alpha\beta}$ we find $\mathrm{g}^{\mathrm{tt}} = \mathrm{g}_{\mathrm{tt}} - \omega^2\ \mathrm{g}_{\phi\phi}$ and $\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}}\cdot\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}} = -1$. The calculation of other inner products to verify $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{a}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\beta}} = \eta^{\alpha\beta}$ is similar.

(b) The dual basis $\mathbf{e}_{\hat{\alpha}}$ is defined by $\left\langle\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\alpha}}, \mathbf{e}_{\hat{\beta}}\right\rangle = \delta^a_\beta$. If $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\hat{\alpha}} = \mathrm{A}^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{\beta}$ and ${}^{\mathrm{e}}\hat{\beta} = \mathrm{B}\hat{\beta}^{\gamma}\mathrm{e}_\gamma$, then the matrix ${}^{\mathrm{B}}\hat{\beta}^{\gamma}$ must be the transposed inverse of $\hat{A}_\beta$. To find B from A we can separate the $t-\phi$ piece from the (diagonal) $\mathrm{r}-\theta$ piece:

$$\begin{bmatrix}\widetilde{\omega^t}\\ \widetilde{\omega\phi}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\left|g_{tt} - \omega^2 g_{\phi\phi}\right|^{\frac{1}{2}} & 0\\ -\omega\left(g_{\phi\phi}\right)^{\frac{1}{2}} & \left(g_{\phi\phi}\right)^{\frac{1}{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{dt}\\ \widetilde{d\phi}\end{bmatrix}$$

implies that

$$\begin{bmatrix}\mathrm{e}_{\hat{\mathrm{t}}}\\ \mathrm{e}_{\hat{\phi}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{g}_{\mathrm{tt}} - \omega^2\ \mathrm{g}_{\phi\phi}\right|^{-\frac{1}{2}} & \omega\left|\ \mathrm{g}_{\mathrm{tt}} - \omega^2\ \mathrm{g}_{\phi\phi}\right|^{-\frac{1}{2}}\\ 0 & \left(\ \mathrm{g}_{\phi\phi}\right)^{-\frac{1}{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{e}_{\mathrm{t}}\\ \mathrm{e}_{\phi}\end{bmatrix}.$$

Since the $\mathrm{r}-\theta$ piece is diagonal, it is trivially inverted:

$$\mathbf{e}_{\mathbf{r}} = (\Delta/\Sigma)^{\frac{1}{2}}\mathbf{e}_{\mathbf{r}} \quad \mathbf{e}_{\hat{\theta}} = \Sigma^{-\frac{1}{2}}\mathbf{e}_\theta$$

(c) The 4-velocity has zero rotation if $\omega_{\alpha\beta} = 0$ (see Problem 5.18) or equivalently if $\mathbf{u}$ is hypersurface orthogonal:

$$\mathrm{u}\left[\alpha; \beta^{\mathrm{u}}\gamma\right] = 0$$

(see Problem 7.23). The quickest way to check this condition is to use forms and the equivalence of $\mathrm{u}_{[\hat{\alpha};\hat{\beta}]}$ and $\mathrm{d}\hat{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}}$. The condition $\mathrm{u}\left[\hat{\alpha}; \hat{\beta}^{\mathrm{u}}\hat{\gamma}\right] = 0$ is then equivalent to $d\hat{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}}\wedge\hat{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}} = 0$. But $\hat{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}} = a\mathrm{dt}$ where $a = \left|\mathrm{g}_{\mathrm{tt}} - \omega^2\ \mathrm{g}_{\phi\phi}\right| = \alpha(\mathrm{r}, \theta)$ and thus

$$\mathrm{d}\tilde{\omega}^{\hat{t}} = a_{,r}\widetilde{\mathrm{dr}}\wedge\widetilde{\mathrm{dt}} + a_{,\theta}\widetilde{d\theta}\wedge\widetilde{\mathrm{dt}}$$

so $d\hat{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}}\wedge\tilde{\omega}^{\mathrm{t}} = 0$ since $\widetilde{\mathrm{dt}}\wedge\widetilde{\mathrm{dt}} = 0$.

(d) The 4-velocity of the ZAMO is

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_{\mathrm{t}} = \left|g_{\mathrm{tt}} - \omega^2 g_{\phi\phi}\right|^{-\frac{1}{2}}\left(\mathbf{e}_{\mathrm{t}} + \omega\mathbf{e}_\phi\right)$$

The vectors e_{t} and e_ϕ are Killing vectors. The vector field $\mathrm{e}_{\mathrm{t}} + \omega\mathrm{e}_\phi$ is not a Killing vector because ω is not constant. However any particular ZAMO is moving along the Killing vector $\boldsymbol{\xi} = \mathrm{e}_{\mathrm{t}} + \omega_0\mathrm{e}_\phi$ (ω_0 a fixed constant, which is chosen to equal ω at the radius of the particular ZAMO under consideration). Thus the results of Problem 10.14 apply and we get

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}\nabla\log\left|\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}\right| = \frac{1}{2}\nabla\log\left|\ \mathrm{g}_{\mathrm{tt}} + 2\omega_0\ \mathrm{g}_{\mathrm{t}\phi} + \omega_0^2\ \mathrm{g}_{\phi\phi}\right|.$$

Then we set $\mathrm{g}_{\mathrm{t}\phi} = -\omega\mathrm{g}_{\phi\phi}$ and evaluate at $\omega = \omega_0$ this becomes

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}\nabla\log\left|g_{\mathrm{tt}} - \omega^2 g_{\phi\phi}\right|.$$

Solution 17.19. In Boyer-Lindquist coordinates, for t = constant and $x = \mathrm{r}_+$, the Kerr metric gives the metric of the horizon:

$$ds^2 = \left(r_+^2 + a^2\cos^2\theta\right)d\theta^2 + \left(2Mr_+\right)^2\sin^2\theta\left(r_+^2 + a^2\cos^2\theta\right)^{-1}d\phi^2. \tag{1}$$

have used the relation $\mathrm{r}_+^2 + \mathrm{a}^2 = 2\mathrm{Mr}_+$in $\mathrm{g}_{\phi\phi}$.) The Gaussian curvature K of a 2 -surface is the same as the Riemannian curvature of Problem 9.23, where the Riemann tensor is computed from the 2 -dimensional metric. It is convenient to use an orthonormal basis dyad.
For a metric of the form

$$\mathrm{ds}^2 = \mathrm{e}^{2a_1}\left(\mathrm{dx}^1\right)^2 + \mathrm{e}^{2a_2}\left(\mathrm{dx}^2\right)^2 \tag{2}$$

we let

$$\tilde{\omega}^{\hat{1}} = \mathrm{e}^{a_1}\widetilde{\mathrm{dx}}^1, \quad \tilde{\omega}^{\hat{2}} = \mathrm{e}^{a_2}\widetilde{\mathrm{dx}}^2 \tag{3}$$

and we have

$$\mathrm{K} = \mathrm{R}_{\hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{2}} = \mathrm{R}_{1212}\mathrm{e}^{-2(\alpha_1+\alpha_2)}. \tag{4}$$

The quickest way to find the Riemann tensor is with forms as in Problems 8.27 and 9.20 . Since

$$\mathrm{d}\tilde{\omega}^{\hat{\mathrm{t}}} = \mathrm{e}^{a_1}\widetilde{\mathrm{d}\alpha}_1 \wedge \widetilde{\mathrm{dx}}^1 = \mathrm{e}^{a_1}a_{1,2}\widetilde{\mathrm{dx}}^2 \wedge \widetilde{\mathrm{dx}}^1 = a_{1,2}\mathrm{e}^{-a_2}\tilde{\omega}^{\hat{2}} \wedge \hat{\omega}^{\hat{1}}$$

and a similar expression with 1 and 2 interchanged, we find

$$\tilde{\omega}^{\hat{1}}\hat{2} = \mathrm{e}^{-a_2}a_{1,2}\tilde{\omega}^{\hat{1}} - \mathrm{e}^{-a_1}a_{2,1}\tilde{\omega}^{\hat{2}}. \tag{5}$$

(Recall that $\mathrm{d}\,\tilde{\omega}^{\hat{\alpha}} = -\tilde{\omega}^{\hat{\alpha}}\hat{\beta}^{\wedge}\tilde{\omega}^{\hat{\beta}}$ and $\tilde{\omega}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = -\tilde{\omega}\hat{\beta}_{\hat{\alpha}}$.) The only nontrivial curvature form is

$$\begin{aligned}
\Re_{\hat{2}}^{\hat{1}} &= \mathrm{d}\tilde{\omega}_{\hat{2}}^{\hat{1}} + \tilde{\omega}_{\hat{a}}^{\hat{1}} \wedge \tilde{\omega}_{\hat{2}}^{\hat{a}} \\
&= \mathrm{d}\left(\alpha_{1,2}\mathrm{e}^{a_1-a_2}\widetilde{\mathrm{dx}}^1 - \alpha_{2,1}\mathrm{e}^{a_2-a_1}\widetilde{\mathrm{dx}}^2\right) + 0 \\
&= \left(a_{1,2}\mathrm{e}^{a_1-a_2}\right)_{,2}\widetilde{\mathrm{dx}}^2 \wedge \widetilde{\mathrm{dx}}^1 - \left(a_{2,1}\mathrm{e}^{a_2-a_1}\right)_{,1}\widetilde{\mathrm{dx}}^1 \wedge \widetilde{\mathrm{dx}}^2 \\
&= -\mathrm{e}^{-(a_1+a_2)}\left[\left(\mathrm{e}^{a_2}{}_{,1}\mathrm{e}^{-a_1}\right)_{,1} + \left(\mathrm{e}^{a_1}_{,2}\mathrm{e}^{-a_2}\right)_{,2}\right]\tilde{\omega}^{\hat{1}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{2}}
\end{aligned}$$

Since $R_{\hat{1}\hat{2}} = R_{\hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{2}}\tilde{\omega}^{\hat{1}} \wedge \tilde{\omega}^{\hat{2}}$ we have

$$\mathrm{K} = \mathrm{R}_{\hat{1}\hat{2}\hat{1}\hat{2}} = -\mathrm{e}^{-(\alpha_1+\alpha_2)}\left[\left(\mathrm{e}^{\alpha_2}{}_{,1}\mathrm{e}^{-\alpha_1}\right)_{,1} + \left(\mathrm{e}^{\alpha_1}{}_{,2}\mathrm{e}^{-\alpha_2}\right)_{,2}\right]. \tag{6}$$

Using the explicit form of the metric in Equation (1), with $\theta = x^1$ and $\phi = x^2$, we find from Equation (6) that

$$\mathrm{K} = 2\mathrm{Mr}_+\frac{\mathrm{r}_+^2 - 3\mathrm{a}^2\cos^2\theta}{\left(\mathrm{r}_+^2 + \mathrm{a}^2\cos^2\theta\right)^3} \tag{7}$$

Note that if $\mathrm{r}_+^2 - 3\mathrm{a}^2 < 0$, then K is negative for a range of θ around the poles ($\theta = 0, \pi$). But when K is negative, the surface cannot be globally embedded in a Euclidean 3-space. Since $r_+ = M + \left(M^2 - a^2\right)^{\frac{1}{2}}$, the condition that $\mathrm{r}_+^2 - 3\mathrm{a}^2$ be less than zero is equivalent to $\mathrm{a} > 3^{\frac{1}{2}}\mathrm{M}/2$.
The Gauss-Bonnet theorem says that

$$\int K d^2S = 2\pi\chi$$

where χ is the Euler characteristic of the surface ($\chi = 2$ for a sphere, 0 for a torus, etc.). Since

$$\mathrm{d}^2\ \mathrm{S} = (\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi = 2\mathrm{Mr}_+\sin\theta\mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi$$

we have

$$\begin{aligned}
\chi &= (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} (2Mr_+)^2\,\frac{r_+^2 - 3a^2\cos^2\theta}{\left(r_+^2 + a^2\cos^2\theta\right)^3}\sin\theta d\theta \\
&= (2Mr_+)^2\,2\int_0^1 \frac{r_+^2 - 3a^2x^2}{\left(r_+^2 + a^2x^2\right)^3}dx \\
&= (2Mr_+)^2\,2\left[\frac{x}{\left(r_+^2 + a^2x^2\right)^2}\right]_0^1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

so the surface is topologically a 2 -sphere. (For further details see L. Smarr, Phys. Rev. D. 7, 289, (1973).)

Solution 17.20. The energy amplification described in Problems 17.15 and 17.16 corresponds to stimulated emission in quantum-mechanical language. If we know the rate for stimulated emission, we can find the rate for spontaneous emission as follows:

Let p be the probability per unit of phase space of the spontaneous emission of a quantum. If we send N quanta in, the probability of getting $\mathbf{N}+1$ out by stimulated emission is $(\mathrm{N}+1)\mathrm{p}$, since the quanta (gravitons, photons) are bosons. To simplify the argument, assume $\mathrm{p} \ll 1$ so we do not have to consider the emission of more than one extra quantum; dimensionally the answer would not be changed if we were to include this refinement. The expectation value of the excess number of quanta emitted is

$$\begin{aligned} <\Delta N> = & \text{ (excess number) } \times \text{ (probability of that number)} \\ = & 1 \times (N+1)p \end{aligned}$$

The amplification is

$$A \equiv \frac{\langle \Delta N \rangle}{N} = \left(1 + \frac{1}{N}\right) p \approx p \tag{1}$$

in the classical limit ($N \to \infty$). Fermi's Golden Rule says that the rate of spontaneous emission is

$$\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dt}} \sim \int_{\text{phase space}} \mathrm{p}. \tag{2}$$

In Equation (2) replace p by A and recall that the classical effect is described in terms of modes with "quantum numbers" ℓ and m and a frequency ω. Thus

$$\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dt}} \sim \sum_{\ell,\mathrm{m}} \int \mathrm{A} \mathrm{d}\omega \tag{3}$$

Now A goes rapidly to zero for large ℓ and m, as in all barrierpenetration problems. Also from Problems 17.15 and 17.16, A is nonzero for $\omega \sim 1/M$ over a range $\Delta\omega \sim 1/M$, where M is the mass of the black hole. Since A is a number of order unity for low ℓ and m, replace A by 1 in Equation (3) and drop the summation. Then

$$\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dt}} \sim \Delta\omega \sim \frac{1}{\mathrm{M}}.$$

The hole loses energy at a rate

$$\frac{dE}{dt} \sim \pi\omega \frac{dN}{dt} \sim \frac{\pi}{M^2}$$

This implies a loss of angular momentum at a rate

$$\frac{dJ}{dt} \sim \frac{m}{\omega}\frac{dE}{dt} \sim \frac{\hbar}{M}.$$

Thus the time-scale for angular momentum loss is

$$\tau \sim \mathrm{J}/(\mathrm{dJ/dt}) \sim \mathrm{M}^2(\mathrm{f/M}) \sim \mathrm{M}^3/\mathrm{h} \sim \left(\mathrm{M}/10^{15}\mathrm{gm}\right)^3 10^{10} \text{ years.}$$

Thus for $\mathrm{M} \leq 10^{15}\mathrm{gm}$, J will already have become essentially zero by this process. For $\mathrm{M} \sim 10^{33}\mathrm{gm}$, the fraction lost will be $\sim 10^{-54}$ in 10^{10} years.

Solution 17.21. For all static spacetimes, the "surface of infinite redshift" ($\mathrm{g}_{00} = 0$) coincides with the horizon (Problem 17.12). Therefore,

10 the above metric describes a black hole, its surface is at $\mathrm{g}_{00} = 0$ or $\bar{\phi} = \frac{1}{2}$, where $\bar{\rho} \equiv \rho/\mathrm{m}$. We will now show that, in fact, the surface $\bar{\rho} = \frac{1}{2}$ is not contained in the same manifold as the one which becomes asympzotically flat ($\bar{\rho} \to \infty$) and thus cannot be reached by objects in our universe.

A glance at the $\mathrm{g}_{\rho\rho}$ portion of the metric shows that $\bar{\rho} = 1.5$ is an infinite proper radial distance away from any $\bar{\rho} > 1.5$. To see that $\bar{\rho} = 1.5$ is also infinite proper time away and thus removed from the manifold it is sufficient to consider radial null geodesics. (The reader can verify that for nonradial or timelike geodesics, matters get even worse):

$$\begin{aligned} & \mathrm{g}_{\rho\rho}\left(\mathrm{p}^{\rho}\right)^2 + \mathrm{g}^{00}\left(\mathrm{p}_0\right)^2 = 0 \\ & \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\lambda} = \left(\bar{\rho} - \frac{3}{2}\right) \frac{\left(\bar{\rho} + \frac{1}{2}\right)}{\left(\bar{\rho} - \frac{1}{2}\right)^2} \mathrm{p}_0 \end{aligned}$$

where λ is an affine parameter. Remembering that p_0 is a constant of the motion (stationary metric), the above equations show that

$$\mathrm{p}_0^{-1} \int_{\bar{\rho}}^{\bar{\rho}=\frac{3}{2}} \frac{\left(\bar{\rho} - \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}\rho}{\left(\bar{\rho} - \frac{3}{2}\right)\left(\bar{\rho} + \frac{1}{2}\right)} = \int_{\lambda}^{\lambda_0} \mathrm{d}\lambda$$

Since the integral on the left diverges at $\bar{\rho} = \frac{3}{2}$, the $\bar{\rho} = \frac{3}{2}$ surface is an infinite affine distance away. There are no singularities for $\bar{\rho} \geq \frac{3}{2}$ and $\bar{\rho}$ is a monotonically decreasing coordinate for radially infalling photons and particles, so $\bar{\rho} = \frac{1}{2}$, as well as $\bar{\rho} = \frac{3}{2}$, must be off the physical manifold.

The above conclusions also indicate that the surface of a star collapsing to form the given vacuum metric can never reach $\bar{\rho} = \frac{3}{2}$; thus for realistic physical systems, the given metric is realizable only for $\bar{\rho} > \frac{3}{2}$.

13.7.18 18 Gravitational Radiation

Weak gravitational waves are described by linearized theory (see Chapter 13). The basic equations for waves propagating in vacuum are

$$\mathrm{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \mathrm{h}_{\mu\nu} \; (|\mathrm{h}_{\mu\nu}| \ll 1)$$

$$\overline{\mathrm{h}}_{\mu\nu} \equiv \mathrm{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, \mathrm{h}^{\alpha}_{a} \eta_{\mu\nu}$$

$\Box\overline{\mathrm{h}}_{\mu\nu} \equiv \overline{\mathrm{h}}_{\mu\nu}{}^{;\alpha}{}_{\alpha} = 0$

$$\overline{\mathrm{h}}^{\mu a}_{;a} = 0 \quad \text{("Lorentz gauge")}$$

$\mathrm{h}_{\mu 0} = 0,\ \mathrm{h}^{\alpha}{}_{a} = 0$ ("TT" or "Transverse-Traceless" gauge).
The effective stress-energy tensor for gravitational waves is

$$\mathrm{T}^{(\mathrm{GW})}_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi} < \mathrm{h}_{\mathrm{jk},\mu}\, \mathrm{h}^{\mathrm{jk}}_{,\nu} >$$

where $\rangle$ denotes an average over several wavelengths and h_{jk} is in the TT gauge (see e.g. MTW Section 36.7).

The gravitational wave power $\mathrm{L_{GW}}$, emitted by a nearly-Newtonian, slow-motion ($v \ll c$) gravitating source is

$$L_{GW} = \frac{1}{5}\frac{G}{c^5} \left\langle X_{jk} X^{jk} \right\rangle$$

where $\mathrm{I_{jk}}$ is the "reduced quadrupole moment tensor" vu the source, given by

$$\mathrm{x_{jk}} \equiv \int \rho \left(\mathrm{x_j x_k} - \frac{1}{3}\delta_{\mathrm{jk}} \mathrm{r}^2 \right) \mathrm{d}^3\mathrm{x}$$

and $< >$ denotes averaging over several characteristics periods of the source.

Evoblem 18.1. A Massachusetts motorist shakes his fist angrily at another Dotorist. What fraction of his expended energy goes into gravitational rilation?

Niroblem 18.2. A gravitationally bound dynamical system (e.g. a binary (var) has, in order of magnitude, mass M and size R. Estimate the time orradiation reaction forces to affect the system substantially, and comWre this time-scale with the dynamical time-scale for the system.

itoblem 18.3. For an electric dipole, and its radiation pattern, there are Nee independent orientations, corresponding to the three directions in Wich the dipole may point. How many independent orientations are there is a traceless quadrupole tensor?

Toblem 18.4. Calculate the gravitational radiation luminosity of a spining thin metal rod of mass M and length ℓ, spinning at frequency ω sound a symmetrical perpendicular axis. Estimate the electromagnetic timinosity which would arise from the slight excess of electrons pushed torrard the ends by centrifugal force. If the rod has a reasonable density **10 gm**/cm^3) and is rotating at a reasonable frequency (1kHz) will electromagnetic or gravitational radiation be more important in slowing be rotation?

Problem 18.5. The radiation reaction forces on a slow-motion, weak field source can be derived from an addition to the Newtonian potential

$$\Phi^{\mathrm{react.}} = \frac{1}{5} X^{(5)}_{jk} x^j x^k$$

(Cf.W. Burke, J. Math. Phys. 12, 402 (1971); MTW pp. 993.) Here X_{jk} is the reduced quadrupole moment of the source $\mathrm{x_{jk}} \equiv \int \rho \left(\mathrm{x_j x_k} - \frac{1}{3}\delta_{\mathrm{jk}} \mathrm{r}^2 \right) \mathrm{d}^3\mathrm{x}$ at a given time. The superscript (5) indicates the fifth time derivative. From this potential derive expressions for the time-averaged rates at which the source loses energy and angular-momentum, in terms of derivatives of X_{jk}.

Problem 18.6. Two stars of mass $\mathrm{M_1}$ and $\mathrm{M_2}$ separated by a distance R revolve about each other in a nonrelativistic circular orbit. Due to gravitational radiation reaction, R changes with time. Find $R(t)$.

Problem 18.7. Two point masses $\mathrm{m_1}$ and $\mathrm{m_2}$ are in a Newtonian elliptical orbit with semimajor axis a and eccentricity e. Compute da/dt and de/dt due to gravitational radiation reaction. Show that the elliptical orbit tends to be circularized.

Problem 18.8. A plane gravitational wave propagates through nearly flat empty spacetime, in the x^1 direction (i.e. the metric perturbations $h_{\alpha\beta}$ are functions only of $u = t - x$). Give an explicit coordinate transformation which makes all the $h_{\alpha\beta}$ zero except $h_{23} = h_{32}$ and $h_{22} = -h_{33}$. Show that the same resulting components could have been obtained directly by projection into the transverse traceless gauge.

Problem 18.9. Show that gravitational radiation generated by an axisymmetric system carries no net angular momentum. (Do not assume that the sources have weak internal gravitational fields.)

Problem 18.10. Define Stokes parameters for a plane gravitational wave and show how to calculate the fraction of circular polarization, linear polarization and the orientation of maximum linear polarization from the three Stokes parameters.

Problem 18.11. An initially static source undergoes violent motion which generates gravitational radiation and then, after a finite time, becomes again static. A distant observer detects the gravitational waves by watching the motion of two free particles which are initially at rest with respect to each other. Show that after the passage of the waves the observer sees the particles back in their original positions and at rest with respect to each other, to linear order in the wave amplitude.

Problem 18.12. An elastic rod can be used to detect gravitational waves not only at its lowest normal mode frequency ω_0, but also at harmonics
$\mathrm{v_a} = \mathrm{n}\omega_0$. What is the sensitivity of the $\mathrm{n^{th}}$ mode relative to the zeroth, Qe. how does the ratio of maximum squared amplitude of the displacement Doenergy flux of wave vary with n ? (Assume the rod has the same sechanical damping time for all modes.)

Problem 18.13. A (weak) plane gravitational wave travelling in the -direction is normally incident on a slab of cement. The cement absorbs sergy E from the plane wave. Show (e.g. as a result of $\mathrm{T^{\mu\nu}}_{;\nu} = 0$) that he slab must absorb x-momentum E also, and find the relationship beTaeen the rate at which energy and x -momentum are absorbed.

Problem 18.14. In the previous problem it was shown that materials must be able to absorb momentum in the direction of wave propagation. This Seems incompatible with the description of gravitational waves as transverse! To investigate this point idealize the cement molecules of the previous problem as being harmonically bound to their equilibrium positions, and having a damping force due to internal friction of the cement. Assume the gravitational wave is monochromatic and linearly polarized. Using the equation of geodesic deviation find the time average force, and hence the rate of momentum absorption, in the direction of wave propagation. Show that this rate of momentum absorption is equal to the rate at which the molecule absorbs energy.

Problem 18.15. A weak, plane gravitational wave of frequency ω and dimensionless amplitude h passes through a "hard-sphere" gas of temperature T. The mean free path of atoms in the gas is ℓ, and the gas is dilute enough so that $\ell \gg c/\omega$. Show that in a finite amount of time the particles in the gas will be heated to relativistic temperatures. Estimate this time. Estimate the distance over which the wave is damped by a factor of e in amplitude.

Problem 18.16. Estimate the number of gravitons emitted in an asymmetric explosion of energy E.

Problem 18.17. Roughly how many thermal gravitons does a 100 watt lightbulb emit in its rated lifetime of 1000 hours? What is the approximate wavelength and number of gravitons emitted when the lightbulb is dropped and broken on a cement floor?

Problem 18.18. Calculate in detail the lifetime of a hydrogen atom in the 3d state against decaying to the 1s state by gravitational radiation.

Problem 18.19. By symmetry, the thermal graviton flux from a spherically symmetric star is evidently isotropic; reconcile this fact with Birkhoff's theorem. Approximately what is the multipolarity 2^ℓ of the flux ($\ell = 1 =$ dipole, etc.) for a typical star, such as our sun.

Problem 18.20. Consider the following "gravitational wave modes" representing a gravitational wave travelling in the z direction

$\Psi_2 = -\frac{1}{6}\mathrm{R}_{z0z0}$

$\Psi_4 = R_{y0y0} - R_{x0x0} + 2iR_{x0y0}$

$\Psi_3 = \frac{1}{2}\left(-\mathrm{R_{x0z0}} + \mathrm{iR_{y0z0}}\right)$

$\bar{\Psi}_4 = R_{y0y0} - R_{x0x0} - 2iR_{x0y0}$

$\bar{\Psi}_3 = \frac{1}{2}\left(-\mathrm{R_{x0zO}} - \mathrm{iR_{y0zO}}\right)$

$\Phi_{22} = -\left(R_{x0x0} + R_{y0y0}\right).$

Which of these waves are transverse?

The spin of a wave indicates (among other things) the relation of the orientation of polarization states. For a spin 0 (scalar) wave the manifestations of the wave are symmetric about the direction of propagation. For a spin 1 (vector) wave (e.g. an electromagnetic wave) the independent polarization states are oriented at 90° to each other; a rotation of 180° returns to the original polarization state, with only a sign change. In general for a spin s wave a rotation of π/s brings back the original polarization state. Which of the waves above are spin 0? Spin 1? Spin 2? Which are possible in general relativity?

Problem 18.21. Draw the force field of each of the modes in the preceding problem.

Rioblem 18.22. Consider the metric $\mathrm{ds^2 = dx^2 + dy^2 - dudv + 2H(x, y, u)du^2}$. Tat form must the function H have for this to represent a (strong) plane mavitational wave propagating in vacuum?

18: Solutions

Solution 18.1. To find the gravitational radiation we use the square of the third time derivative of the quadrupole moment

$$\text{Power } = \frac{G}{5c^5}(\dddot{\Psi})^2 \sim \frac{GM^2L^4}{5c^5t^6}.$$

The appropriate parameters for the mean Massachusetts motorist: M = mass of fist and forearm $\sim 2 \times 10^3\mathrm{gm}$, L = length of forearm ~ 50 cm, t = period of average shake $\sim .2$sec. The calculation in cgs units then yields a radiative power on the order of 2×10^{-43}ergs/sec.

To calculate his total energy expended, use the fact that muscles are almost totally nonconservative, so every shake uses up an energy roughly equal to the arms maximum kinetic energy:

$$\text{Power } = \frac{1}{2}M\frac{L^2}{t^2}\cdot\frac{1}{t} \approx 3\times 10^8 \text{erg/sec.}$$

The fractional "efficiency" is thus $\sim 10^{-51}$.

Solution 18.2. The gravitational binding energy of the system is of order M^2/R and the kinetic energy is of order MR^2/T_{dyn}^2, where T_{dyn} characterizes motions of the system. For a system in equilibrium the virial theorem gives

$$\mathrm{T_{dyn}^2 \sim R^3/M.}$$

The rate at which energy is radiated gravitationally is governed by the square of the third time derivative of the quadrupole moment or roughly

$$\mathrm{P^{GW} \sim M^2R^4/T_{dyn}^6}$$

The time for radiation reaction to affect the system is the time it takes to radiate a significant fraction of its energy as gravitational waves:

$$T = \frac{K\cdot E\cdot}{P^{GW}} \sim \frac{T_{dyn}^4}{MR^2} \sim \frac{RT_{dyn}^2}{M^2}.$$

The ratio of this gravitational wave characteristic time to the dynamical time is then of order

$$\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T_{dyn}}} \sim \frac{\mathrm{RT_{dyn}}}{\mathrm{M^2}} \sim \left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{M}}\right)^{\frac{5}{2}}$$

Evidently gravitational radiation reaction forces play an appreciable role only in relativistically compact systems.

Solution 18.3. The three independent orientations of the dipole correspond to the three components of a three dimensional vector. Since the quadrupole is a second rank, three dimensional tensor (9 component) which is symmetric (3 constraints) and traceless (1 constraint) there are five independent "orientations." An example of five independent quadrupole tensors is the five tensors with all components zero except:
(i) $\mathrm{I_{zz} = -\frac{1}{2}I_{xx} = -\frac{1}{2}I_{yy} = 1}$
(ii) $\mathrm{I_{yy} = -\frac{1}{2}I_{xx} = -\frac{1}{2}I_{zz} = 1}$
(iii) $\mathrm{I_{xy} = I_{yx}}$
(iv) $\mathrm{I_{xz} = I_{zx}}$
(v) $\mathrm{I_{yz} = I_{zy}}$.

Solution 18.4. Assume the rod to be in the xy plane rotating about the z axis. If μ is the mass per unit length of the rod the time dependent parts of the reduced quadrupole tensor are

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \mu\cos^2(\omega t)\cdot 2\int_0^{l/2} x^2 dx \\ &= \frac{\mu l^3}{12}\cos^2\omega t = \frac{M^2}{24}\cos(2\omega t) + \text{ constant} \\ \Psi_{yy} &= -\frac{M\ell^2}{24}\cos 2\omega t + \text{ constant} \\ \Psi_{xy} &= \Psi_{yx} = \frac{M\ell^2}{24}\sin 2\omega t \end{aligned}$$

so that

$$\begin{aligned} \mathrm{L_{GW}} &= \frac{1}{5}\left\langle \dddot{\Psi}_{\mathrm{jk}}\dddot{\Psi}_{\mathrm{jk}}\right\rangle = \frac{(2\omega)^6}{5}\left(\frac{\mathrm{M}\ell^2}{24}\right)^2\left\langle 2\cos^2 2\omega\mathrm{t} + 2\sin^2 2\omega\mathrm{t}\right\rangle \\ &= \frac{2}{45}\omega^6\mathrm{M}^2\ell^4. (\text{ Note units with G = c = 1!}) \end{aligned}$$

To calculate the charge centrifuged to the ends of the bar, balance electrostatic and centripetal forces:

$$|e\nabla\Phi| = rm\omega^2,$$

where Φ is the electrostatic potential and e and m are the charge and mass of an electron. Thus the charge density induced will be of order

$$\rho \sim -\nabla^2\Phi \sim -(\mathrm{m/e})\omega^2$$

This charge depletion in the main part of the rod will of course be balanced by electrons squashed against the ends with charge $(\mathrm{m/e})\omega^2\ell$ A where A = rod cross section. The rod thus becomes an electric quadrupole

with quadrupole moment of order $(\mathrm{m/e})\omega^2\ell^3$ A. The electric quadrupole radiation due to this induced moment will be roughly ω^6 times the square of the quadrupole moment, or roughly $\omega^{10}(\mathrm{\ m/e})^2\ell^6\ \mathrm{A}^2$. The ratio of electromagnetic damping to gravitational damping is then

$$\frac{L_{EM}}{L_{GW}} \sim \frac{\omega^{10}(\mathrm{\ m/e})^2\ell^6 A^2}{\omega^6\rho^2 A^2\ell^6} = \left[\frac{(\mathrm{m/e})^2\omega^2}{\rho}\right]^2$$

In G = c = 1 units $(\mathrm{m/e}) \approx \frac{1}{2}\times 10^{-21}$ and $\rho\left(10\ \mathrm{g/cm^3}\right) \approx 10^{-27}$ and $\omega\left(1\mathrm{kH}_z\right) \approx \frac{1}{3}\times 10^{-7}$ so that

$$\mathrm{L_{EM}/L_{GW}} \sim 10^{-18}$$

For once gravitational radiation wins out.
Solution 18.5. The radiation reaction force on an element of the source is

$$\mathrm{dF_i} = -\Phi_{,\mathrm{i}}\rho\ \mathrm{d^3x}$$

The rate at which the source element loses energy is the rate at which the reaction forces do work on the source element: $v^i dF_i$ where v is the Welocity of the source element. For the whole source, then

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{dt}} = -\int \Phi_{,\mathrm{i}}\mathrm{v^i}\rho\ \mathrm{d^3x} = \int \Phi\left(\mathrm{v^i}\rho\right)_{,\mathrm{i}}\ \mathrm{d^3x}$$

Here we have used Gauss' divergence theorem and evaluated the surface integral on a surface outside the source to obtain the second equality. The equation of continuity tells us that $\underset{\sim}{\nabla}\cdot(\mathrm{v}\rho) = -\partial\rho/\partial\mathrm{t}$ so

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{dt}} &= -\int \Phi\frac{\partial\rho}{\partial\mathrm{t}}\ \mathrm{d^3x} = -\frac{1}{5}\mathrm{f^{(5)}_{jk}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int \mathrm{x^j x^k}\rho\ \mathrm{d^3x}\\ &= -\frac{1}{5}\mathrm{f^{(5)}_{jk}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(-\mathrm{F_{jk}} + \frac{1}{3}\delta_{\mathrm{jk}}\int \mathrm{r^2}\rho\ \mathrm{d^3x}\right)\end{aligned}$$

Since $\mp_{jk}\delta_{jk} = 0$, we drop the final term to arrive at

$$\mathrm{dE/dt} = -\left(\frac{1}{5}\right)\mathrm{I^{(5)}_{jk}}\dot{\mathrm{f}}_{\mathrm{jk}}$$

Now we time average over several oscillations. Since secular changes in parameters of the source are assumed to be small over the several oscilla-
tions, we have

$$\frac{1}{T}\int_0^T \Psi^{(5)}_{jk}\dot{x}_{jk}dt \approx \frac{1}{T}\int_0^T \dddot{x}_{jk}\dddot{x}_{jk}dt$$

and

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{5} < \dddot{t}_{jk}\dddot{t}_{jk} >$$

To find the rate of loss of angular momentum we use the fact that for an element of the source

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{dt}} = \text{ radiation reaction torque } = \mathbf{r}\times\mathrm{dF} = -\mathbf{r}\times\nabla\Phi\rho\mathrm{d^3x}$$

and for the whole source

$$\begin{aligned}\frac{dJ^i}{dt} &= -\varepsilon^{ijk}\int x^j\Phi,k\rho d^3x\\ &= -\varepsilon^{ijk}\int x^j\left(\frac{2}{5}f^{(5)}_{km}x^m\right)\rho d^3x\\ &= -\frac{2}{5}\varepsilon^{ijk}f^{(5)}_{km}\int x^j x^m\rho d^3x = -\frac{2}{5}\varepsilon^{ijk}f^{(5)}_{km}f_{jm}\end{aligned}$$

Time averaging, and integrating (in time) by parts as above gives us

$$\frac{dJ^i}{dt} = -\frac{2}{5}\varepsilon^{ijk} < \dddot{\Psi}_{km}\dddot{\Psi}_{jm} >$$

Solution 18.6. Let $\mathrm{m_1},\ \mathrm{m_2}$ and $\mathrm{r_1}, \mathrm{r_2}$ be respectively the masses, and distances from the center of mass, of the two stars rotating at angular frequency ω. From Newtonian mechanics we know that $r_1m_1 = r_2m_2 = R\mu$, where $R \equiv r_1 + r_2$ and μ = reduced mass $= m_1m_2/\left(m_1 + m_2\right)$. The total energy of the stars can now be written as a function of M, R, and μ :

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\mathrm{r_1^2\ m_1} + \frac{1}{2}\mathrm{r_2^2\ m_2}\quad \omega^2 - \frac{\mathrm{m_1\ m_2}}{\mathrm{R}} = \frac{1}{2}\omega^2\mathrm{R}\mu - \frac{\mu\mathrm{M}}{\mathrm{R}} = -\frac{1}{2}\frac{\mu\mathrm{M}}{\mathrm{R}}.$$

Here $M = m_1 + m_2$ and Kepler's laws have been used.
The power dissipated as gravitational waves is easily calculated once the reduced quadrupole moment,

$$\mathbf{I_{jk}} \equiv \int \rho \left(\mathrm{x_j x_k} - \frac{1}{3}\mathrm{r}^2 \delta_{\mathrm{jk}} \right) \mathrm{d}^3\mathrm{x}$$

is evaluated. Note that the "reducing term" $\int \frac{1}{3}\rho \mathrm{r}^2 \delta_{\mathrm{jk}} \mathrm{d}^3\mathrm{x}$ will be constant in time and can be ignored. Suppose the z axis to be the axis of
rotation and ϕ the azimuthal angle from the x-axis to the line joining the stars, then (aside from time independent terms) we have

$$I_{xx} = \left(r_1^2 m_1 + r_2^2 m_2 \right) \cos^2 \phi = \frac{1}{2} R^2 \mu \cos 2\phi + \text{ constant}$$

$$I_{yy} = -\frac{1}{2} R^2 \mu \cos 2\phi + \text{ constant}$$

$$I_{xy} = I_{yx} = \frac{1}{2} R^2 \mu \sin 2\phi$$

Since $\phi = \omega \mathrm{t}$, it is straightforward to differentiate three times, perform the sum $\dddot{\Psi}_{jk} \dddot{\Psi}_{jk}$ and time average to find

$$\frac{1}{5} < \dddot{\Psi}_{\mathrm{jk}} \dddot{\Psi}_{\mathrm{jk}} > = \frac{1}{5}(2\omega)^6 \left(\frac{1}{2}\mathrm{R}^2 \mu \right)^2 < \sin^2 2\omega\mathrm{t} + \sin^2 2\omega\mathrm{t} + 2\cos^2 2\omega\mathrm{t} >$$

$$= \frac{32}{5}\omega^6 \mathrm{R}^4 \mu^2 = \frac{32}{5}\frac{\mathrm{M}^3 \mu^2}{\mathrm{R}^5} = \mathrm{P_{GW}}$$

Since this power is radiated at the expense of orbital energy, it follows that

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{dt}} = \frac{1}{2}\frac{\mu \mathrm{M}}{\mathrm{R}^2}\frac{\mathrm{dR}}{\mathrm{dt}} = -\mathrm{P_{GW}} = -\frac{32}{5}\frac{\mathrm{M}^3 \mu^2}{\mathrm{R}^5}$$

The resulting differential equation

$$R^3 \frac{dR}{dt} = -\frac{64}{5} M^2 \mu$$

is easily integrated to give

$$R^4 = -(256/5) M^2 \mu t + \text{ constant}$$

If we denote by t_0 the time at which the separation goes to zero according to this formula, then

$$R^4 = \frac{256}{5} M^2 \mu \left(t_0 - t \right)$$

We can find the time t_0 by noting that at $t = 0, R$ must be the present separation R_{now} , thus

$$t_0 = \frac{5 R_{\mathrm{now}}^4}{256 M^2 \mu}$$

Solution 18.7. In terms of the total orbital energy E and angular momentum L, the semimajor axis and eccentricity are

$$a = -m_1 m_1 / 2E \tag{1}$$

$$e^2 = 1 + \frac{2EL^2 \left(m_1 + m_2 \right)}{m_1^3 m_2^3} \tag{2}$$

so that

$$\frac{\mathrm{da}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{m_1\ m_2}}{2\mathrm{E}^2}\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{dt}} \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{de}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{m_1 + m_2}}{\mathrm{m_1^3\ m_2^3 e}} \left(\mathrm{L}^2 \frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{dt}} + 2\mathrm{EL}\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{dt}} \right). \tag{4}$$

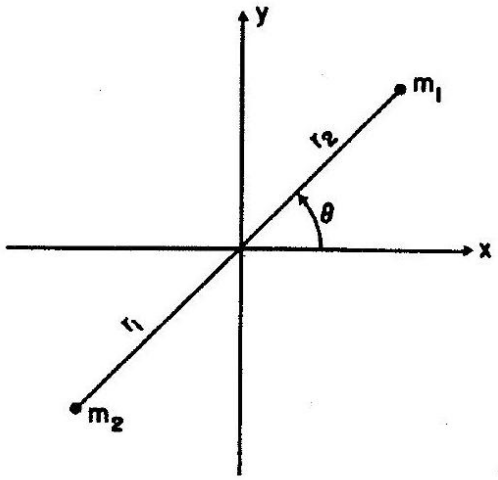
If the separation of the two particles is r, where

$$r = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{1 + e\cos\theta} \tag{5}$$

(see figure), then

$$\mathrm{r_1} = \frac{\mathrm{m_2}}{\mathrm{m_1 + m_2}}\mathrm{r}$$
$$\mathrm{r_2} = \frac{\mathrm{m_1}}{\mathrm{m_1 + m_2}}\mathrm{r}$$

so the components of the quadrupole tensor are
$I_{xx} = m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} r^2 \cos^2\theta$



$$I_{yy} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \sin^2\theta$$
$$I_{xy} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \sin\theta\cos\theta \tag{6}$$
$$I \equiv I_{xx} + I_{yy} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} t^2.$$

According to the Newtonian equations of motion

$$\dot{\theta} = \frac{\left[(\mathrm{m_1 + m_2})\,\mathrm{a}\left(1 - \mathrm{e}^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{r}^2} \tag{7}$$

so Equation (5) gives

$$\dot{\mathrm{r}} = \mathrm{e}\sin\theta\left[\frac{\mathrm{m_1 + m_2}}{\mathrm{a}\,(1 - \mathrm{e}^2)}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Now we compute the successive time derivatives of $\mathrm{I_{ij}}$, using Equations (5), (7) and (8) to simplify the expressions. The results are

$$\dot{I}_{xx} = \frac{-2m_1 m_2 r\cos\theta\sin\theta}{\left[(m_1 + m_2)\,a\,(1 - e^2)\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{9}$$
$$\ddot{I}_{xx} = \frac{-2m_1 m_2}{a\,(1 - e^2)}\left(\cos 2\theta + e\cos^3\theta\right) \tag{i0}$$
$$\ldots \tag{11}$$
$$\dot{I}_{xx} = \frac{2m_1 m_2}{a\,(1 - e^2)}\left(2\sin 2\theta + 3e\cos^2\theta\sin\theta\right)\dot{\theta} \tag{12}$$
$$\dot{I}_{yy} = \frac{2m_1 m_2}{\left[(m_1 + m_2)\,a\,(1 - e^2)\right]^{\frac{1}{2}}} r(\sin\theta\cos\theta + e\sin\theta) \tag{13}$$
$$\ddot{I}_{yy} = \frac{2m_1 m_2}{a\,(1 - e^2)}\left(\cos 2\theta + e\cos\theta + e\cos^3\theta + e^2\right) \tag{14}$$
$$\ldots$$
$$\dddot{I}_{yy} = \frac{-2m_1 m_2}{a\,(1 - e^2)}\left(2\sin 2\theta + e\sin\theta + 3e\cos^2\theta\sin\theta\right)\dot{\theta}$$

$$\dot{I}_{xy} = \frac{m_1 m_2 r\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta + e\cos\theta\right)}{\left[\left(m_1+m_2\right)a\left(1-e^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{15}$$

$$\ddot{I}_{xy} = \frac{-2m_1 m_2}{a\left(1-e^2\right)}\left(\sin 2\theta + e\sin\theta + e\sin\theta\cos^2\theta\right) \tag{16}$$

$$\dddot{I}_{xy} = \frac{-2m_1 m_2}{a\left(1-e^2\right)}\left(2\cos 2\theta - e\cos\theta + 3e\cos^3\theta\right)\dot{\theta} \tag{17}$$

$$\dddot{I} = \dddot{I}_{xx} + \dddot{I}_{yy} = \frac{-2m_1 m_2 e\sin\theta\dot{\theta}}{a\left(1-e^2\right)}. \tag{18}$$

The rate of loss of energy is then:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= -\frac{1}{5}\dddot{I}_{jk}\dddot{I}_{jk} = -\frac{1}{5}\left(\dddot{I}_{jk}\bar{I}_{jk} - \frac{1}{3}\ddot{I}^2\right)\\ &= -\frac{1}{5}\left(\dddot{I}^2_{xx} + 2\dddot{I}^2_{xy} + \dddot{I}^2_{yy} - \frac{1}{3}\ddot{I}^2\right)\\ &= \frac{-8m_1^2 m_2^2}{15a^2\left(1-e^2\right)^2}\left[12(1+e\cos\theta)^2 + e^2\sin^2\theta\right]\dot{\theta}^2\end{aligned}$$

where we have used Equations (9)-(18) and straightforward algebraic simplifications. Now we must average over an orbit. The period of an orbit is (Kepler's third law)

$$\mathrm{T} = \int_0^{2\pi}\frac{1}{\dot{\theta}}\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi \mathrm{a}^{\frac{3}{2}}}{\left(\mathrm{m}_1+\mathrm{m}_2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

so that

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{dt}}\right\rangle &= \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{dt}}\mathrm{dt} = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{dt}}\frac{1}{\dot{\theta}}\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{-32}{5}\frac{\mathrm{m}_1^2\,\mathrm{m}_2^2\left(\mathrm{m}_1+\mathrm{m}_2\right)}{\mathrm{a}^5\left(1-\mathrm{e}^2\right)^{7/2}}\left(1+\frac{73}{24}\mathrm{e}^2+\frac{37}{96}\mathrm{e}^4\right)\end{aligned} \tag{19}$$

Similarly, the rate of loss of angular momentum is

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} =& \frac{-2}{5}\varepsilon_{zij}\ddot{I}_{ik}\dddot{I}_{kj} = \frac{-2}{5}\varepsilon_{zij}\ddot{I}_{ik}\dddot{I}_{kj}\\ =& \frac{-2}{5}\left[\ddot{I}_{xy}\left(\dddot{I}_{yy} - \dddot{I}_{xx}\right) + \dddot{I}_{xy}\left(\ddot{I}_{xx} - \ddot{I}_{yy}\right)\right]\\ =& \frac{-8}{5}\frac{m_1^2 m_2^2}{a^2\left(1-e^2\right)^2}\left[4 + 10e\cos\theta + e^2\left(9\cos^2\theta - 1\right)\right.\\ &\left. + e^3\left(3\cos^3\theta - \cos\theta\right)\right]\dot{\theta}\end{aligned}$$

thich when time averaged gives us

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{dt}}\right\rangle &= \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{dt}}\frac{1}{\dot{\theta}}\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{-32}{5}\frac{\mathrm{m}_1^2\,\mathrm{m}_2^2\left(\mathrm{m}_1+\mathrm{m}_2\right)^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{a}^{7/2}\left(1-\mathrm{e}^2\right)^2}\left(1+\frac{7}{8}\mathrm{e}^2\right)\end{aligned} \tag{20}$$

From Equations (3) and (4) we have, finally:

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = \frac{2a^2}{m_1 m_2} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle$$
$$= \frac{-64}{5} \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{a^3 (1 - e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4\right) \tag{21}$$
$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \left[\frac{a(1 - e^2)}{m_1 + m_2} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle - \frac{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} (m_1 + m_2)^{\frac{1}{2}}} \left\langle \frac{dL}{dt} \right\rangle \right]$$
$$= \frac{-304}{15} \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2) e}{a^4 (1 - e^2)^{5/2}} \left(1 + \frac{121}{304} e^2\right) \tag{22}$$

From Equation (22) we see that de/dt is negative, so the eccentricity decreases because of radiation reaction.

If we put e = 0 in Equation (21), we recover the results of Problem 18.6. For the integration of Equations (21) and (22) when e ≠ 0, see P. C. Peters, Phys. Rev. 136, 1224 (1964).

Solution 18.8. The Ricci tensor for the wave must vanish. By contracting the result in Problem 13.13, we have then

$$0 = 2\mathrm{R}_{\mu\nu} = \mathrm{h}^{\alpha}_{\nu,a\mu} + \mathrm{h}^{\alpha}_{\mu,a\nu} - \mathrm{h}^{;a}_{\mu\nu a} - \mathrm{h}_{,\mu\nu}.$$

Since the perturbations are functions of $u = t - x$, the third term $\Box h_{\mu\nu}$ automatically vanishes and the components R_{22}, R_{23}, R_{33} automatically vanish. For $\mu, \nu = 0, 2$ we find

$$\frac{d^2}{du^2} \left(h^0_2 - h^1_2\right) = 0.$$

From this we conclude $\mathrm{h}^0_2 = \mathrm{h}^1_2$. [The integration constants are of no consequence; they are not wavelike; they carry no energy, and since they make no contribution to the Riemann tensor, they are gauge removable.] Similarly we have

$$\mathrm{h}^0_3 = \mathrm{h}^1_3 \quad \text{from} \quad \mu, \nu = 0, 3$$
$$\mathrm{h}^0_0 - \mathrm{h}^1_0 = \frac{1}{2}\,\mathrm{h} \quad \text{from} \quad \mu, \nu = 0, 0$$
$$\mathrm{h}^2_2 + \mathrm{h}^3_3 = 0 \quad \text{from} \quad \mu, \nu = 1, 0.$$

Other choices of $\mu\nu$ give no further, independent relations.

These four constraints leave us with six independent components of $\mathrm{h}_{\alpha\beta}$. A gauge transformation of the form $\xi_\mu(\mathrm{t} - \mathrm{x})$ leaves the $\mathrm{h}_{\alpha\beta}$ as functions only of $\mathrm{t} - \mathrm{x}$ and hence does not invalidate our four constraints above. We choose then a gauge transformation of this type which annihilates $h_{00}, h_{11}, h_{02}, h_{03}$ and which leaves us with only the quantities $h_{23} = h_{32}$ and $h_{22} - h_{33}$ which are invariant for such a transformation. The explicit form of the gauge transformation is

$$\xi_0(\mathrm{u}) = \tfrac{1}{2}\int^{\mathrm{u}} \mathrm{h}_{00}(\tilde{\mathrm{u}})\mathrm{d}\tilde{\mathrm{u}} \quad \xi_1(\mathrm{u}) = -\tfrac{1}{2}\int^{\mathrm{u}} \mathrm{h}_{11}(\tilde{\mathrm{u}})\mathrm{d}\tilde{\mathrm{u}}$$
$$\xi_2(\mathrm{u}) = \int^{\mathrm{u}} \mathrm{h}_{02}(\tilde{\mathrm{u}})\mathrm{d}\tilde{\mathrm{u}} \quad \xi_3(\mathrm{u}) = \int^{\mathrm{u}} \mathrm{h}_{03}(\tilde{\mathrm{u}})\mathrm{d}\tilde{\mathrm{u}}$$

Now we consider whether these are the same components as we would get by projecting out the transverse traceless part of the perturbation. Since we have $h = h^0_0 + h^1_1$ projecting out the transverse part is equivalent to projecting out the TT part. But projecting out the transverse part leaves h_{22}, h_{23}, h_{33} invariant, as did our gauge transformation. Thus we get the same components either way.

Solution 18.9. Let the z axis be the symmetry axis and let ϕ be the cyclic axial coordinate. At an instant of time, t = constant, in the asymptotically flat region far outside the sources through which the waves are propagating, the angular momentum inside a closed 2-surface $\mathrm{r} = \mathrm{r}_1$ is (by symmetry only an axial component)

$$\mathrm{J}_1 = -(16\pi)^{-1} \oint_{\mathrm{r}=\mathrm{r}_1} \xi^{\mu;\nu} \mathrm{d}^2\Sigma_{\mu\nu} \tag{1}$$

where $\boldsymbol{\xi} = \partial/\partial\phi$. (See Problem 16.23. The proof goes through even if there is no time Killing vector and even in the presence of waves since waves modify only the space-space parts of the metric - see MTW, Equation 19.5.) Similarly, the angular momentum inside a closed 2 -surface $r = r_2\,(r_2 > r_1)$ is

$$\mathrm{J}_2 = -(16\pi)^{-1} \oint_{\mathrm{r}=\mathrm{r}_2} \xi^{\mu;\nu} \mathrm{d}^2\Sigma_{\mu\nu} \tag{2}$$

Thus the angular momentum of the waves between r_1 and r_2 is

$$\mathrm{J}_2 - \mathrm{J}_1 = -(16\pi)^{-1} \oint_{\mathrm{r}=\mathrm{r}_2} \xi^{\mu;\nu} \mathrm{d}^2\Sigma_{\mu\nu} + (16\pi)^{-1} \oint_{\mathrm{r}=\mathrm{r}_1} \xi^{\mu;\nu} \mathrm{d}^2\Sigma_{\mu\nu}$$
$$= \int_{\mathrm{r}_1 \le \mathrm{r} \le \mathrm{r}_2} \mathrm{T}^{\mu}{}_{\nu} \xi^{\nu} \mathrm{d}^3\Sigma_{\mu}$$

where we have used Stokes' theorem as in Solution 16.23. Since $T^{\mu}{}_{\nu}$ vanishes for $r_1 \leq r \leq r_2, J_2 - J_1$ is zero and so the angular momentum flux of the waves vanishes.

Solution 18.10. A plane wave propagating in the z-direction can be described at the position of a detector by

$$h_{xx} = -h_{yy} = \mathrm{Re}\left\{A_+ e^{-i\omega t}\right\} \quad h_{xy} = h_{yx} = \mathrm{Re}\left\{A_x e^{-i\omega t}\right\}.$$

If the plane wave is monochromatic (and hence 100% polarized) $\mathrm{A}_+$and A_X will be constant. More generally if we are considering waves in a narrow bandwidth about ω, $\mathrm{A}_+$and $\mathrm{A}_\times$will be slow functions of time (i.e. slow compared to the wave oscillations). Since the intensity is proportional to the absolute squares of the A's we can define a polarization tensor

$$\rho_{ab} \equiv \frac{\langle A_a A_b^* \rangle}{|A_+|^2 + |A_x|^2}$$

in analogy with the electromagnetic approach. [See for example Landau and Lifschitz, p. 122 ff.] Following this analogy further we notice that this matrix is hermitean with a unit trace so we can write it as

$$\rho_{\mathrm{ab}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\xi_3 & \xi_1 - \mathrm{i}\xi_2 \\ \xi_1 + \mathrm{i}\xi_2 & 1-\xi_3 \end{bmatrix}.$$

As in electromagnetism ξ_1, ξ_2, ξ_3 will be called the Stokes parameters of the wave. [Note: Some authors call these the normalized Stokes parameters.]

These parameters characterize the polarization state of the wave. To get insight into the meaning of the parameters, let us consider a mixture of (1) unpolarized waves, (2) circularly polarized waves, and (3) linearly polarized waves with an orientation rotated about the x and y axis by an angle ψ. Mathematically these three cases correspond to superpositions of

(1) $\mathrm{A}_+ = \mathrm{G}_1(\mathrm{t}) \quad \mathrm{A}_\mathrm{X} = \mathrm{G}_2(\mathrm{t})$ with $\left\langle |\mathrm{G}_1(\mathrm{t})|^2 \right\rangle = \left\langle |\mathrm{G}_2(\mathrm{t})|^2 \right\rangle \equiv \left\langle |\mathrm{G}|^2 \right\rangle$ and with $\langle G_1(t) G_2^*(t) \rangle = 0$

(2) $\mathrm{A}_+ = \mathrm{H}(\mathrm{t}) \quad \mathrm{A}_X = \pm \mathrm{iH}(\mathrm{t})$

(3) $A_+ = F(t)\cos 2\psi \quad A_x = F(t)\sin 2\psi.$

We assume of course that G_1, G_2, F, and H are uncorrelated. The polarization matrix is then

$$\rho = \frac{1}{\mathrm{I}}\begin{bmatrix} \left\langle |\mathrm{F}|^2 \right\rangle \cos^2 2\psi + \langle |\mathrm{G}| \rangle^2 + \langle |\mathrm{H}| \rangle^2 & \left\langle |\mathrm{F}|^2 \right\rangle \sin 2\psi \cos 2\psi \mp \mathrm{i}\left\langle |\mathrm{H}|^2 \right\rangle \\ \left\langle |\mathrm{F}|^2 \right\rangle \sin 2\psi \cos 2\psi \pm \mathrm{i}\left\langle |\mathrm{H}|^2 \right\rangle & \left\langle |\mathrm{F}|^2 \right\rangle \sin^2 2\psi + \left\langle |\mathrm{G}|^2 \right\rangle + \left\langle |\mathrm{H}|^2 \right\rangle \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{I} \equiv \left\langle |\mathrm{F}|^2 \right\rangle + 2\left\langle |\mathrm{G}|^2 \right\rangle + 2\left\langle |\mathrm{H}|^2 \right\rangle$$

so that

$$\xi_3 = \frac{1}{\mathrm{I}}\left\langle |\mathrm{F}|^2 \right\rangle \cos 4\psi \quad \xi_1 = \frac{1}{\mathrm{I}}\left\langle |\mathrm{F}|^2 \right\rangle \sin 4\psi \quad \xi_2 = \pm \frac{2}{\mathrm{I}}\left\langle |\mathrm{H}|^2 \right\rangle.$$

We see finally that the polarization properties of the radiation can be found from the Stokes parameters in a manner very similar to that of electromagnetism.

Fraction of radiation linearly polarized $= \left(\xi_3^2 + \xi_1^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Orientation of linear polarization: $\tan 4\psi = \xi_1/\xi_3$

Fraction of radiation circularly polarized $= |\xi_2|$

(ξ_2 positive for right circular polarization)

Fraction of radiation polarized $= \left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Solution 18.11. The motion is most easily analyzed in a nearly Newtonian coordinate system. The motion of the particles (and the observer) then has the form

$$\ddot{\mathrm{x}} \sim \mathrm{Rx} \sim \ddot{\mathrm{hx}}.$$

Here R denotes the magnitude of the Riemann tensor for the waves and h denotes the (dimensionless) metric perturbations for the waves. Since the waves are weak and oscillatory, the positions are fairly constant so we can integrate the equation of motion to get

$$\mathrm{x(t)} - \mathrm{x_0} = \mathrm{x_0\ h(t)} + \alpha \mathrm{t} + \beta + \mathcal{O}\left(\mathrm{h}^2\right)$$

$$\mathrm{x_0} = \text{ initial position }.$$

If we ignore the higher order corrections, we see that α and β must be zero since the particles were at rest in their initial positions before the wave burst arrived. After passage of the waves $h = 0$ and the particles must again be at rest in their initial positions.

Solution 18.12. The normal modes of the rod (taken to be oriented along the x -axis) are found from the equation

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \mathrm{t}^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial \xi}{\partial \mathrm{t}} - \mathrm{a}^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial \mathrm{x}^2} = 0. \tag{1}$$

Here $\xi(\mathrm{x},\mathrm{t})$ is the displacement of an element of the rod, τ is the damping time and a is the speed of sound. The modes are of the form

$$\xi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}}\mathrm{e}^{-\mathrm{t}/2\tau}\mathrm{u}(\mathrm{x}) \tag{2}$$

where

$$\mathrm{a}^2\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{u}}{\mathrm{dx}^2} + \left(\omega^2 + \frac{1}{4\tau^2}\right)\mathrm{u} = 0. \tag{3}$$

Since the ends of the rod are free,

$$\left.\frac{\partial\xi}{\partial x}\right|_{x=\pm L/2} = 0 \tag{4}$$

where L is the length of rod. The solutions of Equation (3) satisfying Equation (4) are

$$u_n = \begin{cases}\sin n\pi x/L, & n \text{ odd}\\ \cos n\pi x/L, & n \text{ even}\end{cases} \tag{5}$$

with frequencies $\omega_n = n\pi a/L$ if we assume $\omega_n \gg 1/\tau$.
Consider a gravitational wave propagating in the z-direction. The force field which it induces is

$$F_j = -x^k R_{j0k0}(t-z). \tag{6}$$

If we take the rod to be at $z = 0$, we must add a driving term

$$\mathrm{F}(\mathrm{t},\mathrm{x}) = -\mathrm{x}\mathrm{R}_{\mathrm{x}0\times0^0}(\mathrm{t}) \tag{7}$$

to the right-hand side of Equation (1). We can express the resulting displacement as a superposition of normal modes:

$$\xi = \sum_n B_n(t)u_n(x). \tag{8}$$

The u_n are orthogonal, so Equation (1) gives

$$\ddot{\mathrm{B}}_\mathrm{n} + \frac{1}{\tau}\,\dot{\mathrm{B}}_\mathrm{n} + \omega_\mathrm{n}^2\,\mathrm{B}_\mathrm{n} = \frac{\int_{-\frac{L}{L}/2}^{\mathrm{L}/2}\,\mathrm{Fu_n dx}}{\int_{-\mathrm{L}/2}\mathrm{u_n^2 dx}}. \tag{9}$$

Since F is antisymmetric about $x = 0$, only the modes with n odd contribute. For n odd the right hand side of Equation (9) is

$$-R_{x0x0}(t)L/\left(2\pi^2n^2\right)$$

If the rod is driven on resonance, i.e. $R_{x0x0} \sim e^{-i\omega_n t}$, Equation (9) with $B_n \sim e^{-i\omega_n t}$ gives

$$|B_n| \propto \left|\frac{r}{\omega_n n^2}\right| \propto \frac{1}{n^3}. \tag{10}$$

The energy flux F in the gravitational wave scales as $|R_{x0x0}/\omega_n|^2 \propto 1/n^2$ so

$$\text{sensitivity } \propto \frac{|B_n|^2}{1/n^2} \propto \frac{1}{n^4} \tag{11}$$

Solution 18.13. Inside the material we have

$$\mathrm{T}^{0\mu}_{\mathrm{GW},\mu} = \mathrm{T}^{0\mathrm{i}}_{\mathrm{GW,i}} = \mathrm{F}^0$$

where F^0 is the rate, per unit volume, at which external forces are doing work on the gravitational waves. Isolate a chunk of the cement of cross section A and put a Gaussian "pill box" around it. From Gauss' theorem in three dimensions we have

$$\int \mathrm{T}^{0\mathrm{i}}_{\mathrm{GW}}\ \mathrm{d}\Sigma_\mathrm{i} = \int \mathrm{T}^{0\mathrm{i}}_{,\mathrm{i}}\ \mathrm{d\ Vol.}$$

$$\left(\mathrm{T}^{0\mathrm{x}}_{\mathrm{GW}}\big|_{\mathrm{out}} - \mathrm{T}^{0\mathrm{x}}_{\mathrm{GW}}\big|_{\mathrm{in}}\right)\mathrm{A} = \int \mathrm{F}^0\ \mathrm{d\ Vol.}$$

= rate at which wave energy increases inside
= − rate at wave energy is absorbed by cement
and hence:

(rate at which momentum is absorbed (rate at which energy is absorbed per unit area per unit time) per unit area per unit time).

Solution 18.14. Take the wave to be propagating in the z-direction and the molecular displacement to be in the x-direction. If ξ is the displacement of the molecule, the equation of geodesic deviation gives us a dynamical equation for the molecule's motion. In a complex representation, the equation is the real part of

$$\ddot{\xi} + \Gamma\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = -\mathrm{R}^{\mathrm{x}}_{0\mathrm{x}0}\mathrm{X}_0 = \frac{1}{2}\,\ddot{\mathrm{h}}_{\mathrm{xx}}\mathrm{X}_0$$

$$\xi\left(-\omega^2 - \mathrm{i}\omega\Gamma + \omega_0^2\right) = -\frac{\omega^2}{2}\,\mathrm{h}_{\mathrm{xx}}\mathrm{X}_0 = -\frac{\omega^2}{2}\,\mathrm{A}_+\mathrm{X}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}}$$

Here ω is the frequency of the wave, $\Gamma \equiv (\text{ damping time })^{-1}$, and X_0 Is the distance in the x-direction of the equilibrium position of the molecule from the center of mass. We can easily solve for ξ,

$$\xi = \frac{1}{2}\omega^2\,\mathrm{A}_+\mathrm{X}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}}\left[\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) - \mathrm{i}\omega\Gamma\right]/\Delta$$

$$\Delta \equiv \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \omega^2\Gamma^2$$

and for $\dot{\xi}$

$$\dot{\xi} = -\frac{1}{2}\omega^3 A_+ X_0 e^{-i\omega t}\left[\omega\Gamma + i\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\right]/\Delta$$

From this we can easily evaluate the rate at which the molecule of mass m absorbs energy:

$$\begin{aligned}\langle \dot{x}F^x\rangle &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\{\dot{\xi}\}\left(F^x\right)^*\Big\} \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{(\dot{\xi})\left(-\frac{1}{2}m\omega^2 A_+^* X_0 e^{i\omega t}\right)\right\} \\ &= \frac{m\omega^6}{8}\Gamma\left|A_+\right|^2 X_0^2\end{aligned}$$

To find the momentum absorption we must recall that there is a longitudinal geodesic deviation, though it is smaller by a factor of order v/c

$$\begin{aligned}\mathrm{F}^z &= -\mathrm{mR}^z_{xx0}\mathrm{X}_0\dot{\xi} = \frac{\mathrm{m}}{2}\,\ddot{\mathrm{h}}_{xx}\mathrm{X}_0\dot{\xi} \\ &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{m}\omega^2\mathrm{X}_0\,\mathrm{Re}\left\{\,\mathrm{A}_+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}}\right\}\mathrm{Re}\{\dot{\xi}\}\end{aligned}$$

The time averaged force is then

$$\begin{aligned}\langle F^z\rangle &= \frac{1}{4}m\omega^6 X_0^2\Gamma\left\langle \mathrm{Re}\left(A_+e^{-i\omega t}\right)\cdot \mathrm{Re}\left(A_+e^{-i\omega t}\right)\right\rangle \\ &= \frac{1}{8}m\omega^6\Gamma\left|A_+\right|^2 X_0^2\end{aligned}$$

which demonstrates on a microscopic basis the reason for the result in Problem 18.13.

Solution 18.15. Consider two particles a distance d apart. Their relative velocity fluctuates under the influence of the wave by an amount $\Delta\mathrm{v} \approx \mathrm{h}\omega\mathrm{d}$. If the two particles collide during this cycle of the wave, their distance must have been of order $\mathrm{d} \sim \mathrm{v}/\omega$, so $\Delta\mathrm{v} \sim \mathrm{hv}$. On the average then, particles collide with energies fractionally larger by $(\Delta v/v)^2$ than they would in the absence of the wave. Since the collision randomizes their direction of motion, this energy is not subtracted out half a cycle later when the wave is reversed. Another effect also adds of order $(\Delta v/v)^2$ fractional energy per collision: the fact that particles moving toward each other at $\mathrm{v} + \Delta\mathrm{v}$ have a greater chance of colliding than do particles with $\mathrm{v} - \Delta\mathrm{v}$. We conclude that at temperature T every collision is, on the average, increased in energy by order $(\Delta v/v)^2 kT \sim h^2 kT$. The number of collisions per volume per time is $\mathrm{n}_0\mathrm{v}/\ell \sim (\mathrm{n}_0/\mathrm{l})\,(\mathrm{kT/m})^{\frac{1}{2}}$, where n_0 is the number density and m the mass of the particles. Thus the internal energy absorbed per volume per time is approximately

$$\frac{dE_{int}}{dt} \sim \frac{h^2}{n_0^{\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{2}}l}\left(n_0 kT\right)^{\frac{3}{2}} \sim \frac{h^2}{n_0^{\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{2}}l}E_{int}^{\frac{3}{2}} \tag{1}$$

This is integrated to give

$$E_{\mathrm{int}}^{\frac{1}{2}}(t) \sim \frac{t_0 E_{\mathrm{int}}^{\frac{1}{2}}(t=0)}{t_0 - t} \tag{2}$$

where $t_0 \sim \left(\ell/h^2\right)(\mathrm{m/kT})^{\frac{1}{2}}$. Thus, $\mathrm{E}_{\mathrm{int}} \to \infty$ in a finite time t_0; of course this does not happen: our Newtonian treatment breaks down at a time $t \sim t_0$ when the gas becomes relativistic.

The "front" of the wave loses energy at the rate given by Equation (1). Since its internal energy density is of order $\omega^2 h^2 c^2/G$, it is damped in a distance

$$\ell_{\text{damping}} \sim c r_{\text{damping}} \sim \frac{\omega^2 h^2 c^3/G}{h^2 (n_0 kT)^{\frac{3}{2}} / \left(n_0^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} \ell\right)}$$
$$\sim \ell \left(\frac{c}{V_{\text{therma}}}\right)^3 \left(\frac{\omega^2}{G m n_0}\right)$$

(The first term in parenthesis approaches unity for a relativistic gas; the second approaches unity for a wave at the "gravitational plasma frequency" of the gas.)

Solution 18.16. The characteristic quadrupole gravitational-wave power of a physical process is $\left(G/c^5\right) |\dddot{Q}|^2 \sim \left(G/c^5\right) M^2 v^4/T^2$ where M, v, T are relevant masses, velocities and times for the process. This can be conveniently written as

$$P_{GW} \sim \frac{G}{c^5} \left(\frac{M v^2}{T}\right)^2 \sim \frac{P^2}{3 \times 10^{59} \text{ergs/sec}}$$

Here P $\sim$ Mv^2/T represents the characteristic "power" of internal energy flows.

For an explosion of energy E, characteristic time τ the "internal power flow" is E/τ. If we assume that this internal power flow couples efficiently to gravitational waves, then in $c = G = 1$ units

$$\mathrm{P_{GW}} \sim (\mathrm{E}/\tau)^2$$
$$\mathrm{E_{GW}} \sim \mathrm{P_{GW}} \tau \sim \mathrm{E}^2/\tau.$$

The typical graviton emerging from this explosion will have energy $\hbar\omega \sim \hbar/\tau$ so the number of gravitons emerging will be of order

$$\mathrm{N} \sim \frac{\mathrm{E}^2/\tau}{\hbar/\tau} = \frac{\mathrm{E}^2}{\hbar} \sim \left(\frac{\mathrm{E}}{10^{16}\text{ergs}}\right)^2$$

Solution 18.17. The mass motions relevant to gravitational wave generation are the collisions of electrons with lattice points, photon scattering, etc. Since the thermal velocities of the electrons greatly exceed their drift velocity, the energy involved in a collision is of order kT . According to the analysis of Problem 18.16, the gravitational wave power generated by one electron should be $(\mathrm{kT}/\tau)^2$ where τ is the mean time between collisions of the electron with the lattice. The total energy, in gravitational waves, emitted during the bulb lifetime must then be

$$\mathrm{E_{GW}} \sim \ \mathrm{N} \left(\frac{\mathrm{kT}}{\tau}\right)^2 \ \mathrm{T_L} / \left(10^{59} \text{ ergs / sec. }\right)$$

N = number of conduction electrons in filament

$$\mathrm{T_L} = \text{ bulb life time } \sim 4 \times 10^6 \text{ seconds .}$$

The typical graviton generated should have a frequency of roughly τ^{-1} so that n, the number of gravitons is of order

$$\mathrm{n} \sim \frac{\mathrm{E_{GW}}\tau}{\hbar} \sim \frac{\mathrm{N}}{\tau\hbar} \frac{(\mathrm{kT})^2 \ \mathrm{T_L}}{10^{59}\text{ergs/sec.}}$$

For the light bulb kT must be on the order of an electron volt, since the thermal emission is primarily in the visible, and rough values of N and τ are 10^{17} electrons and 10^{-13} seconds. For these values the number of gravitons emitted during the bulb's lifetime is of order 10^{-19}.

To estimate the number of gravitons given out by the lightbulb when it is dropped, we assume that the energy of the falling light bulb is converted to kinetic energy of shattering; and we calculate the resulting production of gravitational waves according to the formula in Problem 18.16. If the light bulb weighs 20 grams and is dropped from a height of 1 meter, it gains $\sim 10^6$ ergs. Let us assume that the shattering is characterized by a time of .1 sec , so that the total power in shattering is 10^7ergs/sec. If 10% of this is relevant to quadrupole oscillations, then

$$\mathrm{P_{GW}} \sim \frac{\left(10^6 \text{ergs/sec}\right)^2}{10^{59}\text{ergs/sec}} \approx 10^{-47}\text{ergs/sec}$$
$$\mathrm{E_{GW}} \sim \mathrm{P_{GW}} \times .1\text{sec} \approx 10^{-48}\text{ergs}$$

De number of $\hbar\omega \sim \hbar/.1\text{sec} \sim 10^{-26}$ erg gravitons is then on the order 410^{-22}.

Blution 18.18. To linearized order in the gravitational field, the inter-
*Aion Hamiltonian with a system whose stress-energy tensor is $\mathrm{T}_{\mu\nu}$ is

$$\mathrm{H} = (8\pi\mathrm{G})^{\frac{1}{2}} \ \mathrm{T}_{\mu\nu}\mathrm{h}^{\mu\nu}. \tag{1}$$

3e shall use units with $c = \frac{\pi}{\pi} = 1$, so $G^{\frac{1}{2}} = 1.616 \times 10^{-33}$ cm. For the electron in the hydrogen atom,

$$\mathrm{T}_{\mu\nu} = \mathrm{m_e u_\mu u_\nu} = \frac{\mathrm{p_\mu p_\nu}}{\mathrm{m_e}}; \tag{2}$$

we work in the transverse-traceless gauge for $h^{\mu\nu}$, so

$$h_{0\mu} = 0, \quad h^{ij}_{,j} = 0 \tag{3}$$

and thus

$$\mathrm{H} = (8\pi\mathrm{G})^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{p_i p_j\ h^{ij}}}{\mathrm{m_e}}. \tag{4}$$

Since a graviton has spin 2, the decay must be to an s state. The transition matrix element from a 3 d state to a 1 s state with the emission of a graviton with wave-vector $\underset{\sim}{k}$ and polarization λ (for right-hand circular polarization $\lambda = 1$ and for left-hand circular polarization $\lambda = -1$) is

$$\mathrm{T} = \langle 1\ \mathrm{s}; \underset{\sim}{\mathrm{k}}, \lambda | \mathrm{H} | 3\ \mathrm{d}; 0 \rangle. \tag{5}$$

We now expand

$$h^{ij} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d^3k}{(2\omega)^{\frac{1}{2}}} \sum_\lambda \left(e^{-ik\cdot r} e^{ij}_{k,\lambda} a_{k,\lambda} + e^{ik\cdot r} e^{ij^*}_{k,\lambda} a^\dagger_{k,\lambda} \right). \tag{6}$$

Here ω is the frequency of the wave and e^{ij} the polarization tensor. The creation and annihilation operators satisfy the equal-time commutation relations

$$\left[\mathrm{a_{k,\lambda}}, \mathrm{a^\dagger_{k',\lambda'}} \right] = \delta^3 \left(\underline{\mathrm{k}} - \underline{\mathrm{k}}' \right) \delta_{\lambda\lambda'}$$

and so

$$\begin{aligned} a_{k,\lambda} \mid 0 > &= 0 \\ \langle \underline{k}, \lambda | a^\dagger_{k',\lambda'} | 0 \rangle &= \delta^3 \left(\underline{k} - \underline{k}' \right) \delta_{\lambda\lambda'} \end{aligned} \tag{7}$$

Using Equations (4), (6), and (7) in Equation (5), we get

$$\mathrm{T} = \frac{(8\pi\mathrm{G})^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{m_e}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{(2\omega)^{\frac{1}{2}}} \langle 1\ \mathrm{s} | \mathrm{e^{ik\cdot r} p_i p_j e^{ij*}_{k,\lambda}} | 3\ \mathrm{d} \rangle \tag{8}$$

Since $\mathrm{kr} \sim (1\mathrm{eV}) \times 10^{-8}$ cm $\sim 10^{-4}$, we can make the approximation of putting $e^{ik\cdot\tau} = 1$ (cf. the "dipole" approximation for electromagnetic transitions). The transition rate is

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Gamma &= 2\pi |\ \mathrm{T}|^2 \times \ \text{(density of final states for graviton)} \\ &= 2\pi |\ \mathrm{T}|^2 \omega^2\ \mathrm{d}\Omega \end{aligned} \tag{9}$$

where $\mathrm{d}\Omega$ is the solid angle into which the graviton is emitted. Hence

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{G\omega}{\pi m_e^2} | < 1s | p_i p_j e^{ij^*}_{k,\lambda} | 3d > |^2 \tag{10}$$

If we use the explicit form of the wave functions, the matrix element in this equation can be evaluated. Since we do not observe the spins of the initial or final states of the atom, we will sum over the final spin states and average over the initial spin states. This is most easily done by introducing the pure spin- 2 operator

$$Q_{ij} = p_i p_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} p^2 \tag{11}$$

Since $e^i_i = 0$, we can replace $p_i p_j$ by Q_{ij} in Equation (10). The spherical components of Q_{ij} are

$$\begin{aligned} Q_2 &\equiv \frac{1}{2} \left(Q_{xx} - Q_{yy} + 2iQ_{xy} \right) \\ Q_1 &\equiv Q_{zx} + iQ_{zy} \\ Q_0 &\equiv \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \left(Q_{zz} - \frac{1}{2} Q_{xx} - \frac{1}{2} Q_{yy} \right) \\ Q_{-1} &\equiv Q_{zx} - iQ_{zy} \\ Q_{-2} &\equiv \frac{1}{2} \left(Q_{xx} - Q_{yy} - 2iQ_{xy} \right) \end{aligned} \tag{12}$$

Since e_λ^{ij} has $x-y$ components (for $\lambda = \pm 1$):

$$2^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & \pm i \\ \pm i & -1 \end{bmatrix}$$

we find

$$Q_{ij} e_\lambda^{ij^*} = 2^{\frac{1}{2}} Q_{-2\lambda} \tag{13}$$

Since Q_σ has spin two, the Wigner-Eckart theorem says

$$\langle \mathrm{j_j\ m_j} | \, \mathrm{Q}_\sigma \, | \mathrm{j_i\ m_i} \rangle = \langle \mathrm{j_j} \| \mathrm{Q} \| \mathrm{j_i} \rangle \, \langle 2\sigma \mathrm{j_i\ m_i} \mid \mathrm{j_j\ m_j} \rangle \tag{14}$$

where the "reduced" matrix is defined as

$$\langle \mathrm{j_j} \| \mathrm{Q} \| \mathrm{j_i} \rangle = \sum_{\mathrm{m_i\ m_j} \sigma} \frac{1}{2\mathrm{j_j}+1} \, \langle 2\sigma \mathrm{j_i\ m_i} \mid \mathrm{j_j\ m_j} \rangle \, \langle \mathrm{j_j\ m_j} | \, \mathrm{Q}_\sigma \, | \mathrm{j_i\ m_i} \rangle \tag{15}$$

and where $\langle j m j_i m_i \mid j_j m_j \rangle$ denotes a Clebsch-Gordon coefficient. Thus Equations (13) and (14) (with the n quantum number added) give

$$\left| \langle n_j j_j m_j | \, Q_{ij} e^{ij*} \right| n_i j_i m_i \rangle \, |^2 = 2 \, |\langle n_j j_j \| Q \| n_i j_i \rangle|^2 \, |\langle 2 - 2\lambda j_i m_i \mid j_j m_j \rangle|^2$$

Now we sum over m_j and average over m_i, using

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mathrm{j_i}+1} \sum_{\mathrm{m_i\ m_j}} |< 2 - 2\lambda \mathrm{j_i\ m_i} | \, \mathrm{j_i\ m_j} > |^2 &= \frac{1}{2\mathrm{j_i}+1} \sum_{\mathrm{m_i\ m_j}} \frac{(2\mathrm{j_j}+1)}{5} \, |< \mathrm{j_j - m_j j_i\ m_i} | \, 2 - 2\lambda > |^2 \\ &= \frac{1}{5} \frac{2\mathrm{j_j}+1}{2\mathrm{j_i}+1} \end{aligned}$$

and thus

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{G\omega}{\pi m_e^2} \frac{2}{5} \frac{2j_j+1}{2j_j+1} \, |< n_j j_j \| Q \| n_i j_i >|^2 \, . \tag{16}$$

This is independent of the polarization of the graviton and of the angle of emission. The total rate is obtained by multiplying by 2 (for the two polarization states) and by 4π (solid angle), giving

$$\Gamma = \frac{G\omega}{m_e^2} \frac{16}{5} \frac{2j_j+1}{2j_i+1} \, |\langle n_j j_j \| Q \| n_i j_i \rangle|^2 \, . \tag{17}$$

The reduced matrix element can be evaluated from Equation (14) and any convenient choice of $\mathrm{m_i}$ and $\mathrm{m_j}$. For example,

$$\langle 1\ \mathrm{s} \| \mathrm{Q} \| 3\ \mathrm{d} \rangle = \frac{\langle 100 | \mathrm{Q}_0 | 320 \rangle}{\langle 2020 \mid 00 \rangle} . \tag{18}$$

The Clebsch-Gordon coefficient in Equation (18) is unity. From Equations (11) and (12),

$$\mathrm{Q}_0 = \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathrm{p_z p_z} - \frac{1}{3} \mathrm{p}^2 \right) .$$

The p^2 term does not contribute to the matrix element in Equation (18) because it cannot couple $j = 0$ to $j = 2$. Thus

$$\langle 1\ \mathrm{s} \| \mathrm{Q} \| 3\ \mathrm{d} \rangle = \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \langle 100 | \mathrm{p_z p_z} | 320 \rangle . \tag{19}$$

In general one would introduce a complete set of states to evaluate the matrix element in Equation (19) as a sum of terms of the form $\langle 100|p_z|n\rangle\langle n|p_z|320\rangle$. Since the $|100\rangle$ wave function is so simple, however, we can use

$$\mathrm{p_z} \to -\mathrm{i}\partial/\partial z$$

so

$$\begin{aligned} \mathrm{p_z^2} \to -\partial^2/\partial z^2 &= -\left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial \mathrm{r}} - \frac{\sin\theta}{\mathrm{r}} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial \mathrm{r}} - \frac{\sin\theta}{\mathrm{r}} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &= -\left(\cos^2\theta \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{r}^2} + \frac{\sin^2\theta}{\mathrm{r}} \frac{\partial}{\partial \mathrm{r}} \right) \end{aligned}$$

Sten acting on the spherically-symmetric $|100\rangle$ state. Thus

$$\begin{aligned}
320\left|\mathrm{p}_z^2\right|100\rangle =& -\int_0^\infty \mathrm{r}^2\mathrm{dr}\int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\left(\frac{5}{16\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\left(3\cos^2\theta-1\right)}{\mathrm{a}^{\frac{3}{2}}}\frac{2(30)^{\frac{1}{2}}}{955}\left(\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{a}}\right)^3\\
&\times \mathrm{e}^{-\mathrm{r}/3\mathrm{a}}\left(\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\mathrm{r}^2}+\frac{\sin^2\theta}{\mathrm{r}}\frac{\partial}{\partial\mathrm{r}}\right)\frac{1}{(4\pi)^{\frac{1}{2}}}\frac{2}{\mathrm{a}^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{r}/\mathrm{a}}\\
=&\frac{-6^{\frac{1}{2}}}{191\mathrm{a}^6}\int_0^\infty \mathrm{drr}^5\mathrm{e}^{-\frac{4\mathrm{r}}{3\mathrm{a}}}\int_0^\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta\left(3\cos^2\theta-1\right)\left(\frac{\cos^2\theta}{\mathrm{a}^2}-\frac{\sin^2\theta}{\mathrm{ra}}\right)\\
=&\frac{6^{\frac{1}{2}}}{191\mathrm{a}^6}\frac{8}{15}\int_0^\infty \mathrm{dre}^{-\frac{4r}{3\mathrm{a}}}\left(\frac{\mathrm{r}^5}{\mathrm{a}^2}+\frac{\mathrm{r}^4}{\mathrm{a}}\right)\\
=&-\frac{1}{\mathrm{a}^2}\frac{6^{\frac{1}{2}}\times 8\times 243\times 57}{191\times 15\times 2\times 256}\\
=&\frac{-.19}{\mathrm{a}^2}
\end{aligned}$$

where $\mathrm{a}=(\mathrm{m_e}\alpha)^{-1}$ is the Bohr radius and $\alpha=1/137$ is the fine structure constant.

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{\mathrm{G}\omega}{\mathrm{m_e^2}}\cdot\frac{16}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{(.19)^2}{\mathrm{a}^4}\\
&= .36\mathrm{Gm_e^2}\omega a^4.
\end{aligned}$$

Now $\mathrm{Gm_e^2}=1.75\times10^{-45}$ and $\omega=12\mathrm{eV}$ for $3\mathrm{p}\to1$ s. Thus the lifetime is $\Gamma^{-1}=1.9\times10^{38}$sec.

Solution 18.19. A star, and its thermal graviton flux are spherically symmetric only in the time averaged sense. Since a star's interior is composed of subatomic particles it is clear that, at a given time the star may be spherically symmetric to an astronomer, but to a mathematician, with his much more stringent requirements for symmetry, the star has a fine grain (atomic scale) graininess which makes all symmetry theorems inapplicable. It is, of course, the time dependence of these fine scale
particle inhomogenieties which generate gravitational (and electromagnetic radiation.

The multipolarity of the flux is related to the scale of angular asymmetries of the flux. (This should not be confused with the fact that the generation of the waves is locally quadrupole, nor with the fact that the time averaged flux is monopole - i.e. isotropic.) For a star like our Sun most of the graviton flux will be generated in the high temperature $\left(10^{7^\circ}\ \mathrm{K}\right)$, dense $\left(50\mathrm{gm/cm^3}\right)$ core. If we take as a characteristic radius of this core one quarter of the sun's radius $\sim 2\times10^{10}$ cm and the interparticle distance of 10^{-8} cm implied by the density, we see that the angular scale of asymmetry is $\sim 10^{-18}$ radians. The spherical harmonic expansion of graininess of 10^{-18} radians requires ℓ values of order 10^{18}. In this fine-grain sense then, the flux has characteristically a $2^{10^{18}}$-pole distribution.

Solution 18.20. In a nearly inertial coordinate system centered at the center of mass, the effect of the Riemann tensor, according to the equation of geodesic deviation, is to accelerate free particles in the following way

$$\frac{d^2x^j}{dt^2}=-R_{j0k0}x^k.$$

We have here ignored the velocity dependent "magnetic" type terms which are smaller by a factor v/c. (See solution to Problem 18.14.) This equation makes it clear that the Riemann tensor has a longitudinal effect if and only if one of the spatial indices of R_{j0k0} is z, the direction of wave propagation. It follows that Ψ_2,Ψ_3,Ψ_3 have longitudinal effects but that $\Psi_4,\bar\Psi_4,\Phi_{22}$ are purely transverse.

To investigate the spin of the waves, transform from x,y coordinates to new coordinates x',y' rotated about the z-axis in the positive sense by an angle ϕ. Under such a transformation the transformation for the Riemann components is, for instance

$$\begin{aligned}
\mathrm{R_{x0'z'0'}} &= \mathrm{R_{x0z0}}\cos\phi+\mathrm{R_{y0z0}}\sin\phi\\
\mathrm{R_{x'0'x'0'}} &= \mathrm{R}_{x0x0}\cos^2\phi+\mathrm{R}_{y0y0}\sin^2\phi+2\sin\phi\cos\phi\mathrm{R}_{x0y0}
\end{aligned}$$

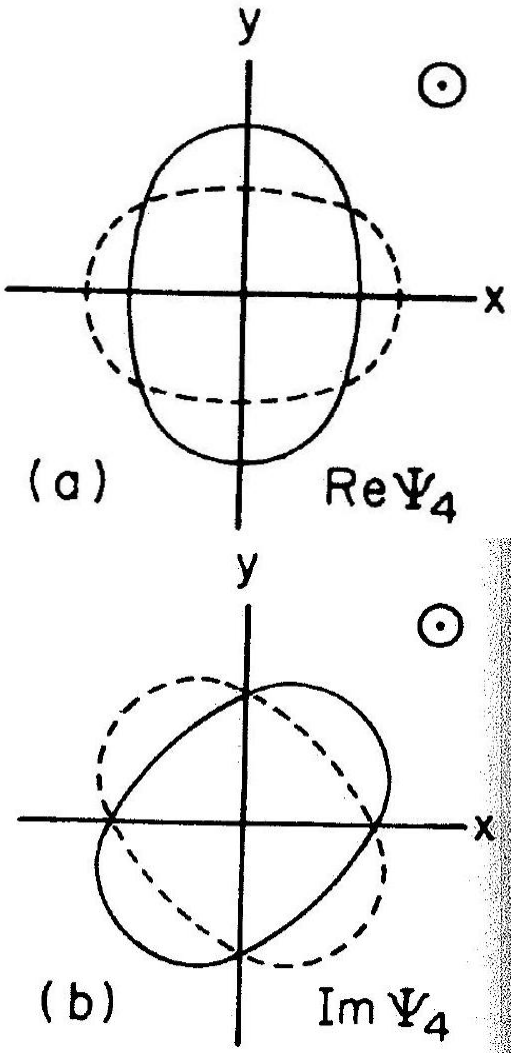
From the form of the transformation for the Riemann components, the transformation laws for the symbols defined in the problem are easily calculated:

$$\begin{aligned}
{\Psi_2}' &\equiv -\frac{1}{6}\mathrm{R}_{z'0'z'0'}=-\frac{1}{6}\mathrm{R}_{z0z0}=\Psi_2\\
\Psi_{3'} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\Psi_3\\
\bar\Psi_{3'} &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\Psi_3\\
\Psi_{4'=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\phi}\Psi_4,} &^{\Phi_{22'}=\Phi_{22}}\quad \bar\Psi_{4'=\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\phi}\bar\Psi_4}
\end{aligned}$$

Since Ψ_2 and Φ_{22} are unaffected by rotation about z, the waves are scalar (spin 0) waves. For Ψ_3 and Ψ_3, a rotation of 180° returns the wave to the same state of polarization (e.g. pure real), so these symbols must

correspond to spin 1 waves. The symbols Ψ_4 and $\bar{\Psi}_4$ need only be rotated by 90° to be in the same polarization state so they represent spin 2 waves. These symbols in fact correspond to the circular polarization states of the waves of general relativity.

Solution 18.21. In the figure are the six polarization modes of a weak, plane, null gravitational wave permitted in the generic metric theory of gravity. The figure shows the displacement that each mode induces on a sphere of test particles. The wave propagates in the $+z$-direction (arrow at upper right) and has time dependence $\cos(\omega t)$. Solid line, snapshot at $\omega t = 0$, the broken line, one at $\omega t = \pi$. There is no displacement perpendicular to the plane of the figure. The above modes are obtained by using the equation of geodesic deviation



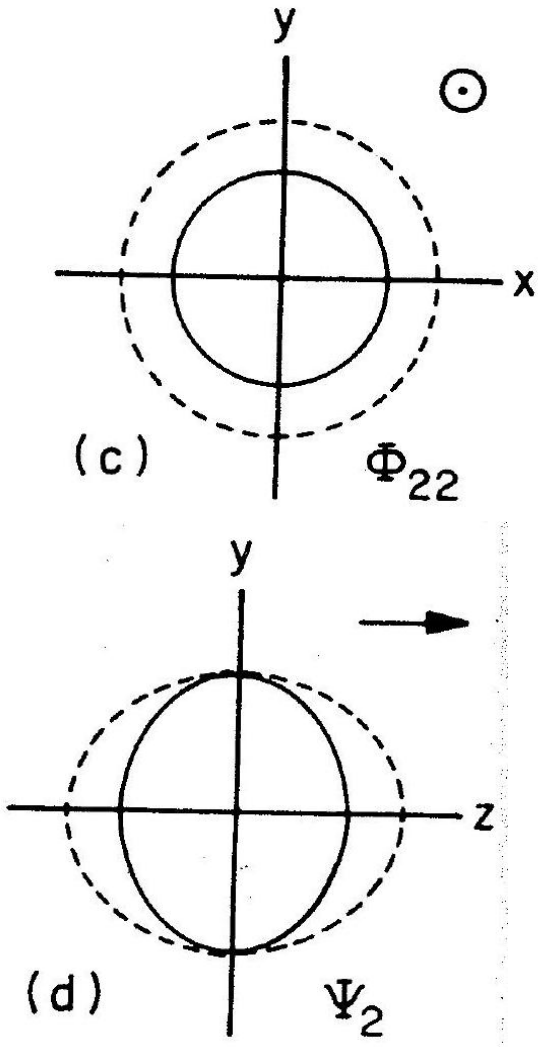
$$\frac{d^2x^k}{dt^2} \approx x^j R^k_{0j0}$$

Solution 18.22. The function H is determined by the vacuum field equations $R_{\alpha\beta} = 0$. We first compute the Christoffel symbols from the Lagrangian for geodesics (see Problem 7.25)

$$\mathrm{L} = \dot{\mathrm{x}}^2 + \dot{\mathrm{y}}^2 - \dot{\mathrm{u}}\dot{\mathrm{v}} + 2\mathrm{H}\dot{\mathrm{u}}^2.$$

From the Euler-Lagrange equation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}\left(\frac{\partial\,\mathrm{L}}{\partial\dot{\mathrm{x}}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{x}} = 0$$



we get

$$\ddot{x} + H_{,x}\dot{u}^2 = 0$$

and therefore $\Gamma^{x}{}_{uu} = H_{,x}$. Similarly $\ddot{y} + H_{,y}\dot{u}^2 = 0$ implies $\Gamma^{y}{}_{uu} = H_{,y}$ and $u = 0$ implies $\Gamma^{u}{}_{\alpha\beta} = 0$. From

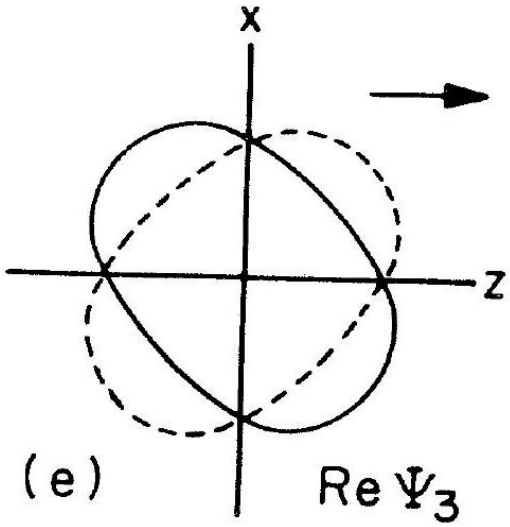
$$\ddot{v} - 2H_{,u}\dot{u}^2 - 4H_{,x}\dot{x}\dot{u} - 4H_{,y}\dot{y}\dot{u} = 0$$

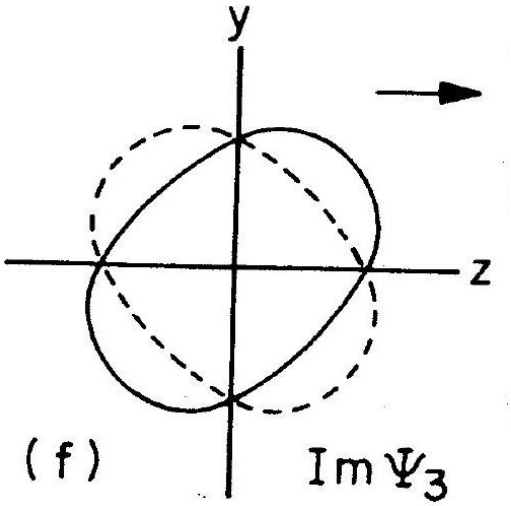
we get

$$\Gamma^{v}_{uu} = -2H_{,u} \quad \Gamma^{v}_{xu} = -2H_{,x} \quad \Gamma^{v}_{yu} = -2H_{,y}.$$

All other Γ 's are zero. In the expression (MTW, Equation 8.51b)

$$R_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta,\mu} - \left(\log(-g)^{\frac{1}{2}}\right)_{,\alpha\beta} + \left(\log(-g)^{\frac{1}{2}}\right)_{,\mu} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\Gamma^{\sigma}_{a\mu}$$





only the first term, contributes (note that $(-g)^{\frac{1}{2}} = 1$). We find the only nonzero term to be

$$\mathrm{R_{uu}} = \mathrm{H_{,xx}} + \mathrm{H_{,yy}}.$$

Any harmonic function in x and y will therefore satisfy the field equations. For a plane wave, H is a quadratic function in x and y, so that (exercise!) the Riemann tensor is a function of u alone and has no singularities in the $x - y$ plane.

13.7.19 19 Cosmology

If the universe is homogeneous and everywhere isotropic, its geometry is that of the Robertson-Walker metric

$$\mathrm{ds^2} = -\mathrm{dt^2} + \mathrm{R^2(t)}\left[\frac{\mathrm{dr^2}}{1-\mathrm{kr^2}} + \mathrm{r^2}\ \mathrm{d\Omega^2}\right]$$

where $k = +1, 0, -1$ for a closed, marginally open, or open universe. When the Einstein equations are used to determine the time development of $R(t)$ and the value of k, the resulting spacetime is called a Friedmann model (sometimes called a Lematre model, especially for nonzero cosmological constant). The first two derivatives of $R(t)$ at the present epoch (denoted by subscript 0) are parameterized by the Hubble constant

$$\mathrm{H_0} \equiv (\mathrm{dR/dt})/\mathrm{R} \text{ at } \mathrm{R} = \mathrm{R_0}$$

and the "deceleration parameter"

$$\mathrm{q_0} \equiv -\left[\left(\mathrm{d^2R/dt^2}\right)\mathrm{R}\right]/(\mathrm{dR/dt})^2 \text{ at } \mathrm{R} = \mathrm{R_0}$$

The matter in a cosmology is generally in a state of expansion or contraction, so that light received by an observer is generally red- or blueshifted relative to its source by an amount z,

$$1 + z \equiv \frac{\nu_{\text{emitted}}}{\nu_{\text{observed}}} = \frac{\lambda_{\text{observed}}}{\lambda_{\text{emitted}}}$$

Often the magnitude of z varies monotonically with distance from an observer so one speaks of "an object at redshift z."

If ρ and p are the density and pressure of the smoothed-out massenergy content of the universe, the universe is said to be "matter domimated" when $\rho \gg \mathrm{p}$, and "radiation dominated" when $\mathrm{p} \approx \frac{1}{3}\rho$.

The 3.°K black-body "cosmic microwave background," when extrapolated back in time, implies high temperatures at early times in the Friedmann model, a "hot big bang." However it is also possible that the large "entropy per baryon" implied by this radiation was generated by some dissipative process during the evolution of our universe.

Problem 19.1. Show that the equations of Newtonian gravity and hydroDuamics do not admit a cosmology which is isotropic, homogeneous, and tatic (i.e. an unchanging universe filled with a uniform perfect fluid).

Problem 19.2. A spacetime contains no matter and is everywhere isotropic. strove that it is flat Minkowski space.

Problem 19.3. An object emits black body radiation of temperature T in us own rest frame; we see it at a redshift z and subtending a solid angle Ω. What flux do we measure? What if the redshift is due to doppler sotion of a local object instead of a cosmological redshift?

Problem 19.4. Homogeneous, isotropic spatial hypersurfaces must (by spherical symmetry) have a line element of the form

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{a}^2\left[\mathrm{f}^2(\mathrm{r})\mathrm{dr}^2 + \mathrm{r}^2\ \mathrm{d}\Omega^2\right], \quad \mathrm{a} = \text{ constant}$$

Sow that $\mathrm{f}^2(\mathrm{r})$ must have the form $\left(1-\mathrm{kr}^2\right)^{-1}$, where $\mathrm{k} = 0, \pm 1$.

Problem 19.5. Show that the Robertson-Walker metric

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right]$$

can also be written as

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)\left[d\chi^2 + \Sigma^2(\chi)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right]$$

or as

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{R}^2(\eta)\left[-\mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}\chi^2 + \Sigma^2(\chi)\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\ \mathrm{d}\phi^2\right)\right]$$

where $\Sigma^2(\chi) = \sin^2\chi$ or χ^2 or $\sinh^2\chi (k = 1, 0, -1)$.

Problem 19.6. Show that the spacelike 3 -surfaces of a closed, isotropic, homogeneous universe possess a translation symmetry which leaves no points fixed. (Notice that this is not true in 2 dimensions; a 2 sphere cannot be combed smooth!)

Problem 19.7. A bullet is shot out into an expanding Robertson-Walker universe with a velocity V_1 (relative to cosmological observers). Later, when the universe has expanded by a scale factor $(1+z)^{-1}$, it has a different velocity V_2 with respect to cosmological observers. Find V_2 in terms of z and V_1. Show that in the limit $\mathrm{V}_1 \to \mathrm{c}$, the formula for the redshift of photons is obtained.

Problem 19.8. Show by an explicit coordinate transformation that the Robertson-Walker metric is conformally flat. Write $\mathrm{R}_{\mu\nu\alpha\beta}$ in terms of $\mathrm{g}_{\mu\nu}$ and ρ, p and the 4 -velocity u^μ of the matter.

Problem 19.9. In a Robertson-Walker metric show that angular diameter distance (d_A), luminosity distance (d_L) and proper motion distance (d_M) are related by

$$(1+z)^2\ \mathrm{d_A} = (1+z)\mathrm{d_M} = \mathrm{d_L}.$$

Problem 19.10. Suppose astronomers are able to find a family of objects whose absolute luminosities L are known. Suppose their apparent luminosities ℓ (or equivalently their luminosity distance d_L) and their redshift z are measured. Using the Robertson-Walker line element, find an expression for ℓ (or d_L) as a function of L, z, H_0 and q_0 for small

Problem 19.11. Let $n\left(t_0\right)$ be the number density at the present epoch of a (mythical) family of identical light or radio sources distributed uniformly throughout the universe.

(a) Show that the number of such sources with redshifts less than z is observed from the Earth today is

$$\mathrm{N}(z) = \frac{4\pi}{3}\frac{\mathrm{n}\left(\mathrm{t}_0\right)}{\mathrm{H}_0^3}z^3\left(1 - \frac{3}{2}z\left(1+\mathrm{q}_0\right) + \cdots\right)$$

more evolutionary effects, i.e. the number of sources in a unit comoving olume remains constant.

(b) If the sources all have intrinsic luminosity L, show that the ber with fluxes (ergs sec^{-1} cm^{-2}) greater than S as observed from earth today is

$$N(S) = \frac{4\pi}{3}n\left(t_0\right)\left(\frac{L}{4\pi S}\right)^{3/2}\left[1 - 3H_0\left(\frac{L}{4\pi S}\right)^{1/2} + \cdots\right].$$

Thoblem 19.12. A ray of light travels along a radial line in the Robertsondilker metric

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2\right].$$

Now is the coordinate r related to the affine parameter λ along the ray, amely what is $\mathrm{dr}/\mathrm{d}\lambda$?

Problem 19.13. By requiring that the Robertson-Walker metric satisfy the Einstein field equations, derive the dynamical equations for a perfect Ruid Friedmann cosmology:

$$3\ddot{\mathrm{R}} + 4\pi\mathrm{G}(\rho + 3\mathrm{p})\mathrm{R} = 0 \tag{1}$$

$$\mathrm{R}\ddot{\mathrm{R}} + 2\dot{\mathrm{R}}^2 + 2\mathrm{k} - 4\pi\mathrm{G}(\rho - \mathrm{p})\mathrm{R}^2 = 0. \tag{2}$$

Problem 19.14. Show that the two second-order equations of Problem 19.13 are equivalent to the first order equations

$$\dot{\mathrm{R}}^2 + \mathrm{k} = \frac{8\pi\mathrm{G}}{3}\rho\mathrm{R}^2 \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dR}}\left(\rho\mathrm{R}^3\right) = -3\mathrm{pR}^2 \tag{2}$$

Problem 19.15. For a Friedmann cosmology derive the relations

$$\frac{8\pi G\rho}{3} = \left(\frac{k}{R^2} + H^2\right) \tag{1}$$

$$-8\pi Gp = \frac{k}{R^2} + H^2(1 - 2q). \tag{2}$$

If the cosmology is matter-dominated ($\rho \gg \mathrm{p}$) show that

$$\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{R}^2} = (2\mathrm{q} - 1)\mathrm{H}^2 \tag{3}$$

$$\frac{8\pi\mathrm{G}\rho}{3} = 2\mathrm{qH}^2. \tag{4}$$

If it is radiation dominated ($\mathrm{p} \approx 1/3\rho$) show that

$$\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{R}^2} = (\mathrm{q} - 1)\mathrm{H}^2 \tag{5}$$

$$\frac{8\pi\mathrm{G}\rho}{3} = \mathrm{qH}^2. \tag{6}$$

Problem 19.16. For a Friedmann cosmology what equations relating p, p, and R(t) result from the equation of energy conservation, $\mathrm{T}^{\nu}_{\mu;\nu} = 0$?

Problem 19.17. For a $\mathrm{k} = -1$ Friedmann cosmology with $\mathrm{p} = \rho = 0$ show that the line element becomes

$$\mathrm{ds}\ \mathrm{s}^2 = -\mathrm{dt}^2 + \mathrm{t}^2\left[\ \mathrm{d}\chi^2 + \sinh^2\chi\left(\ \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\ \mathrm{d}\phi^2\right)\right]$$

Exhibit an explicit coordinate transformation to show that this metric describes Minkowski space.

Problem 19.18. Solve the first-order Friedmann equation

$$\left(\frac{\dot{\mathrm{R}}}{\mathrm{R}}\right)^2 = \frac{8\pi\mathrm{G}}{3}\rho - \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{R}^2}$$

for $R(t)$ when the density ρ is dominated by a) matter and b) radiation. Express any parameters of the present epoch in terms of H_0 and q_0.

Toblem 19.19. A bullet is shot out into an expanding Friedmann universe. Wen $k = -1$, show that it approaches the same velocity as some cosological observer, but a position which is a constant proper distance ay from him. When $\mathrm{k} = 0$, show that the bullet again approaches the locity of some cosmological observer but that the proper distance beseen the bullet and that observer becomes arbitrarily large as $t \to \infty$.

coblem 19.20. For a closed ($\mathrm{k} = 1$) Friedmann universe in which radiaIdon dominates for only a negligibly short fraction of the life of the uniase, how many times can a photon encircle the universe from the moment the creation of the universe to the moment of its death?

zioblem 19.21. If an idealized $\mathrm{k} = 0$ matter dominated Friedmann cosslogy with Hubble constant H_0 contains homogeneously distributed sources of constant luminosity L, and if the local number density of which sources in space is now n, what is the brightness B of the night dy (energy per steradian of sky per collection area per time)? (If the siverse were static and infinitely old the brightness would be infinite; his is called Olbers' Paradox.)

Problem 19.22. Suppose that at the time of hydrogen recombination (which, Say, occurred at a redshift of $z = 1500$) the deceleration parameter was $q = 0.5002$. What would q_0 be today? Repeat for $q = 0.4998$ at $z = 1500$. (Assume a matter-dominated universe.)

Problem 19.23. A closed ($k = 1$) Friedmann universe has Hubble constant $\mathbf{H_0}$ and deceleration parameter $\mathbf{q_0}$. Assume that the universe has always been matter dominated.
(a) What is the total proper volume of the universe at the present epoch?
(b) What is the total proper volume that we see, looking out into the sky?
(c) What is the total proper volume now occupied by the matter which we see, looking out into the sky?

Problem 19.24. What is the apparent angular size of an object of proper diameter l seen at redshift z in a matter dominated Friedmann cosmology with present parameters H_0 and q_0 ? (Analogous results for apparent proper motion and apparent luminosity follow from Problem 19.9.)

Problem 19.25. In a "hot" Friedmann cosmology, two unrelated important epochs are when matter first begins to dominate radiation ($\rho_{\text{matter}} \approx \rho_{\text{radiation}}$), and when protons and electrons recombine to form hydrogen. Given that these epochs happen to be nearly the same in our universe, deduce a numerical value for the conserved entropy per baryon $\sigma \equiv 4aT^3/3c$ (where T = temperature, a = radiation constant, n = number density of baryons).

Problem 19.26. In terms of the conserved entropy per baryon σ of a hot big bang model, find the temperature at which hydrogen characteristically recombined, i.e. had an equilibrium ionization fraction of 0.5 . Evaluate your answer for $\sigma = 10^8, 10^9$.

Problem 19.27. In a radiation dominated Friedmann cosmology at times near the big bang singularity, calculate the temperature T as a function of (proper cosmological) time t. Assume that only photons, electrons and positrons contribute to the energy density ρ. How is the answer changed if neutrinos and antineutrinos are also allowed?

Problem 19.28. A Friedmann cosmology has temperature T_1 at expansion scale R_1, and is dominated by relativistic electrons, positrons, muons, photons, and neutrinos in thermal equilibrium. Later, at expansion scale R_2, the muon pairs have annihilated, but the other particles are still relativistic and in equilibrium. Find the temperature T_2 in terms of T_1, R_1, and R_2.

Problem 19.29. Under which of the following suppositions would the hot big bang have produced less He^4 than predicted by the "standard" model? Less H^2 (deuterium)?
(i) Suppose the baryon density in the universe today is larger than we now think.
(ii) Suppose the weak interaction constant is smaller than we now think.
(iii) Suppose there are many more neutrinos than antineutrinos or photons in the cosmic background today.
(iv) Suppose there are many more antineutrinos than neutrinos or photons in the cosmic background today.
(v) Suppose that the gravitational constant G varies with cosmological time and was slightly larger in the past.
ecoblem 19.30. Suppose that a universe is isotropic, homogeneous, and "mpty except for a "vacuum polarization" stress energy of the form $8\pi\ T_{\mu\nu}$ W. $I_{\mu\nu}$. (In old language: there is a non-zero cosmological constant Λ.) Find a $k = 0$ cosmological solution. Find a coordinate system in which It is static. (This is the "de Sitter universe".)

Problem 19.31. A universe is isotropic, homogeneous, and contains only pressureless dust and "vacuum polarization" stress energy, so that $T_{\mu\nu} = \rho_0 u_\mu u_\nu - \frac{\Lambda}{8\pi} g_{\mu\nu}$ where u^μ is the 4-velocity field of the matter. Show that there is a static solution for the metric, but that it is unstable. (This cosmology is called the "Einstein universe".)

Problem 19.32. What is the proper volume of the "Einstein universe" of Problem 19.31, in terms of ρ_0, the density of its dust.

Problem 19.33. At one time observations seemed to suggest that there was an unusual.clustering of quasar redshifts around $z = 2$. One proposal to explain this is that our universe is a $k = +1$ dust cosmology, with nonzero cosmological constant Λ only slightly greater than the value for a static "Einstein Universe" (Problem 19.31). Show that for this model the universe will expand at a decreasing rate to a certain radius R_m, at which radius it will remain for a long time while expanding very slowly, before expanding again at a rate which asymptotically approaches $H = (\Lambda/3)^{\frac{1}{2}}$.

Suppose quasar formation occurred at the time of nearly constant radius. What does this model predict for ρ_{matter} today? $\left[\text{Use } H_0 = 10^{-28}\ \text{cm}^{-1}\right]$.

Problem 19.34. What is the order of magnitude of the influence of the cosmological constant on the celestial mechanics of the solar system if $\Lambda \sim 10^{-57}\ \text{cm}^{-2}$?

Problem 19.35. Prove that for a physically possible perfect fluid no solution of the Einstein equations is homogeneous, everywhere isotropic, and static. (Before Hubble's discovery, Einstein considered this a failing of the theory and introduced the "cosmological constant" term as a remedy.)

Problem 19.36. Prove that no solution of the Einstein equations for a pressureless fluid is static. Do not assume isotropy or homogeneity. (The difficulty of this problem depends on the definition of "static." Easy case: Take static to mean time invariant and time reversible, the first definition of "static" in Problem 10.8. Harder case: Use the second definition in Problem 10.8.)

Problem 19.37. Prove that no solution of the Einstein equations for a perfect fluid is static and homogeneous. Do not assume isotropy. (Again as in Problem 19.36 there are easy and harder cases depending on the definition of "static" that is used.)

Problem 19.38. In cosmology one usually uses coordinates comoving with the galaxies. Let (r, x^i) be such a system, and let the metric take the general form

$$\mathbf{ds}^2 = -\mathbf{d}\tau^2 + 2\ g_{0i}\ d\tau dx\mathbf{x^i} + g_{ij}dx^i dx^j$$

where g_{0i} and g_{ij} can be functions of τ and x^i. Show
(a) that τ is the proper time measured by a galaxy;
(b) that g_{ij} governs proper distances in the hypersurface of constant

(c) that if g_{0i} and g_{ij} are independent of all x^i, then the universe is homogeneous but that the converse is false;
(d) that if $\mathrm{g_{0i}}$ and $\mathrm{g_{ij}}$ are independent of r, then $\sigma_{\alpha\beta} = 0, \theta = 0$ But $\omega_{a\beta} \neq 0$ in general);
(e) that if $\mathrm{g_{0i}} = 0$ and $\mathrm{g_{ij}} = \mathrm{f}(r)\overline{\mathrm{g}}_{\mathrm{ij}}\left(\mathrm{x^k}\right)$, then $\sigma_{\mathrm{ij}} = 0$;
(f) that $\mathrm{g_{0i,0}} = 0$ if and only if galaxies fall on geodesics;
(g) that if $\omega_{\alpha\beta} \neq 0$, no choice of τ and x^i can make $g_{0i} = 0$ everywhere and that this means that $\omega_{\alpha\beta,0} \neq 0$ implies nongeodesic motion of he galaxies.

Problem 19.39. The distance between two neighboring galaxies is $\delta x^a = \mathrm{R_n}^\alpha$ where n is a unit, purely spatial vector in one galaxy's rest frame. Show that

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}} = \sigma_{a\beta}\mathrm{n}^a\mathrm{n}^\beta + \frac{1}{3}\theta$$

(where σ is the shear tensor and θ is the scalar expansion) and that averaging over all directions n^α gives

$$\left\langle \frac{\dot{\mathrm{R}}}{\mathrm{R}} \right\rangle = \frac{1}{3}\theta$$

Problem 19.40. For the congruence of galaxy world lines in a RobertsonWalker cosmology find $\theta, \omega_{\alpha\beta}$ and $\sigma_{\alpha\beta}$. (See Problem 5.18 for definitions.) Do the same for the anisotropic metric

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2a}dx^2 + e^{2b}dy^2 + e^{2c}dz^2$$

where a, b, and c are functions of t and where x, y and z are coordinates comoving with the galaxies.

Problem 19.41. Consider the homogeneous, anisotropic cosmological model with metric

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij}(t)dx^i dx^j.$$

where the space slices $t =$ constant have a flat geometry. Find the evolution of the g_{ij} when the universe is "gravitation dominated," i.e. set $T^{\mu\nu}$ to zero in the field equations. Show that the volume of the universe goes to zero linearly with t as $t \to 0$ (in contrast to the $t^{3/2}$ or t^2 behavior for radiation- or matter-dominated Friedmann models).

19: Solutions

Solution 19.1. The relevant Newtonian equations are

$$\nabla^2\Phi = 4\pi\mathrm{G}\rho \quad \text{(gravitational potential)} \tag{1}$$

$$\partial\rho/\partial\mathrm{t} + \nabla\cdot(\rho\underset{\sim}{v}) = 0 \quad \text{(continuity equation)} \tag{2}$$

$$\frac{\partial\underset{\sim}{v}}{\partial\mathrm{t}} + (\underset{\sim}{v}\cdot\nabla)\underset{\sim}{v} = -\frac{\nabla}{\rho} - \nabla\Phi \quad \text{(equation of motion)} \tag{3}$$

If the universe is static and homogeneous, then $\underline{\mathrm{v}} = 0$, and ρ and p are constant in position and time. The solution of Equation (1) is then

$$\Phi = \frac{2}{3}\pi\mathrm{G}\rho(\mathrm{r}\cdot\mathrm{r}) + \mathrm{C}\cdot\underset{\sim}{r} + \mathrm{K}$$

where $\underset{\sim}{C}$ and K are arbitrary constants of integration and $\underset{\sim}{r}$ is the position vector from the (arbitrary) origin. Equation (2) is identically zero. Equation (3), however is contradictory: the left side vanishes since $\underset{\sim}{v} = 0$; on the right, ∇_p vanishes by homogeneity, but $\nabla\Phi$ is not identically zero for any choice of $\underset{\sim}{\mathrm{C}}, \mathrm{K}$. Thus, there is no solution to the equations.

Solution 19.2. Since the spacetime is isotropic everywhere, it is in particular spherically symmetric around some nonsingular observer. But by Birkhoff's theorem (Problem 16.3) the only vacuum spherical solutions are the Schwarzschild metrics, and the only one which is regular at the origin - where our observer is - is the $M = 0$ case, i.e. flat Minkowski space.

Solution 19.3. By Liouville's theorem the number density of photons in phase space I_ν/ν^3 is a constant along a light ray, and (see Problem 5.10)
it is also a Lorentz invariant. Using $\left(\ \nu_{\text{emitted}}\ /\nu_{\text{observed}}\ \right) = 1 + z$, We lave then

$$\begin{aligned}
\text{Flux observed} &= \Omega\int I_\nu^{\text{obs}}\ \mathrm{d}\nu_{\text{obs}} = \Omega\int\left(\frac{I_\nu^{\text{obs}}}{\nu_{\text{obs}}^3}\right)\nu_{\text{obs}}^3\ \mathrm{d}\nu_{\text{obs}} \\
&= \Omega\int\frac{\mathrm{I}_\nu^{\text{emit}}}{\nu_{\text{emit}}^3}\frac{\nu_{\text{emit}}^3\ \mathrm{d}\nu_{\text{emit}}}{(1+z)^4} = \frac{\Omega}{(1+z)^4}\int\mathrm{I}_\nu^{\text{emit}}\ \mathrm{d}\nu_{\text{emit}} \\
&= \frac{\Omega}{(1+z)^4}\frac{1}{\pi}\sigma\ \mathrm{T}^4
\end{aligned}$$

where σ is the Stefan-Boltzmann constant. Note that since a redshifted black body spectrum is also a black body spectrum, the flux and spectrum observed is just that which would come from a nearby stationary object of solid angle Ω and temperature $\mathrm{T}/(1+z)$.

In all the above it doesn't matter whether the redshift is due to doppler motion, gravitational redshift, or cosmological redshift, because Liouville's theorem holds in general.

Solution 19.4. Homogeneity implies that the scalar curvature R of the hypersurface must be constant. R can be found by specializing the formulas of Problem 9.20, or from the formula

$$R_{ij} = \Gamma^k_{ij,k} - \left(\log|g|^{\frac{1}{2}}\right)_{,ij} + \Gamma^k_{ij}\left(\log|g|^{\frac{1}{2}}\right)_{,k} - \Gamma^k_{im}\Gamma^m_{jk}$$

where $|g|^{\frac{1}{2}} = a^3\mathrm{fr}^2\sin\theta$ and the Γ 's are found from the Lagrangian for geodesics or as in Problem 7.6. This gives

$$\begin{aligned}\mathrm{R}_{\theta\theta} =& \Gamma^{\mathrm{r}}{}_{\theta\theta,\mathrm{r}} - (\log(\sin\theta)),\theta\theta + \Gamma^{\mathrm{r}}{}_{\theta\theta}\left(\log \mathrm{fr}^2\right)_{,\mathrm{r}} - \Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi}\Gamma^{\phi}{}_{\theta\phi} - 2\Gamma^{\theta}\theta_{\mathrm{r}}\Gamma^{\mathrm{r}}_{\theta\theta}\\ =& -\left(\mathrm{rf}^{-2}\right)_{,\mathrm{r}} + \mathrm{cosec}^2\,\theta - \mathrm{r}^{-1}\mathrm{f}^{-3}\left(\mathrm{r}^2\mathrm{f}\right)_{,\mathrm{r}} - \cot^2\theta + 2\mathrm{f}^{-2}\\ =& \left[\mathrm{r}^2\left(1-\mathrm{f}^{-2}\right)\right]_{,\mathrm{r}}(2\mathrm{r})^{-1}\end{aligned}$$

Since

$$\mathrm{R}_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = \mathrm{R}_{\theta\theta}\left(\mathrm{a}^2\mathrm{r}^2\right)^{-1}$$

and

$$R_{\hat{\mathrm{r}}\hat{\mathrm{r}}} = R_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = R_{\hat{\theta}\hat{\theta}}$$

by isotropy, we get

$$R = R_{\hat{r}\hat{r}} + R_{\hat{\theta}\hat{\theta}} + R_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = 3\left[r^2\left(1-f^{-2}\right)\right]_{,r}\left(2a^2r^3\right)^{-1} \equiv A$$

that is

$$\mathrm{r}^2\left(1-\mathrm{f}^{-2}\right) = B\mathrm{r}^4 + \mathrm{C}.$$

Since $f \to 1$ as $r \to 0$, we have $C = 0$. Thus

$$\mathrm{f}^2 = \left(1 - \mathrm{Br}^2\right)^{-1}.$$

If $\mathrm{B} \neq 0$, we can scale r by letting $\mathrm{r}' = |\mathrm{B}|^{\frac{1}{2}}\mathrm{r}$. The metric then takes the prescribed form with radial coordinate r'.

Solution 19.5.

(a) Let

$$\mathbf{r} = \begin{cases}\sin\chi & \mathrm{k}=+1\\ \chi & \mathrm{k}=0\\ \sinh\chi & \mathrm{k}=-1\end{cases}$$

then

$$\mathbf{dr} = \begin{cases}\cos\chi\mathrm{d}\chi\\ \mathrm{d}\chi\\ \cosh\chi\ \mathrm{d}\chi\end{cases}$$

and

$$\frac{\mathrm{dr}^2}{1-\mathrm{kr}^2} = \begin{cases}\mathrm{d}\chi^2\\ \mathrm{d}\chi^2\\ \mathrm{d}\chi^2\end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{dr}^2}{1-\mathrm{kr}^2} + \mathrm{r}^2\ \mathrm{d}\Omega^2 = \mathrm{d}\chi^2 + \Sigma^2(\chi)\mathrm{d}\Omega^2,$$

where

$$\Sigma^2(\chi) = \begin{cases}\sin^2\chi, & \mathrm{k}=+1\\ \chi^2, & \mathrm{k}=0\\ \sinh^2\chi, & \mathrm{k}=-1\end{cases}$$

(b) Let $\mathrm{dt} = \mathrm{R}(\eta)\mathrm{d}\eta$ define a transformation from the variable to the variable η. Then

$$\begin{aligned} \mathrm{ds}^2 &= -\mathrm{dt}^2 + \mathrm{R}^2(\mathrm{t})\left(\mathrm{d}\chi^2 + \Sigma^2\ \mathrm{d}\Omega^2\right) \\ &= \mathrm{R}^2(\eta)\left(-\mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}\chi^2 + \Sigma^2\ \mathrm{d}\Omega^2\right). \end{aligned}$$

Solution 19.6. From the Robertson-Walker metric (in "trigonometric" form), the metric for the spacelike 3 -surfaces is

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{a}^2\left[\ \mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi\left(\ \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\ \mathrm{d}\phi^2\right)\right].$$

By analogy with the metric for 2 -spheres, it is easy to guess that this metric can be represented as a 3 -sphere embedded in a Euclidean 4-space with cartesian coordinates $\mathrm{W}, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$. In particular, if we define

$$\begin{aligned} W &= a\cos\chi \\ Z &= a\sin\chi\cos\theta \\ X &= a\sin\chi\sin\theta\cos\phi \\ Y &= a\sin\chi\sin\theta\sin\phi \end{aligned}$$

(which satisfy $\mathrm{W}^2 + \mathrm{Z}^2 + \mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 = \mathrm{A}^2$), the metric becomes

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{dW}^2 + \mathrm{d}Z^2 + \mathrm{dX}^2 + \mathrm{dY}^2.$$

In Euclidean 4-space one can find two planes (e.g. $X - Y$ and $W - Z$) which intersect only at the origin ($a = 0$). Thus, a rotation of the $X - Y$ plane changes all X and Y coordinates except the origin and leaves all $W - Z$ coordinates fixed; and vice versa for $W - Z$ rotations. Therefore, a combination of both rotations leaves no points fixed except the
origin and (for nonzero a) takes all points of the 3 -sphere into different points.

Solution 19.7. In some local proper frame suppose the bullet passes by with a proper velocity V. When it has moved a proper distance dr farther, it passes a cosmological observer whose velocity relative to the first proper frame is

$$\delta\mathrm{V} = \mathrm{Hdr} = \mathrm{HVdt} = \frac{\dot{\mathrm{R}}}{\mathrm{R}}\mathrm{Vdt} = \mathrm{V}\frac{\mathrm{dR}}{\mathrm{R}}$$

This observer sees it moving (according to the velocity addition formula) at velocity

$$\begin{aligned} \mathrm{V}' = \frac{\mathrm{V} - \delta\mathrm{V}}{1 - \mathrm{V}\delta\ \mathrm{V}} &= \mathrm{V} - \left(1 - \mathrm{V}^2\right)\delta\mathrm{V} + \mathcal{O}(\delta\mathrm{V})^2 \\ &= \mathrm{V} - \left(1 - \mathrm{V}^2\right)\mathrm{V}\frac{\mathrm{dR}}{\mathrm{R}} + \mathcal{O}(\delta\mathrm{V})^2 \end{aligned}$$

Thus, $\mathrm{dV/dR} = -\left(1 - \mathrm{V}^2\right)\mathrm{V/R}$ which is integrable, giving $\gamma\mathrm{V} \equiv \left(1 - \mathrm{V}^2\right)^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{V}^{\mathrm{F}} = \text{constant}\ /\mathrm{R} = \text{constant} \times(1 + z)$. So V_1 and V_2 are related by $\gamma_2 V_2/\gamma_1 V_1 = (1 + z)^{-1}$. For a particle with nonzero rest mass, this result says that the relativistic momentum redshifts away as one power of $(1 + z)$ as the universe expands. For a photon, in the limit $\mathrm{V} \to 1, \gamma\ \mathrm{V} \to\ \mathrm{h}\nu$ and we obtain the usual redshift factor. (Note that we have not taken into account the slowing down of the bullet due to the gravitational attraction of the cosmological matter at rest in the proper frame. The reader can verify that this is a higher order effect, with $\mathrm{dV} \propto (\mathrm{dr})^2$, so it does not affect the differential equation for dV/dR.

Solution 19.8. Start with the η, χ form of the metric

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{R}^2(\eta)\left[-\mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}\chi^2 + \Sigma^2(\chi)\mathrm{d}\Omega^2\right] \tag{1}$$

(3rd form in Problem 19.5), where $\Sigma(\chi) = \sinh\chi, \chi, \sin\chi$ for $\mathrm{k} = -1, 0, +1$. Since conformal transformations preserve light cones, a natural first step is to go to null coordinates, e.g.

$$\begin{aligned} \mathrm{u} &= \frac{1}{2}(\eta + \chi) \\ \mathrm{v} &= \frac{1}{2}(\eta - \chi) \end{aligned} \tag{2}$$

The metric now becomes

$$ds^2 = R^2(u + v)\left[-4dudv + \Sigma^2(u - v)d\Omega^2\right] \tag{3}$$

We now try a transformation which preserves the "nullness" of the coordinates, and also preserves the symmetry between u and v :

$$\begin{array}{ll} \alpha = \mathrm{g(u)} & \mathrm{u} = \mathrm{f}(\alpha) \\ \beta = \mathrm{g(v)} & \mathrm{v} = \mathrm{f}(\beta) \end{array} \tag{4}$$

where g is the inverse function to f. With this transformation, Equation (3) becomes

$$ds^2 = R^2(u+v)\left[-4f'(\alpha)f'(\beta)dad\beta + \Sigma^2(u-v)d\Omega^2\right]$$
$$= R^2(u+v)f'(\alpha)f'(\beta)\left[-4d\alpha d\beta + \frac{\Sigma^2(u-v)}{f'(\alpha)f'(\beta)}d\Omega^2\right] \tag{5}$$

If the metric is to be conformally flat, the term in brackets must have the flat space form $\left[-4\ \mathrm{d}a\ \mathrm{d}\beta + (\alpha-\beta)^2\ \mathrm{d}\Omega^2\right]$. Using $\mathrm{f}'(\alpha) = \mathrm{du}/\mathrm{d}\alpha = (\mathrm{d}\alpha/\mathrm{du})^{-1} = [\mathrm{g}'(\mathrm{u})]^{-1}$, we get the condition

$$g'(u)g'(v)[\dot{\Sigma}(u-v)]^2 = [g(u)-g(v)]^2 \tag{6}$$

For the case $\mathrm{k}=0$, we have $\Sigma(\mathrm{u}-\mathrm{v}) = \mathrm{u}-\mathrm{v}$, so $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}$ is a solution by inspection. For the other cases Equation (6) can be solved by first finding the solution for v close to u; that is, for $v = u+\epsilon$. Expanding Equation (6) in a Taylor series gives

$$(g')^2\left[1+\epsilon g''/g' + \epsilon^2 g'''/(2g')\cdots\right]\epsilon^2\left(1-\mathrm{k}\epsilon^2/6\cdots\right)^2$$
$$= \epsilon^2(g')^2\left[1+\epsilon g''/(2g') + \epsilon^2 g'''/(6g')\cdots\right]^2$$

so that with $p = g', q = p'$ and $k = +1$, we must solve

$$2qdq/dp - 4p = 3q^2/p$$

This Bernoulli differential equation gives

$$q = p(Ap-4)^{\frac{1}{2}}, \quad A = \text{ constant },$$

and integrating twice we get

$$\mathrm{u}+\mathrm{B} = \tan^{-1}(\mathrm{Ap}/4-1)^{\frac{1}{2}}$$
$$\mathrm{g}(\mathrm{u}) = \mathrm{C}\tan(\mathrm{u}+\mathrm{B})+\mathrm{D}$$

We can now verify by substitution that this is in fact the general solution to Equation (6). Without loss of generality we can take $g = \tan u$. For $\mathrm{k}=-1$, we can similarly find $\mathrm{g} = \tanh \mathrm{u}$. With these solutions, Equation (6) turns into the trigonometric identities

$$\sec u \sec v \sin(u-v) = \tan u - \tan v$$
$$\operatorname{sech} u \operatorname{sech} v \sinh(u-v) = \tanh u - \tanh v$$

and the metric of Equation (5) becomes

$$\mathrm{ds}^2 = \frac{\mathrm{R}^2\left[\tan^{-1}(\alpha)+\tan^{-1}(\beta)\right]}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}\left\{-4\ \mathrm{d}a\ \mathrm{d}\beta + (\alpha-\beta)^2\ \mathrm{d}\Omega^2\right\}$$

or

$$\mathrm{ds}^2 = \frac{\mathrm{R}^2\left[\tanh^{-1}(\alpha)+\tanh^{-1}(\beta)\right]}{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}\left\{-4\ \mathrm{d}\alpha\ \mathrm{d}\beta + (\alpha-\beta)^2\ \mathrm{d}\Omega^2\right\}$$

which is manifestly conformally flat. A conformally flat metric has zero Weyl tensor, so the Riemann tensor is only composed of the Ricci tensor and scalar curvature (see the introduction to Chapter 9).

$$\mathrm{R}^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} = 2\delta^{[\alpha}_{[\gamma}\mathrm{R}^{\beta]}_{\delta]} - \frac{1}{3}\delta^{[\alpha}_{[\gamma}\delta^{\beta]}_{\delta]}\mathrm{R}. \tag{8}$$

With this the Einstein equation

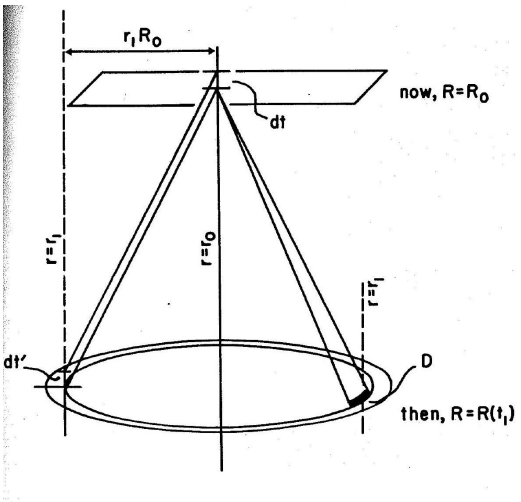
$$\mathrm{R}^{\alpha}_{\beta} = 8\pi\left(\ \mathrm{T}^{\alpha}{}_{\beta} - \frac{1}{2}\ \mathrm{g}^{\alpha}_{\beta}\mathrm{T}\right)$$

and the stress energy tens or

$$\mathrm{T}^{a}_{\beta} = (\rho+\mathrm{p})\mathrm{u}^a\mathrm{u}_\beta + \mathrm{pg}^{\alpha}_{\beta}$$

Sive $\mathrm{R}^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$ in terms of $\mathrm{g}_{\mu\nu}, \mathrm{u}^\mu, \rho, \mathrm{p}$.

Solution 19.9. If D is the physical size of an object, and δ is its angle subtended, $\mathbf{d_A} \equiv \mathrm{D}/\delta$. From the figure, and the Robertson-Walker metric, we see that $\mathrm{D} = \mathrm{R(t)r}_1\delta$, so $\mathrm{d_A} = \mathrm{r}_1\mathrm{R}\,(\mathrm{t}_1)$. If the object is moving transversely at a proper velocity V and with an apparent angular motion



$d\delta/dt$, then $d_M \equiv V/(d\delta/dt)$. Let t' denote time measured at the emission of photons. Since $V = d(R(t_1) r_1 \delta)/dt'$, and since $dt'/dt = R(t_1)/R_0$ because of the cosmological redshift, and noting that $R(t_1)$ can be considered constant since its change induces no transverse motion, we get $d_M = R_0 r_1$. If the object has an intrinsic luminosity L, and we receive a flux ℓ, then $d_L \equiv (L/4\pi\ell)^{\frac{1}{2}}$. In a time dt' it emits an energy Ldt'. This energy is redshifted to the present by a factor $R(t_1)/R_0$, and is now distributed over a sphere of proper area $4\pi (r_1 R_0)^2$ (see figure). Thus, $\ell = (Ldt' R/R_0)(4\pi r_1 R_0)^{-2}/dt$ and $d_L = R_0^2 r_1/R(t_1)$. Using $R_0/R(t_1) = 1+z$, we have now obtained $(1+z)^2 d_A = (1+z) d_M = d_L$.

Solution 19.10. From the solution to Problem 19.9 we have $d_L = R_0^2 r_1/R(t_1)$ where r_1 is the radial coordinate of the object and $R(t_1)$ is the scale factor at the time t_1 at which the light was emitted. Since $H_0 \equiv \dot{R}/R$ and $q_0 \equiv -\ddot{R}R/\dot{R}^2$, the first terms in the power series expansion of R are

$$R(t) = R_0 \left(1 + H_0 (t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \cdots\right) \tag{1}$$

We can eliminate the factor $R(t_1)$ from d_L using $R_0/R(t_1) = 1+z$, but we still need to find expressions for R_0 and for r_1. Setting $ds^2 = 0$ to get the path of light rays in the Robertson-Walker metric gives

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{(1-kr^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{2}$$

- Integrating Equation (2) to the lowest 2 orders in $(t_0 - t_1)$ and r_1 by means of Equation (1) gives

$$r_1 = \frac{1}{R_0}\left[(t_0 - t_1) + \frac{1}{2} H_0 (t_0 - t_1)^2 + \cdots\right] \tag{3}$$

and inverting Equation (1) to get $t - t_0$ in terms of $1 + z = R_0/R(t_1)$ gives

$$R_0 r_1 = \frac{1}{H_0}\left[z - \frac{1}{2}(1 + q_0) z^2 + \cdots\right]$$

so that

$$d_L = (1+z) R_0 r_1 = \frac{1}{H_0}\left[z + \frac{1}{2}(1 - q_0) z^2 + \cdots\right]$$

or equivalently

$$\ell = \frac{L}{4\pi d_L^2} = \frac{L H_0^2}{4\pi z^2}\left[1 + (q_0 - 1) z + \cdots\right]$$

Solution 19.11.

(a) Let $n(t_1)$ be the number of sources per unit volume at time t_1.
The volume element is

$$\left|^{(3)} g\right|^{\frac{1}{2}} dr_1 d\theta_1 d\phi_1 = R^3(t_1)\left(1 - kr_1^2\right)^{-\frac{1}{2}} r_1^2 dr_1 \sin\theta_1 d\theta_1 d\phi_1$$

Thus the number of sources between r_1 and $r_1 + dr_1$ at time t_1 is

$$\mathrm{dN} = 4\pi \mathrm{R}^3\left(\mathrm{t}_1\right)\left(1-\mathrm{kr}_1^2\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{r}_1^2\mathrm{n}\left(\mathrm{t}_1\right)\mathrm{dr}_1$$

The quantities r_1 and t_1 are related by the equation for null rays propagating in the Robertson-Walker metric (Equation (2) in the solution of Problem 19.10) i.e. $r_1 = r\left(t_1\right)$ where

$$\mathrm{dr}_1 = \left(1-\mathrm{kr}_1^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{dt}_1/\mathrm{R}\left(\mathrm{t}_1\right)$$

We have, therefore

$$\mathrm{dN} = 4\pi \mathrm{R}^2\left(\mathrm{t}_1\right)\mathrm{r}^2\left(\mathrm{t}_1\right)\mathrm{n}\left(\mathrm{t}_1\right)\left|\mathrm{dtt}_1\right|$$

and

$$N(z) = \int_{t_z}^{t_0} 4\pi R^2\left(t_1\right) r^2\left(t_1\right) n\left(t_1\right) dt_1$$

where t_z, the cosmological time corresponding to redshift z, is defined implicitly by

$$\frac{\mathrm{R}\left(\mathrm{t_z}\right)}{\mathrm{R}\left(\mathrm{t}_0\right)} = \frac{1}{1+z} \tag{1}$$

Since the number density of sources is conserved, we have

$$n(t)R^3(t) = \text{ constant .}$$

(This follows from $\left(nu^\mu\right)_{;\mu} = 0$) and hence

$$N(z) = 4\pi n\left(t_0\right) R^3\left(t_0\right)\int_{t_z}^{t_0} R^{-1}\left(t_1\right) r^2\left(t_1\right) dt_1$$

If z is small, $t_0 \approx t_z$, and we can use the expansions

$$\begin{aligned}\mathrm{R}\left(\mathrm{t}_1\right) &= \mathrm{R}\left(\mathrm{t}_0\right)\left[1-\mathrm{H}_0\left(\mathrm{t}_0-\mathrm{t}_1\right)+\cdots\right]\\ \mathrm{r}\left(\mathrm{t}_1\right) &= \frac{\mathrm{t}_0-\mathrm{t}_1}{\mathrm{R}\left(\mathrm{t}_0\right)}\left[1+\frac{1}{2}\mathrm{H}_0\left(\mathrm{t}_0-\mathrm{t}_1\right)+\cdots\right]\end{aligned} \tag{2}$$

(Solution 19.10, Equations (1) and (3)). Thus for small z

$$\begin{aligned}\mathrm{N}(z) &= 4\pi \mathrm{n}\left(\mathrm{t}_0\right)\int_{\mathrm{t}_z}^{\mathrm{t}_0}\left(\mathrm{t}_0-\mathrm{t}_1\right)^2\left[1+2\mathrm{H}_0\left(\mathrm{t}_0-\mathrm{t}_1\right)+\cdots\right]\mathrm{dt}_1\\ &= \frac{4\pi}{3}\mathrm{n}\left(\mathrm{t}_0\right)\left(\mathrm{t}_0-\mathrm{t}_z\right)^3\left[1+\frac{3}{2}\mathrm{H}_0\left(\mathrm{t}_0-\mathrm{t}_z\right)+\cdots\right].\end{aligned}$$

To evaluate $t_0 - t_z$ to $\theta\left(z^2\right)$ from Equation (1) we need the next term in Equation (2):

$$\mathrm{R}\left(\mathrm{t}_z\right) = \mathrm{R}\left(\mathrm{t}_0\right)\left[1-\mathrm{H}_0\left(\mathrm{t}_0-\mathrm{t}_z\right)-\frac{1}{2}\mathrm{q}_0\mathrm{H}_0^2\left(\mathrm{t}_0-\mathrm{t}_z\right)^2+\cdots\right].$$

This gives

$$\mathrm{H}_0\left(\mathrm{t}_0-\mathrm{t}_z\right) = z\left[1-z\left(1+\frac{\mathrm{q}_0}{2}\right)+\cdots\right]$$

and so, finally,

$$\mathrm{N}(z) = \frac{4\pi}{3}\frac{\mathrm{n}\left(\mathrm{t}_0\right)}{\mathrm{H}_0^3}z^3\left[1-\frac{3}{2}z\left(1+\mathrm{q}_0\right)+\cdots\right]$$

Note that the field equations did not enter to this order in z.

(b) The flux received at the Earth is given by

$$S = \frac{L^2\left(t_1\right)}{4\pi r_1^2 R^4\left(t_0\right)} \tag{3}$$

(cf. Problem 19.9 , where S was called ℓ). Thus, as in part (a),

$$\mathrm{N}(\ \mathrm{S}) = \int_{\mathrm{t_s}}^{\mathrm{t}_0} 4\pi \mathrm{R}^2\left(\mathrm{t}_1\right)\mathrm{r}^2\left(\mathrm{t}_1\right)\mathrm{n}\left(\mathrm{t}_1\right)\mathrm{dt}_1 \tag{4}$$

where, from Equation (3),

$$\frac{\mathrm{r}^2\left(\mathrm{t_s}\right)}{\mathrm{R}^2\left(\mathrm{t_s}\right)}=\frac{\mathrm{L}}{4\pi \mathrm{SR}^4\left(\mathrm{t_0}\right)} \tag{5}$$

When S is large, $t_0 - t_s$ is small and expanding the integral in Equation (4) as in part (a) gives

$$\mathrm{N}(\ \mathrm{S})=\frac{4\pi}{3}\mathrm{n}\left(\mathrm{t_0}\right)\left(\mathrm{t_0}-\mathrm{t_s}\right)^3\left[1+\frac{3}{2}\mathrm{H_0}\left(\mathrm{t_0}-\mathrm{t_s}\right)+\cdots\right]$$

Inserting the expansions for $r(t_s)$ and $R(t_s)$ in Equation (5) gives

$$\mathrm{t_0}-\mathrm{t_s}=\left(\frac{\mathrm{L}}{4\pi\ \mathrm{S}}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{3}{2}\mathrm{H_0}\left(\frac{\mathrm{L}}{4\pi\ \mathrm{S}}\right)^{\frac{1}{2}}+\cdots\right]$$

and so

$$\mathrm{N}(\ \mathrm{S})=\frac{4\pi}{3}\mathrm{n}\left(\mathrm{t_0}\right)\left(\frac{\mathrm{L}}{4\pi\ \mathrm{S}}\right)^{\frac{3}{2}}\left[1-3\mathrm{H_0}\left(\frac{\mathrm{L}}{4\pi\ \mathrm{S}}\right)^{\frac{1}{2}}+\cdots\right]$$

Solution 19.12. Choose a new radial coordinate χ, defined by $\mathrm{d}\chi^2 = \mathrm{dr}^2/\left(1-\mathrm{kr}^2\right)$. Then for a radial photon $\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\phi = 0$ and the metric coefficients are independent of χ along the ray. Therefore χ is an ignorable coordinate, and p_χ = constant along the ray (see Problem 7.13). Raising this index with the metric gives

$$\mathrm{p}^X = \mathrm{C}/\mathrm{R}^2(\mathrm{t})$$

where C is some constant. But $\mathrm{p}X = \mathrm{d}X/\mathrm{d}\lambda$, so

$$d\lambda = C^{-1}R^2(t)d\chi = C^{-1}\frac{R^2(t)dr}{(1-kr^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Note that since R is a function of t it is therefore a function of r along a past null ray.

Solution 19.13. In the comoving orthonormal frame we have $\mathrm{T}^{\hat{0}}\hat{0} = -\rho$, and $\mathrm{T}_{\hat{\mathrm{r}}} = \mathrm{T}\hat{\phi}_{\hat{\phi}} = \mathrm{T}_{\hat{\theta}} = \mathrm{p}$. The trace-reversed stress energy tensor $\overline{\mathrm{T}}$ thus has components $\overline{\mathrm{T}}^{\hat{\mathrm{O}}}_{\hat{\mathrm{o}}} = -\frac{1}{2}(\rho + 3\mathrm{p})$, and $\overline{\mathrm{T}}^{\hat{\mathrm{i}}}_{\hat{\mathrm{i}}} = \frac{1}{2}(\rho - \mathrm{p})$. We equate this to $1/8\pi\mathrm{G}$ times the Ricci tensor. The Ricci tensor can be calculated e.g. from the results of Problem 9.20 (general spherically symmetric metric). The components are:

$$\mathrm{R}^{\hat{0}}_{\hat{0}} = 3\ddot{R}/R$$
$$\mathrm{R}^{\hat{\mathrm{i}}}_{\hat{\mathrm{i}}} = \frac{1}{\mathrm{R}^2}\left(R\ddot{\mathrm{R}} + 2\dot{\mathrm{R}}^2 + 2\mathrm{k}\right).$$

The equations in the problem now follow immediately. If, equivalently, the Einstein tensor $\mathrm{G}_{\mu\nu}$ (trace reverse Ricci tensor) had been equated to $8\pi\ \mathrm{T}_{\mu\nu}$, two linear combinations of the equations would have been obtained.

Solution 19.14. Simply eliminating $\ddot{R}$ from the simultaneous equations in Problem 19.13 gives the first equation here. The second follows from this, from the identity $\frac{1}{2}d\left[(\dot{R})^2\right]/dR = \ddot{R}$, and from Equation (1) of Problem 19.13:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dR}}\left(\frac{8\pi\mathrm{G}}{3}\rho\mathrm{R}^2\right)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dR}}(\dot{\mathrm{R}})^2=\ddot{\mathrm{R}}=-\frac{4}{3}\pi\mathrm{G}(\rho+3\mathrm{p})\mathrm{R}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dR}}\left(\rho\mathrm{R}^2\right)=-(\rho+3\mathrm{p})\mathrm{R}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dR}}\left(\rho\mathrm{R}^3\right)=-3\mathrm{pR}^2$$

Solution 19.15. Equation (1) follows immediately from the definition $\mathrm{H} = \dot{\mathrm{R}}/\mathrm{R}$ and the first-order Friedmann equation (Problem 19.14)

$$\dot{\mathrm{R}}^2+\mathrm{k}=\frac{8\pi\mathrm{G}}{3}\rho\mathrm{R}^2.$$

If we now take d/dR on this equation, use the identity $\frac{1}{2}\ \mathrm{d}\left[(\dot{\mathrm{R}})^2\right]/\mathrm{dR} = \ddot{\mathrm{R}}$, the other first order equation $\mathrm{d}\left(\rho\mathrm{R}^3\right)/\mathrm{dR} = -3\mathrm{pR}^2$ and the definition $q = -\ddot{R}R/\dot{R}^2$, we get Equation (2). If $\rho \gg p$ then the left side of Equation (2) is negligible compared with the right side, and Equation (3) results. Equation (4) is immediate upon substituting Equation (3) into Equation (1). If $p = 1/3\rho$, then eliminating ρ from Equations (1) and (2) gives Equation (5), while eliminating the k/R^2 term gives Equation (6).

Solution 19.16. Using $\mathrm{T}^0_0 = -\rho$, and $\mathrm{T}^{\mathrm{j}}_{\mathrm{j}}$ (no sum) = p, and $\mathrm{p}_{,\mathrm{j}} = 0$ (homogeneity) the $\mu = \mathrm{j}$ component is

$$0 = \mathrm{T}^{\nu}_{\mathrm{j};\nu} = \mathrm{T}^{\nu}_{\mathrm{j},\nu} - \mathrm{T}^{\nu}_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mathrm{j}\nu} + \mathrm{T}^{\alpha}_{\mathrm{j}}\Gamma^{\nu}_{a\nu}$$
$$= \mathrm{p}_{,\mathrm{j}} + \rho\Gamma^{0}_{\mathrm{j}0} - \mathrm{p}\Gamma^{\mathrm{k}}_{\mathrm{jk}} + \mathrm{p}\Gamma^{\nu}_{\mathrm{j}\nu} = (\rho + \mathrm{p})\Gamma^{0}_{\mathrm{j}0} = 0$$

which is a tautology. The $\mu = 0$ component gives

$$0 = \mathrm{T}^{\nu}_{0;\nu} = \mathrm{T}^{\nu}_{0,\nu} - \mathrm{T}^{\nu}_{a}\Gamma^{a}_{0\nu} + \mathrm{T}^{a}_{0}\Gamma^{\nu}_{a\nu}$$
$$= -\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{dt}} + \rho\Gamma^{0}_{00} - (\rho + \mathrm{p})\left(\log\left|\mathrm{g}^{\frac{1}{2}}\right.\right)_{,0}$$

where $\Gamma^{a}_{a\beta} = \left(\log|g|^{\frac{1}{2}}\right), \beta$ has been used (see Problem 7.7). Thus and

$$\mathrm{d}\rho/\mathrm{dt} = -\frac{(\rho + \mathrm{p})}{\mathrm{R}^3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\mathrm{R}^3\right)$$
$$\mathrm{d}\left(\rho\mathrm{R}^3\right) = -3\mathrm{p}\mathrm{R}^2\mathrm{dR}$$

which we recognize as one of the first-order Friedmann equations (see Problem 19.14).
Solution 19.17. With $\mathrm{p} = \rho = 0$, and $\mathrm{k} = -1$, the first-order Friedmann equation

$$\dot{\mathrm{R}}^2 + \mathrm{k} = \frac{8\pi\mathrm{G}}{3}\rho\mathrm{R}^2$$

becomes $\mathrm{R} = 1$ which implies $\mathrm{R} = \mathrm{t}$ and thus the metric given is correct. Since the metric is spherically symmetric, the curvature radial coordinate is

$$\mathrm{r} = \mathrm{t}\sinh\chi.$$

It is not hard to guess a time coordinate

$$T = t\cosh\chi$$

and then to compute the transformed metric

$$\mathrm{ds}^2 = -\mathrm{dT}^2 + \mathrm{dr}^2 + \mathrm{r}^2\left(\ \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\ \mathrm{d}\phi^2\right)$$

which is empty Minkowski space.
Solution 19.18.
(a) When matter dominates, we ignore pressure so that mass-energy density decreases in proportion to the increase in volume of the universe, and

$$\rho = \rho_0\left(\frac{\mathrm{R}_0}{\mathrm{R}}\right)^3. \tag{1}$$

Define a new time coordinate ("development angle") by $\mathrm{d}\eta = \mathrm{dt}/\mathrm{R}$. Then the Friedmann equation becomes

$$\left(\frac{\dot{\mathrm{R}}}{\mathrm{R}}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{dR}/\mathrm{d}\eta}{\mathrm{R}^2}\right)^2 = \frac{8\pi\mathrm{G}}{3}\rho_0\left(\frac{\mathrm{R}_0}{\mathrm{R}}\right)^3 - \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{R}^2} \tag{2}$$

or

$$\mathrm{R}^{-\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{dR}}{\mathrm{d}\eta} = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\mathrm{R}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{8\pi\mathrm{G}}{3}\rho_0\mathrm{R}_0^3 - \mathrm{kR}\right)^{\frac{1}{2}}$$

which integrates to give

$$\frac{1}{2}\eta = \int_0^{\mathrm{R}^{\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{dR}^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{8\pi}{3}\rho_0\mathrm{R}_0^3 - \mathrm{kR}\right)^{\frac{1}{2}}} = \begin{cases} \sin^{-1}\frac{\mathrm{R}^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{8}{3}\pi\mathrm{G}\rho_0\mathrm{R}_0^3\right)^{\frac{1}{2}}} & \mathrm{k} = +1 \\ \frac{\mathrm{R}^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{8\pi\mathrm{G}}{3}\rho_0\mathrm{R}_0^3\right)^{\frac{1}{2}}} & \mathrm{k} = 0 \\ \sinh^{-1}\frac{\mathrm{R}^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{8\pi\mathrm{G}}{3}\rho_0\mathrm{R}_0^3\right)^{\frac{1}{2}}} & \mathrm{k} = -1 \end{cases} \tag{3}$$

From Problem 19.15 we know

$$\mathrm{q}_0 = \frac{4\pi\mathrm{G}}{3}\frac{\rho_0}{\mathrm{H}_0^2} \tag{4}$$

and

$$\mathrm{R}_0^2 = \frac{\mathrm{k}}{(2\mathrm{q}_0 - 1)\,\mathrm{H}_0^2} \quad (\mathrm{k} = \pm 1) \tag{5}$$

We see that since the left side is positive, $\mathrm{k} = \operatorname{sign}(2\mathrm{q}_0 - 1)$. Thus in Equation (3)

$$\frac{8\pi}{3}\rho_0 \mathrm{R}_0^3 = \frac{2\mathrm{q}_0}{\mathrm{H}_0\,|(2\mathrm{q}_0-1)|^{\frac{3}{2}}} \quad (\mathrm{k} = \pm 1)$$

Inverting Equation (3) gives

$$\mathrm{R} = \begin{cases} \frac{\mathrm{q}_0}{\mathrm{H}_0(2\mathrm{q}_0-1)^{\frac{3}{2}}}(1-\cos\eta) & \mathrm{k}=1 \\ \frac{1}{4}\mathrm{H}_0^2\mathrm{R}_0^3\eta^2 & \mathrm{k}=0 \\ \frac{\mathrm{q}_0}{\mathrm{H}_0(1-2\mathrm{q}_0)^{\frac{3}{2}}}(\cosh\eta-1) & \mathrm{k}=-1 \end{cases}$$

Now integrating $\mathrm{dt} = \mathrm{R}\mathrm{d}\eta$ gives

$$\mathrm{t} = \begin{cases} \frac{\mathrm{q}_0}{\mathrm{H}_0(2\mathrm{q}_0-1)^{\frac{3}{2}}}(\eta-\sin\eta) & \mathrm{k}=1 \\ \frac{1}{12}\mathrm{H}_0^2\mathrm{R}_0^3\eta^3 & \mathrm{k}=0 \\ \frac{\mathrm{q}_0}{\mathrm{H}_0(1-2\mathrm{q}_0)^{\frac{3}{2}}}(\sinh\eta-\eta) & \mathrm{k}=-1 \end{cases}$$

The fact that R_0 cannot be eliminated from the $k = 0$ case merely reflects the fact that the universe here has an arbitrary scaling and its geometry looks the same at all times. The value of R_0 will not enter the computation of any physically measurable quantity.
(b) When radiation dominates, the mass-energy in a given comoving volume is not constant. There is an extra decrease in density from the redshift of photons, so

$$\rho = \rho_0\left(\frac{\mathrm{R}_0}{\mathrm{R}}\right)^4$$

The analog of Equation (2) is

$$\left(\frac{\dot{\mathrm{R}}}{\mathrm{R}}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{dR}/\mathrm{d}\eta}{\mathrm{R}^2}\right)^2 = \frac{8\pi\mathrm{G}}{3}\rho_0\left(\frac{\mathrm{R}_0}{\mathrm{R}}\right)^4 - \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{R}^2}$$

or

$$\frac{\mathrm{dR}}{\left(\frac{8}{3}\pi\mathrm{G}\rho_0\mathrm{R}_0^4 - \mathrm{kR}^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \mathrm{d}\eta$$

which has solutions:

$$\mathrm{R} = \left(\frac{8\pi}{3}\mathrm{G}\rho_0\mathrm{R}_0^4\right)^{\frac{1}{2}} \times \begin{cases} \sin\eta & \mathrm{k}=1 \\ \eta & \mathrm{k}=0 \\ \sinh\eta & \mathrm{k}=-1 \end{cases} \tag{6}$$

Instead of Equation (4), we now get (Problem 19.15)

$$\mathrm{q}_0 = \frac{8\pi\mathrm{G}}{3}\frac{\rho_0}{\mathrm{H}_0^2}$$

and instead of Equation (5), we have

$$\mathrm{R}_0^2 = \frac{\mathrm{k}}{(\mathrm{q}_0-1)\,\mathrm{H}_0^2} \quad (\mathrm{k} = \pm 1)$$

Equation (6) therefore becomes

$$\frac{8\pi}{3}G\rho_0 R_0^4 = \begin{cases} \frac{q_0}{(q_0-1)^2 H_0^2} & \mathrm{k}=\pm 1 \\ H_0^2 R_0^4 & \mathrm{k}=0 \end{cases}$$

and integrating for t gives

$$\mathrm{t} = \begin{cases} \frac{1}{\mathrm{H}_0}\left[\frac{\mathrm{q}_0^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{q}_0-1}\right](1-\cos\eta) & \mathrm{k}=1 \\ \frac{1}{2}\mathrm{H}_0\mathrm{R}_0^2\eta^2 & \mathrm{k}=0 \\ \frac{1}{\mathrm{H}_0}\left[\frac{\mathrm{q}_0^{\frac{1}{2}}}{1-\mathrm{q}_0}\right](\cosh\eta-1) & \mathrm{k}=-1 \end{cases}$$

Solution 19.19. After the bullet has reached nonrelativistic velocity, we have (from Problem 19.7)

$$\frac{\text{constant}}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{dr_p}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{dr_p}}{\mathrm{dr}}\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dR}}\frac{\mathrm{dR}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dR}}\dot{\mathrm{R}}\mathrm{R} \tag{1}$$

where r is the Robertson-Walker coordinate, related to proper separations ($r_p \equiv$ proper separation) by $dr_p = Rdr$ (hence the last equality above). For a k = 0 Friedmann universe $\mathrm{R} \propto \mathrm{t}^{\frac{2}{3}}$ so $\mathrm{R} \propto \mathrm{R}^{-\frac{1}{2}}$ and Equation (1) gives us $dr/dR \propto R^{-\frac{3}{2}}$ and hence

$$r = A + B/R^{\frac{1}{2}}.$$

As $t \to \infty$, the r_{bullet} approaches $r = A$. The proper distance between the r = A observer and the bullet is $\mathrm{R}\Delta\mathrm{r} = \mathrm{BR}^{\frac{1}{2}}$. Thus the proper distance becomes infinite even though the velocities (according to Equation (1)) approach each other.

If k = −1, then $\dot{\mathrm{R}}$ becomes constant at large times and Equation (1) gives $dr/dR \propto R^{-2}$ so that

$$r = A + B/R$$

As $t \to \infty$ the bullets coordinate r approaches A, but the proper distance to the $r = A$ observer $R\Delta r$ approaches B, a constant.

Solution 19.20. Measuring time in terms of development angle η defined by $\mathrm{d}\eta = \mathrm{dt}/\mathrm{R(t)}$, the Friedmann metric for a radial ($\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\phi = 0$) photon becomes

$$0 = \mathrm{ds}^2 = \mathrm{R}^2(\eta)\left(-\mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}\chi^2\right)$$

where $\mathrm{d}\chi^2 = \mathrm{dr}^2/\left(1 - \mathrm{r}^2\right)$ is the "trigonometric" radial coordinate on the 3 -sphere (see Problem 19.5). From Problem 19.18 we see that the universe lives an interval $\Delta\eta = 2\pi$ (time between two zeros of R), so in this time a photon can propagate $\Delta_X = 2\pi$, i.e. exactly once around the universe.

Solution 19.21. For a k = 0 Friedmann universe we have

$$\mathrm{R(t)/R_0} = \left(\frac{3}{2}\mathrm{H_0 t}\right)^{\frac{2}{3}}$$

The energy emitted per source per unit proper time is L. This is redshifted by a factor $R(t)/R_0$, so the total energy per star which is now present is

$$\xi = \int_0^{t_0} L\frac{R(t)}{R_0}dt = \frac{3}{5}L\left(\frac{3}{2}H_0\right)^{\frac{2}{3}} t_0^{5/3}$$

or $\mathscr{E} = 2L/5H_0$ since $t_0 = 2/3H_0$. The energy per volume, u, now is thus $\frac{2}{5}\mathrm{H_0^{-1}Ln}$. Since the energy fills the universe isotropically, it corresponds to a flux

$$\mathrm{B} = \frac{\mathrm{c}}{4\pi}\mathrm{u} = \frac{\mathrm{c}}{10\pi}\mathrm{H_0^{-1}Ln}$$

[By comparison, a Newtonian universe where the stars "turned on" a time $\mathrm{t_0} = \left(\frac{3}{2}\mathrm{H_0}\right)^{-1}$ ago would have

$$\tilde{G} = \int_0^{t_0} \mathrm{Ldt} = \frac{2}{3}\mathrm{H_0^{-1}\ L}$$
$$\mathrm{B} = \frac{\mathrm{c}}{6\pi}\mathrm{H_0^{-1}Ln.}\Big]$$

Solution 19.22. From the solution of Problem 19.18, if $q_0 > 0.5$ we must thave a k = +1 cosmology which expands according to

$$\mathrm{R(t)/R_0} = \frac{\mathrm{q_0}}{2\mathrm{q_0} - 1}(1 - \cos\eta) \tag{1}$$

Setting $\mathrm{R(t)} = \mathrm{R_0}$, so that $\eta = \eta_0$, gives a formula which relates η_0 to $\mathrm{q_0}$ at the present epoch. The epoch is arbitrary, however, so it also relates η and q at any epoch. Putting q = 0.5002 gives $1 - \cos\eta = .0008$ at $z = 1500$. Substituting this back into Equation (1) and putting $R_0/R(t) = 1 + z = 1501$, we can solve for q_0, getting

$$q_0 = [2 - (1 + z)(1 - \cos\eta)]^{-1} = 1.25$$

If $\mathrm{q_0} < 0.5$, the k = −1 analogy of Equation (1) is

$$\mathrm{R(t)/R_0} = \frac{\mathrm{q_0}}{1 - 2\mathrm{q_0}}(\cosh\eta - 1) \tag{2}$$

so q = .4998 gives $\cosh\eta - 1 = .0008$ at $z = 1500$ and

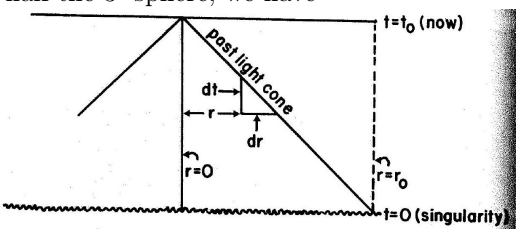
$$\mathrm{q_0} = [2 + (1 + z)(\cosh\eta - 1)]^{-1} = 0.312$$

Solution 19.23.

(a) At the present epoch $t = t_0$, the spacelike 3 -surface has the metric

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{R}_0^2 \left(\frac{\mathrm{dr}^2}{1-\mathrm{r}^2} + \mathrm{r}^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \, \mathrm{d}\phi^2 \right) \right)$$

Noting that $0 \leq r \leq 1$ covers half the 3 -sphere, we have



$$V = \int_{3-s \text{ phere}} \left| {}^{(3)}g \right|^{\frac{1}{2}} d^3x = 2\int_0^1 dr \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \int_0^{2\pi} d\phi \frac{R_0^3 r^2}{(1-r^2)^{\frac{1}{2}}} = 2\pi^2 R_0^3$$

For a matter dominated universe (see Problem 19.15)

$$\mathrm{R}_0 = \mathrm{H}_0^{-1} \left(2\mathrm{q}_0 - 1\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{1}$$

so

$$\mathrm{V} = 2\pi^2 \left(2\mathrm{q}_0 - 1\right)^{-\frac{3}{2}} \mathrm{H}_0^{-3} \tag{2}$$

(b) Our past light cone sweeps outward a proper radial distance cdt in a time dt (see figure). From the metric, the proper area of a 2 -sphere is $4\pi r^2 R^2$, where r and R are both functions of t along the light cone. Thus, the visible volume is ($c = 1$ now)

$$\mathrm{V} = \int_0^{\mathrm{t}_0} \mathrm{dt} 4\pi \mathrm{r}^2(\mathrm{t}) \mathrm{R}^2(\mathrm{t}) \tag{3}$$

The differential equation for $r(t)$ follows from its definition as a null cone:

$$-dt = \frac{R(t)}{(1-r^2)^{\frac{1}{2}}} dr \tag{4}$$

and $r = 0$ at $t = t_0$. To solve Equation (4) and evaluate the integral in
Equation (3), we use the solution for $R(t)$ parameterized by "development angle" η (see the solution to Problem 19.18).

$$\mathrm{R} = \mathrm{A}(1 - \cos\eta), \quad \mathrm{t} = \mathrm{A}(\eta - \sin\eta) \tag{5}$$

where

$$A = \frac{q_0}{(2q_0 - 1)^{\frac{3}{2}} H_0} \tag{6}$$

and the current value of η is

$$\eta_0 = \cos^{-1}\left(\frac{1-\mathrm{q}_0}{\mathrm{q}_0}\right) \tag{7}$$

Equation (4) now becomes $d\left(\sin^{-1} r\right) = d\eta$ so that

$$\mathbf{r} = \sin\left(\eta_0 - \eta\right) \tag{8}$$

and Equation (3) becomes

$$\mathrm{V} = \int_0^{\eta_0} \mathrm{A}(1-\cos\eta)\mathrm{d}\eta 4\pi \sin^2\left(\eta_0 - \eta\right) \mathrm{A}^2 (1-\cos\eta)^2$$

This straightforward integral gives

$$\mathrm{V} = 4\pi \ \mathrm{A}^3 \left(\frac{61}{80}\sin 2\eta_0 + \frac{5}{4}\eta_0 - \frac{5}{2}\sin\eta_0 - \frac{3}{8}\eta_0 \cos 2\eta_0 + \frac{1}{30}\sin 3\eta_0 \right)$$

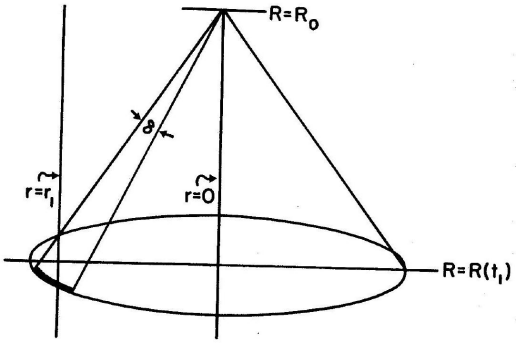
which can be reduced with Equations (6) and (7) to a function of q_0 and H_0.
(c) The farthest coordinate radius that we see is, according to Equation (8),

$$\mathrm{r}_0 = \sin\left(\eta_0\right) = \left(2\mathrm{q}_0 - 1\right)^{\frac{1}{2}} / \mathrm{q}_0$$

where Equation (7) has been used. The volume out to this coordinate radius at the present epoch is (analogously to part (a))

$$\mathrm{V} = 4\pi \int_0^{\mathrm{r_0}} \frac{\mathrm{R_0^3 r^2 dr}}{\left(1-\mathrm{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = 2\pi \mathrm{R_0^3}\left[\sin^{-1}\mathrm{r_0} - \mathrm{r_0}\left(1-\mathrm{r_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$= \frac{2\pi}{\mathrm{H_0^3}\left(2\mathrm{q_0}-1\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\cos^{-1}\left(\frac{1-\mathrm{q_0}}{\mathrm{q_0}}\right) - \frac{\left(1-\mathrm{q_0}\right)\left(2\mathrm{q_0}-1\right)^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{q_0^2}}\right].$$

Solution 19.24.



From the figure and the Robertson-Walker line element, $\ell = [r_1 R(t_1)]\,\delta$. We can express $R(t_1)$ as $R_0/(1+z)$; the hard part is now to compute r_1 : Use the η, χ form of the metric from Problem 19.5. Then $\mathrm{r_1} = \Sigma(\chi_1)$. The path of a photon is $0 = \mathrm{R^2}\left(\mathrm{d}\chi^2 - \mathrm{d}\eta^2\right)$, so $\chi_1 = \eta(\mathrm{t_0}) - \eta(\mathrm{t_1})$, and using the formula for $\sin(A-B), \sinh(A-B)$ we have:

$$\mathrm{r_1} = \Sigma(\eta_0)\,\mathrm{C}(\eta_1) - \Sigma(\eta_1)\,\mathrm{C}(\eta_0) \tag{1}$$

[Here C means $\cos, 1$, or $\cosh$ for $\mathrm{k} = 1, 0, -1$.] Now we need the formula relating η of an epoch to its redshift and the current value of q (Problem 19.18):

$$1 - C(\eta) = \frac{2\mathrm{q_0}-1}{\mathrm{q_0}}\frac{1}{1+z}$$
$$C(\eta) = \frac{\mathrm{q_0}z - \mathrm{q_0} + 1}{\mathrm{q_0}(1+z)}$$

(This is true for all three values of k .) With this result we have

$$\Sigma(\eta) = \frac{\left|2\mathrm{q_0}-1\right|^{\frac{1}{2}}\left(2\mathrm{q_0}z+1\right)^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{q_0}(1+z)}$$

$$\mathrm{r_1} = \frac{\left|2\mathrm{q_0}-1\right|^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{q_0^2}(1+z)}\left[1 - \mathrm{q_0} + \mathrm{q_0}z - \left(1-\mathrm{q_0}\right)\left(1+2\mathrm{q_0}z\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

So the apparent angle is

$$\delta = \ell / r_1 R(t_1) = \ell(1+z)/r_1 R_0,$$

and when we use Equation (3) of Problem 9.15 to eliminate R_0 we get, finally,

$$\delta = \frac{\ell H_0 (1+z)^2 q_0^2}{\left[1 - q_0 + q_0 z - (1-q_0)\left(1+2q_0 z\right)^{\frac{1}{2}}\right]}$$

Solution 19.25. We work with units which make $c = k = 1$. The density of matter (m_p = average baryon mass) is $\rho_{\mathrm{matt}} = m_p n$. The density of radiation is $\rho_{\mathrm{rad}} = \mathrm{KaT^4}$, where a is the radiation constant $= \left(8\pi^5\right)/\left(15\ \mathrm{h^3}\right)$ and K is 1 (considering photons only) or $1 + \frac{7}{4}\left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} = 1.454$ (considering photons and neutrinos - see. Weinberg, p. 537). Equating these give

$$1 = \frac{\rho_{\mathrm{rad}}}{\rho_{\mathrm{matt}}} = \frac{\mathrm{KaT^4}}{\mathrm{nm_p}} \tag{1}$$

The Saha equation for the fractional ionization x of hydrogen is

$$\frac{x^2}{1-x} = \frac{\left(2\pi m_e kT\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}a^2 m_e/kT\right)}{nh^3}$$

($\mathrm{m_e}$ = electron mass, $\alpha = 1/137$). If recombination is defined by the left side of this equation being about unity, Equation (1) gives us

$$\exp\left(\frac{1}{2}a^2\ \mathrm{m_e/kT}\right) = \frac{15\,(2\pi\ \mathrm{m_e\ T})^{\frac{3}{2}}\ \mathrm{m_p}}{8\pi^5\mathrm{KT}^4}$$

Obviously the exponential sets the scale of the solution, $\mathrm{T} \sim \alpha^2\ \mathrm{m_e}$; guessing a coefficient, computing the right side, and iterating once gives
more accurately: $\mathrm{T} \approx \frac{1}{80}a^2\ \mathrm{m_e}$ (cf. Problem 19.26). So, finally, when matter dominance and recombination occur at the same temperature T, we get

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{4}{3}\frac{aT^3}{n} = \frac{4}{3}\frac{m_p}{TK}\left(\frac{KaT^4}{m_p n}\right)\\ &= \frac{4}{3}\frac{m_p}{K\left(\frac{1}{80}a^2 m_e\right)} = \frac{320}{3K}(137)^2(1836)\\ &\approx 4\times 10^9\end{aligned}$$

Solution 19.26. The Saha equation for the equilibrium fractional ionization of hydrogen is (units with $k = c = 1$)

$$\frac{\mathrm{x}^2}{1-\mathrm{x}} = \frac{(2\pi\ \mathrm{m_e\ T})^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{B/T}}}{\mathrm{nh}^3} \tag{1}$$

where B is the ionization energy $= \frac{1}{2}a^2 m_e (a = 1/137)$, and n is the number density of protons plus atoms. The value of n is related to σ, the entropy per baryon by

$$\sigma = \frac{4}{3}\frac{\mathrm{aT}^3}{\mathrm{n}}$$

so if we take $x = 1/2$ and use $a = 8\pi^5/15h^3$, Equation (1) becomes

$$\frac{2^{\frac{1}{2}}4\pi^{7/2}}{45}\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{m_e}}\right)^{\frac{3}{2}} = \exp\left[-\frac{\mathrm{m_e/T}}{2(137)^2}\right]$$

This is easily solved by iteration. For example, iterating twice:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{m_e}}{\mathrm{T}} &= 2(137)^2\left(\log\frac{\sigma}{6.908} + \frac{3}{2}\log\frac{\mathrm{m_e}}{\mathrm{T}}\right)\\ &\approx \frac{\mathrm{m_e}}{2(137)^2}\left[\log\frac{\sigma}{6.908} + \frac{3}{2}\left(10.53 + \log\log\frac{\sigma}{6.908}\right)\right]^{-1}\\ &= \begin{cases} 4330^\circ\mathrm{K\ for}\ \sigma = 10^8\\ 4050^\circ\mathrm{K\ for}\ \sigma = 10^9\end{cases}\end{aligned}$$

Solution 19.27. From Problem 19.18, near the singularity in the radiationdominated regime,

$$\mathrm{R} = \left(\frac{8\pi}{3}\rho_0\mathrm{R}_0^4\right)^{\frac{1}{2}}\eta, \quad \mathrm{t} = \left(\frac{8\pi}{3}\rho_0\mathrm{R}_0^4\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\eta^2}{2} \tag{1}$$

(This equation holds for any value of k in the limit $\eta \to 0$.) Thus we have

$$t^2 = \frac{3R^4}{32\pi\rho_0 R_0^4} = \frac{3}{32\pi\rho} \tag{2}$$

where we have used $\rho \propto \mathrm{R}^{-4}$ for the radiation-dominated era. The photon energy-density is

$$\rho_\gamma = \frac{8\pi}{\mathrm{h}^3}\int_0^\infty \frac{\mathrm{q}^3\mathrm{dq}}{\exp(\mathrm{q/kT}) - 1} = \mathrm{a\ T}^4$$

where a is the Stefan-Boltzmann constant $8\pi^5 k^4/15h^3$. For highly relativistic electrons and positrons (which obey Fermi-Dirac Statistics)

$$\rho_{\mathrm{e}+} = \rho_{\mathrm{e}-} = \frac{8\pi}{\mathrm{h}^3}\int_0^\infty \frac{\mathrm{q}^3\mathrm{dq}}{\exp(\mathrm{q/kT}) + 1} = \frac{7}{8}\mathrm{a\ T}^4.$$

Thus the total mass-energy density is

$$\rho = \rho_\gamma + \rho_{\mathrm{e}+} + \rho_{\mathrm{e}-} = \frac{11}{4}\mathrm{aT}^4$$

and so

$$T = \left(\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{32\pi a}\right)^{\frac{1}{4}} t^{-\frac{1}{2}}$$

If neutrinos are included and we assume they have zero chemical potential (cf. Weinberg, Section 15.6), then since they have only one spin state,

$$\rho_{\nu_e} = \rho_{\bar{\nu}_e} = \rho_{\nu_\mu} = \rho_{\bar{\nu}_\mu} = \frac{7}{16}\mathrm{aT}^4$$
$$\rho = \frac{11}{4}\mathrm{aT}^4 + \frac{7}{4}\mathrm{aT}^4 = \frac{9}{2}\mathrm{aT}^4$$
$$\mathrm{T} = \left(\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{32\pi\mathrm{a}}\right)^{\frac{1}{4}} \mathrm{t}^{-\frac{1}{2}}$$

Solution 19.28. For relativistic particles, E ≈ p, the equilibrium density at a temperature T is (see the solution to Problem 19.27):

$$\rho(T) = \int En(p)dp = \begin{cases} aT^4 & \text{for photons} \\ \frac{7}{16}aT^4 & \text{for each neutrino species} \\ \frac{7}{8}aT^4 & \text{for each electron or muon species.} \end{cases}$$

Here a is Stefan's constant $= \left(8\pi^5 k^4\right) / \left(15h^3\right)$. For this problem, then, we have

$$\rho(\mathrm{T}) = \left\{ \begin{array}{ll} \left(1 + 4\cdot\frac{7}{16} + 4\cdot\frac{7}{8}\right)\mathrm{aT}^4 & \text{at } \mathrm{R}_1 \\ \left(1 + 4\cdot\frac{7}{16} + 2\cdot\frac{7}{8}\right)\mathrm{aT}^4 & \text{at } \mathrm{R}_2 \end{array} \right\} \equiv \mathrm{KaT}^4,$$
$$\mathrm{K}_1 = 25/4, \quad \mathrm{K}_2 = 18/4.$$

We now use the fact that the expansion of the universe is isentropic. The entropy per volume of such a relativistic gas is calculated from the first law of thermodynamics to be

$$\frac{S}{V} = \frac{4}{3}KaT^3$$

Since V, the volume, varies as the expansion factor cubed, we have

$$\text{constant } = S \propto \frac{4}{3}Ka(RT)^3$$

giving for isentropic expansion

$$\mathrm{K}_1\mathrm{R}_1^3\ \mathrm{T}_1^3 = \mathrm{K}_2\mathrm{R}_2^3\ \mathrm{T}_2^3$$

and

$$T_2 = T_1\left(\frac{R_1}{R_2}\right)\left(\frac{25}{18}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Physically, this result says that in annihilating, the muons dump their energy (actually entropy) into the remaining particles, and increase their
temperature by a factor $(25/18)^{\frac{1}{3}}$ over the expected first-power decrease of T with R.

Solution 19.29. The standard model produces helium and deuterium by (roughly speaking) (1) freezing out a nonequilibrium neutron/proton ratio when the weak interactions for $n \to p$ become slower then the timescale for the expansion to drop the temperature, (2) making deuterium by $\mathrm{n} + \mathrm{p} \to \mathrm{d} + \gamma$ while most free neutrons have not yet decayed, and (3) using up almost all d by $\mathrm{d} + \mathrm{d} \to \mathrm{He}^3$ or H^3+ etc., He^3. or $\mathrm{H}^3 + \mathrm{d} \to \mathrm{He}^4$+ etc.

We can thus answer the problem:
(i) There is no change in freezing out ratio, but higher baryon densities at any given temperature give more "cooking," therefore more complete transformation to He^4 : more He^4, less d .
(ii) The $n \to p$ reactions is slower, so more frozen out neutrons; other rates not changed, so: more He^4, more d .
(iii) The reaction $\mathrm{n} + \nu \leftrightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^-$is driven to the right by the degeneracy (Fermi) energy of the neutrinos; fewer neutrons give less He^4, less d.
(iv) This is similar to (iii) but for $\nu + \mathrm{p} \leftrightarrow \mathrm{n} + \mathrm{e}^+$, giving more He^4, more d .
(v) The expansion time is related to density by

$$\mathrm{t} = \left(\frac{3}{32\pi\mathrm{G}\rho}\right)^{\frac{1}{2}} + \text{ constant}$$

Increased G thus means smaller times spent in each density stage. This gives a higher n/p ratio. The small change in G does not substantially affect the fact that the neutrons are almost all consumed to d, since the decay time is still long, so: more d , more He^4.

Solution 19.30. The cosmological constant is equivalent to a perfect fluid with effective density and pressure

$$\rho_{\text{eff}} = (8\pi)^{-1}\Lambda, \quad \mathrm{p}_{\text{eff}} = -(8\pi)^{-1}\Lambda$$

The dynamical equations of Problem 19.14 become

$$\dot{\mathrm{R}}^2 = \frac{1}{3}\Lambda \mathrm{R}^2$$

with solution

$$R = R_0 e^{t/T_0}, \quad T_0^{-1} = \frac{1}{3}\Lambda.$$

The metric is then

$$ds^2 = -dt^2 + R_0^2 e^{2t/T_0}\left(dr^2 + r^2 d\Omega^2\right)$$

To transform this to a manifestly static form, introduce a "curvature coordinate"

$$r' = R_0 e^{t/T_0} r$$

so that the metric becomes

$$ds^2 = -dt^2 + \left(dr' - r' dt/T_0\right)^2 + r'^2 d\Omega^2$$

Now eliminate $g_{r'}$ t by the transformation

$$\mathrm{t} = \mathrm{t}' + \frac{1}{2}\,\mathrm{T}_0 \log\left(\frac{\mathrm{r}^2}{\mathrm{T}_0^2} - 1\right)$$

and find

$$\mathrm{ds}^2 = -\left(1 - \frac{\mathrm{r}'^2}{\mathrm{T}_0^2}\right)\mathrm{dt}'^2 + \left(1 - \frac{\mathrm{r}'^2}{\mathrm{T}_0^2}\right)^{-1}\mathrm{dr}'^2 + \mathrm{r}'^2\,\mathrm{d}\Omega^2 \tag{2}$$

The interpretation of Equation (1) as a nonstatic cosmological model is based on the assumption that the coordinates are comoving with the galaxies, the density of which is negligible in the dynamical equations.

Solution 19.31. The complete set of equations for isotropic, homogeneous universes is (see Problems 19.13 or 19.14)

$$\left(\frac{\dot{\mathrm{R}}}{\mathrm{R}}\right)^2 = \frac{-\mathrm{k}}{\mathrm{R}^2} + \frac{8\pi\rho}{3} \tag{1a}$$

$$2\frac{\ddot{\mathrm{R}}}{\mathrm{R}} = -\left(\frac{\dot{\mathrm{R}}}{\mathrm{R}}\right)^2 - \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{R}^2} - 8\pi\mathrm{p} \tag{1b}$$

Since the universe contains only dust stress-energy, ρ_0, and "vacuum polarization" stress-energy Λ, we have

$$\rho = \rho_0 + \Lambda/8\pi \tag{2a}$$

$$\mathrm{p} = -\Lambda/8\pi \tag{2b}$$

Since all time derivatives of R higher than the second may be expressed as linear combinations of $\dot{R}$ and $\ddot{R}$ by Equations (1), the necessary and sufficient condition for a static solution is

$$\dot{\mathrm{R}} = \ddot{\mathrm{R}} = 0 \tag{3}$$

With the conditions of Equations (3) and (2), Equations (1) become

$$\mathrm{k}/\mathrm{R}^2 = \left(8\pi\rho_0 + \Lambda\right)/3 \tag{4a}$$

$$\mathrm{k}/\mathrm{R}^2 = \Lambda \tag{4b}$$

which imply

$$\rho_0 = \Lambda/4\pi \tag{5a}$$

$$R = \Lambda^{-\frac{1}{2}} \tag{5b}$$

Since $\rho_0 > 0$, Equation (4b) now implies $k = +1$. To investigate the stability of the "Einstein universe," first combine Equations (1) to give

$$\frac{2\ddot{\mathrm{R}}}{\mathrm{R}} = -\frac{8\pi}{3}\rho - 8\pi\mathrm{p} = -\frac{8\pi}{3}\rho_0 + \frac{2}{3}\Lambda \tag{6}$$

and let

$$\mathrm{R} = \Lambda^{-\frac{1}{2}} + \delta\mathrm{R} \tag{7a}$$

$$\rho_0 = \frac{\Lambda}{4\pi} + \delta\rho_0 \tag{7b}$$

Equation (6), to order δR, now becomes

$$2\Lambda^{\frac{1}{2}}(\delta\ddot{\mathrm{R}}) = -\frac{8\pi}{3}\delta\rho_0 \tag{8}$$

Now, since the total amount of dust is conserved, the dust stress-energy obeys

$$\begin{aligned} \rho_0\mathrm{R}^3 &= \text{ constant} \\ \frac{\delta\rho_0}{\rho_0} &= -3\frac{\delta\mathrm{R}}{\mathrm{R}} \end{aligned} \tag{9}$$

Equation (8) then gives

$$(\delta\ddot{\mathrm{R}}) - \Lambda\delta\mathrm{R} = 0 \tag{10}$$

i.e. the perturbation δR grows exponentially in time. Hence, the universe is unstable.
Solution 19.32. The line element of the "Einstein universe" (k = +1) is (see Problem 19.5)

$$\mathrm{ds}^2 = \mathrm{R}^2\left[\ \mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi\left(\ \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\ \mathrm{d}\phi^2\right)\right] \tag{1}$$

with

$$0 \le x \le \pi, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \phi \le 2\pi.$$

The volume V is therefore

$$\mathrm{V} = \int_0^\pi 4\pi\mathrm{R}^3\sin^2\chi\ \mathrm{d}\chi = 2\pi^2\mathrm{R}^3 \tag{2}$$

From Problem 19.31, we have the result, for this universe, that

$$\mathrm{R} = (4\pi\rho_0)^{-\frac{1}{2}} \tag{3}$$

where ρ_0 is the matter (dust) energy density. Substitution of Equation (3) into Equation (2) yields

$$\mathrm{V} = 2\pi^2\left(\frac{\mathrm{c}^2}{4\pi\mathrm{G}\rho_0}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{4}$$

(where we have put in the factors of c and G).
Solution 19.33. Let Λ_E be the Einstein value of the cosmological constant so that the Einstein universe has $\rho_0 = \Lambda_E/4\pi$, and $R = \Lambda_E^{-\frac{1}{2}}$ (see Problem 9.31). All dust cosmologies, even with nonzero Λ, have $\rho\mathrm{R}^3 =$ constant. Write this as

$$\rho\mathrm{R}^3 = \frac{1+\epsilon}{4\pi\Lambda^{\frac{1}{2}}} \tag{1}$$

This is equivalent to writing $\Lambda = \Lambda_\mathrm{E}(1+\epsilon)^2$. The remaining dynamical equation of Problem 19.14 becomes

$$\dot{\mathrm{R}}^2 = \mathrm{V}(\mathrm{R}) \equiv \frac{\Lambda\mathrm{R}^2}{3} - 1 + \frac{2(1+\epsilon)}{3\Lambda^{\frac{1}{2}}\mathrm{R}} \tag{2}$$

For small $R, \dot{R}^2 \sim 1/R$, i.e. $R \sim t^{\frac{2}{3}}$. The expansion reaches a minimum when R is a minimum. Setting dV/dR equal to zero, we find that this occurs when

$$\mathrm{R} = \mathrm{R_m} = (1+\epsilon)^{\frac{1}{3}}\Lambda^{-\frac{1}{2}} \tag{3}$$

When R is close to R_m,

$$\dot{R}^2 \approx V(R_m) + \frac{1}{2}(R-R_m)^2 V''(R_m) + \cdots$$
$$= (1+\epsilon)^{\frac{2}{3}} - 1 + \left[\Lambda^{\frac{1}{2}} R - (1+\epsilon)^{\frac{1}{3}}\right]^2$$

From a table of integrals, we find

$$\mathrm{R} = \frac{(1+\epsilon)^{\frac{1}{3}}}{\Lambda^{\frac{1}{2}}}\left[1 + \left\{1-(1+\epsilon)^{-\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}} \sinh \Lambda^{\frac{1}{2}}(\mathrm{t}-\mathrm{t_m})\right] \tag{4}$$

where $R = R_m$ at $t = t_m$. For small ϵ, this becomes

$$\mathrm{R} \approx \mathrm{R_m}\left[1 + \frac{\epsilon}{3}\sinh \Lambda^{\frac{1}{2}}(\mathrm{t}-\mathrm{t_m})\right]$$

Thus R remains approximately equal to R_m until

$$\epsilon \sinh \Lambda^{\frac{1}{2}}(t-t_m) \approx 1$$

i.e. for a time

$$(t-t_m) \approx \Lambda^{-\frac{1}{2}} \log\left(\frac{1}{\epsilon}\right).$$

Hence if ϵ is made sufficiently small, the time can be made arbitrarily long. Eventually R continues to expand, and asymptotically

$$\mathrm{H}^2 = \frac{\dot{\mathrm{R}}^2}{\mathrm{R}^2} \to \frac{1}{3}\Lambda$$

and we get the de Sitter universe of Problem 19.30.
If quasar formation occurred at $z = 2$, then $\mathrm{R} = \mathrm{R_m}$ at $z = 2$ i.e.

$$\mathrm{R_0} = \mathrm{R_m}(1+z) = 3\mathrm{R_m} = 3\Lambda^{-\frac{1}{2}}.$$

If this is so (with $\epsilon \ll 1$), then the density of matter now must be:

$$\rho_0 = \left(4\pi \mathrm{R_0^3}\Lambda^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = (108\pi)^{-1}\Lambda$$
$$H_0 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)_0 = \left(\frac{1}{3}\Lambda - \frac{1}{R_0^2} + \frac{2}{3\Lambda^{\frac{1}{2}}\mathrm{R_0^3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{(20\Lambda)^{\frac{1}{2}}}{9}$$

Taking $\mathrm{H_0} = 10^{-28}\ \mathrm{cm}^{-1}$ gives $\Lambda = 4\times 10^{-56}\ \mathrm{cm}^{-2}$, i.e. $\rho_0 = 1.2\times 10^{-58}\ \mathrm{cm}^{-2} = 1.6\times 10^{-30}\mathrm{gm/cm}^3$.
Solution 19.34. The effective ρ_c density corresponding to Λ is

$$\rho_\mathrm{c} = \frac{\Lambda}{8\pi} = \frac{10^{-57}\ \mathrm{cm}^{-2}}{8\pi} \approx 4\times 10^{-31}\mathrm{gm/cm}^3.$$

Typical densities in the solar system are

$$\rho_{\text{body}} \sim 1\mathrm{gm/cm}^3$$
$$\rho_{\text{solar system}} \sim 10^{33}\mathrm{gm}/\left(10^{15}\ \mathrm{cm}\right)^3 \sim 10^{-12}\mathrm{gm/cm}^3$$

Thus, the effect of Λ in the solar system, in order of magnitude is

$$\frac{\rho_c}{\rho_{\text{solar system}}} \sim 10^{-19}.$$

Solution 19.35. The Friedmann equations (Problem 19.15) are

$$\ddot{\mathrm{R}} = -\frac{4}{3}\pi \mathrm{G}(\rho + 3\mathrm{p})\mathrm{R}$$
$$\mathrm{R}\ddot{\mathrm{R}} + 2\dot{\mathrm{R}} + 2\mathrm{k} = 4\pi \mathrm{G}(\rho - \mathrm{p})\mathrm{R}^2$$

For a static solution, all time derivatives must vanish, so we get two conditions, $\rho + 3\mathrm{p} = 0$ and $\rho = 3\mathrm{k}/8\pi\mathrm{GR}^2$, which have no solution for a fluid with positive energy density and pressure (i.e. any known fluid).
Solutions 19.36 and 19.37. "Easy" cases: Since the metric is time invariant and reversible, $\mathrm{g_{0i}} = 0$ and it has the form

$$ds^2 = -g_{00}\left(x^i\right)dt^2 + g_{ij}\left(x^k\right)dx^i dx^j.$$

If it is homogeneous (Problem 19.37), clocks must tick at the same rate everywhere, so g_{00} = constant; if it is inhomogeneous but pressureless (Problem 19.36), it is possible to rescale the time coordinate locally to make g_{00} = constant. (This was shown in Problem 16.25.) The standard formula for $\Gamma_{\mu\nu\sigma}$ now shows by inspection that the only nonvanishing components are Γ_{ijk}. (Any 0 component is either a time derivative of a component g_{0j} or a derivative of g_{00}.) Now R_{00} can be computed from the standard formula involving the Γ 's; since every term contains a zero index on a Γ, it follows that $R_{00} = 0$ and hence

$$T_{\hat{0}\hat{0}} - \frac{1}{2}\, T^{\hat{a}}_{\hat{a}\hat{a}} = 0$$

and hence $\rho + 3p = 0$. But this is impossible for a pressureless fluid, or for a physically reasonable perfect fluid (with positive p and ρ).
"Harder" cases: Let ξ be the time-symmetry Killing vector and $\mathbf{u}$ be the 4 -velocity of the fluid. Since $\mathbf{u} \propto \boldsymbol{\xi}$ (Problem 13.9) and $\boldsymbol{\xi}$ is hypersurface-orthogonal, u is hypersurface-orthogonal and hence $\omega_{\alpha\beta} = 0$. In the Raychaudhuri equation (Problem 14.10)

$$\frac{d\theta}{d\tau} \propto \frac{\partial\theta}{\partial t} = 0$$

where $\boldsymbol{\xi} = \partial/\partial t$. Thus the Raychaudhuri equation becomes

$$0 = a^{\alpha}_{;\alpha} - 2\sigma^2 - \frac{1}{3}\theta^2 - 8\pi\left(\, T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, g_{\alpha\beta} T\right) u^{\alpha} u^{\beta}. \tag{1}$$

For $p = 0$ (Problem 19.36) we have $a = 0$ from the Euler equation (Problem 14.3) and Equation (1) becomes

$$0 = -2\sigma^2 - \frac{1}{3}\theta^2 - 4\pi\rho$$

which has no solution for positive ρ.
When there is pressure, then in general a is nonzero; in fact,

$$\mathbf{a} = \nabla \log |\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}|^{\frac{1}{2}}.$$

If we assume homogeneity (Problem 19.37), then a = 0 and

$$0 = -2\sigma^2 - \frac{1}{3}\theta^2 - 4\pi(\rho + 3p)$$

which again has no solution for $\rho + 3p > 0$.
Solution 19.38.
(a) A galaxy moves with x^i = constant implying that $dx^i = 0$ and hence that $ds^2 = -d\tau^2$.
(b) For $d\tau = 0, ds^2 = g_{ij} dx x^i dx j^j$.
(c) If g_{0i} and g_{ij} are independent of x^i, then on constant τ hypersurfaces, nothing depends upon x^i; the space is homogeneous. On the other hand, a bad choice of coordinates and hence a seemingly distorted spacelike hypersurface may cause the metric functions of a homogeneous space to depend upon position.
(d) In Problem 14.9 we showed that if the spatial connecting vector between any two nearby geodesics is of constant length, then $\sigma_{\alpha\beta} = \theta = 0$ for the geodesic field. If g_{0i} and g_{ij} are independent of τ, then the connecting vector will have constant length.
(e) Since $u^0 = +1, u^i = 0$, we have

$$\begin{aligned} u_{i;j} = -u^{\gamma}\Gamma_{\gamma ij} = -\Gamma_{0ij} &= -\frac{1}{2}\left(g_{i0,j} + g_{0j,i} - g_{ij,0}\right) \qquad (1)\\ &= \frac{1}{2} g_{ij,0} = \frac{1}{2}\dot{f}\bar{g}_{ij}. \\ \theta \equiv u^{\alpha}_{;\alpha} = |g|^{-\frac{1}{2}}\left(|g|^{\frac{1}{2}} u^{\alpha}\right)_{,\alpha} &= f^{-\frac{3}{2}}\left(f^{\frac{3}{2}}\right)_{,0} \\ &= \frac{3}{2}\frac{\dot{f}}{f}. \qquad (2) \end{aligned}$$

Now, from Equations (1), (2), and the formula (see Problem 5.18)

$$\sigma_{a;\beta} = \frac{1}{2}\left(u_{a;\mu} p^{\mu}{}_{\beta} + u_{\beta;\mu} p^{\mu}_{\alpha}\right) - \frac{1}{3}\theta P_{\alpha\beta} \tag{3}$$

we arrive at

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i;j} + u_{j;i}\right) - \frac{1}{3}\theta g_{ij} = \frac{1}{2}\dot{f}_{ij} - \frac{1}{2}\dot{f}\bar{g}_{ij} = 0. \tag{4}$$

(f)

$$\mathrm{a}^{\alpha} = \mathrm{u}_{;\beta\alpha}\mathrm{u}^{\beta} = \mathrm{u}^{\alpha}_{;0} = \Gamma^{\alpha}_{00}$$

$$\mathrm{a}_{\alpha} = \Gamma_{a00} = \frac{1}{2}\left(\ \mathrm{g}_{a0,0} + \mathrm{g}_{a0,0} - \mathrm{g}_{00,\alpha}\right) = \mathrm{g}_{0a,0}.$$

If $\mathrm{a}_{\alpha} = 0$, then $\mathrm{g}_{0\alpha,0} = 0$ and galaxies fall on geodesics if and only if $\mathrm{g}_{0\mathrm{i},0} = 0$.

(g) From Problem 7.23 we showed that the necessary condition for a family of hypersurfaces to be orthogonal to $\mathbf{u}$ is $\omega_{\alpha\beta} = 0$. Since $\mathbf{u} = \partial/\partial\ \mathrm{r}$ and the hypersurfaces of constant r are spanned by $\partial/\partial \mathrm{x}^i$, then $\omega_{\alpha\beta} \neq 0$ implies that $(\partial/\partial \mathrm{t}) \cdot \left(\partial/\partial \mathrm{x}^{\mathrm{i}}\right) \neq 0$ and hence that $\mathrm{g}_{0\mathrm{i}} \neq 0$. If $\omega_{\alpha\beta,0} \neq 0$, then $g_{\alpha\beta,0} \neq 0$ and from part (f), this means that the galaxies do not fall on geodesics.

Solution 19.39. From Solution 14.9 we know that the spatial connecting vector, $\boldsymbol{\xi}$, between two nearby world lines obeys

$$\nabla_{\mathbf{u}}\boldsymbol{\xi} = \nabla_{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{u} + (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{a})\mathbf{u}. \tag{1}$$

Putting $\boldsymbol{\xi} \equiv \mathrm{Rn}$ in Equation (1) gives

$$\mathrm{Rn}^{\alpha}{}_{;\beta}\mathrm{u}^{\beta} + \mathrm{n}^{\alpha}\dot{\mathrm{R}} = \mathrm{Rn}^{\beta}\,\mathrm{u}^{\alpha}{}_{;\beta} + \mathrm{Ru}^{\alpha}{}_{\mathrm{n}}\gamma_{\mathrm{a}\gamma} \tag{2}$$

where $\dot{\mathrm{R}} \equiv \mathrm{dR/dt} = \mathrm{u}^{\alpha}\mathrm{R}_{,a}$. If we now dot n^{α} into Equation (2) and use the decomposition equation for $\mathrm{u}_{\alpha;\beta}$ (see Problem 5.18)

$$\mathrm{u}_{a;\beta} = \omega_{a\beta} + \sigma_{a\beta} + \frac{1}{3}\theta\left(\ \mathrm{g}_{a\beta} + \mathrm{u}_a\mathrm{u}_{\beta}\right) - \mathrm{a}_a\mathrm{u}_{\beta}$$

we obtain

$$\begin{aligned}\dot{\mathrm{R}} = {} & \mathrm{Rn}^{\alpha}{}_{\mathrm{n}}{}^{\beta}\left[\omega_{\alpha\beta} + \sigma_{a\beta} + \frac{1}{3}\theta\left(\ \mathrm{g}_{a\beta} + \mathrm{u}_{\alpha}\mathrm{u}_{\beta}\right) - \mathrm{a}_{\alpha}\mathrm{u}_{\beta}\right] \\ & + \mathrm{Ru}^{\alpha}\,\gamma_{\mathrm{n}}\gamma_{\alpha}{}^{\alpha}\gamma\end{aligned} \tag{3}$$

Now the antisymmetry of $\omega_{\alpha\beta}$ and the fact that n^{α} is a spatial unit vector ($\mathrm{n}^{\alpha}\mathrm{u}_{\alpha} = 0$) used in Equation (3) give us

$$\frac{\dot{\mathrm{R}}}{\mathrm{R}} = \sigma_{a\beta^{\mathrm{n}}}{}^{\alpha}\mathrm{n}^{\beta} + \frac{1}{3}\theta.$$

Averaging $\sigma_{a\beta}\mathrm{n}^a\mathrm{n}^{\beta}$ over directions produces a term proportional to the trace of $\sigma_{\alpha\beta}$. Since $\sigma_{\alpha\beta}$ is traceless, we are left with

$$\left\langle \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}} \right\rangle = \frac{1}{3}\theta.$$

Solution 19.40. Since $u = e_0$ we have

$$\mathbf{u}_{a;\beta} = \mathbf{u}_{a,\beta} - \Gamma^{\gamma}_{a\beta}\mathbf{u}_{\gamma} = 0 + \Gamma^{0}_{a\beta}$$

so that

$$\theta = \mathrm{u}_{a;\beta}\mathrm{g}^{\alpha\beta} = \Gamma^{0}{}_{a\beta}\ \mathrm{g}^{\alpha\beta} = -(-\mathrm{g})^{-\frac{1}{2}}\left[\ \mathrm{g}^{0\alpha}(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\right]_{,a} \tag{1}$$

(see part (f) of Problem 7.7). Hence for a Robertson-Walker cosmology

$$\theta = (-g)^{-\frac{1}{2}}(-g)^{\frac{1}{2}}_{0} = 3\dot{R}/R.$$

The rotation is

$$\omega_{\alpha\beta} = \mathrm{P}_{\beta}\gamma_{[a;\gamma]} = 0$$

since $\Gamma^{0}{}_{\alpha\beta}$ is symmetric. For the shear we have

$$\begin{aligned}\sigma_{a\beta} &= \mathrm{P}_{\beta}\gamma_{\mathrm{u}_{(\alpha;\gamma)}} - \frac{1}{3}\theta\mathrm{P}_{a\beta} \\ \sigma_{0a} &= 0 \\ \sigma_{\mathrm{ij}} &= \mathrm{u}_{(\mathrm{i},\mathrm{j})} - \frac{1}{3}\theta\ \mathrm{g}_{\mathrm{ij}} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\ \mathrm{g}_{0\mathrm{i},\mathrm{j}} + \mathrm{g}_{0\mathrm{j},\mathrm{i}} - \mathrm{g}_{\mathrm{ij},0}\right) - \frac{\dot{\mathrm{R}}}{\mathrm{R}}\ \mathrm{g}_{\mathrm{ij}} \\ &= \frac{1}{2}\ \mathrm{g}_{\mathrm{ij},0} - \dot{\mathrm{R}}/\mathrm{R}\ \mathrm{g}_{\mathrm{ij}} = 0\end{aligned}$$

For the anisotropic metric, Equation (1) still holds, so

$$\theta = (-\mathrm{g})^{-\frac{1}{2}}(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}_{,0} = \dot{\mathrm{a}} + \dot{\mathrm{b}} + \dot{\mathrm{c}}$$
$$\omega_{a\beta} = 0$$
$$\sigma_{0a} = 0$$
$$\sigma_{\mathrm{ij}} = \frac{1}{2}\ \mathrm{g}_{\mathrm{ij},0} - \frac{1}{3}\theta\ \mathrm{g}_{\mathrm{ij}} = \frac{1}{3}\mathrm{Ag}\ \mathrm{g}_{\mathrm{ij}}$$

where

$$A = \begin{cases} 2\ddot{a} - \dot{b} - \dot{c} & \text{for} \quad i = j = x \\ 2\dot{b} - \dot{a} - \dot{c} & \text{for} \quad i = j = y \\ 2\dot{c} - \dot{a} - \dot{b} & \text{for} \quad i = j = z \end{cases}$$

Solution 19.41. The quickest way to compute the Ricci tensor for this metric is to use the formulas of Problem 9.33. We have

$$K_{ij} = -\frac{1}{2}\dot{g}_{ij} \tag{1}$$
$$0 = R^t_t = K_{ij}K^{ij} - \dot{K} \tag{2}$$
$$0 = R^t_j = K^i_{j,i} - K_{,j} \tag{3}$$
$$0 = R^i_j = K^i_j K - \dot{K}^i_j \tag{4}$$

where a dot denotes d/dt. We have set ${}^{(3)}\mathrm{R}_{\mathrm{ij}}$ to zero in Equation (4) because the 3 -geometry is flat, and we have replaced covariant derivatives by partial derivatives in Equation (3).

Contracting Equation (4) gives $K = K^2$ and hence

$$\mathrm{K} = -1/\mathrm{t} \tag{5}$$

with a suitable choice of the constant of integration. Substituting Equation (5) back into Equation (4) gives

$$\dot{K}^i_j = -K^i_j/t$$

and hence

$$K^i_j = A^i_j/t \tag{6}$$

where $A^i{}_j$ is a constant matrix. We now choose the coordinates so that $K^i{}_j$ is diagonal at some time $t = t_0$. Then by Equation (6) $K^i{}_j$ remains diagonal and can be written in the form

$$\mathrm{K}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{j}} = -\delta^{\mathrm{i}}_{\mathrm{j}}\mathrm{P}_{\mathrm{j}}/\mathrm{t} \tag{7}$$

where P_j = constant. For this equation to be consistent with Equation (5) we must have

$$\sum_i P_i = 1 \tag{8}$$

Equation (3) is automatically satisfied, Equation (2) implies

$$\sum_i P_i^2 = 1 \tag{9}$$

and Equation (1) becomes

$$\dot{\mathrm{g}}_{\mathrm{ij}} = -2\ \mathrm{g}_{\mathrm{im}}\ \mathrm{K}^{\mathrm{m}}_{\mathrm{j}} = 2\ \mathrm{g}_{\mathrm{ij}}\mathrm{P}_{\mathrm{j}}/\mathrm{t}$$

and implies that

$$\mathrm{g}_{\mathrm{ij}} = \delta_{\mathrm{ij}}\mathrm{t}^{2\mathrm{P}_{\mathrm{i}}}$$

Thus the final form of the metric ("Kasner metric") is

$$\mathrm{ds}^2 = -\mathrm{dt}^2 + \mathrm{t}^{2\mathrm{P}_1}\mathrm{dx}^2 + \mathrm{t}^{2\mathrm{P}_2}\mathrm{dy}^2 + \mathrm{t}^{2\mathrm{P}_3}\mathrm{dz}^2 \tag{10}$$

subject to the constraints of Equations (8) and (9).

The volume of this universe is proportional to

$$\left[{}^{(3)}g_{ij}\right]^{\frac{1}{2}} = \left(t^{2\sum P_i}\right)^{\frac{1}{2}} = t$$

which can be contrasted with the $t^{\frac{3}{2}}$ behavior of the radiation-dominated Friedmann model.

A convenient way of representing the constraints of Equations (8) and (9) is to draw a circle of radius 2/3. centered at $y = 1/3$ and to inscribe an equilateral triangle. The y-coordinates of the vertices of the triangle will satisfy Equations (8) and (9). From this we see that, except for the special case $(1, 0, 0)$ which can easily be shown to represent flat space, two of the P 's lie between 0 and 1 and one P lies between 0 and $-1/3$. Thus space must contract along one axis while expanding along the other two.

13.7.20 20 Experimental Tests

This chapter explores concepts relevant to experimental tests of gravitation theory (light deflection, perihelion shift, etc.). A number of problems elsewhere in this book are similarly relevant: 11.9, 11.11, 12.2-12.4, 12.6, 12.7, 13.2-13.4, 14.12, 15.6, 15.7.

Problem 20.1. Gravitational bending of light: An evacuated tube of length ℓ is set up horizontally in a uniform gravitational field - e.g., in the field of the earth at sea level with $\ell \ll \mathrm{r_{earth}}$ so that gravitational inhomogeneities (tidal forces) are negligible. A laser beam passing through the tube is deflected from the horizontal by the uniform gravitational field. Calculate the angle of light deflection measured relative to the axis of the tube. Express the answer in terms of the length of the tube, ℓ, and the acceleration of gravity, g. Discuss the feasibility of performing such an experiment in an earth-based laboratory.

Problem 20.2. Calculate the gravitational light deflection of a ray passing near the sun using Newtonian gravity and the fact that light moves along straight lines in the local frame of a freely falling observer. Since the light is always in a weak gravitational field, the Newtonian approximation seems justifiable. Why doesn't this answer agree with the general relativistic answer?

Problem 20.3. Derive the general expression for the angular deflection of light by the sun's gravitational field, if the light comes from a star which is at an angle a from the sun as seen from earth. Take the earth-sun distance to be R. Do not assume that a is small, but show that in the
limit of small α the answer reduces to the conventional result (Problem 15.6) $\delta a = 4\mathrm{M/b}$.

Problem 20.4. Show that the sun's angular momentum J modifies the light deflection formula (Problem 20.3) from $\delta\phi = 4\mathrm{M/b}$ to

$$\delta\phi = \frac{4\mathrm{M}}{\mathrm{b}}\left(1 - \frac{\mathrm{J}\cdot\mathrm{n}}{\mathrm{Mb}}\right)$$

where $\underline{n} \equiv$ unit vector in direction of angular momentum of the photons about the center of sun.

Problem 20.5. In addition to the general relativistic deflection of electroDagnetic waves by the sun, there is a frequency-dependent deflection caused by the solar corona, which must be taken into account in the interpretation of measurements. Estimate the impact parameter at which the general relativistic and coronal deflections of an electromagnetic wave of frequency ν make approximately equal contributions. Take an approximate coronal electron density of

$$\log_{10}\left(\frac{\mathrm{n_e}}{1\ \mathrm{cm}^{-3}}\right) = 8.4 - 6.5\log_{10}\left(\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{R}_\odot}\right)$$

for $r \lesssim 4R_\odot$. Evaluate your answer, in solar radii, for $\nu = 1000\mathrm{MHz}$.

Problem 20.6. The deflection angle of light passing near the sun is given by $\delta = 1.75''/\mathrm{b}$, where b is the impact parameter in solar radii. Design a thin lens (i.e. give thickness as a function of radius) which models this focal behavior. Take the solar disc to be a black mask of 8 mm diameter in the center of the lens, so that you can simulate the light deflection experiment by holding the lens at arm's length. Assume an index of refraction appropriate to ordinary crown glass, $n = 1.52$.

Problem 20.7. Calculate the expected perihelion shift of the planet Mercury in terms of the semimajor axis of its orbit a, the eccentricity e, and the mass M of the sun.

Problem 20.8. Newtonian gravitation theory can be modified and made covariant if the force equation on a point particle is written as

$$\mathrm{dp}^\mu = -\eta^{\mu\nu}\Phi_{,\nu}\mathrm{p}_\beta\mathrm{dx}^\beta + \mathrm{p}^a\Phi_{,a}\mathrm{dx}^\mu$$

where Φ is a scalar potential which is related to stress energy by

$$\Phi^{;\mu}_{;\mu} = 4\pi\ \mathrm{T}^\mu_\mu.$$

Investigate whether this theory agrees with experiment and observation:
(a) Is this theory in agreement with the experiments of Eotvös and Dicke showing the equivalence of inertial and passive gravitational mass?
(b) Is this theory in agreement with the Pound-Rebka experiment on the gravitational redshift of a photon on the earth's surface?
(c) Does this theory predict the bending of starlight near the sun?

Problem 20.9. A physicist wishes to take advantage of the tremendous precision of current atomic clocks by using them to test both special and general relativity. He places various clocks at different locations on the earth (assumed to be rigidly rotating) and measures their ticking rates with respect to some standard clock. Both the doppler shift, due to the earth's rotation, and the redshift effect, due to the earth's gravitational field, make contributions to deviations in ticking rates. Calculate the measured ticking rate of a clock located at (r, θ) relative to a standard clock of your choice. Take into account the rotational deformation of the earth's surface, assuming the earth is a rigidly rotating perfect fluid.

20: Solutions

Solution 20.1. Note that there are no "real" (i.e. tidal) gravitational forces; the light goes in a straight line in any inertial frame, but in the accelerated frame of the tube it seems to bend.

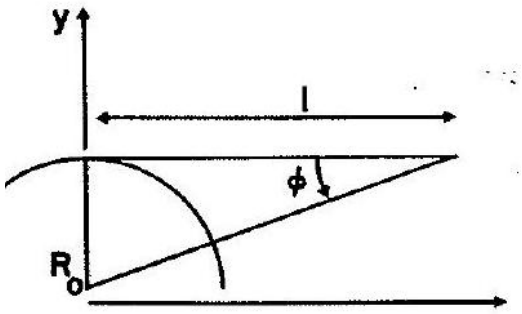
Consider two inertial frames - one comoving with the tube at the instant the light enters it - the other comoving with the tube at the instant the light reaches the end. Since the length of the tube is seen in both. frames as ℓ and since θ is always small, observers in either frame see it take ℓ/c for the light to cross the tube. At this time their relative velocity is $\beta = \mathrm{g}l/\mathrm{c}^2$. (An observer in the second frame sees the first frame moving upward with velocity β.) The direction angles of the photons path are related by (see Problem 1.8 and figure on p. 561):

$$\cos\psi = \sin\theta \approx \theta = \frac{\cos\psi' + \beta}{1 + \beta\cos\psi'} = \beta$$

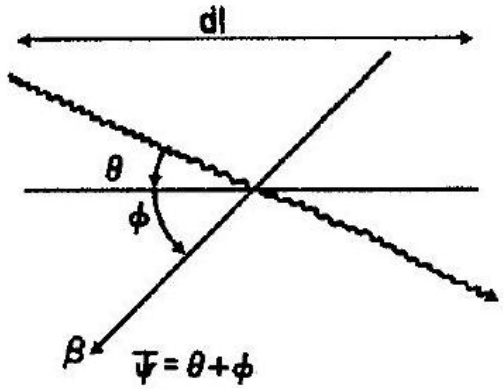
Therefore

$$\theta = gl/c^2, \quad g/c^2 = 10^{-16}m^{-1}$$

so, if the tube is 10 meters long $\theta = 10^{-15}$ radians, and the total displacement $\frac{1}{2}\left(\mathrm{g}/\mathrm{c}^2\right)\ell^2 \approx 10^{-14}$ meters. This is very small compared to the wave length of light; it is difficult to imagine interferometric (or any other) techniques capable of detecting this. When lasers are used for alignment (as in the Stanford linear accelerator) they are meant to correct for the curvature of the surface of the earth - a much larger effect, obviously, since a light ray at the earth's surface is not bent so strongly as to be pulled into a circular orbit.



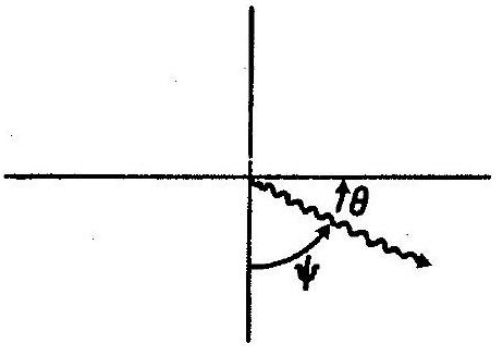
Sun



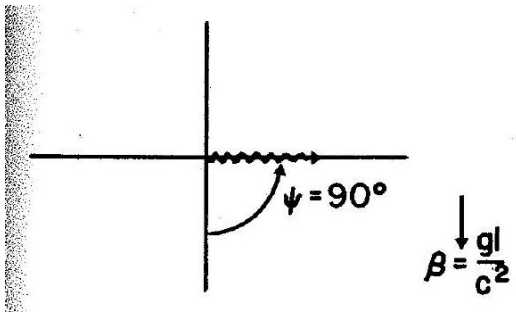
local inertial frame \$S_{n}\$

lution 20.2.

Consider a sequence of freely falling observers, each occupying a local inertial frame of length $d\ell$. Let the n^{th} freely falling observer S_n be momentarily at rest relative to the sun when the photon hits the left side of his frame and let him see the photon move at an angle θ relative to its inertial direction (see figure). When the photon leaves his frame and enters $\mathrm{S_{n+1}}$, which is now momentarily at rest, he is falling with speed $\beta = \mathrm{g}\,\mathrm{d}\,\ell = \frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{R}^2}$ in the ϕ direction. This photon enters frame $\mathrm{S_{n+1}}$ moving in the direction $\theta + \mathrm{d}\theta$: the transformation of photon angles (see Problem 1.8) is



final frame S



initial frome \$S\^{}{\prime}\$

$$\cos\psi = \frac{\cos\bar{\psi} - \beta}{1 - \beta\cos\bar{\psi}} = \cos\bar{\psi} - \beta\sin^2\bar{\psi} + \mathcal{O}\left(\beta^2\right)$$

so that

$$\cos\psi - \cos\bar{\psi} = -\beta\sin^2\bar{\psi}$$

and

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\theta &= \beta\sin\psi \approx \beta\sin\phi \\ &= \left(\frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{R}_0^2 + \ell^2}\right)\frac{\mathrm{R}_0}{\left(\mathrm{R}_0^2 + \ell^2\right)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}\ell. \end{aligned} \tag{1}$$

Thus the total deflection, δ is

$$\delta = \int \mathrm{d}\theta = \mathrm{GMR}_0\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\ell}{\left(\mathrm{R}_0^2 + \ell^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\mathrm{GM}}{\mathrm{R}_0} \tag{2}$$

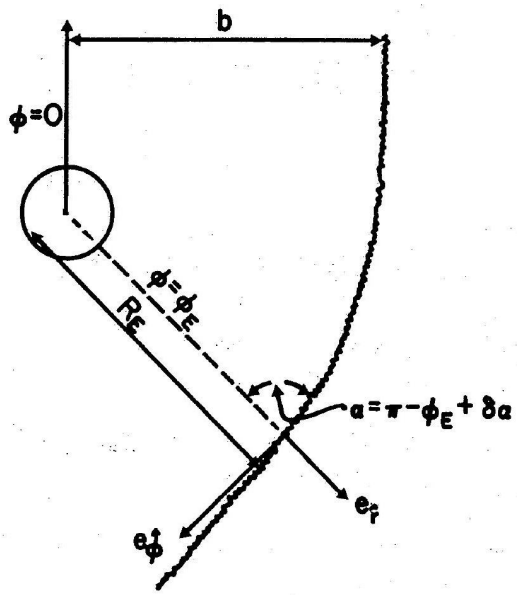
which is one half the observed value!
In performing the calculation we assumed that a sequence of rulers was placed along the line $y = R_0$ parallel to the line $y = 0$, with the $(n+1)^{th}$ ruler locally parallel to the n^{th} ruler. It was the deflection with respect to these rulers that we calculated. But we did not correct for the fact that spacetime around the sun is curved (tidal forces!); in fact, a locally parallel sequence of rulers forms a curved line with respect to the $y = 0$ line and it is with respect to this curved line that we actually calculated the photon deflection. Thus the real deflection, as measured by a distant observer, must include both effects: the deflection of the photon with respect to a set of locally parallel rulers, and the bending of the line (with respect to $y = 0$) of the sequence of rulers.

Solution 20.3. We may consider purely equatorial motion with no loss of generality. In the gravitational field of the sun, the metric may then be approximated by

$$ds^2 \approx -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 + \frac{2M}{r}\right)\left(dr^2 + r^2 d\phi^2\right) \tag{1}$$

Null geodesics for this metric have the form

$$\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{r}} = \sin\phi + \frac{2\mathrm{M}}{\mathrm{r}}(1 - \cos\phi) \tag{2}$$



The angle a between the sun and the star (see figure), as measured by an astronomer on earth, satisfies

$$\begin{aligned}\tan\alpha &= \tan\left(\pi - \phi_{\mathrm{E}} + \delta\alpha\right) \approx -\tan\phi_{\mathrm{E}} + \frac{\delta\alpha}{\cos^2\phi_{\mathrm{E}}} \\ &= \frac{\mathrm{u}^{\hat{\phi}}}{\mathrm{u}^{\mathrm{r}}} = \left[\frac{\left(1+\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{r}}\right)\mathrm{r}\ \mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\lambda}{\left(1+\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{r}}\right)\mathrm{dr}/\mathrm{d}\lambda}\right]_{\mathrm{E}} = \left[\mathrm{r}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{dr}}\right]_{\mathrm{E}}\end{aligned} \tag{3}$$

where $\mathrm{u}^{\hat{\phi}}$ and $\mathrm{u}^{\hat{r}}$ are the orthonormal components of the photon's 4-velocity, and we have taken advantage of the isotropic form of the metric in Equation (1) to define angles. If Equation (2) is now used, Equation (3) becomes

$$\begin{aligned}\tan\phi_E - \frac{\delta a}{\cos^2\phi_E} &= \frac{\sin\phi_E \cdot \frac{2M}{b}\left(1-\cos\phi_E\right)}{\cos\phi_E + \frac{2M}{b}\sin\phi_E} \\ &\approx \tan\phi_E - \frac{2M}{b}\frac{\left(1-\cos\phi_E\right)}{\cos^2\phi_E}\end{aligned} \tag{4}$$

and hence

$$\delta\alpha \cong \frac{2\mathrm{M}}{\mathrm{b}}(1+\cos\alpha) \approx \frac{2\mathrm{M}}{\mathrm{R_E}}\left(\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

It is δa which is the deflection angle measured by an astronomer at earth. [See also MTW, Section 40.3, and references given therein.]

Solution 20.4. Since we wish to compute only the lowest order deflection due to J, we can look for terms linear in J and set $M = 0$ in the line element. The total first order deflection will then be the sum of the usual term linear in M and a term linear in J. Since the metric (for our purposes) is (see Problem 17.1),

$$ds^2 = -dt^2 - \frac{4J}{r}\sin^2\theta dt d\phi + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{1}$$

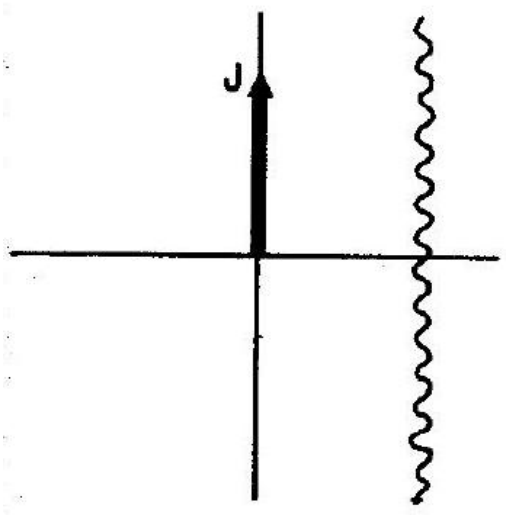
(J points along z-axis) the equations of motion may be deduced from the variational principle (Problem 7.25)

$$\delta\int\left(-\dot{\mathrm{t}}^2 - \frac{4\ \mathrm{J}}{\mathrm{r}}\sin^2\theta\dot{\mathrm{t}}\dot{\phi} + \dot{\mathrm{r}}^2 + \mathrm{r}^2\dot{\theta}^2 + \mathrm{r}^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right)\mathrm{d}\lambda = 0 \tag{2}$$

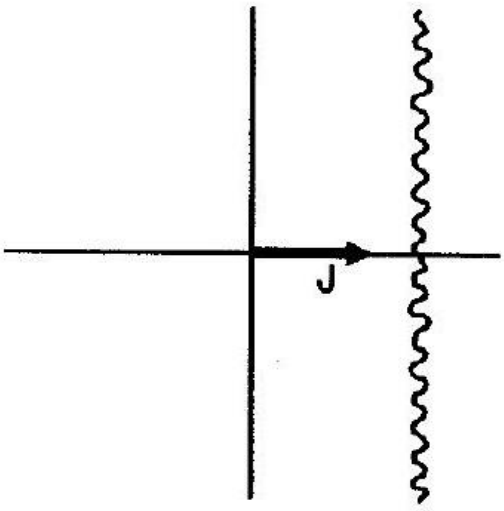
where $\dot{t} \equiv dt/d\lambda$ etc., and λ is affine parameter. The Euler equations for Equation (2), to first order in J, are

$$\frac{d}{d\lambda}\left(2\dot{t} + \frac{4J}{r}\sin^2\theta\dot{\phi}\right) = 0 \tag{3a}$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(2\dot{\phi}r^2\sin^2\theta - \frac{4J}{r}\sin^2\theta\dot{t}\right) = 0, \tag{3b}$$



(a)



(b)

which imply that

$$P_0 \equiv \dot{t} + \frac{2J}{r}\sin^2\theta\dot{\phi} \tag{3c}$$

$$P_\phi \equiv \dot{\phi}r^2\sin^2\theta - \frac{2J}{r}\sin^2\theta P_0 \tag{3d}$$

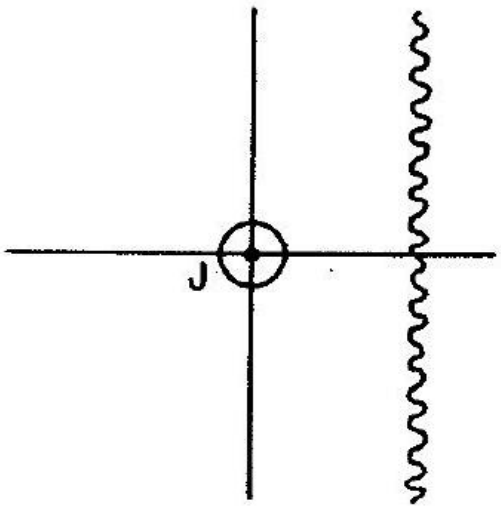
are constants, and

$$\ddot{\mathrm{r}} = \dot{\mathrm{r}}^2 + \mathrm{r}\sin^2\theta\dot{\phi}^2 + \frac{4J}{\mathrm{r}^2}\sin^2\theta\dot{\phi}\mathrm{P}_0 \tag{3e}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\mathrm{r}^2\dot{\theta}\right) = \mathrm{P}_\phi^2\cos\theta/\mathrm{r}^2\sin^3\theta \tag{3f}$$

From Equation (3f), one may deduce a third constant of the motion (in addition to P_0 and P_ϕ):

$$\mathrm{P}_\theta^2 + \frac{\mathrm{P}_\phi^2}{\sin^2\theta} \equiv \mathrm{L}^2 = \text{ constant } \left(\mathrm{P}_\theta \equiv \mathrm{r}^2\dot{\theta}\right) \tag{4}$$



(c)

We will now decompose the bending into three contributions, each defined by the relationship (see figure) of the ray trajectory (a straight line to lowest order) to J. (Since we are working only to linear order, the total bending must be the sum of such contributions.)

In both cases (a) and (b), the angular momentum of the light beam about the sun's center has zero projection onto $\underset{\sim}{J}$, in case (c) it has unit projection.

First we consider cases (a) and (b): In both cases (a) and (b) $P_\phi = 0$ (since P_ϕ is a constant of the motion). We wish to calculate $\mathrm{r}(\theta)$. From Equation (3d) we have

$$\dot{\phi} = \frac{2\mathrm{JP}_0}{\mathrm{r}^3} = \mathcal{O}(\mathrm{J}) \tag{5a}$$

and from Equation (4)

$$\mathrm{P}_\theta = \mathrm{r}^2\dot{\theta} = \mathrm{L} = \text{ constant} . \tag{5b}$$

Equations (3e) and (5a), to $\mathcal{O}(\mathrm{J})$, now give us

$$\ddot{\mathrm{r}} = \mathrm{r}\dot{\theta}^2, \tag{5c}$$

but this result and Equation (5b) guarantee straight-line motion! Thus in cases (a) and (b) $\underset{\sim}{J}$ makes no contribution to the bending of light.

Now we consider case (c): In case (c), we may set $\theta = \pi/2$, and $\dot{\theta} = 0$ (Equation (3f) guarantees that $\ddot{\theta}$ will always then be 0) and solve our equations accordingly. Using

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi} = \left(\frac{\mathrm{P}_\phi}{\mathrm{r}^2} + \frac{2\ \mathrm{JP}_0}{\mathrm{r}^3}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}$$

and defining $\mathrm{u} \equiv 1/\mathrm{r}, \ell \equiv \mathrm{P}_0/\mathrm{P}_\phi$, we may put Equation (3e) in the form

$$u'' + u = -6u^2 J\ell - 2J\ell u'^2 - 4J\ell u u'' \tag{6}$$

where $u' \equiv du/d\phi$. We will solve Equation (6) by perturbation techniques, we define

$$u = u_0 + u_1 \tag{7}$$

with $\mathrm{u}_1 = \mathcal{O}(\mathrm{J})$. To lowest order, the equation is $\mathrm{u}_0'' + \mathrm{u}_0 = 0$ which implies

$$\mathrm{u}_0 = \frac{1}{\mathrm{b}}\cos\phi \tag{8}$$

where b is the impact parameter and where we have chosen our coordinate system such that the ray moves parallel to the y -axis. For the second order solution, u_1 must satisfy the equation

$$\mathrm{u}_1'' + \mathrm{u}_1 = -\frac{2\ \mathrm{J}\ell}{\mathrm{b}^2}\left(\sin^2\phi + \cos^2\phi\right) = -\frac{2\ \mathrm{J}\ell}{\mathrm{b}^2} \tag{9a}$$

$$\mathrm{u}_1 = -\frac{2\ \mathrm{J}\ell}{\mathrm{b}^2} \tag{9b}$$

or

$$\mathrm{u} \approx \frac{1}{\mathrm{b}} \cos\phi - \frac{2\ \mathrm{J}\ell}{\mathrm{b}^2} \tag{10}$$

The bending at each asymptote, a, is found by setting $u = 0(r = \infty)$. At one asymptote $\phi \approx \pi/2 + a$ so that $\cos\phi \approx -a$ and

$$a \approx -\frac{2J\ell}{b} \tag{11}$$

There is an equal contribution at the other asymptote, so the total bending is

$$\delta\phi = 2a = -\frac{4\ \mathrm{J}}{\mathrm{b}^2} \tag{12}$$

(where we have used the fact that $\ell = \mathrm{P}_0/\mathrm{P}_\phi \approx \mathrm{b}^{-1}$).
From this result, and the results from cases (a) and (b), we may write the deflection of light by $\underset{\sim}{J}$ as

$$\delta\phi = -\frac{4\ \mathrm{J}\cdot\mathrm{n}}{\mathrm{b}^2} \tag{13}$$

where n is a unit vector in the direction of the angular momentum of the ray about the Sun's center.
Note that the dimensionless small parameter in which we have been expanding is

$$\left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{b}^2}\right)_{\mathrm{sun}} = \frac{1.7 \times 10^{48}\mathrm{gm} - \mathrm{cm}^2/\mathrm{sec}}{(7 \times 10^{10}\ \mathrm{cm})^2} \approx 10^{-12} \approx 2 \times 10^{-7}\mathrm{arcsec}$$

Solution 20.5. The index of refraction of a plasma is $\mathrm{n} = \left(1 - \nu_\mathrm{p}^2/\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}$ where ν_p is the plasma frequency $\nu_p^2 \equiv n_e e^2/\pi m_e$. The well-known equation describing the path of a ray through an inhomogeneous medium is [see, e.g. B. Rossi, Optics (Addison-Wesley, 1957), p. 54]

$$\mathrm{d}(\mathrm{n}\ \underset{\sim}{\mathrm{m}})/\mathrm{d}\ell = \underset{\sim}{\nabla}\mathrm{n} \tag{1}$$

where $\underline{m}$ is a unit vector tangent to the ray and l is the distance along the ray. Since the deflection angle we are computing is small, we can correctly find the first-order change in $\underline{m}$ by integrating Equation (1) along the unperturbed trajectory $y = b, -\infty < x < +\infty$. From the formula given for n_e we have
or

$$\mathrm{n} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{\nu_\mathrm{p}^2}{\nu^2} \approx 1 - .0101\left(\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{R}_\odot}\right)^{-6.5}\left(\frac{\nu}{10^9\ \mathrm{Hz}}\right)^{-2}$$

$$\nabla_\mathrm{n} \approx \frac{.0657}{\mathrm{R}_\odot}\left(\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{R}_\odot}\right)^{-7.5}\left(\frac{\nu}{10^9\mathrm{H}_z}\right)^{-2}\hat{\mathrm{r}} \tag{2}$$

Thus, using $\mathrm{n} = 1$ at $\pm\infty$ and $\mathrm{r} = \left(\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2\right)^{\frac{1}{2}}$,

$$\underset{\sim}{m}\Big|_{+\infty} - \underset{\sim}{m}\Big|_{-\infty} \approx \tfrac{.0657}{R_\Theta}\left(\tfrac{\nu}{10^9\ \mathrm{Hz}}\right)^{-2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\tfrac{r}{R_\Theta}\right)^{-7.5}\left[\hat{x}\left(\tfrac{x}{r}\right) + \hat{\hat{y}}\left(\tfrac{y}{r}\right)\right]dx. \tag{3}$$

The term in $\hat{x}$ vanishes by symmetry in $\pm x$, while the $\hat{y}$ term can be written as $2\int_{-\infty}^{\infty}$. Since m is a unit vector, for small angles $\left(\underline{m}|_\infty - \underline{m}|_{-0}\right)\cdot\hat{y}$ is the scattering angle we seek. Defining

$$\eta \equiv \mathrm{b}/\mathrm{R}_\mathrm{O}, \quad z \equiv \mathrm{r}/\mathrm{b}$$

and using

$$y = b, \quad x^2 = b^2\left(z^2 - 1\right), \quad dx = bz\left(z^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}}dz$$

we get

$$\theta_{\mathrm{coronal}} \approx .131\left(\frac{\nu}{10^9\mathrm{H}z}\right)^{-2}\eta^{-6.5}\int_1^\infty z^{-7.5}\left(z^2 - 1\right)^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}z \tag{4}$$

On putting $t = 1/z^2$, we recognize the integral in Equation (4) as a beta function, $\frac{1}{2}\ \mathrm{B}(3.75, .5) = .158$. Thus our final expression for the coronal deflection is

$$\theta_{\mathrm{coronal}} \approx .021\left(\frac{\nu}{10^9\ \mathrm{Hz}}\right)^{-2}\eta^{-6.5} \tag{5}$$

The general relativistic deflection, θ_{GR}, is

$$\theta_{\rm GR} \approx \frac{8.5 \times 10^{-6}}{\eta} \tag{6}$$

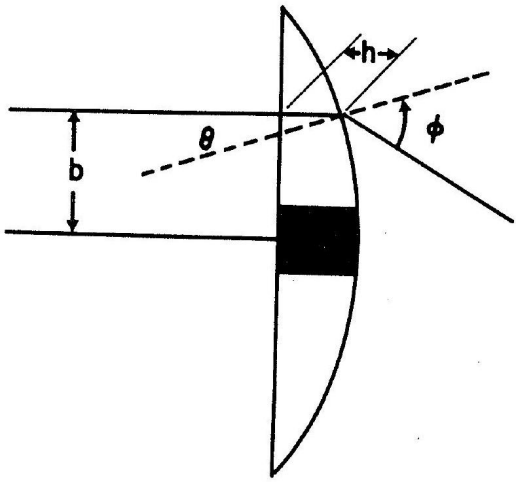
(see e.g, Problem 15.6). The two deflections are equal when

$$\frac{8.5 \times 10^{-6}}{\eta} \approx .021 \left(\frac{\nu}{10^9 \text{ Hz}}\right)^{-2} \eta^{-6.5}$$

or

$$\eta \equiv \frac{\rm b}{\rm R_\odot} \approx 4.1 \left(\frac{\nu}{10^9 \text{ Hz}}\right)^{-.36}$$

For smaller impact parameters b, the coronal deflection dominates.
Solution 20.6.



b and h are measured in units of 4 mm .
The relation of ϕ and θ (see figure) is given by Snell's law

$$\rm n = \phi/\theta.$$

(1)
The refraction required to simulate the sun's gravitational bending is

$$\delta \equiv \phi - \theta = 1.75''/\rm b. \tag{2}$$

From Equations (1) and (2) θ must be

$$\theta = 1.75''/\rm b(n-1) = 1.6 \times 10^{-5}/\rm b. \tag{3}$$

From the geometry of the figure $\theta = -\rm dh/db$, so Equation (3) gives

$$\frac{dh}{db} = -\frac{1.6 \times 10^{-5}}{b},$$
$$h = h_0 - 1.6 \times 10^{-5} \log(b).$$

Solution 20.7. In the Schwarzschild metric, in curvature coordinates, the equation for noncircular orbits may be put into the form (see e.g. solution to Problem 15.9)

$$u'' + u = \frac{M}{\tilde{L}^2} + 3Mu^2 \equiv a + bu^2 \tag{1}$$

where $u \equiv 1/r, u'' \equiv d^2u/d\phi^2$, and $\tilde{L} \equiv$ angular momentum per unit mass of the orbiting particle (= constant). The solution to the lowest order, the linear portion of Equation (1), is

$$\rm u_0 = a + A\cos\phi \tag{2}$$

where A is a constant. The second order solution to Equation (1), u_1, then satisfies the equation ..

$$\begin{aligned} u_1'' + u_1 \approx bu_0^2 &= b\left(a^2 + 2aA\cos\phi + A^2\cos^2\phi\right) \\ &= ba^2 + \frac{1}{2}bA^2 + 2abA\cos\phi + \frac{1}{2}bA^2\cos 2\phi. \end{aligned} \tag{3}$$

The inhomogeneous solution to Equation (3) is

$$u_1 = b\left(a^2 + \frac{1}{2}A^2\right) + abA\phi\sin\phi - \left(bA^2/6\right)\cos 2\phi \tag{4}$$

and

$$u = \frac{1}{r} \approx u_0 + u_1. \tag{5}$$

The second term in u_1 causes the nonperiodicity; we may put it into more useful form by use of the identity

$$\epsilon\phi\sin\phi = \cos(\phi - \epsilon\phi) - \cos\phi + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right). \tag{6}$$

Since ab is a small quantity according to Equation (1), Equation (6) may be used to put Equation (4) into the form

$$u_1 \approx b\left(a^2 + \frac{1}{2}A^2\right) + A\cos(\phi - ab\phi) - A\cos\phi - \left(bA^2/6\right)\cos 2\phi \tag{7}$$

and the perihelion shift, per revolution, is

$$\delta\phi = 2\pi\mathrm{ab} = 6\pi\mathrm{M}^2/\tilde{\mathrm{L}}^2 \tag{8}$$

We may express $\tilde{L}$ in terms of the semimajor axis a and eccentricity e of the orbit using standard classical mechanics

$$\tilde{\mathrm{L}}^2 = \mathrm{Ma}\left(1 - \mathrm{e}^2\right) \tag{9}$$

Equation (8) then becomes

$$\delta\phi = \frac{6\pi\mathrm{M}}{\mathrm{a}\left(1 - \mathrm{e}^2\right)} \tag{10}$$

which in the limit of small e agrees with the solution of Problem 15.7.

Solution 20.8.

(a) Yes. First note that particle mass is constant:

$$\frac{\mathrm{dm}^2}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}{\mathrm{d}\tau} = -2\mathbf{p}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}\tau} = 0$$

Since $p = mu$ and m is constant, a factor of m can be taken out of each term in the force equation leaving

$$\mathrm{du}^\mu/\mathrm{d}\tau = -\left(\eta^{\mu\nu}\Phi_{,\nu} + \mathrm{u}^\alpha\Phi_{,\alpha}\mathrm{u}^\mu\right)$$

and showing that particle motion is independent of mass.
(b) Yes. Near the earth the earth is flat. Take z to be in the vertical direction, then we have $\Phi = \Phi(z)$ and the "source equation" for Φ is $\partial^2\Phi/\partial z^2 = 0$. Above the earth's surface then, the potential is

$$\Phi = az + b$$

The constant a is determined by dropping a massive particle from rest and setting its initial acceleration to g. With $u^0 = 1, u^j = 0$ in the force equation, we have

$$-\mathrm{mg} = \mathrm{dp}^\mathrm{z}/\mathrm{d}r = -\mathrm{m}\Phi,\mathrm{z} = -\mathrm{ma}$$

and hence $a = g$.
Now consider a photon moving vertically upward. It loses energy

$$\mathrm{dp}^0 = -\mathrm{p}^a\Phi_{,a}\mathrm{dx}^0 = -\mathrm{p}^z\Phi_{,\mathrm{z}}\mathrm{dt}$$

in time $dt = dz$. Since $p^z = p^0$ for a photon, the energy loss is then

$$\mathrm{dp}^0 = -\mathrm{p}^0\ \mathrm{g}\ \mathrm{d}z$$

For an earth-based experiment $g\Delta z \ll 1$ and

$$\Delta\mathrm{p}^0/\mathrm{p}^0 = \Delta\nu/\nu = -\mathrm{g}\Delta z$$

in agreement with the Pound-Rebka experiment.
(c) No. For a photon $\mathrm{p}_\beta\mathrm{dx}\beta = 0$ so the path of a photon is governed by

$$\mathrm{dp}^\mu = -\mathrm{p}^a\Phi_{,a}\mathrm{dx}^\mu = -\mathrm{dx}^a\Phi_{,a}\mathrm{p}^\mu$$

Since dp is proportional to p , the photon must move in a straight line; there is no bending.
[Note: Also in disagreement with observations, this theory predicts a regression of the perihelion of a planet's motion, of magnitude

$$\delta = 2\pi \mathrm{M}_{\odot}^2/\mathrm{J}^2$$

where δ = shift per orbit, J = angular momentum of planet per unit mass. For nearly circular orbits, this becomes

$$\delta = 2\pi \mathrm{M}_{\odot}/\mathrm{r}$$

which is $\approx 13''$/ century for Mercury's orbit.]
Solution 20.9. Any standardized clock can be calibrated against a clock at infinity (which measures time t). Then the ratio of the ticking rate of a clock at (r, θ), 4-velocity u , to the rate of a clock at infinity is

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{dt}} = \frac{1}{\mathrm{u}^0(\mathrm{r}, \theta)}.$$

In Solution 16.19, we showed that u^0 = constant on the surface of a rigidly rotating, equilibrium configuration of a perfect fluid. Thus

$$\mathrm{d}\pi/\mathrm{dt} = \text{ constant}$$

and all clocks on the surface of the earth have the same ticking rate! (The doppler shift effect exactly cancels the redshift effect.)

13.7.21 21 Miscellaneous

Problems in this chapter deal mostly with variational techniques, thin shells of matter, and spinors.
Problem 21.1. Show that
(i) $\delta(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{g}^{\mu\nu}\delta \mathrm{g}_{\mu\nu}$
(ii) $\delta \mathrm{g}^{\mu\nu} = -\mathrm{g}^{\rho\mu}\mathrm{g}^{\sigma\nu}\delta \mathrm{g}_{\rho\sigma}$.
Problem 21.2. Let $\mathrm{L} = \mathrm{L}\left(\Phi^{\mathrm{A}}, \mathrm{g}_{\mu\nu}\right)$ be the Lagrangian density for some field or matter distribution. The field is described by the variables Φ^{A}, where A represents any tensor indices. The action is

$$S = \int L(-g)^{\frac{1}{2}} d^4x.$$

The functional derivative $\delta \mathrm{L}/\delta\Phi^{\mathrm{A}}$ is defined by making a variation $\Phi^{\mathrm{A}} \to \Phi^{\mathrm{A}} + \delta\Phi^{\mathrm{A}}$ and taking the change in S to be

$$\delta \mathrm{S} = \int \frac{\delta \mathrm{L}}{\delta \Phi^{\mathrm{A}}} \delta\Phi^{\mathrm{A}} (-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}^4\mathrm{x}$$

Show that $\delta \mathrm{L}/\delta\Phi^{\mathrm{A}} = 0$ is the usual Euler-Lagrange equation when L depends on Φ^{A} and its partial derivatives Φ^{A}, a^2
Problem 21.3. If L is a Lagrangian density as in Problem 21.2, the stress-energy tensor can be defined by a variation of $g_{\mu\nu}$ in S :

$$\delta \mathrm{S} = \int \frac{\delta\left(\mathrm{L}(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\right)}{\delta \mathrm{g}_{\mu\nu}} \delta \mathrm{g}_{\mu\nu} \mathrm{d}^4\mathrm{x} \equiv \frac{1}{2} \int\ \mathrm{T}^{\mu\nu} \delta \mathrm{g}_{\mu\nu} (-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}^4\mathrm{x}$$

Show that $\mathrm{T}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ follows from the equation of motion of the field and the fact that S is a scalar.
Problem 21.4. Consider the action

$$S = (16\pi)^{-1} \int (-g)^{\frac{1}{2}} R d^4x + \int L_{\text{matter}}\ (-g)^{\frac{1}{2}} d^4x$$

where R is the Ricci scalar and L_{matter} contains g's but no Γ 's (so that Γ 's are present only in R).
(a) Treat the g's and the Γ 's as independent field variables ("Palatini method"), and show that $\delta S = 0$ leads to the Einstein field equations and the usual formula for the Γ 's in terms of the g's. (Assume $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta}$.)
(b) Now assume Γ's are Christoffel symbols used to define covariant derivatives in the usual way. Show that $\delta \mathrm{S} = 0$ (where now $\delta\Gamma^{a}{}_{\beta\nu}$ is not independent of $\delta \mathrm{g}^{\alpha\beta}$) leads to the Einstein field equations.
Problem 21.5. The Lagrangian density for a scalar field is $\mathrm{L} = -(8\pi)^{-1}\left(\Phi_{;\alpha}\Phi^{;\alpha} + \mathrm{m}^2\Phi^2\right)$. Find the equations of motion and the stressenergy tensor. Verify explicitly that the stress-energy tensor has vanishing divergence.
Problem 21.6. The electromagnetic Lagrangian density is $\mathrm{L} = -(16\pi)^{-1}\ \mathrm{F}^{\mu\nu}\mathrm{F}_{\mu\nu}$ where $\mathrm{F}_{\mu\nu} = \mathrm{A}_{\nu;\mu} - \mathrm{A}_{\mu;\nu}$. Show that the Maxwell equations $\mathrm{F}^{\alpha\beta};\beta = 0$ follow from setting to zero the variation of $\int \mathrm{L}(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}^4\mathrm{x}$ with respect to A_{μ}. Find the stress-energy from the prescription

$$\mathrm{T}_{\mu\nu} = -2\frac{\delta\ \mathrm{L}}{\delta\ \mathrm{g}^{\mu\nu}} + \mathrm{g}_{\mu\nu}\mathrm{L}$$

Show that an equivalent Lagrangian density is

$$\mathrm{L} = -\frac{1}{16\pi}\ \mathrm{F}_{\mu\nu}\mathrm{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{4\pi}\ \mathrm{F}^{\mu\nu}\mathrm{A}_{\mu;\nu}$$

where $\mathrm{F}^{\mu\nu}$ is antisymmetric and $\mathrm{F}^{\mu\nu}$ and A_{μ} must be varied independently.

Problem 21.7. A Lagrangian for the Brans-Dicke theory is

$$\mathrm{L} = \left(\Phi\mathrm{R} - \omega\Phi_{,a}\Phi^{,a}\Phi^{-1} + 16\pi\ \mathrm{L}_{\mathrm{matter}}\ \right)$$

Where Φ = scalar field, R = curvature scalar, ω = coupling constant.
Derive the field equations from $\delta\int \mathrm{L}(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}^4\mathrm{x} = 0$ by varying $\mathrm{g}_{\alpha}\beta$ and Φ.

Problem 21.8. A surface layer is a timelike 3 -surface separating two kegions of spacetime. In general relativity the intrinsic geometry of such a 3-surface is well defined, but the extrinsic curvature may be discontinuous. That is, we may get a different extrinsic curvature tensor K if ze evaluate it with respect to the 4-geometry on one side or the other. The surface stress-energy $\mathrm{S}^{\alpha}{}_{\beta}$ contained in such a surface layer is defined as

$$\mathrm{S}^{\alpha}{}_{\beta} = \mathrm{LIM}_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\mathrm{T}^{\alpha}{}_{\beta}\mathrm{dn}$$

where n is proper distance perpendicular to the 3 -surface. Use the initial value equations to find the discontinuity in K in terms of $S^{\alpha}{}_{\beta}$.

Problem 21.9. For a surface layer described with Gaussian normal coordinates n and $x^i (i = 1, 2, 3)$ (see solution to Problem 21.8) derive the equation of motion of the surface layer

$$S^i_{j|i} + \left[T^n_j\right] = 0$$

where the square brackets denote a discontinuity across the surface and the slash denotes covariant differentiation with respect to the intrinsic geometry of the 3 -surface.

Problem 21.10. A thin shell of dust in vacuum has surface density of mass σ as measured by an observer comoving with the dust. If u is the 4-velocity of the dust, show that

$$[\mathrm{K}_{\mathrm{ij}}] = 8\pi\sigma\left(\mathrm{u}_{\mathrm{i}}\mathrm{u}_{\mathrm{j}} + \frac{1}{2}(3)\mathrm{g}_{\mathrm{ij}}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}r} = -\left.\sigma\mathrm{u}^{\mathrm{i}}\right|_{\mathrm{i}}$$

$$\mathrm{a}^{+} - \mathrm{a}^{-} = 4\pi\sigma\mathrm{n}$$

$$\mathrm{a}^{+} + \mathrm{a}^{-} = 0$$

Here $\mathrm{a}^{+}$and $\mathrm{a}^{-}$are the 4-accelerations measured on the outside and inside of the shell, respectively.

Problem 21.11. The vacuum geometries exterior to and interior to a collapsing spherical shell of dust are the Schwarzschild geometry

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

for the exterior, and the flat geometry

$$\mathrm{dss}^2 = -\mathrm{dT}^2 + \mathrm{dr}^2 + \mathrm{r}^2\ \mathrm{d}\Omega^2$$

for the interior. [The radial coordinates in these metrics both, clearly, have the property that $4\pi\mathrm{r}^2$ is the proper surface area of the spherical surfaces r = constant, and t or T = constant.]

Show that for the collapsing spherical shell of dust the "rest mass of the shell" $\mu \equiv 4\pi\mathrm{R}^2(\tau)\sigma$ is constant. Here σ is the surface mass density of the shell and the area of the shell as a function of proper shell time is $4\pi R^2(r)$. Derive the equation of motion of the shell

$$\mathrm{M} = \mu\left[1 + \left(\frac{\mathrm{dR}}{\mathrm{d}r}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{\mu^2}{2\mathrm{R}}$$

and integrate the equation to find (in implicit form) $\mathrm{R}(r)$ in the case $\mathrm{dR}/\mathrm{d}\tau = 0$ at $\mathrm{R} = \infty$.

Problem 21.12. Find an instantaneous spatial metric which represents N point masses at arbitrary positions at an instant of time symmetry.

Problem 21.13. Suppose one identifies four-vectors U^{α} with 2 -index spinors $\mathrm{U}^{\mathrm{AA}'}$ by

$$\left(U^0, U^1, U^2, U^3\right) \to 2^{-\frac{1}{2}}\begin{bmatrix} U^0 + U^1 & U^2 + iU^3 \\ U^2 - iU^3 & U^0 - U^1 \end{bmatrix}.$$

What is the analog of the Minkowski metric in spinor language? i.e. Find an $\mathrm{L_{AA'BB'}}$ such that $\mathrm{U \cdot V} = \eta_{\alpha\beta}\mathrm{U}^{\alpha}\mathrm{V}^{\beta} = \mathrm{L_{AA'BB'}U^{AA'}V^{BB}}$. (Hint: use the spinor $(\varepsilon_{AB}) = \left(\varepsilon^{AB}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.) What is the analog of a Lorentz transformation?
[Note: The spinor notation used here and in the following problems is that of e.g. F. A. E. Pirani in A. Trautman, F. A. E. Pirani, and H. Bondi, Lectures on General Relativity, Brandeis 1964 Summer Institute on Theosetical Physics (Prentice-Hall, 1965).]

Problem 21.14. Show that
(a) $\varepsilon_{\mathrm{A[B}}\varepsilon_{\mathrm{CD]}} = 0$
(b) $\xi_{\mathrm{AB}} = \xi_{\mathrm{(AB)}} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mathrm{AB}}\xi_{\mathrm{C}}{}^{\mathrm{C}}$
there ξ_{AB} is an arbitrary 2 -spinor. [Note: This problem and the two following were suggested by T. Sejnowski.]
Problem 21.15. Let $\mathrm{T_{ab}} = \mathrm{T_{AA'BB'}}$. Show that if $\mathrm{T_{ab}}$ is antisymmetric then its dual in a spinor representation is $*T_{ab} = \frac{1}{2}\mathrm{i}\left(\mathrm{T}_{ABB'A'} - \mathrm{T}_{BAA'B'}\right)$.

Problem 21.16. Let $\mathrm{T_{ab}} = \mathrm{T_{AA'BB'}}$ in a spinor representation. What tensor corresponds to $\mathrm{T_{BA'AB'}}$?

Solution 21.1.

(i) One way of finding the formula for the derivative of a determinant is from the identity

$$\det A = e^{\mathrm{Tr}\{\log A\}}$$

valid for any nonsingular matrix A. (Here $\log A$ is the inverse function of e^A, where the exponential is defined as a power series.) Thus we have

$$\begin{aligned}\delta(\det \mathrm{A}) &= \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\{\log \mathrm{A}\}}\delta(\mathrm{Tr}\{\log \mathrm{A}\}) \\ &= (\det \mathrm{A})\,\mathrm{Tr}\left(\mathrm{A}^{-1}\delta\ \mathrm{A}\right)\end{aligned}$$

and for $\mathrm{g} \equiv \det\left(\mathrm{g}_{\alpha\beta}\right)$

$$\delta \mathrm{g} = \mathrm{g}^{\alpha\beta}\delta \mathrm{g}_{\alpha\beta}$$

where we have used the symmetry of $g_{\alpha\beta}$. The desired result follows immediately:

$$\begin{aligned}\delta(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{2}(-\mathrm{g})^{-\frac{1}{2}}\delta\ \mathrm{g} \\ &= \frac{1}{2}(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{g}^{\alpha\beta}\delta \mathrm{g}_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

(ii) From the definition of $\mathrm{g}^{\alpha\beta}$,

$$\mathrm{g}^{\alpha\beta}\mathrm{g}_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}$$

we have

$$\delta \mathrm{g}^{\alpha\beta}\mathrm{g}_{\beta\gamma} + \mathrm{g}^{\alpha\beta}\delta \mathrm{g}_{\beta\gamma} = 0$$

$$\begin{aligned}0 = \delta \mathrm{S} &= \int \mathcal{L}_{\xi}\left(\mathrm{L}(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}^4\mathrm{x} \qquad (1)\\ &= \int\left[\frac{\delta \mathrm{L}}{\delta \Phi^{\mathrm{A}}}\left(\mathcal{L}_{\xi}\Phi^{\mathrm{A}}\right)(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}} + \frac{\delta\left(\mathrm{L}(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\right)}{\delta \mathrm{g}_{\mu\nu}}\mathcal{L}_{\xi}\mathrm{g}_{\mu\nu}\right]\mathrm{d}^4\mathrm{x}\end{aligned}$$

$$\delta \mathrm{g}^{\alpha\beta}\delta\delta^{\delta} + \mathrm{g}^{\gamma\delta}\mathrm{g}^{\alpha\beta}\delta \mathrm{g}_{\alpha\beta} = 0$$

and hence the answer:

$$\delta \mathrm{g}^{a\delta} = -\mathrm{g}^{\gamma\delta}\mathrm{g}^{\alpha\beta}\delta \mathrm{g}_{\beta\gamma}$$

Solution 21.2. The variation in L due to changes in Φ^{A} is given by

$$(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\delta\ \mathrm{L}\left(\Phi^{\mathrm{A}}, \Phi^{\mathrm{A}}{}_{,}{}^{\mu}, \mathrm{g}_{\mu\nu}\right) = \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \Phi^{\mathrm{A}}}\delta\Phi^{\mathrm{A}} + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \Phi^{\mathrm{A}}}, \delta\Phi^{\mathrm{A}}, \mu\right)(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}} \qquad (1)$$

The operation of varying Φ^A commutes with partial differentiation

$$\delta\left(\Phi^{\mathrm{A}}_{,\mu}\right) = \left(\delta\Phi^{\mathrm{A}}\right)_{,\mu}$$

so Equation (1) becomes

$$(-g)^{\frac{1}{2}}\delta\ L = (-g)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\ L}{\partial\Phi^A}\delta\Phi^A + \left(\frac{\partial L(-g)^{\frac{1}{2}}}{\partial\Phi^A_{,\mu}}\delta\Phi^A\right)_{,\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial L(-g)^{\frac{1}{2}}}{\partial\Phi^A_{,\mu}}\right)\delta\Phi^A$$

The second term is a perfect divergence, which gives a surface term in the integral δS, and hence is zero since $\delta\Phi^A$ is taken to vanish on the surface. Thus

$$0 = \frac{\delta L}{\delta\Phi^A} = \frac{\partial L}{\partial\Phi^A} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial L(-g)^{\frac{1}{2}}}{\partial\Phi^A_{,\mu}}\right)\frac{1}{(-g)^{\frac{1}{2}}}$$

Solution 21.3. Since $L(-g)^{\frac{1}{2}}\ d^4x$ is a scalar, it is unchanged under the infinitesimal coordinate transformation

$$\bar{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu$$

By renaming the dummy variable of integration, $d^4\bar{x}$ can be changed back to d^4x. The net change in $L(-g)^{\frac{1}{2}}$ is therefore the Lie derivative (see Problem 8.17), so that
The first term in the integrand vanishes by the equation of motion (Problem 21.2), thus

$$0 = \frac{1}{2}\int\ T^{\mu\nu}\mathcal{L}_{\boldsymbol{\xi}}g_{\mu\nu}(-g)^{\frac{1}{2}}\ d^4x$$

Since

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}$$

we get

$$\begin{aligned} 0 &= \int T^{\mu\nu}\xi_{\mu;\nu}(-g)^{\frac{1}{2}}\ d^4x \qquad (2)\\ &= \int\left(T^{\mu\nu}\xi_{\mu;\nu}(-g)^{\frac{1}{2}}\ d^4x - \int T^{\mu\nu}_{;\nu}\xi_\mu(-g)^{\frac{1}{2}}\ d^4x\right.\end{aligned}$$

The first term is

$$\int\left(T^{\mu\nu}\xi_\mu\right)_{;\nu}(-g)^{\frac{1}{2}}\ d^4x = \int\left((-g)^{\frac{1}{2}}\ T^{\mu\nu}\xi_\mu\right),\nu d^4x$$

and gives a surface integral which vanishes. Since ξ_μ is arbitrary, Equation (2) then gives

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$$

Solution 21.4.
(a) Under the independent variations

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &\to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}\\ \Gamma^a_{\mu\nu} &\to \Gamma^a_{\mu\nu} + \delta\Gamma^a_{\mu\nu}\end{aligned}$$

we have

$$\delta\left((-g)^{\frac{1}{2}}R\right) = (-g)^{\frac{1}{2}}\ g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + R\delta(-g)^{\frac{1}{2}} + (-g)^{\frac{1}{2}}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \qquad (1)$$

Since

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^a_{\mu\nu,a} - \Gamma^a_{\mu a,\nu} + \Gamma^a_{a\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^a_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu a}$$

the first term on the right-hand side of Equation (1) becomes

$$\begin{aligned}(-g)^{\frac{1}{2}}\ g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = &\left((-g)^{\frac{1}{2}}\ g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right)_{,a} - \left((-g)^{\frac{1}{2}}\ g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu a}\right)_{,\nu}\\ &- \left((-g)^{\frac{1}{2}}\ g^{\mu\nu}\right)_{,a}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \left((-g)^{\frac{1}{2}}\ g^{\mu\nu}\right)_{,\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu a}\\ &+ (-g)^{\frac{1}{2}}\ g^{\mu\nu}\left(\delta\Gamma^\alpha_{a\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha_{a\sigma}\overset{\delta\Gamma_{\mu\nu}}{\mu\nu} - \delta\Gamma^\alpha_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\mu a} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma}\delta\Gamma^\sigma_{\mu a}\right)\end{aligned}$$

The first two terms on the right-hand side of Equation (3) are divergences, which therefore do not contribute to δS. (The integral of a divergence can be converted to a surface integral and $\delta\Gamma = 0$ on the surface of the region of integration.) By appropriate relabeling of dummy indices, Equation (3) can be written

$$(-g)^{\frac{1}{2}}\ g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = (-g)^{\frac{1}{2}}\left(\ A^{\mu\nu}_\sigma + \delta^\nu_\sigma B^\mu\right)\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$$

where

$$A_{\sigma}^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu}\Gamma_{\alpha\sigma}^{\alpha} - (-g)^{-\frac{1}{2}}\left[(-g)^{\frac{1}{2}}\ g^{\mu\nu}\right]_{,\sigma} - g^{\alpha\nu}\Gamma_{a\sigma}^{\mu} - g^{\alpha\mu}\Gamma_{a\sigma}^{\nu}$$
$$B^{\mu} \equiv (-g)^{-\frac{1}{2}}\left[(-g)^{\frac{1}{2}}\ g^{\mu\beta}\right]_{,\beta} + g^{\alpha\beta}\Gamma_{a\beta}^{\mu}$$

By Problem 21.1 we have

$$\delta\left[(-g)^{\frac{1}{2}}\right] = -\frac{1}{2}(-g)^{\frac{1}{2}}\ g_{\mu\nu}\delta g\mu\nu$$

so

$$\begin{aligned} 0 = &\delta S = (16\pi)^{-1}\int (-g)^{\frac{1}{2}}\ d^4x\,(\ A_{\sigma}^{\mu\nu} + \delta_{\sigma}^{\nu}B^{\mu})\,\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \\ &+ (16\pi)^{-1}\int (-g)^{\frac{1}{2}}\ d^4x\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\ g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu} \\ &+ \int \frac{\delta\left(L_{\text{matter}}\ ^{(-g)^{\frac{1}{2}}}\right)}{\delta g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}d^4x \end{aligned}$$

Since $\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ is symmetric, the first term in Equation (8) gives

$$A_{\sigma}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\delta_{\sigma}^{\nu}B^{\mu} + \frac{1}{2}\delta_{\sigma}^{\mu}B^{\nu} = 0 \tag{2}$$

Contracting on σ and ν in Equation (9) yields

$$A_{\sigma}^{\mu\sigma} + 2\ B^{\mu} + \frac{1}{2}\ B^{\mu} = 0 \tag{3}$$

But contracting Equation (5) and comparing with Equation (6) shows

$$A_{\sigma}^{\mu\sigma} = -B^{\mu} \tag{11}$$

Equations (10) and (11) imply $B^{\mu} = 0$, so by Equation (9)

$$A_{\sigma}^{\mu\nu} = 0 \tag{12}$$

If the explicit expression in Equation (5) is used, Equation (12) can be written

$$g^{\mu\nu}C_{\sigma} = g_{,\sigma}^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu}\Gamma_{a\sigma}^{\mu} + g^{\alpha\mu}\Gamma_{a\sigma}^{\nu} \tag{4}$$

where

$$C_{\sigma} \equiv (-g)^{-\frac{1}{2}}(-g)_{,\sigma}^{\frac{1}{2}} - \Gamma_{a\sigma}^{a} \tag{5}$$

When we multiply Equation (13) by $g_{\mu\nu}$ we find that

$$\begin{aligned} 4C_{\sigma} &= g_{,\sigma}^{\mu\nu}g_{\mu\nu} + 2\Gamma_{a\sigma}^{\alpha} \\ &= -2(-g)^{-\frac{1}{2}}(-g)_{,\sigma}^{\frac{1}{2}} + 2\Gamma_{a\sigma}^{\alpha} \\ &= -2C_{\sigma} \end{aligned} \tag{7}$$

(where Problem 21.1 has been used in the second line) and therefore that $C_{\sigma} = 0$. If we define

$$\Gamma_{\lambda a\sigma} \equiv\ g_{\lambda\mu}\Gamma_{\alpha\sigma}^{\mu} \tag{15}$$

and if we now multiply Equation (13) by $g_{\lambda\mu}g_{\gamma\nu}$, we get

$$0 = -g_{\gamma\lambda,\sigma} + \Gamma_{\lambda y\sigma} + \Gamma_{\gamma\lambda\sigma} \tag{16}$$

and thus.

$$\frac{1}{2}\left(\ g_{\gamma\lambda,\sigma} + g_{\gamma\sigma,\lambda} - g_{\sigma\lambda,\gamma}\right) = \Gamma_{\gamma\lambda\sigma} \tag{17}$$

which is one of the required results.
We now return to Equation (8), and use Problem 21.3:

$$\frac{\delta\left(\mathrm{L}_{\text{matter}}\ (-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\right)}{\delta \mathrm{g}_{\mu\nu}}\delta \mathrm{g}_{\mu\nu} = \frac{\delta\left(\mathrm{L}_{\text{matter}}\ (-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\right)}{\delta \mathrm{g}^{\mu\nu}}\delta \mathrm{g}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{T}^{\mu\nu}\delta \mathrm{g}_{\mu\nu} \tag{18}$$
$$= -\frac{1}{2}(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{T}_{\mu\nu}\delta \mathrm{g}^{\mu\nu}$$

We conclude that

$$(16\pi)^{-1}\left(\mathrm{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\ \mathrm{g}_{\mu\nu}\mathrm{R}\right) - \frac{1}{2}\ \mathrm{T}_{\mu\nu} = 0$$

or

$$\mathrm{G}_{\mu\nu} = 8\pi\ \mathrm{T}_{\mu\nu} \tag{19}$$

(b) Although $\Gamma^{a}{}_{\mu\nu}$ (now taken to be the Christoffel symbols formed from $\mathrm{g}_{\alpha\beta}$) is not a tensor, $\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ is a tensor (Problem 8.26). Thus we can simplify the calculation of $\delta \mathrm{R}_{\mu\nu}$ by working in a local inertial frame, where the Γ 's vanish. In this frame, Equation (2) gives

$$\delta \mathrm{R}_{\mu\nu} = \delta\Gamma^{a}_{\mu\nu,a} - \delta\Gamma^{a}_{\mu\alpha,\nu} = \delta\Gamma^{a}_{\mu\nu;a} - \delta\Gamma^{a}_{\mu\alpha;\nu} \tag{20}$$

Since this is a tensor equation, it is valid in any coordinate system. The Γ 's are Christoffel symbols, so $\mathrm{g}_{\mu\nu;a} = 0$ and

$$(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{g}^{\mu\nu}\delta \mathrm{R}_{\mu\nu} = (-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\left[\left(\ \mathrm{g}^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right)_{;a} - \left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu a}\mathrm{g}^{\mu\nu}\right)_{;\nu}\right]$$
$$= \left((-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{g}^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\right)_{,a} - \left(\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu a}{}^{\mu\nu}(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\right)_{,\nu}$$

(where we have used Problem 7.7(g) in the second line). Since this is a perfect divergence, it does not contribute to δS. The remaining terms in Equations (1) and (18) lead to Equation (19) as in part (a).

Solution 21.5. Taking the variation of the action

$$\mathrm{S} = -(8\pi)^{-1}\int\left(\Phi_{;a}\Phi^{;a} + \mathrm{m}^2\Phi^2\right)(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}^4\mathrm{x}$$

gives us

$$0 = \frac{\delta \mathrm{L}}{\delta\Phi} = \left[2\ \mathrm{m}^2\Phi - 2(-\mathrm{g})^{-\frac{1}{2}}\left[(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\Phi^{,a}\right], a\right](-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}$$

or

$$\Box\Phi - \mathrm{m}^2\Phi = 0. \tag{1}$$

From Problem 21.3 the stress-energy is

$$\mathrm{T}_{\mu\nu} \equiv -2(-\mathrm{g})^{-\frac{1}{2}}\frac{\delta\left[(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{L}\right]}{\delta \mathrm{g}^{\mu\nu}}$$
$$= \frac{1}{4\pi}(-\mathrm{g})^{-\frac{1}{2}}\left[\Phi_{,\mu}\Phi_{,\nu}(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(\Phi_{,a}\Phi^{,a} + \mathrm{m}^2\Phi^2\right)(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{g}_{\mu\nu}\right]$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left[\Phi_{,\mu}\Phi_{,\nu} - \frac{1}{2}\ \mathrm{g}_{\mu\nu}\left(\Phi_{,a}\Phi^{,a} + \mathrm{m}^2\Phi^2\right)\right] \tag{2}$$

and hence its divergence is

$$\mathrm{T}^{\mu\nu}_{\ \ ;\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(\Phi^{\mu}_{\ ;\nu}\Phi^{,\nu} + \Phi^{,\mu}\Box\Phi - \Phi^{;\mu}_{\ ,a}\Phi^{,a} - \mathrm{m}^2\Phi\Phi^{,\mu}\right) \tag{3}$$

For a scalar field Φ, we also have the relation

$$\Phi^{\mu}_{\ ;\nu} = \Phi^{;\mu}_{\ ,\nu} \tag{4}$$

thus Equation (3) becomes

$$\mathrm{T}^{\mu\nu}_{\ \ ;\nu} = \frac{\Phi^{\mu}}{4\pi}\left(\Box\Phi - \mathrm{m}^2\Phi\right) \tag{5}$$

which, by Equation (1), vanishes.

Solution 21.6. Varying the action integral gives us

$$\frac{\delta\left(\mathrm{L}[-\mathrm{g}]^{\frac{1}{2}}\right)}{\delta \mathrm{A}_{\mu}} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\delta\left(\ \mathrm{A}_{[\mu;\nu]}\mathrm{A}^{[\mu;\nu]}[-\mathrm{g}]^{\frac{1}{2}}\right)}{\delta \mathrm{A}_{\mu}} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\delta\left(\ \mathrm{A}_{[\mu,\nu]}\mathrm{A}^{[\mu,\nu]}[-\mathrm{g}]^{\frac{1}{2}}\right)}{\delta \mathrm{A}_{\mu}}$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^{\mu}}\left(\mathrm{A}^{[\mu,\nu]}[-\mathrm{g}]^{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}^{\mu}}\left(\mathrm{F}^{\nu\mu}[-\mathrm{g}]^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$= -\frac{[-\mathrm{g}]^{\frac{1}{2}}}{2\pi}\ \mathrm{F}^{\nu\mu}_{;\mu} \tag{1}$$

where we have used Problem 7.7 (i).
The prescription for the stress-energy gives

$$\mathrm{T}_{\alpha\beta} \equiv -2\frac{\delta\ \mathrm{L}}{\delta\ \mathrm{g}^{\alpha\beta}} + \mathrm{L}\mathrm{g}_{a\beta} = \frac{1}{8\pi}\frac{\delta\left(\ \mathrm{F}_{\mu\nu}\mathrm{F}_{\sigma\mathrm{r}}\ \mathrm{g}^{\mu\sigma}\mathrm{g}^{\nu r}\right)}{\delta \mathrm{g}\ \mathrm{g}^{\alpha\beta}} - \frac{1}{16\pi}\ \mathrm{F}_{\mu\nu}\mathrm{F}^{\mu\nu}\mathrm{g}_{\alpha\beta}$$
$$= \frac{1}{4\pi}\ \mathrm{F}^{\nu}_{\alpha}\mathrm{F}_{\beta\nu} - \frac{1}{16\pi}\ \mathrm{F}_{\mu\nu}\mathrm{F}^{\mu\nu}\mathrm{g}_{\alpha\beta}. \tag{2}$$

Consider now the Lagrangian density

$$\mathrm{L} = \left(-\frac{1}{16\pi}\ \mathrm{F}_{\mu\nu}\mathrm{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{4\pi}\ \mathrm{F}^{\mu\nu}\mathrm{A}_{\mu;\nu}\right)(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

Variation of L with respect to A_{μ} yields

$$\mathrm{F}^{\mu\nu}_{;\nu} = 0. \tag{4}$$

Variation of L with respect to $\mathrm{F}^{\mu\nu}$ yields

$$\mathrm{F}^{\mu\nu} = 2\ \mathrm{A}^{[\nu;\mu]}. \tag{5}$$

Solution 21.7. Variation of the Lagrangian with respect to Φ yields
and thus

$$(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\left(\mathrm{R} + \frac{\omega}{\Phi^2}\Phi_{,a}\Phi^{,a}\right) = -2\omega\frac{\partial}{\partial_{\mathrm{x}}{}^{a}}\left(\frac{\Phi^{,a}(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}}{\Phi}\right)$$
$$2\omega\Phi^{-1}\Box\Phi - \omega\Phi^{-2}\Phi_{,a}\Phi^{,a} + \mathrm{R} = 0. \tag{1}$$

(We have used here

$$\Box\Phi \equiv \Phi_{,a};\alpha = \frac{1}{(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}}\left(\Phi^{,\alpha}(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\right),\alpha\cdot\Big)$$

Variation of L with respect to $\mathrm{g}_{\alpha\beta}$ involves three terms:
(i) $\frac{\delta\left(-\omega\Phi^{,a}\Phi^{,}{}^{\beta}{}_{\mathrm{g}_{\alpha\beta}}\Phi^{-1}(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\right)}{\delta \mathrm{g}_{\alpha\beta}} = -\frac{\omega}{\Phi}\left[\Phi^{,a}\Phi^{,\beta}(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\Phi_{,\mu}{}_{,\mu}\ \mathrm{g}^{\alpha\beta}(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\right]$
and

$$\text{(ii)}\quad \begin{aligned} &\delta\left(\Phi\mathrm{R}(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\right) = (-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\Phi\mathrm{G}^{\alpha\beta}\delta\mathrm{g}_{\alpha\beta} + \Phi(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{g}^{\alpha\beta}\delta\mathrm{R}_{\alpha\beta} \\ &(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{g}^{\alpha\beta}\delta\mathrm{R}_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left[(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\left(\ \mathrm{g}^{\alpha\beta}\delta\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} - \mathrm{g}^{\alpha\gamma}\delta\Gamma^{\gamma}_{\alpha\tau}\right)\right] \end{aligned} \tag{2b}$$

(see Problem 21.4). Also, we have from the expression for the Γ 's as derivatives of the g's

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = -\mathrm{g}^{\lambda\rho}\delta\mathrm{g}_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\ \mathrm{g}^{\lambda\rho}\left[\left(\delta\mathrm{g}_{\rho\mu}\right)_{,\nu} + \left(\delta\mathrm{g}_{\rho\nu}\right)_{,\mu} - \left(\delta\mathrm{g}_{\mu\nu}\right)_{,\rho}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\ \mathrm{g}^{\lambda\rho}\left[\left(\delta\mathrm{g}_{\rho\mu}\right)_{;\nu} + \left(\delta\mathrm{g}_{\rho\nu}\right)_{;\mu} - \left(\delta\mathrm{g}_{\mu\nu}\right)_{;\rho}\right] \tag{2d}$$

Using Equations (2c) and (2d), we can then write

$$\Phi(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{g}^{\alpha\beta}\delta\mathrm{R}_{a\beta} \rightarrow \delta\ \mathrm{g}^{\alpha\beta}\left(-\Phi_{,\alpha;\beta}{}^{+\mathrm{g}_{\alpha\beta}\Box\Phi}\Box(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\right. \tag{2e}$$

where $\rightarrow$ denotes the operation of dropping all exact divergences (which vanish when integrated over). Combining Equations (2b) and (2e) we have

$$\delta\left(\Phi \mathrm{R}(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\right)=(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}} \delta\ \mathrm{g}^{\alpha \beta}\left[-\Phi_{, a ; \beta}+\mathrm{g}_{\alpha \beta}\ \Phi+\Phi \mathrm{G}_{\alpha \beta}\right]. \tag{2f}$$

The remaining term needed is

(iii) $16 \pi \frac{\delta\left(\mathrm{L}_{\text{matter}}\ (-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\right)}{\delta \mathrm{g}_{a} \beta}=-8 \pi(-\mathrm{g})^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{T}^{\alpha \beta}$.

From Equations (2a) and (2f), and (2g), we get the field equations obtained by varying $\mathrm{g}^{\alpha\beta}$:

$$\begin{gathered}\mathrm{G}_{a \beta}+\Phi^{-1}\left(\ \mathrm{g}_{a \beta} \square \Phi-\Phi_{, a ; \beta}\right)-\omega \Phi^{-2}\left(\Phi_{, a} \Phi_{, \beta}-\frac{1}{2}\ \mathrm{g}_{a \beta} \Phi_{, \mu} \Phi^{, \mu}\right) \\ -8 \pi \Phi^{-1}\ \mathrm{T}_{a \beta}=0\end{gathered} \tag{3}$$

Solution 21.8. For simplicity choose coordinates (Gaussian normal coordinates; see Problem 8.25) in which the metric takes the form $\mathrm{ds}^2=dn^2+{}^{(3)}g_{ij}dx^i dx^j$. The coordinates $x^i (i=1,2,3)$ span the surface layer which is taken to be at $n=0$. From the initial value equations we have

$$\begin{aligned}G_j^i =&(3)G_j^i+\left(K_j^i-\delta_j^i \operatorname{Tr} K\right)_{,n}-(\operatorname{Tr} K)K_j^i+\frac{1}{2}\delta_j^i(\operatorname{Tr} K)^2 \\ &+\frac{1}{2}\delta_j^i \operatorname{Tr}\left(K^2\right)=8\pi T_j^i.\end{aligned}$$

We now integrate over n from $-\epsilon$ to $+\epsilon$, using the fact that n represents proper distance perpendicular to the 3 -surface, and we let $\epsilon \to 0$. Since the intrinsic geometry of the 3 -surface is well defined, the only term that survives this limiting integration is the term involving the derivatives of the extrinsic curvature, so for $[\mathbf{K}]$ the discontinuity in $\mathbf{K}$, we find

$$\left[\mathrm{K}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}}\right]-\delta_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}} \mathrm{Tr}[\ \mathrm{K}]=8 \pi\ \mathrm{S}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}}$$

or

$$\operatorname{Tr}[K]=-4\pi S_i^i=-4\pi {}^{(3)}g_{ij}S^{ij}$$

and

$$\left[K_j^i\right]=8\pi\left(S_j^i-\frac{1}{2}\delta_j^i S_k^k\right)$$

Solution 21.9. From the initial value equations, we have

$$\mathrm{G}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}}=-\left\{\mathrm{K}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{m}} \mid \mathrm{m}_{\mathrm{m}}-(\mathrm{TrK})_{, \mathrm{i}}\right\}=-\left\{\mathrm{K}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{m}}-\delta_{\mathrm{i}}^{\mathrm{m}} \mathrm{Tr}(\ \mathrm{K})\right\}_{\mathrm{m}}=8 \pi\ \mathrm{T}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}}.$$

The discontinuity of this equation across the 3 -surface is

$$\left\{\left[\mathrm{K}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{m}}\right]-\delta_{\mathrm{i}}^{\mathrm{m}} \mathrm{Tr}[\ \mathrm{K}]\right\}_{\mathrm{m}}=-8 \pi\left[\ \mathrm{T}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}}\right]$$

By combining this with our result from Problem 21.8, we have then

$$S_i^m \mid m_m=-\left[T_i^n\right]$$

Solution 21.10. The surface stress energy of the thin shell of dust is $\mathrm{s}^{\alpha\beta}=\sigma \mathrm{u}^{\alpha}\mathrm{u}^{\beta}$. From the solution to Problem 21.8, we have

$$\left[\mathrm{K}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}}\right]=8 \pi\left\{\sigma \mathrm{u}^{\mathrm{i}} \mathrm{u}_{\mathrm{j}}-\frac{1}{2} \delta_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}}(-\sigma)\right\}$$

or

$$\left[K_{ij}\right]=8\pi\sigma\left\{u_i u_j+\frac{1}{2}{}^{(3)}g_{ij}\right\} \tag{1}$$

Since there is no stress-energy outside the shell $[\mathrm{T}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}}]=0$ and the equation of motion (see Problem 21.9) gives us

$$\begin{aligned}0=\mathrm{S}_{\mathrm{i}|_{\mathrm{m}}}^{\mathrm{m}} &=\sigma, \mathrm{mu}^{\mathrm{m}} \mathrm{u}_{\mathrm{i}}+\sigma \mathrm{u}_{|\mathrm{m}}^{\mathrm{m}} \mathrm{u}_{\mathrm{i}}+\sigma \mathrm{u}_{\mathrm{i}|_{\mathrm{m}}} \mathrm{u}^{\mathrm{m}} \\ &=\frac{\mathrm{d} \sigma}{\mathrm{d} \tau} \mathrm{u}_{\mathrm{i}}+\sigma \mathrm{u}_{\mathrm{i}} \mathrm{u}_{|\mathrm{m}}^{\mathrm{m}}+\sigma \mathrm{u}_{\mathrm{i}|\mathrm{m}} \mathrm{u}^{\mathrm{m}}\end{aligned} \tag{2}$$

By contracting this with u we verify the second relation

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\tau} + \sigma \mathrm{u}^{\mathrm{m}}|_{\mathrm{m}} = 0 \tag{3}$$

Comparison with Equation (2) shows that $u_i \mid m^{u^m} = 0$. Thus

$$\mathbf{a} = \nabla_{u^u} = u^i \nabla_i \left(u^j e_j\right) = u^i \left(u^j\big|_i e_j + u^j K_{ij} n\right) = u^i u^j K_{ij} n. \tag{4}$$

(We have used Equation (2) of Solution 9.32 to get the second-last equality.) The third relation now follows from Equations (1) and (4):

$$\mathrm{a}^+ - \mathrm{a}^- = \mathrm{u}^{\mathrm{i}} \mathrm{u}^{\mathrm{j}} \left[\ \mathrm{K}_{\mathrm{ij}}\right] \mathrm{n} = 4\pi\sigma \mathrm{n}$$

To verify the fourth relation we need to show

$$\left(K_{ij}^+ + K_{ij}^-\right) u^i u^j = 0$$

We do this by using the initial value equation $[G_n^n] = 8\pi\,[T_n^n] = 0$. Since ${}^{(3)}\mathrm{R}$ is continuous, this gives us

$$\begin{aligned}
0 &= \left[\mathrm{Tr}\left(K^2\right) - (\mathrm{Tr}\, K)^2\right] \\
&= K_j^{i+} K_i^{j+} - K_j^{i-} K_i^{j-} - \left(K_i^{i+}\right)^2 + \left(K_i^{i-}\right)^2 \\
&= \left(K_j^{i+} + K_j^{i-}\right) \left\{K_i^{j+} - K_j^{i-} - {}^{(3)}g^{ij} \left(K_a^{a+} - K_a^{a-}\right)\right\} \\
&= \left(K_j^{i+} + K_j^{i-}\right) \left\{\left[K_i^j\right] - \delta_i^j\, \mathrm{Tr}[K]\right\},
\end{aligned}$$

where we have used the easily verified fact that $\mathrm{K}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}+}$ and $\mathrm{K}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{i}-}$ commute. Since

$$\left[\mathrm{K}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{j}}\right] = 8\pi\sigma \left(\mathrm{u}^{\mathrm{j}} \mathrm{u}_{\mathrm{i}} + \frac{1}{2}{}^{(3)}\delta_{\mathrm{i}}^{\mathrm{j}}\right)$$

it follows that

$$\left[\mathrm{K}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{i}}\right] = 4\pi\sigma$$

and that

$$\left[\mathrm{K}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{j}}\right] - \delta_{\mathrm{i}}^{\mathrm{j}} \left[\ \mathrm{K}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{i}}\right] = 8\pi\sigma \left(\mathrm{u}^{\mathrm{j}} \mathrm{u}_{\mathrm{i}}\right)$$

and therefore finally

$$\left(K_j^{i+} + K_j^{i-}\right) u^j u_i = 0.$$

Solution 21.11. If τ is proper time measured by an observer at rest in the dust, then the motion of the shell is specified by $r(\tau)$, where r is the radial coordinate of the shell in either the interior or exterior metric. The metric of the shell can be specified by

$$\mathrm{ds}^2 = -\mathrm{d}\tau^2 + \mathrm{R}^2(\tau) \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\ \mathrm{d}\phi^2\right)$$

Here $4\pi\mathrm{R}^2$ = the surface area of the shell at r, and thus $\mathrm{R}(r) = \mathrm{r}(r)$.
From the second relation in Problem 21.10 we have that

$$0 = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\tau} + \sigma \mathrm{u}^{\mathrm{i}}\big|_{\mathrm{i}} = \left(\sigma \mathrm{u}^{\mathrm{i}}\right)_{\mathrm{i}} = \left(\sigma \left({}^{(3)}\mathrm{g}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{u}^{\mathrm{i}}\right)_{,\mathrm{i}} / \left({}^{(3)}\mathrm{g}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

But $\mathrm{u}^\tau = 1$ and ${}^{(3)}\mathrm{g} = \mathrm{R}^4(\tau)$ so that $\left(\sigma\mathrm{R}^2\right)_{,\tau} = 0$. This implies that $4\pi\mathrm{R}^2\sigma = \mu$, which we identify with the rest mass of the shell, is a constant.
To find the equation of motion we use the junction condition from Problem 21.10

$$[\mathrm{K}_{\theta\theta}] = 8\pi\sigma \left(\mathrm{u}_\theta \mathrm{u}_\theta + \frac{1}{2}{}^{(3)}\mathrm{g}_{\theta\theta}\right) = 4\pi\sigma\, {}^{(3)}\mathrm{g}_{\theta\theta} = \mu.$$

Evaluating $\mathrm{K}_{\theta\theta}$ we have

$$\mathrm{K}_{\theta\theta} = -\mathrm{n}_{\theta;\theta} = \mathrm{n}_a \Gamma_{\theta\theta}^a = -\frac{1}{2}\mathrm{n}^{\mathrm{r}}\ \mathrm{g}_{\theta\theta,\mathrm{r}} = -\mathrm{rn}^{\mathrm{r}}$$

and

$$[\mathrm{K}_{\theta\theta}] = -\mathrm{r}\left(\mathrm{n}^{\mathrm{r}+} - \mathrm{n}^{\mathrm{r}-}\right) = \mu$$

where $\mathrm{n}^{\mathrm{r}+}$ and $\mathrm{n}^{\mathrm{r}-}$ are the radial components of the normal evaluated in the exterior and the interior geometry.

By using $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}=0$ and $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=-\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=1$, we can evaluate the components of u and n. Exterior to the shell we have

$$1=\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(u^t\right)^2-\left(u^r\right)^2/\left(1-\frac{2M}{r}\right)$$
$$0=n_r u^r+n_t u^t$$
$$1=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(n_t\right)^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(n_r\right)^2$$

and by eliminating u^t, n_t we find

$$n_r^+=\left[\frac{1+\left(u^r\right)^2/\left(1-\frac{2M}{r}\right)}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

On the shell $\mathrm{r}=\mathrm{R}(\tau)$ and $\mathrm{u}^{\mathrm{r}}=\mathrm{dR}/\mathrm{d}\tau\equiv\dot{\mathrm{R}}$ so the contravariant component of n, exterior to the shell is

$$\mathrm{n}^{\mathrm{r}+}=\left(1-\frac{2\mathrm{M}}{\mathrm{R}}+\dot{\mathrm{R}}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

The calculation for $\mathrm{n}^{\mathrm{r}-}$ is identical, and we get the same answer as above with M set to zero. Thus we have

$$\mu=-\mathrm{R}\left(\mathrm{n}^{\mathrm{r}+}-\mathrm{n}^{\mathrm{r}-}\right)=-\mathrm{R}\left\{\left[1-\frac{2\mathrm{M}}{\mathrm{R}}+\dot{\mathrm{R}}^2\right]^{\frac{1}{2}}-\left[1+\dot{\mathrm{R}}^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$

which can be solved for M to give the equation of motion

$$\mathrm{M}=\mu\left(1+\dot{\mathrm{R}}^2\right)^{\frac{1}{2}}-\mu^2/2\mathrm{R}.$$

If $\mathrm{R}=0$ at $\mathrm{R}=\infty$ (i.e. infall from rest at ∞), then $\mathrm{M}=\mu$ and

$$\dot{R}=-\frac{\mu}{2R}\left(1+\frac{4R}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

This can easily be integrated to give

$$\frac{4}{\mu}\tau=-\frac{1}{3}\left(1+\frac{4\mathrm{R}}{\mu}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(1+\frac{4\mathrm{R}}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3},$$

where we have taken $\tau=0$ to correspond to $\mathrm{R}=0$.

Solution 21.12. To find an instantaneous metric, we need only to consider the metric and field equations on a spacelike Cauchy surface S, the surface of time symmetry. Six of the ten Einstein field equations determine the metric off S; these we do not need to worry about. The remaining four equations are initial-value equations and can be written in the form (see Equations (6) and (7) of Problem 9.33)

$$\frac{1}{2}{}^{(3)}\mathrm{R}-\frac{1}{2}\left(\mathrm{K}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{i}}\right)^2+\frac{1}{2}\,\mathrm{K}_{\ell}^{\mathrm{m}}\,\mathrm{K}_{\mathrm{m}}^{\ell}=0 \tag{1a}$$
$$\mathrm{K}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{m}}\mid m_{\mathrm{m}}-\mathrm{K}_{\mathrm{m}\mid\mathrm{i}}^{\mathrm{m}}=0 \tag{1b}$$

where ${}^{(3)}\mathrm{R}$ is the curvature scalar on $\mathrm{S}, \mathrm{K}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{i}}$ is the extrinsic curvature, a slash represents covariant differentiation with respect to the three geometry ${}^{(3)}g_{ij}$ on S, and where we have used the vacuum initial value equations.

At a moment of time symmetry the (timelike) normal to S, from which K_{ij} is computed, goes into minus itself under time reversal. Thus $\mathrm{K}_{\mathrm{ij}}=-K_{ij}$ and hence the extrinsic curvature of S must vanish. For $K_{ij}=0$ on S, Equation (1b) is trivially satisfied and Equation (1a) takes the form

$${}^{(3)}R=0. \tag{2}$$

As a solution to Equation (2), we begin with the ansatz

$$\mathrm{g}_{\mathrm{ij}}=\Phi^4\eta_{\mathrm{ij}} \tag{3}$$

and see if there is a Φ which satisfies Equation (2):

$${}^{(3)}R=g^{ij}\left(\Gamma^m_{im,j}-\Gamma^m_{ij,m}+\Gamma^m_{\ell i}\Gamma^\ell_{jm}-\Gamma^\ell_{m\ell}\Gamma^m_{ij}\right). \tag{4}$$

With the ansatz of Equation (3) we have, for the Christoffel symbols

$$\Gamma^m_{\ell i} = 2\Phi^{-1}\left(\Phi_{,i}\delta^m_i + \Phi_{,\ell}\delta^m_i - \Phi^{,m}\eta_{\ell i}\right) \tag{5a}$$
$$g^{ij}\Gamma^m_{im,j} = -6\Phi^{-6}(\nabla\Phi)^2 + 6\Phi^{-5}\nabla^2\Phi \tag{5b}$$
$$g^{ij}\Gamma^m_{ij,m} = 2\Phi^{-6}(\nabla\Phi)^2 - 2\Phi^{-5}\nabla^2\Phi \tag{5c}$$
$$g^{ij}\Gamma^m_{\ell i}\Gamma^\ell_{jm} = -4\Phi^{-6}(\nabla\Phi)^2 \tag{5d}$$
$$g^{ij}\Gamma^\ell_{m\ell}\Gamma^m_{ij} = -12\Phi^{-6}(\nabla\Phi)^2 \tag{5e}$$

where we have used the symbols

$$(\nabla\Phi)^2 \equiv \Phi_{,i}\Phi_{,j}\eta^{ij} \tag{5f}$$
$$\nabla^2\Phi \equiv \Phi_{,i,j}\eta^{ij} \tag{5g}$$

Combining Equations (4)-(5), we see that Equation (2) reduces to

$$^{(3)}\mathrm{R} = 0 = 8\Phi^{-5}\nabla^2\Phi \tag{6}$$

which is satisfied by any solution of Laplace's equation. One such solution is

$$\Phi = 1 + \sum_i \frac{M_i}{2r_i} \tag{7}$$

leading to a metric

$$g_{ij} = \left(1 + \sum_i \frac{M_i}{2r_i}\right)^4 \eta_{ij} \tag{8}$$

The lowest order term in M/r for the metric in Equation (8) is

$$g_{ij} \approx \left(1 + \sum_i \frac{2M_i}{r_i}\right)\eta_{ij}$$

which is the "Post-Newtonian" approximation to the spatial part of a metric generated by point masses M_i located at positions r_i. Thus the metric in Equation (8) is, in fact, the instantaneous spatial metric for point masses at arbitrary positions at a moment of time symmetry.

Solution 21.13. Begin by noticing that the square of U^a, which is a Lorentz invariant, is just the determinant of $U^{AA'}$. The analog of the Minkowski metric will then be a set of matrices which serve to raise and lower indices in constructing the determinant of U^{AA} :

$$\delta^{\mathrm{C}}_{\mathrm{D}}\det\left(\mathrm{U}^{\mathrm{AB}}\right) = \mathrm{U}^{\mathrm{FC}}\mathrm{U}^{\mathrm{EG}}\varepsilon_{\mathrm{FE}}\varepsilon_{\mathrm{DG}}$$

where

$$\varepsilon_{\mathrm{FE}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \delta^{\mathrm{C}}_{\mathrm{D}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Evidently, a pair of ε matrices plays the role of the Minkowski metric.
To find the analog of a Lorentz transformation, denote such a transformation by

$$\mathrm{U}^{\mathrm{F'C'}} = \mathrm{L}^{\mathrm{F'C'}}_{\mathrm{FC}}\mathrm{U}^{\mathrm{FC}}$$

Then, invariance of the dot product of two vectors U, V, requires

$$\mathrm{U}^{\mathrm{AB}}\ \mathrm{V}^{\mathrm{CD}}\varepsilon_{\mathrm{AC}}\varepsilon_{\mathrm{BD}} = \mathrm{L}^{\mathrm{E'F'}}_{\mathrm{EF}}\mathrm{U}^{\mathrm{EF}}\ \mathrm{L}^{\mathrm{G'H'}}_{\mathrm{GH}}\mathrm{V}^{\mathrm{GH}}\varepsilon_{\mathrm{E'G'}}\varepsilon_{\mathrm{F'H'}}$$

Thus we must have

$$\varepsilon_{EG}\varepsilon_{FH} = L^{E'F'}_{EF}L^{G'A'}_{GH}\varepsilon_{E'G'}\varepsilon_{F'H'}$$

This implies that

$$\delta^M_E\delta^K_H = L^{E'F'}_{EF}L^{G'A'}_{GH}\varepsilon_{E'G'}\varepsilon_{F'H'}\varepsilon^{GM}\varepsilon^{FK}$$

and hence that

$$\det\left(L^{E'F'}_{EF}\right) = 1$$

Thus the Lorentz transformation matrices must be unimodular (of unit determinant).

Solution 21.14.

(a) The result follows from the fact that the indices B, C and D range over only two values and hence cannot all be different.
(b) Writing out the result of part (a) and using the antisymmetry of $\varepsilon_{\mathrm{AB}}$ gives

$$\varepsilon_{\mathrm{AB}}\varepsilon_{\mathrm{CD}} + \varepsilon_{\mathrm{AC}}\varepsilon_{\mathrm{DB}} + \varepsilon_{\mathrm{AD}}\varepsilon_{\mathrm{BC}} = 0$$

Contracting now with ξ^{CD} gives (watch out for the signs!)

$$-\varepsilon_{\mathrm{AB}}\xi^{\mathrm{C}}_{\mathrm{C}} + \xi_{\mathrm{AB}} - \xi_{\mathrm{BA}} = 0$$

Hence we have

$$\xi_{\mathrm{AB}} = \xi_{(\mathrm{AB})} + \xi_{[\mathrm{AB}]} = \xi_{(\mathrm{AB})} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mathrm{AB}}\xi^{\mathrm{C}}_{\mathrm{C}}$$

Solution 21.15. Since $\varepsilon^{cd}_{ab} = \mathrm{i}\left(\delta^{\mathrm{C}}_{\mathrm{A}}\delta^{\mathrm{D}}_{\mathrm{B}}\delta^{\mathrm{C}'}_{\mathrm{B}'}\delta^{\mathrm{D}'}_{\mathrm{A}} - \delta^{\mathrm{C}}_{\mathrm{B}}\delta^{\mathrm{D}}_{\mathrm{A}}\delta^{\mathrm{C}'}_{\mathrm{A}}, \delta^{\mathrm{D}'}_{\mathrm{B}'}\right)$ (see e.g. F . A. E. Pirani, Lectures on General Relativity, p. 315) and $*\,\mathrm{T}_{\mathrm{ab}} = \frac{i}{2}\varepsilon^{\mathrm{cd}}_{\mathrm{ab}}\mathrm{T}_{\mathrm{cd}}$, the result follows immediately.
Solution 21.16. Since primed and unprimed indices commute, we have

$$\begin{aligned} T_{(ab)} =& \frac{1}{2}\left(T_{ABA'B'} + T_{BAB'A'}\right) \\ =& \frac{1}{4}\left(T_{ABA'B'} - T_{BAA'B'} + T_{BAB'A'} - T_{ABB'A'}\right) \\ &+ \frac{1}{2}T_{(ab)} + \frac{1}{4}\left(T_{BAA'B'} + T_{ABB'A'}\right) \end{aligned}$$

With the result of Problem 21.14, this can be written as

$$\begin{aligned} T_{(ab)} &= 2T_{[AB][A'B']} + \frac{1}{2}\left(T_{BAA'B'} + T_{ABB'A'}\right) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{AB}\varepsilon_{A'B'}T_{C}C_{C'}C' + \frac{1}{2}\left(T_{BAA'B'} + T_{ABB'A'}\right) \end{aligned}$$

Finally, using the result of Problem 21.15 , we get

$$\begin{aligned} T_{BAA'B'} &= T_{(ab)} - \frac{1}{2}\varepsilon_{AB}\varepsilon_{A'B'}T_{C}C_{C'}C' + *T_{ab} \\ &= T_{(ab)} - \frac{1}{2}g_{ab}T^{c}_{c} + i * T_{ab} \end{aligned}$$

Part V
Special Topics in Gravity in a Nutshell

14 Special methods and theories

(самое разное тут есть, чем не нужно забивать голову для минимального понимания, так что это все тут.)

14.1 How we understand nature of gravity?

(считаю, это важный раздел, а не просто утыкаться в ОТО)

14.1.1 Main Experimental Data and Other Cues for True Theory of Gravity

(самое известное укажу!! важная часть понимания гравитации!)

О равенстве инерционных и гравитационных масс

(важный теор параграф, пока он тут, пока не до этого, ну равны массы эти и поехали вперед.)
(абзац про основные эксперименты, которые это подтверждают.)
(абзац про теор. следствия. где это участвует в законах? пока не готов это сказать, уже давно привыкли все к тому, что они равны и все на том.)

Pound-Rebka experiment

(ну есть такой, пока не актуально, но когда-то быстро укажу)

Как и почему мы строим теорию гравитации? (!!!!)

(очень важный параграф, вот и напишу его!)

Идея ОТО

Аксиомы теории Эйнштейна

(мб тут всё очевидно, но лучше сперва почитаю мизнера 2)

Пространство-время без координат (?)

пока что для меня это не актуальный и открытый вопрос.
Мизнер и др. про это что-то писали вначале.

Суть принципа эквивалентности

Принцип эквивалентсности - один из важнейших принципов ОТО.
(тонг знает)

О вращениях как гравитации (?????)

(думаю, тоже полезно было бы указать)

$$dl^2 = dr^2 + dz^2 + r^2 d\varphi = dr^2 \left(1 + z'^2\right) + r^2 d\varphi^2$$

(this is a fundamental topic, one can not think about is at first year of learning GR)

14.1.2 Equivalence Principle, acceleration

(пока небольшой раздел, идейную сторону вопросов раскрою!)

О равноускоренном движении и координатах Риндлера (???)

(об этом больше в теории поля будет.)

Суть

(просто такая модель, про которую можно подумать, но вообще не думаю, что она где-то понадобится. потом мб спрошу отдельно про это.)

Переход

Координаты Риндлера и равноускоренное движение. Введем координаты τ и ξ уравнениями:

$$t = \xi \operatorname{sh} \tau, \quad x = \xi \operatorname{ch} \tau$$

Метрика в этих координатах принимает вид

$$ds^2 = \xi^2 d\tau^2 - d\xi^2$$

Координаты Риндлера определены в во внешней области светового конуса: $|x| < |t|$ (Рис. 1.2). Линии постоянной координаты ξ отвечают мировым линиям наблюдателей с инвариантным ускорением ξ^{-1}, причем собственное время такой частицы равно $\xi\tau +$ const.

Обзор применений

в равноускоренном движении используются.

Формулы равноускоренного движения

это гиперболы.
синус и косинус гиперболический.
риндлер что-то делал про это

Горизонт Риндлера

есть такое понятие

О случаях применения равноускоренного движения (?)

(? пока не особо нужно)

Equivalence Principles (???)

In general relativity, gravity is described as the curvature of spacetime, not as an additional field propagating through spacetime. This is motivated by the equivalence principle, explained below.

• In Newtonian mechanics, the inertial mass is defined by $F = m_i a$ and the gravitational mass is defined by $F_g = -m_g \nabla \Phi$.

• The Weak Equivalence Principle (WEP) states that

$$m_i = m_g$$

This implies that the behavior of freely-falling test particles does not depend on their mass.

• One consequence of the WEP is that the motion of freely-falling particles is the same in a uniform gravitational field and a uniformly accelerated frame. (For a nonuniform field, we could of course tell the two apart by tidal effects.)

• The WEP is also surprisingly powerful. A hydrogen atom's mass is not equal to the sum of the mass of a proton and electron, due to the binding energy. Thus the WEP implies that gravity must couple to the EM field so that $m_i = m_g$ continues to hold.

• The Einstein Equivalence Principle (EEP) generalizes this statement to all local experiments. It's a bit tricky to think of a theory that violates the EEP but satisfies the WEP. One example is a situation where gravity caused non-point particles to start rotating as they fall.

• The EEP tells us that there are no "gravitationally neutral" objects with respect to which we can measure g. Thus we instead define unaccelerated/inertial frames to be freely falling, which motivates us to describe gravity as not a force, but a property of spacetime.

• Since gravitational fields are not homogeneous, global inertial frames don't exist. In particular, we have to abandon the SR picture of "networks of clocks and rulers", and coordinates become much harder to interpret physically.

• Sometimes, we make a distinction between gravitational and nongravitational interactions, and take the WEP to only include the latter. The Strong Equivalence Principle (SEP) then generalizes the WEP to include gravitational self-interactions. A direct test of the SEP (but not the WEP) would involve measuring the accelerations of objects with significant gravitational binding energy. For example, the Nordtvedt effect is the fact that if the SEP were violated, the relative motion between the Earth and Moon would be affected, because the two have different ratios of gravitational binding energy to inertial mass. This has been tested using lunar laser ranging experiments.

• From a particle physics perspective, tests of the equivalence principle are most useful for constraining additional, non-gravitational long-range forces, which would generically violate the WEP. Specific tests of the SEP are also useful. For instance, if one unluckily had a longrange force that coupled equally to protons and neutrons, there would be little apparent WEP violation, since protons and neutrons have almost equal mass, but there would be significant SEP violation. It is also useful to do tests at a variety of scales (i.e. tabletop to astronomical), because the force could have a finite range μ, which would be more apparent at distances $1/\mu$.

• Deviations from the equivalence principles, particularly the SEP, could of course also be explained by modifying the structure of gravity itself. However, at some level "adding new forces" and "modifying gravity" aren't all that different, because in most cases they both boil down to adding new fields and couplings to the Lagrangian.

• To date, all experimental tests are consistent with all equivalence principles, though specific tests of the SEP are less stringent.

Example. The EEP predicts gravitational redshift. Consider two rockets in space a distance z apart, with acceleration a and velocities $v \ll c$. The trailing rocket emits a photon of wavelength λ_0, which reaches the other rocket after time $\Delta t \approx z/c$. The receiving rocket has picked up an additional velocity $\Delta v = a\Delta t = az/c$, so that the photon is redshifted by

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta v}{c} = \frac{az}{c^2}$$

Above we worked to first order in the velocities to avoid extra special relativistic effects.

By the EEP, the same thing should happen if a photon is instead emitted upward a distance z in a uniform gravitational field, giving

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{gz}{c^2}$$

In general relativity, the metric in a weak time-independent gravitational potential ϕ is

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 + 2\phi/c^2\right) c^2 dt^2 - \left(1 - 2\phi/c^2\right) d\mathbf{r}^2, \quad \phi/c^2 \ll 1$$

Now consider two pulses of light sent between points A and B separated by a time Δt. Since the gravitational field is time-independent, the paths taken by the pulses are identical, so they also arrive separated in coordinate time Δt. Converting to proper time,

$$\Delta\tau_A^2 = \left(1 + 2\phi_A/c^2\right) \delta t^2, \quad \Delta\tau_B^2 = \left(1 + 2\phi_B/c^2\right) \delta t^2$$

so that a redshift of

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta\Phi}{c^2}$$

is observed, where we are working to lowest order in ϕ/c^2. This is in agreement with the EEP result. This trick of using the separation time for pulses also lets us avoid the geodesic equation.

What changes when moving from SR to GR

Note that when we refer to SR, we are referring to inertial frames in Minkowski space with Cartesian coordinates.

• In SR, we considered vectors as "free", with a base point that could be moved. In GR, this must be performed by parallel transport, and the result generally is not unique.

• In SR, we considered spacetime events as vectors x^μ. This is only possible because we identified spacetime itself with the tangent space at the origin, which we can't do in GR.

• In SR, inertial frames were defined over all spacetime. In GR, they can't due to tidal effects. In fact, we usually can't define a global system of coordinates at all, as spacetime is a general manifold which may require multiple charts.

• The time measured by a moving clock is still $\tau = \int \sqrt{-ds^2}$.

• Suppose a particle located at the origin of some coordinate system has momentum p^μ. If this coordinate system locally corresponds to the frame of an observer at the origin, they still measure the energy of the particle to be p^0, and so on.

• In SR, the Levi-Civita symbol

$$\widetilde{\epsilon}_{\mu\nu\rho\sigma} = \text{sign}(\mu\nu\rho\sigma)$$

is a pseudotensor: it transforms properly under connected Lorentz transformations and picks up an extra sign from T and P. In GR, the Levi-Civita symbol is not a tensor at all.

• In SR, the partial derivative takes (r, s) tensors to $(r, s+1)$ tensors. In GR, we instead must use the covariant derivative. (This also holds when we broaden the frames allowed in SR, as we get a nontrivial connection.)

Example. If two expressions agree in some frame, then they must agree in all frames. This allows us to find general results with very little work. For example, the energy of a particle in some frame is p^0, and the velocity of an observer in its own frame is $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Therefore $E = p^\mu u_\mu$ in this frame, and hence it is true in all frames.

As another example, consider the Lie derivative $\mathcal{L}_V W$ where $V = \partial_0$. Then

$$\mathcal{L}_V W = \left(\partial_0 W^i\right) \partial_i$$

The right-hand side happens to be equal to the commutator $[V, W]$ in these coordinates, so in general the Lie derivative is the commutator.

Example. Newtonian gravity in index notation. The equation of motion for a particle is $\ddot{x}_i = g_i$. However, in the spirit of the EEP, we note that this acceleration can always be set to zero in a falling frame, so instead we focus on tidal effects. Consider two particles separated by δx. Then

$$\delta\ddot{x}_i = \delta x_j \partial_j g_i + O\left(\delta x^2\right)$$

To simplify this we define the tidal tensor

$$E_{ij} = -\partial_j g_i, \quad \delta\ddot{x}_i + E_{ij}\delta x_j = 0$$

Since the gravitational field in Newtonian theory is curl-free, there exists a potential ϕ so that

$$g_i = -\partial_i \phi$$

which implies $E_{ij} = E_{ji}$. In addition, since mixed partials commute, we have

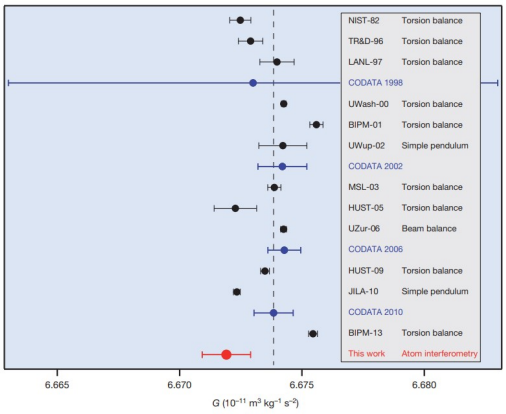
$$E_{i[j,k]} = 0$$

Finally, the field is sourced by matter by Poisson's equation,

$$\partial_i \partial_i \phi = E_{ii} = 4\pi G\rho$$

Similar equations appear in general relativity, where the tidal tensor corresponds to the Riemann tensor, and our identities for it correspond to the symmetries of the Riemann tensor and the Bianchi identity. The potential roughly corresponds to the metric, and Poisson's equation corresponds to the Einstein field equation.

14.1.3 Gravitational constant (?)



14.1.4 Speeds, Times, Acceleration, Forces (???)

(тут нужно указать самое важное и философское и формульно)

ds Интервал и *l* расстояния

Обсудим, что есть интервалы и расстояния.
(подробности в 2ю часть скину)

Основные формулы

формула перехода к дельта функции:

$$\int ds = \int d^4x\sqrt{-g}\frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t))}{\sqrt{-g}u^0}, \quad u^0 = \frac{dt}{ds}$$

(?? и что с того??)

Определение

Обзор типичных ошибок при работе с интервалом

подробно это в соответствующей части изложено, а здесь приведем суть, ибо это тоже полезно.

пока мало опыта, так что я хз.

Приведем методы вычисления расстояний в ОТО и понимание, что оно из себя представляет.

Расстояния

Истинные расстояния и промежутки времени по значениям величин x^0, x^1, x^2, x^3 определяются как:

(?)

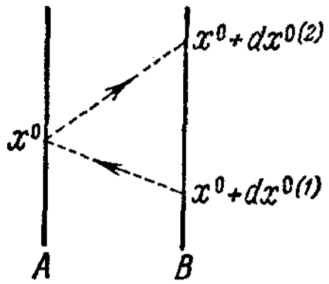
Расстояние dl в ОТО (!!)

(?? так все-таки, почему бы просто не взять пространственную часть и всё???)

Элемент dl пространственного расстояния определяется как

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \qquad \gamma_{\alpha\beta} := -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}}$$

Это следует из рассмотрения посыла и опять приема луча света следующим образом. Рассмотрим бесконечно близкие точки в пространстве B и A, с координатами соответственно $x^\alpha + dx^\alpha$ и x^α. Пусть из B отправляется световой сигнал в A, а затем сразу обратно по тому же пути.



Тут сплошные прямые - мировые линии, соответствующие x^α и $x^\alpha + dx^\alpha$, а штриховые - мировые линии сигналов.

Расстояние между точками можно найти, зная собственное время движения, а его найти легко, зная время, отсчитываемое в одной и той же точке B. Для времени, отсчитываемом в точке B, напишем интервал, выделив пространственные и временную координаты:

$$ds^2 = g_{00} \left(dx^0\right)^2 + 2 g_{0\alpha} dx^0 dx^\alpha + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

Интервал между событиями, являющимися уходом и приходом сигнала из одной точки в другую, всегда равен нулю: $ds^2 = 0$, так что решая это квадратное уравнение относительно dx^0, найдем два корня:

$$dx^{0(1)} = \frac{1}{g_{00}} \left(-g_{0\alpha} dx^\alpha - \sqrt{\left(g_{0\alpha} g_{0\beta} - g_{\alpha\beta} g_{00}\right) dx^\alpha dx^\beta} \right)$$
$$dx^{0(2)} = \frac{1}{g_{00}} \left(-g_{0\alpha} dx^\alpha + \sqrt{\left(g_{0\alpha} g_{0\beta} - g_{\alpha\beta} g_{00}\right) dx^\alpha dx^\beta} \right),$$

отвечающих распространению сигнала в двух направлениях между A и B.

(????) Если x^0 есть момент прибытия сигнала в A, то моменты его отправления из B и обратного возвращения в B будут соответственно $x^0 + dx^{0(1)}$ и $x^0 + dx^{0(2)}$. Полный промежуток «времени» между отправлением и возвращением сигнала в ту же точку равен

$$dx^{0(2)} - dx^{0(1)} = \frac{2}{g_{00}}\sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})\,dx^\alpha dx^\beta}$$

Соответствующий промежуток истинного времени получается отсюда умножением на $\sqrt{g_{00}}/c$, а расстояние dl между обеими точками - еще умножением на $c/2$. В результате находим:

$$dl^2 = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}\right)dx^\alpha dx^\beta$$

Перепишем его в виде

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$$

где $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}$ есть трехмерный метрический тензор, определяющий метрику, т.е. геометрические свойства пространства.

Его мы не интегрируем, потому что это вообще говоря не имеет смысла. (в другом месте это будет хорошо раскрыто)

Примеры расстояний

(выпишу из разных мест про них итоговый их вид)

τ время и промежутки времени

(еще в теорполе заготовка про него)
приведем основные формулы для работы со временем

Основные формулы времени

мизнер и др. про это писали.
собственное время τ, которое связано с действием S соотношением $\tau = -S/m$

τ собственное время

пропишу четко, что это?

$$\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}x^0$$

В слабом гравитационном поле можно воспользоваться приближенным выражением (87.12); при этом (88.1) дает, с той же точностью:

$$\tau = \frac{x^0}{c}\left(1 + \frac{\varphi}{c^2}\right)$$

Истинное время через метрику

Истинное время τ между двумя событиями в одной и той же точке пространства выражается через координату x^0, как:

$$\tau = \frac{1}{c}\int \sqrt{g_{00}}dx^0$$

Действительно, между двумя бесконечно близкими событиями, происходящих в одной и той же точке пространства, интервал ds^2 есть $cd\tau$, а с другой стороны $ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$, где $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$, следовательно

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{00}\left(dx^0\right)^2$$

откуда истинное время дается просто домножением на $\frac{\sqrt{g_{00}}}{c}$:

$$d\tau = \frac{\sqrt{g_{00}}}{c}dx^0,$$

поэтому, интегрируя, получаем истинное время между двумя событиями в одной и той же точке пространства.

(?? мб перекину в раздел про метрику, по сути это очевидно, если понимать что есть нулевая её компонента)

Пример вычисления истинного времени

(хз, хотя бы один пример хочется рассмотреть)

Отличие полного и истинного времен

тоже пока что очень неуверен по поводу этого.

О равномерности течения времени

(Мизер и др. на стр 58 формулу про это писали, пока хз)

О мировом времени

(пока только слышал о таком определении, потом лучше пойму, где нужно оно)

Мировое время - координата x^0 в постоянном гравитационном поле. Гравитационное поле называют постоянным, если можно выбрать такую систему отсчета, в которой все компоненты метрического тензора не зависят от временной координаты x^0.

Выбор мирового времени не вполне однозначен. Так, при добавлении к x^0 произвольной функции пространственных координат все g_{ik} по-прежнему не будут содержать x^0; это преобразование соответствует произвольности выбора начала отсчета времени в каждой точке пространства. Кроме того, разумеется, мировое время допускает умножение на произвольную постоянную, т. е. произвольный выбор единицы его измерения.

Одновременность

(? дальше я хз, не дошел)

Перейдем теперь к определению понятия одновременности в общей теории относительности. Другими словами, выясним вопрос о возможности синхронизации часов, находящихся в разных точках пространства, т.е. приведения в соответствие друг с другом показаний этих часов.

Такая синхронизация должна быть осуществлена с помощью обмена световыми сигналами между обеими точками.

Рассмотрим снова процесс распространения сигналов между двумя бесконечно близкими точками A и B. Одновременным с моментом x^0 в точке A следует считать показание часов в точке B, лежащее посередине между моментами отправления и обратного прибытия сигнала в эту точку, т.е. момент

$$x^0 + \delta x^0 = x^0 + \frac{1}{2}\left(dx^{0(2)} + dx^{0(1)}\right)$$

Подставляя сюда (84.5), находим разность значений «времени» x^0 для двух одновременных событий, происходящих в бесконечно близких точках, в виде

$$\delta x^0 = -\frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{g_{00}} \equiv g_\alpha dx^\alpha$$

Это соотношение дает возможность синхронизовать часы в любом бесконечно малом объеме пространства.

Продолжая подобную синхронизацию из точки A дальше, можно синхронизовать часы, т.е. определить одновременность событий вдоль любой незамкнутой линии.

Синхронизация же часов вдоль замкнутого контура оказывается, вообще говоря, невозможной. Действительно, обойдя вдоль контура и вернувшись в исходную точку, мы получили бы для δx^0 отличное от нуля значение. Тем более оказывается невозможной однозначная синхронизация часов во всем пространстве.

(?? где-то будет написано, как жить с этим?? максимально странное утверждение. какие его следствия?)

Исключение составляют лишь такие системы отсчета, в которых все компоненты $g_{o\alpha}$ равны нулю.

Следует подчеркнуть, что невозможность синхронизации всех часов является свойством именно произвольной системы отсчета, а не пространства-времени как такового.

(?? это тоже пока не так понимаю глубоко)

В любом гравитационном поле всегда можно выбрать (и даже бесчисленным числом способов) систему отсчета таким образом, чтобы обратить три величины $g_{o\alpha}$ тождественно в нуль и, тем самым, сделать возможной полную синхронизацию часов (см.пар 97).

Уже в специальной теории относительности течение истинного времени различно для движущихся друг относительно друга часов.

В общей же теории относительности истинное время течет различным образом и в разных точках пространства в одной и той же системе отсчета.

(!!!??)

Это значит, что интервал собственного времени между двумя событиями, происходящими в некоторой точке пространства, и интервал времени между одновременными с ними событиями в другой точке пространства, вообще говоря, отличны друг от друга.

u Скорость

Обсудим скорость с точки зрения ОТО.

(?? какие конкретно там проблемы с её определением?? так и не понял.)

Основные формулы скорости

Скорость определяется как:

$$v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$$

где τ есть собственное время.

В постоянном поле имеем:

$$v^\alpha = \frac{cdx^\alpha}{\sqrt{h}\,(dx^0 - g_\alpha dx^\alpha)}$$

Действительно, промежуток времени, за который частица проходит из точки с моментом мирового времени x^0 в бесконечно близкую точку в момент $x^0 + dx^0$ есть разность между $x^0 + dx^0$ и моментом $x^0 - \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}dx^\alpha$, то есть тем, который одновременен в точке B моменту x^0 в точке A:

$$dt = \left(x^0 + dx^0\right) - \left(x^0 - \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}dx^\alpha\right) = dx^0 + \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}dx^\alpha$$

Умножив его на $\sqrt{g_{00}}/c$, получим соответствующий интервал собственного времени, поэтому скорость

$$v^\alpha = \frac{cdx^\alpha}{\sqrt{h}\left(dx^0 - g_\alpha dx^\alpha\right)}$$

(?? глубокий смысл, почему именно так делаем потом обдумаю)

Заметим, что при таком определении интервал ds выражается через скорость формулой, аналогичной обычной формуле:

$$\begin{aligned} ds^2 =& g_{00}\left(dx^0\right)^2 + 2g_{0\alpha}dx^0dx^\alpha + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = \\ =& h\left(dx^0 - g_\alpha dx^\alpha\right)^2 - dl^2 \\ =& h\left(dx^0 - g_\alpha dx^\alpha\right)^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \end{aligned}$$

Компоненты 4-скорости $u^i = dx^i/ds$ равны

$$u^\alpha = \frac{v^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad u^0 = \frac{1}{\sqrt{h}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{g_\alpha v^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Обзор типичных ошибок в работе со скоростью

(пока хз, буду её вычислять - пойму.)

w Ускорение

Основные формулы ускорения

уравнение:

$$\frac{D^2\eta^i}{ds^2} = R^i_{klm}u^k u^l \eta^m$$

(его называют уравнением геодезического отклонения).

sh ch формулы движения с ускорением

Суслов написал, а я ни разу их и не видел.

4- ускорение

так ни разу и не воспользовался

Обзор типичных ошибок при работе с ним

подробно это в соответствующей части изложено, а здесь приведем суть, ибо это тоже полезно.

пока мало опыта, так что я хз.

p Импульс

Основные формулы импульса

Связь с ТЭИ

лашкевич в л9 вывел его через ТЭИ, я пока тупой слишком, чтобы понять связь

Момент импульса

(??? это вообще кинематический параметр???)

Основные формулы момента импульса

4-момент импульса есть:

$$J^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu$$

тоже сохраняются и образуют пространственно-временной момент импульса. Его чисто пространственные компоненты $J^{ik}(k = 1, ..., 3)$ совпадают с компонентами трехмерного момента импульса:

$$J_i = \epsilon_{ijk} J^{jk}$$

где ϵ_{ijk} - полностью антисимметричный символ, такой что $\epsilon_{123} = 1$. Временные компоненты J^{0i} не порождают независимых сохраняющихся величин.

Примеры

(вот это мне больше всего хочется досмотреть!)

Сохранение J^{0i} эквивалентно постоянному движению центра инерции

(лшк задача)
Сохранение компонент J^{0i} эквивалентно тому, что центр инерции системы

$$\boldsymbol{R} = \frac{\sum\limits_s E_s \boldsymbol{r}_s}{\sum\limits_s E_s}$$

движется с постоянной скоростью.
(мб тут всё просто, потом подумаю)

Обзор применений

f Сила

Основные формулы силы

Сила f, действующая на частицу, есть производная от ее импульса p по синхронизованному собственному времени, определенная с помощью трехмерного ковариантного дифференциала:

$$f^\alpha = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{Dp^\alpha}{ds} = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{d}{ds} \frac{mv^\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \lambda^\alpha_{\beta\gamma} \frac{mv^\beta v^\gamma}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

О других параметрах

О квадрупольном моменте

(??? вроде нет) или D или M, вроде два обозначения.
Удобно выразить их через квадрупольный момент плотности энергии

$$D_{ij}(t) = \int d^3x \rho(t, \boldsymbol{r}) \left(3x^i x^j - r^2 \delta_{ij}\right)$$

Квадрупольный момент определен так, чтобы его след был равен нулю: $\sum\limits_{i=1}^{3} D_{ii} = 0$.

(абзац словами про применения, в грав излучении он нужен, в энергии от грав тел, ну и все, нигде больше)

Для волн:

$$h_+(t, \boldsymbol{R}) = -\frac{4GM_+(t-R, \boldsymbol{n})}{R}, \quad h_\times(t, \boldsymbol{R}) = -\frac{4GM_\times(t-R, \boldsymbol{n})}{R},$$

где, если выбрать координаты так, чтобы было $\boldsymbol{n} = \partial_1$, имеем

$$M_+(t) = \frac{1}{2}\partial_0^2 \int d^3x T_{+0}\left(t + x^1, \boldsymbol{r}\right)\left(\left(x^2\right)^2 - \left(x^3\right)^2\right)$$
$$M_\times(t) = \partial_0^2 \int d^3x T_{+0}\left(t + x^1, \boldsymbol{r}\right) x^2 x^3$$

(абсолютно не въехал, откуда это???? потом выведу)

(те самые заготовки)

14.1.5 Λ Term

в ОТО он почти не нужен, а вот в космологии это очень важный будет параметр

(хз по поводу того, материальный он параметр или нет, это потом подумаю)

Суть

Лямбда-член может быть отнесен к материи

(лшк так сказал, пока что я хз)

Лямбда-член в действии не содержит производных и может быть отнесено к материи.

Действительно, имеем

$$T_\Lambda^{\mu\nu} = \frac{\Lambda}{4\pi G\sqrt{|g|}} \frac{\partial\sqrt{|g|}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{\Lambda}{8\pi G} g^{\mu\nu}$$

Следовательно, лямбда-член можно интерпретировать как действие вещества с уравнением состояния $p = -\varepsilon = -\Lambda/8\pi G$.

Если $\Lambda > 0$ плотность энергии положительна, а давление отрицательно.

Если же $\Lambda < 0$, все наоборот.

Мы не знаем такого рода материи, однако в некоторых модельных теориях поля имеются метастабильные состояния с такими свойствами.

Экспериментально лямбда-член слишком мал, чтобы играть роль во взаимодействиях даже на галактических масштабах, и его следует принимать во внимание только в космологических задачах, когда речь идет об эволюции Вселенной в целом.

Об уборе его другими теориями гравитации

может, так можно сделать, я хз.

14.2 Other basic mathematical concepts for gravity

14.2.1 Special Constructions of Differential Geometry (?!?!?)

(потом буду расширять эти разделы, пока так, потому что мало с ними работал.)

О тензоре Вейля

Тензор Вейля по Ландау:

$$C_{iklm} = R_{iklm} - \frac{1}{2}R_{il}g_{km} + \frac{1}{2}R_{im}g_{kl} + \frac{1}{2}R_{kl}g_{im} - \frac{1}{2}R_{km}g_{il} + \frac{1}{6}R\left(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl}\right).$$

(абзац про применения, пока не работал с ним)

О векторных полях

такие есть, там определение где-то есть

14.2.2 Geodesics, Deviation of Geodesics

Основные формулы уравнения геодезической

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0$$

Уравнения движения частицы в гравитационном поле находятся за счет обобщения уравнений в СТО $du^i/ds = 0$, или иначе $du^i = 0$, где $u^i = dx^i/ds$: в криволинейных координатах вводится ковариантный дифференциал D: $Du^i = 0$ или:

$$du^i + \Gamma^i_{kl}u^k dx^l = 0$$

Разделив это уравнение на ds, находим уравнение геодезической.

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0$$

(тут пояснение, что есть что?)

В случае электромагнитного поля:

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \frac{e}{m}F^\lambda_\kappa\dot{x}^\kappa$$

(тут абзац про то, какой смысл геодезических и как они позволяют определять СК)
(абзац про указание применений)
(абзац про вывод ур геод из действия.)

Об уравнении девиации геодезической

уравнение:

$$\frac{D^2\eta^i}{ds^2} = R^i_{klm}u^k u^l \eta^m$$

(его называют уравнением геодезического отклонения).

$$A^\mu = \frac{D^2}{dt^2}S^\mu = R^\mu_{\nu\rho\sigma}T^\nu T^\rho S^\sigma,$$

i.e. the relative acceleration between two neighboring geodesics is proportional to the curvature.
(абзац про случаи применения)

14.2.3 Frames of Reference, Tetrad Formalism (!?!?)

(тут много указаний потом будет, мб во 2й 1й части будет это подробнее.)

О системах отсчета в целом

(пока тут упрощенно, без всяких глубин)

Определение и обзор типов

четко потом пропишу

Локально инерциальная система отсчета: свойства

я вообще хз, что это за жесть.

Локально инерциальная система отсчета: применения

О синхронной системе отсчета

Суть

(потом настолько подробное обсуждение свойств ниже - в разделы ниже перекину, здесь только суть оставлю)

Синхронная система отсчета есть система координат, в которой

$$g_{00} = 1, \quad g_{0i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ds^2 = dt^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j$$

Это значит, что также $g^{00} = 1$.

В этой системе координат время является собственным временем некоторой времениподобной геодезической.

(????)

Действительно, символы Кристоффеля в такой системе координат равны

$$\Gamma^0_{0\mu} = \Gamma^\mu_{00} = 0, \quad \Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij,0}, \quad \Gamma^i_{j0} = \frac{1}{2}\gamma^{ik}\gamma_{kj,0}, \quad \Gamma^i_{jk} = \tilde{\Gamma}^i_{jk}$$

где $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ - пространственные символы Кристоффеля, вычисленные по метрике γ_{ij}.

Отсюда уравнения геодезических имеют вид

$$\ddot{x}^0 + \Gamma^0_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0, \quad \ddot{x}^i + 2\Gamma^i_{j0}\dot{x}^i\dot{x}^0 + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^i\dot{x}^k = 0$$

Поэтому, если $\dot{x}^i = 0\,(\text{а}\dot{x}^0 = 1)$ в некоторый момент времени, то это условие выполняется и во все остальные моменты времени на карте, покрываемой этой системой координат.

Это означает, что кривые $x^i = \text{const}$ образуют конгруэнцию времениподобных геодезических, параметризованную пространственными координатами x^i.

Этот факт означает, что, вообще говоря, такая система координат ограничена точками пересечения кривых конгруэнции.

Сужая область значений x^i можно продлить интервал времени, на котором определена система координат, но не дальше чем до каустик, то есть гиперповерхностей, образованных фокальными точками конгруэнции.

Фокальные точки дают абсолютный предел продолжения синхронной системы координат и являются препятствием к интегрируемости уравнений геодезических.

Внутри синхронной системы координат фокальные точки находятся из условия

$$\det(\gamma_{ij}) = 0$$

Построение синхронной системы отсчета в окрестности любой точки (????????)

(?? и что с того?)

(лшк)

Покажем, что в окрестности любой точки пространственно-временного многообразия можно построить синхронную систему координат.

Пусть $\{x^\mu\}$-произвольная система координат в некоторой достаточно малой области пространства-времени U.

Тогда собственное время τ, которое связано с действием S соотношением $\tau = -S/m$, как функция конечной точки x удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби

$$g^{\mu\nu}\tau_{,\mu}\tau_{,\nu} = 1$$

При этом

$$\tau_{,\mu} = -g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}$$

Уравнение (6.35) имеет полный интеграл, зависящий от d параметров, причем один из этих параметров можно выбрать аддитивной константой, и его можно исключить.

Поэтому оставим только $d-1$ параметр $y^1, ..., y^{d-1}$:

$$\tau = f\left(y^1, ..., y^{d-1}; x\right)$$

Геодезические определяются теперь системой уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = z_i$$

где $z_1, ..., z_{d-1}$ - новые константы.

Давайте выберем эти константы равными нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = 0$$

Этого всегда можно добиться, взяв решение уравнений (6.38)с произвольными z_i и переопределив функцию $f \to f + z_i y^i$ (суммирование подразумевается).

Такое переопределение переводит решение уравнения (6.35) в решение и эквивалентно сдвигу начального значения аффинного параметра τ поотдельности для каждой геодезической.

Тогда равенства (6.37), (6.39) дают систему d уравнений, позволяющих выразить x^{μ} через $y^0 = \tau, y^1, ..., y^{d-1}$ и наоборот.

Рассмотрим бесконечно малый интервал dx^{μ} и соответствующий ему интервал dy^{μ}.

Продифференцировав (6.37) и использовав (6.39), получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} = dy^0.$$

Выражая дифференциал dx^{μ} через частные производные по y_i при постоянных $dy^0, dy^j (j \neq i)$, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^i} = 0.$$

Далее с помощью (6.36) получаем

$$\begin{aligned} ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} &= g_{\mu\nu}\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^0}dy^0 + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^i}dy^i\right)\left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial y^0}dy^0 + \frac{\partial x^{\nu}}{\partial y^i}dy^i\right) \\ &= g_{\mu\nu}\left(-g^{\mu\kappa}\frac{\partial f}{\partial x^{\kappa}}dy^0 + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^i}dy^i\right)\left(-g^{\nu\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^{\lambda}}dy^0 + \frac{\partial x^{\nu}}{\partial y^i}dy^i\right) \\ &= \left(dy^0\right)^2 - 2\frac{\partial f}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^i}dy^0dy^i + g_{\mu\nu}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^i}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial y^j}dy^idy^j. \end{aligned}$$

Второе слагаемое обращается в нуль в силу (6.40), и мы получаем

$$ds^2 = \left(dy^0\right)^2 - \gamma_{ij}dy^idy^j, \quad \gamma_{ij} = -g_{\mu\nu}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^i}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial y^j}$$

То есть действительно $\{y^{\mu}\}$ дает синхронную систему отсчета, а система (6.37), (6.39) погружает ее в систему координат $\{x^{\mu}\}$ общего вида.

При этом стандартное условие каустики конгруэнции

$$\det\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial y^{\nu}}\right) = 0$$

дает условие $\det(\gamma_{ij}) = 0$.

Синхронная система отсчета: применения

вроде где-то нужно.

о существовании одной главной системы координат

(перенесу в другое место)
оказывается, такая существует, но в космологии.
(??) из ОТО она следует ведь, да?
в отличие от СТО.
(про это тут подроно)

Обзор типичных ошибок при работе с ним

подробно это в соответствующей части изложено, а здесь приведем суть, ибо это тоже полезно.
пока мало опыта, так что я хз.

О сопутствующей системе отсчета (???)

(у Ландау про это написано, вот я и пишу, больше это не нужно было)
Компоненты тензора энергии-импульса равны в сопутствующей системе отсчета:

$$T_0^0 = \varepsilon, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -p.$$

On tetrads

(вот и сконспектирую Проена)

14.3 Other potentially useful mathematics in a nutshell

(там много всего не такого важного, так что в 1ю 1ю не написал, а здесь как раз раздел для этого!)

14.3.1 Solving Differential Equations in a Curved Space (?!)

О виде уравнений

$$\Box\psi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\psi\right)$$

14.3.2 On special diffgeom properties (!!??)

Об инвариантах кривизны и типов Петрова

$$I_1 = \frac{1}{48}\left(R_{iklm}R^{iklm} - iR_{iklm}\overset{*}{R}{}^{iklm}\right),$$
$$I_2 = \frac{1}{96}\left(R_{iklm}R^{lmpr}R_{pr}{}^{ik} + iR_{iklm}R^{lmpr}\overset{*}{R}{}_{pr}^{ik}\right),$$

тут $\overset{*}{R}_{iklm} := \frac{1}{2}E_{ikpr}R^{pr}_{lm}$
(абзац, где это нужно. пока не знаю и мало кто знает.)

14.3.3 On perturbation theory (!!??)

(страницы 2-4 про это основных формул, это же в космологии на 1 страницу повторено в 1й части.)

(тут большие формулы, книги космологов почитаю, по ним это и пропишу!)

$$\Phi \to \Phi + \partial_0 \xi^0$$
$$w_i \to w_i + \partial_0 \xi^i - \partial_i \xi^0$$
$$\Psi \to \Psi - \frac{1}{3}\partial_i \xi^i$$
$$s_{ij} \to s_{ij} + \partial_{(i}\xi_{j)} - \frac{1}{3}\partial_k \xi^k \delta_{ij},$$

$$G_{0j} = -\frac{1}{2}\nabla^2 w_j + 2\partial_0 \partial_j \Psi = 8\pi G T_{0j}$$

and

$$G_{ij} = \left(\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j\right)(\Phi - \Psi) - \partial_0 \partial_{(i} w_{j)} + 2\delta_{ij}\partial_0^2 \Psi - \Box s_{ij} = 8\pi G T_{ij}$$

14.3.4 Multipole Expansion of GW Radiation (???)

(пока все-таки считаю, что важно это указать, потому что профессионалы так умеют делать.)

Основные разложения (????)

14.3.5 On gravity as a field theory (???)

Main formulas by Zi

(просто обещается, что этот подход успешный, так что тоже только 1 раздел тут будет. Все другие разные разделы про такую идею - во 2й 1й записи!!!)

Пропагатор массивной частицы со спином 2

$$D_{\mu\nu,\lambda\sigma}(k) = \frac{(G_{\mu\lambda}G_{\nu\sigma} + G_{\mu\sigma}G_{\nu\lambda}) - \frac{2}{3}G_{\mu\nu}G_{\lambda\sigma}}{k^2 - m^2}.$$

Это следует из того, что (????) $\sum\limits_a \varepsilon^{(a)}_{\mu\nu}(k)\varepsilon^{(a)}_{\lambda\sigma}(k) = (G_{\mu\lambda}G_{\nu\sigma} + G_{\mu\sigma}G_{\nu\lambda}) - \frac{2}{3}G_{\mu\nu}G_{\lambda\sigma}$.

$$W(T) = -\frac{1}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} T^{00}(k)^* \frac{1 + 1 - \frac{2}{3}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} T^{00}(k)$$

(по Зи выпишу суть.)

Zi part VIII

$$S = \int d^4x \frac{1}{16\pi G}\left(\partial h \partial h + h\partial h \partial h + h^2 \partial h \partial h + ...\right)$$

Требуем инвариантность относительно

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu.$$

По умолчанию:

$$S = \int d^4x \left(a\partial_\lambda h^{\mu\nu}\partial^\lambda h_{\mu\nu} + b\partial_\lambda h^\nu_\mu \partial^\lambda h^\mu_\nu + c\partial_\lambda h^{\lambda\nu}\partial^\mu h_{\mu\nu} + d h^\lambda_\lambda \partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu}\right),$$

где a, b, c и d - четыре неизвестных коэффициента. Теперь проварьируем S. После простых размышлений (?????)

$$\mathcal{J} \equiv \frac{1}{2}\partial_\lambda h^{\mu\nu}\partial^\lambda h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\lambda h^\mu_\mu \partial^\lambda h^\nu_\nu - \partial_\lambda h^{\lambda\nu}\partial^\mu h_{\mu\nu} + \partial^\nu h^\lambda_\lambda \partial^\mu h_{\mu\nu}$$

$$S_{\text{wfg}} = \int d^4x \left(\frac{1}{32\pi G}\mathcal{J} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}\right)$$

14.4 Other established properties in a nutshell

14.4.1 Second Order Equation of Motion in GR

$$h^\beta_\alpha = -\frac{2}{c^2}\varphi\delta^\beta_\alpha,$$
$$h^0_0 = \frac{2}{c^2}\varphi, \quad h^\alpha_0 = 0,$$

где

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\mathbf{r}\sum_a \frac{m_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}$$

есть ньютонов гравитационный потенциал системы точечных тел ($\mathbf{r}_a$— радиус-вектор тела с массой m_a). Выражение для интервала с метрическим тензором (106.1)-(106.2):

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2}{c^2}\varphi\right)c^2dt^2 - \left(1 - \frac{2}{c^2}\varphi\right)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right).$$

(не до этого, когда-то потом напишу)

$$T_{\alpha\beta} = \sum_a m_a v_{a\alpha}v_{a\beta}\delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a\right), \quad T_{0\alpha} = -\sum_a m_a c v_{a\alpha}\delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a\right)$$

$$\Delta h_{00} + \frac{4}{c^4}\varphi\Delta\varphi - \frac{4}{c^4}(\nabla\varphi)^2 = \frac{8\pi k}{c^4}\sum_a m_a c^2\left(1 + \frac{5\varphi_a}{c^2} + \frac{3v_a^2}{2c^2}\right)\delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a\right)$$

с помощью тождества

$$4(\nabla\varphi)^2 = 2\delta\left(\varphi^2\right) - 4\varphi\Delta\varphi$$

и уравнения ньютоновского потенциала

$$\Delta\varphi = 4\pi k\sum_a m_a\delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a\right)$$

переписываем это уравнение в виде

$$\Delta\left(h_{00} - \frac{2}{c^4}\varphi^2\right) = \frac{8\pi k}{c^2}\sum_a m_a\left(1 + \frac{\varphi'_a}{c^2} + \frac{3v_a^2}{2c^2}\right)\delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a\right)$$

$$h_{00} = \frac{2\varphi}{c^2} + \frac{2\varphi^2}{c^4} - \frac{2k}{c^4}\sum_a \frac{m_a\varphi'_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} - \frac{3k}{c^4}\sum_a \frac{m_a v_a^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}.$$

Смешанная компонента уравнения (106.10) дает:

$$\Delta h_{0\alpha} = -\frac{16\pi k}{c^3}\sum_a m_a v_{a\alpha}\delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a\right) - \frac{1}{c^3}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x^\alpha}.$$

Решение этого линейного уравнения есть [2)]

$$h_{0\alpha} = \frac{4k}{c^3}\sum_a \frac{m_a v_{a\alpha}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|} - -\frac{1}{c^3}\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^\alpha},$$

где f - решение вспомогательного уравнения

$$\Delta f = \varphi = -\sum \frac{k m_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|}$$

$$L_a = \frac{m_a v_a^2}{2} + \frac{m_a v_a^4}{8c^2} - m_a c^2\left(\frac{h_{00}}{2} + h_{0\alpha}\frac{v_a^\alpha}{c} + \frac{1}{2c^2}h_{\alpha\beta}v_a^\alpha v_a^\beta - \frac{h_{00}^2}{8} + \frac{h_{00}}{4c^2}v_a^2\right).$$

Значения всех h_{ik} здесь берутся в точке $\mathbf{r}_a$; при этом снова должны быть опущены обращающиеся в бесконечность члены, что сводится к «перенормировке» массы m_a, стоящей в виде коэффициента в L_a.

(в итоге как-то получаем большую функцию Лагранжа, которую никто не запоминает. подумаю про это когда-то еще раз.)

14.4.2 Special Formalisms for GR (????)

(полно тут разного всего, потом структуру на это сделаю, если займусь, пока не актуально.)

О вариации Палатин и $f(R)$ (??????)

(копия вопроса стак эксченджа, потом перепишу и в пару абзацев про это напишу основные утверждения. ответ - в теории.)

There are two ways to do the variation of Einstein-Hilbert action.

First one is Einstein formalism which takes only metric independent. After variation of action, we get the Einstein field equation. Second one is Palatini formalism which takes metric and connection are independent. After variation, we get two equations, first is field equation and second is that connection is Levi-Civita connection.

So my question is why it is so coincident that Palatini variation of Einstein-Hilbert action will obtain an equation that connection is Levi-Civita connection and Palatini formalism coincides with Einstein formalism? While for f(R) action they are generally different. Are there some deeper mathematical or physical structures of Einstein-Hilbert action which can account for it.

14.4.3 Equation of State

(мб это часто нужно, пока хз.)

уравнение состояния звезды

(? почему) считается, что там уравнение состояния следующее:

$$p = \alpha\rho$$

Об уравнениях звезд

(см. Лайтман, порешаю потом задачки. мб этого для задач и достаточно, пока хз.)

Геометрия, порождаемая невращающейся звездой, состоящей из идеальной жидкости, является сферически-симметричной. В пространстве вне звезды она представляет собой шварцшильдовскую геометрию, даже если звезда не является статической: например, испытывает радиальные пульсации или коллапсирует. Для статической звезды внутреннюю метрику можно записать в виде

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + (1-2m/r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

$$m := \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr.$$

Равновесие описывается уравнением Оппенгеймера-Волкова:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho + p)\,(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)},$$

это гидростатическое уравнение, тут p и ρ - соответственно давление и плотность массы-энергии вещества, удовлетворяющие урявнению состояния

$$p = p(n, T)$$
$$\rho = \rho(n, T)$$

Если внутри звезды значение энтропии на один барион s постоянно, то p зависит только от ρ : $p = p(\rho)$. Метрическая функция Φ определяется эйнштейновскими уравнениями поля:

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 p}{r(r - 2m)} \text{ и } e^{2\Phi} = 1 - 2M/R \text{ при } r = R,$$

где R - радиус звезды, а $M = m(R)$ - ее полная масса (та самая масса, которая входит в выражение для внешней шварцшильдовской метрики).

Равновесные модели звезд могут быть неустойчивы по отношению к гравитационному коллапсу; в этом случае необходимо пользоваться динамическими уравнениями, полученными из эйнштейновских уравнений поля и/или из уравнения $T^{\mu v}_{;v} = 0$.

Стационарно вращающаяся звезда обладает уже не сферической, а всего лишь аксиальной, или цилиндрической, симметрией. Уравнения, описывающие строение аксиально-симметричных звезд, довольно сложны; тем не менее некоторые общие закономерности можно в этом случае найти либо из соображений симметрии, либо же в предположении, что звезда вращается жестким образом.

14.4.4 Optics, Lensing in GR

(тут приведу то, что как раз использую для задач! пока эту теорию пишу в разделе ниже или в теории поля)

О волновой оптике в искривленном пространстве

(указания на элемент грав линзирование)

Изотропные гиперповерхности. Инвариантность изображений

(основы всяких заумных тем грав линзирования)

Об изотропных гиперповерхностях. Эволюция изображений

14.4.5 Electrodynamics in gravity

(it is a very peculiar topic, see special note about it for now)

уравнения Максвелла в пустоте для 4-потенциала в лоренцевой калибровке (????)

(?? и как дальше решать их??? когда применять?? посмотрю их еще разок на свежую голову, пока не так зашло.)

Уравнения Максвелла в пустоте для 4-потенциала в лоренцевой калибровке имеют вид:

$$A^{;k}_{i;k} - R_{ik}A^k = 0$$

Ковариантное обобщение калибровки Лоренца имеет вид:

$$A^i_{;i} = 0$$

Уравнения Максвелла можно, используя формулу (91.7), записать как

$$F_{ik}{}^{;k} = A_{k;i}{}^{;k} - A_{i;k}{}^{;k} = A_k{}^{;k}{}_{;i} + A^m R_{im} - A_{i;k}{}^{;k} = 0$$

где R_{ik} есть тензор Риччи. Добавляя калибровку, получаем:

$$A_{i;k}{}^{;k} - R_{ik}A^k = 0$$

Обзор уравнений Максвелла-Эйнштейна

(пару слов, которые Киселев говорил)
типа совместная система уравнений, которая учитывает взаимное влияние ЭМ поля на гравитационное.

14.4.6 Geons, Kugelblitz, gravitational solitons

(другие особые объекты узнаю - тоже сюда укажу)

Geons

In general relativity, a geon is a nonsingular electromagnetic or gravitational wave which is held together in a confined region by the gravitational attraction of its own field energy. They were first investigated theoretically in 1955 by J. A. Wheeler, who coined the term as a contraction of "gravitational electromagnetic entity".

Since general relativity is a classical field theory, Wheeler's concept of a geon does not treat them as quantum-mechanical entities, and this generally remains true today. Nonetheless, Wheeler speculated that there might be a relationship between geons and elementary particles. This idea continues to attract some attention among physicists, but in the absence of a viable theory of quantum gravity, the accuracy of this speculative idea cannot be tested.

Wheeler did not present explicit geon solutions to the vacuum Einstein field equation, a gap which was partially filled by Brill and Hartle in 1964 by the Brill–Hartle geon. In 1997, Anderson and Brill gave a rigorous proof that geon solutions of the vacuum Einstein equation exist, though they are not given in a simple closed form.

Kugelblitz

Kugelblitz is a concentration of heat, light or radiation so intense that its energy forms an event horizon and becomes self-trapped. In other words, if enough radiation is aimed into a region of space, the concentration of energy can warp spacetime so much that it creates a black hole. This would be a black hole whose original mass–energy was in the form of radiant energy rather than matter,[1] however, there is currently no uniformly accepted method of distinguishing black holes by origin.

14.4.7 Primordial quantum bubbles and phase transitions in a nutshell

(пока об этом в космологии, вообще не до этой темы)

14.5 Other experimental data (?)

(overview of now so famous or important experiments, including thought experiments)

14.6 Other potentially useful formalisms in a nutshell

14.6.1 Hamiltonian Mechanics for GR (??)

(изучу, у Лашкевича написано если что.)

14.7 Numerical relativity (??)

(very useful topic, but it is for specialists, no time for it now, but maybe later I'll add main ideas of it here.)

14.8 Other gravitational models

(I'll create sections later, for now there will be just paragraphs about them)

О типичных системах

Потенциал поля внутри однородного шара радиуса a:

$$\varphi = -2\pi k\mu \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right).$$

(наверняка аналогичных формул много есть!)

О форме жидкости в гравитации

Равновесная форму равномерно вращающейся как целое однородной гравитирующей массы жидкости - сплюснутый эллипсоид вращения. Условие равновесия заключается в условии постоянства вдоль поверхности тела суммы гравитационного потенциала и потенциала центробежных сил:

$$\varphi - \frac{\Omega^2}{2} \left(x^2 + y^2 \right) = \text{const}$$

(Ω - угловая скорость вращения; ось вращения - ось z). Искомая форма представляет собой. (порешаю эту задачу - добавлю еще что-то тут)

(вроде больше ничего такого нет, это одна такая, пусть и типичная задача)

15 Special models in a nutshell

15.1 Modified theories of gravity in a nutshell

15.1.1 Scalar Theories of Gravity

(среди них конформно-плоские теории и стратифицированные теории с конформно-полоскими пространственными сечениями)

Нордстрёма,

Эйнштейна-Фоккера,

Whitrow-Morduch,

Литтлвуда,

Бергмана,

Пэйджа-Таппера,

Розена (1971),

Папапетру,

Ни,

(?)

Yilmaz,

[Кольмана],

Ли-Лайтмана-Ни;

Биметрические теории

Розена (1975)

,

Рэстолла, Лайтмана-Ли;

15.1.2 Quasilinear Theories of Gravity

(среди них линейные теории с фиксированной калибровкой)

Уайтхеда

Дезера-Лорена

Боллини-Джамбини-Тиомно (Bollini-Giambini-Tiomno);

15.1.3 Scalar-Tensor Theories of Gravity

Тири (Thiry),

Йордана,

Бергмана,

Вагонера,
Нордведта,

Бекенштейна;

On Brans–Dicke theory (Бранса-Дикке)

15.1.4 Vector-Tensor Theories of Gravity

Уилла-Нордведта,

Хеллингса-Нордведта;

15.1.5 Non-metric Theories of Gravity

Теория Картана

Теория Белинфанте-Цвайгарта

15.1.6 Mach's gravity

(also interesting)

15.1.7 Supergravities

(also interesting. see note on field theory for now)

15.2 Quantization of gravity in a nutshell

(An important theoretical question, so a big section about it here)

15.2.1 Idea of Quantization of Gravity and Main Difficulties

(most important about it)

15.2.2 Main concepts of quantum gravity

Quantum foam

or spacetime foam is a theoretical quantum fluctuation of spacetime on very small scales due to quantum mechanics. The theory predicts that at these small scales, particles of matter and antimatter are constantly created and destroyed. These subatomic objects are called virtual particles. The idea was devised by John Wheeler in 1955.

Background

With an incomplete theory of quantum gravity, it is impossible to be certain what spacetime would look like at small scales. However, there is no definitive reason that spacetime needs to be fundamentally smooth. It is possible that instead, in a quantum theory of gravity, spacetime would consist of many small, ever-changing regions in which space and time are not definite, but fluctuate in a foam-like manner.[4]

Wheeler suggested that the uncertainty principle might imply that over sufficiently small distances and sufficiently brief intervals of time, the "very geometry of spacetime fluctuates".[5] These fluctuations could be large enough to cause significant departures from the smooth spacetime seen at macroscopic scales, giving spacetime a "foamy" character.

Experimental results

The experimental proof of the Casimir effect, which is possibly caused by virtual particles, is strong evidence for the existence of virtual particles. The g-2 experiment, which predicts the strength of magnets formed by muons and electrons, also supports their existence.[1]

In 2005, during observations of gamma-ray photons arriving from the blazar Markarian 501, MAGIC (Major Atmospheric Gamma-ray Imaging Cherenkov) telescopes detected that some of the photons at different energy levels arrived at different times, suggesting that some of the photons had moved more slowly and thus were in violation of special relativity's notion that the speed of light is constant, a discrepancy which could be explained by the irregularity of quantum foam.[6] More recent experiments were, however, unable to confirm the supposed variation on the speed of light due to graininess of space.[7][8]

Other experiments involving the polarization of light from distant gamma ray bursts have also produced contradictory results.[9] More Earth-based experiments are ongoing[10] or proposed.[11]

15.3 Fields, particles and QFT in Curved Spacetime in a Nutshell

(special topic, no need for it now)

15.3.1 10.1 Flat Spacetime by Zhou

First, we review some features of quantum fields.
• Consider a simple harmonic oscillator with unit mass,

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

We define a ground state to be a lowest energy state; classically it is $q(t) = 0$.
• This is impossible in quantum mechanics because the canonical commutators

$$[\hat{q}(t), \hat{p}(t)] = [\hat{q}(t), \hat{\dot{q}}(t)] = i$$

could not hold, where the operators are in Heisenberg picture. Instead we have

$$\psi(q) \propto e^{-\omega q^2/2}$$

and $\delta q \sim 1/\sqrt{\omega}$.
• For a free scalar field, the situation is similar. For a field in a box of volume V,

$$\left[\hat{\phi}_{\mathbf{k}}(t), \hat{\pi}_{\mathbf{k}'}(t)\right] = i\delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'}, \quad \phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}$$

along with Hamiltonian and equation of motion

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \left|\dot{\phi}_{\mathbf{k}}\right|^2 + \omega_k^2 \left|\phi_{\mathbf{k}}\right|^2, \quad \omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}, \quad \ddot{\phi}_{\mathbf{k}} + \left(k^2 + m^2\right) \phi_{\mathbf{k}} = 0$$

The classical vacuum has field value zero, and the quantum vacuum has the wavefunctional

$$\Psi[\phi] = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \omega_k \left|\phi_{\mathbf{k}}\right|^2\right)$$

• When we take the infinite volume limit, we have

$$\sum_{\mathbf{k}} \to V \int d\mathbf{k}, \quad \phi_{\mathbf{k}} \to \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} \phi_{\mathbf{k}}$$

so the vacuum wavefunctional becomes

$$\Psi[\phi] = \exp\left(-\frac{1}{2} \int d\mathbf{k} \left|\phi_{\mathbf{k}}\right|^2 \omega_k\right), \quad \phi(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{k} \phi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}$$

• As an application, consider the typical values of the field averaged over a box R of volume L^3,

$$\phi_L = \frac{1}{L^3} \int_R d\mathbf{x} \phi(\mathbf{x}) \sim \int d\mathbf{k} \phi_{\mathbf{k}} \operatorname{sinc}(k_x L) \operatorname{sinc}(k_y L) \operatorname{sinc}(k_z L)$$

All of the $\phi_{\mathbf{k}}$ fluctuate independently, and the dominant part of the integral comes from the region $kL \lesssim 1$, so

$$\delta\phi_L \sim \sqrt{(\delta\phi_k)^2 k^3}, \quad k = 1/L$$

In particular, this quantity is divergent for $L \to 0$.

Next, we cover some general philosophy.

• We will consider only free quantum fields; their only coupling is to classical background fields such as an electric or gravitational field, which can induce particle creation.

• Naively, this is sufficient at energy scales much lower than the Planck scale, but since gravity couples to everything, including gravitational energy, any situation where a gravitational field induces, e.g. photon emission will also induce graviton emission, which will be just important.

• Thus, the next level of approximation is to consider linearized gravity, where we also include a quantum gravitational field as a perturbation on a background classical field. This must break down at the Planck scale because of the nonrenormalizability of gravity, but far below the Planck scale we can treat it as an effective field theory, truncated at, say, the one-loop level. Since a loop expansion is also an expansion in $\hbar$, this is "semiclassical" gravity.

• A static electric field can create electron-positron pairs in the Schwinger effect. Heuristically, a virtual particle pair is produced. If the particles move a distance ℓ apart, they harvest energy ℓeE from the electric field, and if $\ell eE \geq 2m_e$ the particles can become real. The probability of separation at distance ℓ is $P \sim \exp(-m_e \ell)$ since $1/m_e$ is the Compton wavelength, so

$$P \sim \exp\left(-\frac{m_e^2}{eE}\right)$$

This effect may be soon observable in some experiments.

• More rigorously, we see this is a quantum tunneling effect and apply the WKB approximation; the probability we found above is a typical example of a WKB result. Note that it is nonperturbative in the field strength.

• We can apply the same heuristic argument to gravity, where $\mathbf{g}$ takes the role of $\mathbf{E}$. However, we don't expect pair creation in a constant gravitational field, because both particles in the pair fall the same way and cannot separate; this is in accordance with the equivalence principle. But we can have pair creation in a nonuniform field, and in situations where there is an event horizon, as one particle falls in and the other escapes.

Example. A second functional derivative. Given

$$S[q] = \int dt \frac{1}{2}\left(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2\right)$$

we have

$$\frac{\delta S}{\delta q\left(t_1\right)} = -\ddot{q}\left(t_1\right) - \omega^2 q\left(t_1\right) = -\int dt \left(\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t)\right) \delta\left(t - t_1\right)$$

Therefore, the second functional derivative is

$$\frac{\delta^2 S}{\delta q\left(t_2\right) \delta q\left(t_1\right)} = -\delta''\left(t_2 - t_1\right) - \omega^2 \delta\left(t_2 - t_1\right)$$

As a simple example, we'll consider a driven harmonic oscillator.

• We take a Hamiltonian with driving force for $t \in [0, T]$,

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2} - J(t) q, \quad \dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\omega^2 q + J(t)$$

Upon canonical quantization in Heisenberg picture, $\hat{q}$ and $\hat{p}$ satisfy the same equations, and we drop the hats.

• We define the instantaneous creation and annihilation operators

$$a^-(t) = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(q(t) + \frac{i}{\omega} p(t)\right), \quad a^+(t) = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(q(t) - \frac{i}{\omega} p(t)\right)$$

which are Hermitian conjugates, and obey the commutation relations

$$\left[a^-(t), a^+(t)\right] = 1$$

• The resulting equation of motion for $a^-$is

$$\dot{a}^- = -i\omega a^- + \frac{i}{\sqrt{2\omega}} J(t), \quad a^-(t) = \left(a^-_{\text{in}}(t) + \frac{i}{\sqrt{2\omega}} \int_0^t e^{i\omega t'} J\left(t'\right) dt' \right) e^{-i\omega t}$$

with conjugate equations for a^+. Changing variables in the Hamiltonian,

$$H = \frac{\omega}{2}\left(2a^+a^- + 1\right) - \frac{a^+ + a^-}{\sqrt{2\omega}} J(t)$$

• We define the 'in' and 'out' operators so that

$$a^-(t) = \begin{cases} a^-_{\text{in}} e^{-i\omega t} & t < 0, \\ a^-_{\text{out}}\, e^{-i\omega t} & t > T, \end{cases} \quad H = \begin{cases} \omega\left(a^+_{\text{in}}\, a^-_{\text{in}} + 1/2\right) & t < 0 \\ \omega\left(a^+_{\text{out}}\, a^-_{\text{out}}\, + 1/2\right) & t > T \end{cases}$$

with similar expressions for the creation operators. They are related by

$$a^-_{\text{out}}\, = a^-_{\text{in}} + J_0, \quad a^+_{\text{out}}\, = a^+_{\text{in}}\, + J_0^*, \quad J_0 = \frac{i}{\sqrt{2\omega}} \int_0^T e^{i\omega t'} J\left(t'\right) dt'$$

• Next, we may construct 'in' states

$$a^-_{\text{in}} \left|0_{\text{in}}\right\rangle = 0, \quad \left|n_{\text{in}}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(a^+_{\text{in}}\right)^n \left|0_{\text{in}}\right\rangle$$

with similar expressions for the 'out' states. Physically, the 'in' vacuum is the state of lowest energy before the driving starts, while the 'out' vacuum is the state of lowest energy after the driving ends. Thus, for example, the amplitude $\left\langle 2_{\text{out}} \right| \left. 1_{\text{in}} \right\rangle$ is the amplitude to go from one particle before the driving to two particles after the driving. This is a bit confusing since it's said that in Heisenberg picture the states are time-independent; a better picture is that every state extends through time.

• Note in particular that

$$a^-_{\text{out}}\, \left|0_{\text{in}}\right\rangle = J_0 \left|0_{\text{in}}\right\rangle$$

where J_0 is a number. Therefore, if we start in the ground state, after the driving we have a coherent state with mean occupancy J_0,

$$\left|0_{\text{in}}\right\rangle = e^{-|J_0|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_0^n}{\sqrt{n!}} \left|n_{\text{out}}\right\rangle$$

• We can also compute the final energy of the 'in' vacuum. For $t > T$,

$$\left\langle 0_{\text{in}} \right| H(t) \left|0_{\text{in}}\right\rangle = \left\langle 0_{\text{in}} \left| \omega\left(\frac{1}{2} + a^+_{\text{out}}\, a^-_{\text{out}}\right) \right| 0_{\text{in}} \right\rangle = \left(\frac{1}{2} + |J_0|^2\right) \omega.$$

As for the position, for $t > T$,

$$\left\langle 0_{\text{in}} \right| q(t) \left|0_{\text{in}}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(J_0 e^{-i\omega t} + J_0^* e^{i\omega t}\right)$$

which we can write in terms of the retarded Green's function

$$q(t) = \int dt' J\left(t'\right) G_{\text{ret}}\left(t, t'\right), \quad G_{\text{ret}}\left(t, t'\right) = \frac{\sin\omega\left(t - t'\right)}{\omega} \theta\left(t - t'\right)$$

Similarly we may define the advanced Green's function, in the out vacuum.

• The Feynman Green's function goes from the in vacuum to the out vacuum,

$$\frac{\langle 0_{\text{out}} \left| q(t) \right| 0_{\text{in}} \rangle}{\langle 0_{\text{out}} \left| 0_{\text{in}} \right. \rangle} = \int dt' G_F(t,t') J(t'), \quad G_F(t,t') = \frac{i}{2\omega} e^{-i\omega|t-t'|}$$

and is the Green's function that satisfies the boundary conditions

$$G_F(t,t') \to e^{-i\omega t} \text{ for } t \to \infty, \quad G_F(t,t') \to e^{i\omega t} \text{ for } t \to -\infty$$

Generally this Green's function is useful for computing vacuum-to-vacuum transition functions. It is symmetric in its arguments.

• Finally, the Euclidean Green's function appears in Euclidean time, with the boundary conditions $\lim_{\tau \to \pm\infty} G_E(\tau, \tau') = 0$. Then we have

$$G_E(\tau, \tau') = \frac{1}{2\omega} e^{-\omega|\tau-\tau'|}$$

and the Euclidean and Feynman Green's functions are related by analytic continuation; the Feynman boundary conditions turn into exponential decay on both ends. Since path integrals are 'really' in Euclidean space, this shows why the Feynman Green's function is so ubiquitous.

Note. This example was simpler than the examples we will see below. More generally, we will be dealing with fields, and hence have to consider how the field modes depend on space. There are additional subtleties even for a single degree of freedom. Above, we defined instantaneous creation and annihilation operators, and hence could have defined instantaneous vacua and particles. But more generally, this might not be possible. In other situations, there might not be clear "in" and "out" regions.

Next, we turn to the mode expansion of a free real scalar field.

• We know from basic quantum field theory that the Heisenberg picture field is

$$\phi(x) = \int d\mathbf{k} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a_{\mathbf{k}}^- + e^{i\omega_k t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a_{\mathbf{k}}^+ \right), \quad \omega_k^2 = k^2 + m^2$$

where the creation and annihilation operators are time-independent.

• However, let us instead postulate a more general expansion, in terms of mode functions $v_{\mathbf{k}}(t)$,

$$\phi(x) = \int d\mathbf{k} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(v_{\mathbf{k}}^*(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a_{\mathbf{k}}^- + v_{\mathbf{k}}(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a_{\mathbf{k}}^+ \right)$$

We want to know which functions $v_{\mathbf{k}}(t)$ are allowed, which preserve the commutation relations

$$\left[a_{\mathbf{k}}^-, a_{\mathbf{k}'}^+ \right] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

with all other commutators zero. In this case, the associated operators $a_{\mathbf{k}}^{\pm}$can be interpreted as creation and annihilation operators for physical particles.

• The equation of motion for the field is the Klein-Gordan equation, which implies

$$\ddot{v}_{\mathbf{k}} + \omega_k^2 v_{\mathbf{k}} = 0, \quad v_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} \left(\alpha_{\mathbf{k}} e^{i\omega_k t} + \beta_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_k t} \right)$$

In other words, the mode functions obey the same equations of motion as classical field modes. Note that expanding a time-dependent field operator in terms of time-independent creation and annihilation operators times mode functions is a nontrivial requirement: it only works if the equations of motion are linear, because then $\phi(t)$ and $\pi(t)$ remain in the subspace spanned by the creation and annihilation operators.

• Next, the canonical momentum takes the form

$$\pi(y) = \frac{\partial \phi}{\partial t} = \int d\mathbf{k} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\dot{v}_{\mathbf{k}}^*(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a_{\mathbf{k}}^- + \dot{v}_{\mathbf{k}}(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} a_{\mathbf{k}}^+ \right)$$

This implies that the creation and annihilation operators' commutation relations are compatible with the canonical commutation relations precisely when

$$\dot{v}_{\mathbf{k}}(t)v_{\mathbf{k}}^*(t) - v_{\mathbf{k}}(t)\dot{v}_{\mathbf{k}}^*(t) = 2i$$

Note that this is simply the Wronskian of $v_{\mathbf{k}}$ and $v_{\mathbf{k}}^*$, and hence is automatically time-independent. The resulting constraint is

$$|\alpha_{\mathbf{k}}|^2 - |\beta_{\mathbf{k}}|^2 = 1$$

which is not sufficient to determine the coefficients alone.

• Next we consider the Hamiltonian, which turns out to be

$$H = \int d\mathbf{k}\omega_k \left(\alpha_{\mathbf{k}}^*\beta_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}^- a_{-\mathbf{k}}^- + \alpha_{\mathbf{k}}\beta_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^+ a_{-\mathbf{k}}^- + \left(|\alpha_{\mathbf{k}}|^2 + |\beta_{\mathbf{k}}|^2\right) a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}}^-\right)$$

where we removed an infinite constant, and used $\alpha_{\mathbf{k}} = \alpha_{-\mathbf{k}}$ and $\beta_{\mathbf{k}} = \beta_{-\mathbf{k}}$ since the field is real. But then the vacuum itself, defined by $a_{\mathbf{k}}^-|0\rangle = 0$, is only an eigenvector of H if $\alpha_{\mathbf{k}}\beta_{\mathbf{k}} = 0$.

• Thus we must have

$$\alpha_{\mathbf{k}} = e^{i\delta_{\mathbf{k}}}, \quad \beta_{\mathbf{k}} = 0$$

and we can set the phases to zero by suitable redefinitions. Thus

$$v_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\omega_k}} e^{i\omega_k t}$$

and we recover our usual result; there is no freedom to redefine particles in flat spacetime.

• It's useful to impose a little more mathematical structure. We define the inner product

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int_{\Sigma_t} \left(\phi_1 \partial_t \phi_2^* - \phi_2^* \partial_t \phi_1\right) d^{n-1}x$$

in n-dimensional Minkowski space, where Σ_t is a constant-time hypersurface. Note that we are considering complex solutions; if we quantize a real scalar field we impose reality at the operator level, not on the modes themselves. The Wronskian we used above is just the same thing, but specialized for modes with no space dependence.

• In general, we define a creation/annihilation operator associated with a mode f by

$$a(f) = (f, \phi), \quad a(f)^\dagger = -(\bar{f}, \phi)$$

and as a result, we have

$$\left[a(f), a(g)^\dagger\right] = (f, g)$$

with all other commutators zero.

• Then our quantum field has the form

$$\phi(x) = \int d\mathbf{k} \left(a_{\mathbf{k}}^- f_{\mathbf{k}}(x) + a_{\mathbf{k}}^+ f_{\mathbf{k}}^*(x)\right)$$

where the modes $f_{\mathbf{k}}$ are orthonormal under the inner product,

$$(f_{\mathbf{k}_1}, f_{\mathbf{k}_2}) = \delta\left(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2\right)$$

The complex conjugate modes $f_{\mathbf{k}}^*$ are orthogonal to the $f_{\mathbf{k}}$ modes and are orthonormal to each other with a negative norm, and the creation and annihilation operators satisfy the standard commutation relations. We are hence forced to interpret the creation and annihilation operators as creating and annihilating particles, respectively, to avoid negative-norm states.

• We say the $f_{\mathbf{k}}$ modes are positive frequency because they are proportional to $e^{-i\omega t}$, while the $f_{\mathbf{k}}^*$ modes have negative frequency; they span the space of solutions and define particles and antiparticles respectively. If we boost into another inertial frame, the frequencies will change by the Doppler shift, but the signs will remain the same. Thus all inertial observers will agree on the number of particles, and thus on the vacuum state.

• Formally, we were able to define positive and negative-frequency solutions in flat spacetime because of the existence of the timelike Killing vector ∂_t. In general, this would be defined by the Lie derivative, so that positive frequency modes obey

$$\mathcal{L}_K f_\omega = -i\omega f_\omega, \quad \omega > 0$$

for Killing vector K.

• The fact that all inertial observers agree on the positive/negative frequency decomposition is because all other timelike Killing vectors are related to ∂_t by Lorentz transformations. Alternatively, it's because the notion of a particle in quantum field theory in flat spacetime is defined to be Poincare invariant.

15.3.2 10.2 Curved Spacetime

Next, we turn to a simple example of a curved spacetime.

• We consider the spatially flat Friedmann universe,

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \delta_{ik} dx^i dx^k$$

It is convenient to introduce the conformal time,

$$\eta(t) = \int^t \frac{dt}{a(t)}, \quad ds^2 = a(\eta)^2 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

which makes it clear the metric is conformally flat, a useful simplification.

• The action for a minimally coupled real scalar field is

$$S = \frac{1}{2}\int \sqrt{-g} d^4x \left(g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - m^2\phi^2\right) = \frac{1}{2}\int d\mathbf{x} d\eta a^2 \left(\phi'^2 - (\nabla\phi)^2 - m^2a^2\phi^2\right)$$

where the prime indicates a derivative with respect to η. The action is not time-translation invariant, so the field can absorb energy from the gravitational field, creating particles. Note that if the scalar field were massless, the whole system would be conformally equivalent to a standard scalar field in flat spacetime, so there would be no particle creation.

• Changing variables to $\chi = a\phi$ and integrating by parts,

$$S = \frac{1}{2}\int d\mathbf{x} d\eta \left(\chi'^2 + (\nabla\chi)^2 - \left(m^2a^2 - \frac{a''}{a}\right)\chi^2\right)$$

Then the equation of motion is just that of a real scalar field in flat spacetime with a timedependent mass,

$$\chi'' - \nabla^2\chi + m_{\text{eff}}^2\chi = 0, \quad m_{\text{eff}}^2(\eta) = m^2a^2 - \frac{a''}{a}$$

This makes it relatively straightforward to quantize the field χ.

• We first perform the mode expansion for the classical field,

$$\chi(\mathbf{x},\eta) = \int d\mathbf{k}\chi_{\mathbf{k}}(\eta)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

so that

$$\chi_{\mathbf{k}}'' + \omega_k^2(\eta)\chi_{\mathbf{k}} = 0, \quad \omega_k^2(\eta) = k^2 + m_{\text{eff}}^2(\eta)$$

• Letting v_k and v_k^* be the independent solutions to this equation,

$$\chi_{\mathbf{k}}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_{\mathbf{k}}^- v_k^*(\eta) + a_{-\mathbf{k}}^\dagger v_k(\eta)\right)$$

where the $a_{\mathbf{k}}^\pm$are integration constants and $a_{\mathbf{k}}^+ = \left(a_{\mathbf{k}}^-\right)^*$ since the field is real. We can write v_k because the solution depends only on $k = |\mathbf{k}|$, by rotational symmetry.

• We normalize v_k so that $\mathrm{Im}\,(v_k' v_k^*) = 1$, and this normalization is time-independent since it fixes the Wronskian of v_k and v_k^*,

$$W\,(v_k, v_k^*) = v_k' v_k^* - v_k v_k^{*\prime} = 2i\,\mathrm{Im}\,(v' v^*)$$

and the Wronskian is time-independent.

• Finally, the field takes the form

$$\chi(\mathbf{x}, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int d\mathbf{k}\, \left(a_{\mathbf{k}}^- v_k^*(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}}^+ v_k(\eta) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right)$$

where we changed variables $\mathbf{k} \to -\mathbf{k}$ in the second term.

Next, we turn to canonical quantization.

• For a general field ϕ, we would define the conjugate momentum

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\,(\nabla_0 \phi)}$$

and impose the canonical commutation relations

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \pi(t, \mathbf{x})] = \frac{i}{\sqrt{-g}} \delta\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

In this case χ is effectively on a flat background, so $\pi = \chi'$ and $\sqrt{-g} = 1$.

• We find that the operators $a_{\mathbf{k}}^{\pm}$obey the commutation relations

$$\left[a_{\mathbf{k}}^-, a_{\mathbf{k}'}^+\right] = \delta\,(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

with all other commutators zero, using the normalization $\mathrm{Im}\,(v_k' v_k^*) = 1$.

• Note that if we instead had a complex scalar field, the mode expansion would be

$$\chi(\mathbf{x}, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int d\mathbf{k}\, \left(a_{\mathbf{k}}^- v_k^*(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + b_{\mathbf{k}}^+ v_k(\eta) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right)$$

giving two independent sets of creation and annihilation operators.

• The mode functions $v_k(\eta)$ are not unique. We may define new mode functions by a Bogoliubov transformation,

$$u_k(\eta) = \alpha_k v_k(\eta) + \beta_k v_k^*(\eta)$$

where α_k and β_k are complex constants. By linearity, u_k also satisfies the appropriate differential equation, and the normalization conditions are satisfied if

$$|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1$$

This is a familiar condition: a Bogoliubov transformation is a lot like a Lorentz transformation, as both preserve an indefinite metric.

• In terms of the new mode functions u_k the field is

$$\chi(\mathbf{x}, \eta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int d\mathbf{k}\, \left(b_{\mathbf{k}}^- u_k^*(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + b_{\mathbf{k}}^+ u_k(\eta) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right)$$

where we have defined a new set of creation and annihilation operators which also obey the standard commutation relations. Unlike the flat spacetime case, we do not get further constraints by demanding the vacuum is an eigenstate of the Hamiltonian, because the Hamiltonian is time-dependent. We will discuss the choice of physical vacuum further below.

• These two fields are equal, so the integrands are the same, so the creation and annihilation operators are related by the Bogoliubov transformation

$$a_{\mathbf{k}}^- = \alpha_k^* b_{\mathbf{k}}^- + \beta_k b_{-\mathbf{k}}^+, \quad a_{\mathbf{k}}^+ = \alpha_k b_{\mathbf{k}}^+ + \beta_k^* b_{-\mathbf{k}}^-$$

The inverse of this relation is

$$b_{\mathbf{k}}^- = \alpha_k a_{\mathbf{k}}^- - \beta_k a_{-\mathbf{k}}^+, \quad b_{\mathbf{k}}^+ = \alpha_k^* a_{\mathbf{k}}^+ - \beta_k^* a_{-\mathbf{k}}^-$$

Note that this is a special case of the most general possible transformation, which relates a b operator to all of the a operators. We have this restricted form here because of momentum conservation/translational invariance.

• We can construct a Fock space using either the $a_{\mathbf{k}}^{\pm}$or the $b_{\mathbf{k}}^{\pm}$. We define the vacuum state $|0_a\rangle$ and $|0_b\rangle$ to be annihilated by the $a_{\mathbf{k}}^{-}$or $b_{\mathbf{k}}^{-}$respectively.

• As an example, the b vacuum contains a particles, as

$$\langle 0_b \left| N_{\mathbf{k}}^a \right| 0_b \rangle = \left\langle 0_b \left| a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}}^- \right| 0_b \right\rangle = \left\langle 0_b \left| \beta_k^* b_{-\mathbf{k}}^- \beta_k b_{-\mathbf{k}}^+ \right| 0_b \right\rangle = |\beta_k|^2$$

The total number density of a particles, and the energy density relative to the a vacuum, are

$$n = \int d\mathbf{k} \left|\beta_k\right|^2, \quad \rho = \int d\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} \left|\beta_{\mathbf{k}}\right|^2$$

and the energy density is finite only if $|\beta_k|$ decays faster than $1/k^2$.

• The b vacuum can be expressed in terms of a superposition of a-particle states as

$$|0_b\rangle = \prod_{\mathbf{k}} \left[\frac{1}{|\alpha_k|^{1/2}} \exp\left(\frac{\beta_k}{2\alpha_k} a_{\mathbf{k}}^+ a_{-\mathbf{k}}^+ \right) \right] |0_a\rangle$$

This is straightforward to derive by focusing on one pair of $\mathbf{k}$ and $-\mathbf{k}$ modes, and the factor of two comes from summing over all $\mathbf{k}$ instead of over all distinct pairs. If we had instead used a complex scalar field, we would find that the b vacuum contains particle-antiparticle a pairs. The normalization factor $\prod |\alpha_k|^{1/2}$ only converges if $|\beta_k|^2$ decays faster than k^{-3}. Also note that formally, the $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ mode has the form of a squeezed state.

• Note that by the definition of the Bogoliubov transformation, $|\beta_k/\alpha_k| < 1$. Indeed, in the limit $|\beta_k/\alpha_k| \to 1$, we have $|\beta_k| \to \infty$, so the energy density diverges, and the state above is not even normalizable for $|\beta_k/\alpha_k| \geq 1$. For $|\beta_0/\alpha_{\mathbf{0}}| = 1$, the $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ mode is squeezed all the way to a momentum eigenstate.

Note. More generally, we require our spacetime to be globally hyperbolic, so that a mode function is defined by initial data on a timeslice. The inner product must also be suitably generalized, replacing derivatives with covariant derivatives.

Next, we discuss the choice of physical vacuum.

• Conceptually, the indeterminate choice of vacuum comes from the absence of a timelike Killing vector in the original curved spacetime, which means we have no reference for positive frequency. Detectors will measure particles using a positive frequency reference that matches with the flow of their proper time, and hence may disagree on the number of particles.

• In the case of flat spacetime treated earlier, the vacuum state was the one with minimum possible energy. But in this case, the Hamiltonian is time-dependent and hence does not have time-independent eigenvectors. We can perform the same procedure for a Hamiltonian at a particular time η_0, giving the instantaneous lowest energy state $|0_{\eta_0}\rangle$, but this state may not have a useful physical meaning.

• For an arbitrary set of mode functions $v_k(\eta)$ we have

$$H(\eta) = \frac{1}{4} \int d\mathbf{k} a_{\mathbf{k}}^- a_{-\mathbf{k}}^- F_k^* + a_{\mathbf{k}}^+ a_{-\mathbf{k}}^+ F_k + \left(2a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}}^- + \delta(\mathbf{0})\right) E_k$$

where

$$E_k(\eta) = \left|v_k'\right|^2 + \omega_k^2(\eta) \left|v_k\right|^2, \quad F_k(\eta) = v_k'^2 + \omega_k^2(\eta) v_k^2$$

Therefore, the energy density of the associated vacuum $|0_v\rangle$ at time η_0 is

$$\epsilon\left(\eta_0\right) = \frac{1}{4} \int d\mathbf{k} E_k\left(\eta_0\right)$$

The lowest energy state is then found by minimizing $E_k\left(\eta_0\right)$ for each k individually. Note that we are minimizing the vacuum zero-point energy, which we instantly threw away in flat spacetime, because it is not a constant in this context; it depends on the mode functions.

• Dropping the k subscript, and setting $v = re^{i\alpha}$ for real r and α, the normalization condition is $r^2\alpha' = 1$, and

$$E(\eta_0) = |v'|^2 + \omega^2|v|^2 = r'^2 + r^2\alpha'^2 + \omega^2 r^2 = r'^2 + \frac{1}{r^2} + \omega^2 r^2$$

This is minimized when $r'(\eta_0) = 0$ and $r(\eta_0) = \omega^{-1/2}$, giving

$$v_k(\eta_0) = \frac{1}{\sqrt{\omega_k(\eta_0)}}, \quad v_k'(\eta_0) = i\omega_k v_k(\eta_0)$$

where we set the arbitrary phase $\alpha_k(\eta_0)$ to zero.

• At this moment, we have

$$E_k(\eta_0) = 2\omega_k(\eta_0), \quad F_k(\eta_0) = 0, \quad H(\eta_0) = \int d\mathbf{k}\omega_k(\eta_0)\left(a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}}^- + \frac{1}{2}\delta(\mathbf{0})\right)$$

so the Fock space constructed from the creation operators from these mode functions instantaneously diagonalize the Hamiltonian.

• However, there could be and often are modes with negative $\omega_k^2(\eta_0)$. Then the instantaneous Hamiltonian is not bounded below, and the idea of defining the instantaneous number of particles through excitations of the instantaneous lowest energy state breaks down completely.

• Abandoning the notion of defining a number of particles at every moment in time, we can consider the useful special case where $\omega_k(\eta)$ tends to a constant for low and high η. In this case, we can unambiguously define 'in' and 'out' vacua and determine how many 'out' particles were produced during the process, given that we start in the 'in' vacuum. However, the number of particles at any point during the process is not well-defined.

• Conceptually, the number of particles is well-defined for modes with $k \gg a^{-1}$, where a is the curvature scale. Such modes do not "feel" the curvature and are approximately plane waves.

Note. A basic summary of the above is that a set of mode functions, obeying the appropriate normalization, corresponds to a set of creation and annihilation operators obeying the standard commutation relations. These operators then define a Heisenberg vacuum state (which is not necessarily the same as the lowest energy state at any time, which is a notion that may not even exist), along with a ladder of states built upon it.

The ambiguity of mode functions can appear even in flat spacetime, if we allow for boundary conditions, as discussed in the notes on Optics, and physically means that different detectors may disagree on photon statistics, even if they share an inertial frame.

Note. In situations where ω_k changes slowly, the mode equation of motion

$$v_k'' + \omega_k^2(\eta)v_k = 0$$

Intuitively, this has the form of a time-independent Schrodinger equation, where η plays the role of the "position", and $\omega_k^2(\eta)$ is the "potential". Just like the Schrodinger equation, we can solve this by the WKB approximation,

$$v_k(\eta) \approx \frac{1}{\sqrt{\omega_k(\eta)}} \exp\left(i\int^{\eta} \omega_k(\eta)d\eta\right)$$

We may use these approximate modes to define an instantaneous vacuum state, called the adiabatic vacuum. This can be a useful tool because it allows us to separate the effects of adiabatic changes in $\omega_k(\eta)$, with particle production effects associated with error terms in the adiabatic theorem. Higher-order WKB approximations yield higher-order adiabatic vacua.

Example. Consider the simple case

$$m_{\text{eff}}^2(\eta) = \begin{cases} m_0^2 & \eta < 0, \eta > \eta_1 \\ -m_0^2 & 0 < \eta < \eta_1 \end{cases}$$

which allows us to define 'in' and 'out' vacua. We let the mode functions be

$$v_k^{\text{in}}(\eta) = \frac{e^{i\omega_k\eta}}{\sqrt{\omega_k}}, \quad v_k^{\text{out}}(\eta) = \frac{e^{i(\eta-\eta_1)\omega_k}}{\sqrt{\omega_k}}, \quad \omega_k = \sqrt{k^2 + m_0^2}$$

where the expressions above are valid in the 'in' and 'out' regions, respectively, and may be used to define creation and annihilation operators, and hence a vacuum, in each region. We may
straightforwardly solve the equation of motion for the mode function $v_k^{\text{in}}(\eta)$, by taking exponentials in each region and matching by demanding continuity of $v_k^{\text{in}}(\eta)$ and its derivative. This gives

$$v_k^{\text{in}}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\omega_k}}\left(\alpha_k^* e^{i\omega_k(\eta-\eta_1)} + \beta_k^* e^{-i\omega_k(\eta-\eta_1)}\right)$$

in the 'out' region, where the Bogoliubov coefficients are

$$\alpha_k = \frac{e^{-i\Omega_k\eta_1}}{4}\left(\sqrt{\frac{\omega_k}{\Omega_k}} + \sqrt{\frac{\Omega_k}{\omega_k}}\right)^2 - \frac{e^{i\Omega_k\eta_1}}{4}\left(\sqrt{\frac{\omega_k}{\Omega_k}} - \sqrt{\frac{\Omega_k}{\omega_k}}\right)^2, \quad \beta_k = \frac{1}{2}\left(\frac{\Omega_k}{\omega_k} - \frac{\omega_k}{\Omega_k}\right)\sin\left(\Omega_k\eta_1\right)$$

where $\Omega_k = \sqrt{k^2 - m_0^2}$. The final density of 'out' particles starting from the 'in' vacuum is

$$n_k = |\beta_k|^2 = \frac{m_0^4}{|k^4 - m_0^4|}\left|\sin\left(\eta_1\sqrt{k^2 - m_0^2}\right)\right|^2$$

The above expressions hold for all k, where for $k < m_0$ the argument of the sine is imaginary. For $k \gg m_0$, we clearly have $n_k \sim k^{-4} \ll 1$, but for $k \ll m_0$ we have $\sqrt{k^2 - m_0^2} \approx im_0$, and hence

$$n_k \sim \sinh^2\left(m_0\eta_1\right)$$

Assuming $m_0\eta_1 \gg 1$, this is exponentially large. The particle energy density is

$$\rho = \int d\mathbf{k} n_k \omega_k$$

which is logarithmically divergent for high k. This is because of the unphysical, discontinuous change of $m_{\text{eff}}^2(\eta)$, and can be removed by applying an ultraviolet cutoff. Then as long as the cutoff is not extremely high, the dominant contribution to the integral comes from low frequencies $k \lesssim m_0$, so a rough estimate is

$$\rho \sim m_0 \int_0^{m_0} dk k^2 \exp\left(2m_0\eta_1\right) \sim m_0^4 \exp\left(2m_0\eta_1\right)$$

Example. Consider a linearly changing mass. Like the previous example, this could happen in a completely flat spacetime where the background dynamics have nontrivial time-dependence, so we write the dependent variable as t, and let $m(t) = m_0 t$. The mode functions obey

$$\left(-\partial_t^2 - m_0^2 t^2\right) u_k = k^2 u_k$$

This is analogous to the Schrodinger problem of tunneling through an upside-down quadratic barrier, where the tunneling amplitude gives β_k, and there is an exact solution in terms of parabolic cylinder functions. For demonstration purposes, we will use the WKB approximation. (finish)

15.3.3 10.3 The Unruh Effect by Zhou

So far we haven't discussed what set of particles a particle detector detects. Roughly speaking, "positive frequency" is defined with respect to the detector's proper time. In particular, a uniformly accelerated observer can detect particles even in the Minkowski vacuum, in the Unruh effect.

• We work in two-dimensional Minkowski space, $ds^2 = dt^2 - dx^2$. A uniformly accelerated observer has $a^\mu a_\mu = -a^2$ for a constant a. For simplicity, we use lightcone coordinates,

$$u = t - x, \quad v = t + x, \quad ds^2 = dudv$$

In particular, Lorentz transformations take the form $u \to \alpha u, v \to v/\alpha$.

• Applying $u^\mu u_\mu = 1$ and $a^\mu a_\mu = -a^2$ in these coordinates,

$$\dot{u}\dot{v} = 1, \quad \ddot{u}\ddot{v} = -a^2$$

where the dots are derivatives with respect to proper time τ. Straightforwardly solving the equations, performing a Lorentz transformation, and shifting the origin we have

$$u(\tau) = -\frac{1}{a}e^{-a\tau}, \quad v(\tau) = \frac{1}{a}e^{a\tau}$$

which in the original coordinates gives

$$x(\tau) = \frac{1}{a}\cosh a\tau, \quad t(\tau) = \frac{1}{a}\sinh a\tau$$

The worldline is a hyperbola, and the observer is at rest at time $t = 0$ at $x = a^{-1}$.

• Next, we switch to a coordinate system adapted to the accelerating observer. We define

$$u = -\frac{1}{a}e^{-a\tilde{u}}, \quad v = \frac{1}{a}e^{a\tilde{v}}, \quad ds^2 = e^{a(\tilde{v}-\tilde{u})}d\tilde{u}d\tilde{v}$$

so the trajectory is simply $\tilde{u}(\tau) = \tilde{v}(\tau) = \tau$. Switching back to spacelike and timelike coordinates, we have

$$\tilde{u} = \xi^0 - \xi^1, \quad \tilde{v} = \xi^0 + \xi^1, \quad ds^2 = e^{2a\xi^1}\left(\left(d\xi^0\right)^2 - \left(d\xi^1\right)^2\right)$$

All metrics in two dimensions are conformally flat, but this choice is particularly nice because it is manifestly conformally flat.

• Both coordinates ξ^0, ξ^1 cover the range $(-\infty, \infty)$, but only cover the wedge $x > |t|$. Hence we say the metric instead yields Rindler space, which is a subset of Minkowski space.

• Physically, inertial observers in Minkowski space follow orbits of the time translation Killing vector field, or combinations of it with space translation. By contrast, Rindler observers follow the timelike Killing vector field associated with boosts.

Note. There are a variety of possible coordinates for Rindler space. As just one further example, we can define coordinates (ρ, τ) by

$$t = \left(\rho + \frac{1}{a}\right)\sinh(a\tau), \quad x = \left(\rho + \frac{1}{a}\right)\cosh(a\tau) - \frac{1}{a}$$

These are defined so that ρ is constant for each uniformly accelerated path, and that for fixed τ, the spacetime interval between points at ρ and $\rho + d\rho$ is just $d\rho$. These are Kottler-Moller coordinates, and have metric

$$ds^2 = (1 + a\rho)^2 d\tau^2 - d\rho^2$$

which is precisely that of a uniform gravitational field.

Next, we perform canonical quantization.

• In $1 + 1$ dimensions, the action for a massless scalar field is conformally invariant,

$$S[\phi] = \frac{1}{2}\int d^2x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$$

because the transformation of $\sqrt{-g}$ exactly cancels that of $g^{\mu\nu}$. Thus the action looks very similar in the (u, v) coordinates and the $(\tilde{u}, \tilde{v})$ coordinates,

$$S = 2\int \partial_u\phi\partial_v\phi dudv = 2\int \partial_{\tilde{u}}\phi\partial_{\tilde{v}}\phi d\tilde{u}d\tilde{v}$$

• The field equations take the form

$$\partial_u\partial_v\phi = 0, \quad \partial_{\tilde{u}}\partial_{\tilde{v}}\phi = 0$$

which have the simple solutions

$$\phi(u,v) = A(u) + B(v), \quad \phi(\tilde{u},\tilde{v}) = \tilde{A}(\tilde{u}) + \tilde{B}(\tilde{v})$$

In particular, the positive frequency modes in the (u,v) coordinates are simply $e^{-i\omega u}$, giving a right-moving mode, and $e^{-i\omega v}$, giving a left-moving mode, with similar expressions for $(\tilde{u},\tilde{v})$.

• Therefore, we have the two mode expansions

$$\phi = \int_0^\infty \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(e^{-i\omega u} a_\omega^- + e^{i\omega u} a_\omega^+\right) + \text{left} \;= \int_0^\infty \frac{d\Omega}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \left(e^{-i\Omega \tilde{u}} b_\Omega^- + e^{i\Omega \tilde{u}} b_\Omega^+\right) + \text{left}$$

where we've left the left-moving modes implicit, and the latter is valid for $x > |t|$. These define the Minkowski vacuum $|0_M\rangle$ and the Rindler vacuum $|0_R\rangle$ respectively.

• We claim that the uniformly accelerated observer detects Rindler particles, and hence sees the Minkowski vacuum as containing particles. To find the particle spectrum, we compute the Bogoliubov transformation,

$$b_\Omega^- = \int_0^\infty d\omega a_{\Omega\omega} a_\omega^- - \beta_{\Omega\omega} a_\omega^+$$

where maintaining the commutation relations requires

$$\int_0^\infty d\omega a_{\Omega\omega} a^*_{\Omega'\omega} - \beta_{\Omega\omega} \beta^*_{\Omega'\omega} = \delta\left(\Omega - \Omega'\right)$$

• A rather complicated calculation then yields

$$|a_{\Omega\omega}|^2 = e^{2\pi\Omega/a} \left|\beta_{\Omega\omega}\right|^2$$

In particular, the number of particles with frequency Ω is

$$\langle N_\Omega \rangle = \int d\omega \left|\beta_{\omega\Omega}\right|^2 = \int d\omega \frac{|a_{\Omega\omega}|^2 - |b_{\Omega\omega}|^2}{e^{2\pi\Omega/a} - 1} = \frac{\delta(0)}{e^{2\pi\Omega/a} - 1}$$

where we used the normalization condition. Since $\delta(0) = V$, we have computed a number density that obeys the Planck distribution for $T = a/2\pi$. More detailed calculations shows that the radiation observed by the accelerated observer is precisely thermal.

• Note that the number of particles falls off exponentially when $\Omega \gtrsim a$. Generally, this occurs when Ω is greater than the timescale of the variations.

• It can be shown that the Rindler vacuum is physically singular; it requires an infinite amount of energy to be prepared from the Minkowski vacuum.

• Note that the Minkowski vacuum has zero energy density, $\langle T^{\mu\nu} \rangle = 0$ according to both inertial and Rindler observers. The energy associated with the particles detected by the Rindler observer does not come from the vacuum, but rather from whatever gives the observer a constant acceleration.

Finally, we turn to the issue of what a particle detector measures.

• This problem is difficult because the notion of a particle is 'global', as it requires mode functions that are defined on at least a large patch of spacetime. This is in contrast to quantities such as $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$ which can be defined locally. In practice, this means that the response of a detector will depend on its entire past history.

• We consider a detector with worldline $x^\mu(\tau)$ in the Minkowski vacuum, with interaction

$$L_{\text{int}} = cm(\tau)\phi(x(\tau))$$

where $m(\tau)$ is the detector's monopole moment operator, and c is a small parameter. The states of the detector are parametrized by their energy E.

• By first order perturbation theory, the amplitude for a transition is

$$ic\left\langle \psi, E\left|\int m(\tau)\phi(x(\tau))d\tau\right|0_M, E_0\right\rangle = ic\,\langle E|m(0)|E_0\rangle \int e^{i(E-E_0)\tau}\,\langle\psi|\phi(x)|0_M\rangle\,d\tau$$

where $|\psi\rangle$ is the final state of the field and we used $m(\tau) = e^{iH_0\tau}m(0)e^{-iH_0\tau}$. The first factor depends on the internal details of the detector.

• Since we're working to first order, $|\psi\rangle$ must be a one-particle state $|\mathbf{k}\rangle$, and

$$\langle\mathbf{k}|\phi(x)|0_M\rangle \propto e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}(\tau)+i\omega t(\tau)}$$

and the final integral can be computed explicitly. For example, for a detector moving a uniform velocity, the transition amplitude vanishes, as we'd expect.

• For a general path, it's useful to consider the total transition probability, which is

$$P \sim \int d\tau d\tau' e^{-iE(\tau-\tau')}G^+\left(x(\tau), x\left(\tau'\right)\right), \quad G^+\left(x, x'\right) = \left\langle 0_M\left|\phi(x)\phi\left(x'\right)\right|0_M\right\rangle$$

In particular, if we use a uniformly accelerated detector, the resulting transition rate is the same as what we would compute for an inertial observing using the thermal Green's function at temperature $T = a/2\pi$. On the other hand, the transition rate is exactly zero for all uniformly accelerated detectors if we use the Rindler vacuum.

• Now consider the same process of particle absorption in the inertial frame. In this case, the detector instead emits particles, since it is an accelerating charged object, and this causes a radiation reaction force. The energy from whatever accelerates the detector both goes into the emitted particles and into the internal energy of the detector.

• Next, we return to the 'in/out' situation considered for the expanding universe. To detect the particle creation operationally, we take an unexcited detector in the 'in' state. Before the transition begins, we turn off the detector's coupling to the field adiabatically, and turn it back on after the transition ends.

• The detector will then see the number density of particles we computed earlier. Explicitly,

$$G^+\left(x, x'\right)_{\text{in}} = \left\langle 0, \text{in}\left|\phi(x)\phi\left(x'\right)\right|0, \text{in}\right\rangle = \int u^{\text{in}}_{\mathbf{k}}(x)u^{\text{in}\,*}_{\mathbf{k}}\left(x'\right)d^{n-1}k$$

where x and x' are in the 'out' region. This integral is difficult to evaluate since u^{in}_{k} is complicated in this region, so we perform a Bogoliubov transformation to the 'out' modes, which are just plane waves. The only term that doesn't vanish upon the τ and τ' integration is the one proportional to $|\beta_{\mathbf{k}}|^2$, giving exactly the integral we found earlier.

15.3.4 10.4 Hawking Radiation and Black Hole Thermodynamics

Next, we turn to a simple explanation of the Hawking effect. We begin by discussing negative energy particles.

• First, we define the energy of a particle in general relativity. A reasonable definition is $E = -K^\mu p_\mu$ where K^μ is a timelike Killing vector; this is conserved along geodesics and it is indeed the energy that would be measured by an observer with four-velocity along K^μ. Generally K^μ is not unique, but neither is the definition of energy, which is observer-dependent.

• For a rotating black hole, there is a region called the ergosphere, outside of the event horizon, where K^μ becomes spacelike and the energy can be negative. Then an object can fall into the ergosphere and split into two pieces, one with negative energy.

• It is difficult to interpret what 'negative energy' means when inside the black hole, as no observer would measure E to be the energy. Indeed a local observer should only measure positive energy because locally spacetime looks flat.

• However, we can simply look at the final condition: it is possible for the negative energy particle to fall into the event horizon and for the positive energy particle to come out. Note that the negative energy particle can't escape the ergosphere, as we know that far away from the black hole there are only positive energy particles.

• Once the positive energy particle escapes, we can measure its energy and see that it has increased; hence energy has been extracted from the black hole. This is called the Penrose process, and more generally superradiance.

• Similarly, a rotating black hole will spontaneously emit radiation, as virtual particle pairs formed in the ergosphere can be real, with opposite energy and momentum.

• Hawking radiation comes from static black holes, where there is no ergosphere; however, the time translation Killing vector is still spacelike inside the horizon. Instead, Hawking radiation is mediated by quantum tunneling: a positive energy particle can tunnel out, and a negative energy particle can tunnel in.

Next, we repeat the calculations of the previous section for a simplified black hole.

• We will work with a two-dimensional Schwarzschild black hole, by simply dropping the angular coordinates for the Schwarzschild metric,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - r_g/r}, \quad r_g = 2M$$

We introduce the tortoise coordinate

$$dr^* = \frac{dr}{1 - r_g/r}, \quad ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(dt^2 - dr^{*2}\right)$$

Then we switch to lightcone coordinates,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) d\tilde{u} d\tilde{v}, \quad \tilde{u} = t - r^*, \quad \tilde{v} = t + r^*$$

• Finally, we introduce the Kruskal-Szekeres coordinates

$$u = -2r_g e^{-\tilde{u}/2r_g}, \quad v = 2r_g e^{-\tilde{v}/2r_g}, \quad ds^2 = \frac{r_g}{r} \exp\left(1 - \frac{r}{r_g}\right) du dv$$

Everything is now regular at $r = r_g$, so we may extend the domain of u and v beyond $u < 0$ and $v > 0$ to all reals. We may also switch to timelike and spacelike coordinates T and R.

• Next, we again consider a massless scalar field. By conformal invariance the solutions are

$$\phi(u, v) = A(u) + B(v), \quad \phi(\tilde{u}, \tilde{v}) = \tilde{A}(\tilde{u}) + \tilde{B}(\tilde{v})$$

just as for the Unruh effect. For example, $\phi \propto e^{-i\omega\tilde{u}} = e^{-i\omega(t-r^*)}$ describes a positive-frequency mode with respect to time t moving away from the black hole.

• Therefore, we define the Boulware vacuum $|0_B\rangle$ for the $\tilde{u}/\tilde{v}$ coordinates and the Kruskal vacuum $|0_K\rangle$ for the u/v coordinates. The Boulware vacuum defines positive frequency with respect to t, which is the proper time for a distant observer; hence an static observer at infinity sees no particles in this vacuum. However, the Boulware vacuum is singular on the black hole horizon, with a diverging energy density; this makes it physically unacceptable since we are assuming the black hole is weakly perturbed. It is analogous to the Rindler vacuum.

• The Kruskal vacuum defines positive frequency with respect to T, and it has finite energy density everywhere besides the singularities; hence it is a better candidate for the 'physical' vacuum. It roughly corresponds to the vacuum state for a freely falling observer and is analogous to the Minkowski vacuum.

• Therefore, to see how many particles are seen by a distant observer, we perform a Bogoliubov transformation from the Kruskal vacuum to the Boulware vacuum. Note that the coordinate transformation is identical to that from Minkowski to Rindler coordinates with the replacement $a \to \kappa = 1/2r_g$. Thus there is a thermal spectrum with temperature

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{1}{8\pi M}$$

More generally, κ is the surface gravity of the black hole.

We now physically interpret this result.

• Above, we have considered an eternal black hole, and the thermal spectrum contains both inward-moving and outward-moving particles. It follows that for an eternal black hole to exist, it must be placed in a thermal bath of temperature T_H as measured by a distant observer.

• Since a black hole can absorb particles, it must also be able to emit them. Therefore, a noneternal black hole placed in empty space should emit with temperature T_H. This is the Hawking effect.

• To derive this more rigorously, we would need to choose a vacuum for a non-eternal black hole formed by gravitational collapse. In the far past, we simply have an asymptotically flat spacetime rather than a white hole; thus we can choose the ingoing Boulware modes. In the far future, we have a black hole, so we choose the outgoing Kruskal modes. In this vacuum, a distant observer indeed sees no radiation at early times and outgoing radiation at late times.

• By dimensional analysis, the wavelength of photons produced by Hawking radiation is on the order of the black hole size. All other particles can be produced as well, by pair creation. For example, a proton can only be produced by a black hole about the same size or smaller.

• In four dimensions, we need to account for the angular coordinates. The wave equation is now $\Box\phi = 0$, and expanding in partial waves by

$$\phi(t, r, \theta, \phi) = \sum_{\ell m} \phi_{\ell m}(t, r) Y_{\ell m}(\theta, \phi)$$

the equation for $\phi_{\ell m}$ is

$$\left(\Box^{(2)} + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(\frac{r_g}{r^3} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)\right)\phi_{\ell m}(t, r) = 0$$

where $\Box^{(2)}$ is the two-dimensional Laplacian.

• Therefore, we have an additional potential barrier, even for $\ell = 0$, and only a fraction of outgoing or ingoing particles can make it through. This modifies the spectrum by a greybody factor, which also depends on the particle mass and spin, but keeps the temperature the same.

• More generally, we also have a chemical potential for each species of particle; for instance, a charged black hole will preferentially radiate particles of the same charge, quickly becoming neutral, while rotating black holes preferentially emit particles to carry away the spin.

• By the Stefan-Boltzmann law, the luminosity is proportional to $T^4 \propto 1/M^4$ and to the area $A = 4\pi r_g^2 \propto M^2$. Then

$$\frac{dM}{dt} \propto \frac{1}{M^2}$$

and the black hole evaporates in a finite time $t \sim M_0^3$, with a distinctive signature at the end of its lifetime. Ordinary black holes would last far too long to be observed this way, but primordial black holes might be detected. An alternative is that something else happens when $M \sim M_{\text{pl}}$ since nonperturbative quantum gravity effects would become dominant.

Finally, we briefly venture into black hole thermodynamics.

• Taking the differential of the expression $A = 16\pi M^2$,

$$dM = \frac{1}{8\pi M} d\left(\frac{A}{4}\right)$$

which is reminiscent of the first law, $dE = TdS$, as long as we identify

$$S_{\text{BH}} = \frac{1}{4}A = 4\pi M^2$$

That is, a black hole has an extremely high entropy, reflecting the fact that it could have been formed in many ways; the black hole at the center of our galaxy has more entropy than all visible matter. In classical GR, this is puzzling as a black hole is characterized by only a few parameters, but string theory has reproduced S_{BH} by microscopic state counting.

• The second law of black hole thermodynamics states that

$$\delta S = \delta S_{\text{matter}} + \delta S_{\text{BH}} \geq 0$$

The evidence for this statement is that it holds without black holes by classical thermodynamics, and it holds in classical GR (by the area theorem), and it continues to hold when we add Hawking radiation.

• Since $E(T) = M = 1/8\pi T$, the heat capacity of a black hole is

$$C_{\text{BH}} = -\frac{1}{8\pi T^2}$$

which is negative; a black hole cannot be in stable thermal equilibrium with an infinite reservoir.

• However, a black hole can be in equilibrium with a finite reservoir, as

$$\frac{d^2S}{dQ^2} = -\frac{1}{T^2}\frac{dT}{dQ} = -\frac{1}{CT^2}$$

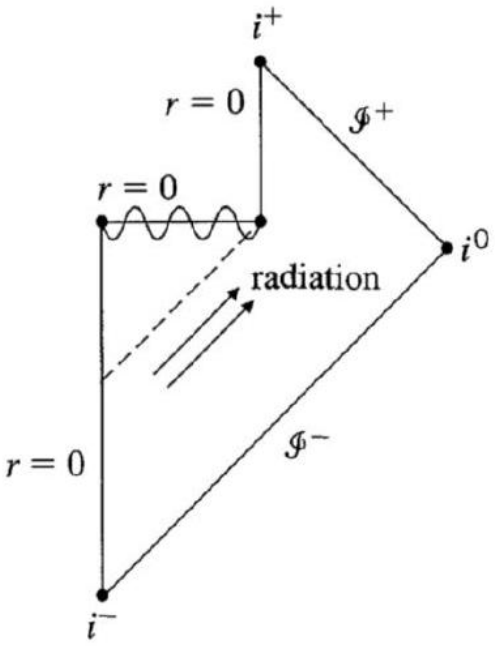
which indicates that the entropy is maximized in equilibrium,

$$\frac{d^2\left(S_{\text{res}} + S_{\text{BH}}\right)}{dQ^2} > 0$$

when $C_{\text{res}} < -C_{\text{BH}}$.

• The black hole information loss paradox refers to the fact that it's hard to see how the information in the black hole reflected by S_{BH} can come out; it is likely encoded in subtle correlations, i.e. the spectrum is not perfectly thermal.

• The problem can also be seen in terms of a conformal diagram.



Here, a Cauchy surface after the singularity disappears cannot be used to infer the data on a Cauchy surface before the singularity disappears.

• One obstacle is that since $S_{\text{BH}} \sim A$, we expect the information is encoded on the horizon. But when an object passes the event horizon of a large black hole, nothing special happens; we expect it continues to the singularity unimpeded. Assuming locality, this means the information must come out at late times, but at late times S_{BH} is too small!

• One way to avoid this problem is to give up on locality; this is related to the idea of holography, which is motivated by $S_{\text{BH}} \sim A$.

• In a full theory of quantum gravity, the entropy $S = A/4$ is just the first term is a series of higher curvature corrections; the general formula is called the Wald entropy.

15.3.5 10.5 Spinors in Curved Spacetime

We begin with introducing two-component spinor notation in flat spacetime.

• We may convert between a vector index and two Weyl spinor indices using the Van de Waerden symbols,

$$dx^{AA'} = \sigma_a^{AA'} dx^a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} dt + dz & dx + idy \\ dx - idy & dt - dz \end{pmatrix}$$

We will call the two types of spinor indices primed and unprimed.

• We raise and lower the primed and unprimed spinor indices using

$$\epsilon_{AB} = \epsilon_{A'B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

with the sign conventions

$$\psi^A \epsilon_{AB} = \psi_B, \quad \psi^A = \epsilon^{AB}\psi_B$$

and similarly for the primed version.

• Let $\mathbb{S}$ denote the two-dimensional complex vector space of unprimed spinors ψ^A and let $\mathbb{S}'$ be the same for primed spinors $\psi^{A'}$. Then the Van de Waerden symbols give a concrete isomorphism

$$T = \mathbb{S} \otimes \mathbb{S}'$$

where T is the tangent space. Hence in terms of abstract indices only, we can identify $V^a = V^{AA'}$ as both represent the same geometric object.

• Given a Lorentz transformation $L^a_b \in SO_+(1,3)$, there is a corresponding transformation $L^A_B \in SL(2,\mathbb{C})$ so that

$$L^b_a \sigma^{AA'}_b = L^A_B \bar{L}^{A'}_{B'} \sigma^{BB'}_a$$

and hence vectors can be transformed with either the L^a_b or the L^A_B.

• We can also give a correspondence between infinitesimal Lorentz transformations. For an antisymmetric l_{ab} and symmetric l^{AB},

$$l^{ab}\sigma^{AA'}_a \sigma^{BB'}_b = l^{AA'BB'} = \epsilon^{A'B'} l^{AB} + \epsilon^{AB}\bar{l}^{A'B'}, \quad l^{AB} = \frac{1}{2} l^{AA'BB'}{}_{\epsilon_{A'B'}}$$

which expresses the isomorphism between $\mathfrak{so}(1,3)$ and $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \overline{\ell 2,\mathbb{C})}$.

• A Dirac spinor is constructed as $\psi^\alpha = \left(\psi^A, \phi^{A'}\right)$, and the Clifford matrices are

$$\gamma^\alpha_{c\beta} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_{cB'}{}^A \\ \sigma_{cB} A^{A'} & 0 \end{pmatrix}, \quad \{\gamma_a, \gamma_b\} = -2I\eta_{ab}$$

The Dirac equation is $\gamma^a \partial_a \psi = m\psi$, which in two-component notation is

$$\partial_{AA'}\psi^A = m\phi_{A'}, \quad \partial_{AA'}\phi^{A'} = m\psi_A$$

Here we have implicitly converted spacetime indices to spinor indices, $\partial_{AA'} = \sigma^a_{AA'}\partial_a$, and we will do this implicitly below.

Note. We can construct spin s fields by taking the symmetric tensor product of spinors, $\phi_{(A_1 \ldots A_{2s})}$. Note that these fields are automatically traceless, because contraction is with the antisymmetric ϵ^{AB}. Now, massless field equations for spin s fields take the form

$$\nabla^{A_1}_{A'} \phi_{A_1 \ldots A_{2s}} = 0$$

Here s is the spin/helicity of the corresponding particle, and $s < 0$ can be reached by complex conjugation. For $s = 0$, this is just the scalar wave equation, and for $s = 1/2$ we get the Weyl equation. The case $s = 1$ is a bit confusing. (finish)

15.3.6 Fields and QFT По Зи и Степаньянцу

(??? читал, смотрел, но нужно еще продумывать заново)

15.3.7 Spinors in Curved Spacetime

(У Зу написано это, а также у Проена, так что по ним и напишу это.)

Spinors in gravity (???)

15.4 Stars

(overview of astrophysics of stars)

15.4.1 Star Models: Details

(в 1й части уже есть суть, тут всякие дополнения не такие уж обязательные. мб удалю раздел, посмотрим, но скорее всего нет, потому что в 1й очень компактно все должно быть.)

(там много задач, Лайтман, Тонг, все такое, про это. мб пару разделов сделаю, пока не занимался. в 1й части основные сведения о звездах)

15.5 Black Holes: Detailed Models

(тут все дополнительное про черные дыры. тоже много всего, просто основные формулы в 1й части указаны, потому что детали вообще не важны в 1 прохождении)

15.5.1 Massive Black Holes: Details

(в 1й части уже есть суть, тут всякие дополнения не такие уж обязательные. мб удалю раздел, посмотрим, но скорее всего нет, потому что в 1й очень компактно все должно быть.)

15.5.2 Charged Black Holes: Details

(в 1й части уже есть суть, тут всякие дополнения не такие уж обязательные. мб удалю раздел, посмотрим, но скорее всего нет, потому что в 1й очень компактно все должно быть.)

On Reissner-Nordstrom's metric

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \qquad r_Q^2 := \frac{GQ^2}{4\pi}.$$

Берется она из

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{16\pi G} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right),$$

where $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$. The equations of motion are:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G \left(F_{\mu\rho} F_\nu{}^\rho - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}\right),$$
$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0.$$

В данной оторванной от реальности модели мы считаем электромагнитное статическое вокруг звезды, что полный бред, но такая модель, другие - еще будут сложнее.

(тут абзац про разные случаи решения, качественное указание, что делать)

О заряженных дырах по Лашкевичу

The Reissner-Nordstrom Solution

6.2.2 Super-Extremal Black Holes

6.2.3 Sub-Extremal Black Holes

6.2.4 Cauchy Horizons: Strong Cosmic Censorship

6.2.5 Extremal Black Holes

15.5.3 Spinning and Charged Black Holes: Details

(в 1й части уже есть суть, тут всякие дополнения не такие уж обязательные. мб удалю раздел, посмотрим, но скорее всего нет, потому что в 1й очень компактно все должно быть.)

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2}\left(dt - a\sin^2\vartheta d\varphi\right)^2 - \frac{\sin^2\vartheta}{\rho^2}\left(adt - \left(r^2+a^2\right)d\varphi\right)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2 d\vartheta^2$$
$$\Delta = r^2 - r_g r + r_Q^2 + a^2, \quad \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\vartheta$$

Тут параметр a: $J = aM$. Это метрика Керра. Никто ее не запоминает и не выводит, потому что это как-то сложно и почти не нужно. (мб когда-то укажу вывод и в теории это выведу, пока не на таком я уровне и не актуально это.)

On Kerr's solution

Гравитационное же поле вращающегося коллапсара дается следующей аксиально-симметричной стационарной метрикой Керра [1)]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g r}{\rho^2}\right)dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \\ - \left(r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2}{\rho^2}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta d\varphi^2 + \frac{2r_g r a}{\rho^2}\sin^2\theta d\varphi dt,$$

где введены обозначения

$$\Delta = r^2 - r_g r + a^2, \quad \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta,$$

а r_g есть по-прежнему $r_g = 2mk$. Эта метрика зависит от двух постоянных параметров, m и a, смысл которых ясен из предельного вида метрики на больших расстояниях r. С точностью до членов $\sim 1/r$ имеем:

$$g_{00} \approx 1 - \frac{r_g}{r}, \quad g_{03} \approx \frac{r_g a}{r}\sin^2\theta$$

сравнение первого выражения с (100.18), а второго с (104.1) показывает, что m есть масса тела, а параметр a связан с моментом M соотношением

$$M = ma$$

Потеря смысла метрикой Керра при $a > r_g/2$ означает, что значение

$$a_{\max} = \frac{r_g}{2}, \quad M_{\max} = \frac{mr_g}{2}$$

дает верхнюю границу возможных значений момента коллапсара. При этом, по-видимому, его надо рассматривать как предельное значение, к которому можно

подойти сколь угодно близко, но точное равенство $a = a_{\max}$ невозможно. Соответствующие предельные значения радиусов поверхностей S_0 и $S_{\text{гор}}$:

$$r_0 = \frac{r_g}{2}(1+\sin\theta), \quad r_{\text{гор}} = \frac{r_g}{2}.$$

Обратимся к свойствам поверхности S0 и пространства между нею и горизонтом (эту область поля Керра называют эргосферой)

Ввиду неизбежности вращательного движения частиц в эргосфере естественная форма представления метрики в этой области:

$$ds^2 = \left(g_{00} - \frac{g_{03}^2}{g_{33}}\right)dt^2 + g_{11}dr^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{33}\left(d\varphi + \frac{g_{03}}{g_{33}}dt\right)^2.$$

Коэффициент при dt^2

$$g_{00} - \frac{g_{03}^2}{g_{33}} = \frac{\Delta}{r^2 + a^2 + r_g r a^2 \sin^2\theta/\rho^2}$$

положителен везде вне $S_{\text{гор}}$ (и не обращается в нуль при S_0); интервал ds при $r = \text{const}$, $\theta = \text{const}$, $d\varphi = -\left(g_{03}/g_{33}\right)dt$ времениподобен. Величина

$$-\frac{g_{03}}{g_{33}} = \frac{r_g a r}{\rho^2\left(r^2+a^2\right) + r_g r a^2 \sin^2\theta}$$

играет роль общей «угловой скорости вращения эргосферы» относительно внешней системы отсчета (причем направление этого вращения совпадает с направлением вращения центрального тела) [2]).

$$\mathscr{E}_0 = m\left(g_{00}u^0 + g_{03}u^3\right) = m\left(g_{00}\frac{dt}{ds} + g_{03}\frac{d\varphi}{ds}\right)$$

(мб что-то про это еще напишу, просто не работал еще с этим, и не нужно было это.)

О вращающихся черных дырах

(суть Лшк приведу)

6.3.1 The Kerr Solution

6.3.2 The Global Structure

6.3.3 The Ergoregion

6.3.4 The No Hair Theorem

15.5.4 Collision of Black Holes

О столкновений черных дыр

(?? как вообще к этому подойти, просто указания)

15.5.5 Other Collapsars (???)

О гравитационном коллапсе несферических и вращающихся тел

(лл пар 104, там жесть вообще)

15.6 Cosmology: other well-known models

15.6.1 Cosmological Models from Landau's book (???)

(скоррелирую с теорией выше. тут только типичное из ЛЛ2, тоже не такая сложная и типичная теория)

Изотропное пространство

§ 112. Закрытая изотропная модель

§ 113. Открытая изотропная модель

§ 114. Красное смещение

§ 115. Гравитационная устойчивость изотропного мира

§ 116. Однородные пространства

15.6.2 On The Hot Big Bang

(пока не очень уверен, что конкретно в этом разделе у меня?)

A Brief History of the Universe

Event	time t	redshift z	temperature T
Inflation	10^{-34} s(?)	–	–
Baryogenesis	?	?	?
EW phase transition	20ps	10^{15}	100GeV
QCD phase transition	20μs	10^{12}	150MeV
Dark matter freeze-out	?	?	?
Neutrino decoupling	1 s	$6 \cdot 10^9$	1MeV
Electron-positron annihilation	6 s	$2 \cdot 10^9$	500keV
Big Bang nucleosynthesis	3 min	$4 \cdot 10^8$	100keV
Matter-radiation equality	60kyr	3400	0.75eV
Recombination	$260 - 380$kyr	$1100 - 1400$	$0.26 - 0.33$eV
Photon decoupling	380kyr	$1000 - 1200$	$0.23 - 0.28$eV
Reionization	$100 - 400$Myr	$11 - 30$	$2.6 - 7.0$meV
Dark energy-matter equality	9 Gyr	0.4	0.33meV
Present	13.8Gyr	0	0.24meV

- Baryogenesis. This poses a slight puzzle. Particles and antiparticles annihilate through processes such as $e^+ + e^- \to \gamma + \gamma$. If initially the universe was filled with equal amounts of matter and anti-matter then we expect these annihilations to lead to a universe dominated by radiation. However, we do observe an overabundance of matter (mostly baryons) over anti-matter in the universe today. Models of baryogenesis try to derive the observed baryon-to-photon ratio

$$\eta := \frac{n_b}{n_\gamma} \sim 10^{-9}$$

from some dynamical mechanism, i.e. without assuming a primordial matter-antimatter asymmetry as an initial condition. Although many ideas for baryogenesis exist, none is singled out by experimental tests. We will not have much to say about baryogenesis in this course.

- Electroweak phase transition. At 100GeV particles receive their masses through the Higgs mechanism. Above we have seen how this leads to a drastic change in the strength of the weak interaction.

- QCD phase transition. While quarks are asymptotically free (i.e. weakly interacting) at high energies, below 150MeV, the strong interactions between the quarks and the gluons become important. Quarks and gluons then form bound three-quark systems, called baryons,

and quark-antiquark pairs, called mesons. These baryons and mesons are the relevant degrees of freedom below the scale of the QCD phase transition.

- Dark matter freeze-out. Since dark matter is very weakly interacting with ordinary matter we expect it to decouple relatively early on. In §3.3.2, we will study the example of WIMPs - weakly interacting massive particles that freeze out around 1MeV. We will show that choosing natural values for the mass of the dark matter particles and their interaction cross section with ordinary matter reproduces the observed relic dark matter density surprisingly well.

- Neutrino decoupling. Neutrinos only interact with the rest of the primordial plasma through the weak interaction. The estimate in (3.1.10) therefore applies and neutrinos decouple at 0.8MeV.

- Electron-positron annihilation. Electrons and positrons annihilate shortly after neutrino decoupling. The energies of the electrons and positrons gets transferred to the photons, but not the neutrinos. In §3.2.4, we will explain that this is the reason why the photon temperature today is greater than the neutrino temperature.

- Big Bang nucleosynthesis. Around 3 minutes after the Big Bang, the light elements were formed. In §3.3.4, we will study this process of Big Bang nucleosynthesis (BBN).

- Recombination. Neutral hydrogen forms through the reaction $e^- + p^+ \to \mathrm{H} + \gamma$ when the temperature has become low enough that the reverse reaction is energetically disfavoured. We will study recombination in §3.3.3.

- Photon decoupling. Before recombination the strongest coupling between the photons and the rest of the plasma is through Thomson scattering, $e^- + \gamma \to e^- + \gamma$. The sharp drop in the free electron density after recombination means that this process becomes inefficient and the photons decouple. They have since streamed freely through the universe and are today observed as the cosmic microwave background (CMB).

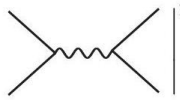
Local Thermal Equilibrium (??????????????)

The key to understanding the thermal history of the universe is the comparison between the rate of interactions Γ and the rate of expansion H. When $\Gamma \gg H$, then the time scale of particle interactions is much smaller than the characteristic expansion time scale:

$$t_c := \frac{1}{\Gamma} \ll t_H := \frac{1}{H}.$$

$$\Gamma := n\sigma v$$

$$\sigma \sim \left| \right|^2 \sim \frac{\alpha^2}{T^2},$$



here we have $2 \to 2$ scattering process mediated by the exchange of a gauge boson. Each vertex contributes a factor of the gauge coupling $g_A \propto \sqrt{\alpha}$. The dependence of the cross section on α follows from squaring the dependence on α derived from the Feynman diagram, i.e. σ a $(\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha})^2 = \alpha^2$.

where $\alpha := g_A^2/4\pi$ is the generalized structure constant associated with the gauge boson A.

$$\Gamma = n\sigma v \sim T^3 \cdot \frac{\alpha^2}{T^2} = \alpha^2 T.$$

We wish to compare this to the Hubble rate $H \sim \sqrt{\rho}/M_{\mathrm{pl}}$.

The same dimensional argument as before gives $\rho \sim T^4$ and hence

$$H \sim \frac{T^2}{M_{\mathrm{pl}}^2}.$$

$$\frac{\Gamma}{H} \sim \frac{\alpha^2 M_{\mathrm{pl}}}{T} \sim \frac{10^{16}\mathrm{GeV}}{T}$$

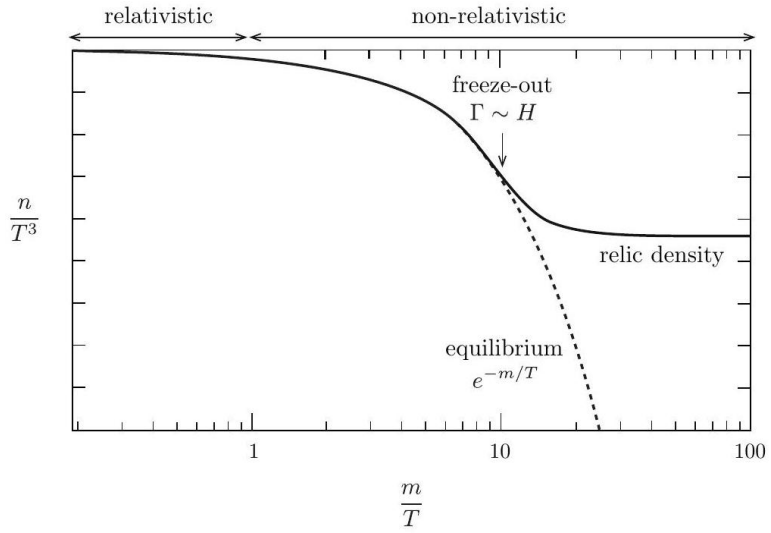
$$f(E) = \frac{1}{e^{E/T} \pm 1},$$

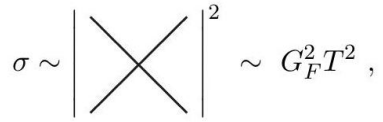
where the + sign is for fermions and the - sign for bosons.
$\rho_r \propto \sum_i \int \mathrm{d}^3 p f_i(p) E_i(p)$. The result can be written as (see below)

$$\rho_r = \frac{\pi^2}{30} g_\star(T) T^4,$$

$\sigma \propto (\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha})^2 = \alpha^2$.

Decoupling and Freeze-Out





where we have introduced Fermi's constant, $G_F \sim \alpha / M_W^2 \sim 1.17 \cdot 10^{-5} \mathrm{GeV}^{-2}$.

$$\frac{\Gamma}{H} \sim \frac{\alpha^2 M_{\mathrm{pl}} T^3}{M_W^4} \sim \left(\frac{T}{1\mathrm{MeV}} \right)^3,$$

which drops below unity at $T_{\mathrm{dec}} \sim 1\mathrm{MeV}$.

SUMMARY Of Standard Model and Beyond

By way of summarizing the features of an expanding universe that I have outlined above and that we will explore in great detail in the coming chapters, let's construct a time line. We can characterize any epoch in the universe by the time since the Big Bang; by the value of the scale factor at that time; or by the temperature of the cosmic plasma. For example, today, $a = 1; t \simeq 14$ billion years; and $T = 2.725$ K $= 2.35 \cdot 10^{-4} \mathrm{eV}/k_B$. Figure 1.15 shows a time line of the universe using both time and temperature as markers. The milestones indicated on the time line range from those about which we are quite certain (e.g., nucleosynthesis and the CMB) to those that are more speculative (e.g., dark matter production, inflation, and dark energy today).

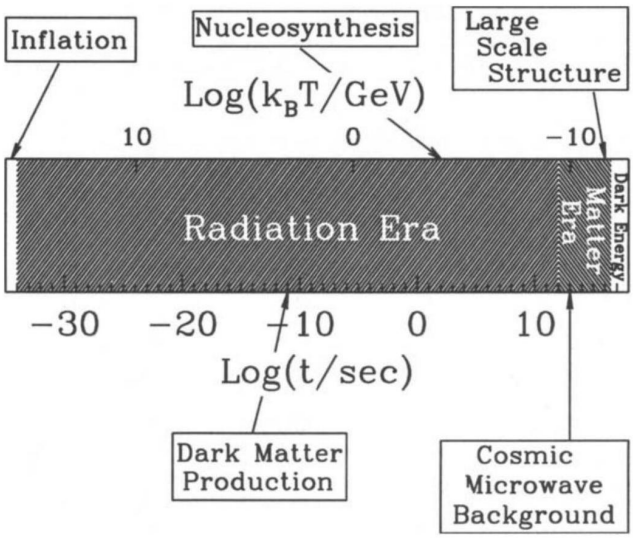


Figure 1.15. A history of the universe. Any epoch can be associated with either temperature (top scale) or time (bottom scale).

The time line in Figure 1.15 shows the dominant component of the universe at various times. Early on, most of the energy in the universe was in the form of radiation. Eventually, since the energy of a relativistic particle falls as $1/a$ while that of nonrelativistic matter remains constant at m, matter overtook radiation. At relatively recent times, the universe appears to have become dominated not by matter, but by some dark energy, whose density remains relatively constant with time. The evidence for this unexplained form of energy is new and certainly not conclusive, but it is very suggestive.

The classical results in cosmology can be understood in the context of a smooth universe. Light elements formed when the universe was several minutes old, and the CMB decoupled from matter at a temperature of order $k_BT \sim 1/4$eV. Heavy elementary particles may make up the dark matter in the universe; if they do, their abundance was fixed at very high temperatures of order $k_BT \sim 100$GeV.

We will be mostly interested in this book in the perturbations around the smooth universe. The early end of the time line allows for a brief period of inflation, during which primordial perturbations were produced. These small perturbations began to grow when the universe became dominated by matter. The dark matter grew more and more clumpy, simply because of the attractive nature of gravity. An overdensity of dark matter of 1 part in 1000 when the temperature was 1eV grew to 1 part in 100 by the time the temperature dropped to 0.1eV. Eventually, at relatively recent times, perturbations in the matter ceased to be small; they became the nonlinear structure we see today. Anisotropies in the CMB today tell us what the universe looked like when it was several hundred thousand years old, so they are wonderful probes of the perturbations.

Some of the elements in the time line in Figure 1.15 may well be incorrect. However, since most of these ideas are testable, the data which will be taken during the coming decade will tell us which parts of the time line are correct and which need to be discarded. This in itself seems a sufficient reason to study the CMB and large-scale structure.

SUMMARY Smooth Expanding Universe

The smooth universe can be described with the Friedmann-Robertson-Walker metric given in Eq. (2.4), which implies that physical distances are related to coordinate (comoving) distances with the time-dependent scale factor $a(t)$. The time dependence of the metric is determined by the Einstein equations. The time-time component of the Einstein equations reduces to Eq. (2.39) in a flat universe.

Measuring distances in the expanding universe is tricky, but all relevant distances can be obtained from the comoving distance between us and a source at redshift z:

$$\chi(z) = \int_0^z \frac{dz'}{H\,(z')}.$$

Another important distance is that light could have traveled since $t = 0$. This is usually expressed as a time, the conformal time,

$$\eta = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_z^\infty \frac{dz'}{H(z')}.$$

The conformal time will be the natural time variable when we come to consider the evolution of perturbations in the universe. Photons in the universe have a Bose-Einstein distribution with zero chemical potential, so their energy density can be determined by measuring their temperature. Neutrinos have a Fermi-Dirac distribution, also probably with zero chemical potential, but there is some ambiguity in their energy density because of our ignorance of the neutrino masses. Early on, this ambiguity is irrelevant since the temperatures are so much larger than the masses and neutrinos behave relativistically. Thus, the uncertainty in neutrino mass does not affect Big Bang nucleosynthesis at temperatures of order 1MeV and probably not even the epoch of matter radiation equality at temperatures of order 1eV. The neutrino temperature is a factor of $(4/11)^{1/3}$ smaller than the photon temperature. This, and the difference in statistics, implies that a species of massless neutrinos has an energy density equal to 0.23 times that of photons. A single neutrino generation with mass m_ν contributes $\Omega_\nu = 0.01\,(m_\nu/0.94\mathrm{eVh}^2)$. In addition to photons and neutrinos, the universe consists of baryons, best determined by nucleosynthesis to have $\Omega_b h^2 = 0.0205 \pm 0.0018$; dark matter ($\Omega_m \simeq 0.3$); and dark energy (with $\Omega_{\rm de} \simeq 0.7$), a new form of energy with negative pressure.

There is significantly more energy today in nonrelativistic matter than in radiation. However, since the energy density of radiation scales as a^{-4} while that of matter as a^{-3}, the very early universe was radiation dominated. The epoch at which the matter density was equal to the radiation density delineates these two regimes: $a_{\rm eq} = 4.15 \cdot 10^{-5}/\Omega_m h^2$.

SUMMARY BOLTZMANN EQUATIONS

The constituents of the universe are not distributed completely uniformly in space. For the nonrelativistic components such as the dark matter and the baryons, this means that some regions are more dense than others and that there are small coherent velocities. For the dark matter we denote the fractional overdensity as $\delta(\vec{x},t)$ and the velocity as $\vec{v}(\vec{x},t)$. The equivalent perturbations for the baryons are $\delta_{\rm b}(\vec{x},t)$ and $\vec{v}_{\rm b}(\vec{x},t)$. In solving the linear evolution equations, it is simplest to work with Fourier transforms of all of these. It turns out that the evolution of a mode associated with wavevector $\vec{k}$ depends only on the magnitude of $\vec{k}$, so we have equations for $\tilde{\delta}(k,t)$. We have found it convenient to use conformal time η as the evolution variable. Also, it is conventional[8] in the literature to drop the $\tilde{}$'s over Fourier transformed variables, so our equations will be for $\delta(k,\eta), \delta_{\rm b}(k,\eta), v(k,\eta)$, and $v_{\rm b}(k,\eta)$. The scalar velocities here are the components parallel to $\vec{k}$; these are the only ones that are cosmologically relevant.

Relativistic particles such as photons and neutrinos require more information to characterize. They have not only a monopole perturbation (the equivalent of δ) and a dipole (the equivalent of a velocity), but also a quadrupole, octopole, and higher moments as well. In other words, the photon distribution depends not only on $\vec{x}$ and time but also on the direction of propagation of the photon, $\hat{p}$. In Fourier space, therefore, the photon perturbations depend not only on k and η but also on $\hat{p}\cdot\hat{k}$, which we defined as μ. Thus, the photon perturbation variable is $\Theta(k,\mu,\eta)$, the Fourier transform of $\delta T/T$, the fractional temperature difference. Neutrino perturbations require a separate variable with the same dependence; let's call it $\mathcal{N}(k,\mu,\eta)$.

We found it useful to define the monopole (Eq. (4.52)) and dipole (Eq. (4.97)) of the photon distribution. These moments, $\Theta_0(k,\eta)$ and $\Theta_1(k,\eta)$, do not completely characterize the photon distribution. More generally, it is useful to define the l th multipole moment of the temperature field as

$$\Theta_l := \frac{1}{(-i)^l}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{2}\mathcal{P}_l(\mu)\Theta(\mu)$$

where $\mathcal{P}_l$ is the Legendre polynomial of order l. The quadrupole corresponds to $l = 2$, octopole to $l = 3$, etc. The higher Legendre polynomials have structure on smaller scales (see Figure 4.4), so the higher moments capture information about the small scale structure of the temperature field. So the photon perturbations can be described either by $\Theta(k, \mu, \eta)$ or by a whole hierarchy of moments, $\Theta_l(k, \eta)$. And of course similar freedom applies to the neutrino distribution.

I have postponed a discussion of polarization until Chapter 10, but I mentioned in Section 4.3 that a completely accurate treatment of anisotropies in the temperature requires us to incorporate polarization effects. Again, waiting until Chapter 10 for more formal definitions, let's call the strength of the polarization Θ_P. It

[8] Conventional, but "abominable" according to one early reviewer.

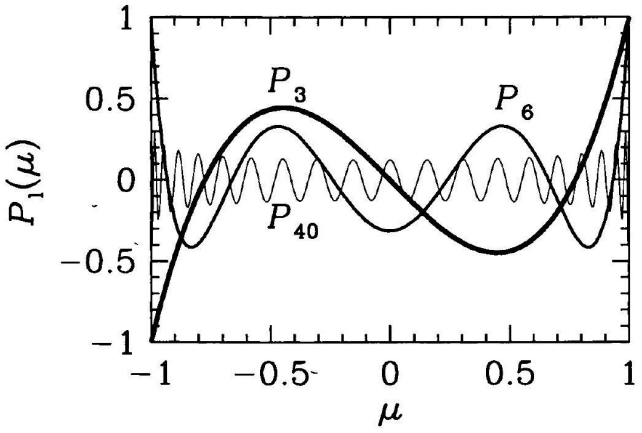


Figure 4.4. Some Legendre polynomials. Note that the higher order ones vary on smaller scales than do the low-order ones. In general $\mathcal{P}_l$ crosses zero l times between -1 and 1.

describes the change in the polarization field in space. Upon Fourier transforming, it too depends on k, μ, and η.

We now collect the equations we have derived for the photons, dark matter, and baryons and supplement them with a trivial extension to massless neutrinos:

$$\begin{aligned}
\dot{\Theta} + ik\mu\Theta &= -\dot{\Phi} - ik\mu\Psi - \dot{\tau}\left[\Theta_0 - \Theta + \mu v_{\rm b} - \frac{1}{2}\mathcal{P}_2(\mu)\Pi\right] \\
\Pi &= \Theta_2 + \Theta_{P2} + \Theta_{P0} \\
\dot{\Theta}_P + ik\mu\Theta_P &= -\dot{\tau}\left[-\Theta_P + \frac{1}{2}\left(1 - \mathcal{P}_2(\mu)\right)\Pi\right] \\
\dot{\delta} + ikv &= -3\dot{\Phi} \\
\dot{v} + \frac{\dot{a}}{a}v &= -ik\Psi \\
\dot{\delta}_{\rm b} + ikv_{\rm b} &= -3\dot{\Phi} \\
\dot{v}_{\rm b} + \frac{\dot{a}}{a}v_{\rm b} &= -ik\Psi + \frac{\dot{\tau}}{R}\left[v_{\rm b} + 3i\Theta_1\right] \\
\dot{\mathcal{N}} + ik\mu\mathcal{N} &= -\dot{\Phi} - ik\mu\Psi.
\end{aligned}$$

Equation (4.100) is the Boltzmann equation for photons we have derived. The one change from our derivation is the last term $\mathcal{P}_2\Pi/2$, which requires some explanation. First, note that it is proportional to the second Legendre polynomial, $\mathcal{P}_2(\mu) = (3\mu^2 - 1)/2$. From Eq. (4.101), one of the new terms then is $\mathcal{P}_2\Theta_2/2$; this term accounts for the angular dependence of Compton scattering, which we ignored in Section 4.3. The other parts of Π represent the fact that the temperature field is also coupled to the strength of the polarization field Θ_P which obeys Eq. (4.102). Note that Θ_P is sourced by the quadrupole, Θ_2, and none of the other temperature moments.

In the equation for the baryon velocity (4.106), the ratio of photon to baryon density has been defined as

$$\frac{1}{R} := \frac{4\rho_\gamma^{(0)}}{3\rho_b^{(0)}}.$$

Equation (4.107) governs perturbations to the neutrino distribution, $\mathcal{N}$. It is identical to the photon equation except that there is no scattering term since neutrinos interact only very weakly. Here I have assumed that the neutrinos are massless. If any of the neutrinos had appreciable mass, then Eq. (4.107) would have to be amended to account for this. Exercise 11 discusses the question of how large a mass is interesting.

SUMMARY EINSTEIN EQUATIONS

The Einstein equations relate perturbations in the metric to perturbations in the matter and radiation. Taking two components of the Einstein equations $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$, we found equations governing the evolution of the two functions which describe scalar metric perturbations, Φ and Ψ of Eq. (4.9). It is easiest to write these equations in Fourier space. Again recalling our convention of dropping the $\tilde{s}$ on transformed variables, we can write

$$k^2\Phi + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{\Phi} - \Psi\frac{\dot{a}}{a}\right) = 4\pi G a^2\left[\rho_{\rm m}\delta_m + 4\rho_r\Theta_{r,0}\right]$$
$$k^2(\Phi + \Psi) = -32\pi G a^2\rho_r\Theta_{r,2}$$

Here subscript m includes all matter such as baryons and dark matter and subscript r all radiation such as neutrinos and photons. More precisely

$$\rho_{\rm m}\delta_m := \rho_{\rm dm}\delta + \rho_b\delta_{\rm b}; \quad \rho_r\Theta_{r,0} := \rho_\gamma\Theta_0 + \rho_\nu\mathcal{N}_0$$
$$\rho_{\rm m}v_m := \rho_{\rm dm}v + \rho_b v_{\rm b}; \quad \rho_r\Theta_{r,1} := \rho_\gamma\Theta_1 + \rho_\nu\mathcal{N}_1$$

Some of the other components of Einstein's equation are redundant; they add no new information about the evolution of Φ and Ψ. An example is the time-space component, which you can derive in Exercise 5. At times, though, one form of the evolution equation will be more useful than another. For example, one combination (Exercise 6) of these equations leads to an algebraic equation for the potential,

$$k^2\Phi = 4\pi G a^2\left[\rho_{\rm m}\delta_m + 4\rho_r\Theta_{r,0} + \frac{3aH}{k}\left(i\rho_{\rm m}v_m + 4\rho_r\Theta_{r,1}\right)\right]$$

Other components of Einstein's equation contain information not about the scalar perturbations Φ and Ψ, but about vector and tensor perturbations. Scalar, vector, and tensor perturbations are decoupled: each evolves independently of the others. We will see in Chapter 6 that inflation can produce tensor perturbations, so it is important to know what the Einstein equation says about their evolution. We showed that there are two functions which can characterize tensor perturbations, $h_+$and $h_\cdot$; each of these evolves independently and satisfies

$$\ddot{h}_\alpha + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}_\alpha + k^2 h_\alpha = 0$$

where α denotes,$+\cdot$. In an expanding universe, the amplitude of a gravity wave described by Eq. (5.63) falls off once the mode enters the horizon.

15.6.3 On Equilibrium

(???? статфиз подтяну параллельно, по статфизу уже пробелы, потому что эти темы не очень понятны сразу.)

Equilibrium Thermodynamics

Overview of the results (!??!?!???!!?!)

(это важный раздел, он хуже нужного написан.)

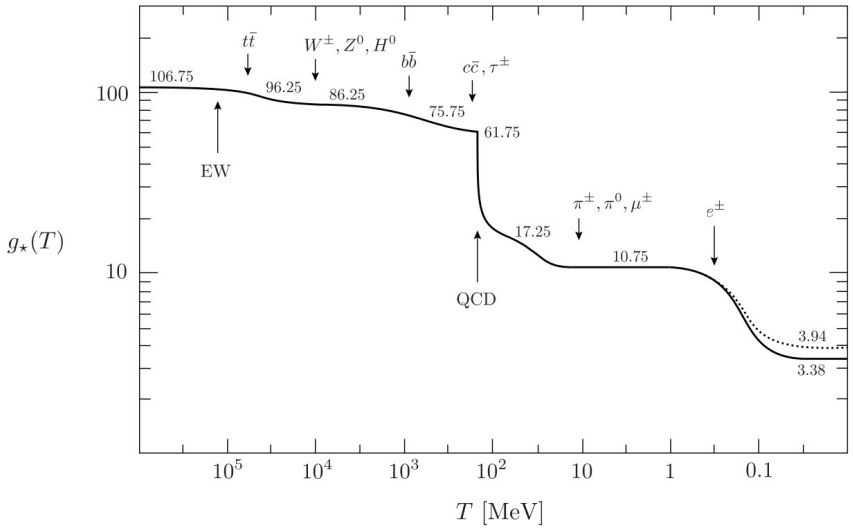


Figure 15.1: Evolution of the number of relativistic degrees of freedom assuming the Standard Model. (????)

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3 p f(p)$$

$$\rho = \frac{g}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3 p f(p) E(p)$$

$$P = \frac{g}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3 p f(p) \frac{p^2}{3E}$$

where $f(p) = \frac{1}{e^{(E(p)-\mu)/T}\pm 1}$

$$\mu_1 + \mu_2 = \mu_3 + \mu_4.$$

$$\mu_{\bar{X}} = -\mu_X,$$

Thermal equilibrium: T is the same.

Densities and Pressure

$$n = \frac{g}{2\pi^2}T^3 I_{\pm}(x), \quad I_{\pm}(x) := \int\limits_0^\infty \mathrm{d}\xi \frac{\xi^2}{\exp\left[\sqrt{\xi^2+x^2}\right]\pm 1}$$

$$\rho = \frac{g}{2\pi^2}T^4 J_{\pm}(x), \quad J_{\pm}(x) := \int\limits_0^\infty \mathrm{d}\xi \frac{\xi^2\sqrt{\xi^2+x^2}}{\exp\left[\sqrt{\xi^2+x^2}\right]\pm 1}$$

Standard integrals for this case: $$\int_0^\infty \mathrm{d}\xi \frac{\xi^n}{e^\xi - 1} = \zeta(n+1)\Gamma(n+1),$$ $$\int_0^\infty \mathrm{d}\xi \xi^n e^{-\xi^2} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+1)\right),$$, where $\zeta(z)$ is the Riemann zeta-function.

Relativistic limit: $x \to 0 (m \ll T)$, the integral in (3.2.31) reduces to $I_\pm(0) = \int_0^\infty \mathrm{d}\xi \frac{\xi^2}{e^\xi \pm 1}$

$$n = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3 \begin{cases} 1 & \text{bosons} \\ \frac{3}{4} & \text{fermions} \end{cases}$$

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} g T^4 \begin{cases} 1 & \text{bosons} \\ \frac{7}{8} & \text{fermions} \end{cases}$$

$$n - \bar{n} = \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty \mathrm{d}p p^2 \left(\frac{1}{e^{(p-\mu)/T} + 1} - \frac{1}{e^{(p+\mu)/T} + 1} \right) = \frac{1}{6\pi^2} g T^3 \left[\pi^2 \left(\frac{\mu}{T}\right) + \left(\frac{\mu}{T}\right)^3 \right]$$

Non-Relativistic Limit: $x \gg 1 (m \gg T)$, $I_\pm(x) \approx \int_0^\infty \mathrm{d}\xi \frac{\xi^2}{e^{\sqrt{\xi^2 + x^2}}} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} x^{3/2} e^{-x}$. (??? не знаю, как эти интегралы взять, потом когда-то подумаю про это)

$$n = g \left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-m/T}$$

$$\rho = mn + \frac{3}{2} nT.$$

$$P = nT \ll \rho = mn.$$

Restoring finite μ in the non-relativistic limit,

$$n = g \left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-(m-\mu)/T}$$

$$n - \bar{n} = 2g \left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-m/T} \operatorname{sh}\left(\frac{\mu}{T}\right)$$

Effective Number of Relativistic Species

Let T be the temperature of the photon gas. The total radiation density is the sum over the energy densities of all relativistic species

$$\rho_r = \sum_i \rho_i = \frac{\pi^2}{30} g_\star(T) T^4,$$

where $g_\star(T)$ is the effective number of relativistic degrees of freedom at the temperature T. The sum over particle species may receive two types of contributions:

- Relativistic species in thermal equilibrium with the photons, $T_i = T \gg m_i$,

$$g_\star^{th}(T) = \sum_{i=b} g_i + \frac{7}{8} \sum_{i=f} g_i.$$

When the temperature drops below the mass m_i of a particle species, it becomes nonrelativistic and is removed from the sum in (3.2.55). Away from mass thresholds, the thermal contribution is independent of temperature.

- Relativistic species that are not in thermal equilibrium with the photons, $T_i \neq T \gg m_i$,

$$g_\star^{dec}(T) = \sum_{i=b} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8}\sum_{i=f} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 .$$

We have allowed for the decoupled species to have different temperatures T_i. This will be relevant for neutrinos after e^+e^-annihilation (see §3.2.4).

$g_b = 28$ photons $(2), W^\pm$and $Z^0(3\cdot 3)$, gluons $(8\cdot 2)$, and Higgs (1) $g_f = 90$ quarks $(6\cdot 12)$, charged leptons $(3\cdot 4)$, and neutrinos $(3\cdot 2)$

$$g_\star = g_b + \frac{7}{8} g_f = 106.75$$

Conservation of Entropy

For $s := S/V$. From $T\ \mathrm{d}S = \mathrm{d}U + P\ \mathrm{d}V$ and $U = \rho V$

$$s = \frac{\rho + P}{T}$$

so

$$s = \sum_i \frac{\rho_i + P_i}{T_i} := \frac{2\pi^2}{45} g_{\star S}(T) T^3,$$

Effective number of degrees of freedom in entropy:

$$g_{\star S}(T) = g_{\star S}^{th}(T) + g_{\star S}^{dec}(T)$$

Note that for species in thermal equilibrium $g_{\star S}^{th}(T) = g_\star^{th}(T)$. However, given that $s_i \propto T_i^3$, for decoupled species we get

$$g_{\star S}^{dec}(T) := \sum_{i=b} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3 + \frac{7}{8}\sum_{i=f} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3 \neq g_\star^{dec}(T)$$

The conservation of entropy has two important consequences:

- It implies that $s \propto a^{-3}$. The number of particles in a comoving volume is therefore proportional to the number density n_i divided by the entropy density

$$N_i := \frac{n_i}{s}.$$

If particles are neither produced nor destroyed, then $n_i \propto a^{-3}$ and N_i is constant. This is case, for example, for the total baryon number after baryogenesis, $n_B/s := (n_b - n_{\bar{b}})/s$.

$$T \propto g_{\star S}^{-1/3} a^{-1}.$$

(???????)

Away from particle mass thresholds $g_{\star S}$ is approximately constant and $T \propto a^{-1}$, as expected. The factor of $g_{\star S}^{-1/3}$ accounts for the fact that whenever a particle species becomes non-relativistic and disappears, its entropy is transferred to the other relativistic species still present in the thermal plasma, causing T to decrease slightly less slowly than a^{-1}. We will see an example in the next section (cf. fig. 3.5).

Substituting $T \propto g_{\star S}^{-1/3} a^{-1}$ into the Friedmann equation

$$H = \frac{1}{a}\frac{da}{dt} \simeq \left(\frac{\rho_r}{3M_{\mathrm{pl}}^2}\right)^{1/2} \simeq \frac{\pi}{3}\left(\frac{g_\star}{10}\right)^{1/2} \frac{T^2}{M_{\mathrm{pl}}},$$

we reproduce the usual result for a radiation dominated universe, $a \propto t^{1/2}$, except that there is a change in the scaling every time $g_{\star S}$ changes. For $T \propto t^{-1/2}$, we can integrate the Friedmann equation and get the temperature as a function of time

$$\frac{T}{1\text{MeV}} \simeq 1.5 g_\star^{-1/4} \left(\frac{1\text{sec}}{t}\right)^{1/2}.$$

It is a useful rule of thumb that the temperature of the universe 1 second after the Big Bang was about 1MeV, and evolved as $t^{-1/2}$ before that.

Neutrino Decoupling

$$\nu_e + \bar{\nu}_e \leftrightarrow e^+ + e^-,$$
$$e^- + \bar{\nu}_e \leftrightarrow e^- + \bar{\nu}_e$$

The cross section for these interactions was estimated in (3.1.9), $\sigma \sim G_F^2 T^2$, and hence it was found that $\Gamma \sim G_F^2 T^5$. As the temperature decreases, the interaction rate drops much more rapidly that the Hubble rate $H \sim T^2/M_{\rm pl}$:

$$\frac{\Gamma}{H} \sim \left(\frac{T}{1\text{MeV}}\right)^3.$$

physical momentum of a particle scales as $p \propto a^{-1}$. It is therefore convenient to define the time-independent combination $q := ap$, so that the neutrino number density is

$$n_\nu \propto a^{-3} \int \mathrm{d}^3 q \frac{1}{\exp\left(q/aT_\nu\right) + 1}.$$

Electron-Positron Annihilation

$$e^+ + e^- \leftrightarrow \gamma + \gamma$$

$$g_{\star S}^{th} = \begin{cases} 2 + \frac{7}{8} \cdot 4 = 5.5 & T \gtrsim m_e \\ 2 & T < m_e \end{cases}$$

Since, in equilibrium, $g_{\star S}^{\rm th} \left(aT_\gamma\right)^3$ remains constant, we find that aT_γ increases after electron-positron annihilation, $T < m_e$, by a factor $(11/4)^{1/3}$, while aT_ν remains the same.

that the temperature of neutrinos is slightly lower than the photon temperature after e^+e^- annihilation,

$$T_\nu = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_\gamma.$$

For $T \ll m_e$, the effective number of relativistic species (in energy density and entropy) therefore is

$$g_\star = 2 + \frac{7}{8} \cdot 2N_{\rm eff} \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} = 3.36,$$
$$g_{\star S} = 2 + \frac{7}{8} \cdot 2N_{\rm eff} \left(\frac{4}{11}\right) = 3.94,$$

where we have introduced the parameter $N_{\rm eff}$ as the effective number of neutrino species in the universe. If neutrinos decoupling was instantaneous then we have $N_{\rm eff} = 3$.

Cosmic Neutrino Background

$$n_\nu = \frac{3}{4} N_{\text{eff}} \cdot \frac{4}{11} n_\gamma$$

$$\rho_\nu = \frac{7}{8} N_{\text{eff}} \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} \rho_\gamma \Rightarrow \Omega_\nu h^2 \approx 1.7 \cdot 10^{-5} \quad (m_\nu = 0)$$

$$\Omega_\nu h^2 \approx \frac{\sum m_{\nu,i}}{94\text{eV}}$$

15.6.4 On Beyond Equilibrium

(тут очень много всего, поэтому отдельный раздел, потом мб про структуру еще подумаю.)

Boltzmann Equation

$$\frac{dn_i}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a} n_i = 0$$

$$\frac{1}{a^3}\frac{d\left(n_i a^3\right)}{dt} = C_i\left[\{n_j\}\right]$$

$$1 + 2 \rightleftarrows 3 + 4,$$

$$\frac{1}{a^3}\frac{d\left(n_1 a^3\right)}{dt} = -\alpha n_1 n_2 + \beta n_3 n_4$$

$$\frac{1}{a^3}\frac{d\left(n_1 a^3\right)}{dt} = -\langle\sigma v\rangle \left[n_1 n_2 - \left(\frac{n_1 n_2}{n_3 n_4}\right)_{\text{eq}} n_3 n_4\right]$$

or with $N_i := n_i/s$

$$\frac{d\ln N_1}{d\ln a} = -\frac{\Gamma_1}{H}\left[1 - \left(\frac{N_1 N_2}{N_3 N_4}\right)_{\text{eq}} \frac{N_3 N_4}{N_1 N_2}\right]$$

where $\Gamma_1 := n_2\langle\sigma v\rangle$.

(?????) For $\Gamma_1 \gg H$, the natural state of the system is chemical equilibrium. Imagine that we start with $N_1 \gg N_1^{\text{eq}}$ (while $N_i \sim N_i^{\text{eq}}, i = 2, 3, 4$). The r.h.s. of (3.3.86) then is negative, particles of type 1 are destroyed and N_1 is reduced towards the equilibrium value N_1^{eq}. Similarly, if $N_1 \ll N_1^{\text{eq}}$, the r.h.s. of (3.3.86) is positive and N_1 is driven towards N_1^{eq}. The same conclusion applies if several species deviate from their equilibrium values. As long as the interaction rates are large, the system quickly relaxes to a steady state where the r.h.s. of (3.3.86) vanishes and the particles assume their equilibrium abundances.

Dark Matter Relics

Freeze-Out

$$X + \bar{X} \leftrightarrow \ell + \bar{\ell}$$

$$\frac{dN_X}{dt} = -s\langle\sigma v\rangle\left[N_X^2 - \left(N_X^{\text{eq}}\right)^2\right]$$

Riccati equation:

$$\frac{dN_X}{dx} = -\frac{\lambda}{x^2}\left[N_X^2 - (N_X^{\rm eq})^2\right], \qquad \lambda := \frac{2\pi^2}{45} g_{\star S} \frac{M_X^3 \langle\sigma v\rangle}{H(M_X)}.$$

(????????????) The final relic abundance, $N_X^\infty := N_X(x=\infty)$, determines the freeze-out density of dark matter. Let us estimate its magnitude as a function of λ. Well after freeze-out, N_X will be much larger than $N_X^{\rm eq}$ (see fig. 3.7). Thus at late times, we can drop $N_X^{\rm eq}$ from the Boltzmann equation.

$$\frac{dN_X}{dx} \simeq -\frac{\lambda N_X^2}{x^2} \quad (x > x_f).$$

Integrating from x_f, to $x=\infty$, we find

$$\frac{1}{N_X^\infty} - \frac{1}{N_X^f} = \frac{\lambda}{x_f}$$

where $N_X^f := N_X(x_f)$. Typically, $N_X^f \gg N_X^\infty$ (see fig. 3.7), so a simple analytic approximation is

$$N_X^\infty \simeq \frac{x_f}{\lambda}$$

WIMP Miracle (??????)

(???? я не знаю, что это, но и не до этого.)

$$\begin{aligned}\Omega_X &:= \frac{\rho_{X,0}}{\rho_{\text{crit},0}} \\ &= \frac{M_X n_{X,0}}{3M_{\rm pl}^2 H_0^2} = \frac{M_X N_{X,0} s_0}{3M_{\rm pl}^2 H_0^2} = M_X N_X^\infty \frac{s_0}{3M_{\rm pl}^2 H_0^2}.\end{aligned}$$

where we have used that the number of WIMPs is conserved after freeze-out, i.e. $N_{X,0} = N_X^\infty$. Substituting $N_X^\infty = x_f/\lambda$ and $s_0 := s(T_0)$, we get

$$\Omega_X = \frac{H(M_X)}{M_X^2} \frac{x_f}{\langle\sigma v\rangle} \frac{g_{\star S}(T_0)}{g_{\star S}(M_X)} \frac{T_0^3}{3M_{\rm pl}^2 H_0^2}$$

where we have used (3.3.92) and (3.2.62). Using (3.2.67) for $H(M_X)$, gives

$$\Omega_X = \frac{\pi}{9} \frac{x_f}{\langle\sigma v\rangle} \left(\frac{g_\star(M_X)}{10}\right)^{1/2} \frac{g_{\star S}(T_0)}{g_{\star S}(M_X)} \frac{T_0^3}{M_{\rm pl}^3 H_0^2}.$$

Finally, we substitute the measured values of T_0 and H_0 and use $g_{\star S}(T_0) = 3.91$ and $g_{\star S}(M_X) = g_\star(M_X)$:

$$\Omega_X h^2 \sim 0.1 \left(\frac{x_f}{10}\right) \left(\frac{10}{g_\star(M_X)}\right)^{1/2} \frac{10^{-8}\text{GeV}^{-2}}{\langle\sigma v\rangle}.$$

This reproduces the observed dark matter density if

$$\sqrt{\langle\sigma v\rangle} \sim 10^{-4}\text{GeV}^{-1} \sim 0.1\sqrt{G_F}.$$

The fact that a thermal relic with a cross section characteristic of the weak interaction gives the right dark matter abundance is called the WIMP miracle.

Recombination

Saha Equilibrium

$$e^- + p^+ \leftrightarrow \mathrm{H} + \gamma$$

Saha equation:

$$\left(\frac{1-X_e}{X_e^2}\right)_{\mathrm{eq}} = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2}\eta \cdot \left(\frac{2\pi T}{m_e}\right)^{3/2} e^{B_{\mathrm{H}}/T}$$

where free electron fraction $X_c := \frac{n_e}{n_b}$, n_b is the baryon density, $\eta := 5.5 \cdot 10^{-10}\,(\Omega_b h^2/0.020)$ is the baryon-to-photon ratio.

Since $T < m_i, i = \{e, p, \mathrm{H}\}$,

$$n_i^{\mathrm{eq}} = g_i \left(\frac{m_i T}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{\mu_i - m_i}{T}\right)$$

$$\mu_p + \mu_c = \mu_{\mathrm{H}}$$

($\mu_\gamma = 0$), after division

$$\left(\frac{n_{\mathrm{H}}}{n_e^2}\right)_{\mathrm{eq}} = \left(\frac{2\pi}{m_e T}\right)^{3/2} e^{B_{\mathrm{H}}/T}$$

here we have taken into account $m_{\mathrm{H}} \approx m_p$, $B_{\mathrm{H}} := m_p + m_c - m_{\mathrm{H}} = 13.6\mathrm{eV}$ and $g_p = g_e = 2$, $g_{\mathrm{H}} = 4$.

$$n_b = \eta n_\gamma = \eta \cdot \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3$$

where $\eta = 5.5 \cdot 10^{-10}\,(\Omega_b h^2/0.020)$ is the baryon-to-photon ratio.

$n_b \approx n_p + n_{\mathrm{H}} = n_c + n_{\mathrm{H}}$ and hence

$$\frac{1-X_e}{X_c^2} = \frac{n_H}{n_e^2} n_b$$

Hydrogen Recombination

$$T_{\mathrm{rec}} \approx 0.3\mathrm{eV} \simeq 3600\ \mathrm{K}.$$

The reason that $T_{\mathrm{rec}} \ll B_{\mathrm{H}} = 13.6\mathrm{eV}$ is that there are very many photons for each hydrogen atom, $\eta \sim 10^{-9} \ll 1$. Even when $T < B_{\mathrm{H}}$, the high-energy tail of the photon distribution contains photons with energy $E > B_{\mathrm{H}}$ so that they can ionize a hydrogen atom.

Using $T_{\mathrm{rec}} = T_0\,(1 + z_{\mathrm{rec}})$, with $T_0 = 2.7$ K, gives the redshift of recombination,

$$z_{rec} \approx 1320.$$

Since matter-radiation equality is at $z_{eq} \simeq 3500$, we conclude that recombination occurred in the matter-dominated era. Using $a(t) = (t/t_0)^{2/3}$, we obtain an estimate for the time of recombination

$$t_{rec} = \frac{t_0}{(1+z_{rec})^{3/2}} \sim 290000\mathrm{yrs}$$

Photon Decoupling

$$e^- + \gamma \leftrightarrow e^- + \gamma$$

with an interaction rate given by

$$\Gamma_\gamma \approx n_e \sigma_T$$

where $\sigma_T \approx 2 \cdot 10^{-3}\text{MeV}^{-2}$ is the Thomson cross section. Since $\Gamma_\gamma \propto n_e$, the interaction rate decreases as the density of free electrons drops. Photons and electrons decouple roughly when the interaction rate becomes smaller than the expansion rate,

$$\Gamma_\gamma \left(T_{dec}\right) \sim H \left(T_{dec}\right)$$

Writing

$$\Gamma_\gamma \left(T_{dec}\right) = n_b X_e \left(T_{dec}\right) \sigma_T = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \eta \sigma_T X_e \left(T_{dec}\right) T_{dec}^3$$
$$H \left(T_{dec}\right) = H_0 \sqrt{\Omega_m} \left(\frac{T_{dec}}{T_0}\right)^{3/2}.$$

we get

$$X_e \left(T_{dec}\right) T_{dec}^{3/2} \sim \frac{\pi^2}{2\zeta(3)} \frac{H_0 \sqrt{\Omega_m}}{\eta \sigma_T T_0^{3/2}}.$$

Using the Saha equation for $X_e \left(T_{dec}\right)$, we find

$$T_{dec} \sim 0.27\text{eV}$$

$$\frac{1}{a^3} \frac{d\left(n_e a^3\right)}{dt} = -\langle \sigma v \rangle \left[n_e^2 - \left(n_e^{\text{eq}}\right)^2\right]$$

$$\langle \sigma v \rangle \simeq \sigma_T \left(\frac{B_{\text{H}}}{T}\right)^{1/2}$$

Writing $n_e = n_b X_e$ and using that $n_b a^3 = \text{const.}$, we find

$$\frac{dX_e}{dx} = -\frac{\lambda}{x^2} \left[X_e^2 - \left(X_e^{\text{eq}}\right)^2\right]$$

where $x := B_{\text{H}}/T$. We have used the fact that the universe is matter-dominated at recombination and defined

$$\lambda := \left[\frac{n_b \langle \sigma v \rangle}{xH}\right]_{x=1} = 3.9 \cdot 10^3 \left(\frac{\Omega_b h}{0.03}\right)$$

Notice that eq. (3.3.123) is identical to eq. (3.3.91)-the Riccati equation for dark matter freezeout. We can therefore immediately write down the electron freeze-out abundance, cf. eq. (3.3.95),

$$X_e^\infty \simeq \frac{x_f}{\lambda} = 0.9 \cdot 10^{-3} \left(\frac{x_f}{x_{rec}}\right) \left(\frac{0.03}{\Omega_b h}\right).$$

Assuming that freeze-out occurs close to the time of recombination, $x_{rec} \approx 45$, we capture the relic electron abundance pretty well (see fig. 3.8).

Using $\Gamma_e \left(T_f\right) \sim H \left(T_f\right)$,

$$X_e \left(T_f\right) T_f = \frac{\pi^2}{2\zeta(3)} \frac{H_0 \sqrt{\Omega_m}}{\eta \sigma_T T_0^{3/2} B_{\text{H}}^{1/2}}$$

Use the Saha equation to show that $T_f \sim 0.25\text{eV}$ and hence $x_f \sim 54$.

Big Bang Nucleosynthesis (????)

(не, это я опускаю, ничего не понял вообще)

$$\frac{n_{\rm He}}{n_{\rm H}} \sim \frac{1}{16}$$

1. No elements heavier than helium. Essentially no elements heavier than helium are produced at appreciable levels. So the only nuclei that we need to track are hydrogen and helium, and their isotopes: deuterium, tritium, and ^{3}He.

2. Only neutrons and protons above 0.1MeV. Above $T \approx 0.1$MeV only free protons and neutrons exist, while other light nuclei haven't been formed yet. Therefore, we can first solve for the neutron/proton ratio and then use this abundance as input for the synthesis of deuterium, helium, etc.

Let us demonstrate that we can indeed restrict our attention to neutrons and protons above 0.1MeV. In order to do this, we compare the equilibrium abundances of the different nuclei:
- First, we determine the relative abundances of neutrons and protons. In the early universe, neutrons and protons are coupled by weak interactions, e.g. β-decay and inverse β-decay

$$n + \nu_e \leftrightarrow p^+ + e^-,$$
$$n + e^+ \leftrightarrow p^+ + \bar{\nu}_e.$$

Let us assume that the chemical potentials of electrons and neutrinos are negligibly small, so that $\mu_n = \mu_p$. Using (3.3.101) for $n_i^{\rm eq}$, we then have

$$\left(\frac{n_n}{n_p}\right)_{\rm eq} = \left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{3/2} e^{-(m_n - m_p)/T}$$

The small difference between the proton and neutron mass can be ignored in the first factor, but crucially has to be kept in the exponential. Hence, we find

$$\left(\frac{n_n}{n_p}\right)_{\rm eq} = e^{-\mathcal{Q}/T}$$

where $\mathcal{Q} := m_n - m_p = 1.30$MeV. For $T \gg 1$MeV, there are therefore as many neutrons as protons. However, for $T < 1$MeV, the neutron fraction gets smaller. If the weak interactions would operate efficiently enough to maintain equilibrium indefinitely, then the neutron abundance would drop to zero. Luckily, in the real world the weak interactions are not so efficient.
- Next, we consider deuterium (an isotope of hydrogen with one proton and one neutron). This is produced in the following reaction

$$n + p^+ \leftrightarrow {\rm D} + \gamma.$$

Since $\mu_\gamma = 0$, we have $\mu_n + \mu_p = \mu_{\rm D}$. To remove the dependence on the chemical potentials we consider

$$\left(\frac{n_{\rm D}}{n_n n_p}\right)_{\rm eq} = \frac{3}{4}\left(\frac{m_{\rm D}}{m_n m_p}\frac{2\pi}{T}\right)^{3/2} e^{-(m_{\rm D} - m_n - m_p)/T},$$

where, as before, we have used (3.3.101) for $n_i^{\rm eq}$ (with $g_{\rm D} = 3$ and $g_p = g_n = 2$). In the prefactor, $m_{\rm D}$ can be set equal to $2m_n \approx 2m_p \approx 1.9$GeV, but in the exponential the small difference between $m_n + m_p$ and $m_{\rm D}$ is crucial: it is the binding energy of deuterium

$$B_{\rm D} := m_n + m_p - m_{\rm D} = 2.22{\rm MeV}$$

Therefore, as long as chemical equilibrium holds the deuterium-to-proton ratio is

$$\left(\frac{n_{\rm D}}{n_p}\right)_{\rm eq} = \frac{3}{4} n_n^{\rm eq}\left(\frac{4\pi}{m_p T}\right)^{3/2} e^{B_{\rm D}/T}.$$

To get an order of magnitude estimate, we approximate the neutron density by the baryon density and write this in terms of the photon temperature and the baryon-to-photon ratio,

$$n_n \sim n_b = \eta n_\gamma = \eta \cdot \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3.$$

Eq. (3.3.134) then becomes

$$\left(\frac{n_{\rm D}}{n_p}\right)_{\rm eq} \approx \eta \left(\frac{T}{m_p}\right)^{3/2} e^{B_{\rm D}/T}.$$

Steps Step 1: Neutron Freeze-Out -> Step 2: Neutron Decay -> Step 3: Helium Fusion (????)

Step 1: Neutron Freeze-Out

$$X_n := \frac{n_n}{n_n + n_p}$$

$$X_n^{\rm eq}(T) = \frac{e^{-\mathcal{Q}/T}}{1 + e^{-\mathcal{Q}/T}}$$

$$X_n^{\rm eq}(0.8{\rm MeV}) = 0.17.$$

$$X_n^\infty \sim X_n^{\rm eq}(0.8{\rm MeV}) \sim \frac{1}{6}$$

Step 2: Neutron Decay

$$X_n(t) = X_n^\infty e^{-t/\tau_n} = \frac{1}{6} e^{-t/\tau_n}$$

Step 3: Helium Fusion

$$n + p^+ \leftrightarrow {\rm D} + \gamma.$$

$$\begin{gathered} {\rm D} + p^+ \leftrightarrow {}^3{\rm He} + \gamma, \\ {\rm D} + {}^3{\rm He} \leftrightarrow {}^4{\rm He} + p^+. \end{gathered}$$

$$T_{\rm nuc} \sim 0.06{\rm MeV}$$

with $g_\star = 3.38$ translates into

$$t_{\rm nuc} = 120{\rm sec} \left(\frac{0.1{\rm MeV}}{T_{\rm nuc}}\right)^2 \sim 330{\rm sec}$$

$$X_n\left(t_{\rm nuc}\right) \sim \frac{1}{8}$$

$$\begin{gathered} \frac{n_{\rm He}}{n_{\rm H}} = \frac{n_{\rm He}}{n_p} \simeq \frac{\frac{1}{2} X_n\left(t_{\rm nuc}\right)}{1 - X_n\left(t_{\rm nuc}\right)} \sim \frac{1}{2} X_n\left(t_{\rm nuc}\right) \sim \frac{1}{16}, \\ \frac{4 n_{\rm He}}{n_{\rm H}} \sim \frac{1}{4} \end{gathered}$$

BBN as a Probe of BSM Physics

(не, это я опускаю, ничего не понял вообще)

- $g_\star$: the number of relativistic degrees of freedom determines the Hubble parameter during the radiation era, $H \propto g_\star^{1/2}$, and hence affects the freeze-out temperature

$$G_F^2 T_f^5 \sim \sqrt{G_N g_\star} T_f^2 \quad \to \quad T_f \propto g_\star^{1/6}$$

Increasing $g_\star$ increases T_f, which increases the n/p ratio at freeze-out and hence increases the final helium abundance.

- τ_n : a large neutron lifetime would reduce the amount of neutron decay after freeze-out and therefore would increase the final helium abundance.

- $\mathcal{Q}$: a larger mass difference between neutrons and protons would decrease the n/p ratio at freeze-out and therefore would decrease the final helium abundance.

- η: the amount of helium increases with increasing η as nucleosythesis starts earlier for larger baryon density.

- G_N: increasing the strength of gravity would increase the freeze-out temperature, $T_f \propto G_N^{1/6}$, and hence would increase the final helium abundance.

- G_F: increasing the weak force would decrease the freeze-out temperature, $T_f \propto G_F^{-2/3}$, and hence would decrease the final helium abundance.

15.6.5 On other topics in cosmology

15.6.6 Some Special Models of Cosmology

(other even more exotic models are here)

15.7 High-Energy Phenomena of Gravity (???)

(??? main overview of them is here)

О гравитационном взаимодействии света по Зи (или эффект Толмана-Эренфеста-Подольского)

Такого эффекта нет и о нем можно забыть, однако теоретически интересно понять, как же такое описать и как обосновать отсутствие его?

(?? да????)

$$k_1 \cdot p_1 \to k_1 \cdot k_1 = 0, \quad k_1 \cdot p_2 = k_1 \cdot (k_1 + k_2 - p_1) \to k_1 \cdot k_2$$

Получаем амплитуду $\sim (k_1 \cdot k_2)(p_1 \cdot p_2)/q^2$. Рис. VIII.1.2 Если направления k_1 и k_2 совпадают, то $k_1 \cdot k_2 \propto k_1 \cdot k_1 = 0$. Два фотона, движущихся в одном направлении, не взаимодействуют гравитационно.

$$k_1 \cdot p_1 \to k_1 \cdot k_1 = 0, \quad k_1 \cdot p_2 = k_1 \cdot (k_1 + k_2 - p_1) \to k_1 \cdot k_2$$

Получаем амплитуду $\sim (k_1 \cdot k_2)(p_1 \cdot p_2)/q^2$. Рис. VIII.1.2 Если направления k_1 и k_2 совпадают, то $k_1 \cdot k_2 \propto k_1 \cdot k_1 = 0$. Два фотона, движущихся в одном направлении, не взаимодействуют гравитационно.

Еще один вывод:

Тензор энергии импульса $T^{\mu\nu}$ светового луча, движущегося в x-направлении, имеет четыре ненулевые компоненты: плотности энергии T^{00}, затем $T^{0x} = T^{00}$ вследствие того, что фотоны несут одну энергию и импульс, затем $T^{x0} = T^{0x}$ вследствие симметрии и, наконец, $T^{xx} = T^{00}$ вследствие того, что тензор энергии импульса электромагнитного поля дается матрицей с нулевым следом (глава I.10). Даже не решая уравнения Эйнштейна в пределе слабого поля (уравнение (13)), мы знаем, что $h^{00} = h^{0x} = h^{x0} = h^{xx} \equiv h$. Вокруг светового луча задается метрика $g_{00} = 1 + h, g_{0x} = g_{x0} = -h$ и $g_{xx} = -1 + h$ (и, естественно, $g_{yy} = g_{zz} = -1$; остальные компоненты равны нулю). Рассмотрим фотон, движущийся

параллельно световому лучу. Его мировая линия определяется выражением (см. главу I.10):

$$\frac{d^2x^\rho}{d\zeta^2} = -\Gamma^\rho_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\zeta}\frac{dx^\nu}{d\zeta}.$$

Вычислим $d^2y/d\zeta^2$ и $d^2z/d\zeta^2$ при условии $(dy/d\zeta), (dz/d\zeta) \ll (dt/d\zeta), (dx/d\zeta)$. Используя (3), находим (μ, ν принимают значения только $0, x$)

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{d\zeta^2} =& \frac{1}{2}\left(\partial_\nu g_{y\mu} + \partial_\mu g_{y\nu} - \partial_y g_{mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\zeta}\frac{dx^\nu}{d\zeta}\right) = \\ &= -\frac{1}{2}\left(\partial_y h\right)\left[\left(\frac{dt}{d\zeta}\right)^2 + \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^2 - 2\frac{dt}{d\zeta}\frac{dx}{d\zeta}\right] = -\frac{1}{2}\left(\partial_y h\right)\left(\frac{dt}{d\zeta} - \frac{dx}{d\zeta}\right)^2\end{aligned}$$

Для фотона, движущегося в одном направлении с лучом света, $dt = dx$ и $d^2y/d\zeta^2 = d^2z/d\zeta^2 = 0$. Мы снова получили эффект Толмана-Эренфеста-Подольского. Обратите внимание, что мы не вычисляли при этом h.

Если вы сомневаетесь в справедливости $dt = dx$, то знайте, что условие $ds = 0$ для луча света, падающего в направлении x, сводится к виду $(1+h)dt^2 - 2hdtdx$ - $-(1-h)dx^2 = 0$. Делением на dt^2 получаем $-(1+h) + 2hv + (1-h)v^2 = 0$, где $v \equiv dx/dt$. У квадратного уравнения два корня $v = \mp(1 \pm h)/(a-h)$. Отрицательный корень дает $v = 1$, поэтому для фотона, движущегося в одном направлении с лучом света, $dx/dt = 1$. Положительный корень дает $v = -(1+ +h)/(1-h)$, что соответствует случаю, когда фотон движется в противоположном направлении.

15.8 Gravitational real and hypothetical inventions in a nutshell

15.8.1 Warp drive

Alcubierre drive

(см вики, пока не занимаюсь этим, не до этого, все равно ничего скорее всего пока не работает. Но умные, серьезные люди этим занимаются)

Part VI
Basics of Cosmology

Обсудим достаточные для ориентации в космологии её основы, укажем дальнейшие её развития.

(пока что пишу в космологии про это, потом буду сюда выгружать суть. Уже в целом почти и готов, немного тренировок еще остается, но в целом понятно, что там происходит, скоро добавлю сюда тоже теорию.)

16 General Ideas of Cosmology

Обсудим общие вопросы космологии.
(тут много их может быть.)

16.0.1 What is a Universe?

(??? discuss it)

16.0.2 Homogeneity of the Universe

(??? discuss it)

16.0.3 Features of Laws of Physics at the Scale of the Universe (???)

(??? discuss them)

16.0.4 Is Cosmology a Science?

(write that Kant's ideas, a very not trivial question)

17 Typical Models of Cosmology

(!!! see note on cosmology, it is already written there!!!)

18 Other about Cosmology

(section about special models)

18.1 Other Properties of the Universe

(тут не такие важные, но интересные очень свойства. Мб потом строчками укажу в 1й части, пока это не актуально.)

18.1.1 Number of Particles in the Universe

Количество частиц во всей Вселенной

это прикольная глава, мы часто используем такие сравнения из общего видения мира, чтобы сказать, что что-то уж слишком большое.

и так что пройдусь по списку тем, которые следует посчитать и потому это часто в прикольном стиле диалогов можно использовать

сколько частиц во вселенной? (говорят, более 10^100) и как посчитать?

Количество частиц в видимой области Вселенной

хз, но этот популярная вещь для сравнения.

Видимая область Вселенной

18.1.2 What Is on the Edge of the Universe?

(no one knows, so most likely here I'll write a lot that no one has any idea of it)

18.2 Basics of Quantum Cosmology

(??? see a special note about it)

18.3 Special Cosmological Phenomena and Paradoxes

(???)

Part VII
Numerical Relativity

19 Phantom: A smoothed particle hydrodynamics and magnetohydrodynamics code for astrophysics

Abstract

We present PHANTOM, a fast, parallel, modular and low-memory smoothed particle hydrodynamics and magnetohydrodynamics code developed over the last decade for astrophysical applications in three dimensions. The code has been developed with a focus on stellar, galactic, planetary and high energy astrophysics and has already been used widely for studies of accretion discs and turbulence, from the birth of planets to how black holes accrete. Here we describe and test the core algorithms as well as modules for magnetohydrodynamics, self-gravity, sink particles, dust-gas mixtures, H_2 chemistry, physical viscosity, external forces including numerous galactic potentials, Lense-Thirring precession, Poynting-Robertson drag and stochastic turbulent driving. PHANTOM is hereby made publicly available.

19.1 Introduction

Numerical simulations are the 'third pillar' of astrophysics, standing alongside observations and analytic theory. Since it is difficult to perform laboratory experiments in the relevant physical regimes and over the correct range of length and time-scales involved in most astrophysical problems, we turn instead to 'numerical experiments' in the computer for understanding and insight. As algorithms and simulation codes become ever more sophisticated, the public availability of simulation codes has become crucial to ensure that these experiments can be both verified and reproduced.

PHANTOM is a smoothed particle hydrodynamics (SPH) code developed over the last decade. It has been used widely for studies of turbulence Kitsionas et al. (2009); Price & Federrath (2010); Price et al. (2011), accretion Lodato & Price (2010); Nixon et al. (2012a); Rosotti et al. (2012), star formation including non-ideal magnetohydrodynamics Wurster et al. (2016, 2017), star cluster formation Liptai et al. (2017), and for studies of the Galaxy Pettitt et al. (2014); Dobbs et al. (2016) as well as for simulating dust-gas mixtures Dipierro et al. (2015); Ragusa et al. (2017); Tricco et al. (2017). Although the initial applications and some details of the basic algorithm were described in Price & Federrath (2010), Lodato & Price (2010) and Price (2012a), the code itself has never been described in detail and, until now, has remained closed-source.

One of the initial design goals of PHANTOM was to have a low memory footprint. A secondary motivation was the need for a public SPH code that is not primarily focused on cosmology, as in the highly successful GADGET code Springel et al. (2001); Springel (2005). The needs of different communities produce rather different outcomes in the code. For cosmology, the main focus is on simulating the gravitational collapse of dark matter in large volumes of the universe, with gas having only a secondary effect. This is reflected in the ability of the public GADGET-2 code to scale to exceedingly large numbers of dark matter particles, yet neglecting elements of the core SPH algorithm that are essential for stellar and planetary problems, such as the Morris & Monaghan (1997) artificial viscosity switch (c.f. the debate between Bauer & Springel (2012) and Price (2012b)), the ability to use a spatially variable gravitational force softening Bate & Burkert (1997); Price & Monaghan (2007) or any kind of artificial conductivity, necessary for the correct treatment of contact discontinuities Chow & Monaghan (1997); Price & Monaghan (2005); Rosswog & Price (2007); Price (2008). Almost all of these have since been implemented in development versions of GADGET-3 (e.g. Iannuzzi & Dolag (2011); Beck et al. (2016); see recent comparison project by Sembolini et al. (2016)) but remain unavailable or unused in the public version. Likewise, the implementation of dust, non-ideal MHD and other physics relevant to star and planet formation is unlikely to be high priority in a code designed for studying cosmology or galaxy formation.

Similarly, the SPHNG code Benz et al. (1990); Bate (1995) has been a workhorse for our group for simulations of star formation Price & Bate (2007, 2009); Price et al. (2012); Lewis et al. (2015) and accretion discs Lodato & Rice (2004); Cossins et al. (2009), contains a rich array of physics necessary for star and planet formation including all of the above algorithms, but the legacy nature of the code makes it difficult to modify or debug and there are no plans to make it public.

GASOLINE Wadsley et al. (2004) is another code that has been widely and successfully used for galaxy formation simulations, with its successor, GASOLINE 2 Wadsley et al. (2017), recently publicly released. Hubber et al. (2011) have developed SEREN with similar goals to PHANTOM, focused on star cluster simulations. SEREN thus presents more advanced N-body algorithms compared to what is in PHANTOM but does not yet include magnetic fields, dust or H_2 chemistry.

A third motivation was the need to distinguish between the 'high performance' code used for 3D simulations from simpler codes used to develop and test algorithms, such as our already-public NDSPMHD code Price (2012a). PHANTOM is designed to 'take what works and make it fast', rather than containing options for every possible variation on the SPH algorithm. Obsolete options are actively deleted.

The initial release of PHANTOM has been developed with a focus on stellar, planetary and Galactic astrophysics as well as accretion discs. In this first paper, coinciding with the first stable public release, we describe and validate the core algorithms as well as some example applications. Various novel aspects and optimisation strategies are also presented. This paper is an attempt to document in detail what is currently available in the code, which include modules for magnetohydrodynamics, dust-gas mixtures, self-gravity and a range of other physics. The paper is also designed to serve as guide to the correct use of the various algorithms. Stable releases of PHANTOM are posted on the web[3], while the development version and wiki documentation are available on the BITBUCKET platform[4].

The paper is organised as follows: We describe the numerical methods in Section 19.2 with corresponding numerical tests in Section 19.5. We cover SPH basics (§19.2.1), our implementation of hydrodynamics (§19.2.2; §19.5.1), the timestepping algorithm (§19.2.3), external forces (§19.2.4, §19.5.2), turbulent forcing (§19.2.5, §19.6.1), accretion disc viscosity (§19.2.6, §19.5.3), Navier-Stokes viscosity (§19.2.7, §19.5.4), sink particles (§19.2.8, §19.5.5), stellar physics (§19.2.9), MHD (§19.2.10, §19.5.6), non-ideal MHD (§19.2.11, §19.5.7), self-gravity (§19.2.12, §19.5.8), dust-gas mixtures (§19.2.13, §19.5.9), ISM chemistry and cooling (§19.2.14, §19.5.10) and particle injection (§19.2.15). We present the algorithms for generating initial conditions in Section 19.3. Our approach to software engineering is described in Section 19.4. We give five examples of recent applications highlighting different aspects of PHANTOM in Section 19.6. We summarise in Section 19.7.

19.2 Numerical method

PHANTOM is based on the Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) technique, invented by Lucy (1977) and Gingold & Monaghan (1977) and the subject of numerous reviews Benz (1990); Monaghan (1992, 2005, 2012); Rosswog (2009); Springel (2010); Price (2012a).

In the following we adopt the convention that a, b and c refer to particle indices; i, j and k refer to vector or tensor indices and n and m refer to indexing of nodes in the treecode.

19.2.1 Fundamentals

Lagrangian hydrodynamics

SPH solves the equations of hydrodynamics in Lagrangian form. The fluid is discretised onto a set of 'particles' of mass m that are moved with the local fluid velocity $\boldsymbol{v}$. Hence the

[3] https://phantomsph.bitbucket.io/

[4] https://bitbucket.org/danielprice/phantom

two basic equations common to all physics in PHANTOM are

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}, \tag{19.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\rho(\nabla \cdot \boldsymbol{v}), \tag{19.2}$$

where $\boldsymbol{r}$ is the particle position and ρ is the density. These equations use the Lagrangian time derivative, $\mathrm{d}/\mathrm{d}t \equiv \partial/\partial t + \boldsymbol{v} \cdot \nabla$, and are the Lagrangian update of the particle position and the continuity equation (expressing the conservation of mass), respectively.

Conservation of mass in SPH

The density is computed in PHANTOM using the usual SPH density sum,

$$\rho_a = \sum_b m_b W(|\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b|, h_a), \tag{19.3}$$

where a and b are particle labels, m is the mass of the particle, W is the smoothing kernel, h is the smoothing length and the sum is over neighbouring particles (i.e. those within $R_{\rm kern}h$, where $R_{\rm kern}$ is the dimensionless cutoff radius of the smoothing kernel). Taking the Lagrangian time derivative of (19.3), one obtains the discrete form of (19.2) in SPH

$$\frac{\mathrm{d}\rho_a}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\Omega_a}\sum_b m_b(\boldsymbol{v}_a - \boldsymbol{v}_b)\cdot\nabla_a W_{ab}(h_a), \tag{19.4}$$

where $W_{ab}(h_a) \equiv W(|\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b|, h_a)$ and Ω_a is a term related to the gradient of the smoothing length Springel & Hernquist (2002); Monaghan (2002) given by

$$\Omega_a \equiv 1 - \frac{\partial h_a}{\partial \rho_a}\sum_b m_b \frac{\partial W_{ab}(h_a)}{\partial h_a}. \tag{19.5}$$

Equation (19.4) is not used directly to compute the density in PHANTOM, since evaluating (19.3) provides a time-independent solution to (19.2) (see e.g. Monaghan (1992); Price (2012a) for details). The time-dependent version (19.4) is equivalent to (19.3) up to a boundary term Price (2008) but is only used in PHANTOM to predict the smoothing length at the next timestep in order to reduce the number of iterations required to evaluate the density (see below).

Since (19.3), (19.4) and (19.5) all depend on the kernel evaluated on neighbours within $R_{\rm kern}$ times h_a, all three of these summations may be computed simultaneously using a single loop over the same set of neighbours. Details of the neighbour finding procedure are given in Section 19.2.1, below.

Setting the smoothing length

The smoothing length itself is specified as a function of the particle number density, n, via

$$h_a = h_{\rm fact} n_a^{-1/3} = h_{\rm fact}\left(\frac{m_a}{\rho_a}\right)^{1/3}, \tag{19.6}$$

where $h_{\rm fact}$ is the proportionality factor specifying the smoothing length in terms of the mean local particle spacing and the second equality holds only for equal mass particles, which are enforced in PHANTOM. The restriction to equal mass particles means that the resolution strictly follows mass, which may be restrictive for problems involving large density contrasts Hutchison et al. (2016). However, our view is that the potential pitfalls of unequal mass particles Monaghan & Price (2006) are currently too great to allow for a robust implementation in a public code.

As described in Price (2012a), the proportionality constant $h_{\rm fact}$ can be related to the mean neighbour number according to

$$\overline{N}_{\rm neigh} = \frac{4}{3}\pi(R_{\rm kern}h_{\rm fact})^3, \tag{19.7}$$

however this is only equal to the *actual* neighbour number for particles in a uniform density distribution (more specifically, for a density distribution with no second derivative), meaning that the actual neighbour number varies. The default setting for $h_{\rm fact}$ is 1.2, corresponding to an average of 57.9 neighbours for a kernel truncated at $2h$ (i.e. for $R_{\rm kern} = 2$) in three dimensions. Table 2 lists the settings recommended for different choices of kernel. The derivative required in (19.5) is given by

$$\frac{\partial h_a}{\partial \rho_a} = -\frac{3h_a}{\rho_a}. \tag{19.8}$$

Iterations for h and ρ

The mutual dependence of ρ and h means that a rootfinding procedure is necessary to solve both (19.3) and (19.6) simultaneously. The procedure implemented in PHANTOM follows Price & Monaghan (2004b) and Price & Monaghan (2007), solving, for each particle, the equation

$$f(h_a) = \rho_{\rm sum}(h_a) - \rho(h_a) = 0, \tag{19.9}$$

where $\rho_{\rm sum}$ is the density computed from (19.3) and

$$\rho(h_a) = m_a(h_{\rm fact}/h_a)^3, \tag{19.10}$$

from (19.6). Equation (19.9) is solved with Newton-Raphson iterations,

$$h_{a,\rm new} = h_a - \frac{f(h_a)}{f'(h_a)}, \tag{19.11}$$

where the derivative is given by

$$f'(h_a) = \sum_b m_b \frac{\partial W_{ab}(h_a)}{\partial h_a} - \frac{\partial \rho_a}{\partial h_a} = -\frac{3\rho_a}{h_a}\Omega_a. \tag{19.12}$$

The iterations proceed until $|h_{a,\rm new} - h_a|/h_{a,0} < \epsilon_h$, where $h_{a,0}$ is the smoothing length of particle a at the start of the iteration procedure and ϵ_h is the tolerance. The convergence with Newton-Raphson is fast, with a quadratic reduction in the error at each iteration, meaning that no more than 2–3 iterations are required even with a rapidly changing density field. We avoid further iterations by predicting the smoothing length from the previous timestep according to

$$h_a^0 = h_a + \Delta t \frac{{\rm d}h_a}{{\rm d}t} = h_a + \Delta t \frac{\partial h_a}{\partial \rho_a}\frac{{\rm d}\rho_a}{{\rm d}t}, \tag{19.13}$$

where ${\rm d}\rho_a/{\rm d}t$ is evaluated from (19.4).

Since h and ρ are mutually dependent, we store only the smoothing length, from which the density can be obtained at any time via a function call evaluating $\rho(h)$. The default value of ϵ_h is 10^{-4} so that h and ρ can be used interchangeably. Setting a small tolerance does not significantly change the computational cost, as the iterations quickly fall below a tolerance of 'one neighbour' according to (19.7), so any iterations beyond this refer to loops over the same set of neighbours which can be efficiently cached. However, it is important that the tolerance may be enforced to arbitrary precision rather than being an integer as implemented in the public version of GADGET, since (19.9) expresses a mathematical relationship between h and ρ that is assumed throughout the derivation of the SPH algorithm Price (2012a). The precision to which this is enforced places a lower limit on the total energy conservation. Fortunately floating point neighbour numbers are now default in most GADGET-3 variants also.

Kernel functions

We write the kernel function in the form

$$W_{ab}(r,h) \equiv \frac{C_{\rm norm}}{h^3} f(q), \tag{19.14}$$

where $C_{\rm norm}$ is a normalisation constant, the factor of h^3 gives the dimensions of inverse volume and $f(q)$ is a dimensionless function of $q \equiv |\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b|/h$. Various relations for kernels in this form are given in Morris (1996a) and in Appendix B of Price (2010). Those used in PHANTOM are the kernel gradient

$$\nabla_a W_{ab} = \hat{\boldsymbol{r}}_{ab} F_{ab}, \text{ where } F_{ab} \equiv \frac{C_{\rm norm}}{h^4} f'(q), \tag{19.15}$$

and the derivative of the kernel with respect to h,

$$\frac{\partial W_{ab}(r,h)}{\partial h} = -\frac{C_{\rm norm}}{h^4}\left[3f(q) + qf'(q)\right]. \tag{19.16}$$

Notice that the $\partial W/\partial h$ term in particular can be evaluated simply from the functions needed to compute the density and kernel gradient and hence does not need to be derived separately if a different kernel is used.

Choice of smoothing kernel

The default kernel function in SPH for the last 30 years (since Monaghan & Lattanzio (1985)) has been the M_4 cubic spline from the Schoenberg (1946) B-spline family, given by

$$f(q) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{4}q^3, & 0 \le q < 1; \\ \frac{1}{4}(2-q)^3, & 1 \le q < 2; \\ 0. & q \ge 2, \end{cases} \tag{19.17}$$

where the normalisation constant $C_{\rm norm} = 1/\pi$ in 3D and the compact support of the function implies that $R_{\rm kern} = 2$. While the cubic spline kernel is satisfactory for many applications, it is not always the best choice. Most SPH kernels are based on approximating the Gaussian, but with compact support to avoid the $\mathcal{O}(N^2)$ computational cost. Convergence in SPH is guaranteed to be second order ($\propto h^2$) to the degree that the finite summations over neighbouring particles approximate integrals Monaghan (1992, 2005); Price (2012a). Hence the choice of kernel and the effect that a given kernel has on the particle distribution are important considerations.

In general, more accurate results will be obtained with a kernel with a larger compact support radius, since it will better approximate the Gaussian which has excellent convergence and stability properties Morris (1996a); Price (2012a); Dehnen & Aly (2012). However, care is required. One should not simply increase $h_{\rm fact}$ for the cubic spline kernel because even though this implies more neighbours [via (19.7)], it increases the resolution length. For the B-splines it also leads to the onset of the 'pairing instability' where the particle distribution becomes unstable to transverse modes, leading to particles forming close pairs Thomas & Couchman (1992); Morris (1996a,b); Børve et al. (2004); Price (2012a); Dehnen & Aly (2012). This is the motivation of our default choice of $h_{\rm fact} = 1.2$ for the cubic spline kernel, since it is just short of the maximum neighbour number that can be used while remaining stable to the pairing instability.

A better approach to reducing kernel bias is to keep the same resolution length[5] but to use a kernel that has a larger compact support radius. The traditional approach Morris (1996a,b);

[5]This leads to the question of what is the appropriate definition of the 'smoothing length' to use when comparing kernels with different compact support radii. Recently it has been shown convincingly by Dehnen & Aly (2012) and Violeau & Leroy (2014) that the resolution length in SPH is proportional to the standard deviation of W. Hence the Gaussian has the same resolution length as the M_6 quintic with compact support radius of $3h$ with $h_{\rm fact} = 1.2$. Setting the number of neighbours, though related, is not a good way of specifying the resolution length.

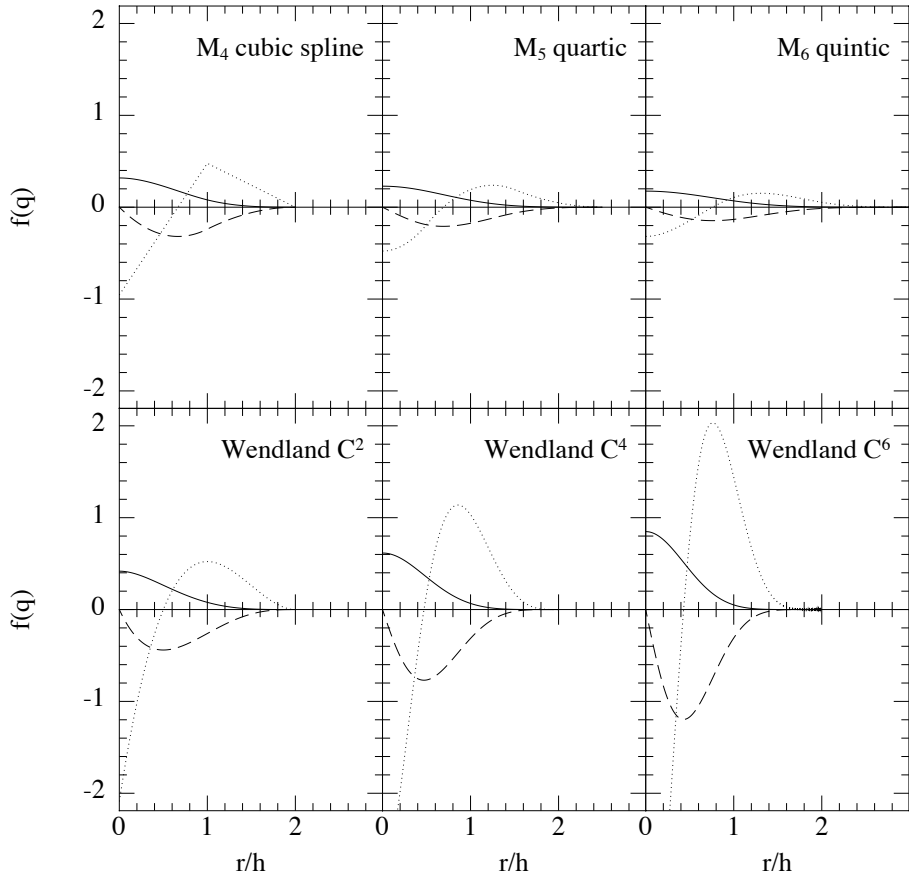


Figure 19.1: Smoothing kernels available in PHANTOM (solid lines) together with their first (dashed lines) and second (dotted lines) derivatives. Wendland kernels in PHANTOM (bottom row) are given compact support radii of 2, whereas the B-spline kernels (top row) adopt the traditional practice where the support radius increases by 0.5. Thus, use of alternative kernels requires adjustment of $h_{\rm fact}$, the ratio of smoothing length to particle spacing (see Table 2).

Kernel	$R_{\rm kern}$	σ^2/h^2	σ/h	$h_{\rm fact}$	$h^{\rm d}_{\rm fact}$	$N_{\rm neigh}$
M_4	2.0	$9/10$	0.95	1.0–1.2	1.2	57.9
M_5	2.5	$23/20$	1.07	1.0–1.2	1.2	113
M_6	3.0	$7/5$	1.18	1.0–1.1	1.0	113
C^2	2.0	$4/5$	0.89	≥ 1.35	1.4	92
C^4	2.0	$8/13$	0.78	≥ 1.55	1.6	137
C^6	2.0	$1/2$	0.71	≥ 1.7	2.2	356

Table 2: Compact support radii, variance, standard deviation, recommended ranges of $h_{\rm fact}$ and recommended default $h_{\rm fact}$ settings ($h^d_{\rm fact}$) for the kernel functions available in PHANTOM

Børve et al. (2004); Price (2012a) has been to use the higher kernels in the B-spline series, i.e. the M_5 quartic which extends to $2.5h$

$$f(q) = \begin{cases} \left(\frac{5}{2}-q\right)^4 - 5\left(\frac{3}{2}-q\right)^4 + 10\left(\frac{1}{2}-q\right)^4, & 0 \le q < \frac{1}{2}, \\ \left(\frac{5}{2}-q\right)^4 - 5\left(\frac{3}{2}-q\right)^4, & \frac{1}{2} \le q < \frac{3}{2}, \\ \left(\frac{5}{2}-q\right)^4, & \frac{3}{2} \le q < \frac{5}{2}, \\ 0, & q \ge \frac{5}{2}, \end{cases} \tag{19.18}$$

where $C_{\rm norm} = 1/(20\pi)$, and the M_6 quintic extending to $3h$,

$$f(q) = \begin{cases} (3-q)^5 - 6(2-q)^5 + 15(1-q)^5, & 0 \le q < 1, \\ (3-q)^5 - 6(2-q)^5, & 1 \le q < 2, \\ (3-q)^5, & 2 \le q < 3, \\ 0, & q \ge 3, \end{cases} \tag{19.19}$$

where $C_{\rm norm} = 1/(120\pi)$ in 3D. The quintic in particular gives results virtually indistinguishable from the Gaussian for most problems.

Recently, there has been tremendous interest in the use of the Wendland kernels Wendland (1995), particularly since Dehnen & Aly (2012) showed that they are stable to the pairing instability at all neighbour numbers despite having a Gaussian-like shape and compact support. These functions are constructed as the unique polynomial functions with compact support but with a positive Fourier transform, which turns out to be a necessary condition for stability against the pairing instability Dehnen & Aly (2012). The three dimensional Wendland kernels scaled to a radius of $2h$ are given by C^2,

$$f(q) = \begin{cases} \left(1-\frac{q}{2}\right)^4 (2q+1), & q < 2, \\ 0, & q \ge 2, \end{cases} \tag{19.20}$$

where $C_{\rm norm} = 21/(16\pi)$; the C^4 kernel,

$$f(q) = \begin{cases} \left(1-\frac{q}{2}\right)^6 \left(\frac{35q^2}{12} + 3q + 1\right), & q < 2, \\ 0, & q \ge 2, \end{cases} \tag{19.21}$$

where $C_{\rm norm} = 495/(256\pi)$, and the C^6 kernel,

$$f(q) = \begin{cases} \left(1-\frac{q}{2}\right)^8 \left(4q^3 + \frac{25q^2}{4} + 4q + 1\right), & q < 2, \\ 0, & q \ge 2, \end{cases} \tag{19.22}$$

where $C_{\rm norm} = 1365/(512\pi)$. Figure 19.1 graphs $f(q)$ and its first and second derivative for each of the kernels available in PHANTOM.

Several authors have argued for use of the Wendland kernels by default. For example, Rosswog (2015) found best results on simple test problems using the C^6 Wendland kernel. However 'best' in that case implied using an average of 356 neighbours in 3D (i.e. $h_{\rm fact} = 2.2$ with $R_{\rm kern} = 2.0$) which is a factor of 6 more expensive than the standard approach. Similarly, Hu et al. (2014) recommend the C^4 kernel with 200 neighbours which is 3.5× more expensive. The large number of neighbours are needed because the Wendland kernels are always worse than the B-splines for a given number of neighbours due to the positive Fourier transform, meaning that the kernel bias (related to the Fourier transform) is always positive where the B-spline errors oscillate around zero Dehnen & Aly (2012). Hence whether or not this additional cost is worthwhile depends on the application. A more comprehensive analysis would be valuable here, as the 'best' choice of kernel remains an open question (see also the kernels proposed by Cabezón et al. (2008); García-Senz et al. (2014)). An even broader question regards the kernel used for dissipation terms, for gravitational force softening and for drag in two-fluid applications (discussed further in Section 19.2.13; Laibe & Price (2012a) found that double-hump shaped kernels led to more than an order of magnitude improvement in accuracy when used for drag terms).

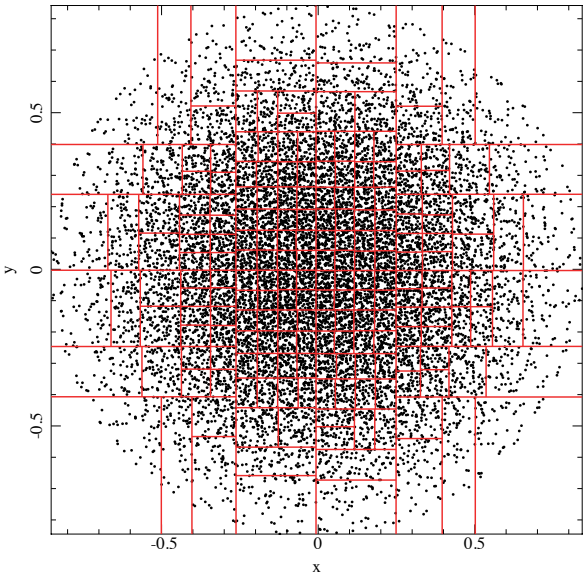


Figure 19.2: Example of the kd-tree build. For illustrative purposes only we have constructed a two dimensional version of the tree on the projected particle distribution in the x-y plane of the particle distribution from a polytrope test with 13,115 particles. Each level of the tree recursively splits the particle distribution in half, bisecting the longest axis at the centre of mass until the number of particles in a given cell is $< N_{\rm min}$. For clarity we have used $N_{\rm min} = 100$ in the above example, while $N_{\rm min} = 10$ by default.

A simple and practical approach to checking that kernel bias does not affect the solution that we have used and advocate when using PHANTOM is to first attempt a simulation with the cubic spline, but then to check the results with a low resolution calculation using the quintic kernel. If the results are identical then it indicates that the kernel bias is not important, but if not then use of smoother but costlier kernels such as M_6 or C^6 may be warranted. Wendland kernels are mainly useful for preventing the pairing instability and are necessary if one desires to employ a large number of neighbours.

Neighbour finding

Finding neighbours is the main computational expense to any SPH code. Earlier versions of PHANTOM contained three different options for neighbour-finding: A Cartesian grid, a cylindrical grid and a kd-tree. This was because we wrote the code originally with non-self-gravitating problems in mind, for which the overhead associated with a treecode is unnecessary. Since the implementation of self-gravity in PHANTOM the kd-tree has become the default, and is now sufficiently well optimised that the fixed-grid modules are more efficient only for simulations that do not employ either self-gravity or individual particle timesteps, which are rare in astrophysics.

A key optimisation strategy employed in PHANTOM is to perform the neighbour search for groups of particles. The results of this search (i.e. positions of all trial neighbours) are then cached and used to check for neighbours for individual particles in the group. Our kd-tree algorithm closely follows Gafton & Rosswog (2011), splitting the particles recursively based on the centre of mass and bisecting the longest axis at each level (Figure 19.2). The tree build is refined until a cell contains less than $N_{\rm min}$ particles, which is then referred to as a 'leaf node'. By default, $N_{\rm min} = 10$. The neighbour search is then performed once for each leaf node. Further details are given in Appendix 19.8.3.

19.2.2 Hydrodynamics

Compressible hydrodynamics

The equations of compressible hydrodynamics are solved in the form

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \Pi_{\rm shock} + \boldsymbol{a}_{\rm ext}(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{a}_{\rm sink-gas} + \boldsymbol{a}_{\rm selfgrav}, \tag{19.23}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{P}{\rho}(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) + \Lambda_{\rm shock} - \frac{\Lambda_{\rm cool}}{\rho}, \tag{19.24}$$

where P is the pressure, u is the specific internal energy, $\boldsymbol{a}_{\rm ext}$, $\boldsymbol{a}_{\rm sink-gas}$ and $\boldsymbol{a}_{\rm selfgrav}$ refer to (optional) accelerations from 'external' or 'body' forces (Section 19.2.4), sink particles (Section 19.2.8) and self-gravity (Section 19.2.12), respectively. $\Pi_{\rm shock}$ and $\Lambda_{\rm shock}$ are dissipation terms required to give the correct entropy increase at a shock front, and $\Lambda_{\rm cool}$ is a cooling term.

Equation of state

The equation set is closed by an equation of state relating the pressure to the density and/or internal energy. For an ideal gas this is given by

$$P = (\gamma - 1)\rho u, \tag{19.25}$$

where γ is the adiabatic index and the sound speed $c_{\rm s}$ is given by

$$c_{\rm s} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}. \tag{19.26}$$

The internal energy, u, can be related to the gas temperature, T, using

$$P = \frac{\rho k_{\rm B} T}{\mu m_{\rm H}}, \tag{19.27}$$

giving

$$T = \frac{\mu m_{\rm H}}{k_{\rm B}}(\gamma - 1)u, \tag{19.28}$$

where $k_{\rm B}$ is Boltzmann's constant, μ is the mean molecular weight and $m_{\rm H}$ is the mass of a hydrogen atom. Thus to infer the temperature one needs to specify a composition, but only the internal energy affects the gas dynamics. Equation (19.25) with $\gamma = 5/3$ is the default equation of state in PHANTOM.

In the case where shocks are assumed to radiate away all of the heat generated at the shock front (i.e. $\Lambda_{\rm shock} = 0$) and there is no cooling ($\Lambda_{\rm cool} = 0$), (19.24) becomes simply, using (19.2)

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{P}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}, \tag{19.29}$$

which, using (19.25) can be integrated to give

$$P = K\rho^{\gamma}, \tag{19.30}$$

where K is the polytropic constant. Even more simply, in the case where the temperature is assumed constant, or prescribed as a function of position, the equation of state is simply

$$P = c_{\rm s}^2 \rho. \tag{19.31}$$

In both of these cases, (19.30) and (19.31), the internal energy does not need to be stored. In this case the temperature is effectively set by the value of K (and the density if $\gamma \neq 1$). Specifically,

$$T = \frac{\mu m_{\rm H}}{k_{\rm B}} K \rho^{\gamma - 1}. \tag{19.32}$$

Code units

For pure hydrodynamics physical units are irrelevant to the numerical results since (19.1)–(19.2) and (19.23)–(19.24) are scale free to all but the Mach number. Hence setting physical units is only useful when comparing simulations with nature, when physical heating or cooling rates are applied via (19.24), or when one wishes to interpret the results in terms of temperature using (19.28) or (19.32).

In the case where gravitational forces are applied, either using an external force (Section 19.2.4) or using self-gravity (Section 19.2.12), we adopt the standard procedure of transforming units such that $G = 1$ in code units, i.e.

$$u_{\rm time} = \sqrt{\frac{u_{\rm dist}^3}{{\rm G}u_{\rm mass}}}, \tag{19.33}$$

where $u_{\rm time}$, $u_{\rm dist}$ and $u_{\rm mass}$ are the units of time, length and mass, respectively. Additional constraints apply when using relativistic terms (Section 19.2.4) or magnetic fields (Section 19.2.10).

Equation of motion in SPH

We follow the variable smoothing length formulation described by Price (2012a), Price & Federrath (2010) and Lodato & Price (2010). We discretise (19.23) using

$$\frac{{\rm d}\boldsymbol{v}_a}{{\rm d}t} = -\sum_b m_b \left[\frac{P_a + q^a_{ab}}{\rho_a^2\Omega_a}\nabla_a W_{ab}(h_a) + \frac{P_b + q^b_{ab}}{\rho_b^2\Omega_b}\nabla_a W_{ab}(h_b)\right] + \boldsymbol{a}_{\rm ext}(\boldsymbol{x}_a, t) + \boldsymbol{a}^a_{\rm sink-gas} + \boldsymbol{a}^a_{\rm selfgrav}, \tag{19.34}$$

where the q^a_{ab} and q^b_{ab} terms represent the artificial viscosity (discussed in Section 19.2.2, below).

Internal energy equation

The internal energy equation (19.24) is discretised using the time derivative of the density sum (c.f. 19.29), which from (19.4) gives

$$\frac{{\rm d}u_a}{{\rm d}t} = \frac{P_a}{\rho_a^2\Omega_a}\sum_b m_b \boldsymbol{v}_{ab}\cdot\nabla_a W_{ab}(h_a) + \Lambda_{\rm shock} - \frac{\Lambda_{\rm cool}}{\rho}. \tag{19.35}$$

where $\boldsymbol{v}_{ab} \equiv \boldsymbol{v}_a - \boldsymbol{v}_b$. Indeed, in the variational formulation of SPH Price (2012a), this expression is used as a constraint to derive (19.34), which guarantees both the conservation of energy and entropy (the latter in the absence of dissipation terms). The shock capturing terms in the internal energy equation are discussed below.

By default we assume an adiabatic gas, meaning that $P{\rm d}V$ work and shock heating terms contribute to the thermal energy of the gas, no energy is radiated to the environment, and total energy is conserved. To approximate a radiative gas one may set one or both of these terms to zero. Neglecting the shock heating term, $\Lambda_{\rm shock}$, gives an approximation equivalent to a polytropic equation of state (19.30), as described in Section 19.2.2. Setting both shock and work contributions to zero implies that ${\rm d}u/{\rm d}t = 0$, meaning that each particle will simply retain its initial temperature.

Conservation of energy in SPH

Does evolving the internal energy equation imply that total energy is not conserved? Wrong! Total energy in SPH, for the case of hydrodynamics, is given by

$$E = \sum_a m_a\left(\frac{1}{2}v_a^2 + u_a\right). \tag{19.36}$$

Taking the (Lagrangian) time derivative, we find that conservation of energy corresponds to

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \sum_a m_a \left(\boldsymbol{v}_a \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_a}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_a}{\mathrm{d}t} \right) = 0. \tag{19.37}$$

Inserting our expressions (19.34) and (19.35), and neglecting for the moment dissipative terms and external forces, we find

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\sum_a \sum_b m_a m_b \left[\frac{P_a \boldsymbol{v}_b}{\rho_a^2 \Omega_a} \cdot \nabla_a W_{ab}(h_a) + \frac{P_b \boldsymbol{v}_a}{\rho_b^2 \Omega_b} \cdot \nabla_a W_{ab}(h_b) \right] = 0. \tag{19.38}$$

The double summation on the right hand side equals zero because the kernel gradient, and hence the overall sum, is antisymmetric. That is, $\nabla_a W_{ab} = -\nabla_b W_{ba}$. This means one can relabel the summation indices arbitrarily in one half of the sum, and add it to one half of the original sum to give zero. One may straightforwardly verify that this remains true when one includes the dissipative terms (see below).

This means that even though we employ the internal energy equation, total energy remains conserved to machine precision in the spatial discretisation. That is, energy is conserved irrespective of the number of particles, the number of neighbours or the choice of smoothing kernel. The only non-conservation of energy arises from the ordinary differential equation solver one employs to solve the left hand side of the equations. We thus employ a symplectic time integration scheme in order to preserve the conservation properties as accurately as possible (Section 19.2.3).

Shock-capturing: momentum equation

The shock capturing dissipation terms are implemented following Monaghan (1997), derived by analogy with Riemann solvers from the special relativistic dissipation terms proposed by Chow & Monaghan (1997). These were extended by Price & Monaghan (2004b, 2005) to magnetohydrodynamics (MHD) and recently to dust-gas mixtures by Laibe & Price (2014b). In a recent paper, Puri & Ramachandran (2014) found this approach, along with the Morris & Monaghan (1997) switch (which they referred to as the 'Monaghan-Price-Morris' formulation) to be the most accurate and robust method for shock-capturing in SPH when compared to several other approaches, including Godunov SPH Inutsuka (2002); Cha & Whitworth (2003).

The formulation in PHANTOM differs from that given in Price (2012a) only by the way that the density and signal speed in the q terms are averaged, as described in Price & Federrath (2010) and Lodato & Price (2010). That is, we use

$$\Pi^a_{\rm shock} \equiv -\sum_b m_b \left[\frac{q^a_{ab}}{\rho_a^2 \Omega_a} \nabla_a W_{ab}(h_a) + \frac{q^b_{ab}}{\rho_b^2 \Omega_b} \nabla_a W_{ab}(h_b) \right], \tag{19.39}$$

where

$$q^a_{ab} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \rho_a v_{{\rm sig},a} \boldsymbol{v}_{ab} \cdot \hat{\boldsymbol{r}}_{ab}, & \boldsymbol{v}_{ab} \cdot \hat{\boldsymbol{r}}_{ab} < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{19.40}$$

where $\boldsymbol{v}_{ab} \equiv \boldsymbol{v}_a - \boldsymbol{v}_b$, $\hat{\boldsymbol{r}}_{ab} \equiv (\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b)/|\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b|$ is the unit vector along the line of sight between the particles, and $v_{\rm sig}$ is the maximum signal speed, which depends on the physics implemented. For hydrodynamics this is given by

$$v_{{\rm sig},a} = \alpha^{\rm AV}_a c_{{\rm s},a} + \beta^{\rm AV} |\boldsymbol{v}_{ab} \cdot \hat{\boldsymbol{r}}_{ab}|, \tag{19.41}$$

where in general $\alpha^{\rm AV}_a \in [0, 1]$ is controlled by a switch (see Section 19.2.2, below), while $\beta^{\rm AV} = 2$ by default.

Importantly, α does *not* multiply the $\beta^{\rm AV}$ term. The $\beta^{\rm AV}$ term provides a second order Von Neumann & Richtmyer (1950)-like term that prevents particle interpenetration Lattanzio et al.

(1986); Monaghan (1989) and thus $\beta^{\rm AV} \geq 2$ is needed wherever particle penetration may occur. This is important in accretion disc simulations where use of a low α may be acceptable in the absence of strong shocks, but a low β will lead to particle penetration of the disc midplane, which is the cause of a number of convergence issues Meru & Bate (2011, 2012). Price & Federrath (2010) found that $\beta^{\rm AV} = 4$ was necessary at high Mach number ($M \gtrsim 5$) to maintain a sharp shock structure, which despite nominally increasing the viscosity was found to give less dissipation overall because particle penetration no longer occurred at shock fronts.

Shock-capturing: internal energy equation

The key insight from Chow & Monaghan (1997) was that shock capturing not only involves a viscosity term but involves dissipating the jump in each component of the energy, implying a conductivity term in hydrodynamics and resistive dissipation in MHD (see Section 19.2.10). The resulting contribution to the internal energy equation is given by Price (2012a)

$$\begin{aligned}\Lambda_{\rm shock} \equiv & -\frac{1}{\Omega_a\rho_a}\sum_b m_b v_{{\rm sig},a}\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_{ab}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_{ab})^2 F_{ab}(h_a) \\ & + \sum_b m_b \alpha_u v^u_{\rm sig}(u_a - u_b)\frac{1}{2}\left[\frac{F_{ab}(h_a)}{\Omega_a\rho_a} + \frac{F_{ab}(h_b)}{\Omega_b\rho_b}\right] \\ & + \Lambda_{\rm artres},\end{aligned} \tag{19.42}$$

where the first term provides the viscous shock heating, the second term provides an artificial thermal conductivity and F_{ab} is defined as in (19.15) and $\Lambda_{\rm artres}$ is the heating due to artificial resistivity (Equation 19.182). The signal speed we use for conductivity term differs from the one used for viscosity, as discussed by Price (2008) and Price (2012a). In Phantom we use

$$v^u_{\rm sig} = \sqrt{\frac{|P_a - P_b|}{\overline{\rho}_{ab}}}, \tag{19.43}$$

for simulations that do not involve self-gravity or external body forces Price (2008), and

$$v^u_{\rm sig} = |\boldsymbol{v}_{ab}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_{ab}|, \tag{19.44}$$

for simulations that do Wadsley et al. (2008). The importance of the conductivity term for treating contact discontinuities was highlighted by Price (2008), explaining the poor results found by Agertz et al. (2007) in SPH simulations of Kelvin-Helmholtz instabilities run across contact discontinuities (discussed further in Section 19.5.1). With (19.44), we have found there is no need for further switches to reduce conductivity (e.g. Price (2004); Price & Monaghan (2005); Valdarnini (2016)), since the effective thermal conductivity κ is second order in the smoothing length ($\propto h^2$). Phantom therefore uses $\alpha_u = 1$ by default in (19.42) and we have not yet found a situation where this leads to excess smoothing.

It may be readily shown that the total energy remains conserved in the presence of dissipation by combining (19.42) with the corresponding dissipative terms in (19.34). The contribution to the entropy from both viscosity and conductivity is also positive definite (see the appendix in Price & Monaghan (2004b) for the mathematical proof in the case of conductivity).

Shock detection

The standard approach to reducing dissipation in SPH away from shocks for the last 15 years has been the switch proposed by Morris & Monaghan (1997), where the dimensionless viscosity parameter α is evolved for each particle a according to

$$\frac{{\rm d}\alpha_a}{{\rm d}t} = \max(-\nabla\cdot\boldsymbol{v}_a, 0) - \frac{(\alpha_a - \alpha_{\rm min})}{\tau_a}, \tag{19.45}$$

where $\tau \equiv h/(\sigma_{\rm decay} v_{\rm sig})$ and $\sigma_{\rm decay} = 0.1$ by default. We set $v_{\rm sig}$ in the decay time equal to the sound speed to avoid the need to store ${\rm d}\alpha/{\rm d}t$, since $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ is already stored in order to

compute (19.4). This is the switch used for numerous turbulence applications with PHANTOM Price & Federrath (2010); Price et al. (2011); Tricco et al. (2016b) where it is important to minimise numerical dissipation in order to maximise the Reynolds number Valdarnini (2011); Price (2012b).

More recently, Cullen & Dehnen (2010) proposed a more advanced switch using the time derivative of the velocity divergence. A modified version based on the gradient of the velocity divergence was also proposed by Read & Hayfield (2012). We implement a variation on the Cullen & Dehnen (2010) switch, using a shock indicator of the form

$$A_a = \xi_a \max\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_a), 0\right], \tag{19.46}$$

where

$$\xi = \frac{|\nabla\cdot\boldsymbol{v}|^2}{|\nabla\cdot\boldsymbol{v}|^2 + |\nabla\times\boldsymbol{v}|^2} \tag{19.47}$$

is a modification of the Balsara (1995) viscosity limiter for shear flows. We use this to set α according to

$$\alpha_{\mathrm{loc},a} = \min\left(\frac{10h_a^2 A_a}{c_{\mathrm{s},a}^2}, \alpha_{\max}\right), \tag{19.48}$$

where c_s is the sound speed and $\alpha_{\max} = 1$. We use c_s in the expression for α_{loc} also for magnetohydrodynamics (Section 19.2.10) since we found using the magnetosonic speed led to a poor treatment of MHD shocks. If $\alpha_{\mathrm{loc},a} > \alpha_a$ we set $\alpha_a = \alpha_{\mathrm{loc},a}$, otherwise we evolve α_a according to

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_a}{\mathrm{d}t} = -\frac{(\alpha_a - \alpha_{\mathrm{loc},a})}{\tau_a}, \tag{19.49}$$

where τ is defined as in the Morris & Monaghan (1997) version, above. We evolve α in the predictor part of the integrator only, i.e. with a first order time integration, to avoid complications in the corrector step. However, we perform the predictor step implicitly using a backward Euler method, i.e.

$$\alpha_a^{n+1} = \frac{\alpha_a^n + \alpha_{\mathrm{loc},a}\Delta t/\tau_a}{1 + \Delta t/\tau_a}, \tag{19.50}$$

which ensures that the decay is stable regardless of the timestep (we do this for the Morris & Monaghan method also).

We use the method outlined in Appendix B3 of Cullen & Dehnen (2010) to compute $\mathrm{d}(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_a)/\mathrm{d}t$. That is, we first compute the gradient tensors of the velocity, $\boldsymbol{v}$, and acceleration, $\boldsymbol{a}$ (used from the previous timestep), during the density loop using an SPH derivative operator that is exact to linear order, that is, with the matrix correction outlined in Price (2004, 2012a), namely

$$R_a^{ij}\frac{\partial v_a^k}{\partial x_a^j} = \sum_b m_b\left(v_b^k - v_a^k\right)\frac{\partial W_{ab}(h_a)}{\partial x^i}, \tag{19.51}$$

where

$$R_a^{ij} = \sum_b m_b\left(x_b^i - x_a^i\right)\frac{\partial W_{ab}(h_a)}{\partial x^j} \approx \delta^{ij}, \tag{19.52}$$

and repeated tensor indices imply summation. Finally, we construct the time derivative of the velocity divergence according to

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial v_a^i}{\partial x_a^i}\right) = \frac{\partial a_a^i}{\partial x_a^i} - \frac{\partial v_a^i}{\partial x_a^j}\frac{\partial v_a^j}{\partial x_a^i}, \tag{19.53}$$

where, as previously, repeated i and j indices imply summation. In Cartesian coordinates the last term in (19.53) can be written out explicitly using

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_a^i}{\partial x_a^j}\frac{\partial v_a^j}{\partial x_a^i} = &\left(\frac{\partial v^x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v^y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v^z}{\partial z}\right)^2 \\ &+ 2\left[\frac{\partial v^x}{\partial y}\frac{\partial v^y}{\partial x} + \frac{\partial v^x}{\partial z}\frac{\partial v^z}{\partial x} + \frac{\partial v^z}{\partial y}\frac{\partial v^y}{\partial z}\right].\end{aligned} \tag{19.54}$$

Cooling

The cooling term $\Lambda_{\rm cool}$ can be set either from detailed chemical calculations (Section 19.2.14) or, for discs, by the simple 'β-cooling' prescription of Gammie (2001), namely

$$\Lambda_{\rm cool} = \frac{\rho u}{t_{\rm cool}}, \tag{19.55}$$

where

$$t_{\rm cool} = \frac{\Omega(R)}{\beta_{\rm cool}}, \tag{19.56}$$

with $\beta_{\rm cool}$ an input parameter to the code specifying the cooling timescale in terms of the local orbital time. We compute Ω in (19.56) using $\Omega \equiv 1/(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$, i.e. assuming Keplerian rotation around a central object with mass equal to unity, with $G = 1$ in code units.

Conservation of linear and angular momentum

The total linear momentum is given by

$$\boldsymbol{P} = \sum_a m_a \boldsymbol{v}_a, \tag{19.57}$$

such that conservation of momentum corresponds to

$$\frac{{\rm d}\boldsymbol{P}}{{\rm d}t} = \sum_a m_a \frac{{\rm d}\boldsymbol{v}_a}{{\rm d}t} = 0. \tag{19.58}$$

Inserting our discrete equation (19.34), we find

$$\frac{{\rm d}\boldsymbol{P}}{{\rm d}t} = \sum_a \sum_b m_a m_b \left[\frac{P_a + q^a_{ab}}{\rho_a^2 \Omega_a} \nabla_a W_{ab}(h_a) + \frac{P_b + q^b_{ab}}{\rho_b^2 \Omega_b} \nabla_a W_{ab}(h_b) \right] = 0. \tag{19.59}$$

where, as for the total energy (Section 19.2.2), the double summation is zero because of the antisymmetry of the kernel gradient. The same argument applies to the conservation of angular momentum,

$$\sum_a m_a \boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{v}_a, \tag{19.60}$$

(see e.g. Price (2012a) for a detailed proof). As with total energy, this means linear and angular momentum are exactly conserved by our SPH scheme to the accuracy with which they are conserved by the timestepping scheme.

In PHANTOM, linear and angular momentum are both conserved to round-off error (typically $\sim 10^{-16}$ in double precision) with global timestepping, but exact conservation is violated when using individual particle timesteps or when using the kd-tree to compute gravitational forces. The magnitude of these quantities, as well as the total energy and the individual components of energy (kinetic, internal, potential and magnetic), should thus be monitored by the user at runtime. Typically with individual timesteps one should expect energy conservation to $\Delta E/E \sim 10^{-3}$ and linear and angular momentum conservation to $\sim 10^{-6}$ with default code settings. The code execution is aborted if conservation errors exceed 10%.

19.2.3 Time integration

Timestepping algorithm

We integrate the equations of motion using a generalisation of the Leapfrog integrator which is reversible in the case of both velocity dependent forces and derivatives which depend on the

velocity field. The basic integrator is the Leapfrog method in 'Kick-Drift-Kick' or 'Velocity Verlet' form Verlet (1967), where the positions and velocities of particles are updated from time t^n to t^{n+1} according to

$$\boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{v}^n + \frac{1}{2}\Delta t \boldsymbol{a}^n, \tag{19.61}$$

$$\boldsymbol{r}^{n+1} = \boldsymbol{r}^n + \Delta t \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}, \tag{19.62}$$

$$\boldsymbol{a}^{n+1} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}^{n+1}), \tag{19.63}$$

$$\boldsymbol{v}^{n+1} = \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta t \boldsymbol{a}^{n+1}, \tag{19.64}$$

where $\Delta t \equiv t^{n+1} - t^n$. This is identical to the formulation of Leapfrog used in other astrophysical SPH codes Springel (2005); Wadsley et al. (2004). The Verlet scheme, being both reversible and symplectic Hairer et al. (2003), preserves the Hamiltonian nature of the SPH algorithm Gingold & Monaghan (1982b); Monaghan & Price (2001). In particular, both linear and angular momentum are exactly conserved, there is no long-term energy drift, and phase space volume is conserved (e.g. for orbital dynamics). In SPH this is complicated by velocity-dependent terms in the acceleration from the shock-capturing dissipation terms. In this case the corrector step, (19.64), becomes implicit. The approach we take is to notice that these terms are not usually dominant over the position-dependent terms. Hence we use a first-order prediction of the velocity, as follows

$$\boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{v}^n + \frac{1}{2}\Delta t \boldsymbol{a}^n, \tag{19.65}$$

$$\boldsymbol{r}^{n+1} = \boldsymbol{r}^n + \Delta t \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}}, \tag{19.66}$$

$$\boldsymbol{v}^{*} = \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta t \boldsymbol{a}^n, \tag{19.67}$$

$$\boldsymbol{a}^{n+1} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}^{n+1}, \boldsymbol{v}^{*}), \tag{19.68}$$

$$\boldsymbol{v}^{n+1} = \boldsymbol{v}^{*} + \frac{1}{2}\Delta t \left[\boldsymbol{a}^{n+1} - \boldsymbol{a}^n\right]. \tag{19.69}$$

At the end of the step we then check if the error in the first order prediction is less than some tolerance ϵ according to

$$e = \frac{|\boldsymbol{v}^{n+1} - \boldsymbol{v}^{*}|}{|\boldsymbol{v}^{\rm mag}|} < \epsilon_{\rm v}, \tag{19.70}$$

where $\boldsymbol{v}^{\rm mag}$ is the mean velocity on all SPH particles (we set the error to zero if $|\boldsymbol{v}^{\rm mag}| = 0$) and by default $\epsilon_{\rm v} = 10^{-2}$. If this criterion is violated, then we recompute the accelerations by replacing $\boldsymbol{v}^{*}$ with $\boldsymbol{v}^{n+1}$ and iterating (19.68) and (19.69) until the criterion in (19.70) is satisfied. In practice this happens rarely, but occurs for example in the first few steps of the Sedov problem where the initial conditions are discontinuous (Section 19.5.1). As each iteration is as expensive as halving the timestep, we also constrain the subsequent timestep such that iterations should not occur, i.e.

$$\Delta t = \min\left(\Delta t, \frac{\Delta t}{\sqrt{e_{\rm max}/\epsilon}}\right), \tag{19.71}$$

where $e_{\rm max} = \max(e)$ over all particles. A caveat to the above is that velocity iterations are not currently implemented when using individual particle timesteps.

Additional variables such as the internal energy, u, and the magnetic field, $\boldsymbol{B}$, are timestepped with a predictor and trapezoidal corrector step in the same manner as the velocity, following (19.67) and (19.69).

Velocity-dependent external forces are treated separately, as described in Section 19.2.4, below.

Timestep constraints

The timestep itself is determined at the end of each step, and is constrained to be less than the maximum stable timestep. For a given particle, a, this is given by Lattanzio et al. (1986); Monaghan (1997),

$$\Delta t_{\mathrm{C},a} \equiv C_{\mathrm{cour}} \frac{h_a}{v^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{sig},a}}, \tag{19.72}$$

where $C_{\mathrm{cour}} = 0.3$ by default Lattanzio et al. (1986) and $v^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{sig}}$ is taken as the maximum of (19.41) over the particle's neighbours assuming $\alpha^{\mathrm{AV}} = \max(\alpha^{\mathrm{AV}}, 1)$. The criterion above differs from the usual Courant-Friedrichs-Lewy condition used in Eulerian codes Courant et al. (1928) because it depends only on the difference in velocity between neighbouring particles, not the absolute value.

An additional constraint is applied from the accelerations (the 'force condition'), where

$$\Delta t_{\mathrm{f},a} \equiv C_{\mathrm{force}} \sqrt{\frac{h_a}{|\boldsymbol{a}_a|}}, \tag{19.73}$$

where $C_{\mathrm{force}} = 0.25$ by default. A separate timestep constraint is applied for external forces

$$\Delta t_{\mathrm{ext},a} \equiv C_{\mathrm{force}} \sqrt{\frac{h}{|\boldsymbol{a}_{\mathrm{ext},a}|}}, \tag{19.74}$$

and for accelerations to SPH particles to/from sink particles (Section 19.2.8, below)

$$\Delta t_{\mathrm{sink-gas},a} \equiv C_{\mathrm{force}} \sqrt{\frac{h_a}{|\boldsymbol{a}_{\mathrm{sink-gas},a}|}}. \tag{19.75}$$

For external forces with potentials defined such that $\Phi \to 0$ as $r \to \infty$ an additional constraint is applied using Dehnen & Read (2011)

$$\Delta t_{\Phi,a} \equiv C_{\mathrm{force}} \eta_\Phi \sqrt{\frac{|\Phi_a|}{|\nabla\Phi|^2_a}}, \tag{19.76}$$

where $\eta_\Phi = 0.05$ (see Section 19.2.8).

The timestep for particle a is then taken to be the minimum of all of the above constraints, i.e.

$$\Delta t_a = \min\left(\Delta t_{\mathrm{C}}, \Delta t_{\mathrm{f}}, \Delta t_{\mathrm{ext}}, \Delta t_{\mathrm{sink-gas}}, \Delta t_\Phi\right)_a, \tag{19.77}$$

with possible other constraints arising from additional physics as described in their respective sections. With global timestepping the resulting timestep is the minimum over all particles,

$$\Delta t = \min_a(\Delta t_a). \tag{19.78}$$

Substepping of external forces

In the case where the timestep is dominated by any of the external force timesteps, i.e. (19.74)–(19.76), we implement an operator splitting approach implemented according to the reversible reference system propagator algorithm (RESPA) derived by Tuckerman et al. (1992) for molecular dynamics. RESPA splits the acceleration into 'long range' and 'short range' contributions, which in PHANTOM are defined to be the SPH and external/point-mass accelerations, respectively.

Our implementation follows Tuckerman et al. (1992) (see their Appendix B), where the velocity is first predicted to the half step using the 'long range' forces, followed by an inner

loop where the positions are updated with the current velocity and the velocities are updated with the 'short range' accelerations. Thus the timestepping proceeds according to

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \frac{\Delta t_{\rm sph}}{2}\boldsymbol{a}^n_{\rm sph}, \tag{19.79}$$

$$\text{over substeps} \begin{cases} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \dfrac{\Delta t_{\rm ext}}{2}\boldsymbol{a}^m_{\rm ext}, & (19.80)\\ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} + \Delta t_{\rm ext}\boldsymbol{v}, & (19.81)\\ \text{get } \boldsymbol{a}_{\rm ext}(\boldsymbol{r}), & (19.82)\\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \dfrac{\Delta t_{\rm ext}}{2}\boldsymbol{a}^{m+1}_{\rm ext}, & (19.83) \end{cases}$$

$$\text{get } \boldsymbol{a}_{\rm sph}(\boldsymbol{r}), \tag{19.84}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \frac{\Delta t_{\rm sph}}{2}\boldsymbol{a}^n_{\rm sph}. \tag{19.85}$$

where $\boldsymbol{a}_{\rm SPH}$ indicates the SPH acceleration evaluated from (19.34) and $\boldsymbol{a}_{\rm ext}$ indicates the external forces. The SPH and external accelerations are stored separately to enable this. $\Delta t_{\rm ext}$ is the minimum of all timesteps relating to sink-gas and external forces (equations 19.74–19.76) while $\Delta t_{\rm sph}$ is the timestep relating to the SPH forces (equations 19.72, 19.73 and 19.288). $\Delta t_{\rm ext}$ is allowed to vary on each substep, so we take as many steps as required such that $\sum_j^{m-1} \Delta t_{{\rm ext},j} + \Delta t_{{\rm ext},f} = \Delta t_{\rm SPH}$, where $\Delta t_{{\rm ext},f} < \Delta t_{{\rm ext},j}$ is chosen so that the sum will identically equal $\Delta t_{\rm SPH}$. The number of substeps is $m \approx {\rm int}(\Delta t_{\rm ext,min}/\Delta t_{\rm SPH,min}) + 1$, where the minimum is taken over all particles.

Individual particle timesteps

For simulations of stiff problems with a large range in timestep over the domain, it is more efficient to allow each particle to evolve on its own timestep independently Bate (1995); Springel (2005); Saitoh & Makino (2010). This violates all of the conservation properties of the Leapfrog integrator (see Makino et al. (2006) for an attempt to solve this), but can speed up the calculation by an order of magnitude or more. We implement this in the usual block-stepped manner by assigning timesteps in factor-of-two decrements from some maximum timestep $\Delta t_{\rm max}$, which for convenience is set equal to the time between output files.

We implement a timestep limiter where the timestep for an active particle is constrained to be within a factor of 2 of its neighbours, similar to condition employed by Saitoh & Makino (2009). Additionally, inactive particles will be woken up as required to ensure that their timestep is within a factor of 2 of its neighbours.

The practical side of individual timestepping is described in Appendix 19.8.6.

19.2.4 External forces

Point mass potential

The simplest external force describes a point mass, M, at the origin, which yields gravitational potential and acceleration,

$$\Phi_a = -\frac{GM}{r_a}; \qquad \boldsymbol{a}_{{\rm ext},a} = -\nabla\Phi_a = -\frac{GM}{|\boldsymbol{r}_a|^3}\boldsymbol{r}_a, \tag{19.86}$$

where $r_a \equiv |\boldsymbol{r}_a| \equiv \sqrt{\boldsymbol{r}_a \cdot \boldsymbol{r}_a}$. When this potential is used, we allow for particles within a certain radius, $R_{\rm acc}$, from the origin to be accreted. This allows for a simple treatment of accretion discs where the mass of the disc is assumed to be negligible compared to the mass of the central object. The accreted mass in this case is recorded but not added to the central mass. For more massive discs, or when the accreted mass is significant with respect to the central mass, it is better to model the central star using a sink particle (Section 19.2.8) where there are mutual gravitational forces between the star and the disc, and any mass accreted is added to the point mass (Section 19.2.8).

Binary potential

We provide the option to model motion in binary systems where the mass of the disc is negligible. In this case the binary motion is prescribed using

$$\boldsymbol{r}_1 = [(1-M)\cos(t), (1-M)\sin(t), 0], \tag{19.87}$$
$$\boldsymbol{r}_2 = [-M\cos(t), -M\sin(t), 0], \tag{19.88}$$

where M is the mass ratio in units of the total mass (which is therefore unity). For this potential, G and Ω are set to unity in computational units, where Ω is the angular velocity of the binary. Thus only M needs to be specified to fix both m_1 and m_2. Hence the binary remains fixed on a circular orbit at $r = 1$. The binary potential is therefore

$$\Phi_a = -\frac{M}{|\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_1|} - \frac{(1-M)}{|\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_2|}, \tag{19.89}$$

such that the external acceleration is given by

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{ext},a} = -\nabla\Phi_a = -M\frac{(\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_1|^3} - (1-M)\frac{(\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_2)}{|\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_2|^3}. \tag{19.90}$$

Again, there is an option to accrete particles that fall within a certain radius from either star ($R_{\mathrm{acc},1}$ or $R_{\mathrm{acc},2}$, respectively). For most binary accretion disc simulations (e.g. planet migration) it is better to use 'live' sink particles to represent the binary so that there is feedback between the binary and the disc (we have used a live binary in all of our simulations to date, e.g. Nixon et al. (2013); Facchini et al. (2013); Martin et al. (2014a,b); Doğan et al. (2015); Ragusa et al. (2016, 2017)), but the binary potential remains useful under limited circumstances — in particular when one wishes to turn off the feedback between the disc and the binary.

Given that the binary potential is time-dependent, for efficiency we compute the position of the binary only once at the start of each timestep, and use these stored positions to compute the accelerations of the SPH particles via (19.90).

Binary potential with gravitational wave decay

An alternative binary potential including the effects of gravitational wave decay was used by Cerioli et al. (2016) to study the squeezing of discs during the merger of supermassive black holes. Here the motion of the binary is prescribed according to

$$\boldsymbol{r}_1 = \left[-\frac{m_2}{m_1+m_2}a\cos(\theta), -\frac{m_2}{m_1+m_2}a\sin(\theta), 0\right],$$
$$\boldsymbol{r}_2 = \left[\frac{m_1}{m_1+m_2}a\cos(\theta), \frac{m_1}{m_1+m_2}a\sin(\theta), 0\right], \tag{19.91}$$

where the semi-major axis, a, decays according to

$$a(t) = a_0\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{19.92}$$

The initial separation is a_0, with τ defined as the time to merger, given by the usual expression Lodato et al. (2009)

$$\tau \equiv \frac{5}{256}\frac{a_0^4}{\mu_{12}(m_1+m_2)^2}, \tag{19.93}$$

where

$$\mu_{12} \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}. \tag{19.94}$$

The angle θ is defined using

$$\Omega \equiv \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{a^3}}. \tag{19.95}$$

Inserting the expression for a and integrating gives Cerioli et al. (2016)

$$\theta(t) = -\frac{8\tau}{5}\sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{a_0^3}}\left(1-\frac{t}{\tau}\right). \tag{19.96}$$

The positions of the binary, $\boldsymbol{r}_1$ and $\boldsymbol{r}_2$, can be inserted into (19.89) to obtain the binary potential, with the acceleration as given in (19.90). The above can be used as a simple example of a time-dependent external potential.

Galactic potentials

We implement a range of external forces representing various galactic potentials, as used in Pettitt et al. (2014). These include arm, bar, halo, disc and spheroidal components. We refer the reader to the paper above for the actual forms of the potentials.

For the non-axisymmetric potentials a few important parameters that determine the morphology can be changed at run-time rather than compile time. These include the pattern speed, arm number, arm pitch angle and bar axis lengths (where applicable). In the case of non-axisymmetric components, the user should be aware that some will add mass to the system, whereas others simply perturb the galactic disc. These potentials can be used for any galactic system, but the various default scale lengths and masses are chosen to match the Milky Way's rotation curve Sofue (2012).

The most basic potential in PHANTOM is a simple logarithmic potential from Binney & Tremaine (1987), which allows for the reproduction of a purely flat rotation curve with steep decrease at the galactic centre, and approximates the halo, bulge and disc contributions. Also included is the standard flattened disc potential of Miyamoto-Nagai Miyamoto & Nagai (1975) and an exponential profile disc, specifically the form from Khoperskov et al. (2013). Several spheroidal components are available, including the potentials of Plummer (1911), Hernquist (1990) and Hubble (1930). These can be used generally for bulges and halos if given suitable mass and scale-lengths. We also include a few halo-specific profiles; the NFW Navarro et al. (1996), Begeman et al. (1991), Caldwell & Ostriker (1981) and the Allen & Santillan (1991) potentials.

The arm potentials include some of the more complicated profiles. The first is the potential of Cox & Gómez (2002), which is a relatively straightforward superposition of three sinusoidal-based spiral components to damp the potential "troughs" in the inter-arm minima. The other spiral potential is from Pichardo et al. (2003), and is more complicated. Here the arms are constructed from a superposition of oblate spheroids whose loci are placed along a standard logarithmic spiral. As the force from this potential is computationally expensive it is prudent to pre-compute a grid of potential/force and read it at run time. The python code to generate the appropriate grid files is distributed with the code.

Finally, the bar components: We include the bar potentials of Dehnen (2000a), Wada & Koda (2001), the "S" shaped bar of Vogt & Letelier (2011), both biaxial and triaxial versions provided in Long & Murali (1992), and the boxy-bulge bar of Wang et al. (2012). This final bar is contains both a small inner non-axisymmetric bulge and longer bar component, with the forces calculated by use of Hernquist-Ostriker expansion coefficients of the bar density field. PHANTOM contains the coefficients for several different forms of this bar potential.

Lense-Thirring precession

Lense-Thirring precession Lense & Thirring (1918) from a spinning black hole is implemented in a Post-Newtonian approximation following Nelson & Papaloizou (2000), which has been used in Nixon et al. (2012b) and Nealon et al. (2015, 2016). In this case the external acceleration consists of a point mass potential (Section 19.2.4) and the Lense-Thirring term,

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{ext},a} = -\nabla\Phi_a + \boldsymbol{v}_a \times \boldsymbol{\Omega}_{p,a}, \tag{19.97}$$

where Φ_a is given by (19.86) and $\boldsymbol{v}_a \times \boldsymbol{\Omega}_{p,a}$ is the gravitomagnetic acceleration. A dipole approximation is used, yielding

$$\boldsymbol{\Omega}_{p,a} \equiv \frac{2\boldsymbol{S}}{|\boldsymbol{r}_a|^3} - \frac{6(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{r}_a)\boldsymbol{r}_a}{|\boldsymbol{r}_a|^5}, \tag{19.98}$$

with $\boldsymbol{S} = a_{\rm spin}(GM)^2\boldsymbol{k}/c^3$, where $\boldsymbol{k}$ is a unit vector in the direction of the black hole spin. When using the Lense-Thirring force, geometric units are assumed such that $G = M = c = 1$, as described in Section 19.2.2, but with the additional constraints on the unit system from M and c.

Since in this case the external force depends on velocity, it cannot be implemented directly into Leapfrog. The method we employ to achieve this is simpler than those proposed elsewhere (c.f. attempts by Quinn et al. (2010) and Rein & Tremaine (2011) to adapt the Leapfrog integrator to Hill's equations). Our approach is to split the acceleration into position and velocity-dependent parts, i.e.

$$\boldsymbol{a}_{\rm ext} = \boldsymbol{a}_{\rm ext,x}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{a}_{\rm ext,v}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}). \tag{19.99}$$

The position dependent part (i.e. $-\nabla\Phi(\boldsymbol{r})$) is integrated as normal. The velocity dependent Lense-Thirring term is added to the predictor step, (19.66)–(19.67), as usual, but the corrector step, (19.69), is written in the form

$$\boldsymbol{v}^{n+1} = \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta t\left[\boldsymbol{a}^{n+1}_{\rm sph} + \boldsymbol{a}^{n+1}_{\rm ext,x} + \boldsymbol{a}_{\rm ext,v}(\boldsymbol{r}^{n+1}, \boldsymbol{v}^{n+1})\right]. \tag{19.100}$$

where $\boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}} \equiv \boldsymbol{v}^n + \frac{1}{2}\Delta t\boldsymbol{a}^n$ as in (19.65). This equation is implicit but the trick is to notice that it can be solved analytically for simple forces[6]. In the case of Lense-Thirring precession, we have

$$\boldsymbol{v}^{n+1} = \tilde{\boldsymbol{v}} + \frac{1}{2}\Delta t\left[\boldsymbol{v}^{n+1} \times \boldsymbol{\Omega}_p(\boldsymbol{r}^{n+1})\right], \tag{19.101}$$

where $\tilde{\boldsymbol{v}} \equiv \boldsymbol{v}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta t(\boldsymbol{a}^{n+1}_{\rm sph} + \boldsymbol{a}^{n+1}_{\rm ext,x})$. We therefore have a matrix equation in the form

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}^{n+1} = \tilde{\boldsymbol{v}}, \tag{19.102}$$

where $\boldsymbol{R}$ is the 3×3 matrix given by

$$\boldsymbol{R} \equiv \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\Delta t}{2}\Omega_p^z & \frac{\Delta t}{2}\Omega_p^y \\ \frac{\Delta t}{2}\Omega_p^z & 1 & -\frac{\Delta t}{2}\Omega_p^x \\ -\frac{\Delta t}{2}\Omega_p^y & \frac{\Delta t}{2}\Omega_p^x & 1 \end{bmatrix}. \tag{19.103}$$

Rearranging (19.102), $\boldsymbol{v}^{n+1}$ is obtained by using

$$\boldsymbol{v}^{n+1} = \boldsymbol{R}^{-1}\tilde{\boldsymbol{v}}, \tag{19.104}$$

where $\boldsymbol{R}^{-1}$ is the inverse of $\boldsymbol{R}$ and can be computed analytically.

Generalised Newtonian potential

The generalised Newtonian potential described by Tejeda & Rosswog (2013) is implemented, where the acceleration terms are given by

$$\boldsymbol{a}_{{\rm ext},a} = -\frac{GM\boldsymbol{r}_a}{|\boldsymbol{r}_a|^3}f^2 + \frac{2R_{\rm g}\boldsymbol{v}_a(\boldsymbol{v}_a \cdot \boldsymbol{r}_a)}{|\boldsymbol{r}_a|^3 f} - \frac{3R_{\rm g}\boldsymbol{r}_a(\boldsymbol{v}_a \times \boldsymbol{r}_a)^2}{|\boldsymbol{r}_a|^5}, \tag{19.105}$$

with $R_{\rm g} \equiv GM/c^3$ and $f \equiv (1 - 2R_{\rm g}/|\boldsymbol{r}_a|)$. See Bonnerot et al. (2016) for a recent application. This potential reproduces several features of the Schwarzschild (1916) spacetime, in particular reproducing the orbital and epicyclic frequencies to better than 7 per cent Tejeda & Rosswog (2013). As the acceleration involves velocity-dependent terms, it requires a semi-implicit solution like Lense-Thirring precession. Since the matrix equation is rather involved for this case, the corrector step is iterated using fixed point iterations until the velocity of each particle is converged to a tolerance of 1 per cent.

[6]The procedure for Hill's equations would be identical to our method for Lense-Thirring precession. The method we use is both simpler and more direct than any of the schemes proposed by Quinn et al. (2010) and Rein & Tremaine (2011), and is time-reversible unlike the methods proposed in those papers.

Poynting-Robertson drag

The radiation drag from a central point-like, gravitating, radiating, and non-rotating object may be applied as an external force. The implementation is intended to be as general as possible. The acceleration of a particle subject to these external forces is

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_{\mathrm{ext},a} =& \frac{(k_0\beta_{\mathrm{PR}}-1)GM}{|\boldsymbol{r}_a|^3}\boldsymbol{r}_a \\ &- \beta_{\mathrm{PR}}\left(k_1\frac{GM}{|\boldsymbol{r}_a|^3}\frac{v_r}{c}\boldsymbol{r}_a - k_2\frac{GM}{|\boldsymbol{r}_a|^2}\frac{\boldsymbol{v}_a}{c}\right),\end{aligned} \tag{19.106}$$

where v_r is the component of the velocity in the radial direction. The parameter β_{PR} is the ratio of radiation to gravitational forces, supplied by a separate user-written module. Relativistic effects are neglected because these are thought to be less important than radiation forces for low ($\beta_{\mathrm{PR}} < 0.01$) luminosities, even in accreting neutron star systems where a strong gravitational field is present (e.g., Miller & Lamb (1993)).

The three terms on the right side of (19.106) correspond respectively to gravity (reduced by outward radiation pressure), redshift-related modification to radiation pressure caused by radial motion, and Poynting-Robertson drag against the direction of motion. These three terms can be scaled independently by changing the three parameters k_0, k_1 and k_2, whose default values are unity. Rotation of the central object can be crudely emulated by changing k_2.

As for Lense-Thirring precession, the $\boldsymbol{a}^{n+1}$ term of the Leapfrog integration scheme can be expanded into velocity-dependent and non velocity-dependent component. We obtain, after some algebra,

$$\boldsymbol{v}^{n+1} = -\frac{\boldsymbol{T} - Qk_1(\boldsymbol{v}^{n+1}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}}}{1+Qk_2}, \tag{19.107}$$

where

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{v}^n + \frac{1}{2}\Delta t\boldsymbol{a}^n - \frac{(1-k_0\beta_{\mathrm{PR}})GM\Delta t}{2r^3}\boldsymbol{r} \tag{19.108}$$

and

$$Q = \frac{GM\beta_{\mathrm{PR}}\Delta t}{2cr^2}. \tag{19.109}$$

Equation (19.107) yields a set of simultaneous equations for the three vector components that can be solved analytically. A detailed derivation is given in Worpel (2015).

Coriolis and centrifugal forces

Under certain circumstances it is useful to perform calculations in a corotating reference frame (e.g. for damping binary stars into equilibrium with each other). The resulting acceleration terms are given by

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{ext},a} = -\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}_a) - 2(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_a), \tag{19.110}$$

which are the centrifugal and Coriolis terms, respectively, with $\boldsymbol{\Omega}$ the angular rotation vector. The timestepping algorithm is as described above for Lense-Thirring precession, with the velocity dependent term handled by solving the 3×3 matrix in the Leapfrog corrector step.

19.2.5 Driven turbulence

PHANTOM implements turbulence driving in periodic domains via an Ornstein-Uhlenbeck stochastic driving of the acceleration field, as first suggested by Eswaran & Pope (1988). This is an SPH adaptation of the module used in the grid-based simulations by Schmidt et al. (2006) and Federrath et al. (2008) and many subsequent works. This module was first used in PHANTOM by Price & Federrath (2010) to compare the statistics of isothermal, supersonic turbulence between SPH and grid methods. Subsequent applications have been to the density variance-Mach number relation Price et al. (2011), subsonic turbulence Price (2012b), supersonic MHD turbulence Tricco et al. (2016b), and supersonic turbulence in a dust-gas mixture Tricco et al.

(2017). Adaptations of this module have also been incorporated into other SPH codes Bauer & Springel (2012); Valdarnini (2016).

The amplitude and phase of each Fourier mode is initialised by creating a set of six random numbers, z_n, drawn from a random Gaussian distribution with unit variance. These are generated by the usual Box-Muller transformation Press et al. (1992) by selecting two uniform random deviates $u_1, u_2 \in [0, 1]$ and constructing the amplitude according to

$$z = \sqrt{2\log(1/u_1)}\cos(2\pi u_2). \tag{19.111}$$

The six Gaussian random numbers are set up according to

$$\boldsymbol{x}_n = \sigma \boldsymbol{z}_n, \tag{19.112}$$

where the standard deviation, σ, is set to the square root of the energy per mode divided by the correlation time, $\sigma = \sqrt{E_\mathrm{m}/t_\mathrm{decay}}$, where both E_m and t_decay are user-specified parameters.

The 'red noise' sequence Uhlenbeck & Ornstein (1930) is generated for each mode at each timestep according to Bartosch (2001)

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = f\boldsymbol{x}_n + \sigma\sqrt{(1-f^2)}\boldsymbol{z}_n, \tag{19.113}$$

where $f = \exp(-\Delta t/t_\mathrm{decay})$ is the damping factor. The resulting sequence has zero mean with root-mean-square equal to the variance. The power spectrum in the time domain can vary from white noise ($P(f)$ constant) to "brown noise" ($P(f) = 1/f^2$).

The amplitudes and phases of each mode are constructed by splitting $\boldsymbol{x}_n$ into two vectors, $\boldsymbol{\Phi}_a$ and $\boldsymbol{\Phi}_b$ of length 3, employed to construct divergence- and curl-free fields according to

$$\boldsymbol{A}_m = w[\boldsymbol{\Phi}_a - (\boldsymbol{\Phi}_a \cdot \hat{\boldsymbol{k}})\hat{\boldsymbol{k}}] + (1-w)[(\boldsymbol{\Phi}_b \cdot \hat{\boldsymbol{k}})\hat{\boldsymbol{k}}], \tag{19.114}$$

$$\boldsymbol{B}_m = w[\boldsymbol{\Phi}_b - (\boldsymbol{\Phi}_b \cdot \hat{\boldsymbol{k}})\hat{\boldsymbol{k}}] + (1-w)[(\boldsymbol{\Phi}_a \cdot \hat{\boldsymbol{k}})\hat{\boldsymbol{k}}], \tag{19.115}$$

where $\boldsymbol{k} = [k_x, k_y, k_z]$ is the mode frequency. The parameter $w \in [0, 1]$ is the 'solenoidal weight', specifying whether the driving should be purely solenoidal ($w = 1$) or purely compressive ($w = 0$) (see Federrath et al. (2008, 2010a)).

The spectral form of the driving is defined in Fourier space, with options for three possible spectral forms

$$C_m = \begin{cases} 1 & \text{uniform} \\ 4(a_\mathrm{min}-1)\frac{(k-k_c)^2}{(k_\mathrm{max}-k_\mathrm{min})^2} + 1 & \text{parabolic} \\ k/k_\mathrm{min}^{-5/3} & \text{Kolmogorov} \end{cases} \tag{19.116}$$

where $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ is the wavenumber, with non-zero amplitudes defined only for wavenumbers where $k_\mathrm{min} \le k \le k_\mathrm{max}$, and a_min is the amplitude of the modes at k_min and k_max in the parabolic case (we use $a_\mathrm{min} = 0$ in the code). The frequency grid is defined using frequencies from $k_x = n_x 2\pi/L_x$ in the x direction, where $n_x \in [0, 20]$ is an integer and L_x is the box size in the $x-$direction, while $k_y = n_y 2\pi/L_y$ and $k_z = n_z 2\pi/L_z$ with $n_y \in [0, 8]$ and $n_z \in [0, 8]$. We then set up four modes for each combination of n_x, n_y and n_z, corresponding to $[k_x, k_y, k_z]$, $[k_x, -k_y, k_z]$, $[k_x, k_y, -k_z]$ and $[k_x, -k_y, -k_z]$. That is, we effectively sum from $[-(N-1)/2, (N-1)/2]$ in the k_y and k_z directions in the discrete Fourier transform, where $N = \max(n_x)$ is the number of frequencies. The default values for k_min and k_max are 2π and 6π, respectively, corresponding to large scale driving of only the first few Fourier modes, so with default settings there are 112 non-zero Fourier modes. The maximum number of modes, defining the array sizes needed to store the stirring information, is currently set to 1000.

We apply the forcing to the particles by computing the discrete Fourier transform over the stirring modes directly, i.e.

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{forcing},a} = f_\mathrm{sol} \sum_{m=1}^{n_\mathrm{modes}} C_m \left[\boldsymbol{A}_m \cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_a) - \boldsymbol{B}_m \sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_a)\right], \tag{19.117}$$

where the factor $f_{\rm sol}$ is defined from the solenoidal weight, w, according to

$$f_{\rm sol} = \sqrt{\frac{3}{n_{\rm dim}}}\sqrt{\frac{3}{1-2w+n_{\rm dim}w^2}}, \tag{19.118}$$

such that the rms acceleration is the same irrespective of the value of w. We default to purely solenoidal forcing ($w = 1$), with the factor $f_{\rm sol}$ thus equal to $\sqrt{3/2}$ by default. For individual timesteps, we update the driving force only when a particle is active.

To aid reproducibility, it is often desirable to pre-generate the entire driving sequence prior to performing a calculation, which can then be written to a file and read back at runtime. This was the procedure used in Price & Federrath (2010), Tricco et al. (2016b) and Tricco et al. (2017).

19.2.6 Accretion disc viscosity

Accretion disc viscosity is implemented in PHANTOM via two different approaches, as described by Lodato & Price (2010).

Disc viscosity using the shock viscosity term

The default approach is to adapt the shock viscosity term to represent a Shakura & Sunyaev (1973) α-viscosity, as originally proposed by Artymowicz & Lubow (1994) and Murray (1996). The key is to note that (19.39) and (19.40) represent a Navier-Stokes viscosity term with a fixed ratio between the bulk and shear viscosity terms Murray (1996); Jubelgas et al. (2004); Lodato & Price (2010); Price (2012b); Meru & Bate (2012). In particular, it can be shown Español & Revenga (2003) that

$$\sum_b \frac{m_b}{\overline{\rho}_{ab}}(\boldsymbol{v}_{ab}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_{ab})\frac{\nabla_a W_{ab}}{|r_{ab}|} \approx \frac{1}{5}\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right) + \frac{1}{10}\nabla^2\boldsymbol{v}, \tag{19.119}$$

where $\overline{\rho}_{ab}$ is some appropriate average of the density. This enables the artificial viscosity term, (19.39), to be translated into the equivalent Navier-Stokes terms. In order for the artificial viscosity to represent a disc viscosity, we make the following modifications Lodato & Price (2010):

1. the viscosity term is applied for both approaching and receding particles,
2. the speed in $v_{\rm sig}$ is set equal to $c_{\rm s}$,
3. a constant $\alpha^{\rm AV}$ is adopted, turning off shock detection switches (Section 19.2.2), and
4. the viscosity term is multiplied by a factor $h/|r_{ab}|$.

The net result is that (19.40) becomes

$$q^a_{ab} = \begin{cases} -\frac{\rho_a h_a}{2|r_{ab}|}\left(\alpha^{\rm AV}c_{{\rm s},a} + \beta_{\rm AV}|\boldsymbol{v}_{ab}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_{ab}|\right)\boldsymbol{v}_{ab}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_{ab}, & \boldsymbol{v}_{ab}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_{ab} < 0 \\ -\frac{\rho_a h_a}{2|r_{ab}|}\alpha^{\rm AV}c_{{\rm s},a}\boldsymbol{v}_{ab}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_{ab}. & \text{otherwise} \end{cases} \tag{19.120}$$

With the above modifications, the shear and bulk coefficients can be translated using (19.119) to give Monaghan (2005); Lodato & Price (2010); Meru & Bate (2012)

$$\nu_{\rm AV} \approx \frac{1}{10}\alpha^{\rm AV}c_{\rm s}h, \tag{19.121}$$

$$\zeta_{\rm AV} = \frac{5}{3}\nu_{\rm AV} \approx \frac{1}{6}\alpha^{\rm AV}c_{\rm s}h. \tag{19.122}$$

The Shakura-Sunyaev prescription is

$$\nu = \alpha_{\rm SS}c_{\rm s}H, \tag{19.123}$$

where H is the scale height. This implies that $\alpha_{\rm SS}$ may be determined from $\alpha_{\rm AV}$ using

$$\alpha_{\rm SS} \approx \frac{\alpha^{\rm AV}}{10}\frac{\langle h\rangle}{H}, \tag{19.124}$$

where $\langle h\rangle$ is the mean smoothing length on particles in a cylindrical ring at a given radius.

In practice, this means that one must uniformly resolve the scale height in order to obtain a constant $\alpha_{\rm SS}$ in the disc. We have achieved this in simulations to date by choosing the initial surface density profile and the power-law index of the temperature profile (when using a locally isothermal equation of state) to ensure that this is the case Lodato & Pringle (2007). Confirmation that the scaling provided by (19.124) is correct is shown in Figure 4 of Lodato & Price (2010) and is checked automatically in the PHANTOM test suite.

In the original implementation Lodato & Price (2010) we also set the $\beta^{\rm AV}$ to zero, but this is dangerous if the disc dynamics are complex as there is nothing to prevent particle penetration (see Section 19.2.2). Hence in the current version of the code, $\beta^{\rm AV} = 2$ by default even if disc viscosity is set, but is only applied to approaching particles (c.f. 19.120). Applying any component of viscosity to only approaching particles can affect the sign of the precession induced in warped discs Lodato & Pringle (2007), but in general retaining the $\beta^{\rm AV}$ term is safer with no noticeable effect on the overall dissipation due to the second order dependence of this term on resolution.

Using $\alpha^{\rm AV}$ to set the disc viscosity has two useful consequences. First, it forces one to consider whether or not the scale height, H, is resolved. Second, knowing the value of $\alpha^{\rm AV}$ is helpful, as $\alpha^{\rm AV} \approx 0.1$ represents the lower bound below which a physical viscosity is not resolved in SPH (that is, viscosities smaller than this produce disc spreading independent of the value of $\alpha^{\rm AV}$; see Bate (1995); Meru & Bate (2012)), while $\alpha^{\rm AV} > 1$ constrains the timestep (Section 19.2.3).

Disc viscosity using the Navier-Stokes viscosity terms

An alternative approach is to compute viscous terms directly from the Navier-Stokes equation. Details of how the Navier-Stokes terms are represented are given below (Section 19.2.7), but for disc viscosity a method for determining the kinematic viscosity is needed, which in turn requires specifying the scale height as a function of radius. We use

$$H_a \equiv \frac{c_{\rm s}^a}{\Omega(R_a)}, \tag{19.125}$$

where we assume Keplerian rotation $\Omega = \sqrt{GM/R^3}$ and $c_{\rm s}$ is obtained for a given particle from the equation of state (which for consistency must be either isothermal or locally isothermal). It is important to note that this restricts the application of this approach only to discs where R can be meaningfully defined, excluding, for example, discs around binary stars.

The shear viscosity is then set using

$$\nu_a = \alpha_{\rm SS} c_{\rm s}^a H_a, \tag{19.126}$$

where $\alpha_{\rm SS}$ is a predefined/input parameter. The timestep is constrained using $C_{\rm visc}h^2/\nu$ as described in Section 19.2.7. The advantage to this approach is that the shear viscosity is set directly and does not depend on the smoothing length. However, as found by Lodato & Price (2010), it remains necessary to apply some bulk viscosity to capture shocks and prevent particle penetration of the disc midplane, so one should apply the shock viscosity as usual. Using a shock-detection switch (Section 19.2.2) means that this is usually not problematic. This formulation of viscosity was used in Facchini et al. (2013).

19.2.7 Navier-Stokes viscosity

Physical viscosity is implemented as described in Lodato & Price (2010). Here, (19.23) and (19.24) are replaced by the compressible Navier-Stokes equations, i.e.

$$\frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial S^{ij}_{\rm NS}}{\partial x^j} + \Pi_{\rm shock} + \boldsymbol{a}_{\rm ext}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{a}_{\rm sink-gas} + \boldsymbol{a}_{\rm selfgrav}, \tag{19.127}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{P}{\rho}(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) + \Lambda_{\rm visc} + \Lambda_{\rm shock} - \Lambda_{\rm cool}, \tag{19.128}$$

with the stress tensor given by

$$S^{ij}_{\rm NS} = \left[P - \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta\right)\frac{\partial v^k}{\partial x^k}\right]\delta^{ij} - \eta\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i}\right) \tag{19.129}$$

where δ^{ij} is the Kronecker delta, and ζ and η are the bulk and shear viscosity coefficients, related to the volume and kinematic shear viscosity coefficients by $\zeta_v = \zeta/\rho$ and $\nu \equiv \eta/\rho$.

Physical viscosity using two first derivatives

As there is no clear consensus on the best way to implement physical viscosity in SPH, PHANTOM currently contains two implementations. The simplest is to use two first derivatives, which is essentially that proposed by Flebbe et al. (1994), Watkins et al. (1996) and Sijacki & Springel (2006). In this case, (19.127) is discretised in the standard manner using

$$\frac{\mathrm{d}v^i_a}{\mathrm{d}t} = -\sum_b m_b\left[\frac{S^{ij}_{{\rm NS},a}}{\Omega_a\rho_a^2}\frac{\partial W_{ab}(h_a)}{\partial x^j_a} + \frac{S^{ij}_{{\rm NS},b}}{\Omega_b\rho_b^2}\frac{\partial W_{ab}(h_b)}{\partial x^j_a}\right] + \Pi^i_{\rm shock} + a^i_{\rm ext}(\boldsymbol{r},t) + a^i_{\rm sink-gas} + a^i_{\rm selfgrav}, \tag{19.130}$$

where the velocity gradients are computed during the density loop using

$$\frac{\partial v^i_a}{\partial x^j_a} = -\frac{1}{\Omega_a\rho_a}\sum_b m_b v^i_{ab}\nabla^j_a W_{ab}(h_a). \tag{19.131}$$

Importantly, the differenced SPH operator is used in (19.131) whereas (19.130) uses the symmetric gradient operator. The use of conjugate operators[7] is a common requirement in SPH in order to guarantee energy conservation and a positive definite entropy increase from dissipative terms Price (2010); Tricco & Price (2012). Total energy conservation means that

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \sum_a m_a\left(\frac{\mathrm{d}u_a}{\mathrm{d}t} + v^i_a\frac{\mathrm{d}v^i_a}{\mathrm{d}t}\right) = 0. \tag{19.132}$$

This implies a contribution to the thermal energy equation given by

$$\frac{\mathrm{d}u_a}{\mathrm{d}t} = \frac{S^{ij}_{{\rm NS},a}}{\Omega_a\rho_a^2}\sum_b m_b v^i_{ab}\nabla^j_a W_{ab}(h_a), \tag{19.133}$$

which can be seen to reduce to (19.24) in the inviscid case ($S^{ij}_{\rm NS} = P\delta^{ij}$), but in general is an SPH expression for

$$\frac{\mathrm{d}u_a}{\mathrm{d}t} = -\frac{S^{ij}_{{\rm NS},a}}{\rho_a}\frac{\partial v^i_a}{\partial x^j_a}. \tag{19.134}$$

[7]The SPH difference operator is discretely skew-adjoint to the symmetric operator Cummins & Rudman (1999).

Using $S^{ij}_{\rm NS} = S^{ji}_{\rm NS}$ we have

$$\frac{{\rm d}u_a}{{\rm d}t} = -\frac{1}{2}\frac{S^{ij}_{{\rm NS},a}}{\rho_a}\left(\frac{\partial v^i_a}{\partial x^j_a} + \frac{\partial v^j_a}{\partial x^i_a}\right), \tag{19.135}$$

which, using (19.129), gives

$$\Lambda_{\rm visc} = \left(\zeta_{v,a} - \frac{2}{3}\nu_a\right)(\nabla\cdot\boldsymbol{v})^2_a + \frac{\nu_a}{2}\left(\frac{\partial v^i_a}{\partial x^j_a} + \frac{\partial v^j_a}{\partial x^i_a}\right)^2. \tag{19.136}$$

By the square in the last term we mean the tensor summation $\sum_j\sum_i T_{ij}T_{ij}$, where $T_{ij} \equiv \partial v^i_a/\partial x^j_a + \partial v^j_a/\partial x^i_a$. The heating term is therefore positive definite provided that the velocity gradients and divergence are computed using the difference operator (19.131), both in (19.136) and when computing the stress tensor (19.129).

The main disadvantage of the first derivatives approach is that it requires storing the strain tensor for each particle, i.e. six additional quantities when taking account of symmetries.

Physical viscosity with direct second derivatives

The second approach is to use SPH second derivative operators directly. Here we use modified versions of the identities given by Español & Revenga (2003) (see also Monaghan (2005); Price (2012a)), namely

$$\nabla\left[A(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\right] \approx -\sum_b m_b\left[\frac{A_a}{\rho_a}G_{ab}(h_a) + \frac{A_b}{\rho_b}G_{ab}(h_b)\right](\boldsymbol{v}_{ab}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_{ab})\hat{\boldsymbol{r}}_{ab}, \tag{19.137}$$

$$\nabla\cdot(C\nabla\boldsymbol{v}) \approx -\sum_b m_b\left[\frac{C_a}{\rho_a}G_{ab}(h_a) + \frac{C_b}{\rho_b}G_{ab}(h_b)\right]\boldsymbol{v}_{ab}, \tag{19.138}$$

where $G_{ab} \equiv -2F_{ab}/|r_{ab}|$, i.e. the scalar part of the kernel gradient divided by the particle separation, which can be thought of as equivalent to defining a new "second derivative kernel" Brookshaw (1985, 1994); Price (2012a); Price & Laibe (2015a).

From the compressible Navier-Stokes equations, (19.127) with (19.129), the coefficients in these two terms are

$$A \equiv \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right), \tag{19.139}$$

$$C \equiv \frac{1}{2}\eta, \tag{19.140}$$

so that we can simply use

$$\left(\frac{{\rm d}v^i_a}{{\rm d}t}\right)_{\rm visc} = \sum_b \frac{m_b}{\overline{\rho}_{ab}}(\tau_a + \tau_b)(\boldsymbol{v}_{ab}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_{ab})\hat{r}^i_{ab}G_{ab} + \sum_b \frac{m_b}{\overline{\rho}_{ab}}(\kappa_a + \kappa_b)v^i_{ab}G_{ab}, \tag{19.141}$$

where

$$\tau = \frac{5}{2}A, \tag{19.142}$$

$$\kappa = \left(C - \frac{A}{2}\right). \tag{19.143}$$

The corresponding heating terms in the thermal energy equation are given by

$$\Lambda_{\rm visc} = \frac{\tau_a}{\rho_a}\sum_b m_b(\boldsymbol{v}_{ab}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_{ab})^2 G_{ab}(h_a) + \frac{\kappa_a}{\rho_a}\sum_b m_b(\boldsymbol{v}_{ab})^2 G_{ab}(h_a). \quad (19.144)$$

This is the default formulation of Navier-Stokes viscosity in the code since it does not require additional storage. In practice we have found little difference between the two formulations of physical viscosity, but this would benefit from a detailed study. In general one might expect the two first derivatives formulation to offer a less noisy estimate at the cost of additional storage. However, direct second derivatives are the method used in 'Smoothed Dissipative Particle Dynamics' Español & Revenga (2003).

Timestep constraint

Both approaches to physical viscosity use explicit timestepping, and therefore imply a constraint on the timestep given by

$$\Delta t^a_{\rm visc} \equiv C_{\rm visc}\frac{h_a^2}{\nu_a}, \quad (19.145)$$

where $C_{\rm visc} = 0.25$ by default Brookshaw (1994). When physical viscosity is turned on, this constraint is included with other timestep constraints according to (19.77).

Physical viscosity and the tensile instability

Caution is required in the use of physical viscosity at high Mach number, since negative stress can lead to the tensile instability Morris (1996b); Monaghan (2000); Gray et al. (2001). For subsonic applications this is usually not a problem since the strain tensor and velocity divergence are small compared to the pressure. In the current code we simply emit a warning if physical viscosity leads to negative stresses during the calculation, but this would benefit from a detailed study.

Physical viscosity and angular momentum conservation

Neither method for physical viscosity exactly conserves angular momentum because the force is no longer directed along the line of sight joining the particles. However, the error is usually small (see discussion in Bonet & Lok (1999), Section 5 of Price & Monaghan (2004b) or Hu & Adams (2006)). Recently, Müller et al. (2015) have proposed an algorithm for physical viscosity in SPH that explicitly conserves angular momentum by tracking particle spin, which may be worth investigating.

19.2.8 Sink particles

Sink particles were introduced into SPH by Bate et al. (1995) in order to follow star formation simulations beyond the point of fragmentation. In PHANTOM, these are treated separately to the SPH particles, and interact with other particles, including other sink particles, only via gravity. The differences with other point mass particles implemented in the code (e.g. dust, stars and dark matter) are that i) the gravitational interaction is computed using a direct N^2 summation which is *not* softened by default (i.e., the $N-$body algorithm is collisional); ii) they are allowed to accrete gas; and iii) they store the accreted angular momentum and other extended properties, such as the accreted mass. Sink particles are evolved in time using the RESPA algorithm (Section 19.2.3), which is second order accurate, symplectic, and allows sink particles to evolve on shorter timesteps compared to SPH particles.

Sink particle accelerations

The equations of motion for a given sink particle, i, are

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t} = -\sum_{j=1}^{N_{\rm sink}} GM_j\phi'_{ij}(\epsilon)\hat{\boldsymbol{r}}_{ij} - \sum_{b=1}^{N_{\rm part}} Gm_b\phi'_{ib}(\epsilon_{ib})\hat{\boldsymbol{r}}_{ib}, \tag{19.146}$$

where ϕ'_{ab} is the usual softening kernel (Section 19.2.12), $N_{\rm part}$ is the total number of gas particles, and $N_{\rm sink}$ is the total number of sink particles. The sink-gas softening length, ϵ_{ib}, is defined as the maximum of the (fixed) softening length defined for the sink particles, ϵ, and the softening length of the gas particle, ϵ_b. That is, $\epsilon_{ib} \equiv \max(\epsilon, \epsilon_b)$. SPH particles receive a corresponding acceleration

$$\boldsymbol{a}^a_{\rm sink-gas} = -\sum_{j=1}^{N_{\rm sink}} GM_j\phi'_{aj}(\epsilon_{aj})\hat{\boldsymbol{r}}_{aj}. \tag{19.147}$$

Softening of sink-gas interactions is not applied if the softening length for sink particles is set to zero, in which case the sink-gas accelerations reduce simply to

$$\boldsymbol{a}^a_{\rm sink-gas} = -\sum_{j=1}^{N_{\rm sink}} \frac{GM_j}{|\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_j|^3}\boldsymbol{r}_{aj}. \tag{19.148}$$

This is the default behaviour when sink particles are used in the code. Softening of sink-gas interactions is useful to model a point mass particle that does not accrete gas (e.g. by setting the accretion radius to zero). For example, we used a softened sink particle to simulate the core of the red giant in Iaconi et al. (2017). The sink-sink interaction is unsoftened by default ($\epsilon = 0$), giving the usual

$$\boldsymbol{a}^i_{\rm sink-sink} = -\sum_{j=1}^{N_{\rm sink}} \frac{GM_j}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|^3}\boldsymbol{r}_{ij}. \tag{19.149}$$

Caution is required when integrating tight binary or multiple systems when $\epsilon = 0$ to ensure that the timestep conditions (Section 19.2.3) are strict enough.

Accretion onto sink particles

Accretion of gas particles onto a sink particle occurs when a gas particle passes a series of accretion checks within the accretion radius $r_{\rm acc}$ of a sink particle (set in the initial conditions or when the sink particle is created; see Section 19.2.8). First, a gas particle is indiscriminately accreted without undergoing any additional checks if it falls within $f_{\rm acc}r_{\rm acc}$, where $0 \leq f_{\rm acc} \leq 1$ (default $f_{\rm acc} = 0.8$). In the boundary region $f_{\rm acc}r_{\rm acc} < r < r_{\rm acc}$, a gas particle undergoes accretion if:

1. $|\boldsymbol{L}_{ai}| < |\boldsymbol{L}_{\rm acc}|$, that is, its specific angular momentum is less than that of a Keplerian orbit at $r_{\rm acc}$,
2. $e = \frac{v_{ai}^2}{2} - \frac{GM_i}{r_{ai}} < 0$, i.e., it is gravitationally bound to the sink particle, and
3. e for this gas-sink pair is smaller than e with any other sink particle, that is, out of all sink particles, the gas particle is most bound to this one.

In the above conditions, $\boldsymbol{L}_{ai}$ is the relative specific angular momentum of the gas-sink pair, $a - i$, defined by

$$|\boldsymbol{L}^2_{ai}| \equiv |\boldsymbol{r}_{ai} \times \boldsymbol{v}_{ai}|^2 = r^2_{ai}v^2_{ai} - (\boldsymbol{r}_{ai} \cdot \boldsymbol{v}_{ai})^2, \tag{19.150}$$

while $|\boldsymbol{L}_{\rm acc}| = r_{\rm acc}^2\Omega_{\rm acc}$ is the angular momentum at $r_{\rm acc}$, where $\Omega_{\rm acc} = \sqrt{GM_i/r_{ai}^3}$ is the Keplerian angular speed at $r_{\rm acc}$, v_{ai} and r_{ai} are the relative velocity and position, respectively, and M_i is the mass of the sink particle.

When a particle, a, passes the accretion checks, then the mass, position, velocity, acceleration and spin angular momentum of the sink particle are updated according to

$$\boldsymbol{r}_i = \frac{(\boldsymbol{r}_a m_a + \boldsymbol{r}_i M_i)}{M_i + m_a}, \tag{19.151}$$

$$\boldsymbol{v}_i = \frac{(\boldsymbol{v}_a m_a + \boldsymbol{v}_i M_i)}{M_i + m_a}, \tag{19.152}$$

$$\boldsymbol{a}_i = \frac{(\boldsymbol{a}_a m_a + \boldsymbol{a}_i M_i)}{M_i + m_a}, \tag{19.153}$$

$$\boldsymbol{S}_i = \boldsymbol{S}_i + \frac{m_a M_i}{M_i + m_a}\left[(\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_i) \times (\boldsymbol{v}_a - \boldsymbol{v}_i)\right], \tag{19.154}$$

$$M_i = M_i + m_a. \tag{19.155}$$

This ensures that mass, linear momentum and angular momentum (but not energy) are conserved by the accretion process. The accreted mass as well as the total mass for each sink particle is stored to avoid problems with round-off error in the case where the particle masses are much smaller than the sink mass. Accreted particles are tagged by setting their smoothing lengths negative. Those particles with $h \leq 0$ are subsequently excluded when the kd-tree is built.

Sink particle boundary conditions

No special sink particle boundary conditions are implemented in PHANTOM at present. More advanced boundary conditions to regularise the density, pressure and angular momentum near a sink have been proposed by Bate et al. (1995) and used in Bate & Bonnell (1997), and proposed again more recently by Hubber et al. (2013b). While these conditions help to regularise the flow near the sink particle, they can also cause problems — particularly the angular momentum boundary condition if the disc near the sink particle has complicated structure such as spiral density waves (Bate, private communication 2014). Often it is more cost effective to simply reduce the accretion radius of the sink. This may change in future code versions.

Dynamic sink particle creation

As described in Bate et al. (1995), it is also possible to create sink particles on-the-fly provided certain physical conditions are met and self-gravity is turned on (Section 19.2.12). The primary conditions required for sink particle formation are that the density of a given particle exceeds some threshold physical density somewhere in the domain, and that this density peak occurs more than a critical distance $r_{\rm crit}$ from an existing sink. Once these conditions are met on a particular particle, a, the creation of a new sink particle occurs by passing the following conditions Bate et al. (1995):

1. the particle is a gas particle,
2. $\nabla \cdot \boldsymbol{v}_a \leq 0$, that is, gas surrounding the particle is at rest or collapsing,
3. $h_a < r_{\rm acc}/2$, i.e., the smoothing length of the particle is less than half of the accretion radius,
4. all neighbours within $r_{\rm acc}$ are currently active,
5. the ratio of thermal to gravitational energy of particles within $r_{\rm acc}$, $\alpha_{\rm J}$, satisfies $\alpha_J \leq 1/2$,
6. $\alpha_{\rm J} + \beta_{\rm rot} \leq 1$, where $\beta_{\rm rot} = |e_{\rm rot}|/|e_{\rm grav}|$ is the ratio of rotational energy to the magnitude of the gravitational energy for particles within $r_{\rm acc}$, and
7. $e_{\rm tot} < 0$, that is, the total energy of particles within $r_{\rm acc}$ is negative (i.e. the clump is gravitationally bound).

8. the particle is at a local potential minimum, i.e. Φ is less than Φ computed on all other particles within $r_{\rm acc}$ Federrath et al. (2010b)

A new sink particle is created at the position of particle a if these checks are passed, and immediately the particles within $r_{\rm acc}$ are accreted by calling the routine described in Section 19.2.8. The checks above are the same as those in Bate et al. (1995), with the addition of the additional check from Federrath et al. (2010b) to ensure that sink particles are only created in a local minimum of the gravitational potential.

The various energies used to evaluate the criteria above are computed according to

$$e_{\rm kin} = \frac{1}{2}\sum_{b=1}^{N<r_{\rm acc}} m_b(\boldsymbol{v}_b - \boldsymbol{v}_a)^2, \tag{19.156}$$

$$e_{\rm therm} = \sum_{b=1}^{N<r_{\rm acc}} m_b u_b, \tag{19.157}$$

$$e_{\rm grav} = -\frac{1}{2}\sum_{b=1}^{N<r_{\rm acc}}\sum_{c=b}^{N<r_{\rm acc}} Gm_b m_c, \times \left[\phi(|\boldsymbol{r}_b - \boldsymbol{r}_c|, h_b) + \phi(|\boldsymbol{r}_b - \boldsymbol{r}_c|, h_c)\right], \tag{19.158}$$

$$e_{\rm tot} = e_{\rm kin} + e_{\rm therm} + e_{\rm grav}, \tag{19.159}$$

$$e_{\rm rot} \equiv \sqrt{e^2_{{\rm rot},x} + e^2_{{\rm rot},y} + e^2_{{\rm rot},z}}, \tag{19.160}$$

$$e_{{\rm rot},x} \equiv \frac{1}{2}\sum_{b=1}^{N<r_{\rm acc}} m_b \frac{L^2_{ab,x}}{\sqrt{(y_a - y_b)^2 + (z_a - z_b)^2}}, \tag{19.161}$$

$$e_{{\rm rot},y} \equiv \frac{1}{2}\sum_{b=1}^{N<r_{\rm acc}} m_b \frac{L^2_{ab,y}}{\sqrt{(x_a - x_b)^2 + (z_a - z_b)^2}}, \tag{19.162}$$

$$e_{{\rm rot},z} \equiv \frac{1}{2}\sum_{b=1}^{N<r_{\rm acc}} m_b \frac{L^2_{ab,z}}{\sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}}, \tag{19.163}$$

where $\boldsymbol{L}_{ab} \equiv (\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b) \times (\boldsymbol{v}_a - \boldsymbol{v}_b)$ is the specific angular momentum between a pair of particles, and ϕ is the gravitational softening kernel (defined in Section 19.2.12), which has units of inverse length. Adding the contribution from *all* pairs, $b-c$, within the cloud is required to obtain the total potential of the cloud.

Sink particle timesteps

Sink particles are integrated together with a global, but adaptive, timestep, following the inner loop of the RESPA algorithm given in (19.80)–(19.83) corresponding to a second-order Leapfrog integration. The timestep is controlled by the minimum of the sink-gas timestep, (19.75), and a sink-sink timestep Dehnen & Read (2011)

$$\Delta t_{\rm sink-sink} \equiv \min_i \left(C_{\rm force}\eta_\Phi \sqrt{\frac{|\Phi_i^{\rm sink-sink}|}{|\nabla\Phi_i^{\rm sink-sink}|^2}} \right), \tag{19.164}$$

where the potential and gradient include other sink particles, plus any external potentials applied to sink particles except the sink-gas potential. We set $\eta_\Phi = 0.05$ by default, resulting in $\sim$ 300–500 steps per orbit for a binary orbit with the default $C_{\rm force} = 0.25$ (see Section 19.5.5).

More accurate integrators such as the fourth-order Hermite scheme Makino & Aarseth (1992) or the fourth order symplectic schemes proposed by Omelyan et al. (2002) or Chin & Chen (2005) are not yet implemented in PHANTOM, but it would be a worthwhile effort to incorporate one of these in a future code version. See Hubber et al. (2013a) for a recent implementation of a 4th order Hermite scheme for sink particles in SPH.

19.2.9 Stellar physics

A tabulated equation of state (EOS) can be used to take account of the departure from an ideal gas, for example due to changes in ionization or molecular dissociation and recombination. This tabulated EOS in PHANTOM is adapted from the $\log P_{\rm gas} - T$ EOS tables provided with the open source package Modules for Experiments in Stellar Astrophysics MESA Paxton et al. (2011). Details of the data, originally compiled from blends of equations of state from Saumon et al. (1995) (SCVH), Timmes & Swesty (2000), Rogers & Nayfonov (2002), Potekhin & Chabrier (2010) and for an ideal gas, are outlined by Paxton et al. (2011).

In our implementation (adapted from original routines for the MUSIC code; Goffrey et al. (2016)), we compute the pressure and other required EOS variables for a particular composition by interpolation between sets of tables for different hydrogen abundance $X = 0.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ and metallicity $Z = 0.0, 0.02, 0.04$. Pressure is calculated with bicubic interpolation, and $\Gamma_1 \equiv \partial \ln P / \partial \ln \rho|_s$ with bilinear interpolation, in $\log u$ and $\log V \equiv \log \rho - 0.7 \log u + 20$. The tables are currently valid in the ranges $10.5 \leq \log u \leq 17.5$ and $0.0 \leq \log V \leq 14.0$. Values requested outside the tables are currently computed by linear extrapolation. This triggers a warning to the user.

We have not tested the thermodynamic consistency of our interpolation scheme from the tables, but this is an important consideration Timmes & Arnett (1999).

19.2.10 Magnetohydrodynamics

PHANTOM implements the smoothed particle magnetohydrodynamics (SPMHD) algorithm described in Price (2012a) and Tricco & Price (2012, 2013), based on the original work by Phillips & Monaghan (1985) and Price & Monaghan (2004a,b, 2005). PHANTOM was previously used to test a vector potential formulation Price (2010), but this algorithm has been subsequently removed from the code due to its poor performance (see Price (2010)).

The important difference between PHANTOM and the GADGET implementation of SPMHD Dolag & Stasyszyn (2009); Bürzle et al. (2011a,b), which also implements the core algorithms from Price & Monaghan (2004a,b, 2005), is our use of the divergence-cleaning algorithm from Tricco & Price (2012, 2013) and Tricco et al. (2016a). This is vital for preserving the divergence-free (no monopoles) condition on the magnetic field.

For recent applications of PHANTOM to MHD problems, see e.g. Tricco et al. (2016b), Dobbs et al. (2016), Bonnerot et al. (2017), Forgan et al. (2017) and Wurster et al. (2016, 2017).

Equations of magnetohydrodynamics

PHANTOM solves the equations of magnetohydrodynamics in the form

$$\frac{{\rm d}v^i}{{\rm d}t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial M^{ij}}{\partial x^j} + \Pi_{\rm shock} + f^i_{\rm divB} + a^i_{\rm ext} + a^i_{\rm sink-gas} + a^i_{\rm selfgrav}, \tag{19.165}$$

$$\frac{{\rm d}u}{{\rm d}t} = -\frac{P}{\rho}\left(\nabla \cdot \boldsymbol{v}\right) + \Lambda_{\rm shock} - \Lambda_{\rm cool}, \tag{19.166}$$

$$\frac{\rm d}{{\rm d}t}\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\left[\left(\boldsymbol{B}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v} - \nabla\psi + \mathcal{D}_{\rm diss}\right], \tag{19.167}$$

$$\frac{\rm d}{{\rm d}t}\left(\frac{\psi}{c_{\rm h}}\right) = -c_{\rm h}\left(\nabla\cdot\boldsymbol{B}\right) - \frac{1}{2}\frac{\psi}{c_{\rm h}}\left(\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right) - \frac{\psi}{c_{\rm h}\tau_{\rm c}}, \tag{19.168}$$

where $\boldsymbol{B}$ is the magnetic field, ψ is a scalar used to control the divergence error in the magnetic field (see Section 19.2.10, below), and $\mathcal{D}_{\rm diss}$ represents magnetic dissipation terms (Sections 19.2.10 and 19.2.11, below). The Maxwell stress tensor, M_{ij}, is given by

$$M^{ij} = \left(P + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\right)\delta^{ij} - \frac{B^iB^j}{\mu_0}, \tag{19.169}$$

where δ^{ij} is the Kronecker delta and μ_0 is the permeability of free space. A source term related to the numerically-induced divergence of the magnetic field, given by

$$f^i_{\rm divB} \equiv -\frac{B^i}{\rho}\left(\nabla\cdot\boldsymbol{B}\right), \tag{19.170}$$

is necessary to prevent the tensile instability in SPMHD Phillips & Monaghan (1985); Monaghan (2000); Børve et al. (2001); Price (2012a). With this source term, the equation set for ideal MHD in the absence of the divergence cleaning field, ψ, is formally the same as in the Powell et al. (1999) 8-wave scheme Price (2012a), meaning that the divergence errors in the magnetic field are advected by the flow, but not dissipated, unless cleaning is used.

Discrete equations

The discrete version of (19.165) follows the same procedure as for physical viscosity (Section 19.2.7), i.e.

$$\begin{aligned}\frac{{\rm d}v^i_a}{{\rm d}t} =& -\sum_b m_b\left[\frac{M^{ij}_a}{\Omega_a\rho_a^2}\frac{\partial W_{ab}(h_a)}{\partial x^j_a} + \frac{M^{ij}_b}{\Omega_b\rho_b^2}\frac{\partial W_{ab}(h_b)}{\partial x^j_a}\right]\\ &+ \Pi^a_{\rm shock} + f^i_{{\rm divB},a} + a^i_{{\rm ext},a} + a^i_{\rm sink-gas}\\ &+ a^i_{\rm selfgrav},\end{aligned} \tag{19.171}$$

where M^{ij}_a is defined according to (19.169), $f_{\rm divB}$ is a correction term for stability (discussed below), and accelerations due to external forces are as described in Section 19.2.4.

Equations (19.167) and (19.168) are discretised according to Price & Monaghan (2005); Tricco & Price (2012); Tricco et al. (2016a)

$$\begin{aligned}\frac{\rm d}{{\rm d}t}\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}\right)_a =& -\frac{1}{\Omega_a\rho_a^2}\sum_b m_b\boldsymbol{v}_{ab}\left[\boldsymbol{B}_a\cdot\nabla_a W_{ab}(h_a)\right]\\ &-\sum_b m_b\left[\frac{\psi_a}{\Omega_a\rho_a^2}\nabla_a W_{ab}(h_a) + \frac{\psi_b}{\Omega_b\rho_b^2}\nabla_a W_{ab}(h_b)\right]\\ &+\frac{1}{\rho_a}\mathcal{D}^a_{\rm diss},\end{aligned} \tag{19.172}$$

$$\begin{aligned}\frac{\rm d}{{\rm d}t}\left(\frac{\psi}{c_{\rm h}}\right)_a =& \frac{c^a_{\rm h}}{\Omega_a\rho_a}\sum_b m_b\boldsymbol{B}_{ab}\cdot\nabla_a W_{ab}(h_a)\\ &+\frac{\psi_a}{2c^a_{\rm h}\Omega_a\rho_a}\sum_b m_b\boldsymbol{v}_{ab}\cdot\nabla_a W_{ab}(h_a) - \frac{\psi_a}{c^a_{\rm h}\tau^a_{\rm c}}.\end{aligned} \tag{19.173}$$

The first term in (19.173) uses the divergence of the magnetic field discretised according to

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{B})_a = -\frac{1}{\Omega_a\rho_a}\sum_b m_b\left(\boldsymbol{B}_a-\boldsymbol{B}_b\right)\cdot\nabla_a W_{ab}(h_a), \tag{19.174}$$

which is therefore the operator we use when measuring the divergence error (c.f. Tricco & Price (2012)).

Code units

An additional unit is required when magnetic fields are included to describe the unit of magnetic field. We adopt code units such that $\mu_0 = 1$, as is common practice. The unit scalings for the magnetic field can be determined from the definition of the Alfvén speed,

$$v_{\rm A} \equiv \sqrt{\frac{B^2}{\mu_0\rho}}. \tag{19.175}$$

Since the Alfvén speed has dimensions of length per unit time, this implies a unit for the magnetic field, $u_{\rm mag}$, given by

$$u_{\rm mag} = \left(\frac{\mu_0 u_{\rm mass}}{u_{\rm dist} u_{\rm time}}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{19.176}$$

Converting the magnetic field in the code to physical units therefore only requires specifying μ_0 in the relevant unit system. In particular, it avoids the differences between SI and cgs units in how the charge unit is defined, since μ_0 is dimensionless and equal to 4π in cgs units but has dimensions that involve charge in SI units.

Tensile instability correction

The correction term $f_{\rm divB}$ is necessary to avoid the tensile instability — a numerical instability where particles attract each other along field lines — in the regime where the magnetic pressure exceeds the gas pressure, that is, when plasma $\beta \equiv P/\frac{1}{2}B^2 < 1$ Phillips & Monaghan (1985). The correction term is computed using the symmetric divergence operator Børve et al. (2001); Price (2012a); Tricco & Price (2012)

$$f^i_{{\rm divB},a} = -\hat{B}^i_a \sum_b m_b \left[\frac{\boldsymbol{B}_a \cdot \nabla_a W_{ab}(h_a)}{\Omega_a \rho_a^2} + \frac{\boldsymbol{B}_b \cdot \nabla_a W_{ab}(h_b)}{\Omega_b \rho_b^2}\right]. \tag{19.177}$$

Since this term violates momentum conservation to the extent that the $\nabla \cdot \boldsymbol{B}$ term is non-zero, several authors have proposed ways to minimise its effect. Børve et al. (2004) showed that stability could be achieved with $\hat{B}^i = \frac{1}{2}B^i$ and also proposed a scheme for scaling this term to zero for $\beta > 1$. Barnes et al. (2012) similarly advocated using a factor of $\frac{1}{2}$ in this term. However, Tricco & Price (2012) showed that this could lead to problematic effects (their Figure 12). In PHANTOM, we use

$$\hat{B}^i = \begin{cases} B^i & \beta < 2, \\ [(10-\beta)B^i]/8 & 2 < \beta < 10, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{19.178}$$

to provide numerical stability in the strong field regime while maintaining conservation of momentum when $\beta > 10$. This also helps to reduce errors in the MHD wave speed caused by the correction term Iwasaki (2015).

Shock capturing

The shock capturing term in the momentum equation for MHD is identical to (19.39) and (19.40) except that the signal speed becomes Price & Monaghan (2004a, 2005); Price (2012a)

$$v_{{\rm sig},a} = \alpha^{\rm AV}_a v_a + \beta^{\rm AV} |\boldsymbol{v}_{ab} \cdot \hat{\boldsymbol{r}}_{ab}|, \tag{19.179}$$

where

$$v_a = \sqrt{c^2_{{\rm s},a} + v^2_{{\rm A},a}} \tag{19.180}$$

is the fast magnetosonic speed. Apart from this, the major difference to the hydrodynamic case is the addition of an artificial resistivity term to capture shocks and discontinuities in the magnetic field (i.e. current sheets). This is given by

$$\mathcal{D}^a_{\rm diss} = \frac{\rho_a}{2} \sum_b m_b \left[\frac{v^B_{{\rm sig},a}}{\rho_a^2}\frac{F_{ab}(h_a)}{\Omega_a} + \frac{v^B_{{\rm sig},b}}{\rho_b^2}\frac{F_{ab}(h_b)}{\Omega_b}\right] \boldsymbol{B}_{ab}, \tag{19.181}$$

where $v^B_{\rm sig,a}$ is an appropriate signal speed (see below) multiplied by a dimensionless coefficient, α^B. The corresponding contribution to the thermal energy from the resistivity term in (19.42) is given by

$$\Lambda_{\rm artres} = -\frac{1}{4}\sum_b m_b \left[\frac{v^B_{{\rm sig},a}}{\rho_a^2}\frac{F_{ab}(h_a)}{\Omega_a} + \frac{v^B_{{\rm sig},b}}{\rho_b^2}\frac{F_{ab}(h_b)}{\Omega_b}\right](\boldsymbol{B}_{ab})^2. \tag{19.182}$$

As with the artificial viscosity, (19.181) and (19.182) are the SPH representation of a physical resistivity term, $\eta\nabla^2\boldsymbol{B}$, but with a coefficient that is proportional to resolution Price & Monaghan (2004a). The resistive dissipation rate from the shock capturing term is given by

$$\eta \approx \frac{1}{2}\alpha^B v^B_{\rm sig}|r_{ab}|, \tag{19.183}$$

where $|r_{ab}| \propto h$.

Switch to reduce resistivity

PHANTOM previously used the method proposed by Tricco & Price (2013) to reduce the dissipation in the magnetic field away from shocks and discontinuities. The signal velocity, $v^B_{\rm sig}$, was set equal to the magnetosonic speed (Equation 19.180) multiplied by the dimensionless coefficient α_B, which was set according to

$$\alpha^B_a = \min\left(h_a\frac{|\nabla\boldsymbol{B}_a|}{|\boldsymbol{B}_a|}, \alpha^B_{\rm max}\right), \tag{19.184}$$

where $\alpha^B_{\rm max} = 1.0$ by default and $|\nabla\boldsymbol{B}_a|$ is the 2-norm of the gradient tensor, i.e. the root mean square of all 9 components of this tensor. Unlike the viscous dissipation, this is set based on the instantaneous values of h and $\boldsymbol{B}$ and there is no source/decay equation involved, as Tricco & Price (2013) found it to be unnecessary. Since α^B is proportional to resolution, from (19.183) we see that this results in dissipation that is effectively second order ($\propto h^2$). When individual particle timesteps were used, inactive particles retained their value of α^B from the last timestep they were active.

More recently we have found that a better approach, similar to that used for artificial conductivity, is to simply set $\alpha^{\rm B} = 1$ for all particles and set the signal speed for artificial resistivity according to

$$v^B_{\rm sig} = |\boldsymbol{v}_{ab}\times\hat{\boldsymbol{r}}_{ab}|. \tag{19.185}$$

We find that this produces better results on all of our tests (Section 19.5.6), in particular, producing zero numerical dissipation on the current loop advection test (Section 19.5.6). As with the Tricco & Price (2013) switch, it gives second-order dissipation in the magnetic field (demonstrated in Section 19.5.6; Figure 19.26). This is now the default treatment for artificial resistivity in PHANTOM.

Conservation properties

The total energy when using MHD is given by

$$E = \sum_a m_a\left(\frac{1}{2}v_a^2 + u_a + \Phi_a + \frac{1}{2}\frac{B_a^2}{\mu_0\rho_a}\right). \tag{19.186}$$

Hence total energy conservation, in the absence of divergence cleaning, corresponds to

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \sum_a m_a \left[\boldsymbol{v}_a \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_a}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_a}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\Phi_a}{\mathrm{d}t} + \frac{B_a^2}{2\mu_0\rho_a^2}\frac{\mathrm{d}\rho_a}{\mathrm{d}t} + \frac{\boldsymbol{B}_a}{\mu_0} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}\right)_a \right] = 0. \tag{19.187}$$

Neglecting the f_{divB} correction term for the moment, substituting (19.171), (19.35) and (19.172) into (19.187) with the ideal MHD and shock capturing terms included demonstrates that the total energy is exactly conserved, using the same argument as the one given in Section 19.2.2 (detailed workings can be found in Price & Monaghan (2004b)). The total linear momentum is also exactly conserved following a similar argument as in Section 19.2.2. However, the presence of the f_{divB} correction term, though necessary for numerical stability, violates the conservation of both momentum and energy in the strong field regime (in the weak field regime, it is switched off and conservation is preserved). The severity of this non-conservation is related to the degree in which divergence errors are present in the magnetic field, hence inadequate divergence control (see below) usually manifests as a loss of momentum conservation in the code Tricco & Price (2012).

Divergence cleaning

We adopt the 'constrained' hyperbolic/parabolic divergence cleaning algorithm described by Tricco & Price (2012) and Tricco et al. (2016a) to preserve the divergence-free condition on the magnetic field. This formulation addresses a number of issues with earlier formulations by Dedner et al. (2002) and Price & Monaghan (2005).

The main idea of the scheme is to propagate divergence errors according to a damped wave equation Dedner et al. (2002); Price & Monaghan (2005). This is facilitated by introducing a new scalar field, ψ, which is coupled to the magnetic field in (19.167) and evolved according to (19.168).

Tricco et al. (2016a) generalised the method of Dedner et al. (2002) to include the case where the hyperbolic wave speed, c_{h}, varies in time and space. This is the approach we use in Phantom. The resulting 'generalised wave equation' may be derived by combining the relevant term in (19.167) with (19.168) to give Tricco et al. (2016a)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho}c_{\mathrm{h}}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\psi}{\sqrt{\rho}c_{\mathrm{h}}}\right)\right] - \frac{\nabla^2\psi}{\rho} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho}c_{\mathrm{h}}}\left(\frac{\psi}{\sqrt{\rho}c_{\mathrm{h}}\tau_{\mathrm{c}}}\right)\right] = 0. \tag{19.188}$$

When c_{h}, ρ, τ_c and the fluid velocity are constant, this reduces to the usual damped wave equation in the form

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - c_{\mathrm{h}}^2\nabla^2\psi + \frac{1}{\tau_{\mathrm{c}}}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0. \tag{19.189}$$

The same equation holds for the evolution of $\nabla\cdot\boldsymbol{B}$ itself, i.e.,

$$\frac{\partial^2(\nabla\cdot\boldsymbol{B})}{\partial t^2} - c_{\mathrm{h}}^2\nabla^2(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) + \frac{1}{\tau_{\mathrm{c}}}\frac{\partial(\nabla\cdot\boldsymbol{B})}{\partial t} = 0, \tag{19.190}$$

from which it is clear that c_{h} represents the speed at which divergence errors are propagated and τ_{c} is the decay timescale over which divergence errors are removed.

Tricco & Price (2012) formulated a 'constrained' SPMHD implementation of hyperbolic/-parabolic cleaning which guarantees numerical stability of the cleaning. The constraint imposed by Tricco & Price (2012) is that, in the absence of damping, any energy removed from the magnetic field during cleaning must be conserved by the scalar field, ψ. This enforces particular choices of numerical operators for $\nabla\cdot\boldsymbol{B}$ and $\nabla\psi$ in (19.172) and (19.173), respectively, in particular that they form a conjugate pair of difference and symmetric derivative operators.

This guarantees that the change of magnetic energy is negative definite in the presence of the parabolic term (see below).

In PHANTOM, we set the cleaning speed, $c_{\rm h}$, equal to the fast magnetosonic speed (Equation 19.180) so that its timestep constraint is satisfied already by (19.72), as recommended by Tricco & Price (2013). The decay timescale is set according to

$$\tau_{\rm c}^a \equiv \frac{h_a}{\sigma_{\rm c} c_{{\rm h},a}}, \tag{19.191}$$

where the dimensionless factor $\sigma_{\rm c}$ sets the ratio of parabolic to hyperbolic cleaning. This is set to $\sigma_{\rm c} = 1.0$ by default, which was empirically determined by Tricco & Price (2012) to provide optimal reduction of divergence errors in three dimensions.

The divergence cleaning dissipates energy from the magnetic field at a rate given by Tricco & Price (2012)

$$\left(\frac{{\rm d}E}{{\rm d}t}\right)_{\rm cleaning} = -\sum_a m_a \frac{\psi_a^2}{\mu_0 \rho_a c_{{\rm h},a}^2 \tau_{\rm c}^a}. \tag{19.192}$$

In general, this is so small compared to other dissipation terms (e.g. resistivity for shock capturing) that it is not worth monitoring Tricco et al. (2016a). This energy is not added as heat, but simply removed from the calculation.

Monitoring of divergence errors and over-cleaning

The divergence cleaning algorithm is guaranteed to either conserve or dissipate magnetic energy, and cleans divergence errors to a sufficient degree for most applications. However, the onus is on the user to ensure that divergence errors are not affecting simulation results. This may be monitored by the dimensionless quantity

$$\epsilon_{\rm divB} \equiv \frac{h|\nabla \cdot \boldsymbol{B}|}{|\boldsymbol{B}|}. \tag{19.193}$$

The maximum and mean values of this quantity should be used to check the fidelity of simulations that include magnetic fields. A good rule-of-thumb is that the mean should remain $\lesssim 10^{-2}$ for the simulation to remain qualitatively unaffected by divergence errors.

The cleaning wave speed can be arbitrarily increased to improve the effectiveness of the divergence cleaning according to

$$c_{{\rm h},a} = f_{\rm clean} v_a, \tag{19.194}$$

where $f_{\rm clean}$ is an 'over-cleaning' factor (by default, $f_{\rm clean} = 1$, i.e., no 'over-cleaning'). Tricco et al. (2016a) has shown that increasing $f_{\rm clean}$ leads to further reduction in divergence errors, without affecting the quality of obtained results, but with an accompanying computational expense associated with a reduction in the timestep size.

19.2.11 Non-ideal magnetohydrodynamics

PHANTOM implements non-ideal magnetohydrodynamics including terms for Ohmic resistivity, ambipolar (ion-neutral) diffusion and the Hall effect. Algorithms and tests are taken from Wurster et al. (2014, 2016). See Wurster et al. (2016, 2017, 2018) for recent applications. Our formulation of non-ideal SPMHD in PHANTOM is simpler than the earlier formulation proposed by Hosking & Whitworth (2004) because we consider only one set of particles, representing a mixture of charged and uncharged species. Ours is similar to the implementation by Tsukamoto et al. (2013, 2015).

Equations of non-ideal MHD

We assume the strong coupling or 'heavy ion' approximation Wardle & Ng (1999); Shu et al. (2006); Pandey & Wardle (2008), which neglects ion pressure and assumes $\rho_i \ll \rho_n$ where the

subscripts i and n refer to the ionised and neutral fluids, respectively. In this case, (19.167) contains three additional terms in the form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}\right)_{\mathrm{nimhd}} = \frac{1}{\rho}\nabla\times\left[\frac{\boldsymbol{J}}{\sigma_e}+\frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}}{en_e}+\frac{(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}}{\gamma_{\mathrm{AD}}\rho_i}\right], \tag{19.195}$$

where σ_e is the electrical conductivity, n_e is the number density of electrons, e is the charge on an electron and γ_{AD} is the collisional coupling constant between ions and neutrals Pandey & Wardle (2008). We write this in the form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}\right)_{\mathrm{nimhd}} = \frac{1}{\rho}\nabla\times\Big[\eta_{\mathrm{O}}\boldsymbol{J}+\eta_{\mathrm{H}}\boldsymbol{J}\times\hat{\boldsymbol{B}} + \eta_{\mathrm{AD}}(\boldsymbol{J}\times\hat{\boldsymbol{B}})\times\hat{\boldsymbol{B}}\Big], \tag{19.196}$$

where $\hat{\boldsymbol{B}}$ is the unit vector in the direction of $\boldsymbol{B}$ such that η_{O}, η_{AD} and η_{Hall} are the coefficients for resistive and ambipolar diffusion and the Hall effect, respectively, each with dimensions of area per unit time.

To conserve energy, we require the corresponding resistive and ambipolar heating terms in the thermal energy equation in the form

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{nimhd}} = \frac{\eta_{\mathrm{O}}}{\rho}J^2+\frac{\eta_{\mathrm{AD}}}{\rho}\left[J^2-(\boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{B}})^2\right]. \tag{19.197}$$

The Hall term is non-dissipative, being dispersive rather than diffusive, so does not enter the energy equation.

We currently neglect the 'Biermann battery' term Biermann (1950) proportional to $\nabla P_e/(en_e)$ in our non-ideal MHD implementation, both because it is thought to be negligible in the interstellar medium Pandey & Wardle (2008) and because numerical implementations can produce incorrect results Graziani et al. (2015). This term is mainly important in generating seed magnetic fields for subsequent dynamo processes (e.g. Khomenko et al. (2017)).

Discrete equations

Our main constraint is that the numerical implementation of the non-ideal MHD terms should exactly conserve energy, which is achieved by discretising in the form Wurster et al. (2014)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\rho}\right)_{\mathrm{nimhd},a} = -\sum_b\left[\frac{\boldsymbol{D}_a}{\Omega_a\rho_a^2}\times\nabla_a W_{ab}(h_a) + \frac{\boldsymbol{D}_b}{\Omega_b\rho_b^2}\times\nabla_a W_{ab}(h_b)\right], \tag{19.198}$$

where

$$\boldsymbol{D}\equiv\eta_{\mathrm{O}}\boldsymbol{J}+\eta_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{J}\times\hat{\boldsymbol{B}})+\eta_{\mathrm{AD}}[(\boldsymbol{J}\times\hat{\boldsymbol{B}})\times\hat{\boldsymbol{B}}]. \tag{19.199}$$

The corresponding term in the energy equation is given by

$$\left(\frac{\mathrm{d}u_a}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{nimhd}} = -\frac{\boldsymbol{D}_a\cdot\boldsymbol{J}_a}{\rho_a}, \tag{19.200}$$

where the magnetic current density is computed alongside the density evaluation according to

$$\boldsymbol{J} = \frac{1}{\Omega_a\rho_a}\sum_b m_b(\boldsymbol{B}_a-\boldsymbol{B}_b)\times\nabla_a W_{ab}(h_a). \tag{19.201}$$

Non-ideal MHD therefore utilises a 'two first derivatives' approach, similar to the formulation of physical viscosity described in Section 19.2.7. This differs from the 'direct second derivatives' approach used for our artificial resistivity term, and in previous formulations of physical resistivity Bonafede et al. (2011). In practice the differences are usually minor. Our main reason for using two first derivatives for non-ideal MHD is that it is easier to incorporate the Hall effect and ambipolar diffusion terms.

Computing the non-ideal MHD coefficients

To self-consistently compute the coefficients $\eta_{\rm O}$, $\eta_{\rm H}$ and $\eta_{\rm AD}$ from the local gas properties, we use the NICIL library Wurster (2016) for cosmic ray ionisation chemistry and thermal ionisation. We refer the reader to Wurster (2016) and Wurster et al. (2016) for details, since this is maintained and versioned as a separate package.

Timestepping

With explicit timesteps, the timestep is constrained in a similar manner to other terms, using

$$\Delta t = \frac{C_{\rm nimhd} h^2}{\max(\eta_{\rm O}, \eta_{\rm AD}, |\eta_{\rm H}|)} \tag{19.202}$$

where $C_{\rm nimhd} = 1/(2\pi)$ by default. This can prove prohibitive, so we employ the so-called 'super-timestepping' algorithm from Alexiades et al. (1996) to relax the stability criterion for the Ohmic and ambipolar terms (only). The implementation is described in detail in Wurster et al. (2016). Currently the Hall effect is always timestepped explicitly in the code.

19.2.12 Self-gravity

PHANTOM includes self-gravity between particles. By self-gravity we mean a solution to Poisson's equation,

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho(\boldsymbol{r}), \tag{19.203}$$

where Φ is the gravitational potential and ρ represents a continuous fluid density. The corresponding acceleration term in the equation of motion is

$$\boldsymbol{a}_{\rm selfgrav} = -\nabla\Phi. \tag{19.204}$$

Since (19.203) is an elliptic equation, implying instant action, it requires a global solution. This solution is obtained in PHANTOM by splitting the acceleration into 'short-range' and 'long-range' contributions,

$$\boldsymbol{a}^a_{\rm selfgrav} = \boldsymbol{a}^a_{\rm short} + \boldsymbol{a}^a_{\rm long}, \tag{19.205}$$

where the 'short-range' interaction is computed by direct summation over nearby particles, and the 'long-range' interaction is computed by hierarchical grouping of particles using the kd-tree.

The distance at which the gravitational acceleration is treated as 'short-' or 'long-range' is determined for each node-node pair, n-m, either by the tree opening criterion,

$$\theta^2 < \left(\frac{s_m}{r_{nm}}\right)^2, \tag{19.206}$$

where $0 \leq \theta \leq 1$ is the tree opening parameter, or by nodes whose smoothing spheres intersect,

$$r^2_{nm} < \left[s_n + s_m + \max(R_{\rm kern} h^n_{\rm max}, R_{\rm kern} h^m_{\rm max})\right]^2. \tag{19.207}$$

Here, s is the node size, which is the minimum radius about the centre of mass that contains all the particles in the node, and $h_{\rm max}$ is the maximum smoothing length of the particles within the node. Node pairs satisfying either of these criteria have the particles contained within them added to a trial neighbour list, used for computing the short-range gravitational acceleration. Setting $\theta = 0$ therefore leads to the gravitational acceleration computed entirely as 'short-range', that is, only via direction summation, while $\theta = 1$ gives the fastest possible, but least accurate, gravitational force evaluation. The code default is $\theta = 0.5$.

Short-range interaction

How to solve (19.203) on particles is one of the most widely misunderstood problems in astrophysics. In SPH or collisionless N-body simulations (i.e. stars, dark matter), the particles do not represent physical point mass particles, but rather interpolation points in a density field that is assumed to be continuous. Hence one needs to first reconstruct the density field on the particles, then solve (19.203) in a manner which is consistent with this Hernquist & Barnes (1990).

How to do this consistently using a spatially adaptive softening length was demonstrated by Price & Monaghan (2007), since an obvious choice is to use the iterative kernel summation in (19.3) to both reconstruct the density field and set the softening length, i.e.[8]

$$\rho_a = \sum_b m_b W_{ab}(\epsilon_a); \quad \epsilon_a = h_{\rm fac}(m_a/\rho_a)^{1/3}. \tag{19.208}$$

It can then be shown that the gravitational potential consistent with this choice is given by

$$\Phi_a = -G\sum_b m_b \phi(|\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b|, \epsilon_a), \tag{19.209}$$

where ϕ is the softening kernel derived from the density kernel via Poisson's equation (Section 19.2.12, below). For a variable smoothing length, energy conservation necessitates taking an average of the kernels, i.e.

$$\Phi_a = -G\sum_b m_b \left[\frac{\phi_{ab}(\epsilon_a) + \phi_{ab}(\epsilon_b)}{2}\right]. \tag{19.210}$$

Price & Monaghan (2007) showed how the equations of motion could then be derived from a Lagrangian in order to take account of the softening length gradient terms, giving equations of motion in the form

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}^a_{\rm selfgrav} &= -\nabla\Phi_a, \\
&= -G\sum_b m_b \left[\frac{\phi'_{ab}(\epsilon_a) + \phi'_{ab}(\epsilon_b)}{2}\right]\hat{\boldsymbol{r}}_{ab} \\
&\quad - \frac{G}{2}\sum_b m_b \left[\frac{\zeta_a}{\Omega^\epsilon_a}\nabla_a W_{ab}(\epsilon_a) + \frac{\zeta_b}{\Omega^\epsilon_b}\nabla_a W_{ab}(\epsilon_b)\right],
\end{aligned} \tag{19.211}$$

where Ω^ϵ and ζ are correction terms necessary for energy conservation, with Ω as in (19.5) but with h replaced by ϵ, and ζ defined as

$$\zeta_a \equiv \frac{\partial\epsilon_a}{\partial\rho_a}\sum_b m_b \frac{\partial\phi_{ab}(\epsilon_a)}{\partial\epsilon_a}. \tag{19.212}$$

The above formulation satisfies all of the conservation properties, namely conservation of linear momentum, angular momentum, and energy.

The short range acceleration is evaluated for each particle in the leaf node n by summing (19.211) over the trial neighbour list obtained by node-node pairs that satisfy either of the criteria in (19.206) or (19.207). For particle pairs separated outside the softening radius of either particle, the short range interaction reduces to

$$\boldsymbol{a}^a_{\rm short,r>R_{kern}\epsilon} = -G\sum_b m_b \frac{\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b}{|\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b|^3}. \tag{19.213}$$

We use this directly for such pairs to avoid unnecessary evaluations of the softening kernel.

[8] Strictly one should use the number density instead of the mass density when computing the softening length via (19.208), but as we enforce equal masses for each particle type in PHANTOM, the two methods are equivalent.

It is natural in SPH to set the gravitational softening length equal to the smoothing length $\epsilon = h$, since both derive from the same density estimate. Indeed, Bate & Burkert (1997) showed that this is a crucial requirement to resolve gas fragmentation correctly. For pure N-body calculations, Price & Monaghan (2007) also showed that setting the (variable) softening length in the same manner as the SPH smoothing length (Sections 19.2.1–19.2.1) results in a softening that is always close to the 'optimal' fixed softening length Merritt (1996); Athanassoula et al. (2000); Dehnen (2001). In collisionless N-body simulations, this has been found to increase the resolving power, giving results at lower resolution comparable to those obtained at higher resolution with a fixed softening length Bagla & Khandai (2009); Iannuzzi & Dolag (2011). It also avoids the problem of how to 'choose' the softening length, negating the need for 'rules of thumb' such as the one given by Springel (2005) where the softening length is chosen to be 1/40 of the average particle spacing in the initial conditions.

Functional form of the softening kernel

The density kernel and softening potential kernel are related using Poisson's equation (19.203), i.e.

$$W(r,\epsilon) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \phi}{\partial r}\right), \tag{19.214}$$

where $r \equiv |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$. Integrating this equation gives the softening kernels used for the force and gravitational potential. As with the standard kernel functions (Section 19.2.1), we define the potential and force kernels in terms of dimensionless functions of the scaled interparticle separation, $q \equiv r/h$, according to

$$\phi(r,\epsilon) \equiv \frac{1}{\epsilon}\tilde{\phi}(q), \tag{19.215}$$

$$\phi'(r,\epsilon) \equiv \frac{1}{\epsilon^2}\tilde{\phi}'(q), \tag{19.216}$$

where the dimensionless force kernel is obtained from the density kernel $f(q)$ (Section 19.2.1–19.2.1) using

$$\tilde{\phi}'(q) = \frac{4\pi}{q^2}C_{\rm norm}\int f(q')q'^2{\rm d}q', \tag{19.217}$$

with the integration constant set such that $\tilde{\phi}'(q) = 1/q^2$ at $q = R_{\rm kern}$. The potential function is

$$\tilde{\phi}(q) = \int \tilde{\phi}'(q')dq'. \tag{19.218}$$

The derivative of ϕ with respect to ϵ required in (19.212) is also written in terms of a dimensionless function, i.e.

$$\frac{\partial\phi(r,\epsilon)}{\partial\epsilon} \equiv \frac{1}{\epsilon^2}h(q), \tag{19.219}$$

where from differentiating (19.215) we have

$$h(q) = -\tilde{\phi}(q) - q\tilde{\phi}'(q). \tag{19.220}$$

Included in the PHANTOM source code is a PYTHON script using the SYMPY library to solve (19.217), (19.218) and (19.220) using symbolic integration to obtain the softening kernel from the density kernel. This makes it straightforward to obtain the otherwise laborious expressions needed for each kernel (expressions for the cubic spline kernel are in Appendix A of Price & Monaghan (2007) and for the quintic spline in Appendix A of Hubber et al. (2011)). Figure 19.3 shows the functional form of the softening kernels for each of the kernels available in PHANTOM. The kernel function $f(q)$ is shown for comparison (top row in each case).

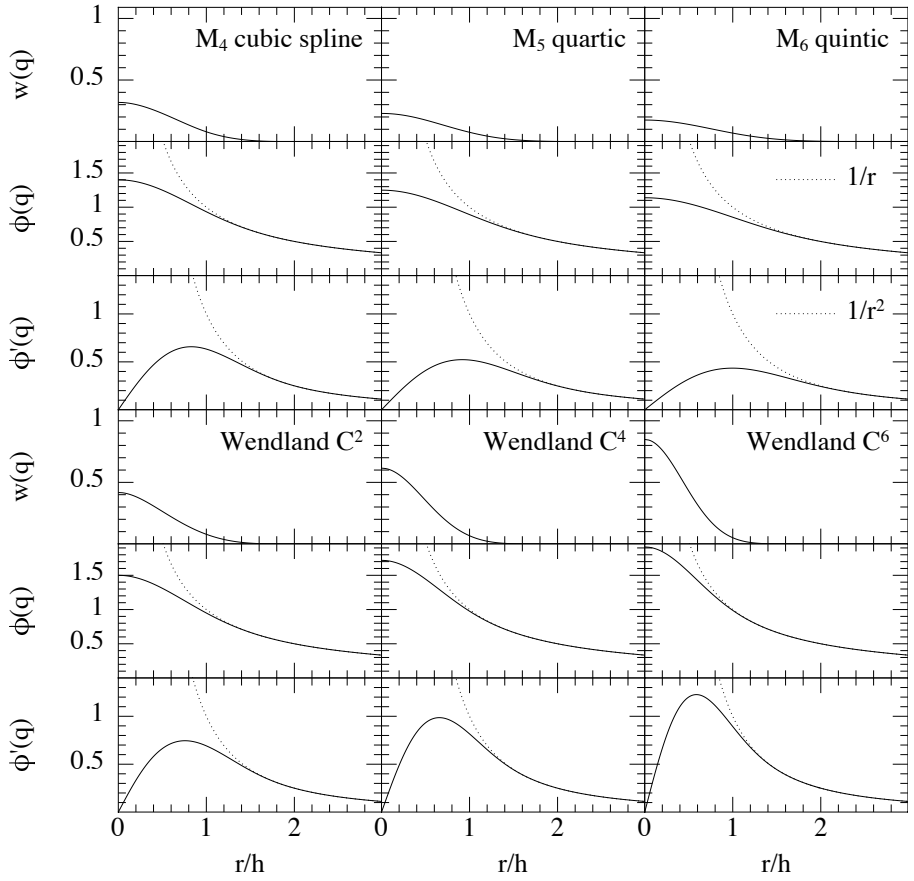


Figure 19.3: Functional form of the softening kernel functions $-\phi(r,h)$ and $\phi'(r,h)$ used to compute the gravitational force in PHANTOM, shown for each of the available kernel functions $w(r,h)$ (see Figure 19.1). Dotted lines show the functional form of the unsoftened potential $(-1/r)$ and force $(1/r^2)$ for comparison.

Softening of gravitational potential due to stars, dark matter and dust

In the presence of collisionless components (e.g. stars, dark matter and dust) we require estimates of the density in order to set the softening lengths for each component. We follow the generalisation of the SPH density estimate to multi-fluid systems described by Laibe & Price (2012a) where the density (and hence the softening length and Ω^ϵ) for each component is computed in the usual iterative manner (Section 19.2.1), but using only neighbours of the same type (c.f. Section 19.2.13). That is, the softening length for stars is determined based on the local density of stars, the softening length for dark matter is based on the local density of dark matter particles, and so on. The gravitational interaction both within each type and between different types is then computed using (19.211). This naturally symmetrises the softening between different types, ensuring that momentum, angular momentum and energy are conserved.

Long-range interaction

At long range, that is $r > R_{\rm kern}\epsilon_a$ and $r > R_{\rm kern}\epsilon_b$, the second term in (19.211) tends to zero since $\zeta = 0$ for $q \geq R_{\rm kern}$, while the first term simply becomes $1/r^2$. Computing this via direct summation would have an associated $\mathcal{O}(N^2)$ computational cost, thus we adopt the usual practice of using the kd-tree to reduce this cost to $\mathcal{O}(N \log N)$.

The main optimisation in PHANTOM compared to a standard tree code (e.g. Hernquist & Katz (1989); Benz et al. (1990)) is that we compute the long-range gravitational interaction once *per leaf-node* rather than once *per-particle* and that we use Cartesian rather than spherical multipole expansions to enable this Dehnen (2000b); Gafton & Rosswog (2011).

The long range acceleration on a given leaf node n consists of a sum over distant nodes m that satisfy neither (19.206) nor (19.207),

$$\boldsymbol{a}_n = \sum_m \boldsymbol{a}_{nm}. \tag{19.221}$$

The acceleration along the node centres, between a given pair n and m, is given (using index notation) by

$$a^i_{nm} = -\frac{GM_m}{r^3} r^i + \frac{1}{r^4}\left(\hat{r}^k Q^m_{ik} - \frac{5}{2}\hat{r}^i \mathcal{Q}^m\right), \tag{19.222}$$

where $r^i \equiv x^i_n - x^i_m$ is the relative position vector, $\hat{r}$ is the corresponding unit vector, M_m is the total mass in node m, Q^m_{ij} is the quadrupole moment of node m, and repeated indices imply summation. We define the following scalar and vector quantities for convenience:

$$\mathcal{Q} \equiv \hat{r}^i \hat{r}^j Q_{ij}, \tag{19.223}$$

$$\mathcal{Q}_i \equiv \hat{r}^j Q_{ij}. \tag{19.224}$$

Alongside the acceleration, we compute the six independent components of the first derivative matrix,

$$\frac{\partial a^i_n}{\partial r^j} = \sum_m \frac{\partial a^i_{nm}}{\partial r^j}, \tag{19.225}$$

where

$$\begin{aligned}\frac{\partial a^i_{nm}}{\partial r^j} =& \frac{GM_m}{r^3}\left[3\hat{r}^i\hat{r}^j - \delta^{ij}\right] \\ &+ \frac{1}{r^5}\left[Q^m_{ij} + \left(\frac{35}{2}\hat{r}^i\hat{r}^j - \frac{5}{2}\delta_{ij}\right)\mathcal{Q}^m \right. \\ &\left. - 5\hat{r}^i\mathcal{Q}^m_j - 5\hat{r}^j\mathcal{Q}^m_i\right],\end{aligned} \tag{19.226}$$

and the ten independent components of the second derivatives, given by

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 a^i_{nm}}{\partial r^j \partial r^k} = &- \frac{3GM_m}{r^4}\left[5\hat{r}^i\hat{r}^j\hat{r}^k - \delta_{jk}\hat{r}^i - \delta_{ik}\hat{r}^j - \delta_{ij}\hat{r}^k\right] \\ &+ \frac{1}{r^6}\Bigg[-5(\hat{r}^k Q^m_{ij} + \hat{r}^i Q^m_{jk} + \hat{r}^j Q^m_{ik}) \\ &\quad - \frac{315}{2}\hat{r}^i\hat{r}^j\hat{r}^k\mathcal{Q}^m \\ &\quad + \frac{35}{2}\left(\delta_{ij}\hat{r}^k + \delta_{ik}\hat{r}^j + \delta_{jk}\hat{r}^i\right)\mathcal{Q}^m \\ &\quad + 35\left(\hat{r}^j\hat{r}^k\mathcal{Q}^m_i + \hat{r}^i\hat{r}^k\mathcal{Q}^m_j + \hat{r}^i\hat{r}^j\mathcal{Q}^m_k\right) \\ &\quad - 5(\delta_{ij}\mathcal{Q}^m_k + \delta_{ik}\mathcal{Q}^m_j + \delta_{jk}\mathcal{Q}^m_i)\Bigg]. \end{aligned} \tag{19.227}$$

The acceleration on each individual particle inside the leaf node n is then computed using a second-order Taylor series expansion of $\boldsymbol{a}^n_{\rm node}$ about the node centre, i.e.

$$a^i_{{\rm long},a} = a^i_n + \Delta x^j \frac{\partial a^i_n}{\partial r^j} + \frac{1}{2}\Delta x^j \Delta x^k \frac{\partial^2 a^i_n}{\partial r^j \partial r^k}, \tag{19.228}$$

where $\Delta x^i_a \equiv x^i_a - x^i_0$ is the relative distance of each particle from the node centre of mass. Pseudo-code for the resulting force evaluation is shown in Figure 19.62.

The quadrupole moments are computed during the tree build using

$$Q_{ij} = \sum_a m_a \left[3\Delta x^i \Delta x^j - (\Delta x)^2 \delta^{ij}\right], \tag{19.229}$$

where the sum is over all particles in the node. Since Q is a symmetric tensor, only six independent quantities need to be stored (Q_{xx}, Q_{xy}, Q_{xz}, Q_{yy}, Q_{yz} and Q_{zz}).

The current implementation in PHANTOM is $\mathcal{O}(N_{\rm leafnodes}\log N_{\rm part})$ rather than the $\mathcal{O}(N)$ treecode implementation proposed by Dehnen (2000b) since we do not currently implement the symmetric node-node interactions required for $\mathcal{O}(N)$ scaling. Neither does our treecode conserve linear momentum to machine precision, except when $\theta = 0$. Implementing these additional features would be desirable.

19.2.13 Dust-gas mixtures

Modelling dust-gas mixtures is the first step in the 'grand challenge' of protoplanetary disc modelling Haworth et al. (2016). The public version of PHANTOM implements dust-gas mixtures using two approaches. One models the dust and gas as two separate types of particles (two-fluid), as presented in Laibe & Price (2012a,b), and the other, for small grains, using a single type of particle that represents the combination of dust and gas together (one-fluid), as described in Price & Laibe (2015a). Various combinations of these algorithms have been used in our recent papers using PHANTOM, including Dipierro et al. (2015, 2016); Ragusa et al. (2017) and Tricco et al. (2017) (see also Hutchison et al. (2016)).

In the two-fluid implementation, the dust and gas are treated as two separate fluids coupled by a drag term with only explicit timestepping. In the one-fluid implementation, the dust is treated as part of the mixture, with an evolution equation for the dust fraction.

Continuum equations

The two-fluid formulation is based on the continuum equations in the form

$$\frac{\partial \rho_{\rm g}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_{\rm g}\cdot\nabla)\rho_{\rm g} = -\rho_{\rm g}(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{\rm g}), \tag{19.230}$$

$$\frac{\partial \rho_{\rm d}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_{\rm d}\cdot\nabla)\rho_{\rm d} = -\rho_{\rm d}(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{\rm d}), \tag{19.231}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_{\rm g}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_{\rm g}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_{\rm g} = -\frac{\nabla P}{\rho_{\rm g}} + \frac{K}{\rho_{\rm g}}(\boldsymbol{v}_{\rm d}-\boldsymbol{v}_{\rm g}), \tag{19.232}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_{\rm d}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_{\rm d}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_{\rm d} = -\frac{K}{\rho_{\rm d}}(\boldsymbol{v}_{\rm d}-\boldsymbol{v}_{\rm g}), \tag{19.233}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\boldsymbol{v}_{\rm g}\cdot\nabla)u = -\frac{P}{\rho_{\rm g}}(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_{\rm g}) + \Lambda_{\rm drag}, \tag{19.234}$$

where the subscripts g and d refer to gas and dust properties, K is a drag coefficient and the drag heating is

$$\Lambda_{\rm drag} \equiv K(\boldsymbol{v}_{\rm d}-\boldsymbol{v}_{\rm g})^2. \tag{19.235}$$

The implementation in PHANTOM currently neglects any thermal coupling between the dust and the gas (see Laibe & Price (2012a)), aside from the drag heating. Thermal effects are important for smaller grains since they control the heating and cooling of the gas (e.g. Dopcke et al. (2011)). Currently the internal energy (u) of dust particles is simply set to zero.

Stopping time

The stopping time

$$t_{\rm s} = \frac{\rho_{\rm g}\rho_{\rm d}}{K(\rho_{\rm g}+\rho_{\rm d})}, \tag{19.236}$$

is the characteristic timescale for the exponential decay of the differential velocity between the two phases caused by the drag. In the code, $t_{\rm s}$ is by default specified in physical units, which means that code units need to be defined appropriately when simulating dust-gas mixtures.

Two-fluid dust-gas in SPH

In the two-fluid method, the mixture is discretised into two distinct sets of 'dust' and 'gas' particles. In the following, we adopt the convention from Monaghan & Kocharyan (1995) that subscripts a, b and c refer to gas particles while i, j and k refer to dust particles. Hence, (19.230)–(19.231) are discretised with a density summation *over neighbours of the same type* (c.f. Section 19.2.12), giving

$$\rho_a = \sum_b m_b W_{ab}(h_a); \quad h_a = h_{\rm fact}\left(\frac{m_a}{\rho_a}\right)^{1/3}, \tag{19.237}$$

for a gas particle, and

$$\rho_i = \sum_j m_j W_{ij}(h_i); \quad h_i = h_{\rm fact}\left(\frac{m_i}{\rho_i}\right)^{1/3}, \tag{19.238}$$

for a dust particle. The kernel used for density is the same as usual (Section 19.2.1). We discretise the equations of motion for the gas particles, (19.232), using

$$\left(\frac{{\rm d}\boldsymbol{v}_a}{{\rm d}t}\right)_{\rm drag} = -3\sum_j m_j \frac{\boldsymbol{v}_{aj}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_{aj}}{(\rho_a+\rho_j)t^{\rm s}_{aj}}\hat{\boldsymbol{r}}_{aj}D_{aj}(h_a), \tag{19.239}$$

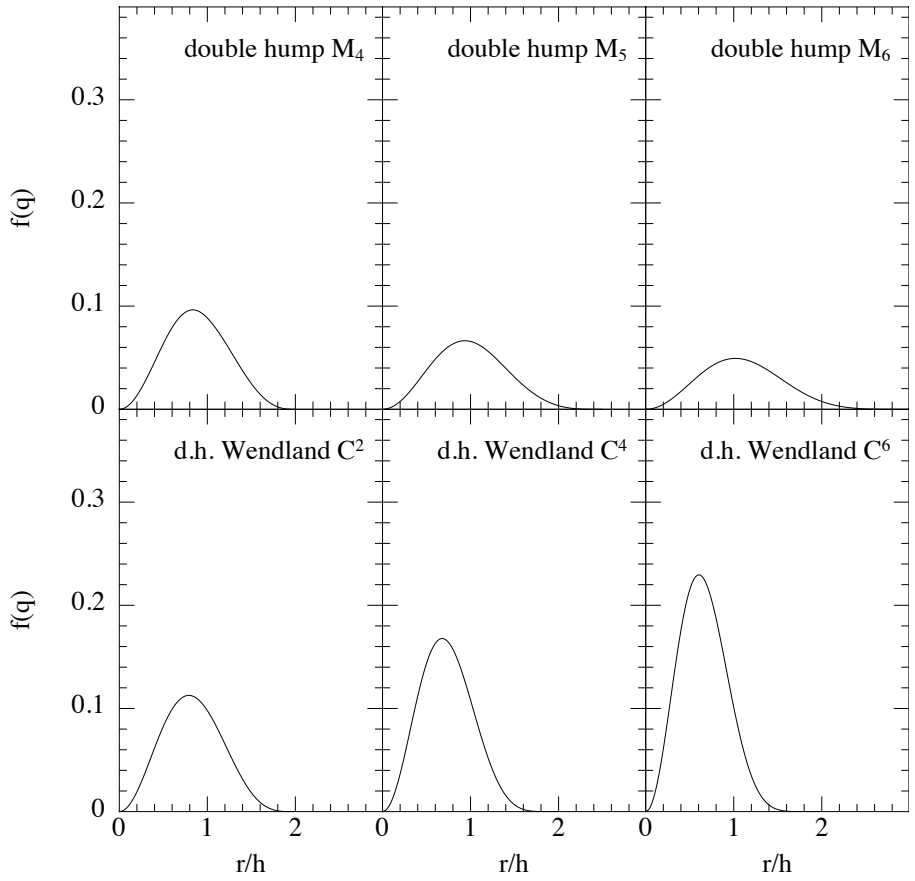


Figure 19.4: Double hump smoothing kernels $D(r,h)$ available in PHANTOM, used in the computation of the dust-gas drag force.

and for dust, (19.233), using

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t}\right)_{\rm drag} = -3\sum_b m_b \frac{\boldsymbol{v}_{ib}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_{ib}}{(\rho_i+\rho_b)t^{\rm s}_{ib}}\hat{\boldsymbol{r}}_{ib}D_{ib}(h_b), \tag{19.240}$$

where D is a 'double hump' kernel, defined in Section 19.2.13, below. The drag heating term in the energy equation, (19.234), is discretised using

$$\Lambda_{\rm drag} = 3\sum_j m_j \frac{(\boldsymbol{v}_{aj}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_{aj})^2}{(\rho_a+\rho_j)t^{\rm s}_{aj}}D_{aj}(h_a). \tag{19.241}$$

Notice that gas properties are only defined on gas particles and dust properties are defined only on dust particles, greatly simplifying the algorithm. Buoyancy terms caused by dust particles occupying a finite volume Monaghan & Kocharyan (1995); Laibe & Price (2012a) are negligible in astrophysics because typical grain sizes (μm) are negligible compared to simulation scales of $\sim$au or larger.

Drag kernels

Importantly, we use a 'double-hump' shaped kernel function D Fulk & Quinn (1996) instead of the usual bell-shaped kernel W when computing the drag terms. Defining D in terms of a dimensionless kernel function as previously (c.f. Section 19.2.1),

$$D(r,h) = \frac{\sigma}{h^3}g(q), \tag{19.242}$$

then the double hump kernels are defined from the usual kernels according to

$$g(q) = q^2 f(q), \tag{19.243}$$

where the normalisation constant σ is computed by enforcing the usual normalisation condition

$$\int D(r,h)\mathrm{d}V = 1. \tag{19.244}$$

Figure 19.4 shows the functional forms of the double hump kernels used in PHANTOM. Using double hump kernels for the drag terms was found by Laibe & Price (2012a) to give a factor of 10 better accuracy at no additional cost. The key feature is that these kernels are zero at the origin putting more weight in the outer parts of the kernel where the velocity difference is large. This also solves the problem of how to define the unit vector in the drag terms (19.239), (19.240) and (19.241) — it does not matter since D is also zero at the origin.

Stopping time in SPH

The stopping time is defined between a pair of particles, using the properties of gas and dust defined on the particle of the respective type, i.e.

$$t^{\rm s}_{aj} = \frac{\rho_a \rho_j}{K_{aj}(\rho_a + \rho_j)}. \tag{19.245}$$

The default prescription for the stopping time in PHANTOM automatically selects a physical drag regime appropriate to the grain size, as described below and in Laibe & Price (2012b). Options to use either a constant K or a constant $t_{\rm s}$ between pairs are also implemented, useful for testing and debugging (c.f. Section 19.5.9).

Epstein drag

To determine the appropriate physical drag regime we use the procedure suggested by Stepinski & Valageas (1996) where we first evaluate the Knudsen number

$$K_{\rm n} = \frac{9\lambda_{\rm g}}{4 s_{\rm grain}}, \tag{19.246}$$

where $s_{\rm grain}$ is the grain size and $\lambda_{\rm g}$ is the gas mean free path (see Section 19.2.13, below, for how this is evaluated). For $K_n \geq 1$, the drag between a particle pair is computed using the generalised formula for Epstein drag from Kwok (1975), as described in Paardekooper & Mellema (2006) and Laibe & Price (2012b), giving

$$K_{aj} = \rho^a_{\rm g}\rho^j_{\rm d}\frac{4}{3}\sqrt{\frac{8\pi}{\gamma}}\frac{s^2_{\rm grain}}{m_{\rm grain}}c^a_{\rm s} f, \tag{19.247}$$

where

$$m_{\rm grain} \equiv \frac{4}{3}\pi \rho_{\rm grain} s^3_{\rm grain}, \tag{19.248}$$

and $\rho_{\rm grain}$ is the intrinsic grain density, which is 3 g/cm^3 by default. The variable f is a correction for supersonic drift velocities given by Kwok (1975)

$$f \equiv \sqrt{1 + \frac{9\pi}{128}\frac{\Delta v^2}{c^2_{\rm s}}}, \tag{19.249}$$

where $\Delta v \equiv |\boldsymbol{v}_{\rm d} - \boldsymbol{v}_{\rm g}| = v^j_{\rm d} - v^a_{\rm g}$. The stopping time is therefore

$$t_{\rm s} = \frac{\rho_{\rm grain} s_{\rm grain}}{\rho c_{\rm s} f}\sqrt{\frac{\pi\gamma}{8}}, \tag{19.250}$$

where $\rho \equiv \rho_{\rm d} + \rho_{\rm g}$. This formula, (19.250), reduces to the standard expression for the linear Epstein regime in the limit where the drift velocity is small compared to the sound speed (i.e. $f \to 1$). Figure 19.5 shows the difference between the above simplified prescription and the exact expression for Epstein drag (Epstein (1924); c.f. equations 11 and 38 in Laibe & Price (2012b)) as a function of $\Delta v/c_{\rm s}$, which is less than 1 per cent everywhere.

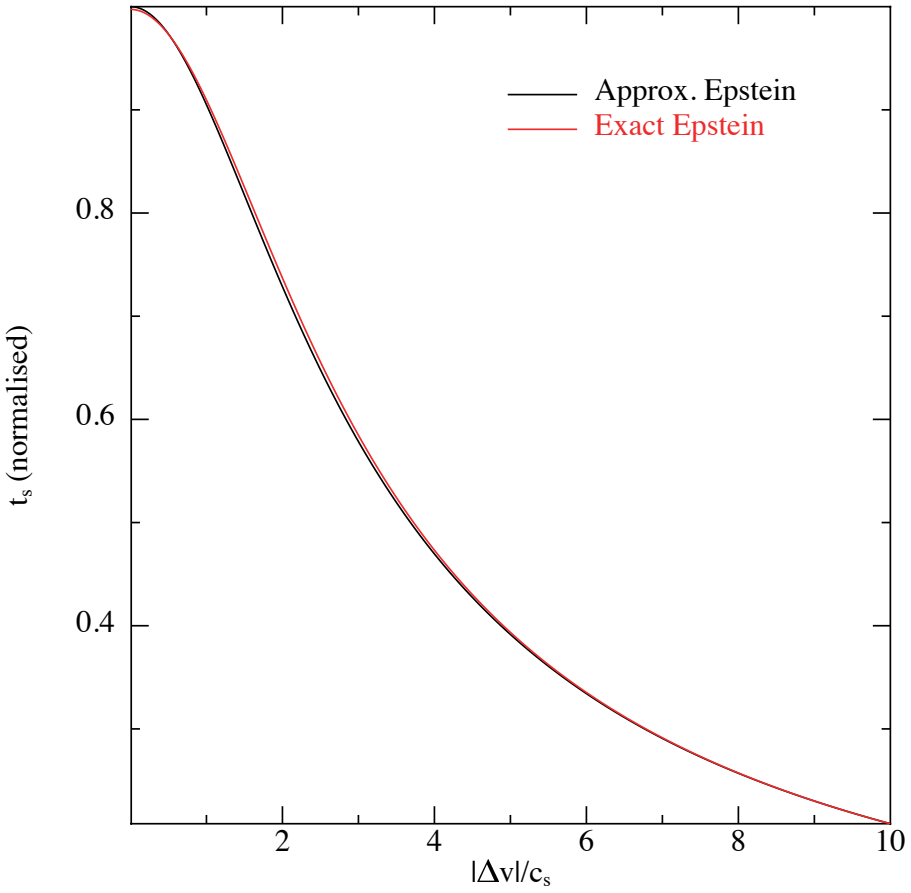


Figure 19.5: Dependence of the drag stopping time t_s on differential Mach number, showing the increased drag (decrease in stopping time) as the velocity difference between dust and gas increases. The black line shows the analytic approximation we employ (Equation 19.250) which may be compared to the red line showing the exact expression from Epstein (1924). The difference is less than 1 per cent everywhere.

Stokes drag

For $K_n < 1$, we adopt a Stokes drag prescription, describing the drag on a sphere with size larger than the mean free path of the gas Fan & Zhu (1998). Here we use Laibe & Price (2012b)

$$K_{aj} = \rho_{\rm g}^a \rho_{\rm d}^j \frac{1}{2} C_{\rm D} \frac{\pi s_{\rm grain}^2}{m_{\rm grain}} |\Delta v|, \tag{19.251}$$

where the coefficient $C_{\rm D}$ is given by Fassio & Probstein (1970) (see Whipple (1972); Weidenschilling (1977))

$$C_{\rm D} = \begin{cases} 24 R_e^{-1}, & R_{\rm e} < 1, \\ 24 R_e^{-0.6}, & 1 < R_{\rm e} < 800, \\ 0.44, & R_{\rm e} > 800, \end{cases} \tag{19.252}$$

where $R_{\rm e}$ is the local Reynolds number around the grain

$$R_{\rm e} \equiv \frac{2 s_{\rm grain} |\Delta v|}{\nu}, \tag{19.253}$$

and ν is the microscopic viscosity of the gas (see below; not to be confused with the disc viscosity). Similar formulations of Stokes drag can be found elsewhere (see e.g. discussion in Woitke & Helling (2003) and references therein). The stopping time in the Stokes regime is therefore given by

$$t_{\rm s} = \frac{8 \rho_{\rm grain} s_{\rm grain}}{3 \rho |\Delta v| C_{\rm D}}, \tag{19.254}$$

where it remains to evaluate ν and $\lambda_{\rm g}$.

Kinematic viscosity and mean free path

We evaluate the microscopic kinematic viscosity, ν, assuming gas molecules interact as hard spheres, following Chapman & Cowling (1970). The viscosity is computed from the mean free path and sound speed according to

$$\nu = \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma}} c_{\rm s} \lambda_{\rm g}, \tag{19.255}$$

with the mean free path defined by relating this expression to the expression for the dynamic viscosity of the gas Chapman & Cowling (1970) given by

$$\mu_\nu = \frac{5m}{64 \sigma_{\rm s}} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} c_{\rm s}, \tag{19.256}$$

with $\mu_\nu = \rho_{\rm g} \nu$, giving

$$\lambda_{\rm g} = \frac{5\pi}{64\sqrt{2}} \frac{1}{n_{\rm g} \sigma_s}, \tag{19.257}$$

where $n_{\rm g} = \rho_{\rm g}/m$ is the number density of molecules and σ_s is the collisional cross section. To compute this, PHANTOM currently assumes the gas is molecular Hydrogen, such that the mass of each molecule and the collisional cross section are given by

$$m = 2 m_{\rm H}, \tag{19.258}$$

$$\sigma_{\rm s} = 2.367 \times 10^{-15} {\rm cm}^2. \tag{19.259}$$

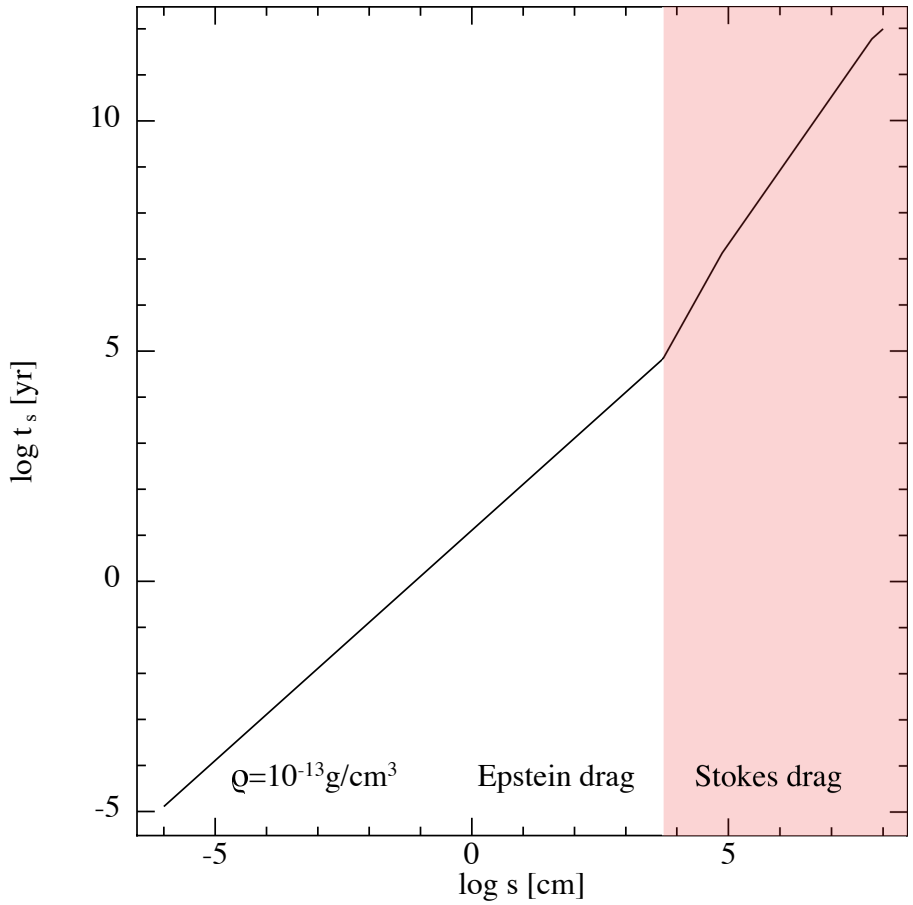


Figure 19.6: Drag stopping time $t_{\rm s}$ (in years) as a function of grain size, showing the continuous transition between the Epstein and Stokes drag regimes. The example shown assumes fixed density $\rho = 10^{-13}{\rm g/cm^3}$ and sound speed $c_{\rm s} = 6 \times 10^4$ cm/s with subsonic drag $\Delta v = 0.01 c_{\rm s}$ and material density $\rho_{\rm grain} = 3{\rm g/cm^3}$.

Stokes/Epstein transition

At the transition between the two regimes, assuming $R_{\rm e} < 1$, (19.254) reduces to

$$t_{\rm s} = \frac{2\rho_{\rm grain} s_{\rm grain}^2}{9\rho c_{\rm s}\lambda_{\rm g}}\sqrt{\frac{\pi\gamma}{2}}, \tag{19.260}$$

which is the same as the Epstein drag in the subsonic regime when $\lambda_{\rm g} = 4s_{\rm grain}/9$, i.e. $K_{\rm n} = 1$. That this transition is indeed continuous in the code is demonstrated in Figure 19.6, which shows the transition from Epstein to Stokes drag and also through each of the Stokes regimes in (19.252) by varying the grain size while keeping the other parameters fixed. For simplicity, we assumed a fixed $\Delta v = 0.01 c_{\rm s}$ in this plot, even though in general one would expect Δv to increase with stopping time (see Equation 19.270).

Self gravity of dust

With self-gravity turned on, dust particles interact in the same way as stars or dark matter (Section 19.2.12), with a softening length equal to the smoothing length determined from the density of neighbouring dust particles. Dust particles can be accreted by sink particles (Section 19.2.8), but a sink cannot currently be created from dust particles (Section 19.2.8). There is currently no mechanism in the code to handle the collapse of dust to form a self-gravitating object independent of the gas.

Timestep constraint

For the two-fluid method, the timestep is constrained by the stopping time according to

$$\Delta t^a_{\rm drag} = \min_j(t_{\rm s}^{aj}). \tag{19.261}$$

This requirement, alongside the spatial resolution requirement $h \lesssim c_{\rm s} t_{\rm s}$ Laibe & Price (2012a), means the two-fluid method becomes both prohibitively slow and increasingly inaccurate for small grains. In this regime one should switch to the one-fluid method, as described below.

Continuum equations: One-fluid

In Laibe & Price (2014a), we showed that the two-fluid equations, (19.230)–(19.234), can be rewritten as a single fluid mixture using a change of variables given by

$$\rho \equiv \rho_{\rm g} + \rho_{\rm d}, \tag{19.262}$$

$$\epsilon \equiv \rho_{\rm d}/\rho, \tag{19.263}$$

$$\boldsymbol{v} \equiv \frac{\rho_{\rm g}\boldsymbol{v}_{\rm g} + \rho_{\rm d}\boldsymbol{v}_{\rm d}}{\rho_{\rm g} + \rho_{\rm d}}, \tag{19.264}$$

$$\Delta\boldsymbol{v} \equiv \boldsymbol{v}_{\rm d} - \boldsymbol{v}_{\rm g}, \tag{19.265}$$

where ρ is the combined density, ϵ is the dust fraction, $\boldsymbol{v}$ is the barycentric velocity, and $\Delta\boldsymbol{v}$ is the differential velocity between the dust and gas.

In Laibe & Price (2014a) we derived the full set of evolution equations in these variables, and in Laibe & Price (2014c), implemented and tested an algorithm to solve these equations in SPH. However, using a fluid approximation cannot properly capture the velocity dispersion of large grains, as occurs for example when large planetesimals stream simultaneously in both directions through the midplane of a protoplanetary disc. For this reason, the one-fluid equations are better suited to treating small grains, where the stopping time is shorter than the computational timestep. In this limit we employ the 'terminal velocity approximation' Youdin & Goodman

(2005) and the evolution equations reduce to Laibe & Price (2014a); Price & Laibe (2015a)

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\rho(\nabla\cdot\boldsymbol{v}), \tag{19.266}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \boldsymbol{a}_{\rm ext}, \tag{19.267}$$

$$\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\left[\epsilon(1-\epsilon)\rho\Delta\boldsymbol{v}\right], \tag{19.268}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{P}{\rho}(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) + \epsilon(\Delta\boldsymbol{v}\cdot\nabla)u, \tag{19.269}$$

where

$$\Delta\boldsymbol{v} \equiv t_{\rm s}\left(\boldsymbol{a}_{\rm d} - \boldsymbol{a}_{\rm g}\right), \tag{19.270}$$

where $\boldsymbol{a}_{\rm d}$ and $\boldsymbol{a}_{\rm g}$ refers to any acceleration acting only on the dust or gas phase, respectively. For the simple case of pure hydrodynamics, the only difference is the pressure gradient, giving

$$\Delta\boldsymbol{v} \equiv t_{\rm s}\frac{\nabla P}{\rho_{\rm g}} = \frac{t_{\rm s}}{(1-\epsilon)}\frac{\nabla P}{\rho}, \tag{19.271}$$

such that (19.268) becomes

$$\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\left(\epsilon t_{\rm s}\nabla P\right). \tag{19.272}$$

Importantly, the one-fluid dust algorithm does not result in any heating term in $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ due to drag, because this term is $\mathcal{O}(\Delta\boldsymbol{v}^2)$ and thus negligible Laibe & Price (2014a).

Visualisation of one-fluid results

Finally, when visualising results of one-fluid calculations, one must reconstruct the properties of the dust and gas in post-processing. We use

$$\rho_{\rm g} = (1-\epsilon)\rho, \tag{19.273}$$

$$\rho_{\rm d} = \epsilon\rho, \tag{19.274}$$

$$\boldsymbol{v}_{\rm g} = \boldsymbol{v} - \epsilon\Delta\boldsymbol{v}, \tag{19.275}$$

$$\boldsymbol{v}_{\rm d} = \boldsymbol{v} + (1-\epsilon)\Delta\boldsymbol{v}. \tag{19.276}$$

To visualise the one-fluid results in a similar manner to those from the two-fluid method we reconstruct a set of 'dust' and 'gas' particles with the same positions but with the respective properties of each type of fluid particle copied onto them. We compute $\Delta\boldsymbol{v}$ from (19.271) using the pressure gradient computed using (19.34), multiplied by the stopping time and the gas fraction. See Price & Laibe (2015a) for more details.

One-fluid dust-gas implementation

Our implementation of the one-fluid method in Phantom follows Price & Laibe (2015a) with a few minor changes and corrections[9]. In particular, we use the variable $s = \sqrt{\epsilon\rho}$ described in Appendix B of Price & Laibe (2015a) to avoid problems with negative dust fractions. The evolution equation (19.268) expressed in terms of s is given by

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2s}\nabla\cdot\left(\frac{\rho_{\rm g}\rho_{\rm d}}{\rho}\Delta\boldsymbol{v}\right) - \frac{s}{2}(\nabla\cdot\boldsymbol{v}), \tag{19.277}$$

[9]One should be aware that we derived several of the above equations incorrectly in Appendix B of Price & Laibe (2015a) (see Price & Laibe (2015b)). The above equations are the correct versions and reflect what is implemented in Phantom.

which for the case of hydrodynamics becomes

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2s}\nabla\cdot\left(\frac{s^2}{\rho}t_{\rm s}\nabla P\right) - \frac{s}{2}(\nabla\cdot\boldsymbol{v}),$$
$$= -\frac{1}{2}\nabla\cdot\left(\frac{s}{\rho}t_{\rm s}\nabla P\right) - \frac{t_{\rm s}}{2\rho}\nabla P\cdot\nabla s - \frac{s}{2}(\nabla\cdot\boldsymbol{v}). \tag{19.278}$$

The SPH discretisation of this equation is implemented in the form

$$\frac{\mathrm{d}s_a}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}\sum_b \frac{m_b s_b}{\rho_b}\left(\frac{t_{{\rm s},a}}{\rho_a} + \frac{t_{{\rm s},b}}{\rho_b}\right)(P_a - P_b)\frac{\overline{F}_{ab}}{|r_{ab}|}$$
$$+ \frac{s_a}{2\rho_a\Omega_a}\sum_b m_b\boldsymbol{v}_{ab}\cdot\nabla_a W_{ab}(h_a), \tag{19.279}$$

where $\overline{F}_{ab} \equiv \frac{1}{2}[F_{ab}(h_a) + F_{ab}(h_b)]$. The thermal energy equation, (19.269), takes the form

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{P}{\rho}(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) + \frac{s^2 t_{\rm s}}{\rho\rho_{\rm g}}\nabla P\cdot\nabla u, \tag{19.280}$$

the first term of which is identical to (19.35) and the second term of which is discretised in PHANTOM according to

$$-\frac{\rho_a}{2\rho_a^{\rm g}}\sum_b m_b\frac{s_a s_b}{\rho_a\rho_b}\left(\frac{t_{{\rm s},a}}{\rho_a} + \frac{t_{{\rm s},b}}{\rho_b}\right)(P_a - P_b)(u_a - u_b)\frac{\overline{F}_{ab}}{|r_{ab}|}. \tag{19.281}$$

Conservation of dust mass

Conservation of dust mass with the one-fluid scheme is in principle exact because Price & Laibe (2015a)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_a \frac{m_a}{\rho_a}s_a^2\right) = \sum_a m_a\left(\frac{2s_a}{\rho_a}\frac{\mathrm{d}s_a}{\mathrm{d}t} - \frac{s_a^2}{\rho_a^2}\frac{\mathrm{d}\rho_a}{\mathrm{d}t}\right) = 0. \tag{19.282}$$

In practice, some violation of this can occur because although the above algorithm guarantees positivity of the dust fraction, it does not guarantee that ϵ remains less than unity. Under this circumstance, which occurs only rarely, we set $\epsilon = \max(\epsilon, 1)$ in the code. However, this violates the conservation of dust mass. This specific issue has been recently addressed in detail in the study by Ballabio et al. (2018). Therefore, in the latest code there are two main changes:

- Rather than evolve $s = \sqrt{\epsilon\rho}$, in the most recent code we instead evolve a new variable $s' = \sqrt{\rho_{\rm d}/\rho_{\rm g}}$. This prevents the possibility of $\epsilon > 1$.
- We limit the stopping time such that the timestep from the one fluid algorithm does not severely restrict the computational performance

For details of these changes we refer the reader to Ballabio et al. (2018).

Conservation of energy and momentum

Total energy with the one-fluid scheme can be expressed via

$$E = \sum_a m_a\left[\frac{1}{2}v_a^2 + (1-\epsilon_a)u_a\right], \tag{19.283}$$

Process	Description	Reference
H I (atomic) cooling	Electron collisional excitation/ resonance line emission	Sutherland & Dopita (1993)
H_2 (molecular) cooling	Vibrational/rotational excitation cooling by collisions with H, He and H_2	Le Bourlot et al. (1999)
Fine structure cooling	C II, Si II and O I collisions with H, H_2, free e^- and H^+	Glover & Jappsen (2007)
CO rotational cooling	CO collisions with H_2, H and free e^-	Neufeld & Kaufman (1993), Neufeld et al. (1995)
Recombination cooling	Free e^- recombining with ionised gas on PAH and dust grain surfaces	Wolfire et al. (2003)
Gas-grain cooling	Dust-gas collisional heat transfer	Hollenbach & McKee (1989)
Cosmic-ray heating	Energy deposition associated with cosmic ray ionization	Goldsmith & Langer (1978)
Photo-electric heating	UV e^- excitation from dust and PAH	Wolfire et al. (2003)

Table 3: Heating and cooling processes in the PHANTOM cooling module.

which is conserved exactly by the discretisation since

$$\sum_a m_a \left[\boldsymbol{v}_a \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_a}{\mathrm{d}t} + (1-\epsilon_a)\frac{\mathrm{d}u_a}{\mathrm{d}t} - u_a\left(\frac{2s_a}{\rho_a}\frac{\mathrm{d}s_a}{\mathrm{d}t} - \frac{s_a^2}{\rho_a^2}\frac{\mathrm{d}\rho_a}{\mathrm{d}t}\right)\right] = 0. \tag{19.284}$$

Conservation of linear and angular momentum also hold since the discretisation of the momentum equation is identical to the hydrodynamics algorithm.

Timestep constraint

For the one-fluid method, the timestep is constrained by the *inverse* of the stopping time according to

$$\Delta t^a_{\rm drag} = C_{\rm force}\frac{h^2}{\epsilon t_{\rm s} c_{\rm s}^2}. \tag{19.285}$$

This becomes prohibitive precisely in the regime where the one-fluid method is no longer applicable ($t_{\rm s} > t_{\rm Cour}$; see Laibe & Price (2014a)), in which case one should switch to the two-fluid method instead. There is currently no mechanism to automatically switch regimes, though this is possible in principle and may be implemented in a future code version.

19.2.14 Interstellar medium (ISM) physics

Cooling function

The cooling function in PHANTOM is based on a set of FORTRAN modules written by Glover & Mac Low (2007), updated further by Glover et al. (2010). It includes cooling from atomic lines (H I), molecular excitation (H_2), fine structure metal lines (Si I, Si II, O I, C I, C II), gas-dust collisions and polycyclic aromatic hydrocarbon (PAH) recombination (see Glover & Mac Low (2007) for references on each process). Heating is provided by cosmic rays and the photoelectric effect. The strength of the cooling is a function of the temperature, density, and various chemical abundances. Table 3 summarises these various heating and cooling processes. Figure 19.7 shows the resulting emissivity $\Lambda_{\rm E}(T)$ for temperatures between 10^4 and 10^8K. The

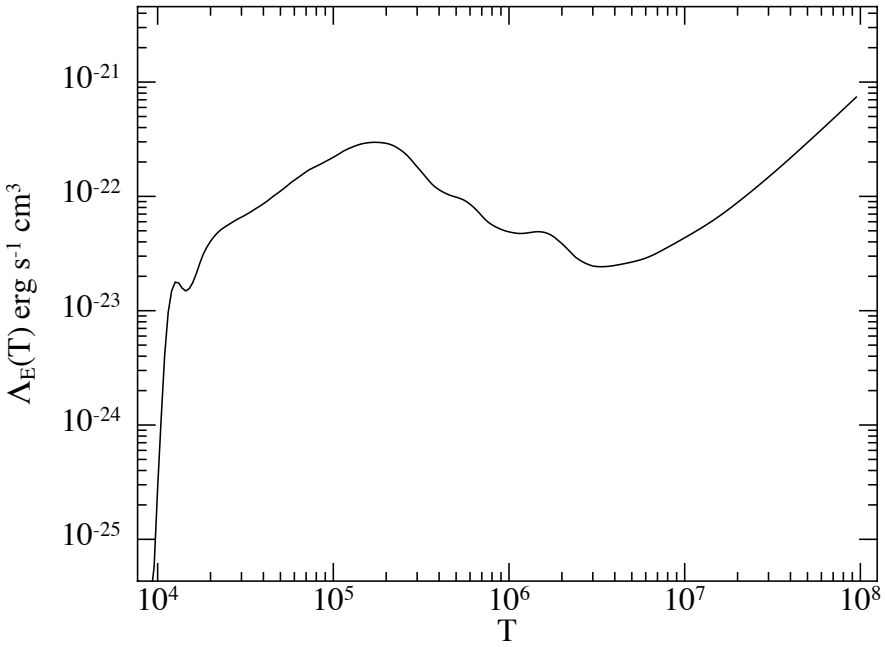


Figure 19.7: Emissivity, $\Lambda_{\rm E}$ [erg s^{-1} cm^3] as a function of temperature for the ISM cooling assuming default abundances appropriate for the Warm Neutral Medium (WNM). Note that as we treat cooling from atomic hydrogen using a full non-equilibrium treatment, the behaviour of $\Lambda_{\rm E}$ close to 10^4 K is highly sensitive to the electron fraction, which in the case shown here is much smaller than it would be in collisional ionization equilibrium. Values of $\Lambda_{\rm E}$ below 10^4 K depend strongly on the current chemical state of the gas and are not shown in this plot.

cooling rate per unit volume is related to the emissivity according to

$$\Lambda_{\rm cool} \equiv n^2 \Lambda_{\rm E}(T) \,{\rm erg\ s^{-1} cm^{-3}}, \tag{19.286}$$

where n is the number density. The cooling in the energy equation corresponds to

$$\left(\frac{{\rm d}u}{{\rm d}t}\right)_{\rm cool} = -\frac{\Lambda_{\rm cool}}{\rho}. \tag{19.287}$$

These routines were originally adapted for use in SPHNG Dobbs et al. (2008) and result in an approximate two-phase ISM with temperatures of 100 K and 10 000 K. Note that the cooling depends on a range of parameters (dust-to-gas ratio, cosmic ray ionisation rate, etc.), many of which can be specified at runtime. Table 4 lists the default abundances, which are set to values appropriate for the Warm Neutral Medium taken from Sembach et al. (2000). The abundances listed in Table 4, along with the dust-to-gas ratio, are the only metallicity-dependent parameters that can be changed at runtime. An option for cooling appropriate to the zero-metallicity early universe is also available.

Timestep constraint from cooling

When cooling is used, we apply an additional timestep constraint in the form

$$\Delta t^a_{\rm cool} = C_{\rm cool} \left| \frac{u}{({\rm d}u/{\rm d}t)_{\rm cool}} \right|, \tag{19.288}$$

where $C_{\rm cool} = 0.3$ following Glover & Mac Low (2007). The motivation for this additional constraint is to not allow the cooling to completely decouple from the other equations in the

Element	Abundance
C	1.4×10^{-4}
O	3.2×10^{-4}
Si	1.5×10^{-5}
e^-	2×10^{-4}

Table 4: Default fractional abundances for C, O, Si and e^- in the ISM cooling and chemistry modules. Abundances are taken from Sembach et al. (2000) appropriate for the Warm Neutral Medium (WNM). These are lower than solar because it is assumed some fraction of the metals are locked up in dust rather than being available in the gas phase.

code Suttner et al. (1997), and to avoid cooling instabilities that may be generated by numerical errors Ziegler et al. (1996).

Cooling is currently implemented only with explicit timestepping of (19.287), where u is evolved alongside velocity in our leapfrog timestepping scheme. However, the substepping scheme described below for the chemical network (Section 19.2.14) is also used to update the cooling on the chemical timestep, meaning that the cooling can evolve on a much shorter timestep than the hydrodynamics when it is used in combination with chemistry, which it is by default. Implementation of an implicit cooling method, namely the one proposed by Townsend (2009), is under development.

Chemical network

A basic chemical network is included for ISM gas that evolves the abundances of H, H^+, e^-, and the molecules H_2 and CO. The number density of each species, n_X, is evolved using simple rate equations of the form

$$\frac{dn_X}{dt} = C_X - D_X n_X, \tag{19.289}$$

where C_X and D_X are creation and destruction coefficients for each species. In general, C_X and D_X are functions of density, temperature, and abundances of other species. The number density of each species, X, is time integrated according to

$$n_X(t + \Delta t) = n_X(t) + \frac{dn_X}{dt}\Delta t. \tag{19.290}$$

There are in effect only three species to evolve (H, H_2 and CO), as the H^+ and e^- abundances are directly related to the H abundance.

The chemistry of atomic hydrogen is effectively the same as in Glover & Mac Low (2007). H is created by recombination in the gas phase and on grain surfaces, and destroyed by cosmic ray ionisation and free electron collisional ionisation. H_2 chemistry is based on the model of Bergin et al. (2004), with H_2 created on grain surfaces and destroyed by photo-dissociation and cosmic-rays (see Dobbs et al. (2008) for computational details).

The underlying processes behind CO chemistry are more complicated, and involve many intermediate species in creating CO from C and O by interactions with H species. Instead of following every intermediate step we use the model of Nelson & Langer (1997) (see Pettitt et al. (2014) for computational details). CO is formed by a gas phase reaction from an intermediate CH_Z step after an initial reaction of C^+ and H_2 (where Z encompasses many similar type species). CO and CH_Z are subject to independent photodestruction, which far outweighs the destruction by cosmic-rays. Abundances of C^+ and O are used in the CO chemistry, and their abundance is simply the initial value excluding what has been used up in CO formation. Glover & Clark (2012) test this and a range of simpler and more complicated models, and show that the model adopted here is sufficient for large-scale simulations of CO formation, although it tends to over-produce CO compared to more sophisticated models.

The details for each reaction in the H, H_2 and CO chemistry are given in Table 5, with relevant references for each process.

Reaction	Description	Reference
$H^+ + e^- + \text{grain} \rightarrow H + \text{grain}$	Grain surface recombination	Weingartner & Draine (2001)
$H^+ + e^- \rightarrow H + \gamma$	Gas-phase recombination	Ferland et al. (1992)
$H + e^- \rightarrow H^+ + 2e^-$	e^- collisional ionisation	Abel et al. (1997)
$H + \text{c.r.} \rightarrow H^+ + e^-$	Cosmic ray ionisation	Glover & Mac Low (2007)
$H + H + \text{grain} \rightarrow H_2 + \text{grain}$	Grain surface formation	Bergin et al. (2004)
$H_2 + \gamma \rightarrow 2H$	UV photodissociation	Draine & Bertoldi (1996)
$H_2 + \text{c.r.} \rightarrow H_2^+ + e^-$	Cosmic ray ionisation*	Bergin et al. (2004)
$C^+ + H_2 \rightarrow CH_2^+ + \gamma$	Radiative association	Nelson & Langer (1997)
$CH_2^+ + \text{various} \rightarrow CH_X + \text{various}$	Rapid neutralisation†	-
$CH_Z + O \rightarrow CO + H$	Gas phase formation	-
$CH_Z + \gamma \rightarrow C + H$	UV photodissociation	-
$CO + \gamma \rightarrow C^+ + O + e^-$	UV photodissociation††	-

Table 5: Processes and references for the Phantom ISM chemistry module tracing the evolution of H, H_2 and CO.

* H_2^+ ions produced by cosmic ray ionisation of H_2 are assumed to dissociatively recombine to $H + H$, so that the effective reaction in the code is actually $H_2 + \text{c.r.} \rightarrow H + H$.

† Process is intermediate and is assumed rather than fully represented.

†† C is not present in our chemistry, but is assumed to rapidly photoionise to C^+.

Timestep constraint from chemistry

H chemistry is evolved on the cooling timestep, since the timescale on which the H^+ abundance changes significantly is generally comparable to or longer than the cooling time. This is not true for H_2 and CO. Instead, these species are evolved using a chemical time-stepping criterion, where (19.290) is subcycled during the main time step at the interval $\Delta t_{\rm chem}$. If the abundance is decreasing then the chemical timestep is

$$\Delta t_{\rm chem} = -\frac{1}{10}\frac{n_X}{(C_X - D_X n_X)}, \tag{19.291}$$

i.e., 10 per cent of the time needed to completely deplete the species. If the abundance is increasing,

$$\Delta t_{\rm chem} = \frac{\Delta t_{\rm hydro}}{200}, \tag{19.292}$$

where $\Delta t_{\rm hydro}$ is the timestep size for the hydrodynamics, and was found to be an appropriate value by test simulations. These updated abundances feed directly into the relevant cooling functions. Although the cooling function includes Si I and C I, the abundances of these elements are set to zero in the current chemical model.

19.2.15 Particle injection

We implement several algorithms for modelling inflow boundary conditions (see Toupin et al. (2015b,a) for recent applications). This includes injecting SPH particles in spherical winds from sink particles (both steady and time dependent), in a steady Cartesian flow and for injection at the L_1 point between a pair of sink particles to simulate the formation of accretion discs by Roche Lobe overflow in binary systems.

19.3 Initial conditions

19.3.1 Uniform distributions

The simplest method for initialising the particles is to set them on a uniform Cartesian distribution. The lattice arrangement can be cubic (equal particle spacing in each direction, $\Delta x = \Delta y = \Delta z$), close-packed ($\Delta y = \sqrt{3/4}\Delta x$, $\Delta z = \sqrt{6}/3\Delta x$, repeated every 3 layers in z), hexagonal close-packed (as for close-packed but repeated every two layers in z), or uniform random. The close-packed arrangements are the closest to a 'relaxed' particle distribution, but require care with periodic boundary conditions due to the aspect ratio of the lattice. The cubic lattice is not a relaxed arrangement for the particles, but is convenient and sufficient for problems where the initial conditions are quickly erased (e.g. driven turbulence). For problems where initial conditions matter, it is usually best to relax the particle distribution by evolving the simulation for a period of time with a damping term (Section 19.3.6). This is the approach used, for example, in setting up stars in hydrostatic equilibrium (Section 19.3.4).

19.3.2 Stretch mapping

General non-uniform density profiles may be set up using 'stretch mapping' Herant (1994). The procedure for spherical distributions is the most commonly used Fryer et al. (2007); Rosswog & Price (2007); Rosswog et al. (2009), but we have generalised the method for any density profile that is along one coordinate direction Price & Monaghan (2004b). Starting with particles placed in a uniform distribution, the key is that a particle should keep the same relative position in the mass distribution. For each particle with initial coordinate x_0 in the relevant coordinate system, we solve the equation

$$f(x) = \frac{M(x)}{M(x_{\rm max})} - \frac{x_0 - x_{\rm min}}{(x_{\rm max} - x_{\rm min})} = 0, \tag{19.293}$$

where $M(x)$ is the desired density profile integrated along the relevant coordinate direction, i.e.

$$M(x) \equiv \int_{x_{\rm min}}^{x} \rho(x')dS(x')dx', \tag{19.294}$$

where the area element $\mathrm{d}S(x')$ depends on the geometry and the chosen direction, given by

$$dS(x) = \begin{cases} 1 & \text{Cartesian or cyl./sph. along } \phi, \theta \text{ or } z, \\ 2\pi x & \text{cylindrical along r,} \\ 4\pi x^2 & \text{spherical along r.} \end{cases} \tag{19.295}$$

We solve (19.293) for each particle using Newton-Raphson iterations

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \tag{19.296}$$

where

$$f'(x) = \frac{\rho(x)dS(x)}{M(x_{\rm max})}, \tag{19.297}$$

iterating until $|f(x)| < 10^{-9}$. The Newton-Raphson iterations have second order convergence, but may fail in extreme cases. Therefore, if the root-finding has failed to converge after 30 iterations, we revert to a bisection method, which is only first order but guaranteed to converge.

Stretch mapping is implemented in such a way that only the desired density function need be specified, either as through an analytic expression (implemented as a function call) or as a tabulated dataset. Since the mass integral in (19.294) may not be known analytically, we compute this numerically by integrating the density function using the trapezoidal rule.

The disadvantage of stretch mapping is that in spherical or cylindrical geometry it produces defects in the particle distribution arising from the initial Cartesian distribution of the particles.

In this case, the particle distribution should be relaxed into a more isotropic equilibrium state before starting the simulation. For stars, for example, this may be done by simulating the star in isolation with artificial damping added (Section 19.3.6). Alternative approaches are to relax the simulation using an external potential chosen to produce the desired density profile in equilibrium (e.g. Zurek & Benz (1986); Nagasawa et al. (1988)) or to iteratively 'cool' the particle distribution to generate 'optimal' initial conditions Diehl et al. (2015).

19.3.3 Accretion discs

Density field

The accretion disc setup module uses a Monte-Carlo particle placement (details in Section 19.8.7) in cylindrical geometry to construct density profiles of the form

$$\rho(x,y,z) = \Sigma_0 f_{\rm s} \left(\frac{R}{R_{\rm in}}\right)^{-p} \exp\left(\frac{-z^2}{2H^2}\right), \tag{19.298}$$

where Σ_0 is the surface density at $R = R_{\rm in}$ (if $f_{\rm s} = 1$), $H \equiv c_{\rm s}/\Omega$ is the scale height (with $\Omega \equiv \sqrt{GM/R^3}$), p is the power-law index (where $p = 3/2$ by default following Lodato & Pringle (2007)) and $f_{\rm s} \equiv (1 - \sqrt{R_{\rm in}/R})$ is an optional factor to smooth the surface density near the inner disc edge.

Several authors have argued that a more uniform particle placement is preferable for setting up discs in SPH Cartwright et al. (2009); Vanaverbeke et al. (2009). This may be important if one is interested in transient phenomena at the start of a simulation, but otherwise the particle distribution settles to a smooth density distribution within a few orbits (c.f. Lodato & Price (2010)).

Velocity field

The orbital velocities of particles in the disc are set by solving the equation for centrifugal equilibrium, i.e.

$$v_\phi^2 = \frac{GM}{R} - f_p - 2v_\phi f_{\rm BH}, \tag{19.299}$$

where the correction from radial pressure gradients is given by

$$f_p = -c_{\rm s}^2(R)\left(\frac{3}{2} + p + q + \frac{1}{2f_{\rm s}}\right), \tag{19.300}$$

where q is the index of the sound speed profile such that $c_{\rm s}(R) = c_{{\rm s},in}(R/R_{\rm in})^{-q}$ and $f_{\rm BH}$ is a correction used for discs around a spinning black hole Nealon et al. (2015)

$$f_{\rm BH} = -\frac{2a}{c^3}\left(\frac{GM}{R}\right)^2, \tag{19.301}$$

where a is the black hole spin parameter. The latter assumes Lense-Thirring precession is implemented as in Section 19.2.4. Where self-gravity is used, M is the enclosed mass at a given radius $M(< R)$, otherwise it is simply the mass of the central object. Using the enclosed mass for the self-gravitating case is an approximation since the disc is not spherically symmetric, but the difference is small and the disc relaxes quickly into the true equilibrium. Equation (19.299) is a quadratic for v_ϕ which we solve analytically.

Warps

Warps are applied to the disc Lodato & Price (2010); Nealon et al. (2015) by rotating the particles about the y-axis by the inclination angle i [in general a function of radius $i \equiv i(R)$],

according to

$$x' = x\cos(i) + z\sin(i), \tag{19.302}$$
$$y' = y, \tag{19.303}$$
$$z' = -x\sin(i) + z\cos(i), \tag{19.304}$$

with the velocities similarly adjusted using

$$v'_x = v_x\cos(i) + v_z\sin(i), \tag{19.305}$$
$$v'_y = v_y, \tag{19.306}$$
$$v'_z = -v_x\sin(i) + v_z\cos(i). \tag{19.307}$$

Setting an α-disc viscosity

The simplest approach to mimicking an α-disc viscosity in SPH is to employ a modified shock viscosity term, setting the desired $\alpha_{\rm SS}$ according to (19.124) as described in more detail in Section 19.2.6. Since the factor $\langle h\rangle/H$ is dependent both on resolution and temperature profile (i.e. the q-index), it is computed in the initial setup by taking the desired $\alpha_{\rm SS}$ as input in order to give the required $\alpha_{\rm AV}$. Although this does not guarantee that $\alpha_{\rm SS}$ is constant with radius and time (this is only true with specific choices of p and q and if the disc is approximately steady), it provides a simple way to prescribe the disc viscosity.

19.3.4 Stars and binary stars

We implement a general method for setting up 'realistic' stellar density profiles, based on either analytic functions (e.g. polytropes) or tabulated data files output from stellar evolution codes (see Iaconi et al. (2017) for a recent application of this to common envelope evolution).

The basic idea is to set up a uniform density sphere of particles and set the density profile by stretch mapping (see below). The thermal energy of the particles is set so that the pressure gradient is in hydrostatic equilibrium with the self-gravity of the star for the chosen equation of state. We then relax the star into equilibrium for several dynamical times using a damping parameter (Section 19.3.6), before re-launching the simulation with the star on an appropriate orbit.

For simulating red giants it is preferable to replace the core of the star by a sink particle Passy et al. (2012); Iaconi et al. (2017). When doing so one should set the accretion radius of the sink to zero and set a softening length for the sink particle consistent with the original core radius (see Section 19.2.8).

19.3.5 Galactic initial conditions

In addition to simulating ISM gas in galactic discs with analytic stellar potentials, one may represent bulge-halo-disc components by collisionless N-body particles (see Section 19.2.12). To replace a potential with a resolved system requires care with the initial conditions (i.e. position, velocity, mass). If setup incorrectly the system will experience radial oscillations and undulations in the rotation curve, which will have strong adverse effects on the gas embedded within. We include algorithms for initialising the static-halo models of Pettitt et al. (2015) (which used the SPHNG SPH code). These initial conditions require the NFW profile to be active and care must be taken to ensure the mass and scale lengths correspond to the rotation curve used to generate the initial conditions. Other codes may alternatively be used to seed multi-component N-body disc galaxies (e.g. Kuijken & Dubinski (1995a); Boily et al. (2001); McMillan & Dehnen (2007); Yurin & Springel (2014)), including MAGALIE Boily et al. (2001) and GALIC Yurin & Springel (2014) for which we have implemented format readers.

The gas in galactic scale simulations can be setup either in a uniform surface density disc, or according to the Milky Way's specific surface density. The latter is based on the radial functions given in Wolfire et al. (1995). As of yet we have not implemented a routine for enforcing hydrostatic equilibrium Springel et al. (2005); Wang et al. (2010); this may be included in a future update.

19.3.6 Damping

To relax a particle distribution into equilibrium, we adopt the standard approach Gingold & Monaghan (1977) of adding an external acceleration in the form

$$\boldsymbol{a}^a_{\rm ext,damp} = -f_{\rm d}\boldsymbol{v}, \tag{19.308}$$

such that a percentage of the kinetic energy is removed each timestep. The damping parameter, $f_{\rm d}$, is specified by the user. A sensible value for $f_{\rm d}$ is of order a few percent (e.g. $f_{\rm d} = 0.03$) such that a small fraction of the kinetic energy is removed over a Courant timescale.

19.4 Software Engineering

No code is completely bug-free (experience is the name everyone gives to their mistakes; Wilde (1892)). However, we have endeavoured to apply the principles of good software engineering to PHANTOM. These include:

1. a modular structure,
2. unit tests of important modules,
3. nightly builds,
4. automated nightly tests,
5. automated code maintenance scripts,
6. version control with GIT,
7. wiki documentation, and
8. a bug database and issue tracker.

Together these simplify the maintenance, stability and usability of the code, meaning that PHANTOM can be used direct from the development repository without fear of regression, build failures or major bugs.

Specific details of how the algorithms described in Section 19.2 are implemented are given in the Appendix. Details of the test suite are given in Appendix 19.8.9.

19.5 Numerical tests

Unless otherwise stated, we use the M_6 quintic spline kernel with $h_{\rm fac} = 1.0$ by default, giving a mean neighbour number of 113 in 3D. Almost all of the test results are similar when adopting the cubic spline kernel with $h_{\rm fac} = 1.2$ (requiring ≈ 58 neighbours), apart from the tests with the one-fluid dust method where the quintic is required. Since most of the algorithms used in PHANTOM have been extensively tested elsewhere, our aim is merely to demonstrate that the implementation in the code is correct, and to illustrate the typical results that should be achieved on these tests when run by the user. The input files used to run the entire test suite shown in the paper are available on the website, so it should be straightforward for even a novice user to reproduce our results.

Unless otherwise indicated, we refer to dimensionless $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_2$ norms when referencing errors, computed according to

$$\mathcal{L}_1 \equiv \frac{1}{NC_0}\sum_{i=1}^{N}|y_i - y_{\rm exact}|, \tag{19.309}$$

$$\mathcal{L}_2 \equiv \sqrt{\frac{1}{NC_0}\sum_{i=1}^{N}|y_i - y_{\rm exact}|^2}, \tag{19.310}$$

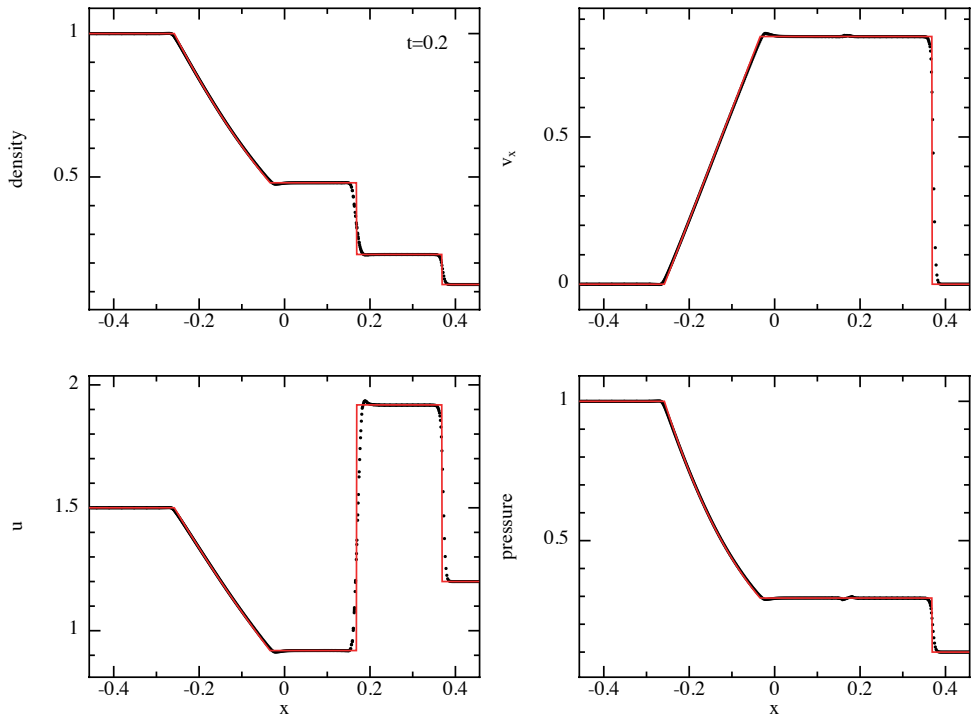


Figure 19.8: Results of the Sod shock tube test in 3D, showing projection of all particles (black dots) compared to the analytic solution (red line). The problem is set up with $[\rho, P] = [1, 1]$ for $x \leq 0$ and $[\rho, P] = [0.125, 0.1]$ for $x > 0$ with $\gamma = 5/3$, with zero velocities and no magnetic field. The density contrast is initialised using equal mass particles placed on a close packed lattice with $256 \times 24 \times 24$ particles initially in $x \in [-0.5, 0]$ and $128 \times 12 \times 12$ particles initially in $x \in [0, 0.5]$. The results are shown with constant $\alpha^{\rm AV} = 1$.

where $y_{\rm exact}$ is the exact or comparison solution interpolated or computed at the location of each particle i and N is the number of points. The norms are the standard error norms divided by a constant, which we set to the maximum value of the exact solution within the domain, $C_0 = \max(y_{\rm exact})$, in order to give a dimensionless quantity. Otherwise quoting the absolute value of $\mathcal{L}_1$ or $\mathcal{L}_2$ is meaningless. Dividing by a constant has no effect when considering convergence properties. These are the default error norms computed by SPLASH Price (2007).

Achieving formal convergence in SPH is more complicated than in mesh-based codes where linear consistency is guaranteed Price (2012a). The best that can be achieved with regular (positive, symmetric) kernels is second order accuracy away from shocks provided the particles remain well ordered Monaghan (1992). The degree to which this remains true depends on the smoothing kernel and the number of neighbours. Our tests demonstrate that formal second order convergence can be achieved with PHANTOM on certain problems (e.g. Section 19.5.6). More typically one obtains something between first and second order convergence in smooth flow depending on the degree of spatial disordering of the particles. The other important difference compared to mesh-based codes is that there is no intrinsic numerical dissipation in SPH due to its Hamiltonian nature — numerical dissipation terms must be explicitly added. We perform all tests with these terms included.

We use timestep factors of $C_{\rm Cour} = 0.3$ and $C_{\rm force} = 0.25$ by default for all tests (Section 19.2.3).

19.5.1 Hydrodynamics

Sod shock tube

Figure 19.8 shows the results of the standard Sod (1978) shock tube test, performed in 3D using $[\rho, P] = [1, 1]$ in the 'left state' ($x \leq 0$) and $[\rho, P] = [0.125, 0.1]$ for the 'right state' ($x > 0$) with a discontinuity initially at $x = 0$ and zero initial velocity and magnetic field. We perform the test using an adiabatic equation of state with $\gamma = 5/3$ and periodic boundaries in y and z.

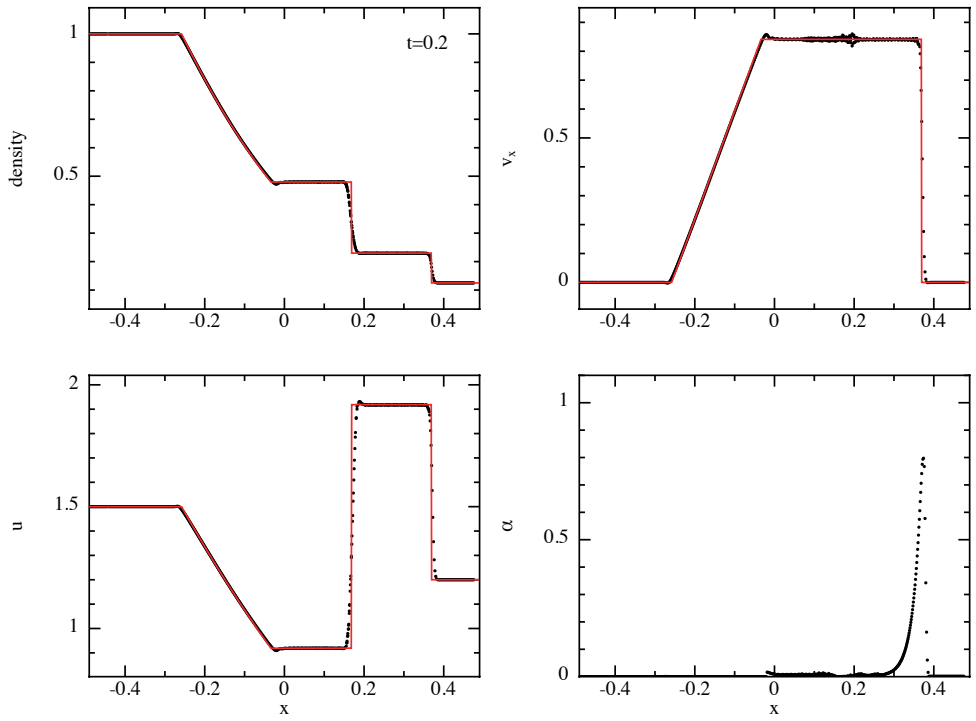


Figure 19.9: As in Figure 19.8, but with code defaults for all dissipation terms ($\alpha^{\rm AV} \in [0,1]$; $\alpha_u = 1$). These leave more noise in the velocity field behind the shock but provide second order convergence in smooth flow. The lower right panel in this case shows the resultant values for the viscosity parameter $\alpha^{\rm AV}$.

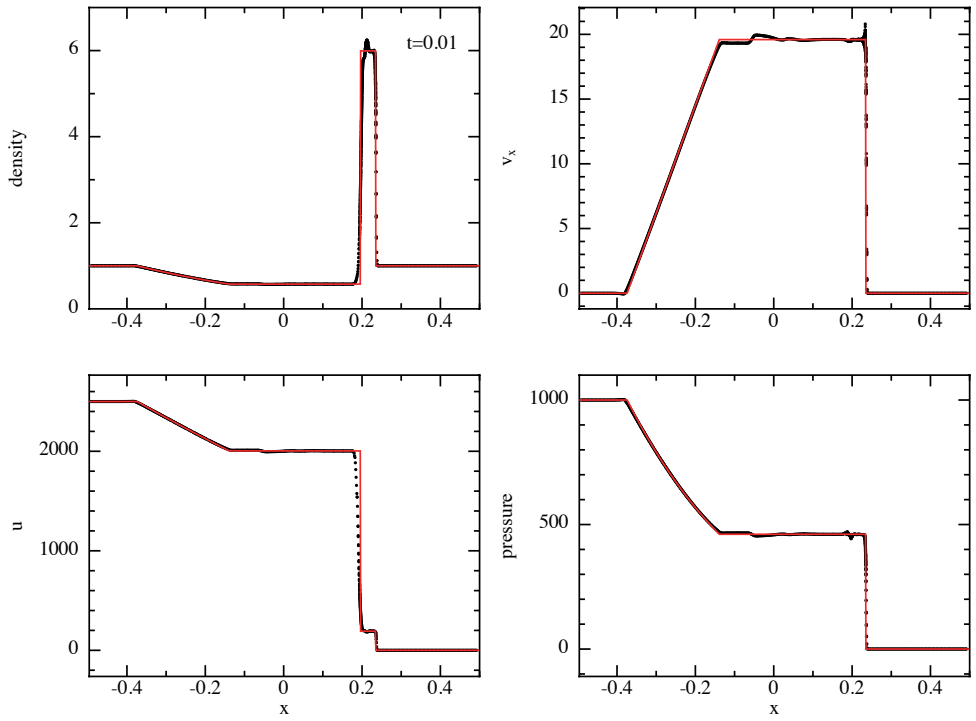


Figure 19.10: Results of the 3D blast wave test, showing projection of all particles (black dots) compared to the analytic solution (red line). The problem is set up with $[\rho, P] = [1, 1000]$ for $x \leq 0$ and $[\rho, P] = [1, 0.1]$ for $x > 0$ with $\gamma = 7/5$, with zero velocities and no magnetic field. We use equal mass particles placed on a close packed lattice with $800 \times 12 \times 12$ particles initially in $x \in [-0.5, 0.5]$. Results are shown with constant $\alpha^{\rm AV} = 1$

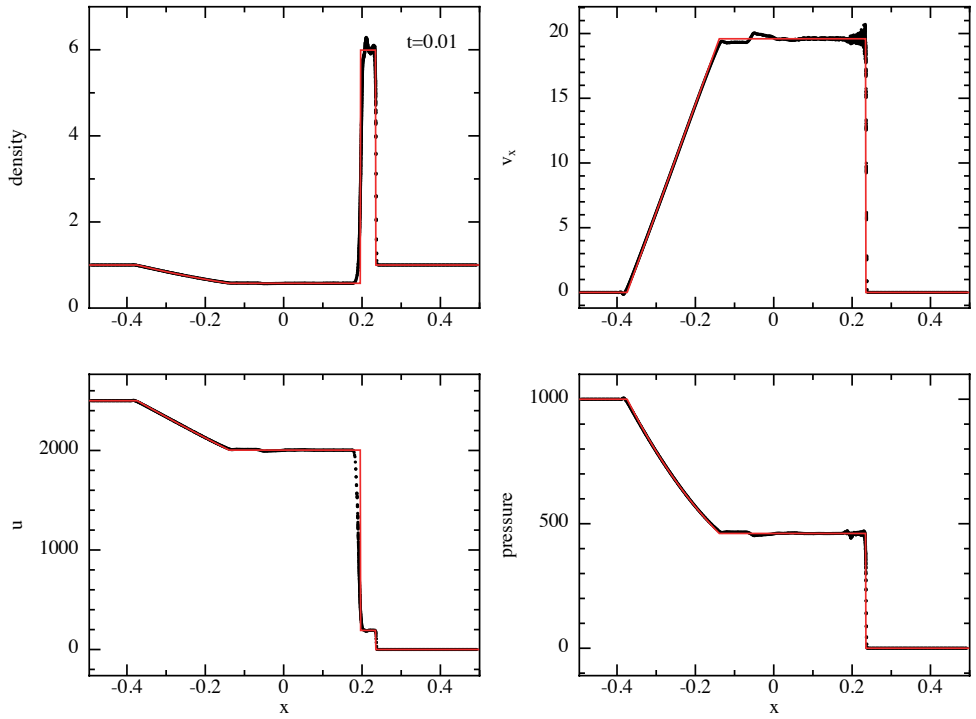


Figure 19.11: As in Figure 19.10 but with code defaults for dissipation switches ($\alpha^{\rm AV} \in [0, 1]$; $\alpha_u = 1$). As in Figure 19.9 the velocity field behind the shock is more noisy with switches applied, but the switches reduce the numerical dissipation away from shocks.

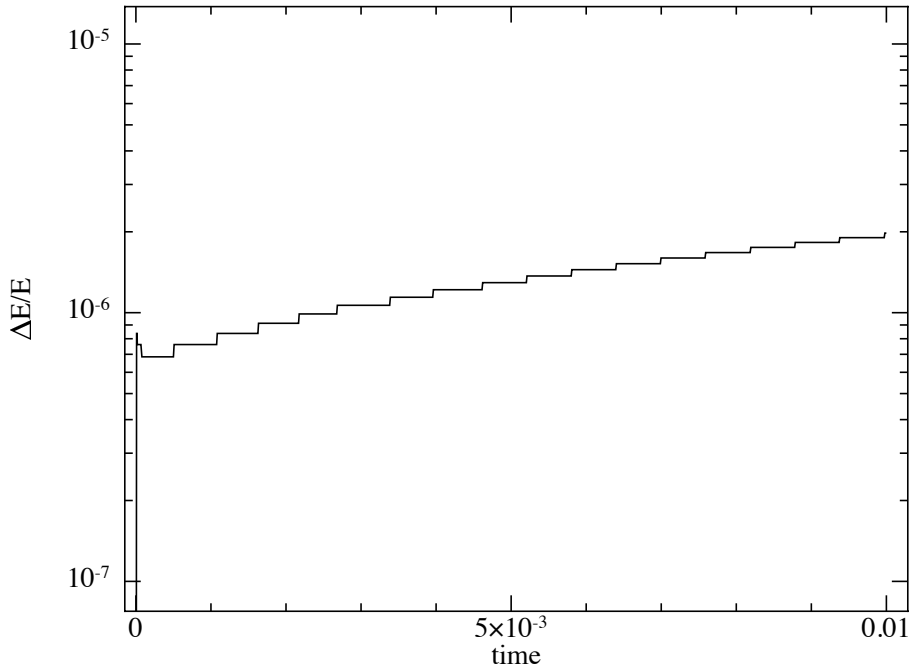


Figure 19.12: Relative error in energy conservation for the 3D blast wave test. Energy is conserved to an error of 10^{-6} in this test.

While many 1D solutions appear in the literature, only a handful of results on this test have been published for SPH in 3D (e.g. Dolag et al. (2005); Hubber et al. (2011); Beck et al. (2016); a 2D version is shown in Price (2012a)). The tricky part in a 3D SPH code is how to set up the density contrast. Setting particles on a cubic lattice is a poor choice of initial condition since this is not a stable arrangement for the particles Morris (1996b,a); Lombardi et al. (1999); Børve et al. (2004). The approach taken in Springel (2005) (where only the density was shown, being the easiest to get right) was to relax the two halves of the box into a stable arrangement using the gravitational force run with a minus sign, but this is time consuming.

Here we take a simpler approach which is to set the particles initially on a close-packed lattice (Section 19.3.1), since this is close to the relaxed arrangement Lombardi et al. (1999). To ensure continuity of the lattice across periodic boundaries we fix the number of particles in the y (z) direction to the nearest multiple of 2 (3) and adjust the spacing in the $x-$direction accordingly to give the correct density in each subdomain. We implement the boundary condition in the x-direction by tagging the first and last few rows of particles in the x direction as boundary particles, meaning that their particle properties are held constant. The results shown in Figure 19.8 use $256 \times 24 \times 24$ particles initially in $x \in [-0.5, 0]$ and $128 \times 12 \times 12$ particles in $x \in [0, 0.5]$ with code defaults for the artificial conductivity ($\alpha_u = 1$ with $v^u_{\rm sig}$ given by equation 19.43) and artificial viscosity ($\alpha^{\rm AV} = 1, \beta^{\rm AV} = 2$). The results are identical whether global or individual particle timesteps (Section 19.2.3) are used. Figure 19.9 shows the results when code defaults for viscosity are also employed, resulting in a time-dependent $\alpha^{\rm AV}$ (see lower right panel). There is more noise in the velocity field around the contact discontinuity in this case, but the results are otherwise identical.

The $\mathcal{L}_2$ errors for the solutions shown in Figure 19.8 are 0.0090, 0.0022, 0.0018 and 0.0045 for the density, velocity, thermal energy and pressure, respectively. With dissipation switches turned on (Figure 19.9) the corresponding errors are 0.009, 0.0021, 0.0019 and 0.0044 respectively. That is, our solutions are within 1 per cent of the analytic solution for all four quantities in both cases, with the density profile showing the strongest difference (mainly due to smoothing of the contact discontinuity).

Puri & Ramachandran (2014) compared our shock capturing algorithm with other SPH variants, including Godunov SPH. Our scheme was found to be the most robust of those tested.

Blast wave

As a more extreme version of the shock test, Figures 19.10 and 19.11 shows the results of the blast wave problem from Monaghan (1997), set up initially with $[\rho, P] = [1, 1000]$ for $x \leq 0$ and $[\rho, P] = [1.0, 0.1]$ for $x > 0$ and with $\gamma = 1.4$ (appropriate to air). As previously we set the particles on a close-packed lattice with a discontinuous initial pressure profile. We employ $800 \times 12 \times 12$ particles in the domain $x \in [-0.5, 0.5]$. Results are shown at $t = 0.01$. This is a more challenging problem than the Sod test due to the higher Mach number. As previously, we show results with both $\alpha^{\rm AV} = 1$ (Figure 19.10) and with the viscosity switch $\alpha \in [0, 1]$. Both calculations use $\alpha_u = 1$ with (19.43) for the signal speed in the artificial conductivity. For the solution shown in Figure 19.10, we find normalised $\mathcal{L}_2$ errors of 0.057, 0.063, 0.051 and 0.018 in the density, velocity, thermal energy and pressure, respectively, compared to the analytic solution. Employing switches (Figure 19.11), we find corresponding $\mathcal{L}_2$ errors of 0.056, 0.059, 0.052 and 0.017. That is, our solutions are within 6 per cent of the analytic solution at this resolution.

The main source of error is that the contact discontinuity is over-smoothed due to the artificial conductivity, while the velocity profile shows a spurious jump at the location of the contact discontinuity. This glitch is a startup error caused by our use of purely discontinuous initial conditions — it could be removed by adopting smoothed initial conditions but we prefer to perform the more difficult version of this test. There is also noise in the post-shock velocity profile because the viscosity switch does not apply enough dissipation here. As in the previous test, this noise can be reduced by increasing the numerical viscosity, e.g. by adopting a constant $\alpha^{\rm AV}$ (compare Figures 19.10 and 19.11).

Figure 19.12 quantifies the error in energy conservation, showing the error in the total energy as a function of time, i.e $|E - E_0|/|E_0|$. Energy is conserved to a relative accuracy of better than 2×10^{-6}.

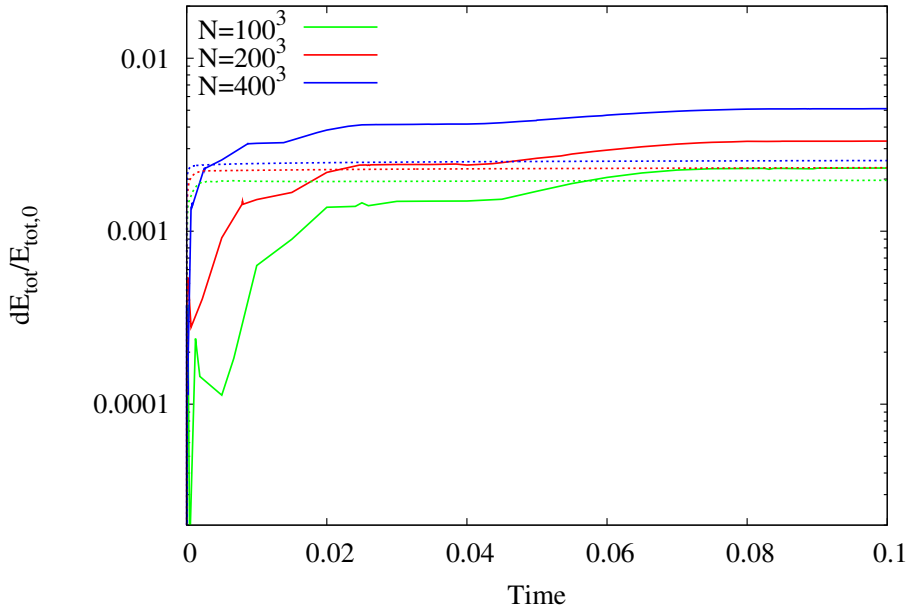


Figure 19.13: Evolution of the relative error in total energy for the Sedov blast wave problem. Resolutions are given in the legend; solid lines use individual timestepping while dotted lines show global timestepping.

Sedov blast wave

The Sedov-Taylor blast wave Taylor (1950a,b); Sedov (1959) is a similar test to the previous but with a spherical geometry. This test is an excellent test for the individual timestepping algorithm, since it involves propagating a blast wave into an ambient medium of 'inactive' or 'asleep' particles, which can cause severe loss of energy conservation if they are not carefully awoken Saitoh & Makino (2009). For previous uses of this test with SPH, see e.g. Springel & Hernquist (2002); Rosswog & Price (2007) and for a comparison between SPH and mesh codes on this test see Tasker et al. (2008).

We set up the problem in a uniform periodic box $x, y, z \in [-0.5, 0.5]$, setting the thermal energy on the particles to be non-zero in a barely-resolved sphere around the origin. We assume an adiabatic equation of state with $\gamma = 5/3$. The total energy is normalised such that the total thermal energy in the blast is $E_0 = \sum_a m_a u_a = 1$, distributed on the particles within $r < R_{\rm kern} h_0$ using the smoothing kernel, i.e.

$$u_a = \begin{cases} E_0 W(r, h_0), & r/h_0 \leq R_{\rm kern} \\ 0 & r/h_0 > R_{\rm kern} \end{cases} \tag{19.311}$$

where $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ is the radius of the particle and we set h_0 to be twice the particle smoothing length.

We simulate the Sedov blast wave using both global and individual timesteps at several different resolutions. Figure 19.13 shows the evolution of the relative error in total energy for our suite, while Figure 19.14 shows the density at $t = 0.1$ compared to the analytical solution given by the solid line. Energy is conserved to better than 1 per cent in all cases. Using higher spatial resolution results in a better match of the post-shock density with the analytic solution. The scatter at the leading edge of the shock is a result of the default artificial conductivity algorithm. Given the initial strong gradient in thermal energy, artificial conductivity is also important for reducing the noise on this problem, as first noted by Rosswog & Price (2007).

Kelvin-Helmholtz instability

Much has been written about Kelvin-Helmholtz instabilities with SPH Agertz et al. (2007); Price (2008); Abel (2011); Valdarnini (2012); Read & Hayfield (2012); Hubber et al. (2013c). For the present purpose it suffices to say that the test problems considered by Agertz et al. (2007) and Price (2008) are not well posed. That is, the number of small-scale secondary

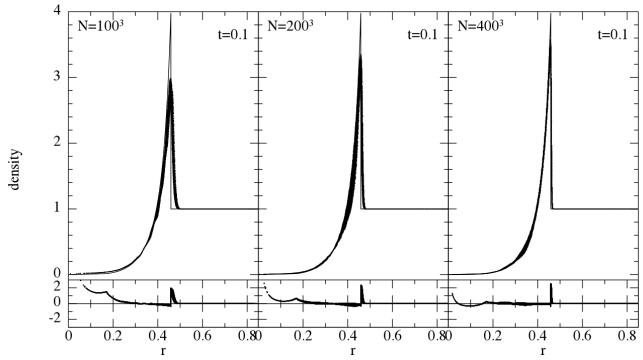


Figure 19.14: Density as a function of radius in the Sedov blast wave problem at three resolutions. All particles are placed initially on a closepacked lattice, are evolved using individual timesteps and we use the quintic kernel. The analytic solution is given by the solid line, and the bottom panels show the residuals compared to the analytical solution.

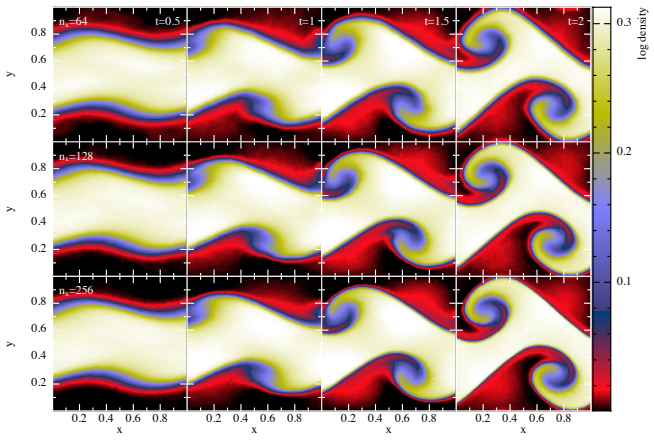


Figure 19.15: Results of the well-posed Kelvin-Helmholtz instability test from Robertson et al. (2010), shown at a resolution of (from top to bottom) $64 \times 74 \times 12$, $128 \times 148 \times 12$ and $256 \times 296 \times 12$ equal mass SPH particles. We use stretch mapping (Section 19.3.2) to achieve the initial density profile, consisting of a 2:1 density jump with a smoothed transition.

instabilities will always increase with numerical resolution because high wavenumber modes grow fastest in the absence of physical dissipation or other regularising forces such as magnetic fields or surface tension. The ill-posed nature of the test problem has been pointed out by several authors Robertson et al. (2010); McNally et al. (2012); Lecoanet et al. (2016), who have each proposed well-posed alternatives.

We adopt the setup from Robertson et al. (2010), similar to the approach by McNally et al. (2012), where the initial density contrast is smoothed using a ramp function. This should suppress the formation of secondary instabilities long enough to allow a single large scale mode to grow. The density and shear velocity in the y direction are given by

$$\rho(y) = \rho_1 + R(y)[\rho_2 - \rho_1], \tag{19.312}$$

and

$$v_x(y) = v_1 + R(y)[v_2 - v_1], \tag{19.313}$$

where $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 2$, $v_1 = -0.5$ and $v_2 = 0.5$ with constant pressure $P = 2.5$, $\gamma = 5/3$. The ramp function is given by

$$R(y) \equiv [1 - f(y)]\,[1 - g(y)]\,, \tag{19.314}$$

where

$$\begin{aligned} f &\equiv \frac{1}{1 + \exp\left[2(y - 0.25)/\Delta\right]}, \\ g &\equiv \frac{1}{1 + \exp\left[2(0.75 - y)/\Delta\right]}, \end{aligned} \tag{19.315}$$

and we set $\Delta = 0.25$. Finally, a perturbation is added in the velocity in the y direction, given by

$$v_y = 0.1 \sin(2\pi x). \tag{19.316}$$

The setup in Robertson et al. (2010) is 2D, but since PHANTOM is a 3D code, we instead set up the problem using a thin three dimensional box. We first set up a uniform close packed lattice in a periodic box with dimensions $1 \times 1 \times \sqrt{24}/n_x$, where n_x is the initial resolution in the x direction such that the box thickness is set to be exactly 12 particle spacings in the z direction independent of the resolution used in the x and y direction. The box is set between $[0, 1]$ in x and y, consistent with the ramp function. We then set up the density profile by stretch-mapping in the y direction using (19.312) as the input function (c.f. Section 19.3.2).

Figure 19.15 shows the results of this test, showing a cross section of density at $z = 0$ for three different resolutions (top to bottom) and at the times corresponding to those shown in Robertson et al. (2010). We compute the quantitative difference between the calculations by taking the root mean square difference of the cross section slices shown above interpolated to a 1024×1024 pixel map. The error between the $n_x = 64$ calculation and the $n_x = 256$ calculation is 1.3×10^{-3}, while this reduces to 4.9×10^{-4} for the $n_x = 128$ calculation. Figure 19.16 shows the growth of the amplitude of the mode seeded in (19.316). We follow the procedure described in McNally et al. (2012) to calculate the mode amplitude. At $t = 2$, the amplitude between the $n_x = 128$ and $n_x = 256$ calculations is within 4 per cent. The artificial viscosity and conductivity tend to slow convergence on this problem, so it is a good test of the dissipation switches (we use the default code viscosity switch as discussed in Section 19.2.2).

19.5.2 External forces

Lense-Thirring precession

We test the implementation of the Lense-Thirring precession by computing the precession induced on a pressure-less disc of particles, as outlined in Nealon et al. (2015). This disc is simulated for one orbit at the outer edge such that the inner part of the disc has precessed multiple times but the outer region has not yet completed a full precession. The precession timescale is estimated by measuring the twist as a function of time for each radial bin; in the inner region this is the time taken for the twist to go from a minimum (zero twist) to a maximum (fully twisted) and in the outer region the gradient of the twist against time is used to calculate the equivalent time. Figure 19.17 shows the precession timescale measured from the simulation as a function of the radius compared to the analytically derived precession timescale, with uncertainties derived from the calculation of the gradient.

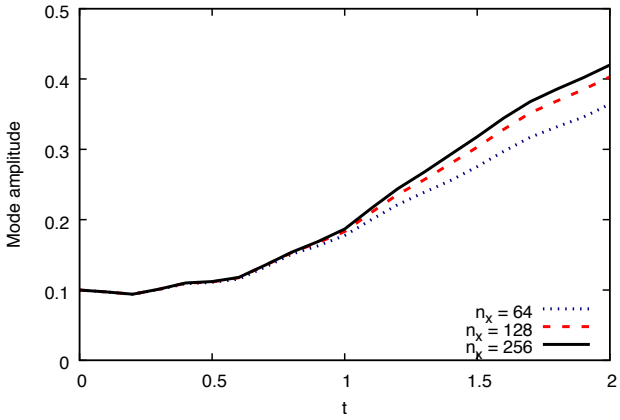


Figure 19.16: Growth of the amplitude of the seeded mode for the Kevin-Helmholtz instability test. The amplitude at $t = 2$ between the $n_x = 128$ and $n_x = 256$ calculations is within 4 per cent.

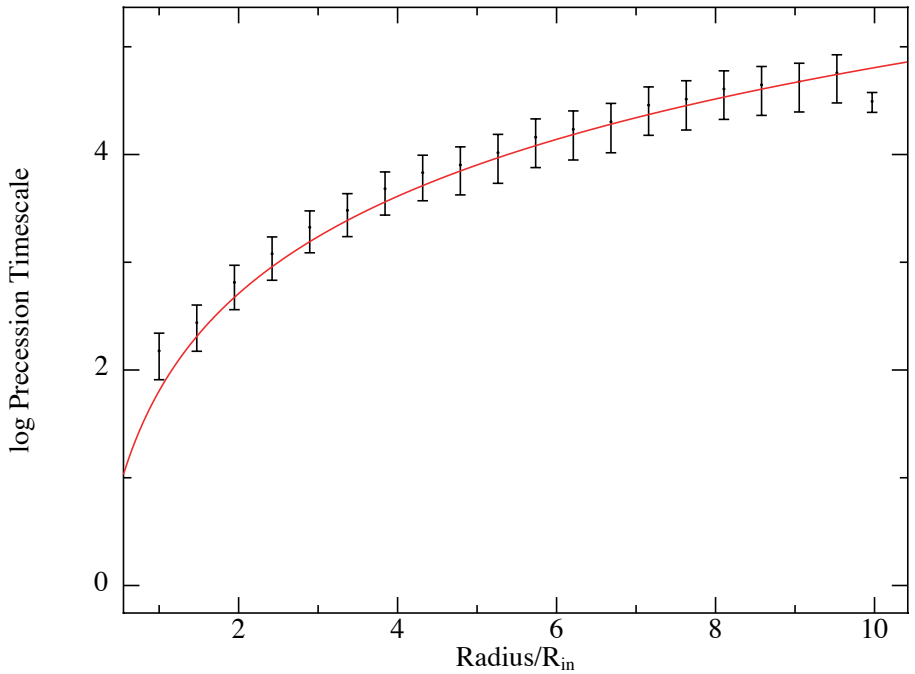


Figure 19.17: Lense-Thirring precession test from a disc inclined by 30°. Here the precession time-scale is measured from the cumulative twist in the disc and the exact solution, $t_p = R^3/2a$ is represented by the red line.

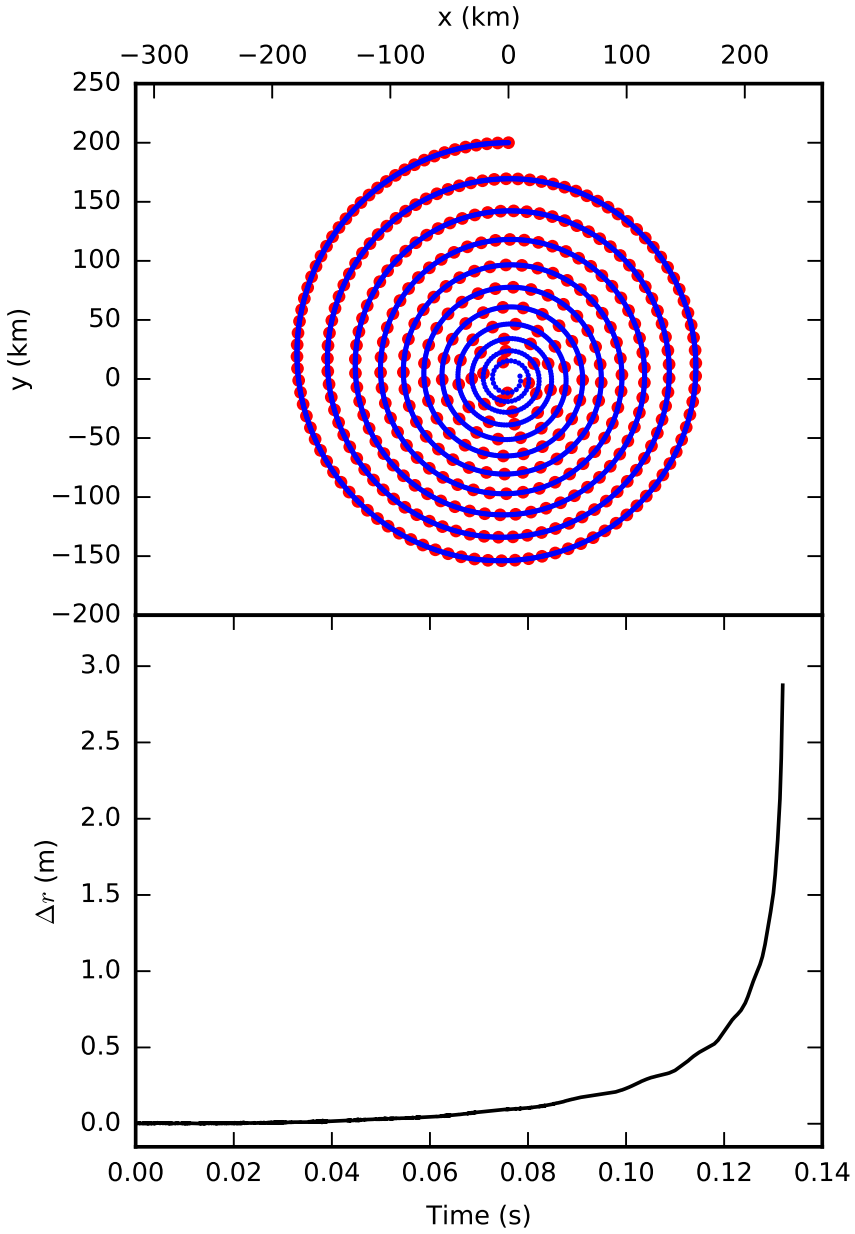


Figure 19.18: Inspiral of a test particle subjected to Poynting-Robertson drag using PHANTOM (blue curve) compared to the expected solution (red curve). For clarity, only some of the points are plotted. The results are indistinguishable on this scale. Bottom panel shows the distance (Δr) between the PHANTOM particle and the test code particle. This demonstrates that the implementation of Poynting-Robertson drag in PHANTOM is consistent with a 4th order numerical solution to (19.106).

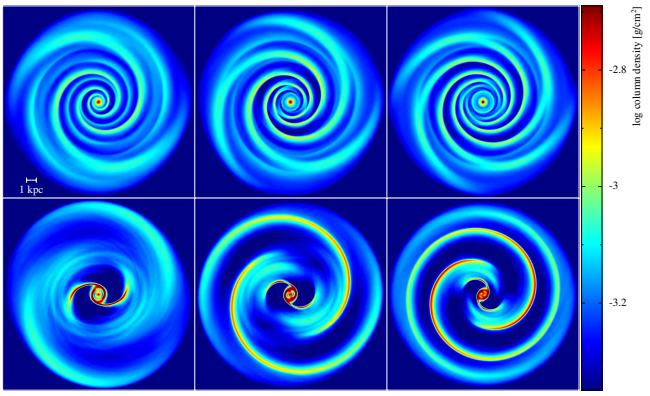


Figure 19.19: Gas in a galactic disc under the effect of different galactic potentials. Top row shows models with a 2, 3, and 4 armed spiral (left to right) with a pitch angle of 15° and pattern speed of 20 km s^{-1} kpc^{-1}. Bottom row shows a bar potential with pattern speeds of 40, 60 and 80 km s^{-1} kpc^{-1} (left to right).

Poynting-Robertson drag

Figure 19.18 shows the trajectory of a spherical assembly of 89 pressureless SPH particles subject to Poynting-Robertson drag with a fixed value of $\beta_{\rm PR} = 0.1$, assuming a central neutron star of mass 1.4M$_\odot$ and 10 km radius and a particle initially orbiting at $R = 200$ km with initial v_ϕ of 0.9 times the Keplerian orbital speed. We compare this to the trajectory of a test particle produced by direct numerical integration of the equations of motion, (19.106), with a 4th order Runge Kutta scheme. As shown in Figure 19.18, there is no significant difference between the codes. We therefore expect that the behaviour of SPH gas or dust particles under the influence of any given β will be correct.

Galactic potentials

Figure 19.19 shows 6 calculations with gas embedded within different galactic potentials (Section 19.2.4). We set up an isothermal gas disc with $T = 10\,000$K, with a total gas mass of 1×10^9 M$_\odot$ set up in a uniform surface density disc from 0–10 kpc in radius. A three-part potential model for the Milky Way provides the disc with an axisymmetric rotation curve (bulge plus disc plus halo, the same as Pettitt et al. (2014)). The top row shows gas exposed to spiral potentials of Cox & Gómez (2002) with three different arm numbers (2, 3, 4), while the bottom row shows simulations within the bar potential of Wada & Koda (2001) at three different pattern speeds (40, 60 and 80 km s^{-1} kpc^{-1}). All models are shown after approximately one full disc rotation (240 Myr). Gas can be seen to trace the different spiral arm features, with the two armed model in particular showing branches characteristic of such density wave potentials (e.g. Martos et al. (2004)). The bars drive arm features in the gas, the radial extent of which is a function of the pattern speed. Also note the inner elliptical orbits of the bar at the location of the Lindblad resonance which is an effect of the peaked inner rotation curve resulting from the central bulge.

19.5.3 Accretion discs

SPH has been widely used for studies of accretion discs, ever since the first studies by Artymowicz & Lubow (1994, 1996); Murray (1996) and Maddison et al. (1996) showed how to use the SPH artificial viscosity term to mimic a Shakura & Sunyaev (1973) disc viscosity.

Measuring the disc viscosity

The simplest test is to measure the disc viscosity from the diffusion rate of the disc surface density. Figure 19.20 shows the results of an extensive study of this with PHANTOM perfomed by Lodato & Price (2010). For this study we set up a disc from $R_{\rm in} = 0.5$ to $R_{\rm out} = 10$ with

surface density profile

$$\Sigma = \Sigma_0 R^{-p}\left(1-\sqrt{\frac{R_{\rm in}}{R}}\right), \tag{19.317}$$

and a locally isothermal equation of state $c_{\rm s} = c_{\rm s,0}R^{-q}$. We set $p = 3/2$ and $q = 3/4$ such that the disc is uniformly resolved, i.e. $h/H \sim$ constant Lodato & Pringle (2007), giving a constant value of the Shakura & Sunyaev (1973) α parameter according to (19.124). We set $c_{\rm s,0}$ such that the aspect ratio is $H/R = 0.02$ at $R = 1$. We used 2 million particles by default, with several additional calculations perfomed using 20 million particles. The simulation is performed to $t = 1000$ in code units.

The diffusion rate is measured by fitting the surface density evolution obtained from PHANTOM with the results of a 'ring code' solving the standard 1D diffusion equation for accretion discs Lynden-Bell & Pringle (1974); Pringle (1981, 1992). Details of the fitting procedure are given in Lodato & Price (2010). In short, we use Newton-Raphson iterations to find the minimum error between the 1D code and the surface density profile from PHANTOM at the end of the simulation, which provides the best fit ($\alpha_{\rm fit}$) and error bars. Figure 19.20 shows that the measured diffusion rates agree with the expected values to within the error bars. The exception is for low viscosity discs with physical viscosity, where contribution from artificial viscosity becomes significant. Triangles in the figure show the results with disc viscosity computed from the artificial viscosity (Section 19.2.6), while squares represent simulations with physical viscosity set according to (19.126).

This test demonstrates that the implementation of disc viscosity matches the analytic theory to within measurement errors. This also demonstrates that the translation of the artificial viscosity term according to (19.124) is correct.

Warp diffusion

A more demanding test of disc physics involves the dynamics of warped discs. Extensive analytic theory exists, starting with the linear theory of Papaloizou & Pringle (1983), subsequent work by Pringle (1992), and culminating in the work by Ogilvie (1999) which provides the analytic expressions for the diffusion rate of warps in discs for non-linear values of both disc viscosity and warp amplitude. Importantly, this theory applies in the 'diffusive' regime where the disc viscosity exceeds the aspect ratio, $\alpha > H/R$. For $\alpha \lesssim H/R$ the warp propagation is wave-like and no equivalent non-linear theory exists Lubow & Ogilvie (2000); Lubow et al. (2002).

PHANTOM was originally written to simulate warped discs — with our first study in Lodato & Price (2010) designed to test the Ogilvie (1999) theory in 3D simulations. Figure 19.21 shows the results of this study, showing the measured warp diffusion rate as a function of disc viscosity. The setup of the simulations is as in the previous test but with a small warp added to the disc, as outlined in Section 3.3 of Lodato & Price (2010). Details of the fitting procedure used to measure the warp diffusion rate are also given in Section 4.2 of that paper. The dashed line shows the non-linear prediction of Ogilvie (1999), namely

$$\alpha_2 = \frac{1}{2\alpha}\frac{4(1+7\alpha^2)}{4+\alpha^2}. \tag{19.318}$$

Significantly, the PHANTOM results show a measurable difference between the predictions of the non-linear theory and the prediction from linear theory Papaloizou & Pringle (1983) of $\alpha_2 = 1/(2\alpha)$, shown by the solid black line.

In addition to the results shown in Figure 19.21, PHANTOM also showed a close match to both the predicted self-induced precession of the warp and to the evolution of non-linear warps (see Figures 13 and 14 in Lodato & Price (2010), respectively). From the success of this initial study we have used PHANTOM to study many aspects of disc warping, either with isolated warps or breaks Lodato & Price (2010); Nixon et al. (2012a), warps induced by spinning black holes Nixon et al. (2012b); Nealon et al. (2015, 2016) and warps in circumbinary Nixon et al. (2013); Facchini et al. (2013) or circumprimary Doğan et al. (2015); Martin et al. (2014a,b) discs. In particular, PHANTOM was used to discover the phenomenon of 'disc tearing' where sections of the disc are 'torn' from the disc plane and precess effectively independently Nixon et al. (2012b, 2013); Nealon et al. (2015).

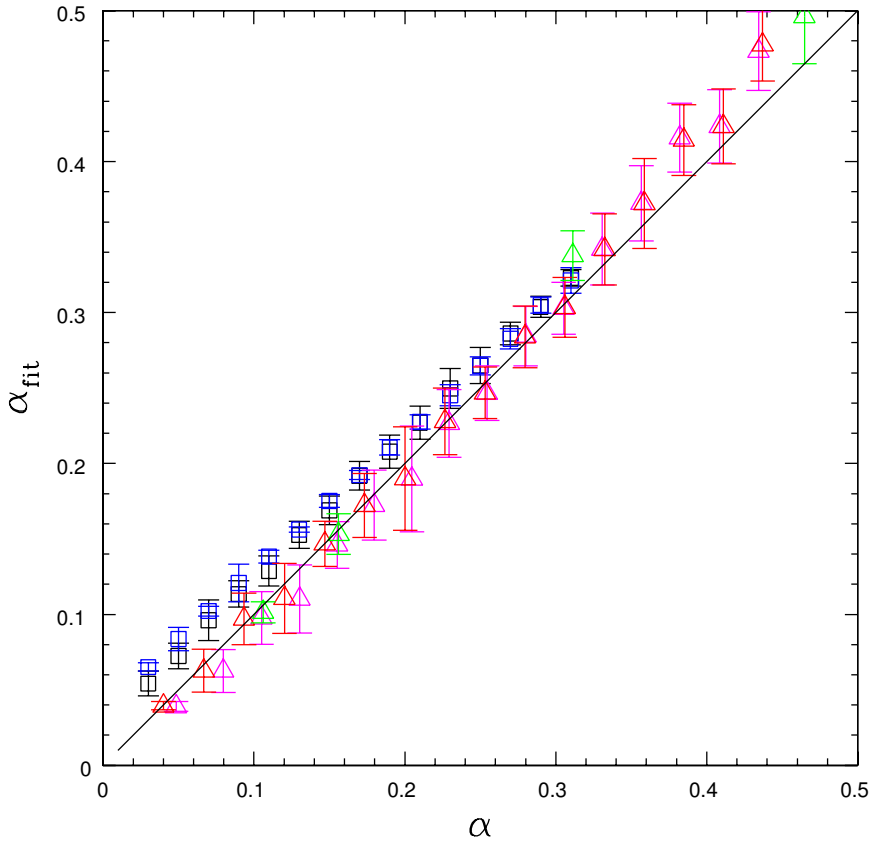


Figure 19.20: Calibration of the disc viscosity in PHANTOM, comparing the input value of the Shakura-Sunyaev α from (19.124) ($x-$axis) with the measured diffusion rate of the surface density by fitting to a 1D code (y-axis). Triangles indicate simulations with the disc viscosity computed using the artificial viscosity (Section 19.2.6), while squares represent simulations using physical viscosity (Section 19.2.7). All simulations use 2 million particles except for the green, cyan and red triangles which use 20 million particles. Figure taken from Lodato & Price (2010).

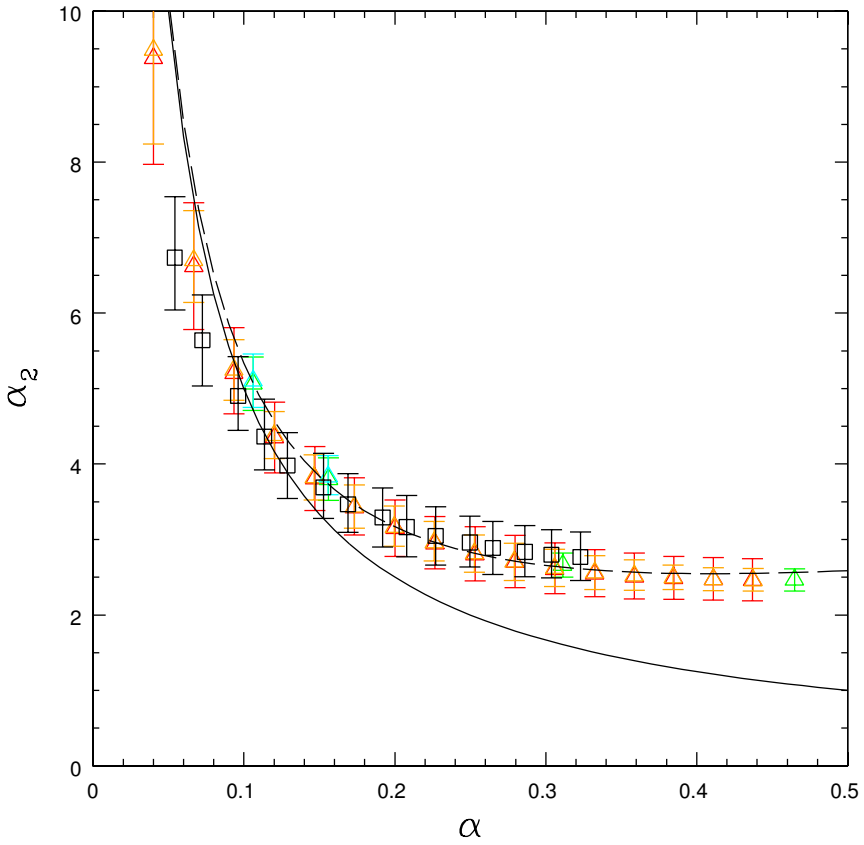


Figure 19.21: Warp diffusion rate as a function of disc viscosity, showing the PHANTOM results compared to the non-linear theory of Ogilvie (1999) (dashed line). The linear prediction, $\alpha_2 = 1/(2\alpha)$, is shown by the solid line, highlighting the agreement of PHANTOM with the non-linear theory. Colouring of points is as in Figure 19.20. Figure taken from Lodato & Price (2010).

Disc-planet interaction

Although there is no 'exact' solution for planet-disc interaction, an extensive code comparison was performed by de Val-Borro et al. (2006). Figure 19.22 shows the column density of a 3D PHANTOM calculation, plotted in r-ϕ with the density integrated through the z direction, comparable to the 'viscous Jupiter' setup in de Val-Borro et al. (2006).

Two caveats apply when comparing our results with those in Figure 10 of de Val-Borro et al. (2006). The first is that the original comparison project was performed in 2D and mainly with grid-based codes with specific 'wave damping' boundary conditions prescribed. We chose simply to ignore the prescribed boundary conditions and two dimensionality and instead modelled the disc in 3D with a central accretion boundary at $r = 0.25$ with a free outer boundary, with the initial disc set up from $r = 0.4$ to $r = 2.5$. We used 10^6 SPH particles. Second, the planetary orbit was prescribed on a fixed circular orbit with no accretion onto either the planet or the star. Although we usually use sink particles in PHANTOM to model planet-disc interaction Dipierro et al. (2015), for this test we thus employed the fixed binary potential (Section 19.2.4) to enable a direct comparison. We thus used $M = 10^{-3}$ in the binary potential, corresponding to the 'Jupiter' simulation in de Val-Borro et al. (2006) with the planet on a fixed circular orbit at $r = 1$.

As per the original comparison project, we implemented Plummer softening of the gravitational force from the planet,

$$\phi_{\rm planet} = -\frac{-m_{\rm planet}}{\sqrt{r^2+\epsilon^2}}, \tag{19.319}$$

where $\epsilon = 0.6H$. We also implemented the prescribed increase of planet mass with time for the first 5 orbits according to

$$m_{\rm planet} = \sin^2\left(\frac{\pi t}{10P_{\rm orbit}}\right), \tag{19.320}$$

where $P_{\rm orbit}$ is the orbital period (2π in code units), though we found this made little or no difference to the results in practice. We assumed a locally isothermal equation of state, $c_{\rm s} \propto R^{-0.5}$, such that $H/R \approx 0.05 \approx$ constant. We assumed an initially constant surface density, $\Sigma_0 = 0.002M_*/(\pi a^2)$. We also employed a Navier-Stokes viscosity with $\nu = 10^{-5}$ *on top of* the usual settings for shock dissipation with the viscosity switch, namely $\alpha_{\rm AV} \in [0, 1]$ and $\beta_{\rm AV} = 2$. We use the Navier-Stokes viscosity implementation described in Section 19.2.7, which is the code default. We also employed the cubic spline kernel (with $h_{\rm fac} = 1.2$) rather than the quintic to reduce the computational expense (using the quintic made no difference to the results).

Despite the different assumptions, the results in Figure 19.22 are strikingly similar to those obtained with most of the grid-based codes in de Val-Borro et al. (2006). The main difference is that our gap is shallower, which is not surprising since this is where resolution is lowest in SPH. There is also some difference in the evolution of the surface density, particularly at the inner boundary, due to the difference in assumed boundary conditions. However, the dense flow around the planet and in the shocks appear well resolved compared to the other codes. What is interesting is that the SPH codes used in the original comparison performed poorly on this test. This may be simply due to the low resolution employed, as the two SPH calculations used 250 000 and 300 000 particles, respectively, (though performed only in 2D rather than 3D), but given the extent of other differences between adopted setup and SPH algorithms, it is hard to draw firm conclusions.

As per the original comparison, Figure 19.22 shows the estimated position of the planetary shocks from Ogilvie & Lubow (2002) plotted as dotted lines, namely

$$\phi(r,t) = \begin{cases} t - \frac{2}{3\varepsilon}\left(r^{3/2} - \frac{3}{2}\ln r - 1\right); & r > r_{\rm planet}; \\ t + \frac{2}{3\varepsilon}\left(r^{3/2} - \frac{3}{2}\ln r - 1\right); & r < r_{\rm planet}, \end{cases} \tag{19.321}$$

where $\varepsilon = 0.05$ is the disc aspect ratio. The disagreement between the shock position and the Ogilvie & Lubow (2002) solution seen in Figure 19.22 was also found in every simulation shown in de Val-Borro et al. (2006), so more likely reflects the approximate nature of the analytic solution rather than numerical error.

We found this to be a particularly good test of the viscosity limiter, since there is both a shock and a shear flow present. Without the limiter in (19.46), we found the shock viscosity switch would simply trigger to $\alpha_{\rm AV} \approx 1$. The original Morris & Monaghan (1997) switch

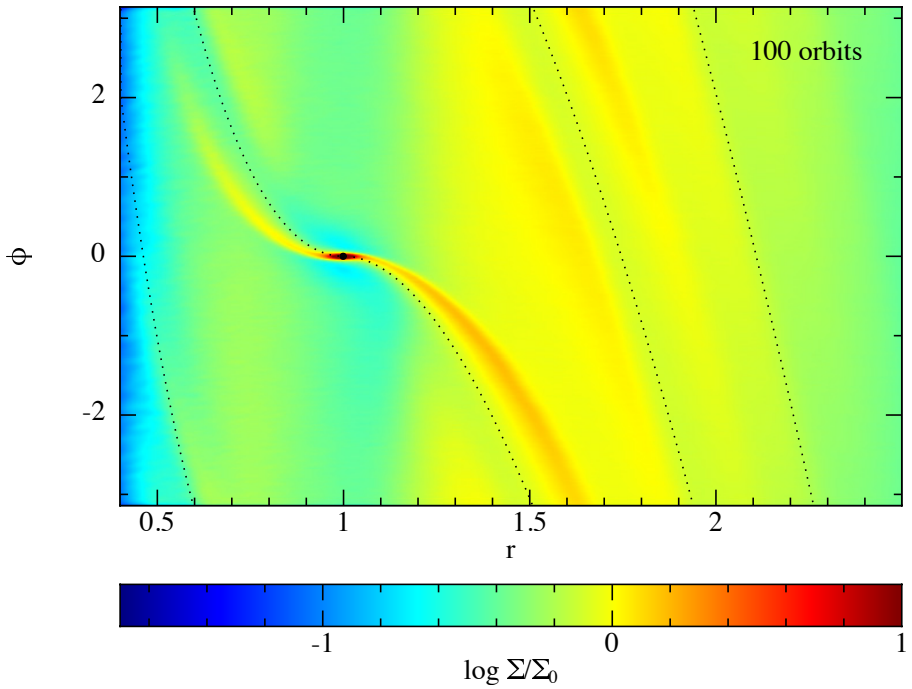


Figure 19.22: Planet-disc interaction in 3D, showing the 'viscous Jupiter' calculation comparable to the 2D results shown with various grid and SPH codes in Figure 10 of de Val-Borro et al. (2006). The dotted lines shows the estimated position of the planetary shocks from Ogilvie & Lubow (2002). The offset between this solution and the numerical shock position is due to the approximate nature of the analytic solution (see de Val-Borro et al. (2006)).

(Section 19.2.2) also performs well on this test, suggesting that the velocity divergence is better able to pick out shocks in differentially rotating discs compared to its time derivative.

19.5.4 Physical viscosity

Taylor-Green vortex

The Taylor-Green vortex Taylor & Green (1937) consists of a series of counter-rotating vortices. We perform this test using four vortices set in a thin 3D slab. The initial velocity fields are given by: $v_x = v_0 \sin(2\pi x)\cos(2\pi y)$, $v_y = -v_0 \cos(2\pi x)\sin(2\pi y)$ with $v_0 = 0.1$. The initial density is uniform $\rho = 1$, and an isothermal equation of state is used ($P = c_s^2\rho$) with speed of sound $c_s = 1$. Viscosity will cause each component of the velocity field to decay at a rate $\propto \exp(-16\pi^2\nu t)$, where ν is the kinematic shear viscosity.

Figure 19.23 shows the kinetic energy for a series of calculations using $\nu = 0.05$, 0.1, 0.2. In each case, the kinetic energy exponentially decays by several orders of magnitude. The corresponding analytic solutions are shown by the solid black lines for comparison, demonstrating that the implementation of physical viscosity in PHANTOM is correct.

19.5.5 Sink particles

Binary orbit

Figure 19.24 shows the error in total energy conservation $\Delta E/|E_0|$ for a set of simulations consisting of two sink particles set up in a binary orbit, a common test of N-body integrators Hut et al. (1995); Quinn et al. (1997); Farr & Bertschinger (2007); Dehnen & Read (2011). We fix the initial semi-major axis $a = 1$ with masses $m_1 = m_2 = 0.5$ and with the two sink particles initially at periastron, corresponding to $\boldsymbol{x}_1 = [-m_2/(m_1+m_2)\Delta, 0, 0]$ and $\boldsymbol{x}_2 = [m_1/(m_1+m_2)\Delta, 0, 0]$ where $\Delta = a(1-e)$ is the initial separation. The corresponding initial velocities are $\boldsymbol{v}_1 = [0, -m_2/(m_1+m_2)|v|, 0]$ and $\boldsymbol{v}_2 = [0, m_1/(m_1+m_2)|v|, 0]$, where $|v| = \sqrt{a(1-e^2)(m_1+m_2)}/\Delta$.

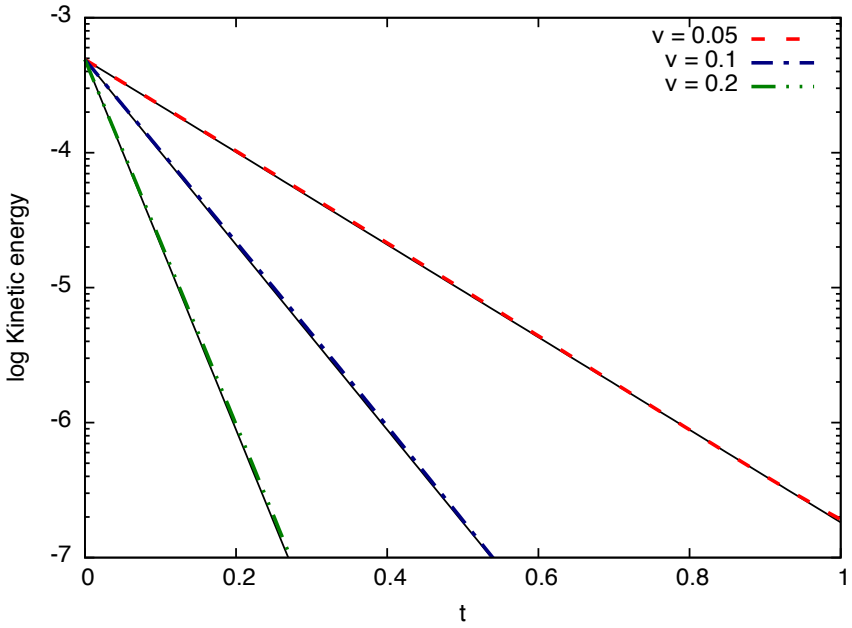


Figure 19.23: Test of physical Navier-Stokes viscosity in the Taylor-Green vortex using kinematic shear viscosity $\nu = 0.05$, 0.1, 0.2. The exponential decay rate of kinetic energy may be compared to the analytic solution in each case (solid black lines), demonstrating that the calibration of physical viscosity in PHANTOM is correct.

The orbital period is thus $P = \sqrt{4\pi^2 a^3/(G(m_1+m_2))} = 2\pi$ in code units for our chosen parameters. Importantly, we use an adaptive timestep which is not time-symmetric so there remains some drift in the energy error which is absent if the timestep is constant (see e.g. Hut et al. (1995); Quinn et al. (1997) and Dehnen & Read (2011) for discussion of this issue).

Figure 19.24 shows the error in total energy as a function of time for the first 1000 orbits for calculations with initial eccentricities of $e = 0.0$ (a circular orbit), 0.3, 0.5, 0.7 and 0.9. Energy conservation is worse for more eccentric orbits, as expected, with $\Delta E/|E_0| \sim 6\%$ after 1000 orbits for our most extreme case ($e = 0.9$). The energy error can be reduced arbitrarily by decreasing the timestep, so this is mainly a test of the default settings for the sink particle timestep control. For this problem the timestep is controlled entirely by (19.76), where by default we use $\eta_\Phi = 0.05$, giving 474 steps per orbit for $e = 0.9$. For simulations with more eccentric orbits we recommend decreasing $C_{\rm force}$ from the default setting of 0.25 to obtain more accurate orbital dynamics.

In addition to calibrating the timestep constraint, Figure 19.24 also validates the sink particle substepping via the RESPA algorithm (Section 19.2.3) since for this problem the "gas" timestep is set only by the desired interval between output files (to ensure sufficient output for the figure we choose $\Delta t_{\rm max} = 1$, but we also confirmed that this choice is unimportant for the resultant energy conservation). This means that increasing the accuracy of sink particle interactions adds little or no cost to calculations involving gas particles.

The corresponding plot for angular momentum conservation (not shown) merely demonstrates that angular momentum is conserved to machine precision ($\Delta L/|L| \sim 10^{-15}$), as expected. Importantly, angular momentum remains conserved to machine precision even with adaptive timestepping.

Restricted three-body problem

Chin & Chen (2005) proposed a more demanding test of N-body integrators, consisting of a test particle orbiting in the potential of a binary on a fixed circular orbit. We set up this problem with a single sink particle with $\boldsymbol{x} = [0, 0.0580752367, 0]$ and $\boldsymbol{v} = [0.489765446, 0, 0]$, using the time-dependent binary potential as described in Section 19.2.4 with $M = 0.5$. This is therefore a good test of the interaction between a sink particle and external potentials in the code, as well as the sink particle timestepping algorithm. For convenience we set the sink mass $m = 1$ and accretion radius $r_{\rm acc} = 0.1$, although both are irrelevant to the problem.

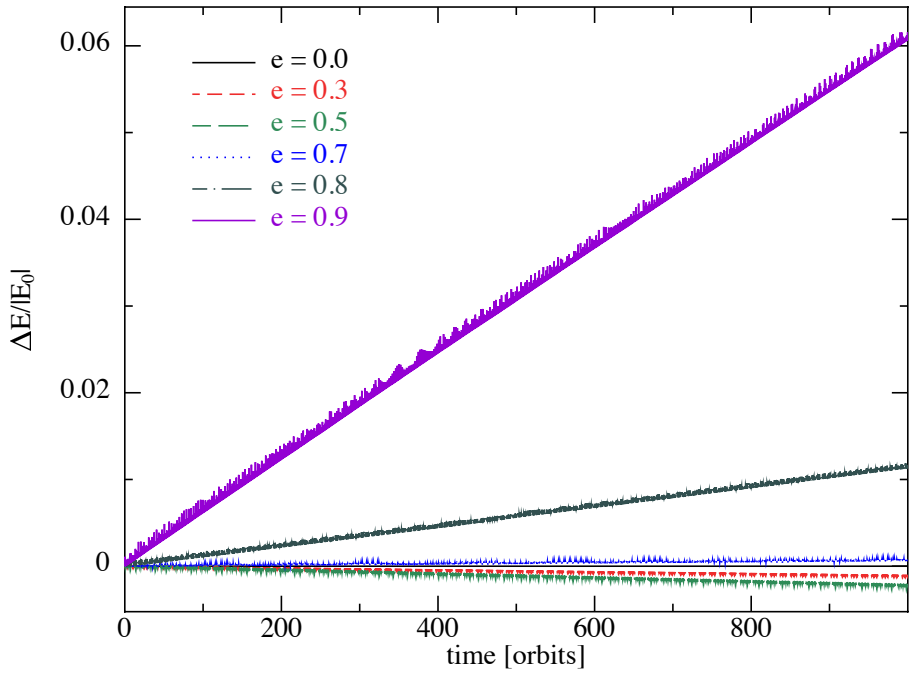


Figure 19.24: Errors in energy conservation in a sink particle binary integration with code default parameters for the timestep control, showing the energy drift caused by the adaptive timestepping. Angular momentum is conserved to machine precision.

Figure 19.25 shows the resulting orbit using the default code parameters, where we plot the trajectory of the sink particle up to $t = 27\pi$, as in Figures 1 and 2 of Chin & Chen (2005). Considering that we use only a second-order integrator, the orbital trajectory is remarkably accurate, showing no chaotic behaviour and only a slight precession consistent or better than the results with some of the fourth order schemes shown in their paper (albeit computed with a larger timestep). We are thus satisfied that our time integration scheme and the associated timestep settings can capture complex orbital dynamics with sufficient accuracy.

19.5.6 Magnetohydrodynamics

3D circularly polarised Alfvén wave

Tóth (2000) introduced the circularly polarised Alfvén wave test, an exact non-linear solution to the MHD equations which can therefore be performed using a wave of arbitrarily large amplitude. Most results of this test are shown in 2D Price & Monaghan (2005); Rosswog & Price (2007); Price (2012a); Tricco & Price (2013). Here we follow the 3D setup outlined by Gardiner & Stone (2008). We use a periodic domain of size $L \times L/2 \times L/2$ where $L = 3$, with the wave propagation direction defined using angles a and b where $\sin a = 2/3$ and $\sin b = 2/\sqrt{5}$, with the unit vector along the direction of propagation given by $\boldsymbol{r} = [\cos a \cos b, \cos a \sin b, \sin a]$. We use an initial density $\rho = 1$, an adiabatic equation of state with $\gamma = 5/3$ and $P = 0.1$. We perform the 'travelling wave test' from Gardiner & Stone (2008), where the wavelength $\lambda = 1$ and the vectors $[v_1, v_2, v_3] = [0, 0.1\sin(2\pi x_1/\lambda), 0.1\cos(2\pi x_1/\lambda)]$ and $[B_1, B_2, B_3] = [1, 0.1\sin(2\pi x_1/\lambda), 0.1\cos(2\pi x_1/\lambda)]$ are projected back into the x, y and z components using the transformations given by Gardiner & Stone (2008)

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cos a \cos b - x_2 \sin b - x_3 \sin a \cos b, \\ y &= x_1 \cos a \sin b + x_2 \cos b - x_3 \sin a \sin b, \\ z &= x_1 \sin a + x_3 \cos a. \end{aligned} \tag{19.322}$$

Figure 19.26 shows the results of this test using $32 \times 18 \times 18$, $64 \times 36 \times 39$ and $128 \times 74 \times 78$ particles initially set on a close packed lattice, compared to the exact solution given by the red line (the same as the initial conditions for the wave). We plot the transverse component of the

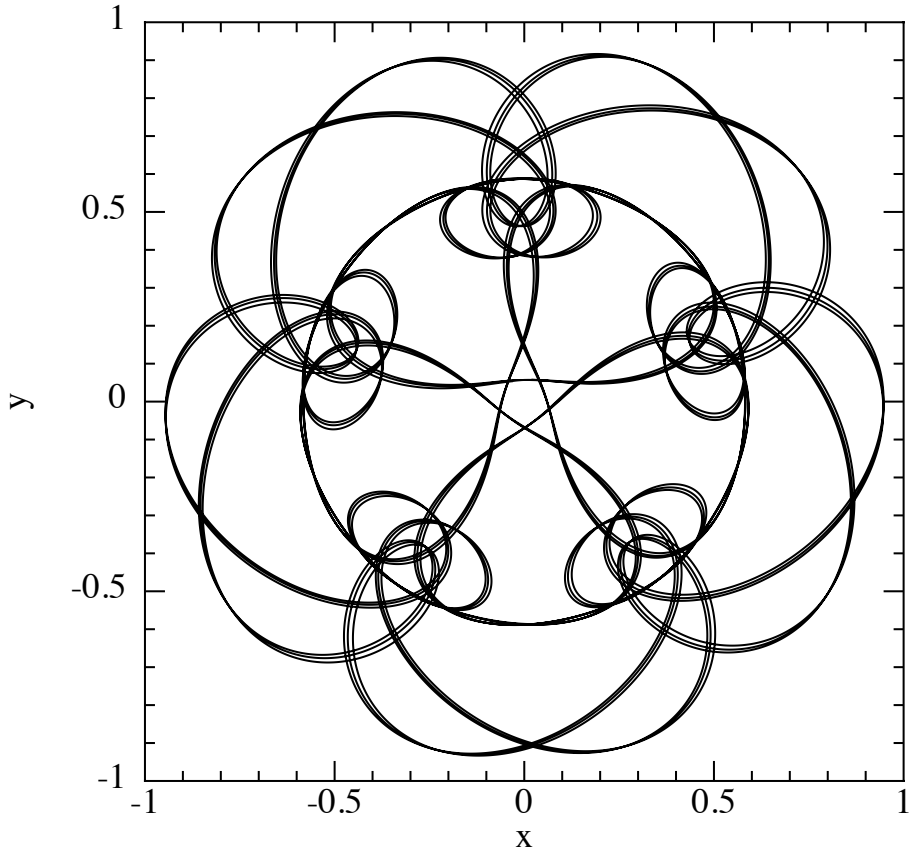


Figure 19.25: Orbit of a sink particle in the restricted 3-body problem from Chin & Chen (2005) using default code parameters. This tests both the time-integrator for sink particles and the interaction with a time-dependent binary potential (Section 19.2.4). The trajectory of the sink is plotted every timestep for 3 periods ($t = 27\pi$).

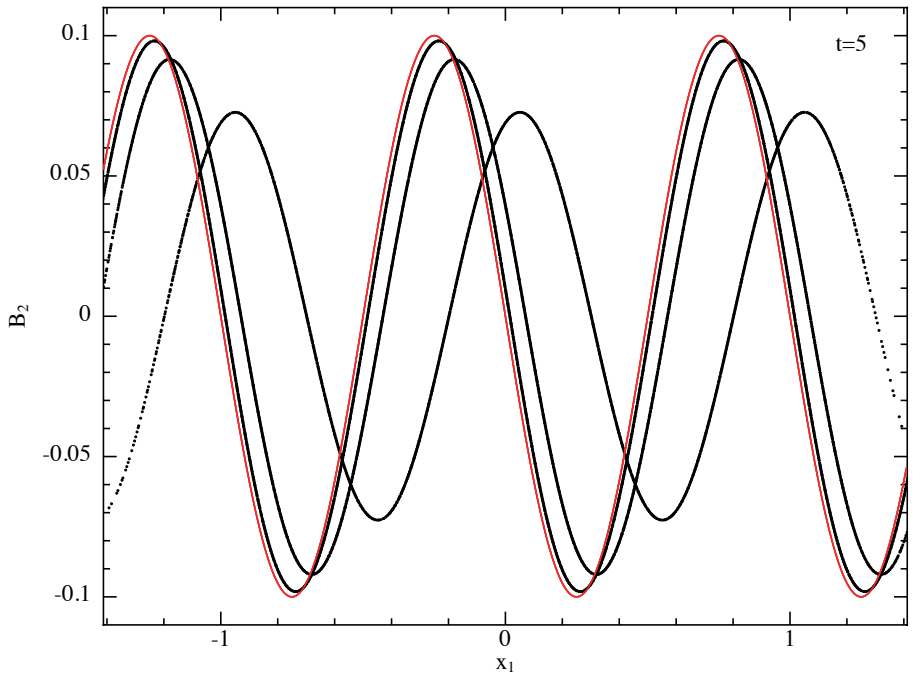


Figure 19.26: Results of the 3D circularly polarised Alfven wave test after 5 periods, showing perpendicular component of the magnetic field on all particles (black dots) as a function of distance along the axis parallel to the wave vector. Results are shown using $32 \times 18 \times 18$, $64 \times 36 \times 39$ and $128 \times 74 \times 78$ particles (most to least damped, respectively), compared to the exact solution given by the solid red line. Convergence is shown in Figure 19.27.

magnetic field B_2 as a function of x_1, where $B_2 \equiv (B_y - 2B_x)/\sqrt{5}$ and $x_1 \equiv (x + 2y + 2z)/3$ for our chosen values of a and b. There is both a dispersive and dissipative error, with the result converging in both phase and amplitude towards the undamped exact solution as the resolution is increased.

Figure 19.27 shows a convergence study on this problem, showing, as in Gardiner & Stone (2008), the L_1 error as a function of the number of particles in the $x-$direction. The convergence is almost exactly second order. This is significant because we have performed the test with code defaults for all dissipation and divergence cleaning terms. This plot therefore demonstrates the second order convergence of both the viscous and resistive dissipation in PHANTOM (see Sections 19.2.2 and 19.2.10). By comparison, the solution shown by Price & Monaghan (2005) (Figure 6 in their paper) was severely damped when artificial resistivity was applied.

As noted by Price & Monaghan (2005) and illustrated in Figure 12 of Price (2012a), this problem is unstable to the SPMHD tensile instability Phillips & Monaghan (1985) in the absence of force correction terms since the plasma $\beta \equiv P/\frac{1}{2}B^2 \approx 0.2$. Our results demonstrate that the correction term (Section 19.2.10) effectively stabilises the numerical scheme without affecting the convergence properties.

MHD shock tubes

The classic Brio & Wu (1988) shock tube test generalises the Sod shock tube (Section 19.5.1) to MHD. It has provoked debate over the years (e.g. Wu (1988); Dai & Woodward (1994a); Falle & Komissarov (2001); Takahashi et al. (2013)) because of the presence of a compound slow shock and rarefaction in the solution, which is stable only when the magnetic field is coplanar and there is no perturbation to the tangential (B_z) magnetic field Barmin et al. (1996). Whether or not such solutions can exist in nature remains controversial (e.g. Feng et al. (2007)). Nevertheless it has become a standard benchmark for numerical MHD Stone et al. (1992); Dai & Woodward (1994a); Balsara (1998); Ryu & Jones (1995). It was first used to benchmark SPMHD by Price & Monaghan (2004a,b) and 1.5D results on this test with SPMHD, for comparison, can be found in e.g. Price & Monaghan (2005); Rosswog & Price (2007); Dolag & Stasyszyn (2009); Price (2010) and Vanaverbeke et al. (2014), with 2D

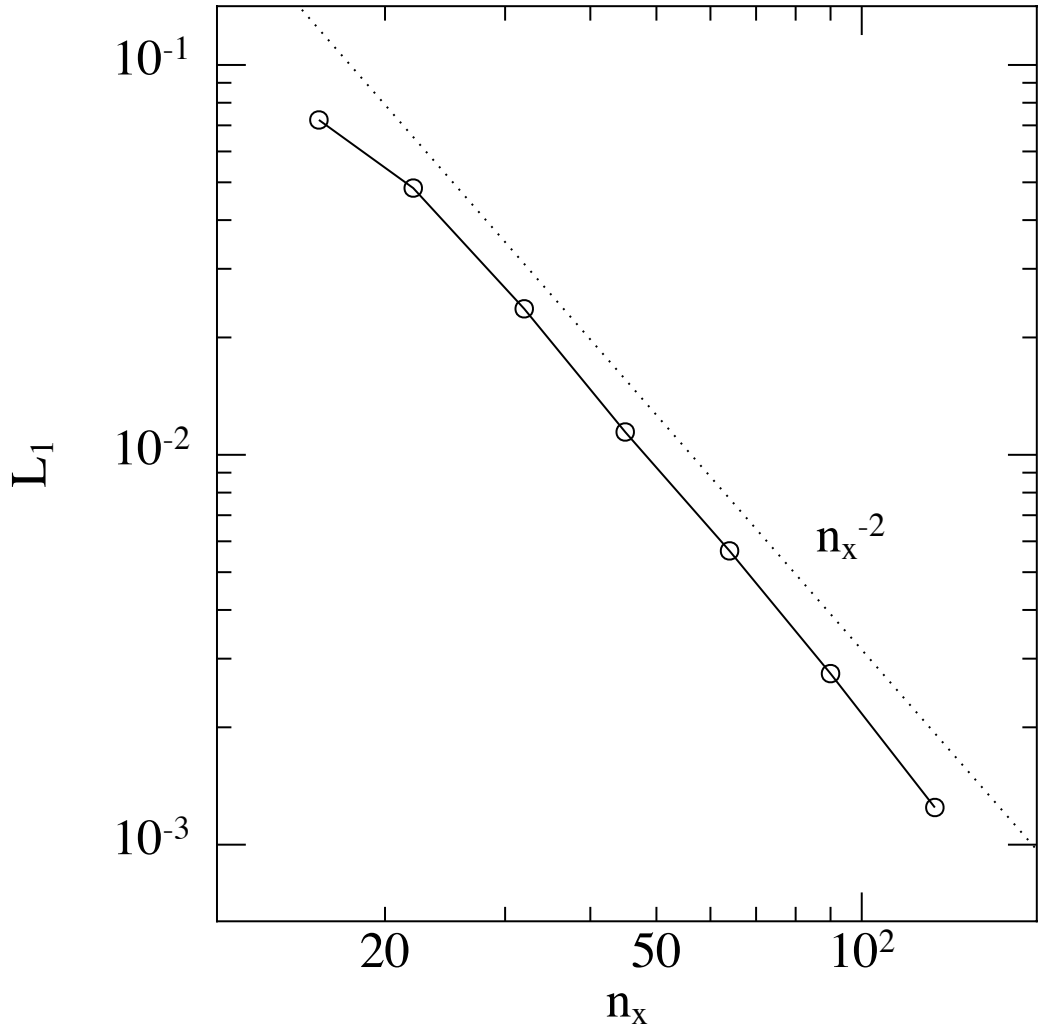


Figure 19.27: Convergence in the 3D circularly polarised Alfven wave test, showing the L_1 error as a function of the number of particles along the x-axis, n_x alongside the expected slope for second order convergence (dotted line). Significantly, this demonstrates second order convergence *with all dissipation switched on.*

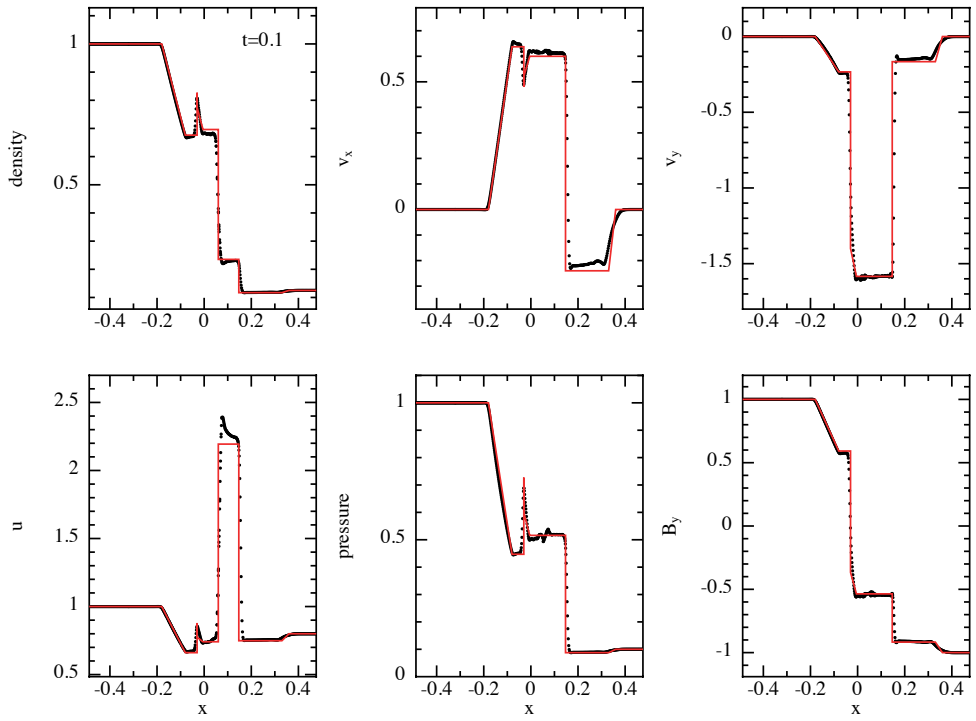


Figure 19.28: Results of the Brio & Wu (1988) shock tube test in 3D, showing projection of all particles (black dots) compared to the reference solution (red line). The problem is set up with $[\rho, P, B_y, B_z] = [1, 1, 1, 0]$ for $x \leq 0$ and $[\rho, P, B_y, B_z] = [0.125, 0.1, -1, 0]$ for $x > 0$ with zero initial velocities, $B_x = 0.75$ and $\gamma = 2$. The density contrast is initialised using equal mass particles placed on a close packed lattice with $256 \times 24 \times 24$ particles initially in $x \in [-0.5, 0]$ and $128 \times 12 \times 12$ particles initially in $x \in [0, 0.5]$.

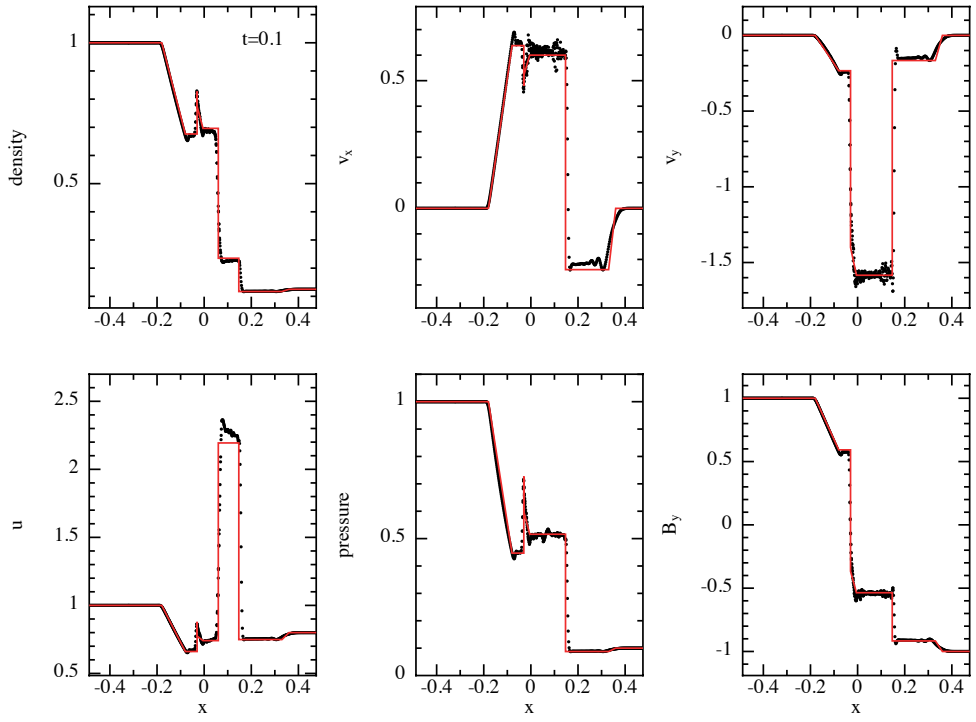


Figure 19.29: As in Figure 19.28 but using code defaults which give second order convergence away from shocks. Some additional noise in the velocity field is visible, while otherwise the solutions are similar.

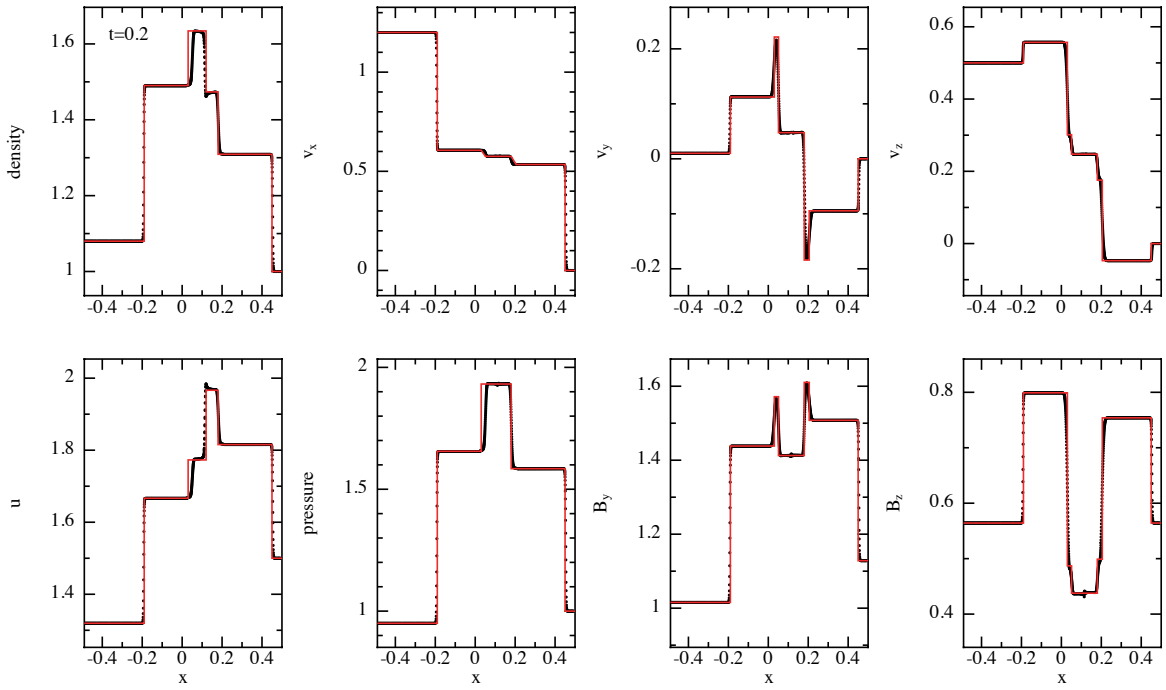


Figure 19.30: Results of the 7-discontinuity MHD shock tube test 2a from Ryu & Jones (1995) in 3D, showing projection of all particles (black dots) compared to the reference solution (red line). The problem is set up with $[\rho, P, v_x, v_y, v_z, B_x, B_y, B_z] = [1.08, 0.95, 1.2, 0.01, 0.5, 2/\sqrt{4\pi}, 3.6/\sqrt{4\pi}, 2/\sqrt{4\pi}]$ for $x \leq 0$ and $[\rho, P, v_x, v_y, v_z, B_x, B_y, B_z] = [1, 1, 0, 0, 0, 2/\sqrt{4\pi}, 4/\sqrt{4\pi}, 2/\sqrt{4\pi}]$ for $x > 0$ with $\gamma = 5/3$. The density contrast is initialised using equal mass particles placed on a close packed lattice with $379 \times 24 \times 24$ particles initially in $x \in [-0.5, 0]$ and $238 \times 12 \times 12$ particles initially in $x \in [0, 0.5]$.

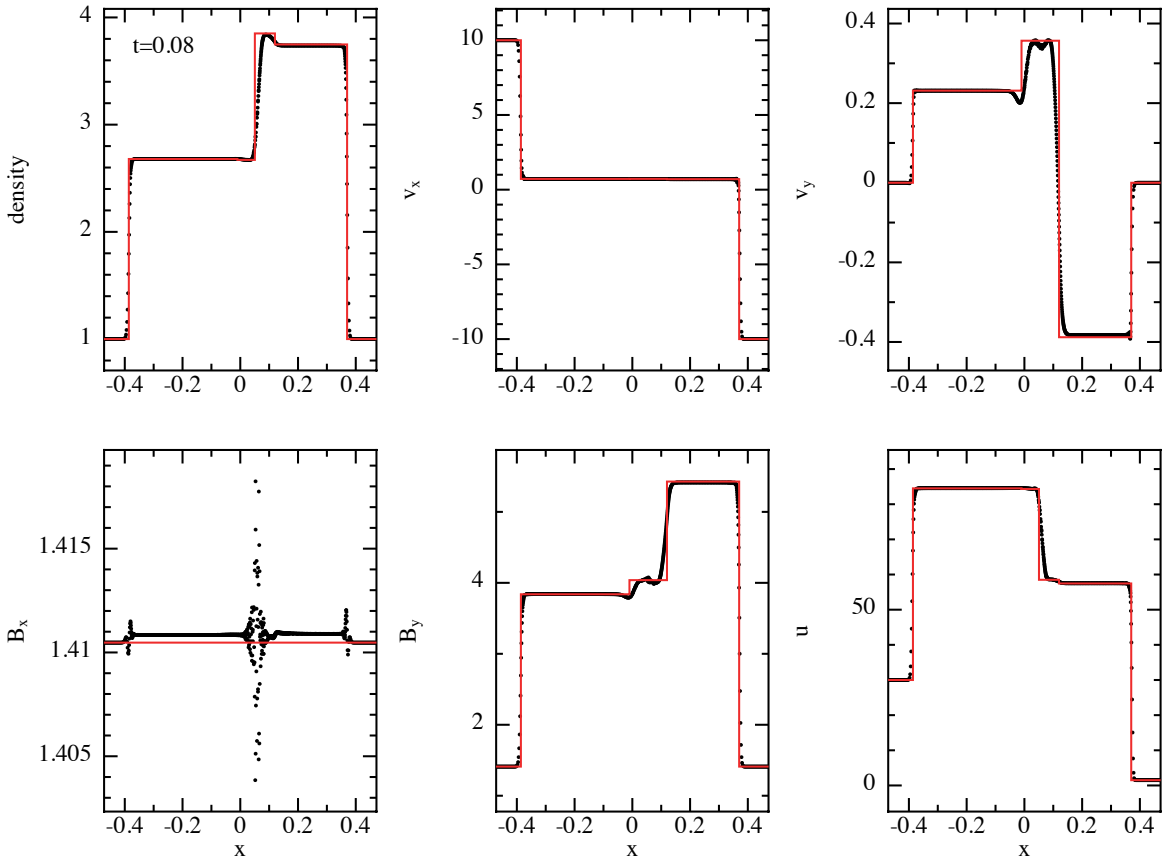


Figure 19.31: Results of the MHD shock tube test 1a from Ryu & Jones (1995) in 3D, showing projection of all particles (black dots) compared to the reference solution (red line). The problem is set up with $[\rho, P, v_x, v_y, v_z, B_x, B_y, B_z] = [1.0, 20.0, 10, 0, 0, 5/\sqrt{4\pi}, 5/\sqrt{4\pi}, 0]$ for $x \leq 0$ and $[\rho, P, v_x, v_y, v_z, B_x, B_y, B_z] = [1, 1, -10, 0, 0, 5/\sqrt{4\pi}, 5/\sqrt{4\pi}, 0]$ for $x > 0$ with $\gamma = 5/3$. We show results using $652 \times 12 \times 12$ particles. This has historically proven difficult for SPMHD codes. We find $\mathcal{L}_1$ within 1% of the reference solution except in v_y (5%).

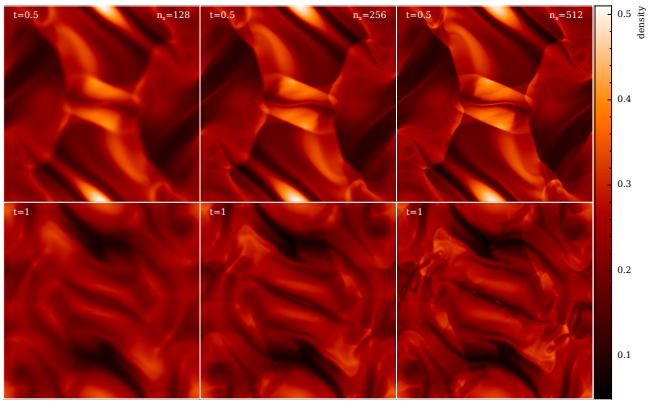


Figure 19.32: Density in a $z = 0$ cross section of the Orszag-Tang vortex test performed in 3D. Results are shown at $t = 0.5$ (top) and $t = 1$ (bottom) at a resolution of $128 \times 148 \times 12$, $256 \times 296 \times 12$ and $512 \times 590 \times 12$ particles (left to right). Compare e.g. to Figure 4 in Dai & Woodward (1994b) or Figure 22 in Stone et al. (2008), while improvements in the SPMHD method over the last decade can be seen by comparing to Figure 14 in Price & Monaghan (2005).

versions shown in Price (2012a), Tricco & Price (2013) and Tricco et al. (2016a). We handle the boundary conditions by setting the first and last few planes of particles to be 'boundary particles' (Section 19.8.2), meaning that the gas properties on these particles are fixed.

Figure 19.28 shows the results of the Brio & Wu (1988) problem using PHANTOM, performed in 3D with $256 \times 24 \times 24$ particles initially in $x \in [-0.5, 0]$ and $128 \times 12 \times 12$ particles initially in $x \in [0, 0.5]$ set on close packed lattices with purely discontinuous initial conditions in the other variables (see caption). The projection of all particles onto the x-axis are shown as black dots, while the red lines shows a reference solution taken from Balsara (1998). Figure 19.28 shows the results when a constant $\alpha^{\rm AV} = 1$ is employed, while Figure 19.29 shows the results with default code parameters, giving second order dissipation away from shocks. For constant $\alpha^{\rm AV}$ (Figure 19.28), we find the strongest deviation from the reference solution is in v_x, with $\mathcal{L}_1 = 0.015$ and $\mathcal{L}_2 = 0.065$ at this resolution. The remaining $\mathcal{L}_2$ errors are within 5 per cent of the reference solution, while the $\mathcal{L}_1$ norms are all smaller than 1.5 per cent in the other variables. Similar errors are found with code defaults (Figure 19.29), with $\mathcal{L}_2 = 0.074$ in v_x and $\mathcal{L}_1$ norms smaller than 1.6 per cent in all variables. That is, our solutions are within 1.6 per cent of the reference solution. Using the default Courant factor of 0.3, total energy is conserved to better than 0.5%, with maximum $|\Delta E|/|E_0| = 4.2 \times 10^{-3}$ up to $t = 0.1$.

Figure 19.30 shows the result of the "7 discontinuity" test from Ryu & Jones (1995). This test is particularly sensitive to over-dissipation by resistivity given the sharp jumps in the transverse magnetic and velocity fields. A reference solution with intermediate states taken from the corresponding table in Ryu & Jones (1995) is shown by the red lines for comparison. Here the boundary particles are moved with a fixed velocity in the x-direction. The largest deviation from the reference solution is in the v_y component, mainly due to the over-dissipation of the small spikes, with $\mathcal{L}_1 = 0.02$ and $\mathcal{L}_2 = 0.07$ at this resolution. The remaining $\mathcal{L}_2$ errors are within 3% of the reference solution while the $\mathcal{L}_1$ norms are smaller than 0.9% in all other variables.

Finally, Figure 19.31 shows the results of shock tube 1a from Ryu & Jones (1995). This test is interesting because it has historically proven to be a difficult test for SPMHD codes in more than 1D. In particular, to obtain reasonable results on this problem Price & Monaghan (2005) had to employ both an explicit shear viscosity term and a large neighbour number. Even then the jumps were found to show significant deviation from the analytic solution (see figure 10 in Price & Monaghan (2005)). We did find that using $h_{\rm fac} = 1.2$ significantly improved the results of this test compared to our default $h_{\rm fac} = 1.0$ for the quintic kernel. Likewise we found the results with the cubic spline kernel could be noisy. However, Figure 19.31 demonstrates that with only this change to the default code parameters we can obtain results with $\mathcal{L}_1$ errors of better than 4.4% in v_y and less than 0.9% in all other variables at this resolution. The bottom left panel shows the errors induced in B_x, with the largest error ($\mathcal{L}_\infty$) only 0.6%. This is a substantial improvement over the 2D results shown in Price & Monaghan (2005).

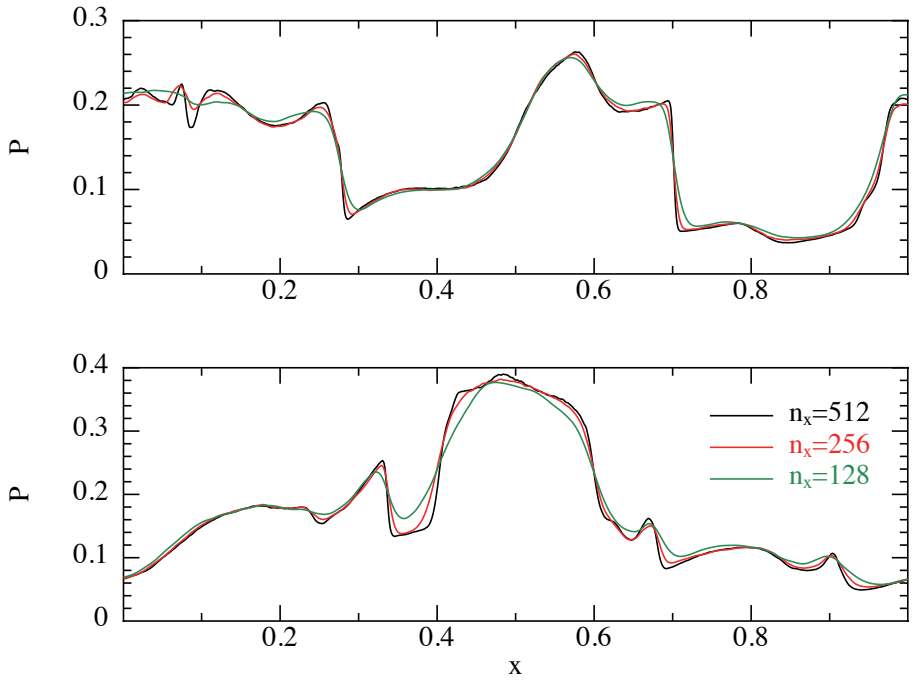


Figure 19.33: Horizontal slices of pressure shown at t=0.5 in the Orszag-Tang vortex test. We show cuts along $y = 0.3125$ (top) and $y = 0.4277$ (bottom) in the $z = 0$ plane for three different numerical resolutions (see legend).

Orszag-Tang vortex

The Orszag-Tang vortex Orszag & Tang (1979); Dahlburg & Picone (1989); Picone & Dahlburg (1991) has been used widely to test astrophysical MHD codes Stone et al. (1992); Ryu et al. (1995); Dai & Woodward (1998); Tóth (2000); Londrillo & Del Zanna (2000). Similar to our hydrodynamic tests, we perform a 3D version of the original 2D test problem, similar to the 'thin box' setup used by Dolag & Stasyszyn (2009). Earlier results on this test with 2D SPMHD can be found in Price & Monaghan (2005), Rosswog & Price (2007), Tricco & Price (2012, 2013), Tricco et al. (2016a) and Hopkins & Raives (2016) and in 3D by Dolag & Stasyszyn (2009) and Price (2010).

The setup is a uniform density, periodic box $x, y \in [-0.5, 0.5]$ with boundary in the z direction set to $\pm 2\sqrt{6}/n_x$, where n_x is the initial number of particles in x, in order to setup the 2D problem in 3D (c.f. Section 19.5.1). We use an initial plasma $\beta_0 = 10/3$, initial Mach number $\mathcal{M}_0 = v_0/c_{s,0} = 1$, initial velocity field $[v_x, v_y, v_z] = [-v_0 \sin(2\pi y'), v_0 \sin(2\pi x'), 0]$ and magnetic field $[B_x, B_y, B_z] = [-B_0 \sin(2\pi y'), B_0 \sin(4\pi x'), 0]$, where $v_0 = 1$, $B_0 = 1/\sqrt{4\pi}$, $x' \equiv x - x_{\rm min}$ and $y' \equiv y - y_{\rm min}$; giving $P_0 = \frac{1}{2} B_0^2 \beta_0 \approx 0.133$ and $\rho_0 = \gamma P_0 \mathcal{M}_0 \approx 0.221$. We use an adiabatic equation of state with $\gamma = 5/3$.

Figure 19.32 shows the results at $t = 0.5$ (top row) and at $t = 1$ (bottom) at resolutions of $n_x = 128$, 256, and 512 particles (left to right). At $t = 0.5$, the main noticeable change as the resolution is increased is that the shocks become more well defined, as does the dense filament consisting of material trapped in the reconnecting layer of magnetic field in the centre of the domain. This current sheet eventually becomes unstable to the tearing mode instability Furth et al. (1963); Syrovatskii (1981); Priest (1985), seen by the development of small magnetic islands or 'beads' at $t = 1$ at high resolution (bottom right panel; c.f. Politano et al. (1989)). The appearance of these islands occurs only at high resolution and when the numerical dissipation is small (compare to the results using Euler potentials in 2D shown in Figure 13 of Tricco & Price (2012)), indicating that our implementation of artificial resistivity (Section 19.2.10) and divergence cleaning (Section 19.2.10) are effective in limiting the numerical dissipation.

One other feature worth noting is that the slight 'ringing' behind the shock fronts visible in the results of Price & Monaghan (2005) is absent from the low resolution calculation. This is because the Cullen & Dehnen (2010) viscosity switch does a better job of detecting and responding to the shock compared to the previous Morris & Monaghan (1997)-style switch used in that paper. It is also worth noting that the results on this test, in particular the

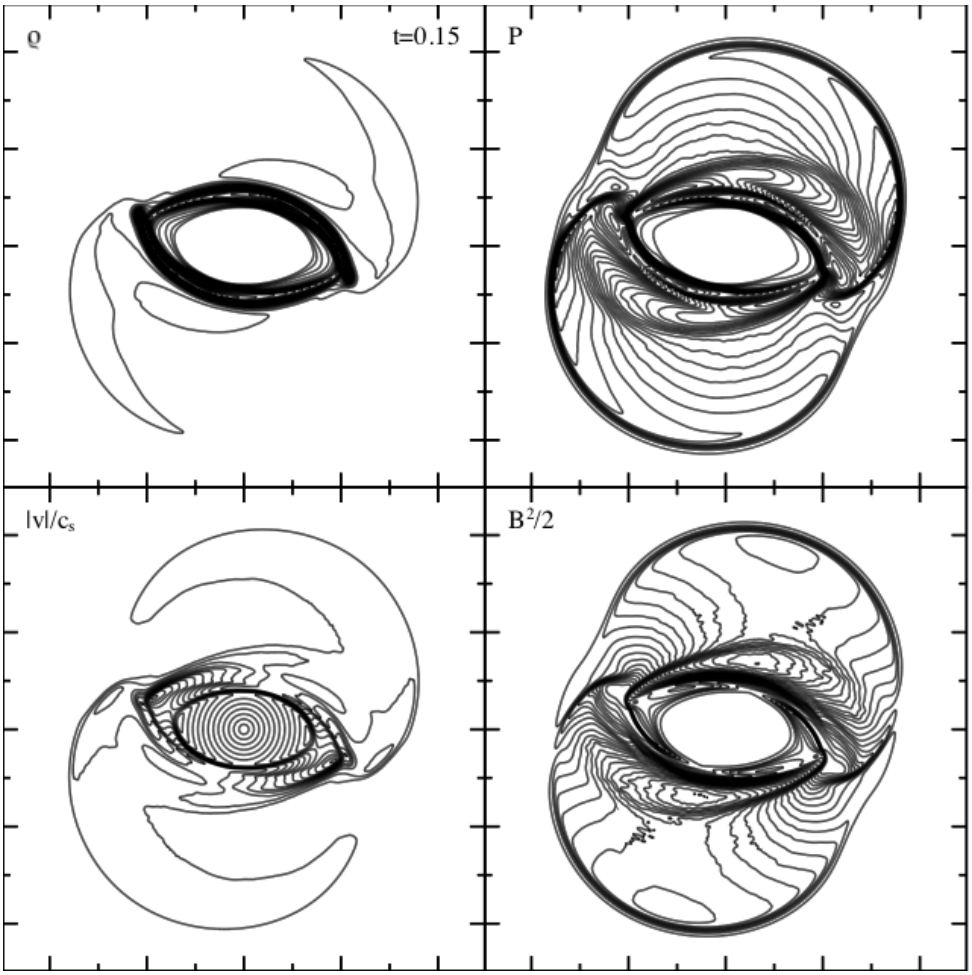


Figure 19.34: Density, pressure, Mach number and magnetic pressure shown in a $z = 0$ cross section at $t = 0.15$ in the 3D MHD rotor problem, using $n_x = 256$, equivalent to $\sim 300^2$ resolution elements in 2D. The plots show 30 contours with limits identical to those given by Tóth (2000); $0.483 < \rho < 12.95$, $0.0202 < P < 2.008$, $0 < |v|/c_s < 1.09$ and $0 < \frac{1}{2}B^2 < 2.642$.

coherence of the shocks, are noticeably worse *without* artificial resistivity, indicating that a small amount of dissipation in the magnetic field *is* necessary to capture MHD shocks correctly in SPMHD Price & Monaghan (2004a, 2005); Tricco & Price (2012).

Figure 19.33 shows horizontal slices of the pressure at $t = 0.5$, showing cuts along $y = 0.3125$ (top) and $y = 0.4277$ (bottom) following (e.g.) Londrillo & Del Zanna (2000) and Stone et al. (2008). The main difference at higher resolution is that the shocks become sharper and more well defined. Most of the smooth flow regions are converged with $n_x = 256$ (i.e. the red and black lines are indistinguishable), but the parts of the flow where dissipation is important are can be seen to converge more slowly. This is expected.

MHD rotor problem

Balsara & Spicer (1999) introduced the 'MHD rotor problem' to test the propagation of rotational discontinuities. Our setup follows Tóth (2000)'s 'first rotor problem' as used by Price & Monaghan (2005), except that we perform the test in 3D. A rotating dense disc of material with $\rho = 10$ is set up with cylindrical radius $R = 0.1$, surrounded by a uniform periodic box $[x, y] \in [-0.5, 0.5]$ with the z boundary set to $[-\sqrt{6}/(2n_x), \sqrt{6}/(2n_x)]$, or 12 particle spacings on a close packed lattice. The surrounding medium has density $\rho = 1$. Initial velocities are $v_{x,0} = -v_0(y - y_0)/r$ and $v_{y,0} = v_0(x - x_0)/r$ for $r < R$, where $v_0 = 2$ and $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. The initial pressure $P = 1$ everywhere while the initial magnetic field is given by $[B_x, B_y, B_z] = [5/\sqrt{4\pi}, 0, 0]$ with $\gamma = 1.4$. We set up the initial density contrast unsmoothed, as in Price & Monaghan (2005), by setting up two uniform lattices of particles masked to the

initial cylinder, with the particle spacing adjusted inside the cylinder by the inverse cube root of the density contrast. At a resolution of $n_x = 256$ particles for the closepacked lattice, this procedure uses 1 145 392 particles, equivalent to a 2D resolution of $\sim 300^2$, inbetween the 200^2 results shown in Tóth (2000) and Price & Monaghan (2005) and the 400^2 used in Stone et al. (2008).

Figure 19.34 presents the results of this test, showing 30 contours in density, pressure, Mach number and magnetic pressure using limits identical to those given in Tóth (2000). The symmetry of the solution is preserved by the numerical scheme and the discontinuities are sharp, as discussed in Stone et al. (2008). The contours we obtain with PHANTOM are noticeably less noisy than the earlier SPMHD results given in Price & Monaghan (2005), a result of the improvement in the treatment of dissipation and divergence errors in SPMHD since then (c.f. Section 19.2.10; see also recent results in Tricco et al. (2016a))

Current loop advection

The current loop advection test was introduced by Gardiner & Stone (2005, 2008), and regarded by Stone et al. (2008) as the most discerning of their code tests. We perform this test in 3D, as in the 'first 3D test' from Stone et al. (2008) by using a thin 3D box with non-zero v_z. The field setup is with a vector potential $A_z = A_0(R - r)$ for $r < R$, giving $B_x = -A_0 y/r$, $B_y = A_0 x/r$ and $B_z = 0$ where $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $R = 0.3$ and we use $A_0 = 10^{-3}$, $\rho_0 = 1$, $P_0 = 1$ and an adiabatic equation of state with $\gamma = 5/3$. We use a domain $[x, y, z] \in [-1 : 1, -0.5 : 0.5, -\sqrt{6}/(2n_x) : \sqrt{6}/(2n_x)]$ with $[v_x, v_y, v_z] = [2, 1, 0.1/\sqrt{5}]$. The test is difficult mainly because of the cusp in the vector potential gradient at $r = R$ leading to a cylindrical current sheet at this radius. The challenge is to advect this infinite current without change (in numerical codes the current is finite but with a magnitude that increases with resolution). We choose the resolution to be comparable to Stone et al. (2008).

For SPMHD, this is mainly a test of the shock dissipation and divergence cleaning terms, since in the absence of these terms the advection can be computed to machine precision (c.f. 2D results shown in Rosswog & Price (2007) and Figure 11 of Price (2012a), shown after one thousand crossings of the computational domain). Figure 19.35 shows the results of this test in PHANTOM with $128 \times 74 \times 12$ particles after two box crossings, computed *with all dissipation and divergence cleaning terms switched on*, precisely as in the previous tests including the shock tubes (Sections 19.5.6–19.5.6). Importantly, our implementation of artificial resistivity (Section 19.2.10) guarantees that the dissipation is identically zero when there is no relative velocity between the particles, meaning that simple advection of the current loop is not affected by numerical resistivity. However, the problem remains sensitive to the divergence cleaning (Section 19.2.10), in particular to any spurious divergence of $\boldsymbol{B}$ that is measured by the SPMHD divergence operator, (19.174). For this reason the results using the quintic kernel, (19.19), are substantially better than those using the cubic spline, because the initial measurement of $\nabla \cdot \boldsymbol{B}$ is smaller and so the evolution is less affected by the divergence cleaning.

MHD blast wave

The MHD blast wave problem consists of an over-pressurised central region that expands preferentially along the strong magnetic field lines. Our setup uses the 3D initial conditions of Stone et al. (2008), which follows from the work of Londrillo & Del Zanna (2000) and Balsara & Spicer (1999). For a recent application of SPMHD to this problem, see Tricco & Price (2012) and Tricco et al. (2016a). Set in a periodic box $[x, y, z] \in [-0.5, 0.5]$, the fluid has uniform $\rho = 1$ and $\boldsymbol{B} = [10/\sqrt{2}, 0, 10/\sqrt{2}]$. The pressure is set to $P = 1$, using $\gamma = 1.4$, except for a region in the centre of radius $R = 0.125$ which has its pressure increased to $P = 100$. This yields initial plasma beta $\beta = 2$ inside the blast and $\beta = 0.02$ outside. The particles are arranged on a close-packed triangular lattice using $n_x = 256$.

Figure 19.36 shows slices through $y = 0$ of density, pressure, magnetic energy density and kinetic energy density, which may be directly compared to results in Gardiner & Stone (2008). The shock positions and overall structure of the blast wave in all four variables show excellent agreement with the results shown in their paper. The main difference is that their solution appears less smoothed, suggesting that the overall numerical dissipation is lower in ATHENA.

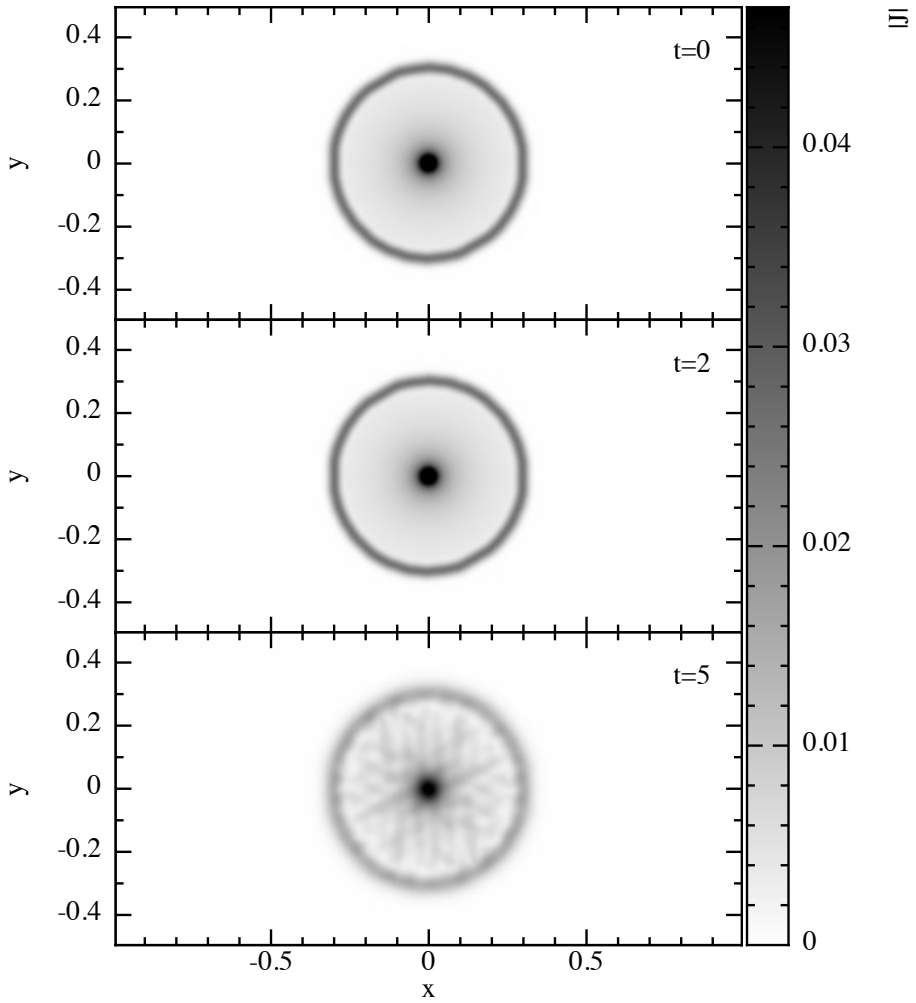


Figure 19.35: Magnitude of the current density $|\nabla \times \boldsymbol{B}|$ in the current loop advection test performed in 3D, showing comparing the initial conditions (top) to the result after two (middle) and five (bottom) crossings of the box, using $128 \times 74 \times 12$ particles. *Full dissipation, shock capturing and divergence cleaning terms were applied for this test*, without which the advection is exact to machine precision. The advection is affected mainly by the divergence cleaning acting on the outer (infinite) current sheet.

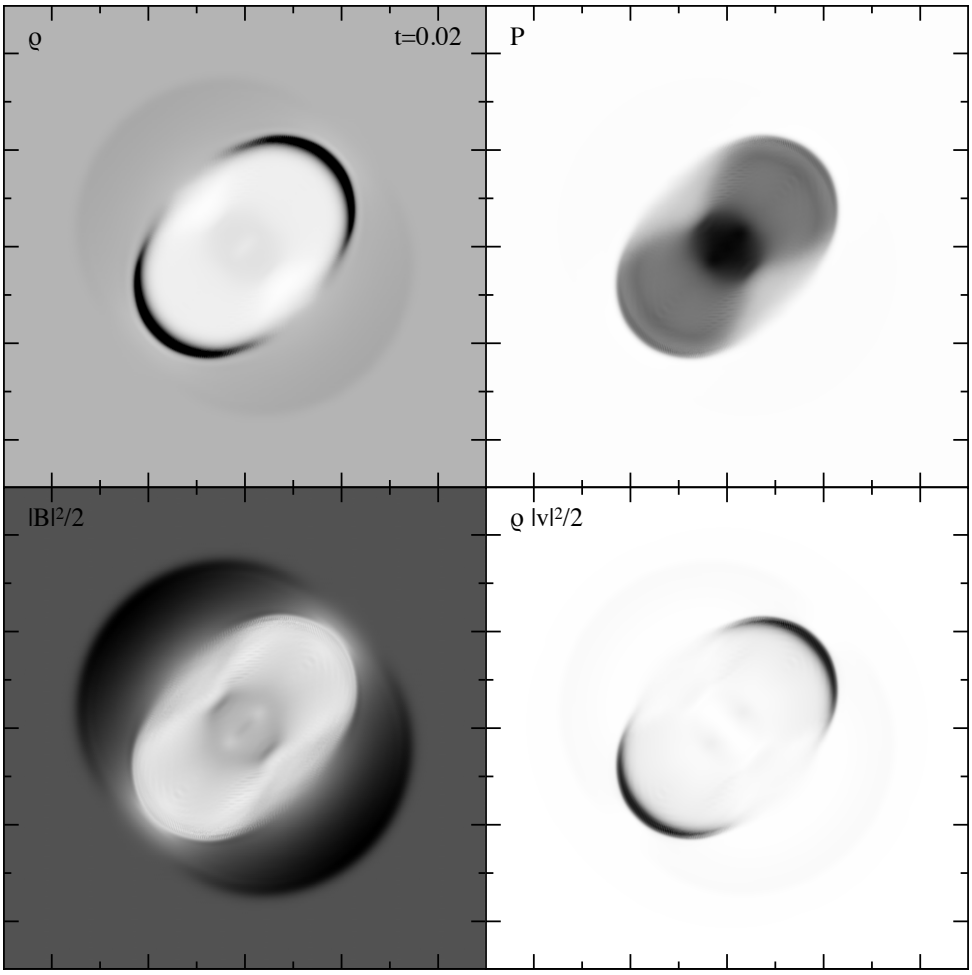


Figure 19.36: Slices through $y = 0$ for the MHD blast wave problem showing density (top left), gas pressure (top right), magnetic energy density (bottom left) and kinetic energy density (bottom right). The plot limits are $\rho \in [0.19, 2.98]$, $P \in [1, 42.4]$, $[25.2, 64.9]$ for the magnetic energy density and $[0, 33.1]$ for the kinetic energy density. These are directly comparable to Figure 8 in Gardiner & Stone (2008).

Balsara-Kim supernova-driven turbulence

We reproduce the 'test problem' of Balsara & Kim (2004) (hereafter Balsara & Kim (2004)) modelling supernova-driven turbulence in the interstellar medium. Balsara & Kim (2004) used this test to argue strongly against the use of divergence cleaning for problems involving strong shocks. Specifically, they compared three different divergence cleaning schemes against a constrained transport method, finding that divergence cleaning was unusable for such problems, with all three divergence cleaning schemes producing strong temporal fluctuations in magnetic energy during the growth phase of the supernova-driven dynamo. The problems were attributed to issues with the non-locality of divergence cleaning.

We follow the setup in Balsara & Kim (2004) as closely as possible, but several issues make a direct comparison difficult. Chief among these is their use of a physical ISM cooling prescription. We implement a similar algorithm (Section 19.2.14), but our cooling prescription is not identical (e.g. our implementation includes live chemistry and thus the possibility for a cold phase of the ISM, which theirs does not). Secondly, they give the setup parameters for the problem in computational units, but the use of ISM cooling requires the physical units of the problem to be specified. Since these are not stated in their paper, one must guess the units by reading descriptions of the same problem in physical units given in Kim et al. (2001), Balsara et al. (2004) and Mac Low et al. (2005).

We set up the problem as follows. Particles are initialised on a close-packed lattice in a periodic box with $x, y, z \in [-0.1, 0.1]$, with $\rho = 1$ and the initial thermal pressure set to $P = 0.3$ (all in code units; as specified in Balsara & Kim (2004)). We infer a length unit of kpc since this is described as a '200 pc^3 box' in their other papers. We employ an adiabatic equation of state with $\gamma = 5/3$ and turn on interstellar cooling and chemistry in the code with default initial abundances (i.e. atomic Hydrogen everywhere). We choose the mass unit such that a density of 2.3×10^{-23} g/cm^3, as described in Kim et al. (2001), corresponds to $\rho = 1$ in code units as described in Balsara & Kim (2004). Finally, we set the time unit such that $G = 1$ in code units (a common choice, even though gravity is not involved in the problem). We compute the problem using resolutions of $64 \times 74 \times 78$ particles and $128 \times 148 \times 156$ particles.

Supernovae are injected into the simulation every 0.00125 in code units at the positions listed in Table 1 of Balsara & Kim (2004). We infer this to correspond to the '12× Galactic' rate described in Balsara et al. (2004), i.e. 12 times faster than 1 per 1.26 Myr. We inject supernovae following the description in Balsara & Kim (2004) by setting the pressure to $P = 13649.6$ on particles within a distance of 0.005 code units from the injection site (corresponding to a radius of 5 pc in physical units). Our choice of units means that this corresponds to an energy injection within a few percent of 10^{51} ergs in physical units, corresponding to the description given in their other papers. However, this is only true if the density equals the initial value, since Balsara & Kim (2004) specify pressure rather than the energy. We follow the description in Balsara & Kim (2004) (i.e., we set the pressure), even though this gives an energy not equal to 10^{51} ergs if injected in a low or high density part of the computational domain.

The initial magnetic field is uniform in the x-direction with $B_x = 0.056117$, as stated in Balsara & Kim (2004). We could not reconcile this with the magnetic energy plotted in their paper, which show an initial magnetic energy of 10^{-6}. Nor could we reconcile this with the statement in Balsara et al. (2004) that "the magnetic energy is 10^{-6} times smaller than the thermal energy". So any comparison is approximate. Nevertheless, Balsara & Kim (2004) state that the problems caused by divergence cleaning are not dependent on specific details of the implementation.

Figure 19.37 shows the evolution of the column density in the lowest resolution calculation using $64 \times 74 \times 78$ particles. The combination of supernovae injection and cooling drives turbulence and significant structure in the density field.

To specifically address the issues found by Balsara & Kim (2004), Figure 19.38 show a cross section slice of the magnetic pressure at a time similar to the one shown in Figure 3 of Balsara & Kim (2004) (they do not indicate which slice they plotted; we chose $z = 0.0936$). The magnetic pressure in the interior of the supernovae shells is smooth, and does not display any of the large scale artefacts of the type found in their paper.

Figure 19.39 shows the time evolution of the magnetic energy in the low resolution calculation. The magnetic energy rises monotonically up to $t \approx 0.02$ before the magnetic energy saturates, similar to what was found by Balsara & Kim (2004) for their staggered mesh / constrained transport scheme (compare with Figure 2 in their paper). There are no large temporal fluctuations in the magnetic energy of the kind they report for their divergence cleaning

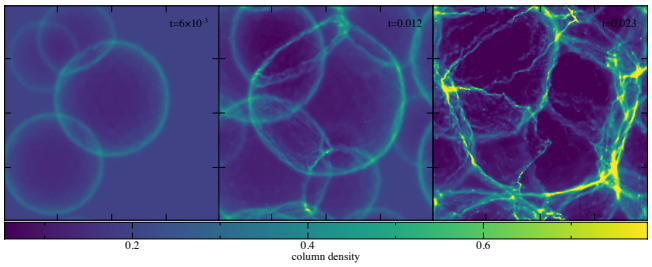


Figure 19.37: Balsara-Kim supernova-driven turbulence, showing column density at three different times at a resolution of $64 \times 74 \times 78$ particles. Supernovae are injected every 0.00125 in code units, leading to a series of interacting blast waves. Interstellar chemistry and cooling is turned on, producing a dense filaments in a turbulent interstellar medium.

methods.

In summary, the results we obtain for the magnetic field energy and structure within supernova-driven turbulence in the interstellar medium matchs closest the constrained transport result of Balsara & Kim (2004). There is no evidence that our simulations experience the numerical issues encountered by Balsara & Kim (2004) with their divergence cleaning schemes, suggesting that the problems they reported are primarily code dependent rather than being fundamental. The most probable reason our results are of the same quality as Balsara & Kim (2004)'s constrained transport result is our use of constrained divergence cleaning, which guarantees that energy removed from the magnetic field is negative definite. A follow up study to examine this in more depth would be worthwhile. For our present purposes, we can conclude that our divergence cleaning algorithm is sufficiently robust — even in 'real world' problems — to be useful in practice (see also Section 19.6.3).

19.5.7 Non-ideal MHD

The following tests demonstrate the non-ideal MHD algorithms (Section 19.2.11). We adopt periodic boundary conditions for both tests, initialising the particles on a close-packed lattice with an isothermal equation of state, $P = c_{\rm s}^2\rho$, and using the C^4 Wendland kernel.

Wave damping test

To test ambipolar diffusion in the strong coupling approximation, we follow the evolution of decaying Alfvén waves, as done in (e.g.) Choi et al. (2009) and Wurster et al. (2014).

In arbitrary units, the initial conditions are a box of size $L_{\rm x} \times \frac{\sqrt{3}}{2}L_{\rm x} \times \frac{\sqrt{6}}{2}L_{\rm x}$ with $L_{\rm x} = 1$, a density of $\rho = 1$, magnetic field of $\boldsymbol{B} = B_0\hat{\boldsymbol{x}}$ with $B_0 = 1$, sound speed of $c_{\rm s} = 1$, and velocity of $\boldsymbol{v} = v_0 \sin(kx)\hat{\boldsymbol{z}}$ where $k = 2\pi/L_{\rm x}$ is the wave number and $v_0 = 0.01 v_{\rm A}$ where $v_{\rm A}$ is the Alfvén velocity. We adopt an ambipolar diffusion coefficient of $\eta_{\rm AD} = 0.01 v_{\rm A}^2$. All artificial dissipation terms are turned off. We use $n_x = 128$ particles.

The solution to the dispersion relation for Alfvén waves Balsara (1996) is

$$\omega^2 + \eta_{\rm AD}k^2\omega i - v_{\rm A}^2k^2 = 0, \tag{19.323}$$

where $\omega = \omega_{\rm R} + \omega_{\rm I} i$ is the complex angular frequency of the wave, giving a damped oscillation in the form

$$h(t) = h_0 \left|\sin\left(\omega_{\rm R}t\right)\right| {\rm e}^{\omega_{\rm I}t}. \tag{19.324}$$

In our test, $h(t)$ corresponds the the root-mean-square of the magnetic field in the z-direction, $\langle B_{\rm z}^2\rangle^{1/2}$, and $h_0 = v_0 B_0/(v_{\rm A}\sqrt{2})$.

Figure 19.40 shows the time evolution of $\langle B_{\rm z}^2\rangle^{1/2}$ to $t = 5$ for both the numerical results (blue line) and the analytic solution (red line). At the end of the test, the $\mathcal{L}_2$ error is 7.5×10^{-5} (evaluated at intervals of ${\rm d}t = 0.01$), demonstrating close agreement between the numerical and analytical results.

Given that, by design, there is motion of the particles and that we have excluded artificial dissipation, the particles tend to 'break' from the initial lattice. For both the M_6 quintic kernel

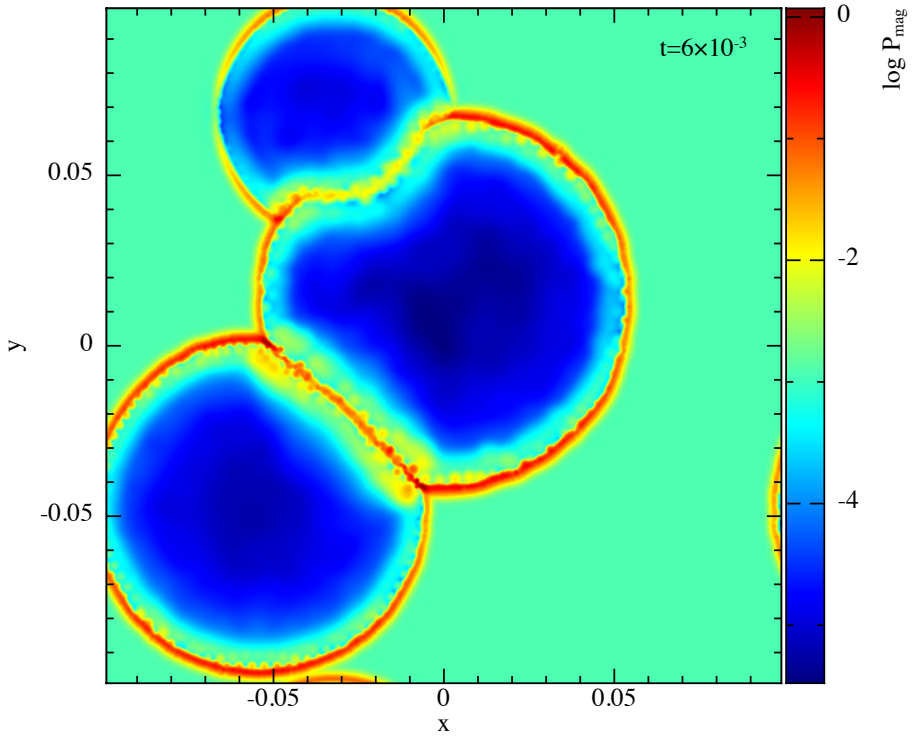


Figure 19.38: Cross-section slice of magnetic pressure at $t = 0.006$ in the Balsara-Kim supernova-driven turbulence test using $128 \times 148 \times 156$ particles. No large scale artefacts in magnetic energy are visible, indicating that the simulation is not corrupted by divergence cleaning.

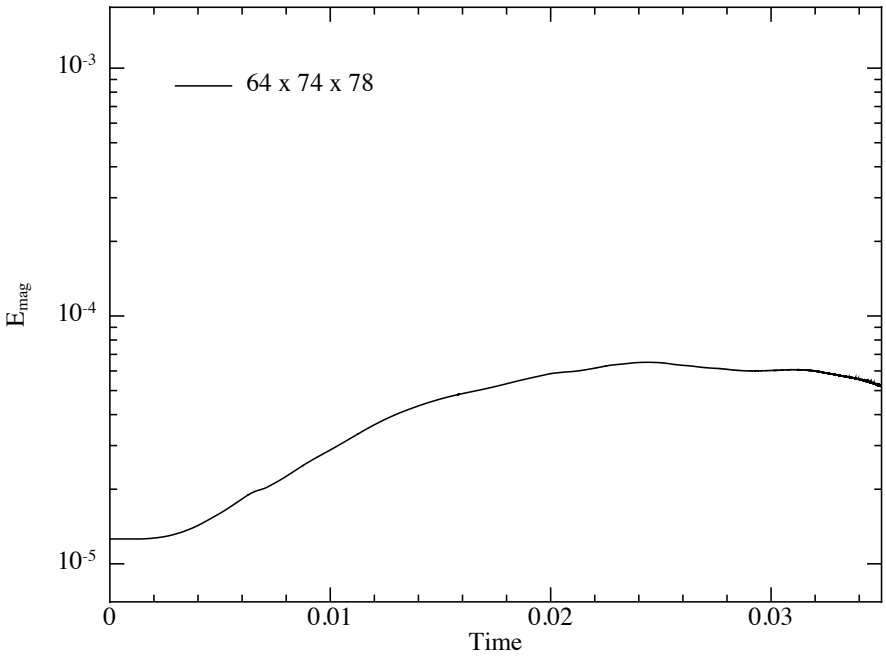


Figure 19.39: Magnetic energy as a function of time in the Balsara-Kim supernova-driven turbulence problem. The magnetic energy increases monotonically by approximately an order of magnitude before reaching its saturation value at $t \approx 0.02$. There are no spurious spikes in magnetic energy caused by divergence cleaning, in contrast to what was found by Balsara & Kim (2004).

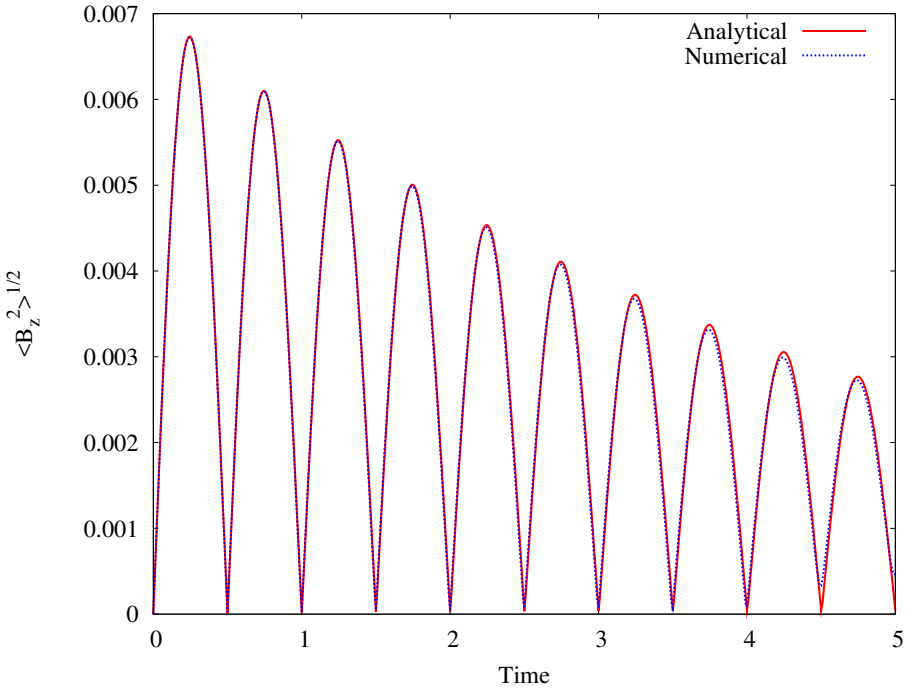


Figure 19.40: Wave damping test showing the decay of Alfvén waves in the presence of ambipolar diffusion, using the coefficient $\eta_{\rm AD} = 0.01 v_{\rm A}^2$. The $\mathcal{L}_2$ error between the analytic and numerical solution is 7.5×10^{-5}.

and the C^4 Wendland kernel on a cubic lattice, the particles fall off the lattice at $t \approx 0.75$. Prior to this, however, the $\mathcal{L}_2$ error is smaller than that calculated using the C^4 Wendland kernel and a close-packed lattice, thus there is a trade off between accuracy and long-term stability.

Standing shock

To test the Hall effect, we compare our solutions against the 1D isothermal steady-state equations for the the strong Hall effect regime. The numerical solution to this problem is given in Falle (2003) and O'Sullivan & Downes (2006), and also summarised in Appendix C1.2 of Wurster et al. (2016).

The left- and right-hand side of the shock are initialised with $(\rho_0, v_{\rm x,0}, v_{\rm y,0}, v_{\rm z,0}, B_{\rm x,0}, B_{\rm y,0}, B_{\rm z,0}) = (1.7942, -0.9759, -0.6561, 0.0, 1.0, 1.74885, 0.0)$ and $(1.0, -1.751, 0.0, 0.0, 1.0, 0.6, 0.0)$, respectively, with the discontinuity at $x = 0$. We use boundary particles at the x-boundary, superseding the periodicity in this direction. To replicate inflowing boundary conditions in the x-direction, when required, the initial domain of interest $x_l < x < x_r$ is automatically adjusted to $x_l' < x < x_r'$ where $x_r' = x_r - v_0 t_{\rm max}$, where $t_{\rm max}$ is the end time of the simulation. Note that for inflowing conditions, x_r and v_0 will have opposite signs. Thus, at the end of the simulation, the entire range of interest will still be populated with particles.

The non-ideal MHD coefficients are $\eta_{\rm OR} = 1.12 \times 10^{-12}$, $\eta_{\rm HE} = -3.53 \times 10^{-2} B$, and $\eta_{\rm AD} = 7.83 \times 10^{-3} v_{\rm A}^2$. We include all artificial dissipation terms using their default settings. We initialise $512 \times 14 \times 15$ particles in $x < 0$ and $781 \times 12 \times 12$ particles in $x \geq 0$, with the domain extending from $x_l = x_l' = -2$ to $x_r = 2$ with $x_r' = 3.75$.

Figure 19.41 shows $v_{\rm x}$ and $B_{\rm y}$ for both the numerical and analytical results, which agree to within 3 per cent at any given position. On the left-hand side of the shock interface, the numerical results are lower than the analytical solution because of the artificial dissipation terms, which are required to properly model a shock. These results do not depend on either the kernel choice or the initial particle lattice configuration.

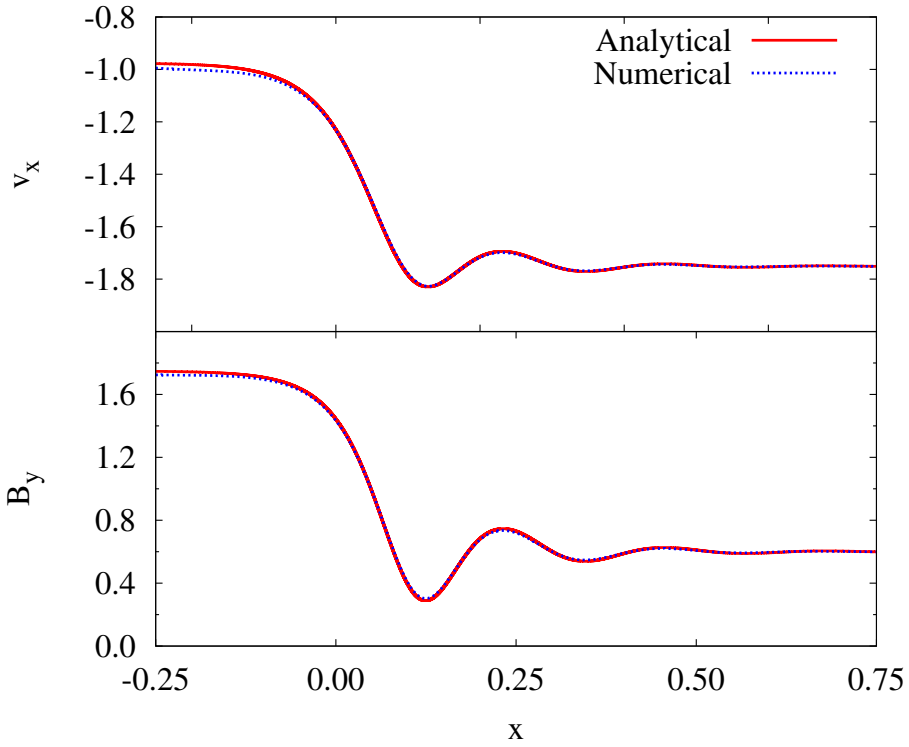


Figure 19.41: Hall-dominated standing shock using $\eta_{\rm OR} = 1.12 \times 10^{-12}$, $\eta_{\rm HE} = -3.53 \times 10^{-2} B$, and $\eta_{\rm AD} = 7.83 \times 10^{-3} v_{\rm A}^2$. The numerical and analytical results agree to within 3 per cent everywhere.

19.5.8 Self-gravity

Polytrope

The simplest test of self-gravity is to model a spherical polytrope in hydrostatic equilibrum. Similar tests have been shown for SPH codes dating back to the original papers of Gingold & Monaghan (1977, 1978, 1980). Modern calculations have used these simple models in more complex applications, ranging from common envelope evolution Iaconi et al. (2017) to tidal disruption events Coughlin & Nixon (2015); Coughlin et al. (2016b,a); Bonnerot et al. (2016, 2017).

The equation of state is $P = K\rho^\gamma$, with $\gamma = 1 + 1/n$ where n is the polytropic index. The exact hydrostatic solution is given by

$$\frac{\gamma K}{4\pi G\,(\gamma - 1)} \frac{{\rm d}^2}{{\rm d}r^2} \left(r\rho^{\gamma - 1} \right) + r\rho = 0. \tag{19.325}$$

Our initial setup uses a solution scaled to a radius $R = 1$, for a polytropic index of $n = 3/2$, corresponding to $\gamma = 5/3$, with $K = 0.4244$. We solve (19.325) numerically. We place the particles initially on a hexagonal close-packed lattice, truncated to a radius of $R = 1$, which we then stretch map (see Section 19.3.2) such that the initial radial density profile matches the exact solution.

The relaxation time depends on the initial density profile and on how far the initial particle configuration is from equilibrium. Figure 19.42 shows the solution at $t = 100$ in code units. The polytrope relaxes within a few dynamical times, with only a slight rearrangement of the particles from the stretched lattice. The density profile at all times is equal to within 3 per cent of the exact solution for $r \leq 0.7$ and the polytrope remains in hydrostatic equilibrium.

Once the static solution is obtained, we tested the energy conservation by giving the star a radial perturbation. That is, we applied a velocity perturbation of the form $v_r = 0.2r$ to the $N \approx 10^5$ model, and evolved the polytrope for 100 time units. We turned off the artificial viscosity for this test. The total energy — including contributions from thermal, kinetic and gravitational energy — remained conserved to within 3 per cent.

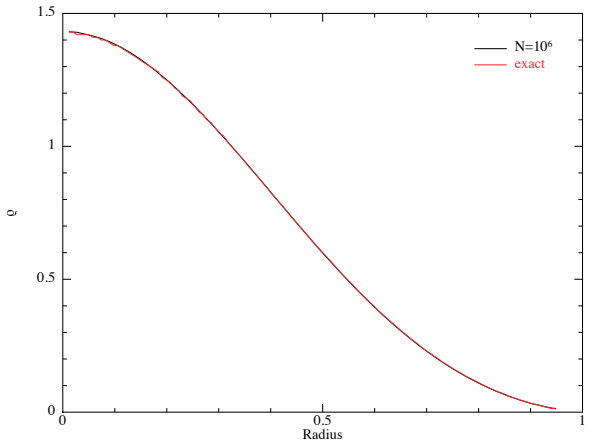


Figure 19.42: Polytrope static structure using 10^6 particles (black), compared to the exact solution (red), shown at $t = 100$.

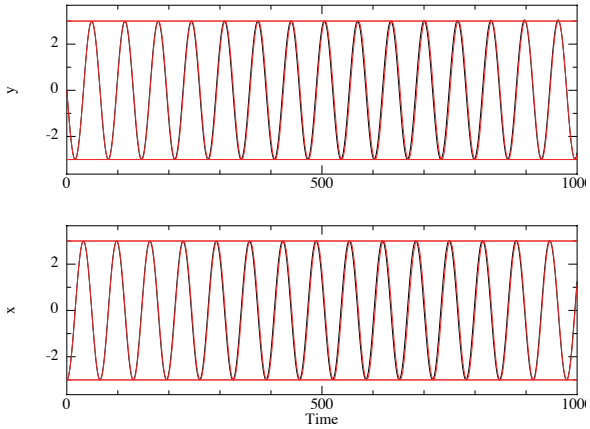


Figure 19.43: y- and x-positions of the centre of mass of one star of a binary system (top and bottom, respectively). Each star is a polytrope with mass and radius of unity, and $N = 10^4$ particles; the initial separation is 6.0 in code units. After ~ 15 orbits, the separation remains within 1 percent, and the period remains constant within the given time resolution. The red line represents the analytical position with respect to time, and the black line represents the numerical position.

Binary polytrope

Next, we placed two initially unrelaxed, identical polytropes, each with $N = 10^4$ particles in a circular orbit around each other with a separation of $6R$ and evolved for ~ 15 orbits (1000 code units). Figure 19.43 demonstrates that the separation remains within 1 per cent of the initial separation over 15 orbits, and that the orbital period remains constant. After the initial relaxation, total energy is conserved to within 0.06 per cent.

The stars are far enough apart that any tidal deformation as they orbit is insignificant. The final density profile of each star agrees with the expected profile within 3 per cent for $r \leq 0.7$.

Evrard collapse

A more complex test, relevant especially for star formation, is the so-called 'Evrard collapse' Evrard (1988) modelling the adiabatic collapse of a cold gas sphere. It has been used many times to test SPH codes with self-gravity, e.g. Hernquist & Katz (1989), Steinmetz & Mueller (1993), Thacker et al. (2000), Escala et al. (2004) and many others.

Following the initial conditions of Evrard (1988), we setup the particles initially in a sphere

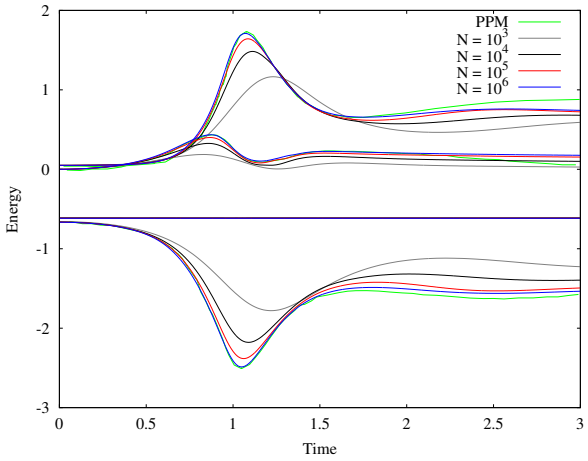


Figure 19.44: Thermal, kinetic, total and potential energies as a function of time during the Evrard collapse Evrard (1988). Green lines are calculated using a 1D PPM code, taken from Figure 6 of Steinmetz & Mueller (1993), while remaining colours show SPH simulations of different resolutions. Both energy and time are given in code units, where $R = M = G = 1$.

of radius $R = 1$ and mass $M = 1$, with density profile

$$\rho(r) = \frac{M(R)}{2\pi R^2}\frac{1}{r}. \tag{19.326}$$

The density profile is created using the same stretch mapping method as for the polytrope (see Section 19.5.8). The sphere is initially isothermal, with the specific internal energy set to $u = 0.05GM/R$ with an adiabatic index of $\gamma = 5/3$. The sphere initially undergoes gravitational collapse.

In the literature, the results of the Evrard collapse are typically normalised to a characteristic value. Here, we simply show the results in code units (Section 19.2.2), since these units already represent a normalised state. A distance unit of $R = 1$ and mass unit $M(R) = 1$ is adopted, with the time unit set such that $G \equiv 1$, where G is the gravitational constant.

Figure 19.44 shows the kinetic, thermal, total and potential energies as a function of time, at four different numerical resolutions. The green line shows the reference solution, computed using a 1D piecewise parabolic method (PPM) code using 350 zones, which we transcribed from Figure 6 of Steinmetz & Mueller (1993). As the number of particles increases, the energies for $t \lesssim 1.5$ converge to the results obtained from the PPM code. At $t \gtrsim 2$, the SPH results appear to converge to energies that differ slightly from the PPM code. Given that we are not able to perform a comparable convergence study with the PPM code, we are unable to assess whether or not this discrepancy is significant.

Figure 19.45 shows enclosed mass, density, thermal energy and radial velocity as a function of radius at $t = 0.77$, where the SPH results may be compared to the PPM results presented by Steinmetz & Mueller (1993) shown with the red line in the Figure. At this time, the outward propagating shock is at $r \approx 0.1$, with the shock profile in agreement with the reference solution at high resolution.

19.5.9 Dust-gas mixtures

The SPH algorithms used in PHANTOM for dust-gas mixtures have been extensively benchmarked in Laibe & Price (2012a,b) (for the two-fluid method) and in Price & Laibe (2015a) (for the one-fluid method; hereafter Price & Laibe (2015a)). Here we merely demonstrate that the implementation of these algorithms in PHANTOM gives satisfactory results on these tests. For recent applications of PHANTOM to more realistic problems involving dust/gas mixtures see Dipierro et al. (2015, 2016), Ragusa et al. (2017) and Tricco et al. (2017).

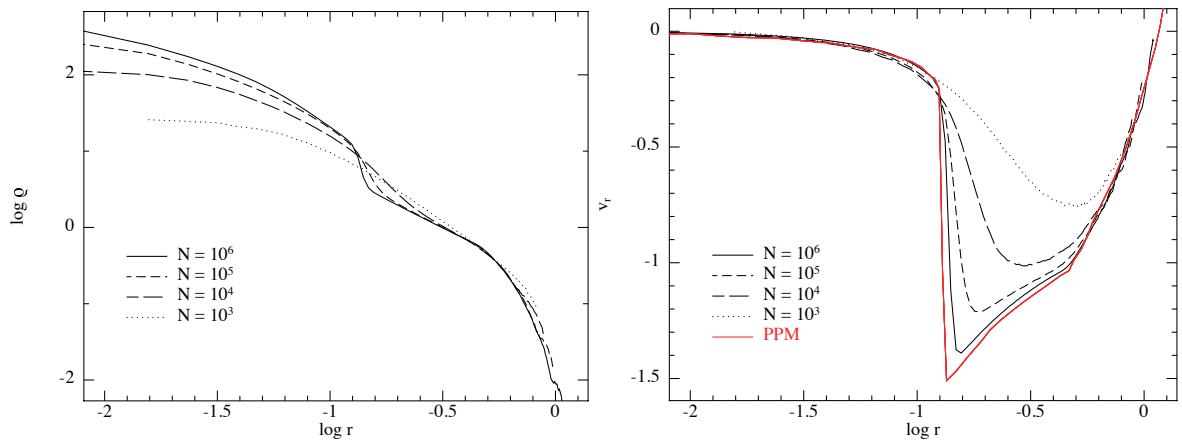


Figure 19.45: Radial profile of the Evrard collapse Evrard (1988) at $t = 0.77$; red lines are taken from Figure 7 of Steinmetz & Mueller (1993), with panels showing density (top) and radial velocity (bottom) as a function of (log) radius. All values are given in code units, where $R = M = G = 1$. The outward propagating shock at $r \approx 0.1$ is sharper at high resolution.

Dustybox

Figure 19.46 shows the results of the DUSTYBOX problem Monaghan & Kocharyan (1995); Paardekooper & Mellema (2006); Laibe & Price (2011). We setup a uniform, periodic box $x, y, z \in [-0.5, 0.5]$ with $32 \times 36 \times 39$ gas particles set on a close-packed lattice and $32 \times 36 \times 39$ dust particles also set on a close-packed lattice. The gas particles are initially at rest while the dust is given a uniform velocity $v_x = 1$ in the x-direction. We employ an isothermal equation of state with $c_{\rm s} = 1$, uniform gas and dust densities of $\rho_{\rm g} = \rho_{\rm d} = 1$, using the cubic spline kernel for the SPH terms and the double-hump cubic spline kernel (Section 19.2.13) for the drag terms, following Laibe & Price (2012a).

The red dashed lines in Figure 19.46 show the exact solution for kinetic energy as a function of time. For our chosen parameters the barycentric velocity is $v_x = 0.5$, giving $v_{\rm g}(t) = 0.5[1 + \Delta v_x(t)]$, $v_{\rm d}(t) = 0.5[1 - \Delta v_x(t)]$, where $\Delta v_x(t) = \exp(-2Kt)$ Laibe & Price (2011) and the red lines show $E_{\rm kin}(t) = \frac{1}{2}[v_{\rm g}(t)^2 + v_{\rm d}(t)^2]$. The close match between the numerical and analytic solutions ($\mathcal{L}_2 \sim 3 \times 10^{-4}$) demonstrates that the drag terms are implemented correctly.

The DUSTYBOX test is irrelevant for the one-fluid method (Section 19.2.13) since this method implicitly assumes that the drag is strong enough so that the terminal velocity approximation holds — implying that the relative velocites are simply the barycentric values at the end of the DUSTYBOX test.

Dustywave

Maddison (1998) and Laibe & Price (2011) derived the analytic solution for linear waves in a dust-gas mixture: the 'DUSTYWAVE' test. The corresponding dispersion relation is given by Maddison (1998); Laibe & Price (2011, 2012a)

$$\omega^3 + iK\left(\frac{1}{\rho_{\rm g}} + \frac{1}{\rho_{\rm d}}\right)\omega^2 - c_{\rm s}^2 k^2 \omega - iK\frac{k^2 c_{\rm s}^2}{\rho_{\rm d}} = 0, \tag{19.327}$$

which can be more clearly expressed as

$$(\omega^2 - c_{\rm s}^2 k^2) + \frac{i}{\omega t_{\rm s}}(\omega^2 - \tilde{c}_{\rm s}^2 k^2) = 0, \tag{19.328}$$

where $\tilde{c}_{\rm s} = c_{\rm s}(1 + \rho_{\rm d}/\rho_{\rm g})^{-1/2}$ is the modified sound speed Miura & Glass (1982). This demonstrates the two important limits i) $t_{\rm s} \to \infty$, giving undamped sound waves in the gas and ii) $t_{\rm s} \to 0$, giving undamped sound waves in the mixture propagating at the modified sound speed. In between these limits, the mixture is dissipative and waves are damped by the imaginary term. This is seen in the analytic solutions shown in Figure 19.47.

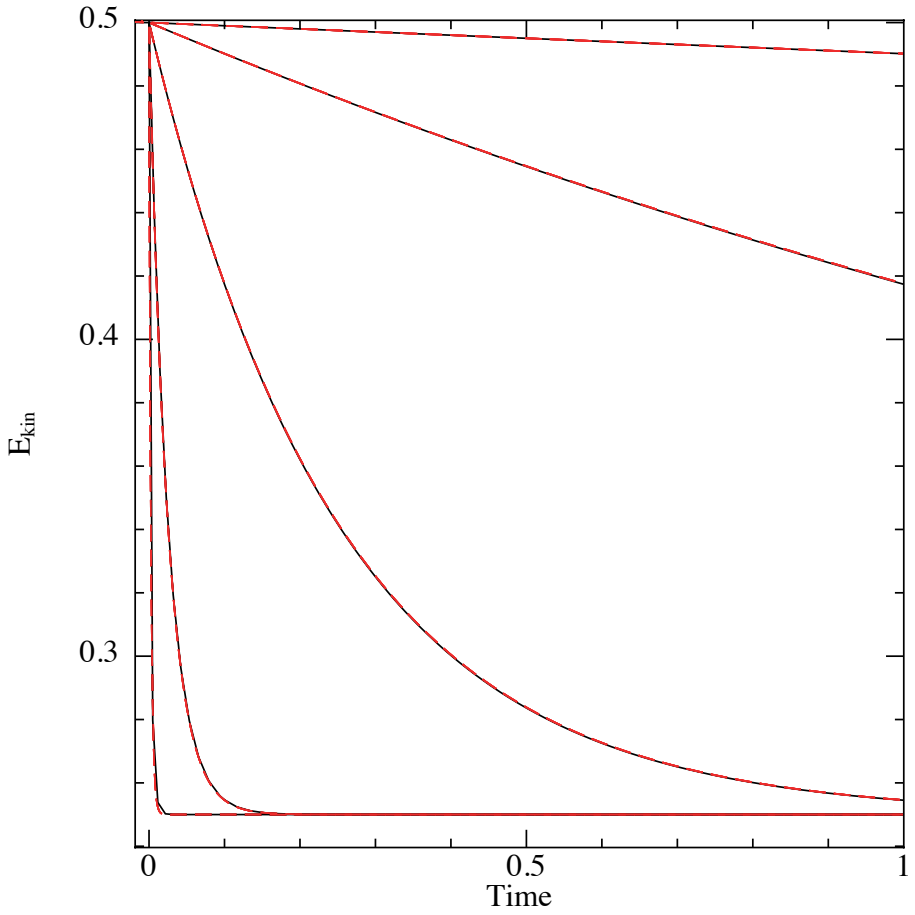


Figure 19.46: Decay of kinetic energy as a function of time in the DUSTYBOX test, involving a uniformly translating mixture of gas and dust coupled by drag. Solid lines show the PHANTOM results for drag coefficients $K = 0.01$, 0.1, 1.0, 10 and 100 (top to bottom), which may be compared to the corresponding analytic solutions given by the dashed red lines.

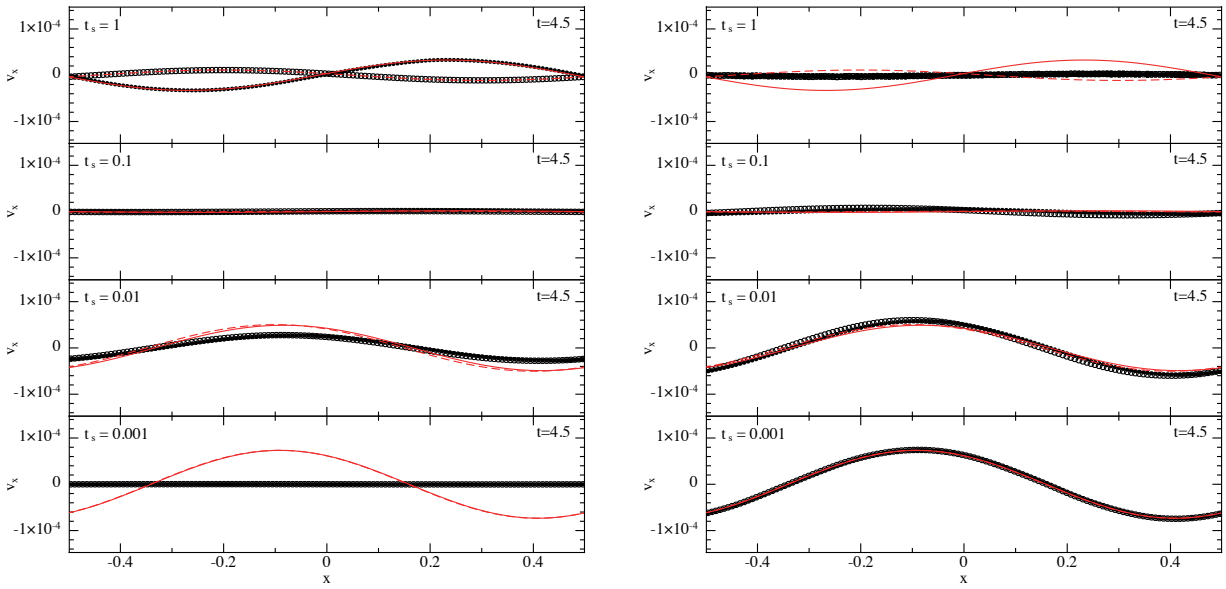


Figure 19.47: Velocity of gas (solid) and dust (circles) at $t = 4.5$ in the DUSTYWAVE test, using the two-fluid method (left; with $64 \times 12 \times 12$ gas particles, $64 \times 12 \times 12$ dust particles) and the one-fluid method (right; with $64 \times 12 \times 12$ mixture particles) and a dust-to-gas ratio of unity. Panels show results with $K = 0.5, 5, 50$ and 500 (top to bottom), corresponding to the stopping times indicated. The two-fluid method is accurate when the stopping time is long (top three panels in left figure) but requires $h \lesssim c_s t_s$ to avoid overdamping (bottom two panels on left; Laibe & Price (2012a)). The one-fluid method should be used when the stopping time is short (right figure).

Two-fluid.

We perform this test first with the two-fluid algorithm, using $64 \times 12 \times 12$ gas particles and $64 \times 12 \times 12$ dust particles set up on a uniform, close-packed lattice in a periodic box with $x \in [-0.5, 0.5]$ and the y and z boundaries set to correspond to 12 particle spacings on the chosen lattice. The wave is set to propagate along the $x-$axis with $v_g = v_d = A\sin(2\pi x)$, $\rho = \rho_0[1 + A\sin(2\pi x)]$ with $\rho_0 = 1$ and $A = 10^{-4}$. The density perturbation is initialised using stretch mapping (Section 19.3.2; see also Appendix B in Price & Monaghan (2004b)). We perform this test using an adiabatic equation of state with $c_{s,0} = 1$. We adopt a simple, constant K drag prescription, choosing $K = 0.5, 5, 50$ and 500 such that the stopping time given by (19.236) is a multiple of the wave period ($t_s = 1, 0.1, 0.01$ and 0.001, respectively).

The left panels in Figure 19.47 show the results of this test using the two-fluid method, showing velocity in each phase compared to the analytic solution after 4.5 wave periods (the time is chosen to give a phase offset between the phases). For stopping times $t_s \gtrsim 0.1$ the numerical solution matches the analytic solution to within 4 per cent. For short stopping times, Laibe & Price (2012a) showed that the resolution criterion $h \lesssim c_s t_s$ needs to be satisfied to avoid overdamping of the mixture. For the chosen number of particles, the smoothing length is $h = 0.016$, implying in this case that the criterion is violated when $t_s \lesssim 0.016$. This is evident from the lower two panels in Figure 19.47, where the numerical solution is overdamped compared to the analytic solution.

This problem is not unique to SPH codes, but represents a fundamental limitation of two-fluid algorithms in the limit of short stopping times due to the need to resolve the physical separation between the phases (which becomes ever smaller as t_s decreases) when they are modelled with separate sets of particles (or with a grid and a physically separate set of dust particles). The need to resolve a physical length scale results in first-order convergence of the algorithm in the limit of short stopping times, as already noticed by Miniati (2010) in the context of grid-based codes. The problem is less severe when the dust fraction is small Lorén-Aguilar & Bate (2014), but is difficult to ameliorate fully.

One-fluid.

The limit of short stopping time (small grains) is the limit in which the mixture is well described by the one-fluid formulation in the terminal velocity approximation (Section 19.2.13). To compare and contrast the two methods for simulating dust in PHANTOM, the right half of Figure 19.47 shows the results of the DUSTYWAVE test computed with the one-fluid method. To perform this test we set up a single set of $64 \times 12 \times 12$ 'mixture' particles placed on a uniform closepacked lattice, with an initially uniform dust fraction $\epsilon = 0.5$. The particles are given a mass corresponding to the combined mass of the gas *and* dust, with the density perturbation set as previously.

The one-fluid solution is accurate precisely where the two-fluid method is inaccurate, and vice-versa. For short stopping times ($t_s = 0.001$; bottom row) the numerical solution is within 1.5 per cent of the analytic solution, compared to errors greater than 60 per cent for the two-fluid method (left figure). For long stopping times ($t_s \lesssim 1$; top two rows) the one-fluid method is both inaccurate and slow, but this is precisely the regime in which the two-fluid method (left figure) is explicit and therefore cheap. Thus, the two methods are complementary.

Dust diffusion

A simple test of the one-fluid dust diffusion algorithm is given by Price & Laibe (2015a). For this test we set up the particles on a uniform cubic lattice in a 3D periodic box $x, y, z \in [-0.5, 0.5]$ using $32 \times 32 \times 32$ particles with an initial dust fraction set according to

$$\epsilon(r, 0) = \begin{cases} \epsilon_0 \left[1 - \left(\frac{r}{r_c}\right)^2\right], & r < r_c, \\ 0, & \text{elsewhere}, \end{cases} \tag{19.329}$$

with $\epsilon_0 = 0.1$ and $r_c = 0.25$. We then evolve the dust diffusion equation, (19.272), discretised according to (19.279), while setting the acceleration and thermal energy evolution to zero and assuming $P = \rho$, with the stopping time set to a constant $t_s = 0.1$ and the computational timestep set to $\Delta t = 0.05$. Figure 19.48 shows the evolution of the dust fraction $\epsilon \equiv \rho_d/\rho$ as a function of radius at various times, showing the projection of all particles in the box (points) compared to the exact solution (red lines) at $t = 0.0$, 0.1, 0.3, 1.0 and 10.0 (top to bottom). The solution shows a close match to the analytic solution, with agreement to within 0.3 per cent of the analytic solution at all times.

Dust settling

We perform the dust settling test from Price & Laibe (2015a) in order to directly compare the PHANTOM solutions to those produced in Price & Laibe (2015a) with the NDSPMHD code. To simplify matters we do not consider rotation but simply adapt the 2D problem to 3D by using a thin Cartesian box (as for several of the MHD tests in Section 19.5.6). Our setup follows Price & Laibe (2015a), considering a slice of a protoplanetary disc at $R_0 = 50$ au in the $r - z$ plane (corresponding to our x and y Cartesian coordinates, respectively) with density in the 'vertical' direction (y) given by

$$\rho(y) = \rho_0 \exp\left(\frac{-y^2}{2H^2}\right), \tag{19.330}$$

where we choose $H/R_0 = 0.05$ giving $H = 2.5$ au. We use an isothermal equation of state with sound speed $c_s \equiv H\Omega$ where $\Omega \equiv \sqrt{GM/R_0^3}$, corresponding to an orbital time $t_{orb} \equiv 2\pi/\Omega \approx 353$ yrs. We adopt code units with a distance unit of 10 au, mass in solar masses and time units such that $G = 1$, giving an orbital time of ≈ 70.2 in code units. We apply an external acceleration in the form

$$\boldsymbol{a}_{ext} = -\frac{GMy}{\sqrt{R_0^2 + y^2}}, \tag{19.331}$$

where $G = M = 1$ in code units.

The particles are placed initially on a close-packed lattice using $32 \times 110 \times 24 = 84\,480$ particles in the domain $[x, y, z] \in [\pm 0.25, \pm 3H, \pm\sqrt{3/128}]$. We then use the stretch mapping

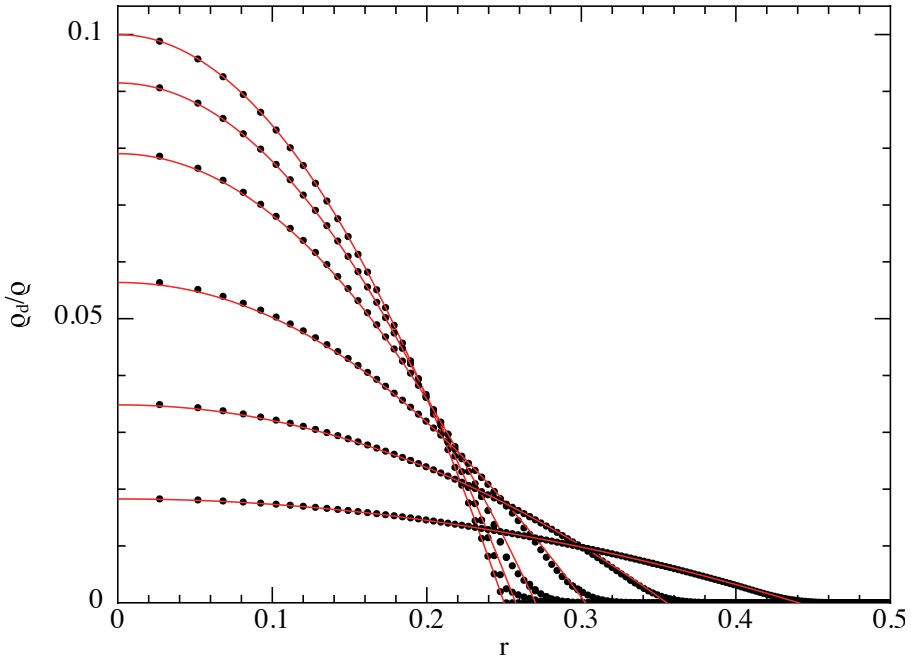


Figure 19.48: Dust diffusion test from Price & Laibe (2015a), showing the evolution of the dust fraction on the particles (black dots) as a function of radius at 6 different times (top to bottom), which may be compared to the analytic solution given by the red lines.

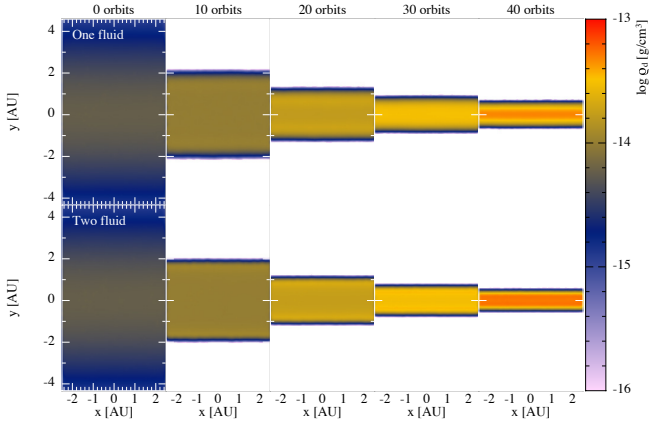


Figure 19.49: 3D version of the dust settling test from Price & Laibe (2015a), showing the dust density in the 'r-z' plane of a protoplanetary disc. We assume mm-sized grains with a 1% initial dust-to-gas ratio in a stratified disc atmosphere with $H/R_0 = 0.05$ with $R_0 = 50$ au in (19.331).

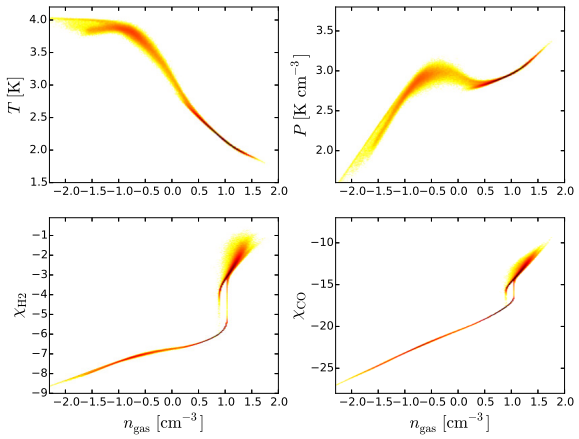


Figure 19.50: Temperature and pressure profiles resulting from the ISM heating and cooling functions (top) and the abundances of H_2 and CO as a function of gas density (bottom). The behaviour of the H_2 and CO fractions close to $n = 10\,\mathrm{cm}^{-3}$ is a consequence of H_2 self-shielding: in gas which was initially molecular, this remains effective down to lower densities than is the case in gas which was initially atomic. This behaviour is discussed in much greater detail in Dobbs et al. (2008).

routine (Section 19.3.2) to give the density profile according to (19.330). We set the mid-plane density to 10^{-3} in code units, or $\approx 6 \times 10^{-13}\mathrm{g/cm}^3$. The corresponding particle mass in code units is 1.13×10^{-9}. We use periodic boundaries, with the boundary in the y direction set at $\pm 10H$ to avoid periodicity in the vertical direction.

Following the procedure in Price & Laibe (2015a) we relax the density profile by evolving for 15 orbits with gas only with damping switched on. We then restart the calculation with either i) a dust fraction added to each particle (one-fluid), or ii) a corresponding set of dust particles duplicated from the gas particles (two-fluid). For the dust we assume 1 mm grains with an Epstein drag prescription, such that the stopping time is given by (19.250). Since Δv is not available when computing t_s with the one-fluid method, we set the factor $f = 1$ in (19.250) when using this method (this is a valid approximation since by definition Δv is small when the one-fluid method is applicable). The dimensionless stopping time $t_\mathrm{s}\Omega = 8.46 \times 10^{-3}$ initially at the disc midplane. After adding dust we continued the simulation for a further 50 orbits.

Figure 19.49 shows the dust density at intervals of 10 t_orb, showing the cross section slice through the $z = 0$ plane of the 3D box which may be directly compared to the 2D solutions shown in Price & Laibe (2015a). Settling of the dust layer proceeds as expected, with close agreement between the one-fluid (top row) and two-fluid (bottom row) methods, though the two-fluid method is much slower for this test because of the timestep constraint imposed by the stopping time, c.f. (19.261). The dust resolution is higher in the two-fluid calculation because the set of dust particles follow the dust mass rather than the total mass (for the one-fluid method).

19.5.10 ISM cooling and chemistry

Figure 19.50 shows the behaviour of the various cooling and chemistry modules used when modelling the ISM. These plots were made from the data from a simulation of gas rings embedded in a static background potential giving a flat rotation curve Binney & Tremaine (1987). Gas is setup in a ring of constant surface density from 5 kpc to 10 kpc in radius, initially at 10 000 K, with a total gas mass of 2×10^9 $\mathrm{M}_\odot$. The top panels show a temperature and pressure profile of all gas particles. The temperature plateaus around 10 000 K and forms a two phase medium visible in the 'knee' in the pressure profile, as expected for ISM thermal models Wolfire et al. (1995). Much lower temperatures can be reached if the gas is given a higher surface density or if self-gravity is active. In the case of the latter, some energy delivery scheme, or the inclusion of a large number of sink particles, is needed to break apart the cold

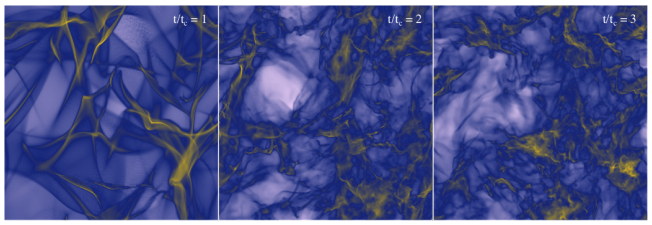


Figure 19.51: Gas column density in PHANTOM simulations of driven, isothermal, supersonic turbulence at Mach 10, similar to the calculations performed by Price & Federrath (2010). We show the numerical solutions at $t = 1$, 2 and 3 crossing times (left to right, respectively). The colour scale is logarithmic between 10^{-1} and 10 in code units.

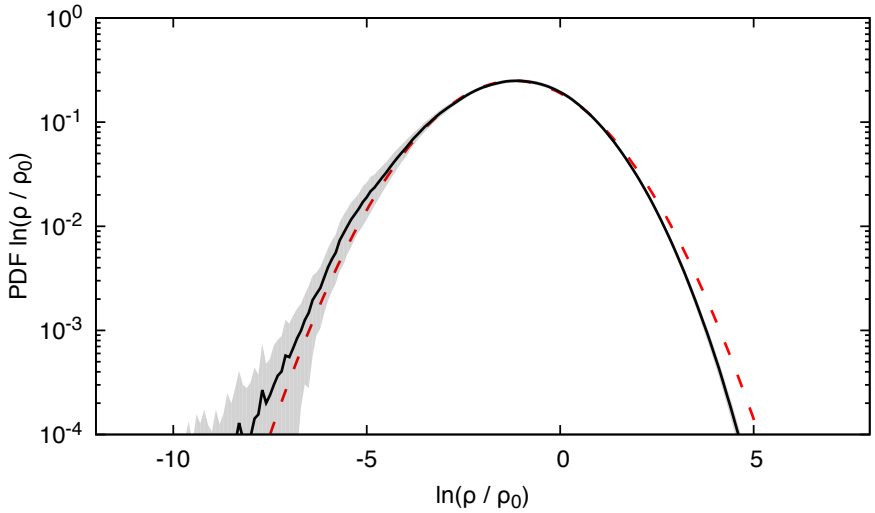


Figure 19.52: Time-averaged PDF of $s = \ln(\rho/\rho_0)$ for supersonic Mach 10 turbulence, with the shaded region representing the standard deviation of the averaging. The PDF is close to a log-normal distribution, shown by the dashed red line.

knots.

The bottom two panels of Figure 19.50 show the chemical abundances of H_2 and CO. The exact form of the molecular abundance profiles are a function of many variables that are set at run time, with the data in the figure made from the default values. The molecular abundances are strong functions of total gas density, with the CO being a strong function of H_2 abundance. If a higher gas mass (e.g. $\times 10$ the value used here) or self-gravity is included then abundances reach a maximum of either 0.5 for H_2 or the primordial carbon abundance for CO. See Dobbs et al. (2008) for a detailed discussion of the features of these abundance curves.

19.6 Example applications

PHANTOM is already a mature code, in the sense that we have always developed the code with specific applications in mind. In this final section we demonstrate five example applications for which the code is well suited. The setup for each of these applications are provided in the wiki documentation so they can be easily reproduced by the novice user. We also plan to incorporate these examples into an 'optimisation suite' to benchmark performance improvements to the code.

19.6.1 Supersonic turbulence

Our first example application employs the turbulence forcing module described in Section 19.2.5. Figure 19.51 shows the gas column density in simulations of isothermal supersonic turbulence driven to an rms Mach number of $\mathcal{M} \approx 10$, identical to those performed by Price

& Federrath (2010). The calculations use 256^3 particles and were evolved for 10 turbulent crossing times, $t_c = L/(2\mathcal{M})$. This yields a crossing time of $t_c = 0.05$ in code units. The gas is isothermal with sound speed $c_s = 1$ in code units. The initial density is uniform $\rho_0 = 1$.

The gas column density plots in Figure 19.51 may be directly compared to the panels in Figure 3 of Price & Federrath (2010). Figure 19.52 shows the time-averaged probability distribution function (PDF) of $s \equiv \ln(\rho/\rho_0)$. This demonstrates the characteristic signature of isothermal supersonic turbulence, namely the appearance of a log-normal PDF in s Vazquez-Semadeni (1994); Nordlund & Padoan (1999); Ostriker et al. (1999). Indeed, PHANTOM was used in the study by Price et al. (2011) to confirm the relationship between the standard deviation and the Mach number in the form

$$\sigma_s^2 = \ln\left(1 + b^2\mathcal{M}^2\right), \tag{19.332}$$

where $b = 1/3$ for solenoidally driven turbulence, as earlier suggested by Federrath et al. (2008, 2010a).

19.6.2 Star cluster formation

SPH has been used to study star formation since the earliest studies by Gingold & Monaghan (1982a, 1983); Phillips (1982, 1986a,b) and Monaghan & Lattanzio (1986, 1991), even motivating the original development of MHD in SPH by Phillips & Monaghan (1985). The study by Bate et al. (2003) represented the first simulation of 'large scale' star cluster formation, resolved to the opacity limit for fragmentation Rees (1976); Low & Lynden-Bell (1976). This was enabled by the earlier development of sink particles by Bate et al. (1995), allowing star formation simulations to continue beyond the initial collapse Bonnell et al. (1997); Bate & Bonnell (1997). This heritage is present in PHANTOM which inherits many of the ideas and algorithms implemented in the SPHNG code.

Figure 19.53 shows a series of snapshots taken from a recent application of PHANTOM to star cluster formation by Liptai et al. (2017). The initial setup follows Bate et al. (2003) — a uniform density sphere of 0.375 pc in diameter with a mass of 50 $M_\odot$. The initial velocity field is purely solenoidal, generated on a 64^3 uniform grid in Fourier space to give a power spectrum $P(k) \propto k^{-4}$ consistent with the Larson (1981) scaling relations, and then linearly interpolated from the grid to the particles. The initial kinetic energy is set to match the gravitational potential energy, $(3/5GM^2/R)$, giving a root mean square Mach number ≈ 6.4. We set up 3.5×10^6 particles in the initial sphere placed in a uniform random distribution. We evolve the simulation using a barotropic equation of state $P = K\rho^\gamma$ in the form

$$\frac{P}{\rho} = \begin{cases} c_{s,0}^2, & \rho < \rho_1, \\ c_{s,0}^2 \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{(\gamma_1-1)}, & \rho_1 \le \rho < \rho_2, \\ c_{s,0}^2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{(\gamma_1-1)} \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{(\gamma_2-1)}, & \rho_2 \le \rho < \rho_3, \\ c_{s,0}^2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{(\gamma_1-1)} \left(\frac{\rho_3}{\rho_2}\right)^{(\gamma_2-1)} \left(\frac{\rho}{\rho_3}\right)^{(\gamma_3-1)}, & \rho \ge \rho_3, \end{cases} \tag{19.333}$$

where we set the initial sound speed $c_{s,0} = 2\times10^4$ cm s^{-1} and set $[\rho_1, \rho_2, \rho_3] = [10^{-13}, 10^{-10}, 10^{-3}]$ g cm^{-3} and $[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3] = [1.4, 1.1, 5/3]$, as in Bate et al. (2003). We turn on automatic sink particle creation with a threshold density of 10^{-10} g cm^{-3}, with sink particle accretion radii set to 5 au and particles accreted without checks at 4 au. No sink particles are allowed to be created within 10 au of another existing sink. The calculations satisfy the Bate & Burkert (1997) criterion of resolving the minimum Jeans mass in the calculation (known as the opacity limit for fragmentation; Rees (1976); Low & Lynden-Bell (1976)) by at least the number of particles contained within one smoothing sphere.

The snapshots shown in Figure 19.53 show a similar evolution to the original calculation of Bate et al. (2003). The evolution is not identical since we used a different realisation of the initial turbulent velocity field. A more quantitative comparison can be found in Liptai et al. (2017) where we performed 7 different realisations of the collapse in order to measure a statistically meaningful initial mass function (IMF) from the calculations, finding an IMF in agreement with the one found by Bate (2009a) in a much larger (500 $M_\odot$) calculation. The

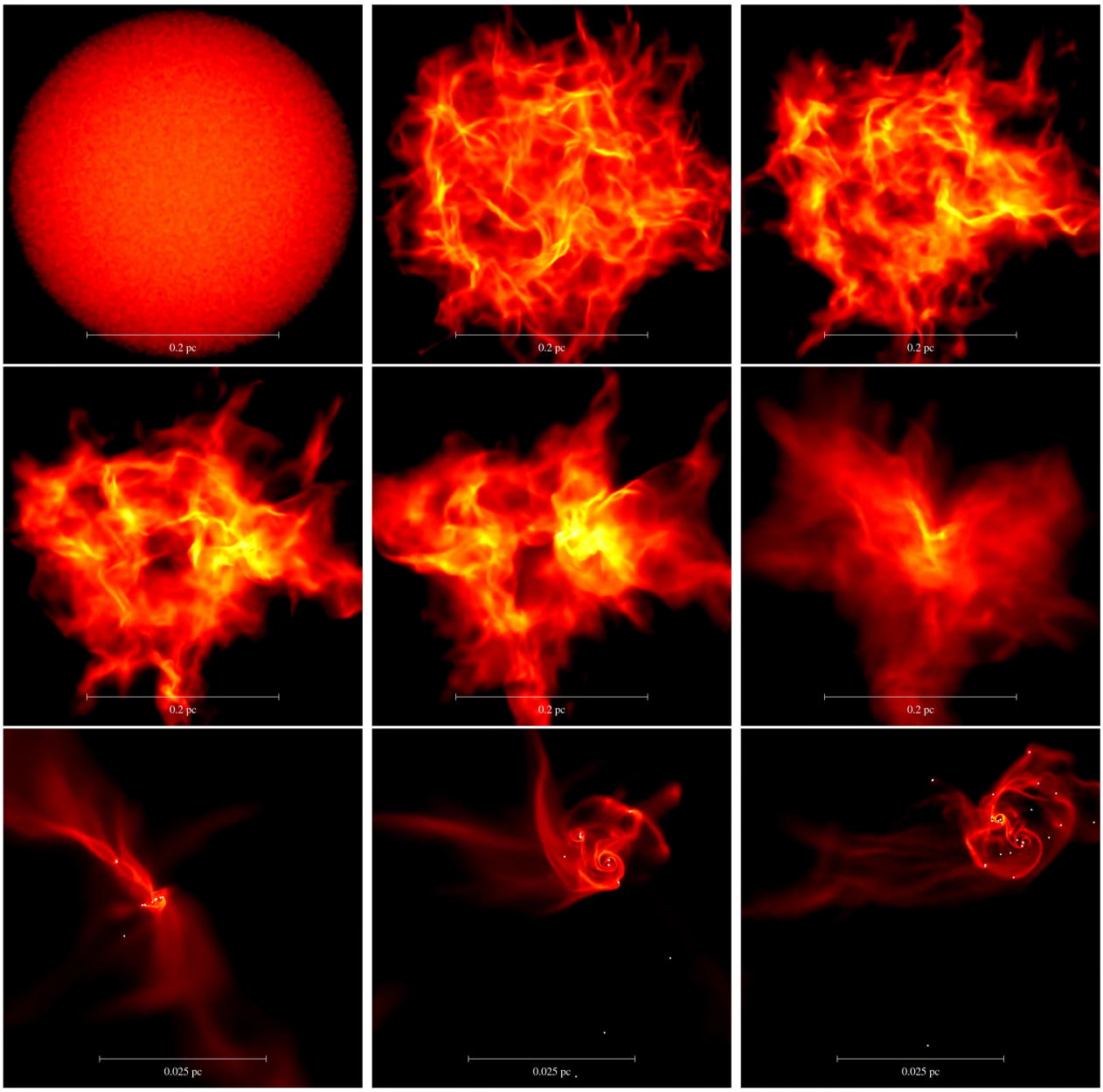


Figure 19.53: Star cluster formation with PHANTOM, showing snapshots of gas column density during the gravitational collapse of a 50 $M_\odot$ molecular cloud core, following Bate et al. (2003). Snapshots are shown every 0.2 t_{ff} (left to right, top to bottom), with the panels after $t > t_{ff}$ zoomed in to show the details of the star formation sequence. As in Bate et al. (2003), we resolve the fragmentation to the opacity limit using a barotropic equation of state.

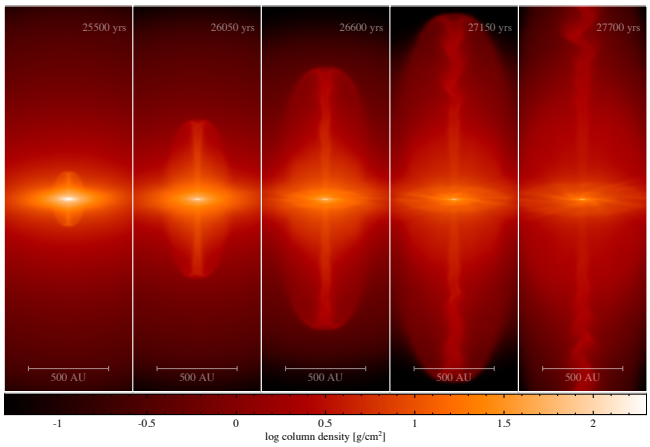


Figure 19.54: Magnetically propelled jet of material bursting out of the first hydrostatic core phase of star formation.

IMF produced with a barotropic equation of state does not match the observed local IMF in the Milky Way (e.g. Chabrier (2005)), tending to over-produce low mass stars and brown dwarfs. This is a known artefact of the barotropic equation of state Matzner & Levin (2005); Krumholz (2006); Bate (2009b), since material around the stars remains cold rather than being heated. It can be fixed by implementing radiative feedback, for example by implementing radiation hydrodynamics in the flux-limited diffusion approximation Whitehouse & Bate (2004); Whitehouse et al. (2005); Whitehouse & Bate (2006). This is not yet implemented in PHANTOM but it is high on the agenda.

19.6.3 Magnetic outflows during star formation

PHANTOM may also be used to model the formation of individual protostars. We present an example following the initial setup and evolution of Price et al. (2012). A molecular cloud core with initial density $\rho_0 = 7.4 \times 10^{-18}$ g cm^{-3} is embedded in pressure equilibrium with ambient medium of density 2.5×10^{-19} g cm^{-3}. The barotropic equation of state given by (19.333) is used, setting $c_s = 2.2 \times 10^4$ cm s^{-1}. The radius of the core is 4×10^{16} cm (≈ 2700 au), with the length of the cubic domain spanning $[x, y, z] = \pm 8 \times 10^{16}$ cm. The core is in solid body rotation with angular speed $\Omega = 1.77 \times 10^{-13}$ rad s^{-1}. The magnetic field is uniform and aligned with the rotation axis with a mass-to-flux ratio $\mu = 5$, corresponding to $B_0 \approx 163$ μG. A sink particle is inserted once the gas reaches a density of 10^{-10} g cm^{-3}, with an accretion radius of 5 au. Thus, this calculation models only the evolution of the first hydrostatic core phase of star formation. The core is composed of $1,004,255$ particles, with $480,033$ particles in the surrounding medium.

Figure 19.54 shows the evolution of a magnetised, collimated bipolar jet of material, similar to that given by Price et al. (2012). Infalling material is ejected due to the wind up of the toroidal magnetic field. The sink particle is inserted at $t \approx 25\,400$ yrs, shortly before the jet begins. The jet continues to be driven while material continues to infall, lasting for several thousand years.

19.6.4 Galaxy merger

To provide a realistic test of the collisionless N-body and SPH implementations, we performed a comparison study where we modelled a galaxy merger, comparing the PHANTOM results with the HYDRA N-body/SPH code (Couchman et al. (1995); Thacker & Couchman (2006)). This test requires gravity along with multiple particle types — gas, stars and dark matter. Gas interacts hydrodynamically only with itself, and all three particle types interact with each other via gravity (c.f. Table 7).

To create a Milky Way-like galaxy, we used GALACTICS (Kuijken & Dubinski (1995b); Widrow & Dubinski (2005); Widrow et al. (2008)) to first create a galaxy consisting of a stellar bulge, stellar disc and a dark matter halo. To create the gas disc, the stellar disc was then

	$M/\mathrm{M}_\odot$ (10^{10})	$m/\mathrm{M}_\odot$ (10^5)	N
Dark matter halo	89.92	89.92	100 000
Hot gas halo	0.60	2.77	21 619
Stellar bulge	1.34	18.10	7 407
Stellar disc	3.56	18.10	19 662
Gas disc	0.54	2.77	19 662

Table 6: Component breakdown for each galaxy. For each component, the total mass is M, the particle mass is m, and the number of particles is N.

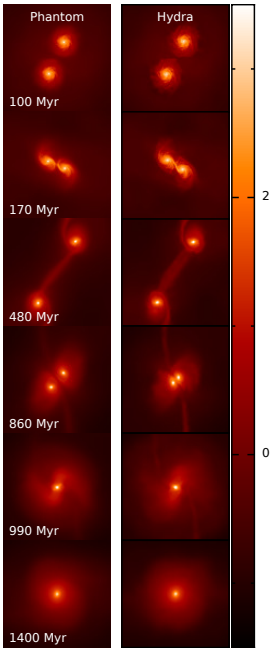


Figure 19.55: Evolution of the gas column density in a major merger of two Milky Way-sized galaxies, comparing PHANTOM to the HYDRA code. Times shown are from the onset of the simulation, with each frame $(100\ \mathrm{kpc})^2$. The colour bar is log (Column density / $(\mathrm{M}_\odot\ \mathrm{pc}^{-1})$).

duplicated and reflected in the $x = y$ plane to avoid coincidence with the star particles. Ten percent of the total stellar mass was then removed and given to the gas disc. Although the gas disc initially has a scale height larger than physically motivated, this will quickly relax into a disc that physically resembles the Milky Way. Next, we added a hot gas halo embedded within the dark matter halo. The hot gas halo has an observationally motivated β-profile (e.g. Cavaliere & Fusco-Femiano (1976)) and a temperature profile given by Kaufmann et al. (2007); the mass of the hot gas halo is removed from the dark matter particles to conserve total halo mass. The mass of each component, as well as particle numbers and particle masses are given in Table 6. To model the major merger, the galaxy is duplicated and the two galaxies are placed 70 kpc apart on a parabolic trajectory. These initial conditions are identical to those used in Wurster & Thacker (2013b,a). To simplify the comparison, there is no star formation recipe, no black holes and no feedback from active galactic nuclei (there are currently no plans to implement cosmological recipes in PHANTOM). Thus, only the SPH and gravity algorithms are being compared.

Figure 19.55 shows the gas column density evolution from $t = 100$ Myr to $t = 1.4$ Gyr, comparing PHANTOM (left) to HYDRA (right), and Figure 19.56 shows the evolution of the separation of the galaxies and the mean and maximum gas density in each model. The evolution of the two galaxy mergers agree qualitatively with one another, with slight differences in the trajectories, evolution times and gas densities between the two codes. Using the centre of mass

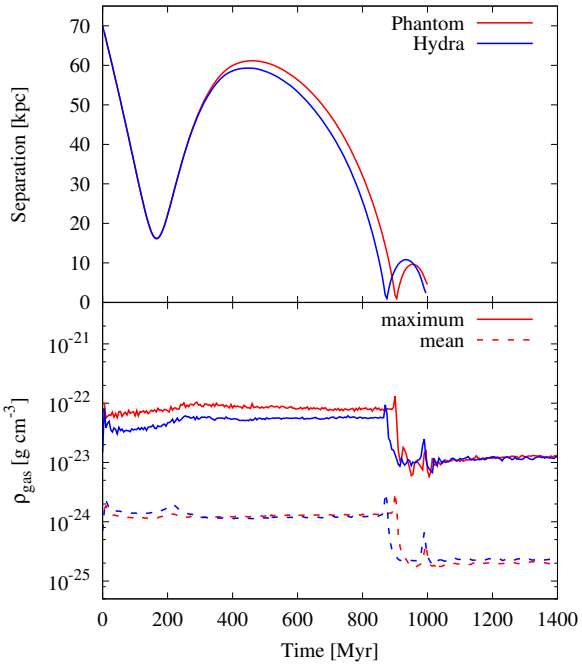


Figure 19.56: *Top*: The evolution of the separation of the galaxies, using centre of mass of the star particles that were assigned to each galaxy as a proxy for the galaxy's centre; the stars are sufficiently mixed after 1000 Myr, thus a meaningful separation cannot be calculated. *Bottom*: The evolution of the maximum (solid) and mean (dashed) gas densities for each model.

of the star particles that were assigned to each galaxy as a proxy for the galaxy's centre, the maximum separation at $t \approx 450$ Myr is 59 and 61 kpc for HYDRA and PHANTOM, respectively. Second periapsis occurs at 875 and 905 Myr for HYDRA and PHANTOM, respectively, which is a difference of 3.4 per cent since the beginning of the simulation. The maximum gas density is approximately 2 times higher in PHANTOM prior to the merger, and about 1.2 times higher after the merger; the average gas densities typically differ by less than a factor of 1.2 both before and after the merger.

There are several differences in the algorithms used in HYDRA compared to PHANTOM. The first is the gravity solver. The long-range gravity in HYDRA uses an adaptive particle-mesh algorithm Couchman (1991), while PHANTOM uses a kd-tree (c.f. Section 19.2.12). For the short-range gravity, HYDRA uses a fixed S2 softening length for all particles, where the S2 softening is scaled to an equivalent Plummer softening such that $\epsilon_{\rm S2} = 2.34\epsilon_{\rm Plummer}$; for this simulation, $\epsilon_i \equiv \epsilon_{\rm Plummer} = 300$ pc. In PHANTOM, $\epsilon_i = h_i$ for each particle, where h_i is calculated using only the particles of the same type as particle i.

A second difference is the treatment of the smoothing length in high density regions. In HYDRA, as is common in most galactic and cosmological codes, the smoothing length is limited such that $h_i = \max(h_i, h_{\rm min})$, where $h_{\rm min} = \epsilon_{\rm Plummer}/8$ ($= 37.5$ pc). In PHANTOM, h_i is always calculated self-consistently and thus has no imposed lower limit.

Finally, PHANTOM contains an artificial conductivity term (Section 19.2.2) that acts to ensure continuous pressure fields across contact discontinuities Price (2008).

In Wurster & Thacker (2013b), the HYDRA major merger model was compared to a simulation run using the publicly available version of GADGET2 (Springel et al. (2001); Springel & Hernquist (2002)). As here, the comparison was simplified such that only the gravity and SPH solvers were being compared. They found that the galaxies in each simulation followed similar trajectories and both models reached second periapsis within 0.2 per cent of one another, as measured from the beginning of the simulation. Note that both HYDRA and GADGET2 were both written primarily to solve galactic and cosmological models.

The quantitive difference in results may be attributed to the improved SPH algorithms in PHANTOM compared to HYDRA. The higher density in HYDRA is consistent with the results in Richardson et al. (2016), who found higher densities in HYDRA compared to the adaptive mesh refinement code RAMSES Teyssier (2002). It was determined that this was a result of a combination of the artificial viscosity, $h_{\rm min}$ and the suppression of 'mixing' (which occurs when

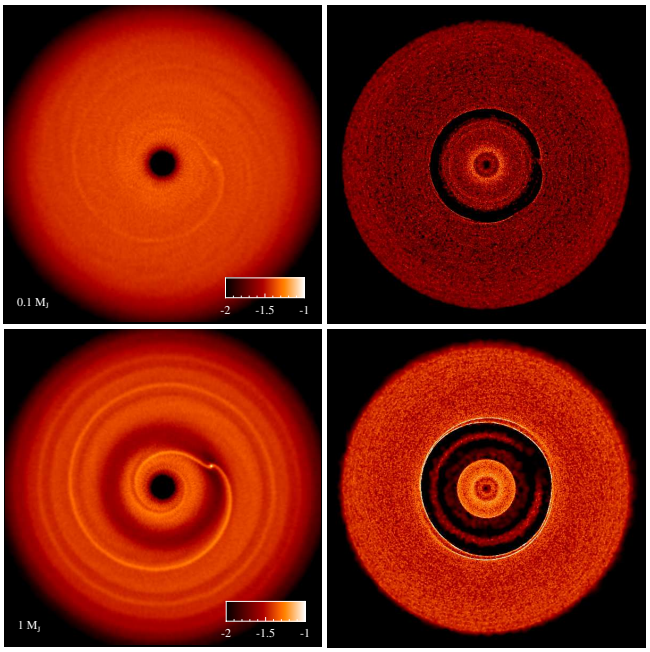


Figure 19.57: Gap opening in dusty protoplanetary discs with PHANTOM (from Dipierro et al. (2016)), showing surface density in gas (left) and mm dust grains (right) in two simulations of planet-disc interaction with planet masses of 0.1 $M_{\rm Jupiter}$ (top) and 1 $M_{\rm Jupiter}$ (bottom) in orbit around a 1.3 $M_\odot$ star. In the top case a gap is opened only in the dust disc, while in the bottom row the gap is opened in both gas and dust. The colour bar is logarithmic surface density in cgs units.

no thermal conductivity is applied).

19.6.5 Gap opening in dusty discs

Our final example is taken from Dipierro et al. (2016) and builds on our recent studies of dust dynamics in protoplanetary discs with PHANTOM Dipierro et al. (2015); Ragusa et al. (2017). We perform calculations using the two-fluid approach, setting up a disc with 500 000 gas particles and 100 000 dust particles with $\Sigma \propto r^{-0.1}$ between 1 and 120 au with a total disc mass of 2×10^{-4} $M_\odot$. The disc mass is chosen to place the mm dust particles in a regime where the Stokes number is greater than unity. The initial dust-to-gas ratio is 0.01 and we assume a locally isothermal equation of state with $c_{\rm s} \propto r^{-0.35}$, normalised such that $H/R = 0.05$ at 1 au. We use the minimum disc viscosity possible, setting $\alpha_{\rm AV} = 0.1$.

Figure 19.57 shows the results of two calculations employing planets of mass 0.1 $M_{\rm Jupiter}$ (top row) and 1.0 $M_{\rm Jupiter}$ (bottom) embedded in a disc around a 1.3 $M_\odot$ star. Left and right panels show gas and dust surface densities, respectively. While the theory of gap opening in gaseous discs is relatively well understood as a competition between the gravitational torque from the planet trying to open a gap and the viscous torques trying to close it Goldreich & Tremaine (1979, 1980), gap opening in dusty discs is less well understood Paardekooper & Mellema (2004, 2006). In Dipierro et al. (2016) we identified two regimes for gap opening in dusty discs where gap opening in the dust disc is either *resisted* or *assisted* by the gas-dust drag. The top row of Figure 19.57 demonstrates that low mass planets can carve a gap which is visible only in the *dust* disc, while for high mass planets (bottom row) there is a gap opened in both gas and dust but it is deeper in the dust. Moreover, the gap opening mechanism by low mass planets has been further investigated in Dipierro & Laibe (2017). They derived a grain size-dependent criterion for dust gap opening in discs, an estimate of the location of the outer edge of the dust gap and an estimate of the minimum Stokes number above which low-mass planets are able to carve gaps which appear only in the dust disc. These predictions has been tested against PHANTOM simulations of planet-disc interaction in a broad range of dusty protoplanetary discs, finding a remarkable agreement between the theoretical model and the numerical experiments.

Interestingly, our prediction of dust gaps that are not coincident with gas gaps for low mass

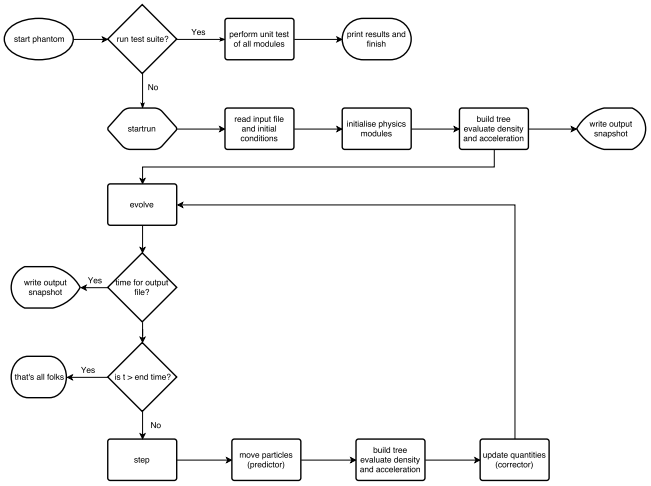


Figure 19.58: Flowchart showing the basic structure of PHANTOM. To the user what appears is a sequence of output files written at discrete time intervals. The core of the code is the timestepping loop, while most of the computational cost is spent building the tree and evaluating density and acceleration by summing over neighbours.

planets appears to be observed in recent observations of the TW Hya protoplanetary disc, by comparing VLT-SPHERE imaging of the scattered light emission from small dust grains (van Boekel et al. (2017); tracing the gas) to ALMA images of the mm dust emission Andrews et al. (2016).

19.7 Summary

We have outlined the algorithms and physics currently implemented in the PHANTOM smoothed particle hydrodynamics and magnetohydrodynamics code in the hope that this will prove useful to both users and developers of the code. We have also demonstrated the performance of the code as it currently stands on a series of standard test problems, most with known or analytic solutions. While no code is ever 'finished' nor bug-free, it is our hope that the code as it stands will prove useful to the scientific community. Works in progress for future code releases include radiation hydrodynamics, continuing development of the dust algorithms, and an implementation of relativistic hydrodynamics.

19.8 Details of code implementation

Figure 19.58 shows the basic structure of the code. The core of the code is the timestepping loop, while the most time consuming part are the repeated calls to evaluate density and acceleration on the particles via sums over neighbouring particles. Further details of these steps are given in Section 19.8.3.

19.8.1 Smoothing kernels

A PYTHON script distributed with PHANTOM can be used to generate the code module for alternative smoothing kernels, including symbolic manipulation of piecewise functions using SYMPY to obtain the relevant functions needed for gravitational force softening (see below). Pre-output modules for the six kernels described in Section 19.2.1 are included in the source code, and the code can be recompiled with any of these replacing the default cubic spline on the command line, e.g. `make KERNEL=quintic`.

The double hump kernel functions used in the two-fluid dust algorithm (Section 19.2.13) can be generated automatically from the corresponding density kernel by the `kernels.py` script

ID	Type	Description
1	gas	default type, all forces applied
2	dust	drag, external & gravitational forces
3	boundary	velocity and gas properties fixed
4	star	external and gravitational forces
5	dark matter	same as star, but different mass
6	bulge	same as star, but different mass
0	unknown	usually dead particles

Table 7: Particle types in PHANTOM. The density and smoothing length of each type is computed only from neighbours of the same type (c.f. Section 19.2.13). Sink particles are handled separately in a different set of arrays.

distributed with PHANTOM, as described in Section 19.2.12. The pre-generated modules implementing each of the kernels described in Section 19.2.1 hence automatically contain the corresponding double hump kernel function, which is used to compute the drag terms.

19.8.2 Particle types

Particles can be assigned with a 'type' from the list (see Table 7 in the appendix). The main use of this is to be able to apply different sets of forces to certain particle types (see description for each type). Densities and smoothing lengths are self-consistently computed for *all* of these types except for 'dead' particles which are excluded from the tree build and boundary particles whose properties are fixed. However, the kernel interpolations used for these involve only neighbours of the *same type*. Particle masses in PHANTOM are fixed to be equal for all particles of the same type, to avoid problems with unequal mass particles (e.g. Monaghan & Price (2006)). We use adaptive gravitational force softening for all particle types, both SPH and N-body (see Section 19.2.12). Sink particles are handled separately to these types, being stored in a separate set of arrays, carry only a fixed softening length which is set to zero by default and compute their mutual gravitational force without approximation (see Section 19.2.8).

19.8.3 Evaluating density and acceleration

Tree build

PHANTOM uses a kd-tree for nearest neighbour finding and to compute long range gravitational accelerations. The procedure for the tree build is given in Figure 19.59. We use a stack, rather than recursive subroutines, for efficiency and to aid parallelisation (the parallelisation strategy for the tree build is discussed further in Section 19.8.4). The stack initially contains only the highest level node for each thread (in serial this would be the root node). We loop over all nodes on the stack and call a subroutine to compute the node properties, namely the centre of mass position, the node size, s, which is the radius of a sphere containing all the particles centred on the centre of mass, the maximum smoothing length for all the particles contained within the node, pointers to the two node children and the parent node, and, if self-gravity is used, the total mass in the node as well as the quadrupole moment (see Section 19.2.12). The `construct_node` subroutine also decides whether or not the node should be split (i.e. if the number of particles $> N_{\rm min}$) and returns the indices and boundaries of the resultant child nodes.

We access the particles by storing an integer array containing the index of the first particle in each node (`firstinnode`), and using a linked list where each particle stores the index of the next particle in the node (`next`), with an index of zero indicating the end of the list. During the tree build we start with only the root node, so `firstinnode` is simply the first particle that is not dead or accreted and the `next` array is filled to contain the next non-dead-or-accreted particle using a simple loop. In the `construct_node` routine we convert this to a simple list of the particles in each node and use this temporary list to update the linked list when creating the

```
construct_root_node(rootnode,bounds)
push_onto_stack(rootnode,bounds)
number on stack = 1
do while (number on stack > 0)
pop_off_stack(node,bounds)
construct_node(node,bounds,boundsl,boundsr)
if (node was split)
  push_onto_stack (leftchild,boundsl)
  push_onto_stack (rightchild,boundsr)
  number on stack += 2
endif
enddo
```

Figure 19.59: Pseudo-code for the tree build. The *construct_node* procedure computes, for a given node, the centre of mass, size, maximum smoothing length, quadrupole moments, and the child and parent pointers and the boundaries of the child nodes.

child nodes (i.e., by setting `firstinnode` to zero for the parent nodes, and filling `firstinnode` and `next` for the child nodes based on whether the particle position is to the 'left' or the 'right' of the bisected parent node).

The tree structure itself stores 8 quantities without self-gravity, requiring 52 bytes per particle (`x`,`y`,`z`,`size`,`hmax`: 5 x 8-byte double precision; `leftchild`, `rightchild`, `parent`: 3 x 4-byte integer). With self-gravity we store 15 quantities (`mass` and `quads(6)`, i.e. 7 additional 8-byte doubles) requiring 108 bytes per particle. We implement the node indexing scheme outlined by Gafton & Rosswog (2011) where the tree nodes on each level l are stored starting from 2^{l-1}, where level 1 is the 'root node' containing all the particles, to avoid the need for thread locking when different sections of the tree are built in parallel. However, the requirement of allocating storage for all leaf nodes on all levels regardless of whether or not they contain particles either limits the maximum extent of the tree or can lead to prohibitive memory requirements, particularly for problems with high dynamic range, such as star formation, where a small fraction of the particles collapse to high density. Hence, we use this indexing scheme only up to a maximum level (`maxlevel_indexed`) which is set such that $2^{\texttt{maxlevel_indexed}}$ is less than the maximum number of particles (`maxp`). We do, however, allow the tree build to proceed beyond this level, whereupon the `leftchild`, `rightchild` and `parent` indices are used and additional nodes are added in the order that they are created (requiring limited thread locking).

Neighbour search

The neighbour search for a given 'leaf node', n, proceeds from the top down. As with the tree build, this is implemented using a stack, which initially contains only the root node. The procedure is summarised in Figure 19.60. We loop over the nodes on the stack, checking the criterion

$$r_{nm}^2 < (s_n + s_m + R_{\rm kern} h_{\rm max}^n)^2 \tag{19.334}$$

where $r_{nm}^2 \equiv (x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2 + (z_n - z_m)^2$ is the square of the separation between the node centres and s is the node size. Any node m satisfying this criteria, that is not a leaf node, has its children added to the stack and the search continues. If node m is a leaf node, then the list of particles it contains are added to the trial neighbour list and the positions cached. The end product is a list of trial neighbours (`listneigh`), its length `nneigh` and a cache containing the trial neighbour positions (`xyzcache`) up to some maximum size (12 000 by default, the exact size not being important except that it is negligible compared to the number of particles). Trial neighbours exceeding this number are retrieved directly from memory during the density calculation rather than from the cache. This occurs rarely, but the overflow mechanism allows for the possibility of a few particles with a large number of neighbours, as happens under certain circumstances.

```
rcut = size(node) + radkern*hmax(node)
add_to_stack(root node)
number on stack = 1
do while (number on stack > 0)
nodem = stack(nstack)
distance = node - nodem
if (distance < rcut + size(nodem))
  if (node is leaf node)
     ipart = firstinnode(nodem)
     do while(ipart > 0)
        add particle to neighbour list
        nneigh = nneigh + 1
        if (nneigh <= cache size)
           cache positions
        endif
        ipart = next(ipart)
     enddo
  else
     add_to_stack(leftchild)
     add_to_stack(rightchild)
     number on stack += 2
  endif
endif
enddo
```

Figure 19.60: Pseudo-code for the neighbour search (referred to as the *get_neigh* routine in Figure 19.61).

Density and force calculation

Once the neighbour list has been obtained for a given leaf node, we proceed to perform density iterations for each member particle. The neighbours only have to be re-cached if the smoothing length of a given particle exceeds $h_{\rm max}$ for the node, which is sufficiently rare so as not to influence the code performance significantly. In the original version of PHANTOM (on the `nogravity` branch) this neighbour cache was re-used immediately for the force calculation but this is no longer the case on the master branch (see Section 19.8.3). Figure 19.61 summarises the resulting procedure for calculating the density.

The corresponding force calculation is given in Figure 19.62.

SPH in a single loop

A key difference in the force calculation compared to the density calculation (Section 19.2.1) is that computation of the acceleration (Equation 19.34) involves searching for neighbours using both h_a and h_b. One may avoid this requirement, and the need to store various intermediate quantities, by noticing that the h_b term can be computed by 'giving back' a contribution to one's neighbours. In this way the whole SPH algorithm can be performed in a single giant outer loop, but with multiple loops over the same set of neighbours, following the outline in Figure 19.61. This also greatly simplifies the neighbour search, since one can simply search for neighbours within a known search radius ($2h_a$) without needing to search for neighbours that 'might' contribute if their h_b is large. Hence a simple fixed grid can be used to find neighbours, as already discussed in Section 19.2.1, and the same neighbour positions can be efficiently cached and re-used (one or more times for the density iterations, and once for the force calculation). This is the original reason we decided to average the dissipation terms as above, since at the end of the density loop one can immediately compute quantities that depend on ρ_a (i.e. P_a and q^a_{ab}) and use these to 'give back' the b contribution to ones neighbours. This means that the density and force calculations can be done in a single subroutine with effectively only one neighbour call, in principle saving a factor of two in computational cost.

The two disadvantages to this approach are i) that particles may receive simultaneous updates in a parallel calculation, requiring locking which hurts the overall scalability of the code and ii) that when using individual timesteps only a few particles are updated at any given timestep, but with the simple neighbour search algorithms one is required to loop over all the inactive particles to see if they *might* contribute to an active particle. Hence, although we employed this approach for a number of years, we have now abandoned it for a more traditional approach, where the density and force calculations are done in separate subroutines and the kd-tree is used to search for neighbours checking both h_a and h_b for the force calculation.

19.8.4 OpenMP parallelisation

Density and force calculation

Shared memory parallelisation of the density and force calculation is described in pseudo-code in Figure 19.61. The parallelisation is done over the 'leaf nodes', each containing around 10 particles. Since the leaf nodes can be done in any order, this can be parallelised with a simple `$omp parallel do` statement. The neighbour search is performed once for each leaf node, so each thread must store a private cache of the neighbour list. This is not an onerous requirement, but care is required to ensure that sufficient per-thread memory is available. This usually requires setting the `OMP_STACKSIZE` environment variable at runtime. No thread locking is required during the density or force evaluations (unless the single loop algorithm is employed; see Section 19.8.3) and the threads can be scheduled at runtime to give the best performance using either dynamic, guided or static scheduling (the default is dynamic). Static scheduling is faster when there are few density contrasts and the work per node is similar, e.g. for subsonic turbulence in a periodic box (c.f. Price (2012b)).

Parallel tree build

We use a domain decomposition to parallelise the tree build, similar to Gafton & Rosswog (2011). That is, we first build the tree nodes as in Figure 19.59, starting from the root-level node and proceeding to its children and so forth, putting each node into a queue until the

```
!$omp parallel do
do node = 1, number of nodes
if (node is leaf node)
  call get_neigh(node,listneigh,nneigh)
  i = firstinnode(node)
  do while (i > 0)
     do while not converged
        if (h > hmax(node)) call get_neigh
        do k=1,nneigh
           j = listneigh(k)
           if (n <= cache size)
              get j position from cache
           else
              get j position from memory
           endif
           if (actual neighbour)
              evaluate kernel and dwdh
              add to density sum
              add to gradh sum
              add to div v sum
           endif
        enddo
        update h
        check convergence
     enddo
     i = next(i)
  enddo
endif
enddo
!$omp end parallel do
```

Figure 19.61: Pseudo-code for the density evaluation in PHANTOM, showing how Eqs. 19.3, 19.4 and 19.5 are computed. The force evaluation (evaluating Eqs. 19.34 and 19.35) is similar except that *get_ neigh* returns neighbours within the kernel radius computed with both h_i and h_j and there is no need to update/iterate h (see Figure 19.62).

```
!$omp parallel do
do node = 1, number of nodes
if (node is leaf node)
  call get_neigh(node,listneigh,nneigh,fnode)
  i = firstinnode(node)
  do while (i > 0)
     do n=1,nneigh
        j = listneigh(n)
        if (n <= cache size)
           get j position from cache
        else
           get j position from memory
        endif
        if (dr < Rkern*hi or dr < Rkern*hj)
           evaluate kernel and softening
           add to force sum
        else
           add 1/r^2 forces to force sum
        endif
     enddo
     get i distance from node centre
     expand fnode at position of i
     add long range terms to force sum
     i = next(i)
  enddo
endif
enddo
!$omp end parallel do
```

Figure 19.62: Pseudo-code for the force calculation, showing how the short and long-range accelerations caused by self-gravity are computed. The quantity *fnode* refers to the long-range gravitational force on the node computed from interaction with distant nodes not satisfying the tree-opening criterion.

number of nodes in the queue is equal to the number of OpenMP threads. Since the queue itself is executed in serial, we parallelise the loop over the particles inside the `construct_node` routine during the construction of each node. Once the queue is built, each thread proceeds to build its own sub-tree independently.

By default we place each new node into a stack, so the only locking required during the build of each sub-tree is to increment the stack counter. We avoid this by adopting the indexing scheme proposed by Gafton & Rosswog (2011) (discussed in Section 19.2.1) where the levels of the tree are stored contiguously in memory. However, to avoid excessive memory consumption we only use this scheme while $2^{n_{\rm level}} < n_{\rm part}$. For levels deeper than this we revert to using a stack which therefore requires a (small) critical section around the increment of the stack counter.

Performance

Figure 19.63 shows strong scaling results for the pure OpenMP code. For the scaling tests we wanted to employ a more representative problem than the idealised tests shown in Section 19.5. With this in mind we tested the scaling using a problem involving the collapse of a molecular cloud core to form a star, as described in Section 19.6.3. We used 10^6 particles in the initial sphere, corresponding to 1.44 million particles in total. We recorded the wall time of each simulation evolved for one free-fall time of the collapsing sphere, corresponding to $t = 0.88$ in code units.

To show scaling of the OpenMP code to a reasonable number of cpus, we performed the test on the Knights Landing (KNL) nodes of the Raijin supercomputer (the main supercomputer of the National Computational Infrastructure in Australia). Each CPU of this machine is an Intel Xeon Phi CPU 7230 with a clock speed of 1.30 GHz and a 1024 kB cache size. The results shown in Figure 19.63 demonstrate strong scaling to 64 CPUs on this architecture. We used the Intel Fortran Compiler to compile the code. Timings are also shown for the same calculation performed on two different nodes of the Swinstar supercomputer, namely the 'largemem' queue, consisting of up to 32 CPUs using Intel Xeon E7-8837 chips running at 2.66 GHz with cache size 24 576 kB, and the 'normal' queue, consisting of up to 16 Intel Xeon E5-2660 chips running at 2.20 GHz with cache size 20 480 kB. Our shortest wall time is achieved on the largemem queue using 32 CPUs. Figure 19.64 shows the corresponding speedup (wall time on single cpu divided by wall time on multiple cpus) for each architecture. We find the best scaling on the Swinstar 'normal' nodes, which show super-linear scaling and 100% parallel efficiency on 16 cpus. The parallel efficiency on KNL is 60% on 64 cpus.

19.8.5 MPI parallelisation

The code has been recently parallelised for distributed memory architecture using the Message Passing Interface (MPI), using a hybrid MPI-OpenMP implementation. However, Phantom does not yet compete with GADGET variants in terms of the ability to use large numbers of particles (e.g. the most recent calculations by Bocquet et al. (2016) employed more than 10^{11} particles), since almost all of our published simulations to date have been performed with the OpenMP code. Nevertheless, we describe the implementation below.

We decompose the domain using the kd-tree in a similar manner to the OpenMP parallelisation strategy described above. That is, we build a global tree from the top down until the number of tree nodes exceeds the number of MPI threads. Storing a global tree across all MPI threads is not too memory intensive since there are only as many nodes in the global tree as there are MPI threads. Each thread then proceeds to build its own independent subtree. During the neighbour search (performed for each leaf node of the tree) we then flag if a node hits parts of the tree that require remote contributions. If this is the case, we send the information for all active particles contained within the leaf node to the remote processor. Once all nodes have computed density (or force) on their local particles, they proceed to compute the contributions of local particles to the density sums of particles they have received. The results of these partial summations are then passed back to their host processors.

Particles are strictly assigned to a thread by their location in the tree. During the tree build we exchange particles between threads to ensure that all particles are hosted by the thread allocated to their subdomain.

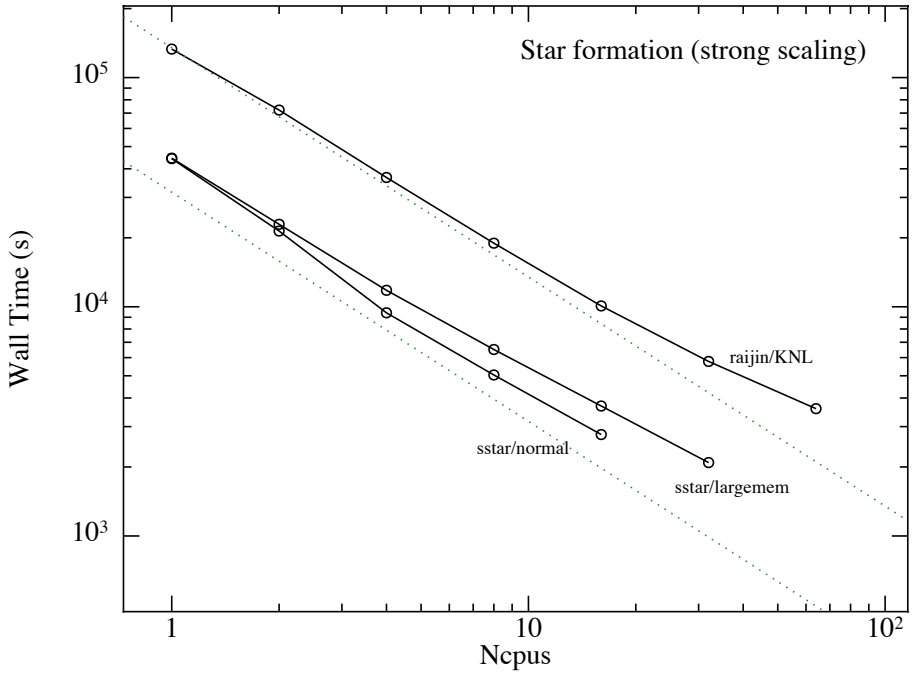


Figure 19.63: Strong scaling results for the pure OpenMP code for the magnetised star formation problem, showing wall time as a function of the number of OpenMP threads.

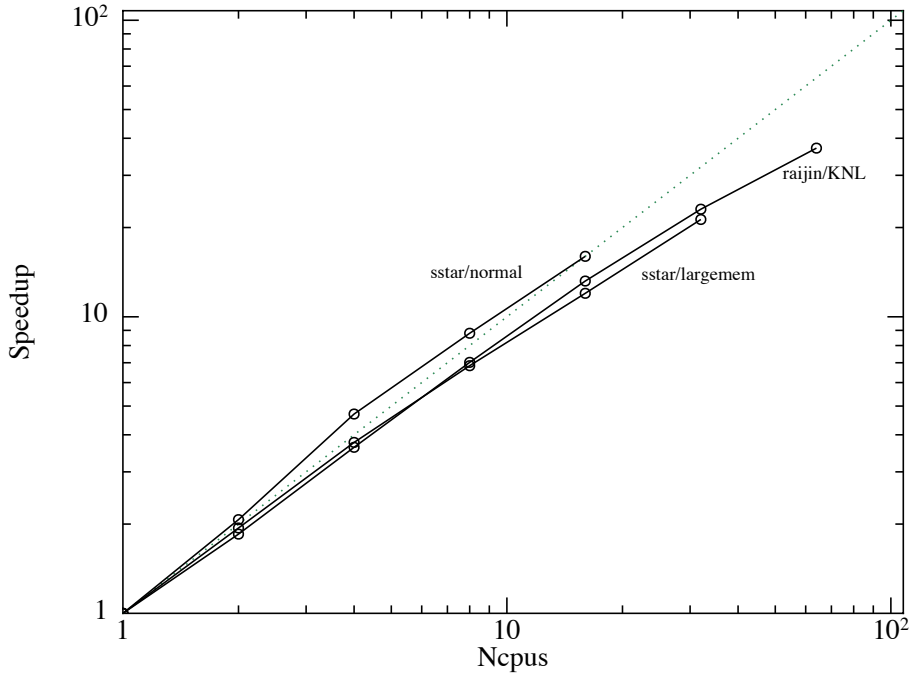


Figure 19.64: Strong scaling results for the pure OpenMP code for the magnetised star formation problem, showing speedup as a function of the number of OpenMP threads.

Within each MPI domain the OpenMP parallelisation then operates as usual. That is, the OpenMP threads decompose the tree further into sub-trees for parallelisation.

19.8.6 Timestepping algorithm

When employing individual particle timesteps, we assign particles to bins numbered from zero, where zero would indicate a particle with $\Delta t = \Delta t_{\rm max}$, such that the bin identifier is

$$i_{{\rm bin},a} = \max\left\{ \mathrm{int}\left[\log_2\left(\frac{2\Delta t_{\rm max}}{\Delta t_a} \right) - \epsilon_{\rm tiny} \right], 0 \right\}, \tag{19.335}$$

where $\epsilon_{\rm tiny}$ is a small number to prevent round-off error (equal to the `epsilon` function in Fortran). The timestep on which the particles move is simply

$$\Delta t = \frac{\Delta t_{\rm max}}{2^{n_{\rm max}}}, \tag{19.336}$$

where $n_{\rm max}$ is the maximum bin identifier over all the particles. Each timestep increments a counter, $i_{\rm stepfrac}$, which if the timestep hierarchy remains fixed simply counts up to $2^{n_{\rm max}}$. If $n_{\rm max}$ changes after each step, then $i_{\rm stepfrac}$ is adjusted accordingly ($i_{\rm stepfrac} = i_{\rm stepfrac}/2^{(n_{\rm max,old} - n_{\rm max,new})}$). A particle is active if

$$\mathrm{mod}\ \left[i_{\rm stepfrac}, 2^{(n_{\rm max} - i_{{\rm bin},a})} \right] = 0. \tag{19.337}$$

Active particles are moved onto a smaller timestep at any time (meaning any time that they are active and hence have their timesteps re-evaluated), but can only move onto a larger timestep if it is synchronised with the next-largest bin, determined by the condition

$$\mathrm{mod}\ \left[i_{\rm stepfrac}, 2^{(n_{\rm max} - i_{{\rm bin},a} + 1)} \right] = 0. \tag{19.338}$$

In keeping with the above, particles are only allowed to move to a larger timestep by one bin at any given time.

We interpolate the positions of inactive particles by keeping all particles synchronised in time at the beginning and end of the timestep routine. This is achieved by storing an additional variable per particle, $t_{\rm was}$. All particles begin the calculation with $t_{\rm was}$ set to half of their initial timestep, that is

$$t_{{\rm was},a} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t_{\rm max}}{i_{{\rm bin},a}} \right). \tag{19.339}$$

To be consistent with the RESPA algorithm (Section 19.2.3) we first update all particles to their half timestep. These velocities are then used to move the particle positions according to the inner loop of the RESPA algorithm (Equations 19.80–19.83). We then interpolate all velocities to the current time in order to evaluate the SPH derivative, finishing with the Leapfrog corrector step. Figure 19.65 shows the resulting pseudo-code for the entire timestepping procedure.

In particular, the first and last steps in the above (involving `twas`) interpolate the velocity to the current time. All other variables defined on the particles, including the thermal energy, magnetic field and dust fraction, are timestepped following the velocity field.

To prevent scenarios were active particles quickly flow into an inactive region (e.g. the Sedov blast wave; see Section 19.5.1), inactive particles can be woken at any time. On each step, particles who should be woken up will be identified by comparing the `ibin(i)` of the active particles to `ibin(j)` of all `i`'s neighbours, both active and inactive. If `ibin(i)+1 > ibin(j)`, then `j` will be woken up to ensure that its timestep is within a factor of two of its neighbours. At the end of the step, these particles will have their `ibin(j)` adjusted as required, and their `twas(j)` will be reset to the value of a particle with $i_{\rm bin}$ that has perpetually been evolved on that timestep. Finally, the predicted timestep will be replaced with `dt_av=dt_evolved(j)+0.5dt(j)`, where `dt_evolved(j)` is the time between the current time and the time the particle was last active, and `dt(j)` is the particle's new timestep.

```
init_step:
t = 0
do i=1,n
twas(i) = 0.5*dt(i)
enddo

step:
dt_long = min(dt(1:n))
do i=1,n
v(i) = v(i) + (twas(i)-t)*asph(i)
enddo
t1 = t + dt_long
do while (t < t1)
t = t + dt_short
do i=1,n
   v(i) = v(i) + 0.5*dt_short*aext(i)
   x(i) = x(i) + dt_short*v(i)
enddo
get_external_force(x,aext,dtshort_new)
get_vdependent_external_force(x,v,aext)
do i=1,n
   v(i) = v(i) + 0.5*dt_short*aext(i)
enddo
dt_short = min(dtshort_new, t1-t)
enddo
do i=1,n
vstar(i) = v(i) + (t-twas(i))*asph(i)
dtold(i) = dt(i)
enddo
get_sph_force(x,vstar,asph,dt)
do i=1,n
if (active)
   dt_av = 0.5*(dtold(i)+dt(i))
   v(i) = v(i) + dt_av*asph(i)
   twas(i) = twas(i) + dt_av
endif
v(i) = v(i) + (t - twas(i))*asph(i)
wake_inactive_particles(ibin(i),twas(i),dt_av)
enddo
```

Figure 19.65: Pseudo-code for the timestepping routine, showing how the interaction between individual timestepping and the RESPA algorithm is implemented. External forces and sink-gas interactions are computed on the fastest timescale $\Delta t_{\rm short} \equiv \Delta t_{\rm ext}$. Additional quantities defined on the particles follow the velocity terms. The variable $t_{\rm was}$ stores the last time the particle was active and is used to interpolate and synchronise the velocities at the beginning and end of each timestep.

19.8.7 Initial conditions: Monte Carlo particle placement

For setting up the surface density profile in discs, we use a Monte Carlo particle placement (Section 19.3.3). This is implemented as follows: We first choose the azimuthal angle as a uniform random deviate $u_1 \in [\phi_{\rm min}, \phi_{\rm max}]$ ($0 \rightarrow 2\pi$ by default). We then construct a power-law surface density profile $\Sigma \propto R^{-p}$ using the rejection method, choosing a sequence of random numbers $u_2 \in [0, f_{\rm max}]$ and iterating until we find a random number that satisfies

$$u_2 < f, \tag{19.340}$$

where $f \equiv R\Sigma = R^{1-p}$ and $f_{\rm max} = R_{\rm in}^{1-p}$ (or $f_{\rm max} = R_{\rm out}^{1-p}$ if $p \leq 1$). Finally, the z position is chosen with a third random number $u_3 \in [-z_{\rm max}, z_{\rm max}]$ such that $u_3 < g$, where $g = \exp[-z^2/(2H^2)]$ and $z_{\rm max} = \sqrt{6}H$.

19.8.8 Runtime parameters in PHANTOM in relation to this paper

Table 8 lists a dictionary of compile-time and runtime parameters used in the code in relation to the notation used in this paper.

19.8.9 The PHANTOM testsuite

Most numerical codes in astrophysics are tested entirely by their performance on physical problems with known solutions, with solutions that can be compared with other codes and by maintenance of various conservation properties at runtime (see Section 19.5). We also *unit test* code modules. This allows issues to be identified at a much earlier stage in development. The tests are wrapped into the nightly testsuite. When a bug that escapes the testsuite has been discovered, we have endeavoured to create a unit test to prevent a future recurrence.

Unit tests of derivative evaluations

The unit test of the density and force calculations checks that various derivatives evaluate to within some tolerance of the expected value. To achieve this, the test sets up $100\times100\times100$ SPH particles in a periodic, unit cube, and specifies the input variables in terms of known functions. For example, the evaluation of the pressure gradient is checked by setting the thermal energy of each particle according to

$$u_a(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\left[3 + \sin\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right) + \cos\left(\frac{2\pi y}{L_y}\right) + \sin\left(\frac{2\pi z}{L_z}\right)\right], \tag{19.341}$$

where L_x, L_y and L_z are the length of the domain in each direction and the positions are relative to the edge of the box. We then compute the acceleration according to (19.34) with the artificial viscosity and other terms switched off, assuming an adiabatic equation of state (Equation 19.25) with $\rho =$ constant. We then test that numerical acceleration on all 10^6 particles is within some tolerance of the analytic pressure gradient expected from (19.341), namely

$$-\frac{\nabla P_a}{\rho_a}(x,y,z) = -(\gamma-1)\nabla u_a(x,y,z), \tag{19.342}$$

where typically we use a tolerance of 10^{-3} in the relative error $E(x) = |x - x_{\rm exact}|/x_{\rm exact}$.

This procedure is repeated for the various derivatives of velocity, including the velocity divergence, curl and all components of the strain tensor. We also test the artificial viscosity terms this way — checking that they translate correctly according to (19.119) — as well as the magnetic field derivatives and time derivatives, magnetic forces, artificial resistivity terms, physical viscosity terms, time derivatives of the dust fraction and the time derivative of the velocity divergence required in the viscosity switch. We perform each of these tests also for the

Quantity	Code variable	Description	Re
$h_{\rm fact}$	`hfact`	Ratio of smoothing length to particle spacing	19
$1/\Omega_a$	`gradh`	Smoothing length gradient correction term	19
ϵ_h	`tolh`	Tolerance in smoothing length-density iterations	19
F_{ab}	`grkern`	Scalar part of kernel gradient	19
$\partial W_{ab}(h)/\partial h_a$	`dwdh`	Derivative of kernel with respect to smoothing length	19
K	`polyk`	Polytropic constant used for barotropic equations of state	19
$u_{\rm time}$	`utime`	Code time unit (cgs)	19
$u_{\rm mass}$	`umass`	Code mass unit (cgs)	19
$u_{\rm dist}$	`udist`	Code distance unit (cgs)	19
Eq. 19.24	`ipdv_heating`	Option to turn on/off PdV work term in energy equation	19
$\Lambda_{\rm shock}$	`ishock_heating`	Option to turn on/off shock heating in energy equation	19
$\sigma_{\rm decay}$	`avdecayconst`	decay constant in artificial viscosity switch	19
$\epsilon_{\rm v}$	`tolv`	Tolerance on velocity error during timestepping	19
$\Delta t_{\rm max}$	`dtmax`	Maximum time between output files	19
$R_{\rm acc}$	`accradius1`	accretion radius for central potential	19
M	`binarymassr`	binary mass ratio for fixed binary potential	19
$R_{\rm acc,2}$	`accradius2`	accretion radius for secondary in fixed binary potential	19
k_0	`RadiationPressure`	Radiation pressure in Poynting-Robertson drag	19
k_1	`Redshift`	Gravitational redshift in Poynting-Robertson drag	19
k_2	`TransverseDrag`	Transverse component of Poynting-Robertson drag	19
$E_{\rm m}$	`st_energy`	Energy in turbulent stirring pattern	19
$t_{\rm decay}$	`st_decay`	Decay time in turbulent stirring pattern	19
w	`st_solweight`	Solenoidal fraction in turbulent stirring pattern	19
$k_{\rm min}$	`st_stirmin`	Minimum wavenumber in turbulent stirring pattern	19
$k_{\rm max}$	`st_stirmax`	Minimum wavenumber in turbulent stirring pattern	19
$f_{\rm sol}$	`st_solweightnorm`	Solenoidal weighting in turbulent stirring pattern	19
ϵ	`h_soft_sinksink`	fixed gravitational softening length between sink particles	19
$\sigma_{\rm c}$	`psidecayfac`	dimensionless ratio of parabolic to hyperbolic $\nabla \cdot \boldsymbol{B}$ cleaning	19
$f_{\rm clean}$	`overcleanfac`	multiplier on maximum speed in divergence cleaning	19
$\rho_{\rm grain}$	`graindenscgs`	intrinsic dust density in cgs units	19
$f_{\rm d}$	`damp`	damping parameter for relaxing initial particle distributions	19

Table 8: Various runtime parameters in the code and their relation to this paper

case where derivatives are evaluated on only a subset of the particles, as occurs when individual particle timesteps are employed.

We additionally check that various conservation properties are maintained. For example, energy conservation for hydrodynamics requires (19.37) to be satisfied. Hence, we include a test that checks that this summation is zero to machine precision. Similar tests are performed for magnetic fields, and for subsets of the forces that balance subsets of the thermal energy derivatives (e.g. the artificial viscosity terms).

Unit tests of sink particles

Unit tests for sink particles include i) integrating a sink particle binary for 1000 orbits and checking that this conserves total energy to a relative error of 10^{-6} and linear and angular momentum to machine precision; ii) setting up a circumbinary disc of gas particles evolved for a few orbits to check that linear and angular momentum and energy are conserved; iii) checking that circular orbits are correct in the presence of sink-sink softening; iv) checking that accreting a gas particle onto a sink particle conserves linear and angular momentum, and that the resulting centre of mass position, velocity and acceleration are set correctly (c.f. Section 19.2.8); and v) checking that sink particle creation from a uniform sphere of gas particles (Section 19.2.8) succeeds and that the procedure conserves linear and angular momentum.

Unit tests of external forces

For external forces we implement general tests that can be applied to any implemented external potential: i) we check that the acceleration is the gradient of the potential by comparing a finite difference derivative of the potential, Φ, in each direction to the acceleration returned by the external force routine; and ii) we check that the routines to solve matrix equations for velocity dependent forces (e.g. Sections 19.2.4–19.2.4) agree with an iterative solution to the Leapfrog corrector step (Equation 19.69).

Unit tests of neighbour finding routines

In order to unit test the neighbour finding modules, (Section 19.2.1), we set up particles in a uniform random distribution with randomly assigned smoothing lengths. We then check that the neighbour list computed with the treecode agrees with a brute-force evaluation of actual neighbours. We also perform several sanity checks: i) that no dead or accreted particles appear in the neighbour list; ii) that all particles can be reached by traversing the tree or link list structure; iii) that nodes tagged as active contain at least one active particle and conversely that iv) inactive cells contain only inactive particles; v) that there is no double counting of neighbours in the neighbour lists and vi) that the cached and uncached neighbour lists are identical. We further check that particle neighbours are found correctly in pathological configurations, e.g. when all particles lie in a one dimensional line along each of the coordinate axes.

Unit tests of timestepping and periodic boundaries

As a simple unit test of both the timestepping and periodic boundaries we set up $50\times50\times50$ particles in a uniform periodic box with a constant velocity ($v_x = v_y = v_z = 1$) along the box diagonal. We then evolve this for 10 timesteps and check that the density on each particle remains constant and that the acceleration and other time derivatives remain zero to machine precision.

Unit tests of file read/write

We check that variables written to the header of the (binary) output files are successfully recovered by the corresponding read routine, and similarly for the particle arrays written to the body of the file. This quickly and easily picks up mistakes made in reading/writing variables from/to the output file.

Unit tests of kernel module

We ensure that calls to different kernel routines return the same answer, and check that gradients of the kernel and kernel softening functions returned by the routines are within some small tolerance of a finite difference evaluation of these gradients.

Unit tests of self-gravity routines

In order to unit test the treecode self-gravity computation (Section 19.2.12), we i) check that the Taylor series expansion of the force on each leaf node matches the exact force for a particle placed close to the node centre ii) that the Taylor series expansion of the force and potential around the distant node are within a small ($\sim 10^{-5}$) tolerance of the exact values; iii) that the combined expansion about both the local and distant nodes produces a force within a small tolerance of the exact value and finally iv) that the gravitational force computed on the tree for a uniform sphere of particles is within a small tolerance ($\sim 10^{-3}$) of the force computed by direct summation.

Unit tests of dust physics

We unit test the dust modules by first performing sanity checks of the dust-gas drag routine — namely that the transition between Stokes and Epstein drag is continuous and that the initialisation routine completes without error. We then perform a low-resolution DUSTYBOX test (Section 19.5.9), checking the solution matches the analytic solution as in Figure 19.46. For one-fluid dust we perform a low resolution version of the dust diffusion test (Section 19.5.9), checking against the solution at every timestep is within a small tolerance of the analytic solution. Dust mass, gas mass and energy conservation in the one-fluid dust derivatives are also checked automatically.

Unit tests of non-ideal MHD

We perform three unit tests on non-ideal MHD. The first is the wave damping test (see Section 19.5.7). This test also uses the super-timestepping algorithm to verify the diffusive (Eqn 19.202 but considering only Ohmic resistivity and ambipolar diffusion) and minimum stable timesteps (Eqn 19.72), but then evolves the system on the smallest of the two timesteps. The second test is the standing shock test (see Section 19.5.7). This test is also designed as a secondary check on boundary particles. Both tests used fixed coefficients for the non-ideal terms, and for speed, both tests are performed at much lower resolutions than presented in the paper. The third test self-consistently calculates the non-ideal coefficients for given gas properties.

Other unit tests

Various other unit tests are employed, including sanity checks of individual timestepping utility routines; checking that the barotropic equation of state is continuous; of the Coriolis and centrifugal force routines; checks of conservation in the generalised Newtonian potential (Section 19.2.4); of the routine to revise the tree; and of the fast inverse square root routines.

Sedov unit test

As a final "real" unit test the code performs a low-resolution (16^3) version of the Sedov blast wave test (Section 19.5.1). We check that energy and momentum are conserved at a precision appropriate to the timestepping algorithm (for global timesteps this means momentum conservation to machine precision and energy conservation to $\Delta E/E_0 < 5\times10^{-4}$; for individual timesteps we ensure linear momentum conservation to 2×10^{-4} and energy conservation to 2×10^{-2}.

Part VIII
Other Topics

20 Quantization of Gravity (???)

(I'll write what people tried to do and what are the problems with it? what are the effects that are expected to be explained???)

21 Some Proposed More General Theories of Gravity

Обсудим суть основных альтернативных теорий гравитации.
(!!!! see special notes about them for now. I'll write here them very not soon)

21.1 Brans-Dicke Theory (?)

(напишу потом, можно такое тоже встретить, пока не до этой теории.)

21.1.1 Overview

Ученые не оставили попытки сформулировать теорию гравитации, которая будет удовлетворять принципу Маха. Например, такая теория была предложена в 1961 году Карлом Брансом (Carl Brans) и Робертом Дикке (Robert Dicke). В этой модели материя влияет на метрику не только непосредственно (как в ОТО), но и через дополнительно введенное скалярное поле. Физически это поле проявляется в изменении гравитационной постоянной около массивных тел.

21.1.2 Theory

(?? write what is known about it)

21.1.3 Other about Brans-Dicke Theory (??)

(all other statements are here)

22 Multipole expansions of gravitational radiation by Thorne

Description of paper

Part One of this paper reviews the various scalar, vector, and tensor spherical harmonics used in the general relativity literature-including the Regge-Wheeler harmonics, the symmetric, trace-free ("STF") tensors of Sachs and Pirani, the Newman-Penrose spin-weighted harmonics, and the Mathews-Zerilli Clebsch-Gordan-coupled harmonics-which include "pure-orbital" harmonics and "pure-spin" harmonics. The relationships between the various harmonics are presented. Part One then turns attention to gravitational radiation. The concept of "local wave zone" is introduced to facilitate a clean separation of "wave generation" from "wave propagation." The generic radiation field in the local wave zone is decomposed into multipole components. The energy, linear momentum, and angular momentum in the waves are expressed as infinite sums of multipole contributions. Attention is then restricted to sources that admit a nonsingular, spacetime-covering de Donder coordinate system. (This excludes black holes.)

In such a coordinate system the multipole moments of the radiation field are expressed as volume integrals over the source. For slow-motion systems, these source integrals are re-expressed as infinite power series in $L/X \equiv$ (size of source)/(reduced wavelength of waves). The slow-motion source integrals are then specialized to systems with weak internal gravity to yield (i) the standard Newtonian formulas for the multipole moments, (ii) the post-Newtonian formulas of Epstein and Wagoner, and (iii) post-postNewtonian formulas.

Part Two of this paper derives a multipole-moment wave-generation formalism for slow-motion systems with arbitrarily strong internal gravity, including systems that cannot be covered by de Donder coordinates. In this formalism one calculates, by any means, the source's instantaneous, near-zone, external gravitational field as a solution of the time-independent Einstein field equations. One then reads off of this near-zone field the source's instantaneous multipole moments; and one plugs those timeevolving moments into the standard radiation formulae given in Part One of this paper.

As building blocks for this formalism, Part Two also does the following things: (1) In the linearized theory of gravity, for the vacuum exterior of an isolated system, it derives the general solution of the field equations (a result due to Sachs, Bergmann, and Pirani). (2) In full nonlinear general relativity, for the vacuum near-zone exterior of an isolated system, it derives the structure of the general solution of the Einstein field equations. That structure is expressed as a sum of products of multipole contributions. It also matches this near-zone field onto an outgoing-wave radiation field. (3) In full nonlinear general relativity, for the vacuum exterior of a stationary isolated system, (a) it presents a definition of multipole moments which meshes naturally with gravitational-wave theory; (b) it introduces the concept of "asymptotically Cartesian and mass centered" (ACMC) coordinate systems; and (c) it shows how to deduce the multipole moments of a source from the form of its metric in an ACMC coordinate system. As an example, the lowest few ($l \leq 3$) multipole moments of the Kerr metric are computed.

22.1 The General Multipole-Moment Formalism

(!!!! напишу там по математике нормальные заготовки для этого раздела, пока что проблема в том, что математика не на нужном уровне для этой статьи!!!)

22.1.1 Introduction and Summary

A. Motivation and relation to previous work

Spherical-harmonic multipole expansions are used throughout theoretical physics, astrophysics, and engineering-indeed, wherever one deals with fields, be they electromagnetic, gravitational, hydrodynamical, solidbody....

In linear theories, such as vacuum electromagneticwave theory, life is simple: the field's multipole components evolve independently of each other; there is no coupling. However, in nonlinear theories like general relativity, life is difficult: The multipole components are coupled together by the field equations; they mix with each other as they evolve.

When dealing with scalar fields (e.g., Newton's potential Φ), life is simple: one can use scalar spherical harmonics $Y_{lm}(\theta, \varphi)$. When dealing with vector fields (e.g., the vector potential A_j of electromagnetism), life is more difficult: one must use vector spherical har monics. And when dealing with tensor fields (e.g., the spatial metric g_{jk} of general relativity), life can be very difficult indeed: one must use tensor spherical harmonics.

General relativity embodies both difficulties: nonlinearity and tensorial fields. Perhaps that is why multipole expansions have been a less popular tool in general relativity than in most field theories.

Despite their infrequent use, general relativistic multipole expansions can be powerful-especially in studies of gravitational radiation. Indeed, their use dates back to Einstein's (1918) original paper on gravitational waves. Einstein used a linear approximation to general relativity ("linearized theory") to show that the waves emitted by slowly changing, weakly gravitating systems are predominantly quadrupolar. Not until 40 years later did anyone compute the other multipole contributions (Sachs and Bergmann, 1958; Pirani, 1964); and those computations were also restricted to weakly gravitating systems (linearized theory), for which nonlinear coupling can be totally ignored.

Since 1956 a number of researchers have used spherical-harmonic expansions for a variety of problems in general relativity, including problems where nonlinearity shows up; see Box 1 (page 302). Unfortunately, the vector and tensor harmonics used have not had any standard form. Each major "school" of relativity theory has invented its own notation and formalism, leaving us today with a legacy that includes Regge-Wheeler (1957) har monics; the Sachs (1961)-Pirani (1964) symmetric trace-free ("ST F") harmonics; the Mathews (1962)Zerilli (1970) Clebsch-Gordon-coupled harmonics of two types - "pure orbital" and "pure spin"; and the Newman-Penrose (1966) spin-weighted spherical harmonics. Moreover, the normalizations used in some of these formalisms are not terribly rational.

Since 1966 people have stopped inventing new formalisms, but there has been no attempt at consolidation. Consolidation is one of the main purposes of this review article. Section II presents each of the spherical-harmonic formalisms (with improved normalizations in some cases), and exhibits the relations between them. Many of those relations are very simple. Section II also discusses the relative advantages of the various formalisms for various types of problems. It then selects two sets of harmonics for use in the remainder of this article: STF and Clebsch-Gordan-coupled (pure-orbital plus pure-spin). The other harmonics (Regge-Wheeler and Newman-Penrose) are trivially expressible in terms of these.

Because the relativistic multipole-expansion literature abounds in a plethora of notations and formalisms, it is difficult to read. Box 1 presents a historical overview of that literature; and the remainder of this article (Secs. III-XII) consolidates the main results of that literature into two unified notations: STF and ClebschGordon-coupled. The two notations are carried along side by side; and the main results are quoted separately in each notation. This is because the notations are so different, and because each has strong advantages in special situations.

In addition to consolidating and reviewing the literature, this article derives a number of new results. Most importantly, it shows that a number of formulas that previously were derived only in linearized theory, or only for systems with Newtonian self-gravity, actually have much wider realms of validity; cf. Box 1.

This article's presentation is self-contained: the reader is told how to derive every equation presented. However, many pages of calculations are sometimes embodied in a phrase like "insert (4.14') into (4.18) and (4.19), and then integrate with the help of (2.5) and (2.6)." The reader should be warned that this article and its author do not aspire to the high level of mathematical rigor and elegance that characterize much of mathe matical relativity [e.g., Penrose's (1964, 1968) conformal treatment of null infinity, and the Bondi et al. (1962)-Sachs (1964)-Newman and Penrose (1968) treatment of the asymptotic properties of gravitational-wave fields.] Instead, the author seeks a level of rigor that is (i) high enough to give him confidence in the results derived, but also (ii) low enough to permit the treatment of real astrophysical systems in the real, nonas ymptotically flat universe. This philosophy shows up most strongly in Sec. III, where the concept of "local wave zone" is introduced to permit a separation of the theory of wave generation from wave propagation. That separation sacrifices the elegant rigor of the BondiSachs-Newman-Penrose approach in order to treat, e.g., sources embedded in galaxies, with neutron stars and black holes nearby and with a distant, inhomoge neous universe that may curve up into closure.

B. Outline of this article

In large measure this article is a compendium of useful formulas about spherical harmonics and gravitational waves. Box 2 (page 304) is an index designed to help the reader locate specific formulas. Box 2 can also be useful in getting an overview of this article: I suggest that the reader read each paragraph of the following outline, and then before going on to the next paragraph read the corresponding parts of Box 2 and of the Table of Contents.

Section I.C introduces the notation to be used in this article. It is crucial to read Sec. I. C carefully before proceeding on to any other part of the article. This is because the notation is somewhat special-e.g., tensor indices always raised and lowered with flat metric; comma used for flat-space covariant derivative; abbreviations S, STF, T, and TT for special parts of a tensor; capital script letters for STF tensors; and condensed tensor index notation $S_{B\mathrm{l}}$.

Section II is a compendium of formulas about scalar, vector, and tensor spherical harmonics and about their use to solve Laplace's equation and the flat-space wave equation. As discussed above, this section presents and compares the various types of spherical harmonics that abound in the relativity literature, and it selects for use in this article the "STF"' harmonics, and the "pure-orbital" and "pure-spin" harmonics. STF harmonics have not been used much elsewhere;

and at first sight they seem somewhat forbidding because of their weird notation. However, I have found them to be a very powerful tool; see, e.g., the calculations in Sec. VIII, and also my use of them (Thorne 1980) in a moment formalism for relativistic radiative transfer.

Section III lays the conceptual foundations for this article's approach to gravitational radiation. In particular, in Sec. III we define the concept of an "isolated source" of gravity waves, and argue that every source in the universe today is probably an isolated source. We then split up spacetime around such a source into "strong-field region," "weak-field near zone," "local wave zone," and "distant wave zone;" and we argue that it is adequate in discussing wave generation to ignore the distant wave zone, and with it to ignore in a cavalier fashion the delicacies of curved-space characteristics versus flat-space characteristics.

Section IV analyzes gravitational radiation in the local wave zone of an isolated source. No restrictions are placed on the strength of the source's internal gravity or on the speed of its internal motions. The gravitational-wave field $h^{\rm TT}_{jk}$ is expanded in tensor spherical harmonics, with multipole-moment coefficients. Two families of multipole moments are required: "mass moments" (denoted I^{lm} or $\mathcal{G}_{A_l}$) and "current moments" (denoted S^{lm} or S_{A_l}). The energy, linear momentum, and angular momentum carried by the waves are expressed as sums of multipole contributions. The multipole for mulas of this section are useful in a wide variety of gravitational-wave calculations.

Section V restricts attention to sources that admit a nonsingular, spacetime-covering de Donder coordinate system. This probably includes all realistic astrophysical sources except black holes. Section V uses a Green's function from Sec. III. G to express the multipole moments I^{lm}, S^{lm} (or g_{A_l}, S_{A_l}) of the radiation field as integrals over the source's effective stress-energy tensor $\tau_{\alpha\beta}$. These source integrals are valid for sources with strong internal gravity and fast internal motions; but they are probably not useful in the generic case, because the source's effective stress-energy $\tau_{\alpha\beta}$ includes contributions from the gravitational-wave field $h^{\rm TT}_{jk}$. In the special case of weak-gravity slow-motion sources, $h^{\rm TT}_{jk}$ can be removed from $\tau_{\alpha\beta}$, and the source integrals become quite useful. One then can describe the source's internal structure and evolution by Newtonian theory, or post-Newtonian theory, or post-post-Newtonian theory; and the source integrals involve only quantities peculiar to those theories. For example, in the Newtonian case the integrals involve only the mass density and angular momentum density and, in fact, $_{A_l}$ is the STF part of the l th moment of the mass distribution; $\mathcal{S}_{A_l}$ is the STF part of the l th moment of the angular momentum distribution.

Part Two of this article (Secs. VII-XII) has two purposes: First, it studies the multipole structure of the full exterior gravitational field of a source (by contrast with previous sections, which studied only the radiation field). For slow-motion sources, this multipole study extends into the "near zone" and examines the nonlinear superposition of the multipoles. This study is the foundation for the second purpose of Part Two: to derive a new multipole-moment formalism for calculating the generation of gravitational waves. This formalism is valid for slow-motion sources with arbitrarily strong internal gravity (e.g., for slowly rotating, deformed neutron stars).

Section VII describes the historical motivation for the new slow-motion wave-generation formalism.

Section XII (end of the article-intervening sections will be described below) presents the details of the new slow-motion wave-generation formalism. In this formalism one calculates, by any means, the source's instantaneous near-zone external gravitational field as a solution of the time-independent E instein field equations. One then reads off this near-zone field the source's instantaneous multipole moments; and one plugs those time-evolving moments into the radiation formulas of Sec. IV. The intervening sections, which lay the foundation for this formalism, are the following:

Section VIII restricts attention to "linearized theory" (the linear approximation to general relativity). Using STF techniques it derives a multipole expansion for the general outgoing-wave solution to the vacuum field equations of linearized theory (external gravitational field of an arbitrary source).

Section IX turns attention to slow-motion stronggravity sources in the full general theory of relativity. The vacuum exterior gravitational field is analyzed using a de Donder coordinate system (Sec. IX.A.). The analysis is based on a "nonlinearity expansion" of the gravitational field (Sec. IX.B) -i.e., an expansion in powers of the gravitation constant G? for which the first-order contribution is the linearized solution of Sec. VIII (see Sec. IX.C). The near-zone gravitational field is studied in Secs. IX.D, IX.E, IX.F, and IX.G using a simultaneous ex-

pansion in powers of G, in (size of source)/(distance from source) $\equiv L/r$, in (distance from source)/(wavelength of waves) $\equiv L/\lambda$, and in spherical harmonics. This multiparameter expansion gives insight into the general nonlinear structure of the nearzone field. It turns out that the details of the near-zone field are fully determined by two sets of multipole moments: "mass moments" and "current moments." In Sec. IX.H the near-zone field is matched onto the general radiation-zone gravitational-wave field (Sec.IV). This matching shows that, aside from negligible corrections, the multipole moments $g_{A_l}, \mathcal{S}_{A_l}$ that characterize the radiation field are identical to those that characterize the near-zone field.

Section X specializes the near-zone results of Sec.IX to the case of a stationary (time-independent) source. The result is a multipole expansion, in de Donder coordinates, for the general, stationary, asymptotically flat, vacuum solution of the Einstein field equations. The resulting stationary multipole moments are very special: If the source starts to evolve slowly in time and radiate, they become the moments that characterize the radiation field. It is not known whether previous definitions of stationary multipole moments (e.g., Geroch, 1970; Hansen, 1974) have this property.

If one is given a stationary, vacuum solution of the Einstein field equations (e.g., the Kerr metric), how can one compute its multipole moments? One way is to transform to a de Donder coordinate system and then read the moments off the metric coefficients. However, in typical cases (e.g., the Kerr metric) this is prohibitively difficult. Section XI introduces a new, very broad class of coordinate systems in which one can easily read the moments off the metric coefficients. These coordinates are called "asymptotically Cartesian and mass centered to order N " or "ACMC $-N$." As an example, in Sec. XI.D the Kerr metric is transformed to an ACMC-2 coordinate system, and its monopole, dipole, quadrupole, and octupole moments are then read off the form of the metric.

This completes our outline of this article.

Notation

Throughout this article we use geometrized units ($c = G = 1$); and we use the mathematical notation of flatspace tensor analysis unless otherwise stated. The coordinates $(t, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ are treated in our notation as though they were Cartesian (Minkowskii) coordinates in flat space, and (t, r, θ, ϕ) is the corresponding spherical coordinate system

$$x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta.$$

Greek indices run from 0 to 3 and Latin from 1 to 3. We always use orthonormal bases - either

or

$$\mathbf{e}_0 = \frac{\partial}{\partial x^0}, \quad \mathbf{e}_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{e}_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \mathbf{e}_z = \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\mathbf{e}_0 = \frac{\partial}{\partial x^0}, \mathbf{e}_r = \frac{\partial}{\partial r}, \mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}, \mathbf{e}_\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} \cdot \text{(1.2 b)}$$

Indices are raised and lowered using the Minkowskii metric, which in either basis (1.2a) or (1.2b) has components

$$\eta_{00} = -1, \quad \eta_{jk} = \delta_{jk} = (\text{ Kronecker delta }).$$

Repeated Latin down indices are to be summed as though an $\eta^{jk} = \delta_{jk}$ were present:

$$A_jB_j = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = A_rB_r + A_\theta B_\theta + A_\phi B_\phi.$$

We shall try, wherever possible, to use down indices for components of vectors and tensors; up indices for everything else. We shall represent the radial vector with length r by $\mathbf{x}$, the unit radial vector by $\mathbf{n}$, and their components by x_j, n_j,

$$\mathbf{x} \equiv r\mathbf{e}_r; x_x = x, x_y = y, x_z = z;$$
$$x_r = r, x_\theta = 0, x_\phi = 0;$$
$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_r; n_j = x_j/r.$$

Often we shall encounter a sequence of many (say l) indices on a tensor. For ease of notation we shall abbreviate it as follows:

$$S_{A_l} \equiv S_{a_1 a_2} \cdots a_l.$$

Similarly we shall abbreviate the tensor product of l radial vectors by

$$N_{B_l} \equiv n_{b_1} n_{b_2} n_{b_l}, X_{B_l} \equiv r^l N_{B_l} \equiv x_{b_1} x_{b_2} x_{b_l}.$$

In this abbreviated notation,

$$S_{A_l} N_{B_l} = S_{a_1 a_2 \cdots a_l} n_{b_1} n_{b_2} n_{b_l}.$$

Thus, capital subscript letters denote sequences of lower subscript indices, and the number of indices in a sequence is denoted by a subscript to the capital subscript.

We shall denote the symmetric part of a tensor either by parentheses on its indices

$$\begin{aligned} S_{ab(cde)} \equiv \frac{1}{6} (&S_{abcde} + S_{abdec} + S_{abecd} \\ &+ S_{abdce} + S_{abedc} + S_{abced})', \end{aligned}$$

or, when all of the free indices are being symmetrized, by a superscript " S,"

$$[T_{abcde} n_a n_b]^{\mathrm{S}} \equiv T_{ab(\ \mathrm{cde}\ )} n_a n_b.$$

The fully symmetric and trace-free part of a tensor will be denoted by "ST F,"

$$\begin{aligned} [T_{abc}]^{\mathrm{STF}} \equiv &T_{(abc)} - \frac{1}{5}\delta_{ab} T_{(jjc)} \\ &- \frac{1}{5}\delta_{ac} T_{(jbj)} - \frac{1}{5}\delta_{bc} T_{(ajj)} \end{aligned}$$

the transverse part will be denoted by " T,"

$$\begin{aligned} &[T_{abc}]^{\mathrm{T}} \equiv P_{ai} P_{bj} P_{ck} T_{ijk}, \\ &P_{jk} \equiv \delta_{jk} - n_j n_k \\ &= (\text{ “transverse projection tensor” }); \end{aligned}$$

and the transverse traceless part will be denoted by "TT,"

$$[T_{ab}]^{\mathrm{TT}} = P_{aj} P_{bk} T_{jk} - \frac{1}{2} P_{ab} (P_{jk} T_{kj}).$$

We shall reserve capital script letters to denote tensors that are fully symmetric and trace-free, and that may be functions t and r but are independent (in Cartesian coordinates) of θ and ϕ,

$$\mathbb{B}_{A_l} \equiv \mathbb{B}_{a_1 \cdots a_l} = [\mathbb{B}_{a_1 \cdots a_l}]^{\mathrm{STF}}.$$

Commas will denote partial derivatives with respect to (t, x, y, z) or flat-space covariant derivatives along the orthonormal basis vectors $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$; ∂ will always denote partial derivatives

$$\begin{aligned} &A_{x,y} = \partial_y A_x; \\ &A_{r,\theta} = r^{-1} \partial_\theta A_r - \Gamma^j_{r\theta} A_j = r^{-1} \partial_\theta A_r - r^{-1} A_\theta. \end{aligned}$$

That B_{A_l} is independent, of θ, ϕ means (see above)

$$Q_{A_l,\theta} = Q_{A_l,\Phi} = 0.$$

Note that the gradient of the unit radial vector has components

$$x_{j,k} = \delta_{jk};$$

and this is true in the orthonormal spherical basis as well as in the Cartesian basis.

For any integer l we shall denote

$$l! \equiv l(l-1)\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot 1,$$
$$l!! \equiv l(l-2)(l-4)\cdots(2 \text{ or } 1).$$

22.1.2 Spherical Harmonics: Scalar, Vector, and Tensor

In this section we state, without proof, a number of formulas that are useful in tensorial multipole analyses. The proofs are straightforward, if tedious.

A. Symmetric, trace-free tensors

Following in the footsteps of Sachs (1961) and Pirani (1964) we shall make extensive use of symmetric tracefree tensors ("STF" tensors). One can calculate the STF part of a tensor which is not ST F by two steps: (i) Construct the symmetric part:

$$S_{k_1\cdots k_l} \equiv [A_{k_1\cdots k_l}]^{\rm S} = \frac{1}{l!}\sum_{\pi} A_{k_{\pi(1)}\cdots k_{\pi(l)}}.$$

Here the summation goes over all $l!$ permutations π of $1,,l$. (ii) Remove all traces [cf. Eq. (2.44) of Pirani (1964)]:

$[A_{k_1\circ 0 k_l}]^{\rm STF} = \sum_{n=0}^{[l/2]} a^n \delta_{(k_1k_2}\cdots\delta_{k_{2n-1}k_{2n}} S_{k_{2n+1}\cdots k_l)}{}^{[j_1j_1\cdots\cdots j_nj_n}$,
$a^n \equiv (-1)^n \frac{l!(2l-2n-1)!!}{(l-2n)!(2l-1)!!(2n)!!}$.
Here $[l/2]$ means the largest integer less than or equal to $l/2$.

B. Integrals over a sphere

The following integrals are useful when doing multipole calculations:

$$\frac{1}{4\pi}\int N_{A_{2l+1}} d\Omega = 0,$$
$$\frac{1}{4\pi}\int N_{A_{2l}} d\Omega = \left(\frac{1}{2l+1}\right)\delta_{(a_1a_2}\cdots\delta_{a_{2l-1}a_{2l})}.$$

[Recall definition (1.6b) of N_{A_l}.] The completely symmetrized product of Kronecker deltas has the form

$\delta_{(a_1a_2}\cdots\delta_{a_{2l-1}a_{2l})} =$

$$= \frac{1}{(2l-1)!!}\sum_{j_2,j_4,\cdots,j_{2k}} \delta_{a_1a_{j_2}}\delta_{a_{j_3}a_j}\cdots\delta_{a_{j_{2l-1}}a_{j_{2l}}},$$

where
j_2 is summed from 2 to $2l$,
j_3 is the smallest integer not equal to 1 or j_2, j_4 is summed over all integers, 2 to $2l$, not equal to j_2 or j_3
j_5 is the smallest integer not equal to 1 or j_2 or j_3 or j_4,
From Eqs. (2.3) and (2.4) it follows that, for any two STF tensors Q and B,

$$\frac{1}{4\pi}\int \left(@_{A_p}N_{A_p}\right)\left(\Theta_{BB_q}N_{B_q}\right)d\Omega = 0$$

if Q and Q have different rank, $p \neq q$
$= \frac{p!}{(2p+1)!!}\mathbb{Q}_{A_p}\mathbb{B}_{A_p}$ if $p = q$;
$\frac{1}{4\pi}\int n_i\left(Q_{A_p}N_{A_p}\right)\left(Q_{B_q}N_{B_q}\right)d\Omega$
$= 0$ unless Q and Q differ in rank by 1
$= \frac{p!}{(2p+1)!!}Q_{iA_{p-1}}Q_{A_{p-1}}$ if $q = p-1$.

Scalar spherical harmonics

The usual representation of scalar spherical harmonics is in terms of complex functions of θ and ϕ,

$$\begin{aligned} Y^{lm} &= C^{lm} e^{im\phi} P^{lm}(\cos\theta) && \text{for } m \geqslant 0, \\ &= C^{lm} \left(e^{i\phi}\sin\theta\right)^m \sum_{j=0}^{[(l-m)/2]} a^{lmj} (\cos\theta)^{l-m-2j} && \text{for } m \geqslant 0, \\ &= (-1)^m Y^{llml*} && \text{for } m < 0. \end{aligned}$$

Here $*$ denotes complex conjugation; $[(l-m)/2]$ means "the largest integer less than or equal to $(l-m)/2$ "; and

$$C^{lm} \equiv (-1)^m \left(\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right)^{1/2},$$
$$a^{lmj} \equiv \frac{(-1)^j}{2lj!(l-j)!}\frac{(2l-2j)!}{(l-m-2j)!}.$$

These scalar harmonics are orthonormal

$$\int Y^{lm} Y^{l'm'} * d\Omega = \delta_{ll}, \delta_{mm'};$$

they have parity $\pi = (-1)^l$ ("electric-type" parity); and under complex conjugation they transform as

$$Y^{lm*} = (-1)^m Y^{l-m}.$$

The set of all symmetric trace-free tensors of rank l ("STF-l tensors") generates an irreducible representation of the rotation group, of weight l [Gel'fand et al. (1963), Courant and Hilbert (1953)]. Hence, there exists a one-to-one mapping between them and the spherical harmonics of order l; see Pirani (1964), pp. 289-290. To exhibit that mapping one expresses the Cartesian components of the unit radial vector $\mathbf{n}$ in the form

$$n_x + in_y = e^{i\phi}\sin\theta, \quad n_z = \cos\theta;$$

and one then inserts these expressions into Eq. (2.7), obtaining

$$Y^{lm}(\theta,\phi) = Y^{lm}_{K_l} N_{K_l}.$$

Here $Y^{lm}_{K_l}$ is the following (location-independent) STF-l tensor:

$$Y^{lm}_{k_1\cdots k_l} \equiv C^{lm} \sum_{j=0}^{[(l-m)/2]} a^{lmj} \left(\delta^1_{(k_1} + i\delta^2_{(k_1}\right)\cdots\left(\delta^1_{k_m} + i\delta^2_{k_m}\right) \times \delta^3_{k_{m+1}}\cdots\delta^3_{k_{l-2j}} \left(\delta^{a_1}_{k_{l-2j+1}}\delta^{a_1}_{k_{l-2j+2}}\right)\cdots\left(\delta^{a_j}_{k_{l-1}}\delta^{a_j}_{k_l}\right)\Big)$$

$Y^{lm}_{k_1\cdots k_l} = (-1)^m \left(Y^{l|m!}_{k_1\cdots k_l}\right) *$ for $m < 0$, for $m \geqslant 0$.

where $\delta^{a_i}_{k_s}$ is the Kronecker delta.

The tensors Y^{lm}_K with $-l \leqslant m \leqslant +l$ serve two roles: first, they generate the spherical harmonics of order l [Eq. (2.11)]; second, they form a basis for the $(2l+1)$ dimensional vector space of STF-l tensors; i.e., any STF-l tensor $\mathfrak{F}$ can be expanded as

$$\mathcal{F}_{K_l} = \sum_{m=-l}^{1} F^{lm} \mathcal{Y}^{lm}_{K_l}$$

The tensor components $\mathcal{F}_{K_l}$ are real if and only if $F^{l-m} = (-1)^m F^{\imath m*}$. Expansion (2.13a) can be inverted as follows:

$$F^{lm} = \int \sum_{m'=-l}^{l} \left(F^{lm'} Y^{lm'} \right) Y^{lm*} d\Omega = \int \mathfrak{F}_{K_l} N_{K_l} Y^{lm*} d\Omega$$
$$= 4\pi \frac{l!}{(2l+1)!!} \mathfrak{F}_{K_l} \mathcal{Y}^{lm*}_{K_l}.$$

Here the integral is over a sphere surrounding the origin, and the integral was performed with the help of Eqs. (2.11) and (2.5).

In practical calculations one can use spherical harmonics and STF-l tensors interchangeably: Consider any sphere centered on the coordinate origin, and on that sphere consider any scalar function $f(\theta, \phi)$. One can expand $f(\theta, \phi)$ in spherical harmonics with complexnumber expansion coefficients

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} F^{lm} Y^{lm}(\theta, \phi);$$

alternatively, one can expand it in powers of the unit radial vector n, with coefficients that are STF-l tensors

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \mathfrak{F}_{K_l} N_{K_l}.$$

The expansion coefficients of the two schemes are related by Eqs. (2.13a) and (2.13b).

Vector spherical harmonics

Several different conventions for vector spherical harmonics exist in the literature. That of Rose [(1955), p. 22], Edmonds [(1957), p. 82], and Mathews (1962) is the most closely tied to the rotation group. It is obtained by coupling scalar harmonics of order l' to the basis vectors

$$\boldsymbol{\xi}^0 \equiv \mathbf{e}_z, \quad \boldsymbol{\xi}^{\pm 1} \equiv \mp \left(\mathbf{e}_x \pm i \mathbf{e}_y \right) / \sqrt{2}$$

(which transform under an irreducible representation of order 1), thereby obtaining harmonics $\mathrm{Y}^{l',lm}$ that transform under a representation of order $l = l' \pm (1 \text{ or } 0)$,

$$\mathbf{Y}^{l',lm}(\theta, \phi) = \sum_{m'=-l'}^{l'} \sum_{m''=-1}^{1} (1 l' m'' m' | lm) \, \xi^{m''} Y^{l'm'},$$
$$l' = l \pm (1 \text{ or } 0).$$

Here $(l'' l' m'' m' | lm)$ are Wigner (Clebsch-Gordan) coefficients. (Edmonds and Mathews use the notation $Y_{ll'm}$; Rose uses $\mathbf{T}^m_{ll'}$) We shall call $\mathbf{Y}^{l',lm}$ and the corresponding tensor harmonics (Sec. II.E) "pure-orbital harmonics" because they are eigenfunctions of the orbital angular momentum operator L^2 [Eq. (2.42b)]. For fixed l' and l they transform among each other according to an irreducible representation of order l. These harmonics are orthonormal

$$\int \mathrm{Y}^{l,LM} \cdot \mathbf{Y}^{l',L'M'*} d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{LL^\circ}, \delta_{MM'};$$

$\mathbf{Y}^{l',lm}$ has parity $\pi = (-1)^{l'+1}$ [which means that, because the Cartesian basis vectors $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ reverse direction under parity inversions, the Cartesian components satisfy $Y^{l'}_j, lm(-\mathbf{n}) = -(-1)^{l'+1} Y^{l'}_j, lm(\mathbf{n})\big]$; and under complex conjugation it transforms as

$$\mathbf{Y}^{l',lm*} = (-1)^{l'+l+m+1} \mathrm{Y}^{l',l-m}.$$

These pure-orbital vector harmonics are nicely re- lated to solutions of Laplace's equation and the vector wave equation (Secs. II.F and II.G). However, they are not optimally designed for describing radiation, in the radiation zone, because $\mathrm{Y}^{l \neq 1,lm}$ is neither purely radial nor

purely transverse. The following "pure-spin vector harmonics" are better suited for describing radiation:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Y}^{E,lm} &= (2l+1)^{-1/2}\left[(l+1)^{1/2}\mathbf{Y}^{l-1,lm} + l^{1/2}\mathrm{Y}^{l+1,lm}\right] \\
&= [l(l+1)]^{-1/2} r\nabla Y^{lm} = -\mathrm{n}\times\mathrm{Y}^{B,lm}, \\
\mathbf{Y}^{B,lm} &= i\mathbf{Y}^{l,lm} = i[l(l+1)]^{-1/2}\ \mathrm{L}Y^{lm} = \mathbf{n}\times\mathrm{Y}^{E,lm}, \\
\mathrm{Y}^{R,lm} &= (2l+1)^{-1/2}\left[l^{1/2}\mathbf{Y}^{l-1,lm} - (l+1)^{1/2}\mathbf{Y}^{l+1,lm}\right] \\
&= \mathrm{n}Y^{lm}.
\end{aligned}$$

Here ∇ is the gradient operator of Euclidean threespace, and L is the angular momentum operator

$$\mathbf{L} \equiv (1/i)\mathbf{x}\times\boldsymbol{\nabla}.$$

$\mathrm{Y}^{E,lm}$ and $\mathrm{Y}^{B,lm}$ are purely transverse; $\mathrm{Y}^{R,lm}$ is purely radial; $\mathrm{Y}^{E,lm}$ and $\mathrm{Y}^{R,lm}$ have "electric-type parity" $\pi = (-1)^l$; $\mathrm{Y}^{B,lm}$ has "magnetic-type parity", $\pi = (-1)^{l+1}$; these Y's are orthonormal

$$\int \mathbf{Y}^{J,lm}\cdot\mathbf{Y}^{J'}, l'm' * d\Omega = \delta_{JJ}, \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

and their complex conjugates are

$$\mathrm{Y}^{J,lm*} = (-1)^m\mathbf{Y}^{J,l-m}.$$

[The factor i was included in Eq. (2.18b) in order to produce this complex conjugate relationship.] We call these harmonics "pure spin" because they enter in pure form into the description of the polarization of purespin zero-rest-mass vector fields ($\mathbf{Y}^{E,lm}$ and $\mathbf{Y}^{B}, lm$ for transverse spin-one-i.e., electromagnetism; $\mathbf{Y}^{R,lm}$ for longitudinal spin-zero). These pure-spin vector harmonics are intimately related to the Regge-Wheeler (1957) vector harmonics:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}^{E,lm} &= [l(l+1)]^{-1/2}\Psi^{lm}, \\
\mathbf{Y}^{B,lm} &= [l(l+1)]^{-1/2}\Phi^{lm}, \\
\mathbf{Y}^{R,lm} &= \mathbf{n}Y^{lm};
\end{aligned}$$

and also to the Newman-Penrose (1966) spin-weighted spherical harmonics ${}_sY^{lm}$ [for details of which see Goldberg et al. (1967)]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}^{E,lm} &= 2^{-1/2}\left({}_{-1}Y^{lm}\ \mathrm{m} - {}_1Y^{lm}\ \mathrm{m}^*\right) \\
\mathbf{Y}^{B,lm} &= -2^{-1/2}i\left({}_{-1}Y^{lm}\mathbf{m} + {}_1Y^{lm}\mathbf{m}^*\right), \\
\mathbf{Y}^{R,lm} &= {}_0Y^{lm}\mathbf{n}, \\
\mathrm{m} &\equiv 2^{-1/2}\left(\mathbf{e}_\theta + i\mathrm{e}_\phi\right), \quad \mathrm{m}^* = 2^{-1/2}\left(\mathrm{e}_\theta - i\mathbf{e}_\phi\right).
\end{aligned}$$

The STF version of vector spherical harmonics can be obtained by inserting expression (2.11) for Y^{lm} into the second expression in each of Eqs. (2.18a – 2.18c) for $\mathbf{Y}^{E,lm}$, $\mathbf{Y}^{B,lm}$, and $\mathbf{Y}^{R,lm}$,

$$\begin{aligned}
Y_j^{E,lm} &= [l/(l+1)]^{1/2}\left[\mathcal{Y}_{jA}^{lm}N_{l_1}N_{l-1}\right]^T \\
&\qquad \left[\pi = (-1)^l\right], \\
Y_j^{B,lm} &= [l/(l+1)]^{1/2}\epsilon_{jpq}n_pY_{qA}^{lm}N_{l-1}N_{A_{l-1}} \\
&\qquad \left[\pi = (-1)^{l+1}\right], \\
Y_j^{R,lm} &= n_jY_{A_l}^{lm}N_{A_l} \quad \left[\pi = (-1)^l\right].
\end{aligned}$$

Here ϵ_{jpq} is the Levi-Civita tensor (antisymmetric symbol), and the superscript T means "transverse part of" [Eq. (1.9)]. By comparing with Eqs. (2.18) one can derive the relationship between the pure-orbital harmonics and the STF harmonics

$$\begin{aligned} Y_j^{l-1,lm} =& [l/(2l+1)]^{1/2} Y_{jA}^{lm} N_{A^{l-1}}, \\ Y_j^{l,lm} =& -i[l/(l+1)]^{1/2} \epsilon_{jpq} n_p Y_{qA_{l-1}^{lm}}^{lm} N_{A_{l-1}}, \\ Y_j^{l+1,lm} =& -[(2l+1)/(l+1)]^{1/2} \\ & \times \left\{ n_j Y_{A_l}^{lm} N_{A_l} - [l/(2l+1)] Y_{jA_{l-1}}^{lm} N_{A_{l-1}} \right\}. \end{aligned}$$

An arbitrary vector field $\mathbf{V}(\theta, \phi)$ can be expanded in terms of pure-orbital harmonics or pure-spin harmonics or Regge-Wheeler harmonics or spin-weighted harmonics; and one can read off the relationships between the expansion coefficients by examining the relationships between the harmonics themselves. For example, the pure-spin and STF expansions have the forms

$$\begin{aligned} V_j &= \sum_{l,m} \left(E^{lm} Y_j^{E,lm} + B^{lm} Y_j^{B,lm} + R^{lm} Y_j^{R,lm} \right), \\ V_j &= \sum_l \left(\left[\mathcal{E}_{jA_{l-1}} N_{A_{l-1}} \right]^T + \epsilon_{jpq} n_p \otimes_{qA_{l-1}} N_{A_{l-1}} + n_j \mathbb{R}_{A_l} N_{A_l} \right) \end{aligned}$$

and by comparing with Eqs. (2.23) one deduces that

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{A_l} &= \left(\frac{l}{l+1} \right)^{1/2} \sum_m E^{lm} y_{A_l}^{lm}, \\ Q_{A_l} &= \left(\frac{l}{l+1} \right)^{1/2} \sum_m B^{lm} y_{A_l}^{lm}, \\ Q_{A_l} &= \sum_m R^{lm} \mathcal{Y}_{A_l}^{lm}. \end{aligned}$$

One can invert these relations using Eqs. (2.13).

In calculations with STF spherical harmonics the following identities are useful:

$$\begin{aligned} & y_{A_l}^{lm*} y_A^{lm'} = \frac{1}{4\pi} \frac{(2l+1)!!}{l!} \delta_{m'm}, \\ & \mathcal{Y}_{A_l}^{lm*} \mathcal{Y}_{jA_l}^{(l+1)(\mu+m)} = \frac{1}{4\pi} \frac{(2l+3)!!}{(l+1)!} \left(\frac{l+1}{2l+3} \right)^{1/2} (1l\mu m | l+1 \mu+m) \xi_j^\mu \\ & \text{if } \mu = 0 \text{ or } \pm 1 \\ & = 0 \text{ if } \mu \neq 0 \text{ or } \pm 1, \\ & \epsilon_{jpq} \mathcal{Y}_{pA}^{lm*} *_{l-1} \mathcal{Y}_{qA}^{l(m-1)} = \frac{i}{4\pi} \frac{(2l+1)!!}{l!2l} [2(l+m)(l-m+1)]^{1/2} \xi_j^{-1}, \\ & \epsilon_{jpq} Y_{pA}^{lm*} \mathcal{Y}_{q-1}^{lm} = \frac{i}{4\pi} \frac{(2l+1)!!}{l!} \frac{m}{l} \xi_j^0, \\ & \epsilon_{jpq} \mathcal{Y}_{pA}^{lm*} \mathcal{Y}_{q-A}^{l(m+1)} = \frac{-i}{4\pi} \frac{(2l+1)!!}{l!2l} [2(l-m)(l+m+1)]^{1/2} \xi_j^1, \\ & \epsilon_{jpq} Y_{pA}^{lm*} Y_{l-1}^{l(m+\mu)} = 0 \text{ if } \mu \neq 0 \text{ or } \pm 1. \end{aligned}$$

Equation (2.26a) can be derived by combining the orthonormality relation for scalar harmonics with Eqs.

(2.11) and (2.5); Eq. (2.26b) follows from Eqs. (2.6), (2.23c), (2.18c), (2.11), (2.16), and orthonormality for scalar harmonics; Eqs. (2.26c)-(2.26f) follow from Eqs. (2.5), (2.24a), (2.16), (2.15), orthonormality for scalar harmonics, and algebraic expressions for the relevant Clebsch-Gordan coefficients.

Tensor spherical harmonics

Mathews (1962) has constructed a set of "pure-orbital" tensor spherical harmonics which, like the $\mathrm{Y}^{l',lm}$, are closely tied to the rotation group. He first couples the basis vectors ξ^m to obtain five symmetric basis tensors t^m, which transform among each other under an irreducible representation of the rotation group of order 2,

$$\mathbf{t}^m = \sum_{m'=-1}^{1} \sum_{m''=-1}^{1} (11m'm''|2m)\, \xi^{m'} \otimes \xi^{m''},$$

and a single basis tensor-the unit tensor (equal to $3^{-1/2}$ times the Euclidean metric) - which gives a representation of order zero

$$3^{-1/2}\delta = -\sum_{m'=-1}^{1} \sum_{m''=-1}^{1} (11m'm''|00)\, \xi^{m'} \otimes \xi^{m''}.$$

The analogous tensors that give a representation of order 1 are antisymmetric, and are thus of no interest for gravitational-wave theory. See Zerilli (1970) for details. In terms of Cartesian basis vectors $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ these symmetric basis tensors are

$$\begin{aligned}
\mathrm{t}^{\pm 2} &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}_x \otimes \mathrm{e}_x - \mathrm{e}_y \otimes \mathrm{e}_y\right) \pm \frac{1}{2} i \left(\mathrm{e}_x \otimes \mathrm{e}_y + \mathrm{e}_y \otimes \mathrm{e}_x\right), \\
\mathrm{t}^{\pm 1} &= \mp \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}_x \otimes \mathrm{e}_z + \mathrm{e}_z \otimes \mathrm{e}_x\right) - \frac{1}{2} i \left(\mathrm{e}_y \otimes \mathrm{e}_z + \mathrm{e}_z \otimes \mathrm{e}_y\right) \\
\mathrm{t}^{0} &= 6^{-1/2}\left(-\mathrm{e}_x \otimes \mathrm{e}_x - \mathrm{e}_y \otimes \mathrm{e}_y + 2\mathrm{e}_z \otimes \mathrm{e}_z\right), \\
3^{-1/2}\delta &= 3^{-1/2}\left(\mathrm{e}_x \otimes \mathrm{e}_x + \mathrm{e}_y \otimes \mathrm{e}_y + \mathrm{e}_z \otimes \mathrm{e}_z\right)
\end{aligned}$$

Mathews then couples these basis tensors to the scalar spherical harmonics to obtain the six basis harmonics

$$\begin{aligned}
&\mathbf{T}^{2l',lm} = \sum_{m'=-l'}^{l'} \sum_{m''=-2}^{2} (l'2m'm''|lm)\, Y^{l'm'} \mathbf{t}^{m''}, \\
&l' = l \pm (0, 1, \text{ or } 2); \\
&\mathbf{T}^{0l,lm} = -Y^{lm} 3^{-1/2} \delta.
\end{aligned}$$

[Mathews (1962) uses the notation $T_{ll'm}$ for $\mathbf{T}^{2l',lm}$; and actually, he never introduces or uses $\mathrm{T}^{0l,lm}$; Zerilli (1970) defines the analogous, antisymmetric, $T^{1l'}, lm$, and he uses the notation $T^{(\lambda)}_{ll'm}$ for our $T^{\lambda l',lm}$.] The pureorbital harmonics $\mathrm{T}^{\lambda l',lm}$ with fixed λ, l', and l transform among each other under rotations according to an irreducible representation of order l. These harmonics are orthornormal

$$\int T^{\lambda l,LM}_{jk} T^{\lambda' l',L'M'*}_{jk} d\Omega = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{ll'}\delta_{LL'}\delta_{MM'}$$

they have parity $\pi = (-1)^{l'}$; and under complex conjugation they transform as

$$\mathbf{T}^{\lambda l',lm*} = (-1)^{l'+l+m} \mathbf{T}^{\lambda l',l-m} \text{ for } \lambda = 0 \text{ or } 2.$$

These pure-orbital tensor harmonics are nicely related to solutions of Laplace's equation (Sec. II.F) and the wave equation (Sec. II.G). However, they are not optimally designed for describing radiation in the radiation zone because, under local rotations about the radial vector, their tensor components (for fixed λ, l', l, m) do not transform as the components of the polarization tensor of a pure spin state. The following "pure-spin tensor harmonics" introduced by Zerilli (1970) [and for spin 2 by Mathews (1962)], do behave like pure-spin states {note Zerilli's sign error on the second term of Eq. (2.30a) -his Eq. (6c); also note that the fourth line of his Eq. (6a) should read $\times[J(J-1)]^{1/2}[(2J-1)(2J+1)]^{-1/2} T^{(2)}_{J,J-2,M}$}:

$$\mathbf{T}^{L0,lm} = \left(\frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)}\right)^{1/2} \mathbf{T}^{2l+2,lm} - \left(\frac{2l(l+1)}{3(2l-1)(2l+3)}\right)^{1/2} \mathrm{T}^{2l,lm} + \left(\frac{(l-1)l}{(2l-1)(2l+1)}\right)^{1/2} \mathbf{T}^{2l-2,lm}$$
$$= \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} Y^{lm};$$
$$\mathrm{T}^{T0,lm} = -\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(2l+1)(2l+3)}\right)^{1/2} \mathrm{T}^{2l+2,lm} + \left(\frac{l(l+1)}{3(2l-1)(2l+3)}\right)^{1/2} \mathrm{T}^{2l,lm} - \left(\frac{(l-1)l}{2(2l-1)(2l+1)}\right)^{1/2} \mathbf{T}^{2l}$$
$$= 2^{-1/2}(\delta - \mathrm{n} \otimes \mathrm{n}) Y^{lm};$$
$$\mathbf{T}^{E1,lm} = -\left(\frac{2l(l+2)}{(2l+1)(2l+3)}\right)^{1/2} \mathbf{T}^{2l+2,lm} - \left(\frac{3}{(2l-1)(2l+3)}\right)^{1/2} \mathbf{T}^{2l,lm} + \left(\frac{2(l-1)(l+1)}{(2l-1)(2l+1)}\right)^{1/2} \mathbf{T}^{2l-2,lm}$$
$$= \left[-2\mathbf{n} \times \mathbf{T}^{B1,lm}\right]^{\mathrm{S}};$$
$$\mathbf{T}^{E2,lm} = \left(\frac{l(l-1)}{2(2l+1)(2l+3)}\right)^{1/2} \mathbf{T}^{2l+2,lm} + \left(\frac{3(l-1)(l+2)}{(2l-1)(2l+3)}\right)^{1/2} \mathbf{T}^{2} l, lm + \left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(2l-1)(2l+1)}\right)^{1/2} \mathbf{T}^{2l-2,l}$$

$$\mathbf{T}^{B2,lm} = -i\left(\frac{l-1}{2l+1}\right)^{1/2} \mathbf{T}^{2l+1,lm} - i\left(\frac{l+2}{2l+1}\right)^{1/2} \mathbf{T}^{2l-1,lm}$$
$$= \left(\frac{2}{(l-1)(l+2)}\right)^{1/2} \left[i\mathbf{L}\mathbf{Y}^{E,lm}\right]^{\mathrm{STT}}$$
$$= \left(\frac{2}{(l-1)(l+2)}\right)^{1/2} \left[r\nabla\mathbf{Y}^{B,lm}\right]^{\mathrm{STT}}$$
$$= \left(2\frac{(l-2)!}{(l+2)!}\right)^{1/2} \left[i\mathbf{L}r\nabla Y^{lm}\right]^{\mathrm{STT}}$$
$$= \left(2\frac{(l-2)!}{(l+2)!}\right)^{1/2} \left[ir\nabla\mathbf{L}Y^{lm}\right]^{\mathrm{STT}}$$
$$= \left[\mathbf{n} \times \mathbf{T}^{E2,lm}\right]^{\mathrm{S}}.$$

Here a superscript S means "symmetric part of" and superscript TT means "transverse traceless part of" [Eqs. (1.7b) and (1.11)]; ∇ is the gradient operator and L is the angular momentum operator [Eq. (2.19)].

[Zerilli (1970) uses the notation

$$\mathbf{a}_{lm} = \mathbf{T}^{L0,lm}, \quad \mathbf{b}_{lm} = \mathbf{T}^{E1,lm}, \quad \mathbf{c}_{lm} = -i\mathbf{T}^{B1,lm},$$
$$\mathbf{d}_{lm} = -i\mathbf{T}^{B2,lm}, \quad \mathbf{f}_{lm} = \mathbf{T}^{E2,lm}, \quad \mathbf{g}_{lm} = \mathbf{T}^{T0,lm};$$

and Mathews (1962) uses the notation

$$\mathbf{T}^{m}_{lm} = \mathbf{T}^{E2,lm}, \quad \mathbf{T}^{e}_{lm} = i\mathbf{T}^{B2,lm}.$$

Zerilli and Mathews, and also Wagoner (1977) use the ter ms "electric-type parity" and "magnetic-type parity" to refer to $\pi = (-1)^{l+1}$ and $\pi = (-1)^{l}$, respectively-which is opposite to our terminology and to that found everywhere else in the general relativity literature. Their terminology leads to the objectionable convention that the gravitational waves produced by a slow-motion source are predominantly of "magnetic quadrupole" type; our terminology makes them "electric quadrupole."] The transfor mation (2.30) from pure-orbital to pure-spin harmonics is unitary; therefore it is easily inverted:

$$\mathbf{T}^{0l,lm} = -3^{-1/2}\mathbf{T}^{L0,lm} - \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{T0,lm},$$

$$\mathbf{T}^{2l-2,lm} = \left(\frac{(l-1)l}{(2l-1)(2l+1)}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{L0,lm}$$
$$-\left(\frac{(l-1)l}{2(2l-1)(2l+1)}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{T0,lm}$$
$$+\left(\frac{2(l-1)(l+1)}{(2l-1)(2l+1)}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{E1,lm}$$
$$+\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(2l-1)(2l+1)}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{E2,lm},$$

$$\mathbf{T}^{2l-1,lm} = i\left(\frac{l-1}{2l+1}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{B1,lm} + i\left(\frac{l+2}{2l+1}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{B2,lm},$$
$$+\left(\frac{l(l+1)}{3(2l-1)(2l+3)}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{T0,lm}$$

$$\mathbf{T}^{2l,lm} = -\left(\frac{2l(l+1)}{3(2l-1)(2l+3)}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{L0,lm}$$
$$+\left(\frac{3(l-1)(l+2)}{(2l-1)(2l+3)}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{E2,lm},$$

$$\mathbf{T}^{E1,lm}$$

$$\mathbf{T}^{2}l^{+1,1,lm} = -i\left(\frac{l+2}{2l+1}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{B1,lm} + i\left(\frac{l-1}{2l+1}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{B2,lm}$$

$$\mathbf{T}^{2l+2,lm} = \left(\frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{20,lm}$$
$$-\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(2l+1)(2l+3)}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{T0,lm}$$
$$-\left(\frac{2l(l+2)}{(2l+1)(2l+3)}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{E1,lm}$$
$$+\left(\frac{l(l-1)}{2(2l+1)(2l+3)}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{E2,lm}$$

For fixed l, m, θ, ϕ the pure-spin harmonics have the following algebraic and directionality properties:

$\mathrm{T}^{L0,lm}$: pure "longitudinal"'(i.e., pure radial);

$T^{T0,lm}$: pure transverse; proportional to the transverse projection tensor P_{jk};

$\mathbf{T}^{E1,lm}$ and $\mathbf{T}^{B1,lm}$: mixed longitudinal and transverse;

$\mathbf{T}^{E2,lm}$ and $\mathbf{T}^{B2,lm}$: transverse and traceless.

These algebraic and directionality properties are the same as those of the following pure-spin (i.e., purehelicity) states of radially propagating gravitational waves in general metric theories of gravity [Eardley, Lee, and Lightman (1973); Eardley et al. (1973)], which in turn correspond to the following NewmanPenrose (1962) tetrad components of the Riemann tensor of a wave

$$\mathbf{T}^{L0,lm}: \text{ longitudinal, spin 0 (Newman-Penrose } \Psi_2),$$
$$\mathbf{T}^{T0,lm}: \text{ transverse, spin 0 (Newman-Penrose } \Phi_{22}),$$
$$\mathbf{T}^{E1,lm} \text{ and } \mathbf{T}^{B1,lm}: \text{ spin 1 (Newman-Penrose } \Psi_3),$$
$$\mathbf{T}^{E2,lm} \text{ and } \mathbf{T}^{B2,lm}: \text{ spin 2 (Newman-Penrose } \Psi_4).$$

The harmonics $\mathbf{T}^{L0,lm}, \mathbf{T}^{x0,lm}, \mathbf{T}^{E1,lm}$, and $\mathbf{T}^{E2,lm}$ have "electric-type" parity $\pi = (-1)^l$; while $\mathbf{T}^{B1,lm}$ and $\mathbf{T}^{B2,lm}$ have "magnetic-type" parity $\pi = (-1)^{l+1}$. The pure-spin harmonics are orthonormal

$$\int T^{JS,lm}_{jk} T^{J\prime S',l'm'*}_{jk} d\Omega = \delta_{JJ}, \delta_{ss'}, \delta_{lll'}\delta_{mm'};$$

and their complex conjugates are given by

$$\mathbf{T}^{JS,lm*} = (-1)^m \mathbf{T}^{JS,l_m}.$$

[The factor i was included in Eqs. (2.30e) and (2.30f) in order to produce this complex-conjugate relation.]

These pure-spin tensor harmonics are intimately related to the Regge-Wheeler (1957) tensor harmonics [see Zerilli (1969, 1970), Sandberg (1978)]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}^{L0,lm} &= Y^{lm}\delta - \mathbf{\Phi}^{lm}, \\
\mathbf{T}^{T0,lm} &= 2^{-1/2}\mathbf{\Phi}^{lm}, \\
\mathbf{T}^{E1,lm} &= \left(\frac{2}{l(l+1)}\right)^{1/2} \left[\mathbf{n}\otimes\mathbf{\Psi}^{lm}\right]^{\mathrm{S}}, \\
\mathbf{T}^{B1,lm} &= \left(\frac{2}{l(l+1)}\right)^{1/2} \left[\mathbf{n}\otimes\mathbf{\Phi}^{lm}\right]^{\mathrm{S}}, \\
\mathbf{T}^{E2,lm} &= \left(2\frac{(l-2)!}{(l+2)!}\right)^{1/2} \left(\mathbf{\Psi}^{lm} + \frac{l(l+1)}{2}\mathbf{\Phi}^{lm}\right) \\
&= \left(2\frac{(l-2)!}{(l+2)!}\right)^{1/2} \left[\mathbf{\Psi}^{lm}\right]^{\mathbf{TT}}, \\
\mathbf{T}^{B2,lm} &= \left(2\frac{(l-2)!}{(l+2)!}\right)^{1/2} \chi^{lm},
\end{aligned}$$

and also to the Newman-Penrose (1966) spin-weighted spherical harmonics [for details of which see Goldberg et al. (1967)]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}^{l0,lm} &= {}_0Y^{lm}\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}, \\
\mathbf{T}^{T0,lm} &= 2^{-1/2}{}_0^{lm}Y^{l\boldsymbol{\delta}-\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})}, \\
\mathbf{T}^{E1,lm} &= \left[{}_{-1}Y^{lm}\mathbf{m}\otimes\mathbf{n} - {}_1Y^{lm}\mathbf{m}^*\otimes\mathbf{n}\right]^{\mathrm{S}}, \\
\mathbf{T}^{B1,lm} &= -i\left[{}_{-1}Y^{lm}\mathbf{m}\otimes\mathbf{n} + {}_1Y^{lm}\mathbf{m}^*\otimes\mathbf{n}\right]^{\mathrm{S}}, \\
\mathbf{T}^{E2,lm} &= 2^{-1/2}\left[{}_{-2}Y^{lm}\mathbf{m}\otimes\mathbf{m} + {}_2Y^{lm}\mathbf{m}^*\otimes\mathbf{m}^*\right], \\
\mathbf{T}^{B2,lm} &= -i2^{-1/2}\left[{}_{-2}Y^{lm}\mathbf{m}\otimes\mathbf{m} - {}_2Y^{lm}\mathbf{m}^*\otimes\mathbf{m}^*\right].
\end{aligned}$$

The STF version of tensor spherical harmonics can be obtained by inserting expression (2.11) for Y^{lm} into Eqs. (2.30) for the pure-spin harmonics:

$$
\begin{aligned}
T^{L0,lm}_{jk} =& n_j n_k \mathcal{Y}^{lm}_{A_l} N_{A_l},\\
T^{T0,lm}_{jk} =& 2^{-1/2}\left(\delta_{jk} - n_j n_k\right)\mathcal{Y}^{lm}_{A_l} N_{A_l},\\
T^{E1,lm}_{jk} =& [2l/(l+1)]^{1/2}\\
&\times\left[n_{(j}\mathcal{Y}^{lm}_{k)A} A_{l-1} N_{A_{l-1}} - n_j n_k \mathcal{Y}^{lm}_{A_l} N_{A_l}\right],\\
T^{B1,lm}_{jk} =& [2l/(l+1)]^{1/2}\left[n_{(j}\epsilon_{k)pq} n_p \mathcal{Y}^{lm}_{qA_{l-1}m} N_{A_{l-1}}\right],\\
T^{E2,lm}_{jk} =& \left(\frac{2(l-1)l}{(l+1)(l+2)}\right)^{1/2}\left[\mathcal{Y}^{lm}_{jkAl-2} N_{A_{l-2}}\right]^{\rm TT},\\
T^{B2,lm}_{jk} =& \left(\frac{2(l-1)l}{(l+1)(l+2)}\right)^{1/2}\left[n_p \epsilon_{pq(j}\mathcal{Y}^{lm}_{k)qA^{lm}_{l-2}} N_{A_{l-2}}\right]^{\rm TT}.
\end{aligned}
$$

By comparing with Eqs. (2.33) one can derive the relation between the pure-orbital harmonics and the STF harmonics:

$$
\begin{aligned}
T^{0\ l,lm}_{jkjk} &= \frac{(-1)^{l+1}}{3^{1/2}(2l-1)!!} r^{l+1}\left(r^{-1}\right), A_l \mathcal{Y}^{lm}_{A_l}\delta_{jk} = \frac{-1}{3^{1/2}}\mathcal{Y}^{lm}_{A_l} N_{A_l}\delta_{jk},\\
T^{2l,lm}_{jk} &= \frac{(-1)^{l+1}}{(2l-1)!!}\left(\frac{6l(2l-1)}{(l+1)(2l+3)}\right)^{1/2} r^{l+1}\left[\left(r^{-1}\right), A_{l-1}\left(j\mathcal{Y}^{lm}_{k)A_{l-1}} - \frac{1}{3}\left(r^{-1}\right), A_l \mathcal{Y}^{lm}_{A}\delta_{jk}\right]\right.\\
&= -\left(\frac{6l(2l-1)}{(l+1)(2l+3)}\right)^{1/2}\left[n_{(j}\mathcal{Y}^{lm}_{k)A^{lm}_{l-1}} N_{A_{l-1}} - \left(\frac{l-1}{2l-1}\right)\mathcal{Y}^{lm}_{jkA_{l-2}} N_{A_{l-2}} - \frac{1}{3}\mathcal{Y}^{lm}_{A_l} N_{A_l}\delta_{jk}\right]\\
T^2_{jk} l-2, lm &= \frac{(-1)^l(2l-3)}{(2l-3)!!}\left(\frac{(l-1)l}{(2l-1)(2l+1)}\right)^{1/2} r^{l-1}\left(r^{-1}\right)_{,A_{l-2}}\mathcal{Y}^{lm}_{jkA^{lm}_{l-2}} = \left(\frac{(l-1)l}{(2l-1)(2l+1)}\right)^{1/2} Y^{lm}_{jkA_{l-2}} N\\
T^{2l+2,lm}_{jk} &= \frac{(-1)^l}{(2l+3)!!}\left(\frac{(2l+1)(2l+3)}{(l+1)(l+2)}\right)^{1/2} r^{l+3}\left(r^{-1}\right), A^{jk}_{l}\mathcal{Y}^{lm}_{A} = \left(\frac{(2l+1)(2l+3)}{(l+1)(l+2)}\right)^{1/2}\\
&\times\left[\mathcal{Y}^{lm}_{A_l} N_{A_l} n_j n_k - \left(\frac{2l}{2l+3}\right) n_{(j}\mathcal{Y}^{lm}_{k\to A_{l-1}} N_{A_{l-1}} + \frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l+3)}\mathfrak{Y}^{lm}_{jkA_{l-2}} N_{A_{l-2}} - \frac{1}{2l+3}\mathcal{Y}^{lm}_{A_l} N_{A_l}\right.\right.\\
T^{2l-1,lm}_{jk} &= i\frac{(-1)^{l-1}(2l-1)}{(2l-1)!!}\left(\frac{2l(l-1)}{(l+1)(2l+1)}\right)^{1/2} r^{l}\left(r^{-1}\right)_{,A_{l-2}p}\epsilon_{pq(j}\mathcal{Y}^{lm}_{k)\alpha A_{l-2}} =\\
&= i\left(\frac{2l(l-1)}{(l+1)(2l+1)}\right)^{1/2}\epsilon_{pq(j}\mathcal{Y}^{lm}_{k)qA_{l-2}} n_p N_{A_{l-2}},\\
&= -i\left(\frac{2l(2l+1)}{(l+1)(l+2)}\right)^{1/2}\left[n_{(j}\epsilon_{k)pq} n_p \mathcal{Y}^{lm}_{qA_{l-1}} N_{A_{l-1}} - \left(\frac{l-1}{2l+1}\right)\epsilon_{pq(j}\mathcal{Y}_{k)qA^{lm}_{l-2}} n_p N_{A_{l-2}}\right].
\end{aligned}
$$

An arbitrary tensor field $\mathbf{w}(\theta,\phi)$ can be expanded in terms of pure-orbital harmonics or pure-spin harmonics or Regge-Wheeler harmonics or spin-weighted harmonics; and one can read off the relationships between the expansion coefficients by examining the relationships between the harmonics themselves and by invoking Eqs. (2.13). The situation is fully analogous to the vector case [Eqs. (2.25)].

22.1.3 Solutions of Laplace's equation

When solving Laplace's equation or the flat-space wave equation it is most convenient to use sets of spherical harmonics which are eigenfunctions of the "orbital angular momentum" operator

$$\mathbf{L}^2 = -r^2\nabla^2 + \partial_r r^2 \partial_r.$$

The pure-orbital harmonics are eigenfunctions of L^2,

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^2 Y^{lm} &= l(l+1)Y^{lm},\\ \mathbf{L}^2 \mathbf{Y}^{l',lm} &= l'\left(l'+1\right)\mathbf{Y}^{l',lm},\\ \mathbf{L}^2 \mathbf{T}^{\lambda l',lm} &= l'\left(l'+1\right)\mathbf{T}^{\lambda l',lm}\end{aligned}$$

but the pure-spin harmonics, the Regge-Wheeler harmonics, and the spin-weighted harmonics are not.

By virtue of Eqs. (2.42), the general scalar, vector, and tensor solutions of Laplace's equation $\nabla^2\psi = 0$ are

$$\begin{aligned}F(r,\theta,\phi) &= \sum_{l,m}\left(F^{lm}r^{-(l+1)} + G^{lm}r^{l}\right)Y^{lm},\\ \mathbf{V}(r,\theta,\phi) &= \sum_{l',l,m}\left(F^{l',lm}r^{-(l'+1)} + G^{l',lm}r^{l'}\right)\mathbf{Y}^{l',lm},\\ T^{2\ l+1,lm}_{jk} &= i\frac{(-1)^l}{(2l+1)!!}\left(\frac{2l(2l+1)}{(l+1)(l+2)}\right)^{1/2} r^{l+2}\left(r^{-1}\right)_{,A_{l-1}p(j}\epsilon_{k)pq}y^{lml}_{qAl-1}\\ \mathbf{U}(r,\theta,\phi) &= \sum_{\lambda,l',l,m}\left(F^{\lambda l',lm}r^{-(l'+1)} + G^{\lambda l',lm}r^{l'}\right)\mathbf{T}^{\lambda l',lm}.\end{aligned}$$

One can construct the STF form of these solutions by inserting expressions (2.11), (2.24), and (2.40) into Eqs. (2.43), by using the relation $r,j = n_j$, by using the symmetry and trace-free features of $\mathcal{Y}^{lm}_{A_l}$, and by making suitable changes of notation. The result for the general solution that is well behaved at infinity is

$$\begin{aligned}F(r,\mathrm{n}) =& \sum_{l=0}^{\infty} a_{A_l}\left(\frac{1}{r}\right)_{,A_l},\\ V_j(r,\mathrm{n}) =& \sum_{l=1}^{\infty}\left[\mathfrak{a}_{jA_{l-1}}\left(\frac{1}{r}\right)_{,A_{l-1}} + \epsilon_{jpq}\mathfrak{e}_{qA_{l-1}}\left(\frac{1}{r}\right)_{,pA_{l-1}}\right]\\ &+\sum_{l=0}^{\infty} D_{A_l}\left(\frac{1}{r}\right)_{,jA_l},\\ U_{jk}(r,\mathrm{n}) =& \sum_{l=0}^{\infty}\delta_{jk}\mathcal{E}_{A_l}\left(\frac{1}{r}\right)_{,A_l}\\ &+\sum_{l=2}^{\infty}\left[\mathfrak{F}_{jkA_{l-2}}\left(\frac{1}{r}\right)_{,A_{l-2}} + \epsilon_{pqj}\mathcal{S}_{kqA_{l-2}}\left(\frac{1}{r}\right)_{,pA_{l-2}}\right]^s\\ &+\sum_{l=1}^{\infty}\left[\mathfrak{K}_{jA_{l-1}}\left(\frac{1}{r}\right)_{,kA_{l-1}} + \epsilon_{jpq}g_{qA_{l-1}}\left(\frac{1}{r}\right)_{,kpA_{l-1}}\right]^s\\ &+\sum_{l=0}^{\infty} g_{A_l}\left(\frac{1}{r}\right)_{,jkA_l}.\end{aligned}$$

The solutions which blow up at infinity are less simply expressed in STF form. It is easy to see from $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta_3(\mathrm{x})$ that the STF expressions (2.44) do satisfy Laplace's equation everywhere except at the singular point $r = 0$.

22.1.4 Solutions of the wave equation

It is useful to introduce the following "basis" solutions to the vacuum wave equation $\Box\psi = (-\partial_t^2 + \nabla^2)\,\psi = 0$:

$$\Phi^{\epsilon\omega lm}(t,r,\theta,\phi) = (|\omega|/2\pi)^{1/2} e^{-i\omega t} h^{\epsilon l}(\omega r) Y^{lm}(\theta,\phi),$$
$$\Phi_j{}^{\epsilon\omega l'lm}(t,r,\theta,\phi) = (|\omega|/2\pi)^{1/2} e^{-i\omega t}$$
$$\times h^{\epsilon l'}(\omega r) Y_j^{l',lm}(\theta,\phi),$$
$$\Phi_{jk}^{\epsilon\omega\lambda l'lm}(t,r,\theta,\phi) = (|\omega|/2\pi)^{1/2} e^{-i\omega t}$$
$$\times h^{\epsilon l'}(\omega r) T_{jk}^{\lambda\lambda',lm}(\theta,\phi).$$

Here ω is a real frequency and ϵ is either + (outgoing waves) or - (ingoing waves). We use the unconventional notation $h^{\epsilon l}(x)$ for spherical Hankel functions

$$h^{+l} = h_l^{(1)} = j^l + iy^l, \quad h^{-l} = h_l^{(2)} = j^l - iy^l,$$

where j^l and y^l are the spherical Bessel functions. Some useful formulas are

$$h^{\epsilon l}(x) = -\epsilon i x^l \left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l \left(\frac{e^{\epsilon ix}}{x}\right),$$
$$h^{\epsilon l}(x) = e^{\epsilon ix} \sum_{k=0}^{l} \frac{(-\epsilon i)^{l+1-k}(l+k)!}{2^k k!(l-k)!} \frac{1}{x^{k+1}},$$
$$h^{\epsilon l}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{l+2k}}{2^k k!(2l+2k+1)!!}$$
$$+ \epsilon i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2l+1)!!}{2^k l!(-1-2l)(1-2l)\cdots(2k-1-2l)} \frac{1}{x^{l+1-2k}}.$$

In addition to the outgoing and ingoing basis solutions, it is useful to define standing-wave basis solutions

$$\Phi^{s\omega lm} = \frac{1}{2}\left(\Phi^{+\omega lm} + \Phi^{-\omega lm}\right),$$
$$\Phi_j^{S\omega l'lm} = \frac{1}{2}\left(\Phi_j^{+\omega l'lm} + \Phi_j^{-\omega l'lm}\right),$$
$$\Phi_{jk}^{S\omega\lambda l'lm} = \frac{1}{2}\left(\Phi_{jk}^{+\omega\lambda l'lm} + \Phi_{jk}^{-\omega\lambda l'lm}\right).$$

Note that they are given by expressions (2.45) with $h^{\epsilon l}(\omega r)$ replaced by $j^l(\omega r) = \mathrm{Re}\left[h^{\epsilon l}(\omega r)\right]$.

From the basis solutions (2.45) and (2.48) one can construct scalar, vector, and symmetric-tensor Green's functions which satisfy

$$\Box G^{\epsilon}(x,x') = -\delta_4(x-x'),$$
$$\Box G^{\epsilon}_{j\cdot k}(x,x') = -\delta_{jk}\delta_4(x-x'),$$
$$\Box G^{\epsilon}_{jk\cdot pq}(x,x') = -\frac{1}{2}\left(\delta_{jp}\delta_{kq} + \delta_{jq}\delta_{kp}\right)\delta_4(x-x'),$$

and which have outgoing waves at infinity for $\epsilon = +1$, ingoing for $\epsilon = -1$. The Green's functions are given by

$$
\begin{aligned}
G^{\epsilon}(x,x') =& \epsilon i \sum_{l,m} \int d\omega \left\{ \mathrm{sgn}(\omega) \Phi^{\epsilon\omega lm}(x) \left[\Phi^{S\omega lm}(x') \right]^* \right\} \text{ if } r > r' \\
=& \epsilon i \sum_{l,m} \int d\omega \left\{ \mathrm{sgn}(\omega) \Phi^{s\omega lm}(x) \left[\Phi^{(-\epsilon)\omega lm}(x') \right]^* \right\} \text{ if } r < r'; \\
G^{\epsilon}_{j\cdot k}(x,x') =& \epsilon i \sum_{l'lm} \int d\omega \left\{ \mathrm{sgn}(\omega) \Phi^{\epsilon\omega l'lm}_{j}(x) \left[\Phi^{S\omega l'lm}_{k}(x') \right]^* \right\} \text{ if } r > r' \\
=& \epsilon i \sum_{l'lm} \int d\omega \left\{ \mathrm{sgn}(\omega) \Phi^{S\omega l'lm}_{j}(x) \left[\Phi^{(-\epsilon)\omega l'lm}_{k}(x') \right]^* \right\} \text{ if } r < r'; \\
G^{\epsilon}_{jk\cdot pq}(x,x') =& \epsilon i \sum_{\lambda l'lm} \int d\omega \left\{ \mathrm{sgn}(\omega) \Phi^{\epsilon\omega\lambda l'lm}_{jk}(x) \left[\Phi^{S\omega\lambda l'lm}_{pq}(x') \right]^* \right\} \text{ if } r > r' \\
=& \epsilon i \sum_{\lambda l'\imath m} \int d\omega \left\{ \mathrm{sgn}(\omega) \Phi^{S\omega\lambda l'\imath m}_{jk}(x) \left[\Phi^{(-\epsilon)\omega\lambda l'lm}_{pq}(x') \right]^* \right\} \text{ if } r < r'.
\end{aligned}
$$

Here $\mathrm{sgn}(\omega)$ is the sign of ω(+1 or −1). One can derive these factorized expansions of the Green's functions by the same standard method as Chrzanowski and Misner (1974) use in the Kerr metric; see their Eqs. (2.15) -(2.19).

The basis solutions (2.45), (2.48), and Green's functions (2.50) do not have simple forms when written in STF language. However, the general solutions of the vacuum wave equations do have simple forms [Sachs (1961), Pirani (1964)]:

$$
\begin{aligned}
F(t,r,\theta,\phi) =& \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\epsilon} \left[r^{-1} a^{\epsilon}_{A_l}(t-\epsilon r) \right], A_l, \\
V_j(t,r,\theta,\phi) =& \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\epsilon} \left\{ \left[r^{-1} \mathscr{B}^{\epsilon}_{jA_{l-1}}(t-\epsilon r) \right], A_{l-1} + \left[r^{-1} \epsilon_{jpq} \mathfrak{e}^{\epsilon}_{qA_{l-1}}(t-\epsilon r) \right]_{,pA_{l-1}} \right\} + \\
&+ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\epsilon} \left[r^{-1} D^{\epsilon}_{A_l}(t-\epsilon r) \right]_{,jA_l}, \\
U_{jk}(t,r,\theta,\phi) =& \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\epsilon} \delta_{jk} \left[r^{-1} \mathcal{E}^{\epsilon}_{A_l}(t-\epsilon r) \right]_{,A_l} \\
&+ \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{\epsilon} \left\{ \left[r^{-1} \mathcal{F}^{\epsilon}_{jkA_{l-2}}(t-\epsilon r) \right]_{,A_{l-2}} + \left[r^{-1} \epsilon_{pq(j} \mathcal{G}_{k)qA^{\epsilon}_{l-2}}(t-\epsilon r) \right]_{,pA_{l-2}} \right\} \\
&+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\epsilon} \left\{ \left[r^{-1} \mathcal{C}^{\epsilon}_{A_{l-1}(j}(t-\epsilon r) \right]_{,k)A\ l-1} + \left(\left[r^{-1} \epsilon_{jpq} \mathfrak{d}^{\epsilon}_{qA_{l-1}}(t-\epsilon r) \right]_{,kpA_{l-1}} \right)^S \right\} + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\epsilon} \left[r^{-1} \boldsymbol{K}^{\epsilon}_{A_l}(t-\epsilon r) \right]_{,jkA}
\end{aligned}
$$

Here the capital script coefficients are arbitrary functions of $t-\epsilon r$. That these expressions satisfy the wave equation follows trivially from the fact that $r^{-1}f(t-\epsilon r)$ satisfies it:

$$
\Box \left[r^{-1} f(t-\epsilon r) \right] = 0, \text{ except at } r = 0.
$$

In manipulating STF solutions of the wave equation, the following relations-which are valid for any STF tensorare useful:

$$
\begin{aligned}
\left[r^{-1} \mathbb{B}_{A_l}(t-\epsilon r) \right]_{,A_l} =& \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^l (l+k)! \epsilon^{l-k}}{2^{kk}! (l-k)!} \frac{1}{r^{k+1}} (l-k) \mathbb{B}_{Al}(t-\epsilon r) N_{A_l} \quad \text{at all } r \\
=& -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (2l+1)!!}{2^k k! (-1-2l)(1-2l)\cdots(2k-1-2l)} \frac{1}{r^{l+1-2k}}{}^{(2k)} \mathbb{B}_{A_l}(t) N_{A_l}
\end{aligned}
$$

Here a prefix superscript in parentheses means differentiation

$$^{(n)}\mathbb{B}(u) \equiv \left(\frac{d}{du}\right)^n \mathbb{C}(u).$$

Equation (2.53a) is given on p. 299 of Pirani (1964) for the case $\epsilon = +1$ of outgoing waves [except for an error of $(-1)^l$]; it can be derived by straightforward differentiation. Expression (2.53b) is derived most easily by comparison of (2.53a) and (2.53b) with the corresponding expansions of spherical Bessel functions, Eqs. (2.47).

22.1.5 Regions of Spacetime Around an Isolated Source

We shall characterize a source of gravitational waves, semiquantitatively, by the following length scales:

$$\begin{aligned} L \equiv\ & \text{“size of source”} \\ \equiv\ & \left[\begin{array}{l}\text{radius of region inside which the} \\ \text{stress -energy } T^{\alpha\beta} \text{ is contained}\end{array}\right], \\ 2M \equiv\ & \text{“gravitational radius of source”} \\ \equiv\ & \left[\begin{array}{l}2\times \text{ mass of source in} \\ \text{units where } G=c=1\end{array}\right], \\ x \equiv\ & \text{“reduced wavelength of waves”} \\ \equiv\ & \left[\begin{array}{l}1/2\pi\times \text{ characteristic wavelength} \\ \text{of gravitational waves emitted} \\ \text{by source}\end{array}\right], \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} r_I \equiv \text{“inner radius of local wave zone”} \\ r_0 \equiv \text{“outer radius of local wave zone”}\end{array}\right\} \text{(see below)}$$

Corresponding to these length scales, we shall divide space around a source into the following regions:

Source: $r \leqslant L$,
Strong-field region: $rs10M$ if $10MZL$
typically does not exist
if $L \gg 10M$,

Weak-field near zone: $L < r, \quad 10M \ll r, \quad r \ll x$,
Local wave zone: $r_I \lesssim r \lesssim r_0$
Distant wave zone: $r_0 \lesssim r$.

The "local wave zone" is the region in which (i) the source's waves are weak, outgoing ripples on a background spacetime, and (ii) the effects of the background curvature on the wave propagation are negligible.

The inner edge of the local wave zone (r_I) is the location at which one or more of the following effects becomes important: (i) the waves cease to be waves and become a near-zone field, i.e., r becomes $\lesssim x$; (ii) the gravitational pull of the source produces a significant red shift, i.e., r becomes $\sim 2M =$ (Schwarzschild radius of source); (iii) the background curvature produced by the source distorts the wave fronts and backscatters the waves significantly, i.e., $(r^3/M)^{1/2}$ becomes sx; (iv) the outer limits of the source itself are encountered, i.e., r becomes $sL =$ (size of source). Thus, the inner edge of the local wave zone is given by

$$-\epsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{l+2k}}{2^k k!(2l+1+2k)!!}\, ^{(2l+1+2k)}B_{A_l}(t) N_{A_l}$$

in near zone.

$$r_I = \alpha \times \max\left\{\chi, 2M, \left(M\chi^2\right)^{1/3}, L\right\},$$
$$\alpha \equiv \left(\begin{array}{c}\text{some suitable number}\\ \text{large compared to unity}\end{array}\right).$$

The outer edge of the local wave zone r_0 is the location at which one or more of the following effects becomes important: (i) a significant phase shift has been produced by the " M/r " gravitational field of the source, i.e., $(M/x)\ln(r/r_I)$ is no longer $\ll \pi$; (ii) the background curvature due to nearby masses or due to the external universe perturbs the propagation of the waves, i.e., r is no longer $\ll R_B =$ (background radius of curvature). Thus, the outer edge of the local wave zone is given by

$$r_0 = \min\left[r_I \exp(x/\beta M), R_B/\gamma\right]$$
$$\beta, \gamma \equiv \left(\begin{array}{c}\text{some suitable numbers}\\ \text{large compared to unity}\end{array}\right)$$

Of course, we require that our large numbers α, β, γ be adjusted so that the thickness of the local wave zone is very large compared to the reduced wavelength:

$$r_0 - r_I \gg x.$$

Previous work in gravitational-wave theory has not distinguished the local wave zone from the distant wave zone. I think it useful to make this distinction, and to split the theory of gravitational waves into two corresponding parts: Part one deals with the source's generation of the waves, and with their propagation into the local wave zone; thus, it deals with the spacetime region $r < r_0$ (all of spacetime except the distant wave zone). Part two deals with the propagation of the waves from the local wave zone out through the distant wave zone to the observer, i.e., with the region $r > r_I$ (all of the wave zone). The two parts, wave generation and wave propagation, overlap in the local wave zone; and the two theories can be matched together there.

By making this split one can simplify the (semi)rigorous theory of wave generation. No longer must that theory face logarithmic divergences due to phase shifts produced by the mass of the source, or the energy in the waves; and no longer need one be terribly careful about choosing coordinates that avoid those divergences, a la Bondi, van der Burg, and Metzner (1962). Rather, one can use any naive, asymptotically Minkowskii coordinate system one wishes in the theory of wave generation. Such a coordinate system will serve just fine to get the waves out of the source and into the local wave zone. One can then leave to wave propagation theory the delicate task of getting the waves out of the local wave zone, through the region of dangerous logarithmic divergences, and on into the observer's detector. Moreover, for almost all realistic situations wave propagation theory can do its job admirably well using the elementary formalism of geometric optics [e.g., exercise 35.15 of Misner, Thorne, and Wheeler (1973) - cited henceforth as "MTW"-or last section of Thorne (1977)].

Throughout this paper we shall confine attention to sources which possess a local wave zone-and we shall call such sources "isolated." It seems likely that every source of gravitational waves in the Universe today is "isolated." However, in the very early Universe the background curvature $1/R_B^2$ was so large that sources might not have been isolated.

In complex situations the location of the local wave zone might not be obvious. Consider, for example, a neutron star passing very near a supermassive black hole. The tidal pull of the hole sets the neutron star into oscillation, and the star's oscillations produce gravitational waves [Mashoon (1973); Turner (1977)]. If the hole is large enough, or if the star is far enough from it, there may exist a local wave zone around the star which does not also enclose the entire hole. Of greater interest-because more radiation will be produced-is the case where the star is very near the hole and the hole is small enough ($M_h \lesssim 100 M_\odot$) to produce large-amplitude oscillations, and perhaps even disrupt the star. In this case, before the waves can escape the influence of the star, they get perturbed by the background curvature of the hole. One must then consider the entire star-hole system as the source, and construct a local wave zone that surrounds them both.

22.2 Multipole Expansion of the Radiation Field by Thorne

22.2.1 Radiation field itself

Consider any isolated source of gravitational radiation. Throughout its local wave zone $r_0 < r < r_I$, by virtue of definitions (3.3) and (3.4) of r_0 and r_I, we can treat the waves as linearized metric perturbations propagating on a flat background. To characterize this flat background we introduce Minkowskii coordinates t, x, y, z with the source at rest at the origin ("asymptotic rest frame of source"; cf. Chap. 19 of MTW); and we introduce the corresponding spherical coordinates [Eqs. (1.1)]. In this coordinate system the transverse, traceless part of the metric perturbation-which characterizes the radiation completely (Secs. 35.435.7 of MTW) has the form

$$h^{\rm T}_{jk} = r^{-1} A_{jk}(t-r, \theta, \phi).$$

Here A_{jk} is a transverse, traceless function which, in the local wave zone, varies rapidly (length scale x) in the radial direction but slowly in the transverse directions

$$A_{jk,r} \sim A_{jk}/x \gg A_{jk,\theta} \sim A_{jk,\phi}.$$

[Recall the definition, Eqs. (1.13), of the comma.]

We shall resolve the angular dependence of the wave amplitude A_{jk} into tensor spherical harmonics. The best set of harmonics to use is the pure-spin set since it has well defined transversality and helicity properties [Eqs. (2.34) and (2.35)]. Because A_{jk} is transverse and traceless, it can contain only the TT harmonics $\mathbf{T}^{E2,lm}$ and $\mathbf{T}^{B2,}tm$; hence, the radiation field must have the form [Mathews (1962)]

$$h^{TT}_{jk} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left[r^{-1(l)} I^{lm}(t-r) T^{E2,lm}_{jk} + r^{-1(l)} S^{lm}(t-r) T^{B2,lm}_{jk} \right].$$

The expansion coefficients $I^{1m}(t-r)$ will be called the "mass multipole moments" of the radiation field, and $S^{1m}(t-r)$ will be called the "current multipole moments." The quantities ${}^{(l)}I^{lm}$ and ${}^{(t)}S^{lm}$ are the l th time derivatives of these moments; i.e., we use the notation

$${}^{(t)}G(u) \equiv \left(\frac{d}{du}\right)^t G(u).$$

The mass moments generate the electric-parity part of the field, $\pi = (-1)^x$; the current moments generate the magnetic-parity part. The fact that $h^{\rm TT}_{jk}$ must be real, together with the complex-conjugate property (2.36b) of the TT harmonics, implies that the mass and current moments must satisfy

$$I^{lm*} = (-1)^m I^{l-m}, \quad S^{lm*} = (-1)^m S^{l-m}.$$

In comparing this radiation field with the properties of the source (Sec. V and Part Two), STF notation will be useful. In STF notation, the mass and current l - pole moments of the radiation are real, STF-l functions of $t-r$:

$$A_l(t-r) = \frac{l!}{4}\left(\frac{2(l-1)l}{(l+1)(l+2)}\right)^{1/2} \sum_{m=-l}^{l} I^{lm}(t-r) y^{lm}_{A'l},$$

$$\mathcal{S}_{A_l}(t-r) = -\frac{(l+1)!}{8l}\left(\frac{2(l-1)l}{(l+1)(l+2)}\right)^{1/2} \sum_{m=-l}^{l} S^{lm}(t-r) \mathcal{Y}^{lm}_{A_l}$$

[The l-dependent coefficients are chosen to make g_{A_l} and S_{A_l} have simple links to the theory of the source in the slow-motion limit; see Eqs. (5.19) and (5.28), below.] Relations (4.6) can be inverted by comparing with Eqs. (2.13):

$$I^{lm} = \frac{16\pi}{(2l+1)!!}\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(l-1)l}\right)^{1/2} g_{A_l}\mathcal{Y}^{lm*}_{A_l}$$
$$S^{lm} = -\frac{32\pi l}{(l+1)(2l+1)!!}\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(l-1)l}\right)^{1/2} \mathcal{S}_{A_l}Y^{lm*}_{A_l}.$$

By comparing Eqs. (4.6), (4.3), (2.39e), and (2.39f) we obtain the STF multipole expansion of the radiation field [Sachs (1961), Pirani (1964)]

$$h^{\rm TT}_{jk} = \left[\sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{4}{l!}\right) r^{-1}(l)g_{jkA_{l-2}}(t-r)N_{A_{l-2}} + \sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{8l}{(l+1)!}\right) r^{-1}\epsilon_{pq(j}(l)g_{k)pA_{l-2}}(t-r)n_q N_{A_{l-2}}\right]^{\rm TT}.$$

Note that this is the radiation-zone form of the most general outgoing-wave transverse-traceless solution of the flat-space wave equation $\Box h^{TT}_{jk} = 0$ [Eqs. (2.51c)]. Note also that the mass-quadrupole part of the field has the familiar form

$$\left(h^{\rm TT}_{jk}\right)_{\text{mass quadrupole}} = \left[2\mathcal{I}^{-1}_{jk}(t-r)\right]^{\rm TT}$$

[Eqs. (25) and (26) of Einstein (1918); Eq. (36.20) of MTW].

Expressions (4.3) and (4.8) for the radiation field contain only multipoles of quadrupole order and higher ($l \geqslant 2$). This is because for $l = 0$ and 1 the TT tensor spherical harmonics $T^{E2,}_{jk}, lm$ and $T^{B2,lm}_{jk}$ are nonexistent. One can verify their nonexistence either from the STF formulas (2.39e) and (2.39f), where the Y's must have at least two indices; or from (i) Eq. (2.30d), where $T^{2l-2,lm}$ obviously does not exist when $l = 0$ or 1 and where the other terms in $\mathbf{T}^{E^2,lm}$ vanish for $l = 1$, and (ii) the relation $\mathbf{T}^{B2,lm} = \left[\mathbf{n}\times\mathbf{T}^{E2,lm}\right]^{\rm S}$ [Eq. (2.30f)].

If the radiation field is known, one can project out its multipole moments using the following integrals over the sphere of constant $t - r$:

$$^{(l)}I^{lm} = r\int h^{\rm TT}_{jk}T^{E2,lm*}_{jk}d\Omega,$$
$$^{(l)}S^{lm} = r\int h^{T\ \rm T}_{jk}T^{B2,lm*}d\Omega;$$
$$(l)g_{A_l} = \left[\frac{l(l-1)(2l+1)!!}{2(l+1)(l+2)}\frac{r}{4\pi}\int h^{\rm TT}_{a_1a_2}n_{a_3}\cdots n_{a_l}d\Omega\right]^{\rm STF}$$
$$(l)\mathcal{S}_{A_l} = \left[\frac{(l-1)(2l+1)!!}{4(l+2)}\frac{r}{4\pi}\int \epsilon_{a_1jk}n_j h^{\rm TT}_{k\alpha_2}n_{a_3}\cdots n_{a_l}d\Omega\right]^{\rm STF}_{(4.11\ \rm b)}.$$

See Eqs. (4.3) and (2.36a); also Eqs. (2.39e), (2.39f), and (4.7).

It is trivial to generalize this multipole expansion to any other metric theory of gravity if one knows the "E(2) classification" of the theory [Eardley et al. (1973)]. One need only include in the expansion of $h^{\rm grav}_{jk}$ wave (or of $R_{j0k0} = -\frac{1}{2}\partial^2_t h^{\rm grav\ wave}_{jk}$) those pure-spin tensor harmonics which belong to the spin states of that E (2) class. For example, in Brans-Dicke theory (class N_3) one must include the harmonics $T^{T0,lm}$ (transverse, spin 0 state), $\mathbf{T}^{E^2,lm}$ (TT, electric-parity, spin 2 state), and $\mathrm{T}^{B2,lm}$ (TT, magnetic-parity, spin 2 state).

22.2.2 Energy in the waves

The energy and linear momentum carried off by the radiation field (4.3), (4.8) are most easily evaluated using the Isaacson (1968) stress-energy tensor for gravitational waves

$$T^{\rm GW}_{\alpha\beta} = (1/32\pi)\left\langle h^{\rm TT}_{jk,,\alpha} h^{\rm TT}_{jk_\beta\beta}\right\rangle$$

(cf. MTW, Secs. 35.7 and 35.15). Here the brackets \langle\rangle denote an average over several wavelengths. The power radiated into a unit solid angle about the radial, n, direction is

$$\frac{dE}{d\Omega dt} \equiv -r^2 n_j T^{\rm GW}_{j0} = +r^2 T^{\rm GW}_{00},$$

which-by using Eqs. (4.3), (4.8). and (1.11)_works out to be

$$\frac{dE}{d\Omega dt} = \sum_{l=2}^{\infty}\sum_{l'=2}^{\infty}\sum_{m,m'}\frac{1}{32\pi}\left\langle {}^{(l+1)}I^{lm(l'+1)}I^{l'm'}T^{E2,lm}_{jk}T^{E2,l'm'}_{jk}\right.$$
$$\left. +{}^{(l+1)}S^{lm(l'+1)}S^{l'm'}T^{B2,lm}_{jk}T^{B2,}_{jk}, l'm' + 2^{(l+1)}I^{lm(l'+1)}S^{l'm'}T^{E2,lm}_{jk}T^{B2,l'm'}_{jk}\right\rangle,$$

$$\frac{dE}{d\Omega dt} = \sum_{l=2}^{\infty}\sum_{l'=2}^{\infty}\frac{1}{4\pi l! l'!}{}^{(l+1)}g_{A_l}{}^{(l'+1)}g_{B_{l'}}N_{A_l}N_{Bl'} - 4^{(l+1)}g_{jA}{}^{(t'+1)}g_{jBl'-1}N_{Al-1}N_B + t^{(-1} + 2^{(l+1)}g_{jkA}\left(l'+1\right)g_{jk}$$

$$+\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{l'=2}^{\infty}\frac{ll'}{4\pi(l+1)!\left(l'+1\right)!}\left(4^{(l+1)}s_{A_l}{}^{(l'+1)}s_{B_l}{}^{N_A}A_l N_B l^t - 88^{(l+1)}s_{jA_{l-1}}{}^{(l'+1)}s_{jB_l l'-1}N_{A_{l-1}}N_{Bl'-1}\right.$$

$$\left. +4^{(l+1)}S_{jkAl-2}{}^{(l'+1)}S_{jkBl'-2}N_{A_{l-2}}N_{B_{l'-2}} - 4\epsilon_{cpj}\epsilon_{dqk}\left(l^{(l+1)}S_{cdA_{l-2}}\left(l'^{+1}\right)S_{jkB}l_{l'-2}n_p n q_{f^2}N_{A_{l-2}}N_B l_{l'-2}\right\rangle\right.$$

$$+\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{l'=2}^{\infty}\frac{8l'}{4\pi l!\left(l'+1\right)!}\left\langle -\epsilon^{(l+1)}_{jkp}g_{jA_{l-1}}\left(l'+1\right)g_{kBl'-1}n_p N_{A_{l-1}}N_{B_{l'-1}} + \epsilon_{jkp}\left(l^{(+1)}g_{jiA_{l-2}}\left(l'^{+1)}S_{kiBl'-2}n_t N_{A_{l-2}}N\right.\right.\right.$$

Вывод формулы Эйнштейна для энергии гравитационных волн

The total power radiated is the integral of this energy flux over a sphere lying in the local wave zone:

$$\frac{dE}{dt} = \int \frac{dE}{d\Omega dt} d\Omega.$$

Expression (4.14) is easily integrated using the orthonormality of the pure-spin tensor harmonics [Eq. (2.36a)] and the complex-conjugate behavior (2.36b), (4.5):

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{32\pi}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left\langle \left|{}^{(l+1)}I^{Im}\right|^2 + \left|{}^{(l+1)}S^{Im}\right|^2\right\rangle.$$

This result is due to Mathews (1962).

[beware, however, his peculiar notation, e.g., $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + (32\pi G)^{1/2}h_{\mu\nu}$].

The analogous STF expression can be found either by inserting Eq. (4.14) into Eq. (4.15) and integrating with the help of Eqs. (2.5) and (2.6); or by taking the claimed answer (4.16) and transforming back to Eq. (4.16) with the help of Eqs. (4.6) and (2.26a). The result is

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{l=2}^{\infty}\frac{(l+1)(l+2)}{(l-1)l}\frac{1}{l!(2l+1)!!}\left\langle {}^{(l+1)}\mathcal{J}_{A_l}{}^{(l+1)}\mathcal{J}_{A_l}\right\rangle$$
$$+\sum_{l=2}^{\infty}\frac{4l(l+2)}{(l-1)}\frac{1}{(l+1)!(2l+1)!!}\left\langle {}^{(}l+1)\mathrm{S}_{A_l}{}^{(l+1)}\mathrm{S}_{A_l}\right\rangle$$

The mass quadrupole part agrees with Einstein's (1918) formula (30), after correction of his factor -2 error:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{mass quadrupole}} = \frac{1}{5}\left\langle \dddot{\mathcal{J}}_{jk}\dddot{\mathcal{J}}_{jk}\right\rangle;$$

[cf. Eq. (36.23) of MTW]. The mass octupole and current quadrupole parts agree with Papapetrou's (1962, 1971) formulas - after one invokes Eqs. (5.19) below and changes notation.

Об 1/5 или 1/45? (???)

(?? чего у Ландау 1/45?)

Об обсчете Эйнштейна в его оригинальной статье (???)

(чет тут Торн пишет про это, потом напишу)

22.2.3 Linear momentum in the waves

The waves from our source carry linear momentum out radially; and, as with any locally plane-fronted radiation field, the magnitude of their momentum flux is the same as that of their energy flux

$$\frac{dP_j}{d\Omega dt} \equiv r^2 n_k T^{GW}_{kj} = r^2 n_j \frac{dE}{d\Omega dt}$$

[cf. Eq. (35.77j) of MTW]. The total rate at which the source feeds momentum into the radiation field

$$\frac{dP_j}{dt} = \int \frac{dP_j}{d\Omega dt} d\Omega$$

can be calculated by inserting (4.14) into (4.18) and (4.19) and then using group-theoretic methods (Racah recoupling, etc.) to bring the integrand into doable form; the result is

$$\begin{aligned}
\frac{dP_j}{dt} = &\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m}\frac{1}{32\pi(l+1)}\left(\frac{2(l-1)(l+3)}{(2l+1)(2l+3)}\right)^{1/2}\Big\langle {}^{)l+1)}I^{lm*}\,\{\\
&\big[[(l-m+1)(l-m+2)]^{1/2(l+2)}I^{l+1}m^{m-1}\xi_j^{-1}\\
&+[2(l-m+1)(l+m+1)]^{1/2(l+2)}I^{l+1}m\xi_j^0+[(l+m+1)(l+m+2)]^{1/2(l+2)}I^{l+1m+1}\xi_j^1\big\}\Big\rangle\\
&+\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m}\frac{1}{32\pi(l+1)}\left(\frac{2(l-1)(l+3)}{(2l+1)(2l+3)}\right)^{1/2}\Big\langle)l+1)S^{lm*}\,\big\{[(l-m+1)(l-m+2)]^{1/2(l+2)}S^{l+1}m^{-1}\\
&+[2(l-m+1)(l+m+1)]^{1/2(l+2)}S^{l+1}\xi_j^0+[(l+m+1)(l+m+2)]^{1/2(l+2)}S^{l+1m+1}\xi_j^1\big\}\Big\rangle\\
&+m^{(1+1)}S^{lm}\xi_j^0-\left[\frac{1}{2}(l-m)(l+m+1)\right]^{1/2(l+1)}S^{lm+1}\xi_j^1\Big\}\Big\rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m}\frac{-i}{8\pi l(l+1)}\Big\langle (l+1)I^{lm*}\{\left[\tfrac{1}{2}(l+m)(l-m+1)\right)]^{1/2(l+1)}S^{lm-1}\xi_j^{-1}\\
&\qquad+m^{(l+1)}S^{lm}\xi_j^0-\left[\frac{1}{2}(l-m)(l+m+1)\right]^{1/2(l+1)}S^{lm+1}\xi_j^1\Big\}\Big\rangle.
\end{aligned}$$

Alternatively, one can insert Eq. (4.14') into Eqs. (4.18) and (4.19), and then integrate with the help of Eqs. (2.5) and (2.6). The result is

$$\frac{dP_j}{dt} = \sum_{l=2}^{\infty} \left\{ \frac{2(l+2)(l+3)}{l(l+1)!(2l+3)!!} \left\langle (l+2) g_{jA_l}{}^{(l+1)} g_{A_l} \right\rangle + \frac{8(l+3)}{(l+1)!(2l+3)!!} \left\langle {}^{(l+2)}\mathcal{S}_{jA_l}{}^{(l+1)}\mathcal{S}_{A_l} \right\rangle \right.$$
$$\left. + \frac{8(l+2)}{(l-1)(l+1)!(2l+1)!!} \left\langle \epsilon_{jpq}{}^{(l+1)g_{pA_{l-1}}(l+1)}\mathcal{S}_{qA_{l-1}} \right\rangle \right\}.$$

[1)] Einstein (1918) makes a factor 2 error in going from Eq. (9) to (16); and, as a result, his Eqs. (27) and (30) for the energy in the waves are a factor 2 too small.

$$\frac{dE}{d\Omega dt} = \sum_{l=2}^{\infty}\sum_{l'=2}^{\infty} \frac{1}{4\pi l! l'!} \left\langle {}^{(l+1)}g_{A_l}\,(l'+1)\,g_{B_l}N_{A_l}N_{B_l} - 4^{(l+1)}g_{jA_{l-1}}\,(l'+1)\,g_{jB_l-1}N_{A_{l-1}}N_{B_l-1} + 2^{(l+1)}g_{jkA}(l-2\right.$$

$$+ \sum_{l=2}^{\infty}\sum_{l'=2}^{\infty} \frac{ll'}{4\pi(l+1)!\,(l'+1)!} \left\langle 4^{(l+1)}\delta_{A_l}{}^{(l'+1)}\delta_{B_l}N_{A_l}N_{B_{l'}} - 8^{(l+1)}\delta_{jA_{l-1}}{}^{(l'+1)}\delta_{jB_{l'-1}}N_{A_{l-1}}N_{B_{l'-1}}\right.$$

$$\left. +4^{(l+1)}S_{jkA_{l-2}}{}^{(l'+1)}S_{jkBl'-2}N_{A_{l-2}}N_{B_{l'-2}} - 4\epsilon_{cpj}\epsilon_{dqk}{}^{(l+1)}S_{cdA_{l-2}}{}^{(l'+1)}S_{jkBl'-2}n_{p'}n_{d'}N_{A_{l-2}}N_{B_{l'-2}} \right\rangle$$

$$+ \sum_{l=2}^{\infty}\sum_{l'=2}^{\infty} \frac{8l'}{4\pi l!\,(l'+1)!} \left\langle -\epsilon_{jkp}{}^{(l+1)}g_{jA_{l-1}}{}^{(l'+1)}\mathrm{S}_{kB}l' - 1n_pN_{A_{l-1}}N_{B_{l'-1}} + \epsilon_{jkp}{}^{(l+1)}g_{jiA_{l-2}}{}^{(l'+1)}\mathrm{S}_{kiBl'-2}n_pN_{A_{l-2}}N_{B}\right.$$

$$+ \sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m} \frac{-i}{8\pi l(l+1)} {}^{\langle(l+1)}I^{lm*} \left\{ \left[\frac{1}{2}(l+m)(l-m+1)\right]^{1/2(l+1)} S^{lm-1}\xi_j^{-1}\right.$$

Once one has derived either Eq. (4.20) or (4.20'), then one can obtain the other from it with the aid of Eqs. (4.6), (4.7), and (2.26). A general expression for dP_j/dt, presumably equivalent to these but in rather different notation, was derived by Campbell and Morgan (1971). Papapetrou (1962, 1971) derived the leading terms (those involving mass quadrupole, current quadrupole, and mass octupole)-but also in rather different notation.

22.2.4 Angular momentum in the waves

The dependence of the wave field h_{jk}^{TT} on angle causes its wave fronts to be not quite precisely spherical-aand thereby enables the waves to carry off angular momentum. One might hope that the angular momentum loss could be calculated by integrating $\epsilon_{jab}x_aT_{b0}^{\mathrm{GW}}$ over a sphere surrounding the source. Unfortunately, such a procedure fails - for this reason: The averaging process that underlies Eq. (4.12) for $T_{\alpha\beta}^{\mathrm{GW}}$ treats as zero the "tiny corrections" which die out as $1/r^3$. However, it is precisely the $1/v^3$ part that carries off the angular momentum. I was vaguely aware of this fact when writing the relevant sections of MTW, but was not sufficiently certain to spell it out explicitly. Subsequently Bryce DeWitt (1971) derived a simple, correct expression for the flux of angular momentum. An alternative derivation, which I have carried out as a check, begins with the fact [MTW Eq. (20.26)] that

$$\frac{dS_j}{dt} = -\frac{dS_j^{\mathrm{source}}}{dt} \equiv -\frac{1}{2}\epsilon_{jab}\frac{dJ_{ab}^{\mathrm{source}}}{dt}$$
$$= \int \epsilon_{jab}x_at_{bc}^{LL}n_cr^2d\Omega.$$

Here $t^{LL}_{\alpha\beta}$ is the Landau-Lifshitz pseudotensor and $S_j^{\rm source}$ is the intrinsic angular momentum of the source. By expressing t^{LL}_{bc} in terms of the metric perturbation, and by then averaging $\epsilon_{ja}x_a t^{LL}_{bc}n_c$ over several wavelengths, one ultimately winds up with the simple DeWitt formula $\frac{dS_j}{dt} = \frac{1}{16\pi}\int \epsilon_{jpq}x_p \left\langle \left(h^{\rm TT}_{qa}h^{\rm TT}_{ab,0}\right)_{,b} - \frac{1}{2}h^{\rm TT}_{ab,a}h^{\rm TT}_{ab,0}\right\rangle r^2 d\Omega$

An equivalent formula, obtained from Eq. (4.22) by integration by parts, is $\frac{dS_j}{dt} = \frac{1}{16\pi}\int \left\langle \epsilon_{jpq}h^{\rm TT}_{pa}h^{\rm TT}_{aq,0} - \frac{1}{2}\epsilon_{jpq}x_p h^{\rm TT}_{ab,q}h^{\rm TT}_{ab,0}\right\rangle r^2 d\Omega$.

A word of interpretation is needed. This equation is correct only if the integral is evaluated in the asymptotic rest frame of the source. (Similarly for all previous formulae in this section.) As the source's linear momentum changes [Eq. (4.20)], its asymptotic rest frame gradually changes; and one must gradually change the reference frame in which one evaluates Eq. (4.22) (and all previous integrals).

Return to Eq. (4.22). An exceedingly long and tedious calculation, using techniques similar to those for evaluating the energy and momentum integrals, brings Eq. (4.22) into the forms

$$\begin{aligned}
\frac{dS_j}{dt} =& \frac{i}{32\pi}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_m \Bigg\langle)l) I^{lm*}\Bigg\{\left[\frac{1}{2}(l+m)(l-m+1)\right]^{1/2(l+1)} I^{lm-1}\xi_j^{-1} \\
&+ m^{(l+1)}I^{lm}\xi_j^0 - \left[\frac{1}{2}(l-m)(l+m+1)\right]^{1/2(l+1)I^l m+1}\xi_j^1\Bigg\}\Bigg\rangle \\
&+ \frac{i}{32\pi}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_m \Bigg\langle)^{l)} S^{lm*}\Bigg\{\left[\frac{1}{2}(l+m)(l-m+1)\right]^{1/2(l+1)} S^{lm-1}\xi_j^{-1} \\
&+ m^{(l+1)}S^{lm}\xi_j^0 - \left[\frac{1}{2}(l-m)(l+m+1)\right]^{1/2(l+1)} S^{lm+1}\xi_j^1\Bigg\}\Bigg\rangle \\
\frac{dS_j}{dt} =& \sum_{l=2}^{\infty}\frac{(l+1)(l+2)}{(l-1)l!(2l+1)!!}\left\langle \epsilon_{jpq}{}^{(l)}g_{pA_{l-1}}{}^{(l+1)}g_{qA_{l-1}}\right\rangle\Bigg\rangle \\
&+ \sum_{l=2}^{\infty}\frac{4l^2(l+2)}{(l-1)(l+1)!(2l+1)!!}\left\langle \epsilon_{jpq}{}^{(l)}S_{pA_{l-1}(l+1)}S_{qA_{l-1}}\right\rangle
\end{aligned}$$

As far as I know, general expressions such as these have not been given before; but the leading term (mass quadrupole) was given by Peters (1964), [2] and the next two terms (current quadrupole and mass octupole) were given by Cooperstock and Booth (1969).

E. Discussion

Of what use are the above formulas? I view them as tools to be used in studying the generation of gravitational waves from explicit sources: Given a source, one identifies the local wave zone. Using any technique one can dream up (and this is the tough part of the analysis!), one calculates the time-changing multipole moments of the source. One then plugs into the above for mulas to get the radiation field and the rate it carries off energy, momentum, and intrinsic angular momentum.

As an alternative application, one can calculate the radiation field of a given source (the tough task; above formulas not necessarily useful); one can use Eq. (4.10) or (4.11) to resolve it into multipole pieces; and one can then use the other formulas above to read off the energy, momentum, and angular momentum radiated.

Once the radiation field $h^{\rm TT}_{ij}$ is known in the local wave zone, one can propagate it on outwards to Earth using the propagation equation of the shortwave formalism [MTW, Sec. 35.14 and exercise 35.15; Thorne (1977) last section]. For typical situations the dominant parts of the waveforms (4.3) and (4.8) will remain highly accurate all the way to Earth, except for uninteresting phase shifts caused by background curvature and the waves' self-energy.

22.3 Multipole Moments Expressed as Integrals over Source by Thorne

A. General sources

For any asymptotically flat system one can introduce an asymptotically Minkowskii coordinate system in which the quantity

$$\bar{h}^{\alpha\beta} \equiv -(-g)^{1/2} g^{\alpha\beta} + \eta^{\alpha\beta}$$

[2] Note DeWitt's correction of an error in the Peters formula for the angular momentum density in the waves, as detailed on p. 992 of MTW. satisfies the de Donder gauge condition

$$\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0;$$

see, e.g., Fock (1964, p. 193). In these de Donder coordinates the exact Einstein field equations take the form

$$\Box \bar{h}^{\alpha\beta} = -16\pi\tau^{\alpha\beta},$$

where $\Box$ is the flat-space scalar wave operator $-\partial_t^2 + \nabla^2$, and the "effective stress-energy" $\tau^{\alpha\beta}$ has the form $\tau^{\alpha\beta} = (-g)\left(T^{\alpha\beta} + t_{LL}^{\alpha\beta}\right) + (16\pi)^{-1}\left[\bar{h}^{\alpha\mu}, \bar{h}^{\beta\nu}{}_{;\mu} - \bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\mu\nu}\bar{h}^{\mu\nu}\right]$.

Here $t_{LL}^{\alpha\beta}$ is the Landau-Lifshitz pseudotensor [MTW Eq. (20.22), or Landau and Lifshitz (1971) Eq. (101.7)]. The effective stress-energy and its two individual pieces are coordinate-divergence-free

$$\tau^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0; \quad \left[(-g)\left(T^{\alpha\beta} + t_{\mathrm{LL}}^{\alpha\beta}\right)\right]_{,\beta} = 0.$$

Far from the source, where $\left|\bar{h}^{\alpha\beta}\right| \ll 1$, $\bar{h}^{\alpha\beta}$ reduces to the trace-reversed metric perturbation: $\bar{h}^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h$.

For systems with extremely strong internal gravitye.g., systems involving black holes - the de Donder coordinate system may not cover all of spacetime in a nonsingular manner. In the rest of Sec. V (but only here) we forego treating such systems; i.e., we restrict ourselves to systems which admit nonsingular spacetime-covering de Donder coordinates. We can then invert the Einstein field equations using the flatspace outgoing-wave Green's function $G^{+}_{jk\cdot pq}(x, x')$ [cf. Eqs. (5.2b) and (2.49)]

$$\bar{h}_{jk}(x) = 16\pi \int G^{+}_{jk\cdot pq}(x, x')\, \tau_{pq}(x')\, d^4x'.$$

Note that this in fact is an integral equation for $\bar{h}_{jk}$, because τ_{pq} depends on $\bar{h}_{jk}$ [Eq. (5.3)].

We now restrict attention to field points x in the local wave zone; we take the transverse-traceless part of the radiation field $\bar{h}_{jk}^{\mathrm{TT}} = h_{jk}^{\mathrm{TT}}$; and we use the factorized form (2.50c) of the Green's function to obtain

$$h_{jk}^{\mathrm{TT}}(x) = 16\pi i \sum_{\lambda l' l m} \int d\omega \left(\mathrm{sgn}(\omega) \left[\Phi_{jk}^{+\omega\lambda l' l m}(x)\right]^{\mathrm{TT}} \times \int \left[\Phi_{pq}^{S\omega\lambda l' l m}(x')\right]^{*} \tau_{pq}(x')\, d^4x' \right)$$

Again this is an integral equation; τ_{p_q} depends on h_{jk}^{TT} as well as on other parts of the gravitational field. Of the basis outgoing-wave solutions $\Phi_{jk}^{+\omega\lambda l' l m}$ only those with $\lambda = 2$ have nonzero TT part; and of these, the ones with $l' = l-2, l, l+2$ contribute to the mass multipole, while the ones with $l' = l-1, l+1$ contribute to the current multipole. More specifically, upon inserting into Eq. (5.6) expressions (2.45c) and (2.48c) for the Φ 's, and upon using Eqs. (2.33) and (2.34) to compute the TT parts of the pure-orbital harmonics $T_{jk}^{\lambda l', l m}$, and upon using

the leading $1/r$ term in expression (2.47 b) for $h^{+l}(\omega r)$, one obtains the standard radiation-zone expansion (4.3) for $h^{\rm TT}_{jk}$, and the following expressions for the multipole moments of the radiation field (where we have changed the names of the integration variables from t', r', Ω' to t', r, Ω)

$$
\begin{aligned}
{}^{(l)}I^{lm}(t) =& (-i)^{l+2} 8 \int e^{-i\omega(t-t')} \left[\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(2l-1)(2l+1)} \right)^{1/2} \left[T^{2l-2,lm}_{pq}(\Omega) \right]^* j^{l-2}(\omega r) - \left(\frac{3(l-1)(l+2)}{(2l-1)(2l+3)} \right)^{1/2} \left[T \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{l(l-1)}{2(2l+1)(2l+3)} \right)^{1/2} \left[T^2_{pq} l+2, lm(\Omega) \right]^* j^{l+2}(\omega r) \right] \tau_{pq}\left(t', r, \Omega\right) r^2 d\Omega dr dt' d\omega, \\
{}^{(l)}S^{lm}(t) =& (-i)^{l+2} 8 \int e^{-i\omega(t-t')} \left[\left(\frac{l+2}{2l+1} \right)^{1/2} \left[T^{2l-1,lm}_{pq}(\Omega) \right]^* j^{l-1}(\omega r) \right. \\
& \left. - \left(\frac{l-1}{2l+1} \right)^{1/2} \left[T^{2l+1,lm}_{pq}(\Omega) \right]^* j^{l+1}(\omega r) \right] \tau_{pq}\left(t', r, \Omega\right) r^2 d\Omega dr dt' d\omega.
\end{aligned}
$$

In these expressions the integral over frequency can be performed explicitly using the fact that the Fourier transform of a spherical Bessel function is a Legendre polynomial. The result is

$$
\begin{aligned}
{}^{(l)}I^{lm}(t) =& 8\pi(-1)^l \int r^2 d\Omega dr \left\{ \int_{-1}^{+1} d\eta \left[\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(2l-1)(2l+1)} \right)^{1/2} \left[T^{2l-2,lm}_{pq}(\Omega) \right]^* P^{l-2}(\eta) \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{3(l-1)(l+2)}{(2l-1)(2l+3)} \right)^{1/2} \left[T^2_{pq} l, lm(\Omega) \right]^* P^l(\eta) + \left(\frac{l(l-1)}{2(2l+1)(2l+3)} \right)^{1/2} \left[T^2_{pq} l+2, lm(\Omega) \right]^* P^{l+2}(\eta) \right] \tau_{pq}(t- \right. \\
{}^{(l)}S^{lm}(t) =& 8\pi i(-1)^{l+1} \int r^2 d\Omega dr \left\{ \int_{-1}^{+1} d\eta \left[\left(\frac{l+2}{2l+1} \right)^{1/2} \left[T^2_{pq} l-1, lm(\Omega) \right]^* P^{l-1}(\eta) \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{l-1}{2l+1} \right)^{1/2} \left[T^{2l+1,lm}_{pq}(\Omega) \right]^* p^{l+1}(\eta) \right] \tau_{pq}(t - r\eta, r, \Omega) \right\}
\end{aligned}
$$

where P^l is our unconventional notation for the Lengendre polynomial of order l. These types of gravitational source integrals involving Legendre polynomials were first constructed by Campbell, Macek, and Morgan (1977).

The corresponding source integrals for the STF moments $\mathcal{J}_{A_l}$ and $\mathcal{S}_{A_l}$ can be constructed by inserting expressions (2.40) for $T^2 l', lm$ into Eq. (5.7), and by then comparing with Eq. (4.7). (In making the comparison one should note that, because $\mathcal{Y}^{lm*}_{A_l}$ is STF on its l indices, only the STF parts of the quantities contracted into $Y^{lm*}_{A_l}$ can contribute to I^{lm} and S^{lm}.) The result is

$$
\begin{aligned}
(l)g_{A_l} =& \Bigg[\frac{l)l-1))2l-3)!!}{2\pi i^{l+2}}\int e^{-i\omega)t-t')}\left\{N_{A_{l-2}}\tau_{a_{l-1}a_l}\left(j^{l-2}-\frac{6(l-1)(2l+1)}{(l+1)(2l+3)}j^{l}+\frac{(l-1)l(2l-1)}{(l+1)(l+2)(2l+3)}j^{l+2}\right.\right.\\
&+N_{A_{l-1}}\tau_{a_lj}n_j\left(\frac{6(2l-1)(2l+1)}{(l+1)(2l+3)}j^{l}-\frac{2l(2l-1)(2l+1)}{(l+1)(l+2)(2l+3)}j^{l+2}\right)+N_{A_l}\tau_{jj}\left(-\frac{2(2l-1)(2l+1)}{(l+1)(2l+3)}j^{l}-\right.\\
&\left.\left.+N_{A_l}n_jn_k\tau_{jk}\left(\frac{(2l-1)(2l+1)}{(l+1)(l+2)}j^{l+2}\right)\right\}d\omega d^3xdt'\Bigg]^{\mathrm{STF}}\\
{}^{(l)}\mathcal{S}_{A_l} =& \Bigg[\frac{(l-1)(2l-1)!!}{2\pi i^{l-1}}\int e^{-i\omega(t-t')}\\
&\times\left\{N_{A_{l-2}}\epsilon_{a_{l-1}pj}n_{\vec{p}}\tau_{ja_l}\left[j^{l-1}-\left(\frac{l-1}{l+2}\right)j^{l+1}\right]+\left(\frac{2l+1}{l+2}\right)N_{A_{l-1}}\epsilon_{a_lpj}n_p\tau_{jk}n_kj^{l+1}\right\}d\omega d^3xdt'\Bigg]^{\mathrm{sTF}}
\end{aligned}
$$

Here $j^{l'}\equiv j^{l'}(\omega r)$ and $\tau_{jk}\equiv\tau_{jk}\left(t',\mathrm{x}\right)$. These are the STF analogs of Eq. (5.7). The analogs of Eq. (5.8), involving Legendre functions rather than spherical Bessel functions, can be derived by performing the integral over ω in Eq. (5.9).

The source integrals (5.7)-(5.9) for I^{lm},S^{lm},g_{A_l}, and $\mathcal{S}_{A_l}$ are not particularly useful when the source has strong gravity and fast motions. This is because the integrals involve τ_{jk}, which in turn depends on the gravitational field $\bar{h}_{\alpha\beta}$[Eq.. (5.3)]. It may be prohibitively difficult to compute $\bar{h}_{\alpha\beta}$ for insertion into the source integrals.

B. Slow-motion sources

We now specialize to slow-motion sources-i.e., to sources which are confined to the deep interior of the near zone. For such sources

$\omega r\ll 1$ for r such that $\tau_{\alpha\beta}$ is non-negligible
in size, and
for ω such that non-negligible radiation
emerges at this frequency.

Hence, we can expand the spherical Bessel functions $j^{l'}(\omega r)$ in powers of $\omega r\lfloor$ real part of Eqs. (2.47c)] and keep only the leading term

$$
j^{l'}(\omega r)=\left[(2l'+1)!!\right]^{-1}(\omega r)^{l'}\left[1+O\left(\omega^2r^2\right)\right].
$$

The dominant contribution to the mass moment ${}^{(l)}I^{lm}$ comes from $l'=l-2;l'=l$ is down from it by $(\omega r)^2$, and $l'=l+2$ is down by $(\omega r)^4$. The dominant contribution to the current moment ${}^{(l)}S^{lm}$ comes from $l'=l-1;l'=l+1$ is down by $(\omega r)^2$. Hence, aside from fractional errors in the integrands of order $(\omega r)^2$,

$$
\begin{aligned}
{}^{(l)}I^{lm}(t) =& \frac{8(-i)^{l+2}}{(2l-3)!!}\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(2l-1)(2l+1)}\right)^{1/2}\\
&\times\int(\omega r)^{l-2}e^{-i\omega(t-t')}\left[T^2_{pq}l-2,lm(\Omega)\right]^*\\
&\times\tau_{pq}\left(t',\mathbf{x}\right)d^3xdt'd\omega,\\
{}^{(l)}S^{lm}(t) =& \frac{8(-i)^{l+2}}{(2l-1)!!}\left(\frac{l+2}{2l+1}\right)^{1/2}\\
&\times\int(\omega r)^{l-1}e^{-i\omega(t-t')}\left[T^{2l-1,lm}_{pq}(\Omega)\right]^*\\
&\times\tau_{pq}\left(t',\mathbf{x}\right)d^3xdt'd\omega.
\end{aligned}
$$

We now perform the integrals over ω and t' using the relations

$$
\int(-i\omega)^{l'}e^{-i\omega(t-t')}f\left(t'\right)dt'd\omega=2\pi^{(l')}f(t);
$$

and we express $T^2_{pq}l', lm(\Omega)$ in STF form using Eqs. (2.40). The result is

$$\begin{aligned}
{}^{(2)}I^{lm}(t) =& \frac{16\pi}{(2l+1)!!}\left(\frac{(l-1)l(l+1)(l+2)}{2}\right)^{1/2} \\
& \times \mathcal{Y}^{lm*}_{jkA^{lm*}_{l-2}} \int X_{A_{l-2}}\tau_{jk}(t,\mathbf{x})d^3x, \\
{}^{(1)}S^{lm}(t) =& \frac{16\pi}{(2l+1)!!}\left(\frac{2(l-1)l(l+2)}{l+1}\right)^{1/2} \\
& \times \epsilon_{pqj}Y^{lm*}_{kqA}\int x_p X_{A_{l-2}}\tau_{jk}(t,\mathbf{x})d^3x.
\end{aligned}$$

By virtue of the "differential conservation laws", $\tau^{\alpha\beta}{}_{,B} = 0$ of the source-which we can rewrite

$$\partial_t\tau_{00} = \tau_{0j,j}, \quad \partial_t\tau_{0j} = \tau_{jk,k}$$

-the source satisfies the identities

$$\begin{aligned}
&(l-1)l\tau_{jk}X_{A_{l-2}}\mathcal{Y}^{lm*}_{jkA} \\
&= \left(\partial_t{}^2\tau_{00}\right)X_{A_l}Y^{lm*}_{A_l} - \left(\tau_{jk}X_{A_l}\right),_{jk}\mathcal{Y}^{lm*}_{A_l} \\
&+ 2l\left(\tau_{jk}X_{Al-1}\right)_j\mathcal{Y}^{lm*}_{kA_{l-1}}; \\
&(l-1)\epsilon_{pqj}\mathcal{Y}^{lm*}_{kqA}\tau_{l-2}x_pX_{A_{l-2}} \\
&= -\epsilon_{pqj}\mathcal{Y}^{lm*}_{qA}\left(\partial_{t-1}\tau_{0j}\right)x_pX_{Al-1} \\
&+ \epsilon_{pqj}Y^{lm*}_{qA}\left(\tau_{jk}x_pX_{Al-1}\right)_k.
\end{aligned}$$

By inserting these identities into Eqs. (5.14) and integrating out the divergences to zero, we obtain

$$\begin{aligned}
I^{lm} =& \frac{16\pi}{(2l+1)!!}\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(l-1)l}\right)^{1/2}\mathcal{Y}^{lm*}_{A_l}\int\tau_{00}X_{A_l}d^3x, \\
S^{lm} =& \frac{-32\pi}{(2l+1)!!}\left(\frac{l(l+2)}{2(l-1)(l+1)}\right)^{1/2} \\
& \times y^{lm*}_{jA}l^m_{l-1}\int\epsilon_{jpq}x_p\left(-\tau_{0q}\right)X_{A_{l-1}}d^3x.
\end{aligned}$$

By then comparing with Eqs. (2.11), (2.24a), and (2.23b) we obtain

$$\begin{aligned}
I^{lm} &= \frac{16\pi}{(2l+1)!!}\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(l-1)l}\right)^{1/2}\int\tau_{00}Y^{lm*}r^ld^3x, \\
S^{lm} &= \frac{-32\pi}{(2l+1)!!}\left(\frac{(l+2)(2l+1)}{2(l-1)(l+1)}\right)^{1/2} \\
&\times \int\epsilon_{jpq}x_p\left(-\tau_{0q}\right)Y^{l-1,lm*}_j r^{l-1}d^3x \\
&= \frac{32\pi}{(2l+1)!!}\left(\frac{l+2}{2(l-1)}\right)^{1/2}\int\left(-\tau_{0j}\right)Y^{B,lm*\gamma^l}_j d^3x.
\end{aligned}$$

Similarly, by comparing Eqs. (5.17) with (4.7), and by noting that because Y^{lm*}_A is STF on its l indices only the STF parts of the integrals in Eqs. (5.17a) and (5.17b) contribute to I^{lm} and S^{lm}, we obtain

$$g_{A_l} = \left[\int \tau_{00} X_{A_l} d^3x\right]^{\rm STF},$$
$$s_{A_l} = \left[\int \epsilon_{a_l {\rm pq}} x_p \left(-\tau_{0a)}\right) X_{A_{l-1}} d^3x\right]^{\rm STF}.$$

Thus, the mass moment $g_A(t)$ which characterizes the radiation field is equal to the STF part of the l th *mo* - ment of the effective mass distribution τ_{00}; and the current moment $\mathfrak{S}_{A_1}(t)$ is equal to the STF part of the $(l-1)$ th moment of the effective angular momentum distribution $\epsilon_{jpq} x_p \left(-\tau_{0q}\right) = \epsilon_{jpq} x_p \tau^0_q$. The general expressions (5.18) were derived in linearized theory by Mathews (1962). The mass quadrupole term dates back to Einstein (1918); and the current quadrupole and mass octupole terms, in rather different notation, are due to Papapetrou (1962, 1971). Expressions (5.18) and (5.19) for the radiation moments are not exact. If M is the mass of the source, L is its characteristic size, $\pi = 1/\omega$ is the characteristic reduced wavelength or time scale of the radiation it emits, and $\pi_d \sim L\left|\tau_{00}/\tau_{0q}\right|$ is the characteristic dynamical time scale for internal motions of the source, then Eqs. (5.18) and (5.19) make errors of magnitude

$$\left|\delta I^{lm}\right| \sim \left|\delta \mathcal{G}_A\right| \sim ML^l (L/\pi)^2,$$
$$\left|\delta S^{lm}\right| \sim \left|\delta \mathcal{S}_A\right| \sim ML\left(L/x_d\right)(L/\pi)^2;$$

cf. Eq. (5.11) and associated discussion. For typical systems

$$\left|I^{lm}\right| \sim \left|g_{A_l}\right| \sim ML^l, \quad \left|S^{lm}\right| \sim \left|S_{A_l}\right| \sim ML^l\left(L/x_d\right);$$

so that the fractional errors are of order $(L/\chi)^2$. However, for highly symmetrical systems the actual moments of interest may be much smaller than (5.21); and the fractional errors can be dangerously larger than $(L/\pi)^2$.

It is straightforward to derive from Eqs. (5.7) or (5.9) higher-order corrections to the slow-motion moments (5.18) and (5.19). One need only keep higherorder terms in the expansions of $j^{l'}(\omega r)$. By keeping all terms in the expansions one obtains the following exact infinite series for the moments of a slow-motion source

$$I^{lm} = \frac{16\pi}{(2l+1)!!}\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(l-1)l}\right)^{1/2}\int \tau_{00} Y^{lm*} r^l d^3x$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{16\pi}{2^k k!(2l+2k+1)!!}\left(\partial_t\right)^{2k}\int \tau_{pq} r^{l+2k}\left[\frac{(2l+2k+1)}{2(k+1)}\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(2l-1)(2l+1)}\right)^{1/2} T^{2l-2,lm*}_{pq}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{3(l-1)(l+2)}{(2l-1)(2l+3)}\right)^{1/2} T^2_{pq} 2, lm* + \frac{2k}{2l+2k+3}\left(\frac{l(l-1)}{2(2l+1)(2l+3)}\right)^{1/2} T^2_{pqpq} l+2, lm*\right] d^3x,$$

$$S^{lm} = \frac{-32\pi}{(2l+1)!!}\left(\frac{(l+2)(2l+1)}{2(l-1)(l+1)}\right)^{1/2}\int \epsilon_{jpq} x_p \left(-\tau_{oq}\right) Y^{l-1,lm*}_j \gamma^{l-1} d^3x$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{16\pi i}{2^k k!(2l+2k+1)!!}\left(\partial_t\right)^{2k+1}\int \tau_{pq} r^{l+2k+1}\left[\frac{1}{2(k+1)}\left(\frac{l+2}{2l+1}\right)^{1/2} T^2_{pq} l^{2-1,lm*} + \frac{1}{2l+2k+3}\left(\frac{l-1}{2l+1}\right)^{1/}\right.$$

$$g_{A_l} = \left[\int\left(\tau_{00} X_{A_l} + \sum_{k=0}^{\infty}\left(r\partial_t\right)^{2k}\left(A^{lk} r^2 X_{A_{l-2}} \tau_{a_l - 1^a l} + B^{lk} X_{A_{l-1}} \tau_{a_l j^j} x_j + C^{lk} X_{A_l} \tau_{jj} + D^{lk} X_{A_l} n_b n_q \tau_{pq}\right)\right) d^3x\right.$$

$$s_{A_l} = \left[\int\left(x_{A_{l-1}} \epsilon_a p^{pq} x_p \left(-\tau_{0q}\right) + \sum_{k=0}^{\infty}\left(r\partial_t\right)^{2k+1}\left(E^{lk} X_{A_{l-2}} \epsilon_{al-1} x_p x_p \tau_{aa_l}^{r+F^{lk} X_{A_{l-1}}} \epsilon_{ap^{pq}} x_p \tau_{aj} n_j\right)\right) d^3x\right]^{\rm sT\,F}.$$

In expressions (5.23) the coefficients $A^{lk},, F^{lk}$ are

$$A^{lk} = \frac{(l-1)l(2l+1)!!}{2^k k!(2l+2k+3)!!}\left[\left(\frac{2l+2k+1)(2l+2k+3)}{2(2l-1)(2l+1)(k+1)} + \frac{6(l-1)(2l+2k+3)}{(l+1)(2l-1)(2l+3)} + \frac{2(l-1)lk}{(l+1)(l+2)(2l+1)(2l}\right.$$

$$B^{lk} = -\frac{(l-1)l(2l+1)!!}{(l+1)(2l+3)2^{k-1}k!(2l+2k+1)!!}\left[3 + \frac{2lk}{(l+2)(2l+2k+3)}\right],$$

$$C^{lk} = \frac{(l-1)l(2l+1)!!}{(l+1)(2l+3)2^{k-1}k!(2l+2k+1)!!}\left[1 - \frac{k}{(l+2)(2l+2k+3)}\right],$$

$$D^{lk} = \frac{(l-1)l(2l+1!!k}{(l+1)(l+2)2^{k-1}k!(2l+2k+3)!!}$$

$$E^{lk} = \frac{(l-1)(2l-1)!!}{2^k k!(2l+2k+3)!!}\left[\left(\frac{l-1}{l+2}\right) + \frac{(2l+2k+3)}{2(k+1)}\right],$$

$$F^{lk} = -\frac{(l-1)(2l+1)!!}{(l+2)2^k k!(2l+2k+3)!!}.$$

Although the exact source integrals (5.22) and (5.23) were derived using Fourier-transform techniques [Eqs. (5.6)-(5.9)], they are valid independently of the Fourier transformability of $h^{\rm Tr}_{jk}$. Fourier transforms are nothing but a trick to simplify algebraic manipulations that can be performed equally well in the time domain.

It is straightforward to verify that, if the multipole moment $\mathfrak{T}_{A_l}$ ($\equiv g_{A_l}$ or $\mathfrak{S}_{A_l}$) is the largest contributor to the radiation field (4.8), then one can ignore "gravitational pseudotensor" contributions to $\mathfrak{M}_{A_l}$ from radii $\chi \sim r$; i.e., one can confine the integrals (5.18), (5.19), (5.22), (5.23) for $\mathfrak{M}_{A_l}$ to radii deep inside the near zone. In doing so, one makes errors $|\delta\mathfrak{M}_{A_l}| \lesssim (M/X)\,|\mathfrak{N}_{A_l}|$; cf. Eq. (9.34) below.

As we shall see below, Eqs. (5.22) and (5.23) can be used to generate post-Newtonian and post-post-Newtonian formulas for the radiative moments.

Newtonian sources

Specialize now to slow-motion sources with weak internal gravity and small internal stresses. Characterize the slow motion by a velocity parameter

$v \sim$ maximum of typical $\left\{\frac{|T_{0j}|}{|T_{00}|}, \frac{|T_{\alpha\beta,0}|}{|T_{\alpha\beta,j}|}\right\}$;

characterize the weak gravity by

$$\epsilon \equiv \text{ maximum over entire source of } \bar{h}_{00};$$

and characterize the small stresses by

$$S \equiv \text{ maximum over entire source of } |T_{jk}|\,/\,|T_{00}|\,.$$

One obtains the Newtonian theory of gravity by (i) beginning in de Donder gauge [Eqs. (5.1)-(5.4)]; (ii) restricting attention to sources with

$$\epsilon \sim (L/\chi)^2 \sim v^2 \sim S \ll 1;$$

(iii) restricting attention to the near-zone neighbor hood of the source, $r \le L$; and (iv) expanding the equations of motion (5.4) to lowest order in ϵ and linearizing the Einstein field equations, (5.2b); see, e.g., Chap. 18 of MTW.

For Newtonian sources, the theory of gravitationalwave generation is obtained by carrying out the procedures of Secs. V.A and V.B, and ignoring fractional corrections of order $\epsilon \sim (L/\chi)^2 \sim v^2 \sim S$. The result is Eqs. (5.18) and (5.19) for the multipole moments of the radiation field, with $\tau_{00} = \rho =$ (Newtonian mass density) and $-\tau_{0j} = \rho v_j =$ (Newtonian momentum density):

$$
\begin{aligned}
I^{lm} =& \frac{16\pi}{(2l+1)!!}\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(l-1)l}\right)^{1/2}\int \rho Y^{lm*} r^l d^3x \\
S^{lm} =& \frac{-32\pi}{(2l+1)!!}\left(\frac{(l+2)(2l+1)}{2(l-1)(l+1)}\right)^{1/2} \\
& \times \int (\epsilon_{jpq} x_p \rho v_q)\, Y_j^{l-1,lm*} r^{l-1} d^3x \\
{}_{A_l} =& \left[\int \rho X_{A_l} d^3x\right]^{\rm STF}, \\
\boldsymbol{s}_{A_l} =& \left[\int (\epsilon_{a_l pq} x_p \rho v_q)\, X_{A_{l-1}} d^3x\right]^{\rm STF}.
\end{aligned}
$$

Of course, the general expressions (5.27) are familiar from Mathews (1962) and the leading terms are familiar from Einstein (1918) and Papapetrou (1962, 1971). Note that the integrands of these source integrals are free of any reference to the gravitational field. They depend only on the source's material mass density and angular momentum density.

For typical Newtonian sources the multipole moments will have magnitudes (5.21) and will therefore produce radiation fields of strength

$$
\begin{aligned}
\left(h_{jk}^{\rm TT}\right)_{\text{mass } l\text{-pole}} &\sim (M/v)(L/x)^l, \\
\left(h_{jk}^{\rm TT}\right)_{\text{current } l\text{-pole}} &\sim (M/r)(L/x)^{l+1},
\end{aligned}
$$

where we have assumed that the source's dynamical time scale and gravitational-wave time scale are the same, $x_d \sim x$. For such sources, the Newtonian fractional errors $\epsilon \sim (L/x)^2 \sim v^2 \sim S$ in computing the various moments are such that

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\left(h_{jk}^{T}\right)_{\text{mass } l-\text{ pole}}}{\text{error in } \left(h_{jk}^{TT}\right)_{\text{mass quadrupole}}}\right| &\sim \left(\frac{\pi}{L}\right)^{4-l}, \\
\left|\frac{\left(h_{jk}^{\rm T}\right)_{\text{current } l\text{-po1e}}}{\text{error in } \left(h_{jk}^{\rm TT}\right)_{\text{mass quadrupole}}}\right| &\sim \left(\frac{\pi}{L}\right)^{3-l}.
\end{aligned}
$$

Thus, only the mass quadrupole, mass octupole, and current quadrupole fields are larger than the dominant (mass quadrupole) error.

Post-Newtonian sources

For sources with $\epsilon \sim (L/x)^2 \sim (L/x_d)^2 \sim v^2 \sim S$ small, but not extremely small, one may want to compute the radiation field with higher accuracy. One can do so using a post-Newtonian wave-generation formalism derived by Epstein and Wagoner (1975) and Wagoner (1977). [See Turner and Wagoner (1979) for an application of the formalism to collapsing stars.]

The Epstein-Wagoner procedure for deriving this formalism is the same as in the Newtonian case: (i) One constructs a near-zone post-Newtonian formalism for analyzing the source's motions; and one forces the formalism to satisfy the de Donder gauge condition (5.2a) to post-Newtonian order. (ii) Then one computes the radiative multipole moments, accurate to postNewtonian order [fractional errors $\sim (L/x)^4$] from Eqs. (5.22) and (5.23).

The resulting expressions for the multipole moments are

$$I^{lm} = \frac{16\pi}{(2l+1)!!}\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(l-1)l}\right)^{1/2} \times \int\left\{\tau_{00}Y^{lm*} + \frac{1}{2}\left(\frac{(l-1)l(2l+1)}{2l-1}\right)^{1/2} T_{jk}^{2l-2,lm*}\tau_{jk} + \left(\frac{6l(l-1)^2}{(l+1)(2l-1)(2l+3)}\right)^{1/2} T_{jk}^{2l,lm*}\tau_{jk}\right\} r^l d^3x$$

$$S^{lm} = \frac{-32\pi}{(2l+1)!!}\left(\frac{(l+2)(2l+1)}{2(l-1)(l+1)}\right)^{1/2} \times \int\left\{\epsilon_{jpq}n_p\left(-\tau_{0q}\right)Y_j^{l-1,lm*} - \frac{i[2(l-1)(l+1)]^{1/2}}{2(2l+1)} \times \left[\frac{1}{2}T_{jk}^{2l-1,lm*} + \frac{1}{2l+3}\left(\frac{i-1}{l+2}\right)^{1/2} T_{jk}^{ll+1,lm*}\right]\right\} r\partial_t\tau_{jk}\Bigg\} r^l d^3x;$$

$$\mathfrak{g}_{A_l} = \Big[\int\left(\tau_{00}X_{A_l} + A^{l0}\gamma^2 X_{A_{l-2}}\tau_{a_{l-1}a_l} + B^{l0}X_{A_{l-1}}\tau_{a_l j}x_j + C^{l0}X_{A_l}\tau_{jj}\right)d^3\lambda\Big]^{\rm sTF}$$

$$s_{A_l} = \Big[\int\left(X_{A_{l-1}}\epsilon_{a_l jk}x_j\left(-\tau_{0k}\right) + E^{l0}X_{A_{l-2}}\epsilon_{a_{l-1}jk}x_j r^2\partial_t\tau_{ka_l} + F^{l0}X_{A_{l-1}}\epsilon_{a_l{}^{jk}}x_j r\partial_t\tau_{kp}n_p\right)d^3x\Big]^{\rm sTF}.$$

Here

$$A^{l0} = \frac{(l-1)l(l+9)}{2(l+1)(2l+3)}, \quad B^{l0} = -\frac{6(l-1)l}{(l+1)(2l+3)},$$
$$C^{l0} = \frac{2(l-1)l}{(l+1)(2l+3)}, \quad E^{l0} = \frac{(l-1)(l+4)}{2(l+2)(2l+3)},$$
$$F^{l0} = -\frac{(l-1)}{(l+2)(2l+3)}$$

[cf. Eq. (5.24)]. In these expressions $\tau_{\alpha\beta}$ is the effective stress-energy tensor (5.3), evaluated at post-Newtonian order in the post-Newtonian de Donder gauge [Eqs. (37) of Epstein and Wagoner (1975), with indices lowered using the Minkowskii metric]. These $\tau_{\alpha\beta}$ depend on the source's Newtonian gravitational potential Φ, but they are free of any reference to the gravitational-wave field $h_{jk}^{\rm TT}$.

For typical post-Newtonian sources the multipole moments will have magnitudes (5.21) and will therefore produce radiation fields of strength (5.29). When this is the case, the post-Newtonian fractional errors $(L/x)^4$ in computing the various moments are such that

$$\left|\frac{\left(h_{jk}^{\rm Tr}\right)_{\rm mass\ \mathit{l}\text{-opole}}}{}\right| \sim \left(\frac{x}{L}\right)^{6-l},$$
$$\left|\frac{\left(h_{jk}^{\rm Tr}\right)_{\rm current\ \mathit{l}\text{-pole}}}{\left(\text{error in } h_{jk}^{TT}\right)_{\rm mass\ quadrupole}}\right| \sim \left(\frac{x}{L}\right)^{5-l}.$$

If one is willing to drop all terms in $h_{jk}^{\rm TT}$ smaller than or comparable to the (mass quadrupole) errors, then for such sources one need only compute mass multipoles of order $l \leqslant 5$ and current multipoles of $l \leqslant 4$; and in doing the computations one need keep the post-Newtonian corrections only in the mass 2-pole and 3-pole and in the current 2-pole. [For the other moments the

Newtonian expressions (5.27) and (5.28) produce radiation fields accurate to post-Newtonian order.] This is the procedure followed by Epstein and Wagoner (1975); see also Wagoner (1977).

On the other hand, for some special sources [e.g., torsional oscillations of neutron stars, Schumaker and Thorne (1980); also the collapse of a very slowly rotating star, Turner and Wagoner (1979)], the mass quadrupole moment will be strongly suppressed; Eqs. (5.34) will not apply; and one will be justified in keeping post-Newtonian corrections in one or mure of the higher moments.

E. Post-post-Newtonian sources and beyond

If one wished, one could construct a post-post-Newtonian wave-generation formalism by the same procedure used at Newtonian and post-Newtonian orders. The first step would be to reformulate the Chandrasekhar-Nutku (1969) near-zone post-post-Newtonian formalism in de Donder gauge, and evaluate the effective stress energy $\tau^{\alpha\beta}$ [Eq. (5.3)] in terms of the variables of that formalism. Then the radiative multipole moments, to post-post-Newtonian accuracy [fractional errors $\sim (L/x)^6$] will be given by Eqs. (5.22) and (5.23) with the $k = 0$ and $k = 1$ terms kept, and $k \geqslant 2$ discarded.

In principle one could proceed beyond post-post-Newtonian order by the same procedure; but in doing so one would have to face, and carefully handle, issues of radiation reaction in the source; see Chandrasekhar and Esposito (1970).

CONCLUSION

In Part One of this paper we have examined the multipole structure of the generic gravitational-wave field of an arbitrary source. In doing so, we placed only one very mild restriction on the nature of the source: that it be "isolated"; i.e., that it possess a local wave zone.

However, when we derived formulas for the coupling of the multipole waves to their source, we had to impose a much stronger restriction: that the source be coverable by a single non-singular de Donder coordinate system. Moreover, the resulting formulas are not terribly easy to apply (except in the Newtonian and postNewtonian limits), because the calculations must be performed in a de Donder coordinate system-which one may not have readily available in a given theoretical study - and because the integrands of the source integrals involve the gravitational-wave field itself ($\tau_{\alpha\beta}$ depends on h^{TT}_{jk}). Obviously, a better theory of coupling to the source would be useful.

In Part Two a new coupling formalism will be presented. It is valid for sources with arbitrarily strong internal gravity (including black holes); but it requires slow motions, $L/x < 1$.

22.4 Slow-Motion Sources of Gravitational Waves by Thorne

INTRODUCTION

In 1969, James Ipser (1970) computed the gravitational radiation emitted by a slightly deformed, slowly rotating, fully relativistic neutron star. His result was somewhat startling: He found that the multipole moments which governed the radiation field were precisely the same as the "mass multipoles" which one reads off the star's weak-field near-zone Newtonian potential. This led Ipser to conjecture that one can compute the gravitational waves from any strong-field slow-motion system by first computing (using full nonlinear general relativity) the system's asymptotic Newtonian potential, by reading the source's multipole moments off that potential, and by then inserting those moments into the gravitational-wave formulas of Part IV.

Soon thereafter, while writing the first draft of Chap. 36 of MTW, I found what I thought was a simple proof of Ipser's conjecture. That proof appears in the preliminary versions of MTW [Misner et al. (1970, 1971)] and is referred to in my review article with Bill Press on gravitational-wave astronomy [Press and Thorne (1972)]. However, much to my horror, in March 1973 while checking page proofs of the final version of MTW, I found a subtle but fatal flaw in my proof of Ipser's conjecture. After much agony I managed to rewrite the relevant material [Secs. 36.7 and 36.10 of Misner et al. (1973)] with a restriction to sources that have weak internal gravity - and without changing by even one the total number of lines of text.

In Part T wo of this article I shall try to redeem myself by presenting a correct formulation and proof of Ipser's conjecture. This formulation will avoid the concept of the asymptotic Newtonian potential of a source; in its place will appear a prescription for reading the multipole moments of a source off its nearzone general relativistic metric. However, in all other respects the formalism will conform to Ipser's original ideas.

Part Two of this paper consists of five sections. The first four (Secs. VIII-XI) develop foundations for the strong-field, slow-motion wave-generation formalism. The last (Sec. XII) presents the formalism itself and describes a few applications.

Each of the four foundations is a de rivation of the vacuum exterior gravitational field of a general isolated system. Section VIII derives that field for timedependent systems in linearized theory. Section IX derives it in the near zone of slow-motion timedependent systems in full general relativity using de Donder coordinates, and also matches that near-zone solution onto outgoing waves in the radiation zone. Section X specializes to time-independent general relativistic systems in de Donder coordinates; and Sec. XI extends the time-independent general relativistic case to any "asymptotically Cartesian and masscentered" (ACMC) coordinate system.

For a more detailed overview see Sec. I.B, Box 2, and the table of contents-all in Part One of this article.

22.4.1 Linearized Theory

Here we express, in terms of time-dependent multipole moments, the linearized external gravitational field of an arbitrary isolated system. Similar expressions, but in different notation, have been given by Sachs and Bergmann (1958), Sachs (1961), Pirani (1964), and Campbell and Morgan (1971). The notation used here is designed to fit in with that of Part One and with the remainder of this paper.

In linearized theory (e.g., Chap. 18 of MTW), the metric of spacetime $g_{\alpha\beta}$ is written as the Minkowskii metric $\eta_{\alpha\beta}$ plus a small perturbation $g^1_{\alpha\beta}$:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + g^1_{\alpha\beta}.$$

We shall denote by $\gamma^1_{\alpha\beta}$ the trace-reversed perturbation

$$\gamma^1_{\alpha\beta} \equiv g^1_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}g^1_{\mu\nu}.$$

(The reason for our "superscript 1 " notation will become clear in Sec. IX. The nature of our coordinate system and basis vectors, and the rules for raising and lowe ring indices, are discussed in Sec. I.C.)

We introduce Lorentz gauge $\gamma^{1\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$ for our gravitational field. Then, expressed in terms of covariant components, the gauge conditions and linearized vacuum field equations (Eqs. 18.8 of MTW) read

$$\gamma^1_{\alpha 0,0} = \gamma^1_{\alpha j,j},$$
$$\Box\gamma^1_{\alpha\beta} \equiv -\gamma^1_{\alpha\beta,00} + \gamma^1_{\alpha\beta,jj} = 0.$$

We seek the most general symmetric gravitational field $\gamma^1_{\alpha\beta} = \gamma^1_{\beta\alpha}$ which satisfies these equations, and which has only outgoing waves (no incoming waves) at infinity; and we write that field as a sum over its multipole components.

The general outgoing-wave solution to the field equation $\Box\gamma^1_{\alpha\beta} = 0$ in multipole notation has the following form [see Eq. (2.51), whe re we must set $\epsilon = +1$ (outgoing waves) and we must make the identifications $\gamma^1_{00} = F, \gamma^1_{0j} = V_j, \gamma^1_{jk} = U_{jk}$]:

$$
\begin{aligned}
\gamma^1_{00} &= \sum_{l=0}^{\infty} \left[r^{-1} a_{A_l}(t-r)\right]_{,A_l}\,,\\
\gamma^1_{0j} &= \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ \left[r^{-1} B_{jA_{l-1}}(t-r)\right], A_{l-1} + \left[r^{-1}\epsilon_{jpq}\mathfrak{C}_{qA_{l-1}}(t-r)\right]_{,pA_{l-1}} \right\}\\
&+ \sum_{l=0}^{\infty} \left[r^{-1} D_{A_l}(t-r)\right], jA_l,\\
\gamma^1_{jk} &= \sum_{l=0}^{\infty} \delta_{jk}\left[r^{-1}\mathcal{E}_{A_l}(t-r)\right], A_l\\
&+ \sum_{l=2}^{\infty} \left\{ \left[r^{-1}\mathfrak{F}_{jkA_{l-2}}(t-r)\right]_{,A_{l-2}} \right.\\
&\left. + \left[r^{-1}\epsilon_{pq(j}\mathcal{S}_{k)qA_{l-2}}(t-r)\right]_{,pA_{l-2}} \right\}\\
&+ \sum_{l=1}^{\infty} \left[\left[r^{-1}\mathfrak{K}_{jA_{l-1}}(t-r)\right]_{,kA_{l-1}} \right.\\
&\left. + \left[r^{-1}\epsilon_{jpq}\mathcal{J}_{qA_{l-1}}(t-r)\right]_{,kpA_{l-1}} \right]^S\\
&+ \sum_{l=0}^{\infty} \left[r^{-1}\mathcal{K}_{A_l}(t-r)\right]_{,jkA_l}\,.
\end{aligned}
$$

Here ϵ_{ijk} is the completely antisymmetric Levi-Civita tensor; the capital script quantities are the multipole moments, which are arbitrary functions of retarded time $t-r$ and are symmetric and trace-free (STF) on all their tensor indices; and all other details of notation are explained in Sec. I.C. The gauge conditions (8.3a) place the following constraints on the STF tensors appearing in the solution (8.4):

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{Q}_{A_l} = \dot{\alpha}_{A_l} - \ddot{D}_{A_l}, \quad \mathscr{F}_{A_l} = \ddot{Q}_{A_l} - \dddot{D}_{A_l} - \frac{1}{2}\ddot{\mathfrak{C}}_{A_l},\\
&\mathcal{E}_{A_l} = \dot{D}_{A_l} - \frac{1}{2}\mathscr{H}_{A_l} - \ddot{\mathcal{K}}_{A_l}, \mathcal{S}_{A_l} = 2\dot{\mathrm{C}}_{A_l} - \ddot{\mathcal{J}}_{A_l}.
\end{aligned}
$$

Here a dot means time derivative. Because for $l=0$ all STF coefficients in Eqs. (8.4) are absent except $Q, D, \mathcal{E}$, and $\mathcal{K}$, and for $l=1, \mathcal{F}$ and $\mathcal{S}$ are absent, Eqs. (8.5) for $l=0$ and 1 imply

$$
\begin{aligned}
&\dot{\mathfrak{a}} - \ddot{\mathfrak{D}} = 0, \quad \mathcal{E} - \dot{\mathfrak{D}} + \ddot{\mathfrak{K}} = 0,\\
&\dot{\mathfrak{C}}_j - \frac{1}{2}\ddot{\mathcal{D}}_j = 0, \quad \ddot{\mathfrak{a}}_j - \dddot{\mathfrak{D}}_j - \frac{1}{2}\ddot{\mathfrak{C}}_j = 0.
\end{aligned}
$$

By evaluating the surface integrals (20.6) of MTW [and in the evaluation using $\bar{h}_{\alpha\beta} = \gamma^1_{\alpha\beta}$, Eqs. (8.5), (8.6), (2.3), and the symmetric, trace-free nature of the capital script tensors] we learn that the source has total four-momentum

$$
P^0 = \frac{1}{4}(Q - \dot{D}), \quad P^i = -\frac{1}{4}\left(\dot{Q}_i - \ddot{D}_i - \frac{1}{2}\dot{\mathcal{C}}_i\right).
$$

Thus, the first and last of Eqs. (8.6) are the law of four-momentum conservation. Henceforth we shall restrict attention to sources with timelike four-momentum; and by a Lorentz boost (Sec. A.1 of Box 18.2 of MTW) we shall put ourselves in the rest frame of the source, where

$$
P_i = -\frac{1}{4}\left(\dot{Q}_i - \ddot{D}_i - \frac{1}{2}\dot{\mathcal{C}}_i\right) = 0.
$$

In this reference frame, from Eqs. (20.8) and (20.11) of MTW we learn that the source's center of mass is offset from the origin of coordinates by the vector displacement

$$Y_i = -(\alpha - \dot{D})^{-1}\left(Q_i - \dot{D}_i - \frac{1}{2}\mathcal{H}_i\right).$$

We now translate our origin of coordinates to the center of mass, thereby achieving

$$a_i - \dot{D}_i - \frac{1}{2}\mathscr{K}_i = 0.$$

Next we simplify our expression for the gravitational field by the change of gauge (infinitesimal coordinate transformation; part A2 of Box 18.2 of MTW)

$$\left(\gamma^1_{\alpha\beta}\right)_{\rm new} = \left(\gamma^1_{\alpha\beta}\right)_{o1\ {\rm d}} + \xi_{\alpha,\beta} + \xi_{\beta,\alpha} - \eta_{\alpha\beta}\xi^\mu{}_{,\mu},$$

where the generating functions ξ_α are given by

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= \sum_{l=0}^{\infty}\left[-r^{-1}D_{A_l}(t-r)\right]_{A_l} + \left[\frac{1}{2}r^{-1}\dot{\mathcal{K}}_{A_l}(t-r)\right]_{A_l},\\
\xi_j &= -\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{2}r^{-1}\mathcal{K}_{jA_{l-1}}(t-r)\right]_{,A_{l-1}}\right.\\
&\quad\left.+\left[\frac{1}{2}r^{-1}\epsilon_{jpq}\mathcal{J}_{aA_{l-1}}\right]_{pA_{l-1}}\right\}\\
&\quad-\sum_{l=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2}r^{-1}\mathcal{K}_{A_l}(t-r)\right]_{,jA_l}.
\end{aligned}$$

(Note that because $\Box\xi_\alpha = 0$, this gauge change preserves the de Donder gauge condition.) This gauge change brings to zero the following functions in the gravitational field of Eq. (8.4):

$$\mathfrak{D}_{A_l} = \mathfrak{K}_{A_l} = \mathfrak{d}_{A_l} = \mathcal{K}_{A_l} = 0.$$

We now change notation, setting

$$\begin{aligned}
a_{A_l} &= (-1)^l(4/l!)g_{A_l},\\
\mathfrak{e}_{A_l} &= (-1)^l[4l/(l+1)!]\mathcal{S}_{A_l},
\end{aligned}$$

and thereby obtain our final form for $\gamma^1_{\alpha\beta}$ [Eqs. (8.4), (8.5), (8.6), (8.8b), (8.10), (8.11)]:

$$\begin{aligned}
\gamma^1_{00} &= \frac{4g}{r} + \sum_{l=2}^{\infty}(-1)^l\frac{4}{l!}\left[r^{-1}g_{A_l}(t-r)\right]_{,A_l},\\
\gamma^1_{0j} &= \frac{-2\epsilon_{jpq}\mathcal{S}_p n_q}{r^2}\\
&\quad-\sum_{l=2}^{\infty}(-1)^l\frac{4l}{(l+1)!}\left[r^{-1}\epsilon_{jpq}\S_{pA_{l-1}}(t-r)\right]_{,qA_{l-1}}\\
&\quad+\sum_{l=2}^{\infty}(-1)^l\frac{4}{l!}\left[r^{-1}\dot{g}_{jA_{l-1}}(t-r)\right]_{,A_{l-1}},\\
\gamma^1_{jk} &= \sum_{l=2}^{\infty}(-1)^l\frac{4}{l!}\left[r^{-1}\ddot{\boldsymbol{g}}_{jkA_{l-2}}(t-r)\right]_{,A_{l-2}}\\
&\quad-\sum_{l=2}^{\infty}(-1)^l\frac{8l}{(l+1)!}\left[r^{-1}\epsilon_{pq(j}\dot{S}_{k)pA_{l-2}}(t-r)\right]_{,qA_{l-2}}.
\end{aligned}$$

Here $n_j = x_j/r$[cf. Eq. (1.5)]. The corresponding linear correction to the metric is [cf. Eq. (8.2)]

$$
\begin{aligned}
g^1_{00} &= \frac{2\boldsymbol{g}}{r} + \sum_{i=2}^{\infty}(-1)^l \frac{2}{l!}\left[r^{-1} g_{A_l}(t-r)\right], A_l, \\
g^1_{0j} &= -\frac{2\epsilon_{jpq} S_p n_q}{r^2} \\
&- \sum_{l=2}^{\infty}(-1)^l \frac{4l}{(l+1)!}\left[r^{-1}\epsilon_{jpq}\S_{pA^2-1}(t-r)\right]_{,aA_{l-1}} \\
&+ \sum_{l=2}^{\infty}(-1)^l \frac{4}{l!}\left[r^{-}\dot{\}}_{jA}(t-1)(r)\right]_{,A_{l-1}} \\
g^1_{jk} &= \delta_{jk}\left(\frac{2g}{r} + \sum_{l=2}^{\infty}(-1)^l \frac{2}{l!}\left[r^{-1} g_{A_l}(t-r)\right]_{A_l}\right) \\
&+ \sum_{l=2}^{\infty}(-1)^l \frac{4}{l!}\left[r^{-1}\ddot{g}_{jkA_{l-2}}(t-r)\right]_{,} A_{l-2} \\
&- \sum_{l=2}^{\infty}(-1)^l \frac{8l}{(l+1)!}\left[r^{-1}\epsilon_{pq(j}\dot{S}_{k)pA_{l-2}}(t-r)\right]_{,\alpha A_{l-2}}
\end{aligned}
$$

A few comments about this general linearized outgoing-wave solution are in order: (i) The mass monopole } and current dipole δ_j are independent of time by virtue of Eqs. (8.6), (8.10), and (8.11); and g is the total (active gravitational) mass M of the source, while S_j is its total angular momentum:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{g} \equiv M &= (\text{ mass of source }) = \text{ constant }, \\
\mathcal{S}_j \equiv S_j &= \text{ (angular momentum of source)} \\
&= \text{ constant;}
\end{aligned}
$$

cf. Eq. (19.5) of MTW. (ii) In this coordinate system there is no mass dipole moment,

$$\boldsymbol{g_j} = 0,$$

because the origin of coordinates lies at the center of mass of the source, and the coordinates are at rest relative to the center of mass. In other words, the coordinates are "mass centered." (iii) For $l \geqslant 2$, g_{A_l} and s_{A_l} are the mass and current moments of the linearized gravitational waves, as one can see by taking the transverse-traceless ("TT") part of Eq. (8.12c) or (8.13c) in the radiation zone and comparing with Eq. (4.8)

$$
\begin{aligned}
g_{A_l}(t) &= \text{ mass } l\text{-pole moment of radiation field,} \\
S_{A_l}(t) &= \text{ current } l\text{-pole moment of radiation field.}
\end{aligned}
$$

22.4.2 Dynamical Sources in de Donder Gauge

A. de Donder equations

Consider an isolated general relativistic system with arbitrarily strong internal gravity, but with internal motions sufficiently slow that the entire system resides well within its own near zone

$$
\begin{aligned}
L &\equiv (\text{ size of system }) \\
&\ll x = \left(\begin{array}{l}\text{characteristic reduced wavelength} \\ \text{of gravitational waves it emits}\end{array}\right).
\end{aligned}
$$

We seek the general external gravitational field of such a source, in its near zone

$$L < r < \lambda,$$

but with the demand that the near-zone field match onto purely outgoing waves (no incoming waves) in the wave zone.

We shall construct the general near-zone field and examine its match to the wave zone, using a de Donder coordinate system which is asymptotically Minkowskii at spatial infinity. Such a coordinate system can obviously be made to cover the entire weak-field region around the source (weak-field near zone plus local wave zone). It will not bother us that the coordinates might go bad in the deep, highly nonlinear interior of the source.

In our de Donder coordinates general relativity theory can be characterized by the following [cf. Sec. II of Thorne and Kovács (1975)]: (i) the gauge condition

$$\bar{h}_{00,0} = \bar{h}_{0j,j}; \quad \bar{h}_{j0,0} = \bar{h}_{jk_0k};$$

(ii) the vacuum field equations

$$\Box\bar{h}_{\alpha\beta} \equiv -\bar{h}_{\alpha\beta,00} + \bar{h}_{\alpha\beta,jj} = W_{\alpha\beta};$$

(iii) the expression for the "source" in terms of $\bar{h}_{\mu\nu}$:

$$W_{\alpha\beta} = -16\pi(-g)t^{LL}_{\alpha\beta} - \bar{h}_{\alpha\mu,\nu}\bar{h}^{\nu,\mu}_{\beta} + \bar{h}_{\alpha\beta,\mu\nu}\bar{h}^{\mu\nu},$$

where $t^{LL}_{\alpha\beta}$, the Landau-Lifshitz pseudotensor, and g, the determinant of the metric tensor, are both expressible as infinite power series in $\bar{h}_{\alpha\beta}$[cf. Eqs. (2), (9b), and (9g) of Thorne and Kovács (1975)], and all indices are raised and lowered with the Minkowskii metric; (iv) the asymptotically Minkowskii outgoingwave boundary conditions

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = r^{-1}A_{\alpha\beta}(t-r,\theta,\phi) \text{ at } r \to \infty;$$

and (v) equations for computing the metric $g_{\alpha\beta}$ from the gravitational field $\hbar_{\alpha\beta}$,

$$g^{\alpha\beta} \equiv (-g)g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - \bar{h}^{\alpha\beta}, \quad (-g) = \left(-\det\left\|g^{\alpha\beta}\right\|\right)^{-1},$$
$$\|g_{\alpha\beta}\| \equiv \left\|g^{\alpha\beta}\right\|^{-1}$$

[cf. Eqs. (2) and (9d) of Thorne and Kovács (1975)]. Note that the definition $\|g_{\alpha\beta}\| \equiv \left\|g^{\alpha\beta}\right\|^{-1}$ (Eq. 9.4) is the only place in these equations where indices are not raised and lowered with the Minkowskii metric. For example, the Minkowskii metric is used to obtain $t^{LL}_{\alpha B}$ (Eq. 9.3c) from $t^{\alpha B}_{LL}$ (Eqs. 2c and 9 g of Thorne and Kovács, 1975).

B. Nonlinearity expansion

In solving the field equations and gauge condition (9.3a) and (9.3b), we begin by making a "nonlinearity expansion" of the gravitational field $\bar{h}_{\alpha\beta}$:

$$\bar{h}_{\alpha\beta} \equiv \sum_{p=1}^{\infty} G^p\gamma^p_{\alpha\beta}.$$

Here G is Newton's gravitation constant, which has numerical value one in our units, but which serves as a bookkeeping device in the expansion. Note that $\gamma^1_{\alpha\beta}$ is the linear part of $\bar{h}_{\alpha\beta}$; $\gamma^2_{\alpha\beta}$ is the quadratic correction; $\gamma^3_{\alpha\beta}$ is the cubic correction, etc.

By inserting (9.5) into the infinite series (9.3c) we obtain a nonlinearity expansion of the source term $W^{\alpha\beta}$. Because $W^{\alpha\beta}$ is of quadratic order and higher in $\bar{h}_{\alpha\beta}$, its nonlinearity expansion begins with $p = 2$,

$$W_{\alpha\beta} = \sum_{p=2}^{\infty} G^p w^p_{\alpha\beta};$$

$$w^p_{\alpha\beta} \equiv \left[\begin{array}{l} \text{a sum of terms which each have the form} \\ \gamma^{a_1}_{\mu_1\nu_1,\sigma}\gamma^{a_2}_{\mu_2\nu_2,\rho}\gamma^{a_3}_{\mu_3\nu_3}\cdots\gamma^{a_n}_{\mu_n\nu} \text{ or } \gamma^{a_1}_{\mu_1\nu_1,\sigma\rho}\gamma^{a_2}_{\mu_2\nu_2}\cdots\gamma^{a_n}_{\mu_n\nu_n}, \\ \text{where } a_1+\cdots+a_n = p \text{ and where } n \geqslant 2 \text{ so } a_j \leqslant p-1 \text{ for all } j \end{array} \right].$$

The gauge condition and field equations (9.3a) and (9.3b) must now be satisfied order-by -order in the nonlinearity expansion

$$\gamma^p_{00,0} = \gamma^p_{0j,j}; \gamma^p_{j0,0} = \gamma^p_{jk,k};$$
$$\Box\gamma^p_{\alpha\beta} = w^p_{\alpha\beta}.$$

Because $w^p_{\alpha\beta}$ is constructed only from γ^q with $q \leqslant p-1$, these equations can be solved first for γ^1 ignoring all higher-order γ' 's then for γ^2 which is generated by γ^1 via the field equations (9.7 b); then for γ^3, which is generated by γ^1 and γ^2 via the field equations; etc. Once all the γ^p are known up to some desired order, one can calculate from Eqs. (9.4) the corresponding terms in a nonlinearity expansion of the metric

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \sum_{p=1}^{\infty} G^p g^p_{\alpha\beta}.$$

It seems almost certain to me (but I do not claim to have proved it) that this procedure will generate a nonlinearity series (9.5) that converges throughout the weak-field near zone, the local wave zone, and the region linking them [see Eq. (3.2) for terminology]. However, one cannot expect convergence either in the strong-field region where nonlinearities are huge, or in the distant wave zone, where nonlinearities will produce large phase shifts of the waves

$$\Delta\psi \sim (M/x)\ln(r/x) \gtrsim 1$$

[Eq. (3.4)].

Linear part of the gravitational field

The linear part $\gamma^1_{\mu\nu}$ of the general nonlinear field $\bar{h}_{\mu\nu}$ satisfies the field equations and gauge conditions of Linearized Theory [compare Eqs. (9.7) for $p = 1$ with Eqs. (8.3)]. Consequently, with an appropriate specialization of the de Donder coordinates [that nonlinear generalization of Eqs. (8.7b), (8.8b), and (8.9) which leaves the de Donder gauge condition (9.3a) unaffected to all orders], the most general $\gamma^1_{\mu\nu}$ can be put into the same form (8.12) as our general linearized-theory field.

Note that this general $\gamma^1_{\mu\nu}$ is determined by a constant mass $\} = M$, a constant angular momentum $\mathcal{S}_j = S_j$, and two sets of time-dependent multipole moments $\mathfrak{g}_{A_l}(t)$ and $s_{A_l}(t)$ with $l \geqslant 2$.

Multiparameter expansion of the near-zone gravitational field

Thus far our analysis has been valid throughout the local wave zone, the weak-field near zone, and the transition region which links them. We now restrict attention to the weak-field near zone and initiate a study of the nonlinear corrections $\gamma^p_{\alpha\beta}(p \geqslant 2)$ to $\bar{h}_{\alpha\beta}$ there.

For this purpose we introduce three length scales M, $R, *$ which characterize the near-zone field: M is the mass of the source at linear order

$$M \equiv \boldsymbol{g};$$

R is a length scale characterizing the nonspherical deformations of the source's gravitational field

$$R \equiv \left(\begin{array}{l} \text{maximum over all } l \geqslant 1 \text{ and} \\ \text{over all times of interest} \end{array} \right)$$
$$\text{of } \left\{ |g_{A_l}/M|^{1/l}, |\delta_{A_l}/M|^{1/l} \right\}$$

and X is the characteristic time scale on which the multipole moments change

$$\frac{1}{\bar{x}} \equiv \left(\begin{array}{c} \text{typical value} \\ \text{over all } l \geqslant 2 \end{array} \right) \text{ of } \left\{ \frac{\dot{g}_{A_l}}{\dot{g}_{A_l}}, \frac{\dot{\boldsymbol{S}}_{A_l}}{\mathrm{S}_{A_l}} \right\}.$$

For a realistic source of size L it is reasonable to expect $R \leq L$; cf. Eqs. (5.19); and in general the definitions (9.10) guarantee

$$|\boldsymbol{g}_{A_l}| \lesssim MR^l, \quad |\delta_{A_l}| \lesssim MR^l,$$
$$|\dot{g}_{A_l}| \lesssim MR^l/x, \quad |\dot{s}_{A_l}| \lesssim MR^l/x.$$

(If we wished, we could introduce a "rotational velocity parameter" v to distinguish current moments from mass moments; but such a parameter would make the discussion overly complicated.) Our slow-motion assumption (source deep within its own near zone) re- quires

$$x \gg M, \quad x \gg L \gtrsim R.$$

The "weak-field near zone" [Eq. (3.2)] is the region

$$x \gg r, r \gg M, r > L \gtrsim R.$$

We regard the multipole moments $g_{A_l}(t)$ and $s_{A_l}(t)$ as freely specifiable so that one can scale up or down each of the parameters M, R, and χ while leaving the others unchanged. In such scaling

g_{A_l} and s_{A_l} scale as MR^l

$\partial_t{}_{A_l}$ and $\partial_t \mathcal{S}_{A_l}$ scale as MR^l/x

We expand $\bar{h}_{\mu\nu}, W_{\mu\nu}$, and $g_{\mu\nu}$ in infinite series of terms, each term of which scales (at fixed r) as a definite power of M, of R, and of $1/x$; and each of which has a definite spherical-harmonic order l:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \sum_{p,n,u,l} \gamma^{pmul}_{\mu\nu}, W_{\mu\nu} = \sum_{p,n,u,l} w^{pnul}_{\mu\nu},$$
$$g_{\mu\nu} = \sum_{p,n,u,l} g^{pmul}_{\mu\nu}.$$

re

$\gamma^{pnul}_{\mu\nu}$ scales as $M^p R^n (1/x)^u$

and has spherical-harmonic order l;

Here

and similarly for $w^{pnul}_{\mu\nu}, g^{pnul}_{\mu\nu}$. These expansions should converge in the weak-field near zone, and only there, since they actually turn out to be expansions in powers of $g_{A_l}/r^{l+1}, \mathcal{S}_{A_l}/r^{l+1}$, and r/x-or, equivalently, in powers of $M/r, R/r$, and r/x; and all of these quantities are $\ll 1$ in the weak-field near zone [except extremely near the source; Eqs. (9.13)], but some of them are $\gtrsim 1$ in any other vacuum region of spacetime.

In addition to the quantities $\gamma^{pnul}_{\mu\nu}, w^{pnul}_{\mu\nu}, g^{pmul}_{\mu\nu}$, which have pure scale properties, we define the sum over one or more of the parameters in these quantities, and we denote a summed parameter by a dot:

$$\gamma^{pnu\cdot}_{\mu\nu} \equiv \sum_l \gamma^{pmul}_{\mu\nu}; g^{\cdot\cdot u^*}_{\mu\nu} = \sum_{p,n,l} g^{pnul}_{\mu\nu}; \text{ etc.}$$

Since all the multipole moments scale as M, the $\gamma^1_{\mu\nu}$ of our nonlinearity expansion also scales as M, and—as one can see from Eqs. (9.6), (9.7) $-\gamma^p_{\mu\nu}$ scales as M^p. Thus the $\gamma^p_{\mu\nu}$ of our nonlinearity expansion (Sec. IX.B) is equal to $\gamma^{p\cdots}_{\mu\nu}$; and similarly for w and g:

$$\gamma^p_{\mu\nu} = \gamma^{p\cdots}_{\mu\nu}, \quad w^p_{\mu\nu} = w^{p\cdots}_{\mu\nu}, \quad g^p_{\mu\nu} = g^{p\cdots}_{\mu\nu}.$$

By comparing Eqs. (8.12), (2.53), (9.14), and (9.16), we can read off the various subpieces of the linearorder field $\gamma^1_{\mu\nu}$. For example, the only nonzero pieces of γ^1_{00} are

$\gamma^{1000}_{00} = 4g/r$

$\gamma^{1l(2k)l}_{00}$

$$= -\frac{4(2l+1)!!r^{2k-l-1}}{l!2^k k!(-1-2l)(1-2l)\cdots(2k-1-2l)}{}^{(2k)}g_{A_l}(t)N_{A_l}$$

$$\text{for } l \geqslant 2, k \geqslant 0;$$

$\gamma^{1l(2k+1)l}_{00} = -\frac{(-1)^l 4r^{2k-l}}{l!2^{k-l}(k-l)!(2k+1)!!}{}^{(2k+1)}g_{A_l}(t)N_{A_l}$ for $k \geqslant l \geqslant 2$. (9.19c) Here a prefix superscript in parentheses means differentiation with respect to time, $(2k)g_{A_l} \equiv (\partial_t)^{2k} g_{A_l}$, and N_{A_l} means $n_{a_1}n_{a_2}\cdots n_{a_l}$; see Sec. I.C and Eq. (2.54). It is straightforward to verify that the only nonzero parts of $\gamma^1_{\mu\nu}$ are [Eq. (8.12)]

$$\gamma^{1000}_{00};\quad \gamma^{1l(2k)l}_{00} \text{ for } l \geqslant 2, k \geqslant 0;$$
$$\gamma^{1l(2k+1)l}_{00} \text{ for } k \geqslant l \geqslant 2;$$
$$\gamma^{1101}_{0j};\quad \gamma^{1lkl.}_{0j} \text{ for } l \geqslant 2, k \geqslant 0;$$
$$\gamma^{1lkl}_{ij} \text{ for } l \geqslant 2, k \geqslant 1.$$

$$w^{pmul}_{\mu\nu} = \left[\begin{array}{l} \text{a sum of terms, each of which has the form} \\ \left(\prod_{j=1}^N \gamma^{p_j n_j u_j l_j}_{\alpha\beta}\right)^{l-\text{ order part}}, \text{ with } v \text{ time derivatives } (v \leqslant 2) \text{ and } 2-v \text{ spatial} \\ \text{derivatives interspersed among the terms of the product; and with} \\ \sum p_j = p \geqslant 2, \sum n_j = n, v + \sum u_j = u, \sum l_j \geqslant l, \min|l_1 \pm l_2 \pm \cdots l_N| \leqslant l \end{array}\right];$$

The various $\gamma^{pmul}_{\mu\nu}$ are coupled together by the field equations, the de Donder gauge condition, and the match of the near-zone solution onto outgoing waves in the local wave zone. Because a time derivative ∂_t increases by 1 the $(1/x)$ order of a quantity, and because divergences and Laplacians leave unchanged the sphericalharmonic order of a quantity, the gauge conditions and field equations (9.7) say

$$\gamma^{pnul}_{0j,j} = \gamma^{pn(u-1)t}_{00,0}; \gamma^{pnul}_{jk,k} = \gamma^{pn(u-1)t}_{j0,0};$$
$$\nabla^2\gamma^{pnul}_{\mu\nu} = \gamma^{pn(u-2)l}_{\mu\nu,00} + w^{pnul}_{\mu\nu}.$$

The source term $w^{\text{pnul}}_{\mu\nu}$ has the form cf. Eqs. (9.3c), (9.15), (9.16), and the "angular momentum coupling rules." Because $W^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ and because the decomposition (9.15) of $W^{\mu\nu}$ is unique, $w^{pmul}_{\mu\nu}$ satisfies the necessary conditions for simultaneous integration of (9.21a) and (9.21b):

$$w^{pmul}_{0j,j} = w^{pn(u-1)l}_{00,0};\quad w^{pnul}_{jk,k} = w^{pn(u-1)l}_{j0,0}.$$

The nonlinear terms $\gamma^{pnul}_{\mu\nu}$ with $p \geqslant 2$ can be calculated one after another from the known linear terms and from already-calculated nonlinear terms by solving Eqs.

(9.21). At each stage in the solution the right-hand side of (9.21b) is known explicitly, and the higher-order left-hand side must be calculated subject to the consistency conditions (9.21a). For example, it is straightforward to find from Eqs. (9.3c), (9.19), and (9.20) that

$$w^{2000}_{00} = \frac{7}{8}\gamma^{1000}_{00,j}\gamma^{1000}_{00,j} = 149^2/v^4.$$

Inserting this into the field equations (9.21 b) one obtains

$$\gamma^{2000}_{00} = 7g^2/r^2,$$

which presents no problems in (9.21a) since g is time independent.

At each step in this procedure, one calculates $\gamma_{00}^{\rm pnul}$ from its known Laplacian; or one calculates $\gamma_{\mu j}^{pnul}$ from its known Laplacian and divergence. In the calculation one must use care to discern whether to add on a Laplacian-free and divergence-free piece (homogeneous solution). One never adds on such a piece with radial behavior $r^{-(l'+1)}, l' \geqslant 0$, since such a piece could perfectly well have been included in the linear part of the field $\gamma^1_{\mu\nu^\circ}$ However, one is sometimes forced to add on a homogeneous solution with radial behavior $r^{l'}$ in order to guarantee that the near-zone field matches onto outgoing waves in the local wave zone. [The term $\gamma_{00}^{1l(2l+1)t}$ in (9.19c) is an example; it is not generated by the near-zone field equations or gauge conditions; and it would change sign if one were to switch from an outgoing -wave boundary condition to ingoing waves.] The homogeneous part which one adds onto $\gamma_{\mu\nu}^{pnul}$ must scale as $M^p L^n \chi^{-u}$, must be dimensionless, must have vanishing Laplacian, and must have spherical-harmonic order l. Therefore, unless the homogeneous piece is a "tail term"' (see Appendix), its radial dependence must be $r^{-p-n+u} = r^{l'}$, where $l' \geqslant 0, l' = l$ if μ and ν are both temporal, $l-1 \leqslant l' \leqslant l+1$ if only one of μ and ν is temporal, and $l-2 \leqslant l' \leqslant l+2$ if μ and ν are both spatial. Thus

$\gamma_{\mu\nu}^{p\ \rm pul}$ can contain a homogeneous matching-generated piece only if $u \geqslant p+n+l'$,

$l' = \max[0, l - (\text{ number of spatial indices on } \gamma)]$.

F. Structure of the general near-zone term in the multiparameter expansion

The general term $\gamma_{\mu\nu}^{pmul}$ generated by the above procedure must be a sum of quantities which each have the following form:

$$\gamma_{\mu\nu}^{pnul} = \left[(u_0) \left(\prod_{j=1}^{p} (u_j)\, \mathrm{m}^{l_j}\, \pi_j \right) \right]^{l\pi} r^{-p-n+u} \sum_{k=0}^{K} C_k \left(\ln \frac{r}{R} \right)^k$$

(Matching-generated tail terms are the sole exception; see Appendix.) Here ${}^{(u_0)}()$ means the u_0 th time derivative of the quantity in parentheses, and u_0 can be negative; $\mathfrak{M}^{l_j\pi_j}$ is the multipole moment of the linear part of the field w ith order l_j and parity π_j:

$$\mathfrak{M}^{l_j\pi_j} = g_{A_{l_j}} \text{ if } \pi_j = (-1)^{l_j},$$
$$\mathfrak{M}^{l_j\pi_j} = \epsilon_{ipq} S_{pA_{l_j-1}} n_q \text{ if } \pi_j = (-1)^{l_j+1}$$

${}^{(u_j)'}\mathfrak{N}^{l_j\pi_j}$ is the u_j th time derivative of $\mathfrak{N}^{l_j\pi_j}$; $[]^{l\pi}$ means that the components of the p multipole moments are coupled together to give a spherical harmonic of order l and parity π; and C_k and R are constants.

There are p moments $\mathfrak{M}$ present in (9.25) so as to guarantee that the right-hand side scales as M^p. Scaling in L and $\times$ requires

$$\sum_{j=1}^{p} l_j = n, \sum_{j=0}^{p} u_j = u,$$

[cf. Eqs. (9.14) and (9.16)]. The laws of angular momentum coupling require

$$\sum_{j=1}^{p} l_j = n \geqslant l, \quad \min \left| \sum_{j=1}^{p} \pm l_j \right| \leqslant l.$$

The radial dependence of Eq. (9.25) is forced on us by the demand that $\gamma_{k:\nu}$ be dimensionless. A logarithmic term, $\ln(r/R)$, is created whenever one inverts the field equation (9.21b) with a source term of the form (Laplacian-free function) $\times r^{-2}$; for example,

$$\nabla^2 \gamma_{00}^2 4104 = \left[{}^{(4)}_{a_1a_2}{}^{(6)}g_{a_3a_4} \right]^{\rm STF} N_{A_4} r^2$$

is inverted to give

$$\gamma_{00}^{24104} = \frac{1}{9} \left[{}^{(4)}g_{a_1a_{\dot{2}}}{}^{(6)}g_{a_3a_4} \right]^{\rm STF} N_{A_4} r^4 \ln(r/R).$$

One can show that the maximum number K of logarithms in Eq. (9.25) is bounded by

$$K \leqslant p-1.$$

The proof is by induction: There are no logarithms present at linear order [Eqs. (8.12) and (2.53b)], so (9.26 d) is true for $p=1$. Assume it true for $1,2,,p-1$. Then the maximum number of logarithms in $w_{\mu\nu}^{\rm pnul}$, which has the form (9.22a), is

$$\sum_{j=1}^{N} K_j \leqslant \sum_{j=1}^{N} (p_j - 1) = p - N \leqslant p-2.$$

Imagine solving the field equations (9.21 b) for $\gamma_{\mu\nu}^{pnul,l'} \equiv$ (that part of $\gamma_{\mu\nu}^{pnul}$ with "pure-orbital" spherical-harmonic dependence $Y^{l'm}$ for $\mu\nu$ both temporal, or $\mathbf{Y}^{l',lm}$ (Sec. II.D) for one of $\mu\nu$ spatial, or $\mathbf{T}^{\lambda l',lm}$ (Sec. II.E) for $\mu\nu$ both spatial). These field equations, with p,n,l,l' fixed, can be solved in two sequences: the first for $u=,-2,0,2,4,;$ the second for $u=,-1,1,3,5,$. Along each sequence, precisely once (at $u-p-n=-l'-1$ or at $u-p-n=l'$; cf. Eq. [2.42]) we will encounter a source term of the form

$$\gamma_{\mu\nu,00}^{pn(u-2)l,l'} + w_{\mu\nu}^{pnul,l'} =$$
$$= \left(\text{ Laplacian-free function} \right) \times r^{-2} \sum_{k=0}^{p-2} C_k [\ln(r/R)]^k.$$

Before that source term is encountered, the $\gamma_{\mu\nu}^{pnul,l'}$ will have at most $p-2$ logarithms. That special source term, like (9.27a), will generate one new logarithmgiving at most $p-1$ logarithms in any of the $\gamma_{\mu\nu}^{pnul,l'}$. Thus $K \leqslant p-1$. QED

Since the parity of a quantity [Eq. (2.17)] is not changed by the linear manipulations involved in computing $\gamma_{\mu\nu}^{pmul}$ (taking the time derivative, divergence, Laplacian, or inverse Laplacian; matching out into the wave zone and then back in, selecting out a part with specific spherical harmonic order); and since the con- struction of the "source terms" $w_{\mu\nu}$ from the γ 's involves only simple products without any parity changing ϵ_{ijk} 's [cf. Eq. (9.3c)]; and since the parity of a product is the product of the parities, the coupling of multipoles in Eq. (9.25) must produce a harmonic with overall parity

$$\pi = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_p.$$

There is a minimum value which each integer $p,n,u,\ l$ must have in Eq. (9.25) in order for $\gamma_{\mu\nu}^{pnul}$ to be nonzero. Obviously $p>0$ [otherwise there will be no s's or g's in Eq. (9.25)]; $n \geqslant 0$ [since $n=\sum l_j$ and sphericalharmonic indices l_j can never be negative] $l \geqslant 0$ [same reason]; and $u \geqslant 0$ [this one proves by induction: it is true for $\gamma_{\mu\nu}^{1}$ [Eq. (9.20)]; if it is true for all p up to p_0-1 then w^{p_0nul} is zero unless $u \geqslant 0$ [Eq. (9.22)], so the inhomogeneous solutions to Eq. (9.21) for γ^{p_0nul} vanish unless $u \geqslant 0$, [3] and Eq. (9.24) guarantees that the "non-tail", homogeneous terms produced by matching have $u \geqslant p_0 + n > 0$; thus $u \geqslant 0$ for all nonzero $\gamma^{p_0n_ul}$]. In summary:

$$\gamma_{\mu\nu}^{pnul} = 0 \text{ unless } p>0, n \geqslant 0, u \geqslant 0, l \geqslant 0.$$

By noting how $g_{\mu\nu}^{pnul}$ is constructed algebraically from the $\gamma_{\alpha\beta}^{p'n'u'l'}$ [Eqs. (9.4) and (9.15)], and by then applying the same considerations as above to $g_{\mu\nu}^{pnut}$, one concludes that the "non-tail"' $g_{\mu\nu}^{pnut}$ has the same structure ⌊ Eqs. (9.25) and (9.26)] as $\gamma_{\mu\nu}^{pnul}$: It is a sum of terms each having the for m

$$g_{\mu\nu}^{pnul} = \left[{}^{(u_0)} \left(\prod_{j=1}^{p} (u_j)\, \mathfrak{R}^{l_j \pi_j} \right) \right]^{i\pi} r^{-p-n+u} \sum_{k=0}^{K} C_k \left[\ln\left(\frac{r}{R}\right) \right]_{(9}^{k}$$

where

all of the properties (9.26) hold for $g^{pnut}_{\mu\nu}$.

G. Secular changes of mass, linear momentum, and angular momentum

It is instructive to see how the above formalism produces a secular change in the mass, linear momentum, and angular momentum of the source which is equal and opposite to the mass, linear momentum, and angular momentum carried off by the waves. (That such a change must occur is proved, e.g., in Chap. 20 of MTW.) In the term $w_{0j}^{2(2l)(2l+2)0}$ there is a piece

$$\begin{aligned} w_{0j}^{2(2l)(2l+2)0} &= \text{const.}\ \times \left[\gamma_{00,0}^{1l0l}\gamma_{00,j}^{1l(2l+1)l}\right]^0 \\ &= \text{const.}\ \times r^{-2} n_j{}^{(1)} g_{A_l}^{(2l+1)} g_{A_l} \\ &= \text{const.}\ \times r^{-2} n_j{}^{(l+1)} g_{A_l}{}^{(l+1)} g_{A_l} \\ &\quad + \left[\begin{array}{l}\text{a perfect time derivative of a}\\ \text{quantity quadratic in time}\\ \text{derivatives of } g_{A_l}\end{array}\right] \end{aligned}$$

[cf. Eqs. (9.22a) and (9.19)]. This piece describes, in the near zone, an outward flux of energy associated

[3)]A delicacy occurs in situations like Eq. (9.29c), where a Laplacian-free $\gamma_{00}^{pn(u-1)l}$ or $\gamma_{0j}^{pn(u-1)l}$ is generated, through the gauge conditions, by γ_{0j}^{pnul} or $\gamma_{jk}^{p\,\mathrm{pul}}$. However, this "lowering of u by one" occurs only when the original u is greater than zero; so it presents no problems. with the mass l-pole part of the radiation field. By way of the field equation (9.21 b) it generates

$$\begin{aligned} \gamma_{0j}^{2(2l)(2l+2)0} &= \text{const.}\ \times n_j{}^{(l+1)} g_{A_l}{}^{(l+1)} g_{A_l} \\ &\quad + (\text{ perfect time derivative }) \end{aligned}$$

and then, by way of the gauge condition (9.21a), this generates

$$\begin{aligned} \gamma_{00}^{2(2l)(2l+1)0} &= \left(\text{ const./r}\right)\ \times {}^{(-1)}\left({}^{(l+1)}g_{A_l}{}^{(l+1)}g_{A_l}\right) \\ &\quad + (\text{ oscillatory quantity }). \end{aligned}$$

This term has the same form as the linear mass monopole part of the field, 4 g/r. When averaged over several characteristic time scales x, it and other similar terms represent a tiny, secular correction to the mass of the source. The tiny, secular change of linear momentum shows up as an analogous term in the (originally zero) $1/r^2$ mass dipole part of γ_{00}; and the tiny secular change of angular momentum shows up as an analogous term in the $1/r^2$ current-dipole part of γ_{0j}.

This manner in which our formalism generates the secular, "radiation-reaction" terms is analogous to the manner in which the Bondi-van der Burg-Metzner (1962) formalism does so. For insight, including a "nonlinearity expansion " similar to the one given here, see Bonnor and Rotenburg (1966).

H. Radiation field

Turn attention now to the "transition region" of space which includes the outer reaches of the near zone and the inner parts of the local-wave zone:

$$\begin{aligned} &\alpha_1\pi < r < \pi/\alpha_2, \alpha_1 \text{ and } \alpha_2 \text{ constants with } \alpha_i \ll 1, \\ &\text{but}\quad \alpha_1\pi \gg \max(M, L, R), \\ &*/\alpha_2 \ll r_0 \text{ [Eq. (3.4)]} \end{aligned}$$

Throughout this transition region gravity is so weak, $\left|\bar{h}_{\mu\nu}\right| \ll 1$, that we shall ignore nonlinearities in the field equations. Consequently, in a suitably chosen gauge $\hbar_{\mu\nu}$ will have the form (8.12) characteristic of the general outgoing-wave solution of the linearized field equations

$$\hbar_{00} = \frac{4g^{\rm rad}}{r} + \sum_{i=2}^{\infty}(-1)^2\frac{4}{l!}\left[r^{-1}g^{\rm rad}_{A_l}(t-r)\right],_i,$$

$$\hbar_{0j} = \frac{-2\epsilon_{jp}S^{\rm ad}_p\, n}{r^2}$$

$$-\sum_{l=2}^{\infty}(-1)^l\frac{4l}{(l+1)!}\left[r^{-1}\epsilon_{jpq}\mathcal{S}^{\rm rad}_{pA_{l-1}}(t-r)\right]_{,qA_{l-1}}$$

$$+\sum_{l=2}^{\infty}(-1)^l\frac{4}{l!}\left[r^{-1}\dot{\boldsymbol{g}}^{\rm rad}_{jA_{l-1}}(t-r)\right],A_{l-1},$$

$$\hbar_{jk} = \sum_{l=2}^{\infty}(-1)^l\frac{4}{l!}\left[r^{-1}\ddot{\boldsymbol{g}}^{\rm rad}_{jkA_{l-2}}(t-r)\right]_{,A_{l-2}}$$

$$-\sum_{l=2}^{\infty}(-1)^l\frac{8l}{(l+1)!}\left[r^{-1}\epsilon_{pq(j}\dot{\rm S}_{k)_{pA^{\rm rad}_{l-2}}}(t-r)\right]_{,qA_{l-2}}$$

throughout transition region (9.31c)

In the local wave zone itself, $r \gg \lambda$, the radiation field [obtained by evaluating the derivatives in Eq. (9.31c) with the help of Eq. (2.53) and by keeping only terms of order $1/r$] is Comparison with Eqs. (4.8) shows that $g^{\rm rad}_{A_l}$ and $\mathcal{S}^{\rm rad}_{A_l}$ are the mass and current moments of the radiation fieldhence the superscripts "rad."

The relationship between the radiation-field moments $\}^{\rm rad}_{A_l}, \mathcal{S}^{\rm rad}_{A_l}$ and the near-zone moments $g_{A_l}, \mathcal{S}_{A_l}$ can be inferred by comparing the transition-region solution (9.31) for $\bar{h}_{\mu\nu}$ with the non-tail near-zone solution (9.5), (8.12) at radii in the domain of overlap $\alpha, x \leqslant \gamma \leqslant x$ (method of "matched asymptotic expansions"):

$$\text{(l)}\ g^{\rm rad}_{A_l} = {}^{(l)}g_{A_l} + \left[\begin{array}{c}\text{a nonlinear correction of magnitude}\\ \text{equal to the } l\text{-pole, electric-parity}\\ \text{part of } \chi\sum_{p=2}^{\infty}\gamma^p_{jk} \text{ evaluated at } r\simeq\chi\end{array}\right]$$

$${}^{(l)}{\rm S}^{\rm rad}_{A_l} = {}^{(l)}{\rm S}_{A_l} + \left[\begin{array}{c}\text{a nonlinear correction of magnitude}\\ \text{equal to the } l\text{-pole, magnetic-parity}\\ \text{part of } \pi\sum_{p=2}^{\infty}\gamma^p_{jk} \text{ evaluated at } r\simeq\pi\end{array}\right].$$

Comparison with Eqs. (9.25) and (9.26) then shows that near-zone the nonlinearities contribute the following amounts to the multipoles of the radiation field:

$$\delta\mathfrak{M}^{l\pi} = \mathfrak{N}^{l\pi}_{\rm rad} - \mathfrak{N}^{l\pi} = \text{ a sum of terms with magnitudes}$$

$$\pi^{1+l-p-\Sigma l_j}\left(\prod_{j=1}^{p}\mathfrak{N}^{l_j\pi_j}\right]^{l\pi}\left[\ln\left(\frac{X}{R}\right)\right]^K$$

where

$$p \geqslant 2, \quad \sum_{j=1}^{p} l_j \geqslant l, \quad K \leqslant p-1.$$

It is straightforward to verify, from Eqs. (9.33), (9.26a), and (9.11) that those radiative moments which dominate the radiation field-the ones with the largest values of $|^{(l)}\mathfrak{T}^{l\pi}|$-will contain negligible nonlinear corrections:

$$\left|\delta\mathfrak{M}^{l\pi}\right| / \left|\mathfrak{M}^{l\pi}\right| \leq (M/\pi)\ln(\pi/R).$$

This means that throughout the local wave zone the radiation field is equal to the linear-order field [Eq. (8.12c)] to within fractional errors $\lesssim (M/x)\ln(x/R)$:

$$\hbar^{\rm TT}_{jk} = \left(\gamma^1_{jk}\right)^{\rm TT} \times \{1 + O[(M/\pi)\ln(\pi/R)]\}$$

in local wave zone.

[One can show -but this is not the appropriate place to do so-that the only radially cumulative nonlinear effects in the local wave zone which exceed M/π, are trivial phase shifts (Sec. III) and gauge changes. Among the nonlinear local-wave-zone effects of magnitude sM/λ are the tails of the waves; see Appendix for discussion.]

Summary

$\bar{h}^{\rm TT}_{jk} = \Big[\sum_{l=2}^{\infty} \frac{4}{l!} r^{-1(l)}\, {\rm g}^{\rm rad}_{jkA_{l-2}}(t-r) N_{A_{l-2}}$
(????)

The above formalism shows explicitly, in de Donder gauge, how the full nonlinear near-zone external gravitational field of the source is determined by its timedependent multipole moments, together with the outgoing-wave boundary condition. That the multipole moments plus outgoing-wave condition do fully determine the field has been known for a long time [Janis and Newman (1965) Bonnor and Rotenburg (1966)]. I have gone into this great detail on a well-known subject in order to obtain the form (9.28) of the general non-tail term in the expansion (9.15) of the metric, and in order to relate the near-zone field to the wave-zone field [Eq. (9.35)]. We will need these relations below.

22.4.3 Stationary Sources in de Donder Gauge

Consider next a stationary, isolated system residing in asymptotically flat spacetime. Introduce coordinates $\{x^\alpha\}$ such that $\partial/\partial x^0$ is the Killing vector field which generates the stationary time translations, and such that the metric coefficients are asymptotically Lorentz

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + O(1/r).$$

Then perform a coordinate transformation of the form

$$x^\alpha_{\rm new} = x^\alpha_{\rm old} + f^\alpha\left(x^j_{\rm old}\right); f^\alpha = \text{ constant } + O(1/r).$$

This keeps $\partial/\partial x^0 =$ (Killing vector) and maintains the asymptotically flat form (10.1) of the metric. Adjust the four functions $f^\alpha\left(x^j_{\rm old}\right)$ so that the metric in the new coordinate system satisfies the stationary de Donder gauge conditions

$$8^{\alpha j}, j = 0,$$

where $g^{\alpha\beta}$ is the metric density [Eq. (9.4)]. In this stationary de Donder coordinate system the metric is independent of x^0.

Now use the same procedure as was used for the dynamical case (Sec IX) to construct the general external gravitational field of such a stationary, isolated system. The result will be the same as in Sec. IX [Eqs. (9.15), (8.13), and (9.28)] with these exceptions: (i) Because of stationarity, the general term (9.28) in the solution must have

$$u = u_0 = u_1 = \cdots = u_p = 0.$$

(ii) Because of stationarity $w^{pnol,l'}_{\mu\nu}$ always has radial dependence $r^{-(p+n+2)}$ with $p + n \geqslant p + l' \geqslant l' + 2$. This guarantees that situations like (9.27), which produce logarithmic terms, never arise; i.e., the logarithmic terms are completely absent in Eq. (9.28); i.e.,

$$K = 0.$$

(iii) Because of stationarity there are no tail terms.

These considerations show that the general stationary metric can be written in the form

$$g_{\mu\nu} = \sum_{pnl} g^{pnl}_{\mu\nu}$$

where

$$g^1_{\mu\nu} = \sum_{n,l} g^{1nl}_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{l} \text{expression (8.13) with } g_{A_l} \\ \text{and } S_A \text{ independent of } t-r \end{array} \right);$$

and where the nonlinear corrections $g^{pnl}_{\mu\nu}$ are sums of terms which each have the form

$$g^{pnl}_{\mu\nu} = \left(\prod_{j=1}^{p} \mathfrak{m}^{l_j \pi_j} \right)^{\imath\pi} r^{-p-n},$$

with

$$p \geqslant 1, \sum_{j=1}^{p} l_j = n \geqslant l \geqslant 0,$$

$$\min \left| \sum_{j=1}^{p} \pm l_j \right| \leqslant l, \pi = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdots \pi_p,$$

$$\mathfrak{m}^{l_j \pi_j} = g_{A_{l_j}} \text{ if } \pi_j = (-1)^{l_j},$$

$$\mathfrak{M}^{l_j \pi_j} = \epsilon_{i_{pq}} \, \mathrm{S}_{pA_{l_j - 1}} n_q \text{ if } \pi = (-1)^{l_{j+1}},$$

$[\cdots]^{l\pi}$ means "coupled to give a spherical harmonic of order l and parity $\pi_?$ (10.5)

The general stationary metric coefficients $g_{\mu\nu}$[Eq. (10.5)] are known to be analytic functions of the de Donder coordinates (Muller zum Hagen, 1970).

This general stationary metric in mass-centered de Donder gauge can be w ritten more explicitly (but with some loss of information) as

$$\begin{aligned}
g_{00} &= -1 + \frac{2g}{r} - \frac{2g^2}{r^2} \\
&+ \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \left[\frac{2(2l-1)!!}{l!} g_{A_l} N_{A_l} + [(l-1) \text{ pole }] \right. \\
&\left. + \cdots + [\text{ monopole }] \right], \\
g_{0j} &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \left\{ -\frac{4l(2l-1)!!}{(l+1)!} \epsilon_{jka_l} s_{kA_{l-1}} N_{A_l} \right. \\
&\left. + [(l-1) \text{ pole }] + \cdots + [\text{ monopole }] \right\}, \\
g_{ij} &= \delta_{ij} \left[1 + \frac{2g}{r} \right) + \frac{g^2}{r^i} (\delta_{ij} + n_i n_j) \\
&+ \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \left[\frac{2(2l-1)!!}{l!} g_{A_l} N_{A_l} \delta_{ij} + [(l-1) \text{ pole }] \right. \\
&\left. + \cdots + [\text{ monopole }] \right].
\end{aligned}$$

[The quadratic g^2/r^2 terms follow from Eq. (9.23) and from a similar equation for γ^{2000}_{jk}.]

Note that one can read the mass l-pole moment off the $1/r^{l+1}$ part of g_{00}, and the current l-pole moment off the $1/r^{l+1}$ part of g_{0j}.

Janis and Newman (1965), Van der Burg (1968), Geroch (1970), Hansen (1974), and Clarke and Sciama (1971) have previously given definitions of multipole moments for stationary systems, and have proved that the moments completely fix the structure of the gravitational field, including its nonlinearities. However, it is not evident how the multipole moments which they define mesh with gravitational-wave theory, whereas the link of our moments to gravitational-wave theory is very simple and clear (Sec. XII). The moments in each set (Janis and Newman's,

Van der Burg's, Geroch and Hansen's, Clarke and Sciama's, and mine) must be some combination of the moments in each other set. However, nobody has yet exhibited those relationships explicitly.

22.4.4 Stationary Sources in an "Acmc" Coordinate System

A. Motivation

Suppose that one is given a stationary, asymptotically flat, vacuum metric in some arbitrary coordinate system. How can one compute its lowest few multipole moments?

One way would be to transform to a de Donder coordinate system, and then read off the moments by comparing with Eqs. (10.6). However, to perform such a coordinate transformation would be horrendously difficult for almost all metrics. (Try the Kerr metric, for example).

Fortunately, a full de Donder transformation is not necessary. There exists a wide class of coordinate systems in which one can readily read off the lowest few moments. I shall call such systems "asymptotically Cartesian and mass centered," or ACMC. It is rather straightforward to transform an arbitrary stationary metric into ACMC form and then read off its moments. The Kerr metric is treated as an example below (Sec. XI.D).

B. Metric in ACMC coordinates

A coordinate system will be called "asymptotically Cartesian and mass centered to order N " (ACMC $-$ N) if and only if the covariant metric components in it are time independent and have the following " $1/r$ " and spherical harmonic structure:

$$
\begin{aligned}
g_{00} = &-1 + \frac{2g}{r} + \frac{(0 \text{ pole })}{r^2} \\
&+ \sum_{i=2}^{N} \frac{1}{r^{l+1}} \left(\frac{2(2l-1)!!}{l!} g_{A_l} N_{A_l} \right. \\
&\quad \left. + (l-1 \text{ pole }) + \cdots + (0 \text{ pole }) \right) \\
&+ \frac{1}{r^{N+2}} \left(\frac{2(2N+1)!!}{(N+1)!} g_{A_{N+1}} N_{A_{N+1}} \right. \\
&\quad \left. + (\text{ poles with } l \neq N+1) \right) \\
&+ (\text{ terms that die out faster than } 1/r^{N+2}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{0j} = \sum_{l=1}^{N} \frac{1}{r^{l+1}} [&- \frac{4l(2l-1)!!}{(l+1)!} \epsilon_{jka_l} S_{kA_{l-1}} N_{A_l} \\
&+ (l \text{ pole with parity } \pi = (-1)^l) \\
&+ (l-1 \text{ pole }) + \cdots + (0 \text{ pole })]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{00} = -1 + \frac{2M}{r} + \frac{(0 \text{ pole })}{r^2} + \sum_{l=2}^{N} \frac{1}{r^{l+1}} \left[\frac{(2l-1)!!}{2} \left(\frac{2(l-1)l}{(l+1)(l+2)} \right)^{1/2} \sum_{m=-l}^{l} I^{lm} Y^{lm} + (l-1 \text{ pole }) + \cdots + \right. \\
\left. + \frac{1}{r^{N+2}} \left[\frac{(2N+1)!!}{2} \left(\frac{2N(N+1)}{(N+2)(N+3)} \right)^{1/2} \sum_{m=-(N+1)}^{(N+1)} I^{(N+1)m} Y^{(N+1)m} + (\text{ poles with } l \neq N+1) \right] \right. \\
\left. + (\text{ terms that die out faster than } 1/r^{N+2}) \right.
\end{aligned}
$$

(11.1 b)

Comparison of Eq. (11.1) with Eq. (10.6) shows that de Donder coordinates are ACMC$-N$ for all N-i.e., they are ACMC- ∞. Below (Sec. XI.C) we shall prove that for $l \leqslant N+1$ the ST F coefficients g_{A_l} and S_{A_l} in expressions (11.1) are invariant under transformations from

one ACMC- N coordinate system to another. Since in de Donder coordinates g_{A_l} and s_{A_l} are the multipole moments of the source, this means that in any ACMC-N coordinate system the coefficients g_{A_l} and S_{A_l} with $l \leqslant N+1$ are the source's multipole moments.

One may prefer to use conventional spherical-harmonic notation rather than STF notation. The multipole moments I^{lm} and S^{lm} of conventional notation are related to those of STF notation by [cf. Eq. (4.7)]

$$I^{lm} = \frac{16\pi}{(2l+1)!!}\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(l-1)l}\right)^{1/2} g_{A_l} Y^{lm*}_{A_l}$$

$$S^{lm} = -\frac{32\pi l}{(l+1)(2l+1)!!}\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(l-1)l}\right)^{1/2} \mathrm{S}_{A_l} \mathcal{Y}^{lm*}_{A_l}$$

where $\mathcal{Y}^{lm}_A$ are the STF tensors which generate the scalar spherical harmonics [Eqs. (2.12)] and * denotes complex conjugate. The inverse relation [Eqs. (4.6)] is

$$g_{A_l} = \frac{l!}{4}\left(\frac{2(l-1)l}{(l+1)(l+2)}\right)^{1/2} \sum_{m=-l}^{l} I^{lm} Y^{lm}_{A_l},$$

$$S_{A_l} = -\frac{(l+1)!}{8l}\left(\frac{2(l-1)l}{(l+1)(l+2)}\right)^{1/2} \sum_{m=-l}^{l} S^{lm} Y^{lm}_{A_l} \cdot \text{(11.3 b)}$$

By comparing Eqs. (11.1), (11.3), (2.11), and (2.23b) we obtain the following expression for the metric in an ACMC- N coordinate system:

$$g_{0j} = -\frac{2}{r^2}\epsilon_{jpq} S_p n_q + \frac{1}{r^2} \times \left(\begin{array}{c}\text{1 pole with}\\ \text{parity } \pi = -1\end{array}\right)$$

$$+ \sum_{l=2}^{N} \frac{1}{r^{l+1}}\left[\frac{-(2l-1)!!}{2}\left(\frac{2(l-1)}{l+2}\right)^{1/2} \sum_{m=-l}^{l} s^{lm} Y^{B,lm}_j + \left(\begin{array}{c}l\text{ pole with}\\ \text{parity } \pi = (-1)^l\end{array}\right) + (l-1 \text{ pole }) + \cdots + (0\ \mathrm{p}$$

$$+ \frac{1}{r^{N+2}}\left[\frac{-(2N+1)!!}{2}\left(\frac{2N}{N+3}\right)^{1/2} \sum_{m=-(N+1)}^{(N+1)} S^{(N+1)m} Y^{B,(N+1)m}_j + \left(\begin{array}{c}N+1\text{ pole with}\\ \text{parity } \pi = (-1)^{N+1}\end{array}\right) + (\text{ poles wit}\right.$$

$$+ \left(\text{ terms that die out faster than } 1/v^{N+2}\right),$$

$$g_{jk} = \delta_{jk} + \sum_{l=0}^{N} \frac{1}{r^{l+1}}[(l \text{ pole }) + (l-1 \text{ pole }) + \cdots + (0 \text{ pole })]$$

$$+ \frac{1}{r^{N+2}}\left[\left(\begin{array}{c}\text{any angular}\\ \text{dependence}\end{array}\right)\right] + \left(\text{ terms that die out faster than } \frac{1}{r^{N+2}}\right).$$

Here $Y^{lm} = Y^{lm}(\theta,\phi)$ is the standard scalar spherical harmonic; $Y^{B,lm}_j$ is the magnetic-parity pure-spin vector spherical harmonic of order l [Eqs. (2.18b), (2.21b), (2.22b), and (2.23b) ; $M =$ is the mass of the source; and $S_j = \$_j$ is its intrinsic angular momentum.

22.4.5 Transformations between ACMC coordinate systems

We now study the coordinate transformations which link two ACMC-N coordinate systems, with the objective of proving the invariance of the multipole moments.

Let $\left\{x^{\alpha'}\right\}$ and $\{x^{\alpha}\}$ both be ACMC- N coordinate sys tems which are related by the coordinate transformation

$$x^{\alpha'}(\odot) = x^{\alpha}(\odot) + f^{\alpha}\left[x^{j}(\odot)\right],$$

where P is an event in spacetime. The f^α cannot depend on x^0 since we want $\partial/\partial x^0 = \partial/\partial x^{0'} =$ (time-translation Killing vector). We expand the functions $f_\alpha\left(x^j\right)$

$= \eta_{\alpha\beta} f^\beta\left(x^j\right)$ —and everything else in this section-in powers of $1/r$ and denote by f_α^n the part of order $r^{-(n+1)}$,

$$f_0 = \sum_{n=-1}^{\infty} r^{-(n+1)} f_0^n(\theta,\phi),$$
$$f_j = \sum_{n=-1}^{\infty} r^{-(n+1)} f_j^n(\theta,\phi).$$

The expansion cannot include $n < -1$; if it did, then one or both coordinate systems would violate $g_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\beta} + O(1/r)$ as $r \to \infty$. We then expand the angular functions f_0^n in scalar spherical harmonics Y^{lm} denoting by l_n the maximum order that appears in the expansion; and we expand the f_j^n in pure-orbital vector harmonics $Y_j^{l',lm} \equiv Y_j^{(l+J),lm}$ (Sec. II. D), denoting by l_{nJ} the maximum order that appears:

$$f_0^n = \sum_{l=0}^{l_n} f_0^{nl}(\theta,\phi), f_j^n = \sum_{J=-1}^{1} \sum_{l=0}^{l_{nJ}} f_j^{nJl}(\theta,\phi).$$

Here f_0^{nl} is a linear combination (sum over m with suitable coefficients) of Y^{lm}; and $f_j^{nJ} i$ is a linear combination of $Y_j^{l+J,lm}$. We seek to determine the values of l_n and l_{nJ} which make f_α the most general coordinate transformation linking two ACMC- N coordinate sys tems.

We define the functions $h_{\alpha\beta}$ by

$$h_{\alpha\beta}\left(x^{j'}\right) \equiv g_{\alpha'\beta'}\left(x^{j'}\right) - \eta_{\alpha\beta};$$

and we expand $h_{\alpha\beta}\left(x^j\right)$-the same functions but with $x^{j'}$ replaced by x^j-in powers of $1/r$,

$$h_{\alpha\beta}\left(x^j\right) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-(n+1)} h_{\alpha\beta}^n(\theta,\phi).$$

The ACMC-N nature of the $\left\{x^{\alpha'}\right\}$ coordinates is equivalent to (i) the demand that no terms with $n < 0$ appear in Eq. (11.7b), plus (ii) the following spherical-harmonic properties of the $h_{\alpha\beta}^n$:

h_{00}^0 and h_{jk}^0 contain only monopoles; $h_{0j}^0 \equiv 0$;
h_{0j}^1 and h_{jk}^1 contain monopoles and dipoles ;
h_{00}^1 contains only monopoles ;
$h_{\alpha\beta}^n$ contains only poles of order $l \leqslant n$
for $2 \leqslant n \leqslant N$.

We expand $h_{\alpha\beta}^n$ in spherical harmonics subject to these constraints

$$h_{\alpha\beta}^n = \sum_{K,l} h_{\alpha\beta}^{nKl}(\theta,\phi).$$

Here K denotes the type of pure-orbital harmonic (scalar, or vector with given value of l', or tensor with given values of λ and l', see Sec. II); and l denotes the order of the harmonic.

The coordinate transformation (11.5) produces the following relationship between $g_{\mu_\nu}(x)$ and $g_{\alpha'\beta'}\left(x'\right)$:

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\beta\nu}}{\partial x^\nu} g_{\alpha'\beta} \cdot \left[x'(x)\right].$$

Upon inserting expression (11.7a) for $g_{\alpha'\beta'}$ and expres sion (11.5) for $x'(x)$, we obtain

$$
\begin{aligned}
&g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) + a_{\mu\nu}(x) + b_{\mu\nu}(x)\\
&a_{\mu\nu}(x) \equiv (\delta^{\alpha}{}_{\mu} + f^{\alpha}{}_{,\mu})\left(\delta^{\beta}{}_{\nu} + f^{\beta},\nu\right)\\
&\times \sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{-1} f_{j_1} f_{j_2}\cdots f_{j_n}\nabla_{j_1}\nabla_{j_2}\cdots\nabla_{j_n}h_{\alpha\beta}(x)\\
&- h_{\mu\nu}(x) + f^{\alpha}{}_{,\mu}f_{\alpha,\nu},\\
&b_{\mu\nu}(x) \equiv f_{\mu,\nu} + f_{\nu,\mu}.
\end{aligned}
$$

Here ∇_j is the covariant derivative with respect to the flat background metric $\nabla_j h_{\alpha\beta} \equiv h_{\alpha\beta,j}$; cf. Eq. (1.13) and associated discussion. We now expand $g_{\mu\nu}, a_{\mu\nu}$ and $b_{\mu\nu}$ in powers of $(1/r)$ in the manner of Eq. (11.6a)

$$
\begin{aligned}
g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + \sum_{n=0}^{\infty} r^{-(n+1)} g^n_{\mu\nu}(\theta,\phi),\\
a_{\mu\nu} &= \sum_{n=0}^{\infty} r^{-(n+1)} a^n_{\mu\nu}(\theta,\phi),\\
b_{\mu\nu} &= \sum_{n=0}^{\infty} r^{-(n+1)} b^n_{\mu\nu}(\theta,\phi).
\end{aligned}
$$

Then the demand that $\{x^{\mu}\}$, like $\{x^{\alpha'}\}$ be ACMC $-N$ is equivalent to the demand that $g^n_{\mu\nu}$ satisfy the same conditions (11.8) as $h^n_{\mu\nu}$-and this, by virtue of Eq. (11.11a), is equivalent to the demand that

$a^0_{00} + b^0_{00}$ and $a^0_{jk} + b^0_{jk}$ contain only monopoles;

$$a^0_{0j} + b^0_{0j} = 0;$$

$a^1_{0j} + b^1_{0j}$ and $a^1_{jk} + b^1_{jk}$ contain only monopoles and dipoles ;

$$a^1_{00} + b^1_{00} \text{ contain only monopoles ;}$$

$a^n_{\alpha\beta} + b^n_{\alpha\beta}$ contain only harmonics with $0 \leqslant l \leqslant n$

$$\text{for } 2 \leqslant n \leqslant N.$$

We shall now determine the limiting l values, l_n and l_{nJ}, which are equivalent to these ACMC$-N$ conditions, and in the process we shall prove the equality of the multipole moments which one reads off the two ACMCN coordinate systems.

We begin with conditions (11.13a) on $a^0_{\mu\nu} + b^0_{\mu\nu}$. Equations (11.11b), (11.7b), and (11.6a) imply that $a_{\mu\nu} \sim 1/r^2$, so $a^0_{\mu\nu} = 0$. Equations (11.11c) and (11.6) imply

$$
\begin{aligned}
b^0_{00} = 0, \quad b^0_{0j} &= \sum_{l=0}^{l-1} r f^{-1l}_{0,j},\\
b^0_{jk} &= \sum_{j=-1}^{1}\sum_{l=0}^{l(-1)J} 2v f^{-1Jl}_{(j,k)}.
\end{aligned}
$$

Since an $l = 0$ scalar harmonic is constant but all others depend on θ and ϕ, the condition $a^0_{0j} + b^0_{0j} = b^0_{0j} = 0$ is equivalent to

$$l_{-1} = 0.$$

For b^0_{jk} the situation is more delicate. For fixed $l \geqslant 2$ the three different types of vector harmonics $Y^{l+J,lm}_j$ $(J = 0, \pm 1)$ have linearly independent gradients $Y^{l+l,lm}_{(j,k)}$; but for $l = 1 Y^{0,1m}_{(j,k)}$ vanishes, while $Y^{1,1m}_{(j,k)}$ and $Y^{2,1,m}_{(j,k)}$ are linearly independent [see Eq. (2.24)]. This fact, together

with Eqs. (11.14) and $a^0_{jk} = 0$, means that $\{a^0_{jk} + b^0_{jk}$ contains only monopoles $\}$ is equivalent to

$$l_{(-1)(-1)} = 1; \quad l_{(-1)0} = l_{(-1)1} = 0.$$

Thus, conditions (11.15) are equivalent to the $n = 0$ ACMC- N conditions (11.13a). Moreover, when these conditions are imposed (and even if they are not!) $a^0_{00} + b^0_{00}$ vanishes - which means that both coordinate systems exhibit the same mass monopole moment.

We turn next to conditions (11.13 b) on $a^1_{\mu\nu} + b^1_{\mu\nu}$. Equations (11.11), (11.6), (11.7b), (11.15b), and the fact that h^0_{00} is a constant (the mass monopole), imply

$$\begin{aligned} a^1_{00} + b^1_{00} = a^1_{00} &= r^2 \left(f_j^{-1}\nabla_j\right)\left(r^{-1}h^0_{00}\right) \\ &= -\left(\sum_J f_j^{-1J0} n_j + f_j^{(-1)(-1)1} n_j\right) h^0_{00}. \end{aligned}$$

The first term has $l = 0$ and is thus acceptable; but the second has $l = 1$ in violation of conditions (11.13b). To preserve (11.13b) we must set $f_j^{(-1)(-1)1} = 0$-i.e., we must revise downward our value of $l_{(-1)(-1)}$:

$$l_{(-1)(-1)} = 0.$$

Returning to Eqs. (11.11), (11.6), (11.15a), (11.7b), and (11.8) we infer that

$$a^1_{0j} + b^1_{0j} = b^1_{0j} = r^2\nabla_j\left(r^{-1}\sum_{i=0}^{l_0} f_0^{0l}\right).$$

This will be pure monopole and pure dipole [condition (11.13b)] if and only if

$$l_0 = 1.$$

Returning again to Eqs. (11.11), and combining with Eqs. (11.7b), (11.6a), and (11.15a) we see

$$\begin{aligned} a^1_{jk} + b^1_{jk} = r^2 \big[&\left(f_i^{-1}\nabla_i\right)\left(r^{-1}h^0_{jk}\right) + \left(f^{-1}_{i,j}\right)\left(r^{-1}h^0_{ik}\right) \\ &+ \left(f^{-1}_{i,k}\right)\left(r^{-1}h^0_{ij}\right) + \left(f^{-1}_{i,j}\right)\left(f^{-1}_{i,k}\right) \\ &+ \left(r^{-1}f^0_j\right)_{,k} + \left(r^{-1}f^0_k\right)_{,j}\big]. \end{aligned}$$

Since f_i^{-1} and h^0_{ij} are both pure monopole, the first four terms are pure monopole and thus acceptable. The last two terms, by virtue of Eqs. (11.6b), reduce to

$$\sum_{j=-1}^{1}\sum_{l=0}^{l_{0J}}\left[\left(r^{-1}f_j^{0Jl}\right)_{,k} + \left(r^{-1}f_k^{0Jl}\right)_{,j}\right],$$

which is monopole and dipole (the required form) if and only if

$$l_{0J} = 1.$$

(11.17c)

Equations (11.17a) $-$(11.17c) are thus equivalent to the $n = 1$ACMC $- N$ conditions (11.13b). Moreover, $a^1_{0j} + b^1_{0j}$ as given by Eqs. (11.18) involves only harmonics of electric-type parity $\pi = (-1)^l$. Thus, the two coordinate systems exhibit the same magnetic-type $l = 1$ component of g^1_{0j}-i.e., the same current dipole moment (angular momentum). And since both systems are mass centered (g^1_{00} pure monopole), both exhibit vanishing mass dipole moments.

Turn next to conditions (11.13c) on $a^n_{\alpha\beta} + b^n_{\alpha\beta}$ for $n \leqslant N$. We shall use induction to prove the following: (i) the indices l_{n-1} and $l_{(n-1)J}$ satisfy

$$l_{n-1} = l_{(n-1)J} = n,$$

and (ii) the two coordinate systems exhibit the same mass and curvent moments of order n. We have already proved these properties for $n = 1$. We now assume that they have been proved for $1, 2, (n-1)$, and we then prove them for order n: Equations (11.11b), together with the fact that gradients do not change multipole order, together with the expansions (11.6), (11.7), (11.9), and (11.12) imply that $a^n_{\mu\nu}$ contains the following types of terms:

$$f^{p_1}_{j_1} J_1 l_1 \cdots f^{p_k J_k l_k}_{j_k} h^{2KL}, \text{ with } p_1 + \cdots + p_k + 2k + q = n,$$
$$k \geqslant 1. \quad (11.20b)$$

Here wherever $f^{p_i J_i l_i}_{j_i}$ is written, the term could equally well be $f^{p_i l_i}_0$ (i.e., scalar harmonic rather than vector). The first term, when coupled to form pure harmonics, $f^{p_1 J_1 l_1}_{j_1} f^{p_2 J_2 l_2}_{j_2}$, with $p_1 + p_2 + 3 = n$, gives harmonics of order $l \leqslant l_1 + l_2$; and since Eq. (11.20a) together with $p_i \geqslant -1$ says $p_1 \leqslant n-2, p_2 \leqslant n-2$ we can use our induction assumption to infer that

$$l \leqslant l_1 + l_2 \leqslant l_{p_1 J_1} + l_{p_2 J_2} = p_1 + 1 + p_2 + 1 = n - 1.$$

Thus, the first term contains only terms of order $l \leqslant n-1$ - which is permissible under the ACMC- N constraints (11.13c). Similarly Eqs. (11.20b), together with the induction hypothesis and the ACMC-N property $L \leqslant q$ of $h^{\alpha KL}_{\alpha\beta}$, implies that the second term [Eq. (11.20b)] consists of harmonics

$$\begin{aligned} l &\leqslant l_1 + \cdots + l_k + L \leqslant l_{p_1 J_1} + \cdots + l_{p_k J_k} + L \\ &\leqslant p_1 + \cdots + p_k + k + q = n - k \leqslant n - 1. \end{aligned}$$

Thus, the second term contains only harmonics of order $l \leqslant n-1$-which is permissible under the ACMC-N constraints (11.13c). Since these two terms in $a^n_{\mu\nu}$ present no problems, we turn to $b^n_{\mu\nu}$. Equations (11.11c) and (11.6) imply

$$\begin{aligned} b^n_{00} &= 0, \\ b^n_{0j} &= \sum_{l=0}^{l_{n-1}} r^{n+1} \left[r^{-n} f^{(n-1)l}_0 \right]_{,j}, \\ b^n_{jk} &= \sum_J \sum_{l=0}^{l_{(n-1)J}} 2 r^{n+1} \left[r^{-n} f^{(n-1)Jl}_{(j} \right], k \Bigg) . \end{aligned}$$

By virtue of these relations the $ACMC-N$ conditions (11.13c) are equivalent to conditions (11.19) on the indices $l_{(n-1)J}$ and $l_{(n-1)}$; and Eqs. (11.21a) and (11.21b), together with the fact that $a^n_{\alpha\beta}$ contains only harmonics of order $l \leqslant n-1$, implies that the two coordinate sys tems will exhibit the same mass n-pole moment ($l = n$ part of h^n_{00}) and the same current n-pole moment $\left(\pi = (-1)^{l+1}, l = n \text{ part of } h^n_{0j}\right)$. This completes our inductive proof of properties (i) and (ii) above, for $n \leqslant N$.

If we turn our attention to $n = N+1$, the constraints (11.13c) no longer hold, so l_n and l_{nJ} can be a rbitrarily large. Nevertheless, Eqs. (11.21) still hold, and $a^n_{\alpha\beta}$ still contains harmonics only of order $l \leqslant n-1$. Consequently it is still true for $n = N+1$ (but not for $n = N+2$) that the mass and current n-pole moments exhibited by the two coordinate systems are the same.

22.4.6 Multipole moments of the Kerr metric

I shall now illustrate, using the Kerr metric, how one uses ACMC coordinate systems to compute the multipole moments of a stationary metric.

In the "flat-space normalized" basis

$$\mathbf{e}_0 = \partial_t, \quad \mathbf{e}_r = \partial_r, \quad \mathbf{e}_\theta = r^{-1}\partial_\theta,$$
$$\mathbf{e}_\phi = (r \sin\theta)^{-1} \partial_\phi,$$

associated with Boyer-Lindquist coordinates, the nonzero metric coefficients of the Kerr metric are (cf. p. 877 of MTW)

$$
\begin{aligned}
g_{00} = \frac{-r^2 + 2mr - a^2\cos^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta} &= -1 + \frac{2m}{r} - \frac{2ma^2\cos^2\theta}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^5}\right) \\
g_{0\phi} = -\frac{2ma\sin\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta} &= -\frac{2ma\sin\theta}{r^2} \\
&\quad + \frac{2ma^3\sin\theta\cos^2\theta}{r^4} + O\left(\frac{1}{r^6}\right) \\
g_{rr} = \frac{r^2 + a^2\cos^2\theta}{r^2 - 2mr + a^2} &= 1 + \frac{2m}{r} + \frac{4m^2 - a^2\sin^2\theta}{r^2} \\
&\quad + \frac{8m^3 - 2ma^2(2 - \cos^2\theta)}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^4}\right) \\
g_{\theta\theta} = \frac{r^2 + a^2\cos^2\theta}{r^2} &= 1 + \frac{a^2 - a^2\sin^2\theta}{r^2}, \\
g_{\Phi\phi} = \frac{r^2 + a^2}{r^2} + \frac{2m}{r}\left(\frac{a^2\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right) & \\
= 1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{2ma^2\sin^2\theta}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^5}\right). &
\end{aligned}
$$

(For discussion of how one uses spherical coordinates, such as these, interchangeably with Cartesian coordinates, see Sec. I.C.)

Since g_{00} has no $1/r^2$ terms, the coordinates are mass centered. At order $(1/r)g_{\alpha\beta}$ contains only monopoles; but at $O(1/r^2)$ it contains monopoles, dipoles and quadrupoles (the $-a^2\sin^2\theta/r^2$ terms in g_{rr} and $g_{\theta\theta}$ are both quadrupole). Thus, the coordinates are only ACMC-0, which means that we can read off only the mass monopole moment and the current dipole moment of the source. Direct comparison of Eqs. (11.23a) and (11.23b) with Eqs. (11.1a) and (11.1b) or (11.4a) and (11.4b) reveals that these moments are

$$
\begin{aligned}
&M \equiv \mathfrak{g} = m = \text{ mass ;} \\
&\mathbf{S} \equiv \mathbf{S} = ma\mathbf{e}_{\boldsymbol{z}} = \text{ (angular momentum).}
\end{aligned}
$$

To determine the quadrupole moments we must transform to an ACMC $-$ 1 coordinate system-i.e., we must get rid of the offending $-a^2\sin^2\theta/r^2$ quadrupole terms in g_{rr} and $g_{\theta\theta}$. This can be accomplished by the transformation

$$
\begin{aligned}
&r = r' + a^2\cos^2\theta'/2r', \quad \theta = \theta' - a^2\cos\theta'\sin\theta'/2r'^2, \\
&\phi = \phi', \quad t = t'
\end{aligned}
$$

which leads to

$$
\begin{aligned}
g_{0'0'} =& -1 + \frac{2m}{r'} - \frac{3ma^2\cos^2\theta'}{r'^3} + O\left(\frac{1}{r'^5}\right) \\
=& -1 + \frac{2m}{r'} - \frac{2ma^2}{r'^3}\left[\frac{1}{2} + P^2\left(\cos\theta'\right)\right] + O\left(\frac{1}{r'^5}\right), \\
g_{0'\phi'} =& -\frac{2ma\sin\theta'}{r'^2} + \frac{5ma^3\sin\theta'\cos^2\theta'}{r'^4} + O\left(\frac{1}{r'^6}\right) \\
=& \frac{2maP^1_{\cdot\theta'}}{r'^2} - \frac{ma^3}{r'^4}\left(P^1_{,\theta'} + \frac{2}{3}P^3, \theta'\right) + O\left(\frac{1}{r'^6}\right), \qquad (11.26\text{ b}) \\
g_{r'r'} =& 1 + \frac{2m}{r'} + \frac{4m^2 - a^2}{r'^2} + \frac{8m^3 - 4ma^2 - ma^2\cos^2\theta'}{r'^3} \\
& + O\left(\frac{1}{r'^4}\right), \\
g_{\theta'\theta'} =& 1 + \frac{a^2}{r'^2} + O\left(\frac{1}{r'^4}\right), \\
& g_{\Phi'\Phi^\circ} = 1 + \frac{a^2}{r'^2} + \frac{2ma^2\sin^2\theta'}{r'^3} + O\left(\frac{1}{r'^4}\right), \\
& g_{r'\theta'} = -\frac{2ma^2\cos\theta'\sin\theta'}{r'^3} + O\left(\frac{1}{r'^4}\right).
\end{aligned}
$$

Here $P^l = P^l(\cos\theta)$ is the Legendre polynomial of order l. Not only are we now rid of the $1/r^2$ quadrupole terms; we also have a $1/r^3$ part devoid of octupole and higherorder terms. Thus, this coordinate system is ACMC-2; and we can read off the mass and current quadrupole and octupole moments. Comparison of expressions (11.26) and (11.4), and invocation of the spherical-harmonic relations (2.7), (2.8), (2.18*b*), and (2.19), reveals

$$
\begin{aligned}
& I^{20} = -4\left(\frac{4\pi}{15}\right)^{1/2} ma^2, I^{2\mu} = 0 \text{ if } \mu \neq 0, S^{2\mu} = 0; \\
& S^{30} = \frac{4}{3}\left(\frac{4\pi}{105}\right)^{1/2} ma^3, S^{3\mu} = 0 \text{ if } \mu \neq 0, I^{3\mu} = 0.
\end{aligned}
$$

These same moments in STF notation, as computed from Eqs. (11.3) and (2.12), are

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{g}_{xx} = \boldsymbol{g}_{yy} = \frac{1}{3}ma^2, \quad \boldsymbol{g}_{zz} = -\frac{2}{3}ma^2, \\
& \text{all other } \boldsymbol{g}_{jk} = 0; \\
& \mathcal{S}_{jk} = 0, \quad \boldsymbol{g}_{jkl} = 0; \\
& S_{zzz} = -\frac{4}{15}ma^3, \\
& S_{zxx} = \delta_{xzx} = \delta_{xxz} = \delta_{zyy} = S_{yzy} = \delta_{yyz} = \frac{2}{15}ma^3.
\end{aligned}
$$

Note that these moments have the following properties: $\boldsymbol{g}_{A_l} = 0$ if l is odd; $\boldsymbol{g}_{A_l} = \text{const.} \times ma^l$ if l is even; $\boldsymbol{S}_{A_l} = 0$ if l is even; $\delta_{A_l} = \text{const.} \times ma^l$ if l is odd. Janis and Newman (1965) and Hansen (1974) find these same properties for their versions of the multipole moments - as does Hernandez (1967), who defines moments only for the Kerr metric and not for general spacetimes. This suggests that there might be some simple general relationship between our moments and theirs.

22.4.7 Formalism for Calculating Wave Generation

A. The formalism

The foundations are now laid. Redemption is at hand. Consider any system with slow internal motions

$$R \lesssim L \equiv (\text{ size of source}) \ll x = \left(\begin{array}{l} \text{time scale for change of} \\ \text{external gravitational field} \end{array} \right),$$

$M \ll x$

One can calculate the gravitational waves the system emits by the following procedure: (i) Analyze the structure and evolution of the system in any convenient coordinate system and by any fairly accurate approximation scheme. (ii) From that analysis obtain an approximation to the external gravitational field which, at any moment, satisfies (to some degree of accuracy) the timeindependent, vacuum Einstein field equations. (iii) By transforming that external field to an ACMC coordinate system, read off its dominant multipole moments (the moments with the largest values of $\left(\langle\right)_{\mathfrak{N}^{l\pi}}$). (iv) Plug those dominant moments into the gravitational-wave formulas of Sec. IV.

That this calculational procedure will give a good approximation to the waves actually emitted, one can see as follows: Suppose that one were to compute the structure and evolution of the system in de Donder gauge. Then the radiation field would be described, to fractional accuracy $(M/x)\ln(x/R)$, by the formulas of Sec.IV with the near-zone, de Donder multipole moments fed in (for proof see Sec. IX.H). The near-zone, de Donder moments are determined uniquely by the "stationary part" $g^{\|0\cdot}_{\mu\nu}$ of the source's metric [cf. Eqs. (9.16) and (9.17)]- which stationary part approximates the full metric in and near the source, to within fractional errors L/x and M/x. In the source's exterior $g^{*\cdot 0}_{\mu\nu}$ satisfies the time-independent vacuum field equations; so its multipole moments can be read off its line element in any ACMC coordinate system (for proof see Sec. XI). If the approximation scheme chosen for steps (i) and (ii) of the calculational procedure gives an external metric that closely approximates $g^{\bullet}_{\mu\nu}{}^{0}{}_{\cdot}$, then the moments computed in step (iii) will closely approximate those of $g^{\bullet 0}_{\mu\nu\cdot}$-i.e., they will closely approximate the de Donder moments; and, consequently step (iv) of the procedure will give a good approximation to the radiation.

One attractive approximation scheme for use in steps (i) and (ii) is the "instantaneous-gravity" approximation. In this scheme one sets to zero all time derivatives of the metric (but not of the matter variables) when solving the Einstein field equations $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$. This has the effect of removing all dynamical freedom from the gravitational field and making gravitational interactions within the source instantaneous rather than retarded. One automatically obtains an external gravitational field which satisfies the time-independent vacuum field equations; and, unless one has made a foolish choice of coordinate system, the moments which one computes from that external field should contain errors no larger than

$$\frac{L}{x} \sim \left(\begin{array}{l} \text{error due to ignoring} \\ \text{retardation across source} \end{array} \right).$$

The radiation field computed from those moments will then have fractional errors L/λ and $(M/x)\ln(x/R)$.

B. Examples of applications

The shear modulus of the crust of a neutron star presumably is small enough that the eigenperiods of torsional oscillations of the crust are long compared with the light-travel time across the star. Hence, for such torsional oscillations the instantaneous-gravity approximation and the above slow-motion wave-generation formalism should be fairly accurate. Schumaker and Thorne (1980) analyze torsional oscillations using these formalisms.

These formalisms are also nicely suited to slowly rotating, deformed neutron stars (e.g., the Crab pulsar). The analysis of such stars using these formalisms would closely parallel Ipser's (1970) analysis and, of course, would produce the same results.

Consider two black holes in a binary orbit around each other, with the distance of closest approach large compared to their Schwarzschild radii. The analysis by D'Eath (1975), which

used matched asymptotic expansions, shows that the orbital motion will have the same Keplerian form as for two normal stars with the same masses as the holes. Application of the above formalism then shows that the gravitational waves emitted will be the same as for a binary system made of normal stars [see Peters and Mathews (1963)].

22.4.8 Appendix: Tails of the Gravitational Waves

In the paragraph preceding Eq. (9.24) we discussed the matching of the near-zone gravitational field onto outgoing waves. That discussion sloughed over delicacies associated with "tails" of the outgoing waves. We describe those delicacies here.

The near-zone tails are caused by nonlinearities in the wave zone. If one ignores those nonlinearities-i.e., if one sets $W_{\alpha\beta}$ (Eq. 9.3) to zero in the wave zone-then the wave-zone field has the linear form (9.31), and matching of wave zone to near zone then generates "nontail" near-zone terms of the form discussed in the text (Eqs. 9.24, 9.25, 9.28). If, on the other hand, one computes the tiny nonlinear corrections $\gamma^2_{\alpha\beta}, \gamma^3_{\alpha\beta}$, to the wave-zone field using the procedure of Eqs. (9.7), one discovers that they include terms in which the outgoing $\gamma^1_{\alpha\beta}$ scatters off itself to produce ingoing waves. These ingoing waves get converted in the near zone back into outgoing waves, and the resulting "matching-generated" near-zone fields contain terms such as

$$\gamma^{\rm tail}_{\mu\nu} = \text{const} \times \int_{-\infty}^{t} \frac{\mathrm{g}\, \mathbb{N}^{\ell\pi}\left(t'\right) r^{\ell'}}{\left(r+t-t'\right)^{i+t'+3}} dt'$$

These are the tails of the outgoing waves; they are characterized by a power-law fall-off in the time $t-t'$ since generation of the waves. In the specific tail term (A1) the contribution from time t' results from the outgoing wave $\gamma^1_{\mu\nu} \sim \left(1/r''\right)^{(\ell)}\Big)_{\mathcal{N}} \ell^*\left(t''-r''\right)$ backscattering, at retarded time $t''-r''=t'$ and at radius $r''=\left(r+t-t'\right)/2$, off the static monopole field $\gamma^1_{\mu\nu} \sim g/r''$. For details of how this backscatter leads, through matching, to a near-zone tail of the form (A1) see, e.g., Price (1972), Thorne (1972), Bardeen and Press (1973).

In the "transition region" $r \sim \lambda$ (Eq. 9.30), where our matching of wave zone to near zone occurs, and at epochs when the radiation is strongest, the tail termsbeing nonlinear-are small compared to the linear-order outgoing waves. More specifically, for the dominant multipoles of the radiation field_the ones with the largest values of $|^{(l)\mathfrak{I}^{l\pi}}|$ —the largest tail terms are of the form (A1) and have magnitude

$$\left|\gamma^{\rm taii}_{jk}\left|\, S\right|^{(l)} \mathfrak{T}^l \pi/\lambda|(M/\lambda) \sim |\left(\gamma^1_{jk}\right)^{TT}|\,(M/\lambda)$$

at $r \sim \hbar$ and at times t when the radiation is strongest. In the discussion of Eqs. (9.32)-(9.35) these tail terms will lead to fractional errors

$$|\sin \imath\pi|/|\mathfrak{m}\imath\pi| \leqslant M/\pi$$

in the computation of the dominant multipole moments, and to fractional errors

$$\left|\delta\bar{h}^{TT}_{jk}\right| / \left|\left(\gamma^1_{jk}\right)^{TT}\right| \leqslant M/\lambda$$

in the computation of the gravitational-wave field. Thus, the tails do not change Eqs. (9.34) and (9.35).

23 Other Questions

(some other theory is here)

23.1 Classical Theory of Gravity (from Ivanenko's Collection of Articles)

1.X.? ё л л е р. Энергия незамкнутых систем в общей теории относительности (Перевод Д.?. Белова) 65
2.?.? ё л л е р. Комплекс энергии-импульса в общей теории относительности (Перевод Д.?. Белова) 85
3. П. Дирак. Обобщенная динамика в гамильтоновой форме (Перевод Д.?. Белова) 128
4. П. Дирак. Теория гравитации в гамильтоновой форме (Перевод Д.?. Белова) 139
5. Л. Инфельд. Уравнения движения в общей теории относительности и принцип действия (Перевод Д.?. Белова) 159
6. Л. Инфельд. Уравнения движения и гравитационное излучение (Перевод Д. В. Белова) 200
7. А. Па па петру, Д. Гей ел ер и Г.? ре дер. Гравитационное излучение временно нестационарной системы. (Перевод Д. В. Белова) 236
8. Б. Финци. Разрыв гравитационного действия на фронте волны (Перевод Б. Т. Вавилова) 247
9.?.? и ран и. Инвариантная формулировка теории гравитационного излучения (Перевод Б. Г. Вавилова) 257
10. Дж. Вебе? и Дж. У иле р. Реальность цилиндрических гравитационных- волн Эйнштейна—Розена (Перевод Д. В Белова) 289
11. Г. Бонд и. Отрицательная масса в общей теории относительности (Перевод Д. В. Белова) 309

23.2 Quantum Theory of Gravity and Elementary Particles (from Ivanenko's Collection of Articles)

12. С. Гупта. Квантование гравитационного поля. Линейное приближение (Перевод Б. Т. Вавилова) 325
13. С. Гупта. Квантование гравитационного поля. Общая теория (Перевод Б. 7 Вавилова) 341
14. П. Бергман и А. К о м а р. О квантовании гравитационного поля (Перевод Б. Т. Вавилова) 361
15. Д. Б? и л ь и Дж. У и л е р. Взаимодействие нейтрино с гравитационным полем (Перевод Д. В. Белова) 38*
16. Л. Ш и? ф. Гравитационные свойства антиматерии (Перевод Б. Т. Вавилова) >¦ <у

23.3 Experimental Studies (from Ivanenko's Collection of Articles)

17. Дж. Ве бе р. Наблюдение и генерация гравитационных волн (Перевод Д. В. Белова) 446 18. Р. Паунд и Г. Ребка. Гравитационное смещение в ядерном резонансе (Перевод Д. В. Белова) 469 19. Р. Паунд и Г. Ребка. Эффективный вес фотона. (Перевод Д.?. Белова) 474 20. Дж. Коккони и Е.Салпетер. Верхний предел анизотропии инерции из эффекта Мёссбауэра (Перевод Д. В. Белова)
э

24 Other Fundamental Ideas

24.0.1 Strong and Weak Equivalence Principles in the Theory of Gravitation by G. Treder

(крутая книга, потом почитаю, пока не до нее, но понял, что много всего интересного тут происходит.)

Общие требования к гравитационной теории 18

§ 1. Роль принципа эквивалентности в теории гравитации 18 § 2. Лоренц-инвариантность в пространстве Римана и общий принцип относительности 27 § 3. Ньютоново приближение и релятивистские эффекты в общей метрической теории 34 Литература 39

Скалярно-тензорные теории (!??!?!?)

§ 4. Теория Нордстрема 41 § 5. Теория Иордана — Дикке 49 § 6. Теория Хойла 61 Литература 67

Биметрические и тетрадные теории (????)

§ 7. Расширение геометрической структуры.... 67 § 8. Теория Розена — Колера 70 § 9. Тетрадные теории гравитации 79 § 10. Линейная теория гравитации 89

24.0.2 Theory of Gravitation — Theories of Reference Systems by G. Treder

Обобщенная лоренц-ковариантность (????)

§ 11. Лоренц-ковариантная производная 92
§ 12. Спинорное исчисление 99
§ 13. Нарушение лоренц-ковариантности гравитационным полем 102
§ 14. Нелоренцевы преобразования систем отсчета. Литература 117

Абсорбция силы тяжести (????)

§ 15. Эйнштейновские эффекты 118
§ 16. Статическое сферически-симметричное распределение материи 121
§ 17. Экранирование активной массы земли.. -.. 133

Принцип эквивалентности и экранирование силы тяжести (тезисы)

25 Black holes, gravitational waves and fundamental physics: a roadmap by Barack and a lot of authors

25.0.1 Glossary

Here we provide an overview of the acronyms used throughout this paper and also in common use in the literature.

BBH	Binary black hole
BH	Black hole
BNS	Binary neutron star
BSSN	Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura
CBM	Compact binary mergers
CMB	Cosmic microwave background
DM	Dark matter
ECO	Exotic Compact Object
EFT	Effective Field theory
EMRI	Extreme-mass-ratio inspiral
EOB	Effective One Body model
EOS	Equation of state
eV	electron Volt
GR	General Relativity
GSF	Gravitational self-force
GRB	Gamma-ray burst
GW	Gravitational Wave
HMNS	Hypermassive neutron star
IMBH	Intermediate-mass black hole
IVP	Initial Value Problem
LVC	LIGO Scientific and Virgo Collaborations
MBH	Massive black hole
NK	Numerical kludge model
NSB	Neutron star binary
NS	Neutron star
NR	Numerical Relativity
PBH	Primordial black hole
PN	Post-Newtonian
PM	Post-Minkowskian
QNM	Quasinormal modes
sBH	Black hole of stellar origin
SGWB	Stochastic GW background
SM	Standard Model
SMBBH	Supermassive binary black hole
SOBBH	Stellar-origin binary black hole
SNR	Signal-to-noise ratio
ST	Scalar-tensor

25.0.2 Preface

The long-held promise of *gravitational-wave astronomy* as a new window onto the universe has finally materialized with the dramatic discoveries of the LIGO-Virgo collaboration in the past few years. We have taken but the first steps along a new, exciting avenue of exploration that has now opened before us. The questions we will tackle in the process are cross-cutting and multidisciplinary, and the answers we will get will no doubt reshape our understanding of black-hole-powered phenomena, of structure formation in the universe, and of gravity itself, at all scales.

The harvesting of useful information from gravitational-wave (GW) signals and the understanding of its broader implications demand a cross-disciplinary effort. What exactly will GWs tell us about how, when and in which environment black holes were formed? How fast do black holes spin and how have some of them grown to become supermassive? GWs from merging black holes probe the environment in which they reside, potentially revealing the effect of dark matter or new fundamental degrees of freedom. The analysis of GWs will allow for precise tests of General Relativity, and of the black hole paradigm itself. However, to be able to collect and interpret the information encoded in the GWs, one has to be equipped with faithful and accurate theoretical models of the predicted waveforms. To accomplish the far-reaching goals of gravitational-wave science it is of paramount importance to bring together expertise over a very broad range of topics, from astrophysics and cosmology, through general-relativistic source modelling to particle physics and other areas of fundamental science.

In 2016, a short time before the announcement of the first gravitational-wave detection, a

cross-disciplinary initiative in Europe led to the establishment of the new COST networking Action on "Black holes, gravitational waves and fundamental physics" ("GWverse"). GWverse aims to maintain and consolidate leadership in black-hole physics and gravitational-wave science, linking three scientific communities that are currently largely disjoint: one specializing in gravitational-wave detection and analysis, another in black-hole modelling (in both astrophysical and general-relativistic contexts), and a third in strong-gravity tests of fundamental physics. The idea is to form a single, interdisciplinary exchange network, facilitating a common language and a framework for discussion, interaction and learning. The Action will support the training of the next generation of leaders in the field, and the very first "native" GW/multi-messenger astronomers, ready to tackle the challenges of high-precision GW astronomy with ground and space-based detectors.

25.1 I: The astrophysics of compact object mergers: prospects and challenges

25.1.1 Introduction

In the last two years, strong-field gravity astrophysics research has been undergoing a momentous transformation thanks to the recent discoveries of five binary black hole (BBH) mergers that were observed in gravitational waves (GWs) by the LIGO and Virgo detectors. This was compounded last year by the multi-messenger discovery of a binary neutron star (BNS) merger measured in both GWs and detected in every part of the electromagnetic (EM) spectrum, allowing us to place compact object mergers in their full astrophysical context. These measurements have opened up an entirely new window onto the Universe, and given rise to a new rapidly growing and observationally-driven field of GW astrophysics.

Despite the multiple scientific breakthroughs and "firsts" that these discoveries signify, the measured properties of the BBH and BNS mergers have immediately bought up accompanying challenges and pertinent questions to the wider astrophysics community as a whole. Here, we aim to provide an up-to-date and encompassing review of the astrophysics of compact object mergers and future prospects and challenges. Section 25.1.2 first introduces and briefly details the LIGO and Virgo observations of BBH and BNS mergers. Section 25.1.3 then discusses the astrophysics of BHs, in particular BBHs, from their genesis to archeology, for BHs that span more than ten decades in their mass range. In the case of stellar-mass BBH mergers, Section 25.1.4 details the formation of compact binary mergers, in particular BBHs, through isolated stellar binary evolution. Section 25.1.5 then reviews how one could dynamically form such events in order to explain the observed merger rate and distribution of masses, mass ratios, and spins. Section 25.1.6 explores the intriguing possibility that at least a fraction of dark matter (DM) in the Universe is in the form of primordial BHs (PBHs), an area that has recently been invigorated by the recent LIGO and Virgo observations of BBH mergers. Section 25.1.7 presents an overview on the formation of supermassive BBHs through galaxy mergers, and Section 25.1.8 introduces efforts underway to probe the astrophysics of such supermassive BBHs with pulsar timing arrays. Turning our attention to the mergers themselves as multi-messenger sources, Section 25.1.9 reviews the state-of-the-art numerical modelling of compact object mergers, in particular, systems with NSs in which we have already observed accompanying EM radiation. For detailed and exhaustive discussion of the modelling of BBH mergers, we refer the reader to Chapter II. Section 25.1.10 provides a summary of the observational efforts by a wide range of facilities and instruments in following up GW mergers in light of the first BNS merger discovery measured in both GWs and EM. Focusing entirely on EM observations, Section 25.1.12 reviews observations of active galactic nuclei as probes of BBH systems and Section 25.1.11 concludes by summarising recent advances in high-energy observations of X-ray binaries. Finally, Section 25.1.13 provides an extensive review on how observations of GWs can impact the field of cosmology, that is, in our understanding of the origins, evolution and fate of the Universe.

25.1.2 LIGO and Virgo Observations of Binary Black Hole Mergers and a Binary Neutron Star

Contributors: E. Porter, M. Hendry, I. S. Heng

On September 15th 2014 the discovery of GWs from the merger of two BHs during the first advanced detectors era run, commonly called O1, by the two LIGO observatories heralded the dawn of GW astronomy Abbott *et al.* (2016a). This event was quickly followed up by two other BBH mergers: one of lower significance on October 12th, 2015, and another on December 26th, 2015 Abbott *et al.* (2016b,c); see Table 9 for the source properties of the published GW mergers. These detections, as exemplified by this white paper, have had a major impact on the fields of astrophysics and fundamental physics Abbott *et al.* (2016d,e,c,f, 2017a,b).

The detection of GWs from only BBH mergers from all O1 detections has had significant ramifications on our understanding of astrophysical populations Abbott *et al.* (2016g,h,c,f). The detected BHs were more massive than any BHs that had been previously detected in low mass X-ray binaries, requiring a re-evaluation of the models of stellar evolution in binary systems Abbott *et al.* (2016e). From just these three events, the LIGO Scientific and Virgo collaborations (LVC) constrained the rate of BBH mergers to between 9-240 $\mathrm{Gpc}^{-3}\ \mathrm{yr}^{-1}$ Abbott *et al.* (2016c) (see Abbott *et al.* (2017c) for an updated BBH merger rate of 12-213 $\mathrm{Gpc}^{-3}\ \mathrm{yr}^{-1}$). The non-detection of BNSs and NS-BH binaries allowed constraints of $< 12,600\ \mathrm{Gpc}^{-3}\ \mathrm{yr}^{-1}$ and $< 3,600\ \mathrm{Gpc}^{-3}\ \mathrm{yr}^{-1}$ respectively Abbott *et al.* (2016f). At the time of this run, the LVC had over 60 MOUs signed with external telescopes, satellites and neutrino detectors. No EM counterparts were found relating to the BBH mergers Abbott *et al.* (2016i,j, 2018a).

To detect and extract astrophysical information, GW astronomy uses the method of matched filtering Sathyaprakash and Dhurandhar (1991). This method is the optimal linear filter for signals buried in noise, and is very much dependent on the phase modelling of a GW template. Within the LVC, the GW templates are constructed using both analytical and numerical relativity Abbott *et al.* (2016k). In this case, the phase evolution of the template is a function of a number of frequency dependent coefficients. Alternative theories of gravity predict that these coefficients should be individually modified if general relativity (GR) is not the correct theory of gravity. While GR predicts specific values for these coefficients, one can treat each coefficient as a free variable and use Bayesian inference to test for deviations in the values of the parameters from the nominal GR value. All tests conducted by the LVC displayed no deviations from GR Abbott *et al.* (2016,c, 2017c,c)

In addition, searches for generic GW transients, or GW-bursts, typically do not require a well-known or accurate waveform model and are robust against uncertainties in the GW signature. GW-burst searches are designed to detect transients with durations between $10^{-3}-10$ seconds with minimal assumptions about the expected signal waveform. Such searches are, therefore, sensitive to GW transients from a wide range of progenitors, ranging from known sources such as BBH mergers to poorly-modeled signals such as core-collapse supernovae as well as transients that have yet to be discvered. An overview of GW-burst searches performed by LVC can be found here Abbott *et al.* (2016m). Both GW-burst and compact binary coalescences (CBC) searches detected the first GW signal from BBH mergers, GW150914.

In November 2016, the *second* Advanced Era Observation run, O2, began. Once again, in January and June 2017, two BBH mergers were observed by the two LIGO detectors Abbott *et al.* (2017c,c). At the end of July 2017, the Advanced Virgo detector joined the global network of detectors. On August 14th, all three detectors observed the merger of a BBH system. In previous detections, using only the two LIGO detectors, the sources were located to 1000s of square degrees in the sky. In this case, due to the addition of Advanced Virgo, this system was localised to within 60 square degrees. While not greatly advancing our understanding of the formation mechanisms of such systems, this detection did have a major effect in the field of fundamental physics. Due to the misalignment of the three detectors, for the first time we were able to test the tensorial nature of GWs. This event allowed the LVC to conclude that the GW signals were tensorial in nature, as is predicted by GR Abbott *et al.* (2017c).

Burst searches were also used as an independent analysis to complement matched filtering analyses for the detection of GW170104 Abbott *et al.* (2017c). Burst searches further identified a coherent signal, corresponding to GW170608, with a false-alarm rate of 1 in ~ 30 years Abbott *et al.* (2017e) and validated the detection of GW170814 with a false-alarm rate < 1 in 5900 years Abbott *et al.* (2017c). Note that, given the "unmodelled" nature of burst searches, the estimated event significances from burst searches tend to be lower than matched-filtered searches for the same event, especially for lower-mass compact binary signals.

	GW150914	GW151226	LVT151012	GW170104	GW170608	GW170814	GW170817
$m_1/\ \mathrm{M}_\odot$	$36.2^{+5.2}_{-3.8}$	$14.2^{+8.3}_{-3.7}$	23^{+18}_{-6}	$31.2^{+8.4}_{-6.0}$	12^{+7}_{-2}	$30.5^{+5.7}_{-3.0}$	$(1.36, 1.60)$
$m_2/\ \mathrm{M}_\odot$	$29.1^{+3.7}_{-4.4}$	$7.5^{+2.3}_{-2.3}$	13^{+4}_{-5}	$19.4^{+5.3}_{-5.9}$	7^{+2}_{-2}	$25.3^{+2.8}_{-4.2}$	$(1.16, 1.36)$
$\mathcal{M}/\ \mathrm{M}_\odot$	$28.1^{+1.8}_{-1.5}$	$8.88^{+0.33}_{-0.28}$	$15.1^{+1.4}_{-1.1}$	$21.1^{+2.4}_{-2.7}$	$7.9^{+0.2}_{-0.2}$	$24.1^{+1.4}_{-1.1}$	$1.186^{+0.001}_{-0.001}$
q	$0.81^{+0.17}_{-0.20}$	$0.52^{+0.40}_{-0.29}$	$0.57^{+0.38}_{-0.37}$	0.62^{+}_{-}	$0.6^{+0.3}_{-0.4}$	0.83^{+}_{-}	$(0.73, 1)$
$M_f/\ \mathrm{M}_\odot$	$62.3^{+3.7}_{-3.1}$	$20.8^{+6.1}_{-1.7}$	35^{+14}_{-4}	$48.7^{+5.7}_{-4.6}$	$18.0^{+4.8}_{-0.9}$	$53.2^{+3.2}_{-2.5}$	$- - -$
χ_{eff}	$-0.06^{+0.14}_{-0.29}$	$0.21^{+0.20}_{-0.10}$	$0.03^{+0.31}_{-0.20}$	$-0.12^{+0.21}_{-0.30}$	$0.07^{+0.23}_{-0.09}$	$0.06^{+0.12}_{-0.12}$	$0.00^{+0.02}_{-0.01}$
a_f	$0.68^{+0.05}_{-0.06}$	$0.74^{+0.06}_{-0.06}$	$0.66^{+0.09}_{-0.10}$	$0.64^{+0.09}_{-0.20}$	$0.69^{+0.04}_{-0.05}$	$0.70^{+0.07}_{-0.05}$	$- - -$
D_L / Mpc	420^{+150}_{-180}	440^{+180}_{-190}	1020^{+500}_{-490}	880^{+450}_{-390}	340^{+140}_{-140}	540^{+130}_{-210}	40
z	$0.090^{+0.029}_{-0.036}$	$0.094^{+0.035}_{-0.039}$	$0.201^{+0.086}_{-0.091}$	$0.18^{+0.08}_{-0.07}$	$0.07^{+0.03}_{-0.03}$	$0.11^{+0.03}_{-0.04}$	0.0099

Table 9: Source properties of the published BBH and BNS discoveries (June 2018) by the LIGO and Virgo detectors

On August 17th, the first BNS merger was observed by the LIGO and Virgo detectors Abbott *et al.* (2017f). This event was very quickly associated with a short gamma-ray burst (sGRB) detected by both the Fermi and Integral satellites Abbott *et al.* (2017g). Within 10 hours, the host galaxy had been optically identified. Within 16 days, the source had been identified across all bands of the EM spectrum. This single event heralded the true beginning of multi-messenger astronomy, and raised as many questions as it answered.

While confirming the hypothetical link between BNS mergers and sGRBs, the delay between the gamma and X-ray signals (9 days) suggested that not all sGRBs are the same Abbott *et al.* (2017a). This fact generated a number of studies regarding equation of state models, and the possible remnant of such mergers. This one event also allowed the LVC to update the BNS event rate from $< 12,600\ \mathrm{Gpc}^{-3}\ \mathrm{yr}^{-1}$ in O1, to 320-4740 $\mathrm{Gpc}^{-3}\ \mathrm{yr}^{-1}$ in O2 Abbott *et al.* (2017f).

Perhaps, the most interesting results from this event concern fundamental physics. The delay between the detection of GWs and gamma-rays was 1.74 seconds. This places a bound on the difference between the speed of light and the speed of GWs of $3 \times 10^{-15} \leq |\Delta c/c| \leq 7 \times 10^{-16}$ Abbott *et al.* (2017a). This single result has implications for certain alternative theories of gravity. For instance, the fact that GWs seem to travel at the same speed as that of strongly constrains the family of alternative theories of gravity that require $v_+, v_\times \neq v_{\mathrm{light}}$ (e.g., beyond Horndeski, quartic/quintic Galileon, Gauss-Bonnet, if they are supposed to explain cosmology), as well as theories that predict a massive graviton. Furthermore, by investigating the Shapiro delay, the GW170817 detection also rules out MOND and DM emulator MOND-like theories (e.g., TeVeS), as according to these theories, the GWs would have arrived 1000 days after the gamma-ray detection.

The detection of GWs by the Advanced LIGO and Advanced Virgo detectors have had a major effect on our understanding of the Universe, sparking the fields of GW and multi-messenger astronomy and cosmology Abbott *et al.* (2017g,b). It is becoming increasingly clear that combining EM and GW information will be the only way to better explain observed phenomena in our Universe. The third Advanced Detector Observation run (O3) will begin in early 2019, and will run for a year Abbott *et al.* (2018a). We expect the detected events to be dominated by BBH mergers at a rate of one per week. However, we also expect on the order of ten BNS events during this time, and possibly a NS-BH discovery (and potentially more than one such system). Given the effects of one GW detection on both astrophysics and fundamental physics, we expect O3 to fundamentally change our view of the Universe.

25.1.3 Black hole genesis and archaeology

Contributors: M. Colpi and M. Volonteri

Black Hole Genesis

Gravity around BHs is so extreme that gravitational energy is converted into EM and kinetic energy with high efficiency, when gas and/or stars skim the event horizon of astrophysical BHs. Black holes of stellar origin (sBHs) with masses close to those of known stars power galactic X-ray sources in binaries, while supermassive black holes (SMBHs) with masses up to billions

of solar masses power luminous quasars and active nuclei at the centre of galaxies. BHs are key sources in EM in our cosmic landscape.

According to General Relativity (GR), Kerr BHs, described by their mass $M_{\rm BH}$ and spin vector $\mathbf{S} = \chi_{\rm spin}\, G\, M_{\rm BH}/c$ (with $-1 \leq \chi_{\rm spin} \leq 1$) are the unique endstate of unhalted gravitational collapse. Thus understanding astrophysical BHs implies understanding the conditions under which gravitational equilibria lose their stability irreversibly. The chief and only example we know is the case of NSs which can exist up to a maximum mass $M^{\rm NS}_{\rm max}$, around 2.2 $\mathrm{M}_\odot - 2.6$ $\mathrm{M}_\odot$. No baryonic microphysical state emerges in nuclear matter, described by the standard model, capable to reverse the collapse to a BH state, during the contraction of the iron core of a supernova progenitor. The existence of $M^{\rm NS}_{\rm max}$ is due to the non linearity of gravity which is sourced not only by the mass "charge" but also by pressure/energy density, according to the Oppenheimer-Volkoff equation. Thus, sBHs carry a mass exceeding $M^{\rm NS}_{\rm max}$. Discovering sBHs lighter than this value (not known yet to high precision) would provide direct evidence of the existence of PBHs arising from phase transitions in the early universe.

As of today, we know formation scenarios in the mass range between 5 $\mathrm{M}_\odot - 40$ $\mathrm{M}_\odot$, resulting from the core-collapse of very massive stars. The high masses of the sBHs revealed by the LVC, up to 36 $\mathrm{M}_\odot$, hint formation sites of low-metallicity, Z[10], below 0.5% of the solar value $Z_\odot = 0.02$ Belczynski *et al.* (2010a); Spera *et al.* (2015a); Belczynski *et al.* (2016a). Theory extends this range up to about $40 - 60$ $\mathrm{M}_\odot$ Giacobbo *et al.* (2018) and predicts the existence of a gap, between about $60 \lesssim M_{\rm BH}/\ \mathrm{M}_\odot \lesssim 150$, since in this window pair instabilities during oxygen burning lead either to substantial mass losses or (in higher mass stellar progenitors) the complete disruption of the star Woosley (2017); Belczynski *et al.* (2016b); Spera and Mapelli (2017). sBHs heavier than 150 $\mathrm{M}_\odot$ can form at $Z < 1\%\, Z_\odot$, if the initial mass function of stars extends further out, up to hundreds of solar masses.

The majestic discovery of BBHs, detected by LVC interferometers Abbott *et al.* (2016a,e,b, 2017c,e,c), at the time of their coalescence further indicates, from an astrophysical standpoint, that in nature sBHs have the capability of pairing to form binary systems, contracted to such an extent that GW emission drives their slow inspiral and final merger, on observable cosmic timescales. As GWs carry exquisite information on the individual masses and spins of the BHs, and on the luminosity distance of the source, detecting a population of coalescing sBHs with LVC in their advanced configurations, and with the next-generation of ground-based detectors Abbott *et al.* (2017j); Sathyaprakash *et al.* (2012), will let us reconstruct the mass spectrum and evolution of sBHs out to very large redshifts.

Observations teach us that astrophysical BHs interact with their environment, and that there are two ways to increase the mass: either through accretion, or through a merger, or both. These are the two fundamental processes that drive BH mass and spin evolution. Accreting gas or stars onto BHs carry angular momentum, either positive or negative, depending on the orientation of the disk angular momentum relative to the BH spin. As a consequence the spin changes in magnitude and direction King *et al.* (2005); Perego *et al.* (2009); Berti and Volonteri (2008). In a merger, the spin of the new BH is the sum of the individual and orbital angular momenta of the two BHs, prior to merging Barausse *et al.* (2012a); Rezzolla (2016). An outstanding and unanswered question is can sequences of multiple accretion-coalescence events let sBHs grow, in some (rare) cases, up to the realm of SMBHs? If this were true, the "only" collapse to a BH occurring in nature would be driven by the concept of instability of NSs at $M^{\rm NS}_{\rm max}$.

SMBHs are observed as luminous quasars and active galactic nuclei, fed by accretion of gas Merloni (2016), or as massive dark objects at the centre of quiescent galaxies which perturb the stellar and/or gas dynamics in the nuclear regions Kormendy and Ho (2013a). The SMBH mass spectrum currently observed extends from about 5×10^4 $\mathrm{M}_\odot$ (the SMBH in the galaxy RGG118 Baldassare *et al.* (2015)) up to about 1.2×10^{10} $\mathrm{M}_\odot$ (SDSS J0100+2802 Wu *et al.* (2015)), as illustrated in Figure 25.1. The bulk of active and quiescent SMBHs are nested at the centre of their host galaxies, where the potential well is the deepest. The correlation between the SMBH mass $M_\bullet$ and the stellar velocity dispersion σ in nearby spheroids, and even in disk/dwarf galaxies Nguyen *et al.* (2018) hints towards a concordant evolution which establishes in the centre-most region controlled by powerful AGN outflows. Extrapolated to lower mass disk or dwarf galaxies, this correlation predicts BH masses of $M_\bullet \sim 10^3$ $\mathrm{M}_\odot$ at σ as low as 10 km s^{-1}, typical of nuclear star clusters (globular clusters) van den Bosch (2016). We

[10] In astrophysics "metallicity" refers to the global content of heavy elements above those produced by primordial nucleosynthesis

remark that only BHs of mass in excess of 10^3 $M_\odot$ can grow a stellar cusp. The lighter BHs would random walk, and thus would have a gravitational sphere of influence smaller than the mean stellar separation and of the random walk mean pathlength.

Observations suggest that SMBHs have grown in mass through repeated episodes of gas accretion and (to a minor extent) through mergers with other BHs. This complex process initiates with the formation of a *seed* BH of yet unknown origin Volonteri (2010). The concept of seed has emerged to explain the appearance of a large number of SMBHs of billion suns at $z \sim 6$, shining when the universe was only 1 Gyr old Jiang *et al.* (2016). Furthermore, the comparison between the local SMBH mass density, as inferred from the $M_\bullet - \sigma$ relation, with limits imposed by the cosmic X-ray background light, resulting from unresolved AGN powered by SMBHs in the mass interval between 10^{8-9} $M_\odot$, indicates that radiatively efficient accretion played a large part in the building of SMBHs below $z \sim 3$, and that information is lost upon their initial mass spectrum Marconi *et al.* (2004). Thus, SMBHs are believed to emerge from a population of seeds of yet unconstrained initial mass, in a mass range *intermediate* between those of sBHs and SMBHs, about 10^2 $M_\odot$ to 10^5 $M_\odot$, and therefore they are sometimes dubbed Intermediate-mass BHs (IMBHs).

Seeds are IMBHs that form "early" in cosmic history (at redshift $z \sim 20$, when the universe was only 180 Myr old). They form in extreme environments, and grow over cosmic time by accretion and mergers. Different formation channels have been proposed for the seeds Volonteri (2010); Schleicher *et al.* (2013); Latif and Ferrara (2016). *Light seeds* refer to IMBHs of about 100 $M_\odot$ that form from the relativistic collapse of massive Pop III stars, but the concept extends to higher masses, up to $\sim 10^3$ $M_\odot$. These seeds likely arise from runaway collisions of massive stars in dense star clusters of low metallicity Mapelli (2016a); Devecchi *et al.* (2012), or from mergers of sBHs in star clusters subjected to gas-driven evolution Lupi *et al.* (2014). The progenitors of light seeds are massive stars. However, they could be also the end result of repeated mergers among BHs Gerosa and Berti (2017). Finding merging sBHs with the LVC detectors with masses in the pair instability gap would be a clear hint of a second generation of mergers resulting from close dynamical interactions.

Accretion on sBHs occurs in X-ray binaries, and there is no evidence of accretion from the interstellar medium onto isolated sBHs in the Milky Way. But, in gas-rich, dense environments characteristic of galaxy halos at high redshifts, single sBHs might accrete to grow sizably, despite their initial small gravitational sphere of influence, if specific dynamical conditions are met. For instance, in rare cases they may be captured in dense gas clouds within the galaxy Lupi *et al.* (2016). Another possibility is that a sBH forms at the very center of the galaxy, where large inflows may temporarily deepen the potential well and allow it to grow significantly. This "winning sBH" must be significantly more massive than all other sBHs in the vicinity to avoid being ejected by scatterings and to be retained at the center of the potential well by dynamical friction. Similar conditions can also be present in nuclear star clusters characterized by high escape velocities. After ejection of the bulk of the sBHs, the only (few) remaining isolated BH can grow by tidally disrupting stars and by gas accretion Stone *et al.* (2017a) sparking their growth to become an IMBH.

Heavy seeds refer instead to IMBHs of about 10^{4-5} $M_\odot$ resulting from the monolithic collapse of massive gas clouds, forming in metal-free halos with virial temperatures $T_{\rm vir} \gtrsim 10^4$ K, which happen to be exposed to an intense H_2 photodissociating ultraviolet flux Latif *et al.* (2013); Dijkstra *et al.* (2014); Habouzit *et al.* (2016); Regan *et al.* (2017); Latif and Ferrara (2016). These gas clouds do not fragment and condense in a single massive proto-star which is constantly fueled by an influx of gas that lets the proto-star grow large and massive. Then, the star contracts sizably and may form a quasi-star Begelman (2010), or it may encounter the GR instability that leads the whole star to collapse directly into a BH. Heavy seeds might also form in major gas-rich galaxy mergers over a wider range of redshifts, as mergers trigger massive nuclear inflows Mayer *et al.* (2015). Figure 25.1 is a cartoon summarising the current knowledge of BHs in our Universe, and the link that may exist between sBHs and SMBHs, which is established by seed BHs along the course of cosmic evolution.

The seeds of the first SMBHs are still elusive to most instruments that exist today, preventing us to set constraints on their nature. Seed BHs are necessarily a *transient* population of objects and inferring their initial mass function and spin distribution from observations is possible only if they can be detected either through EM or GW observations at very high z, as high as ~ 20 (even $z \sim 40$ as discussed recently). Since, according to GR, BHs of any flavour captured in binaries are loud sources of GWs at the time of their merging, unveiling seeds and MBHs through cosmic ages via their GW emission at coalescence would provide unique and invaluable

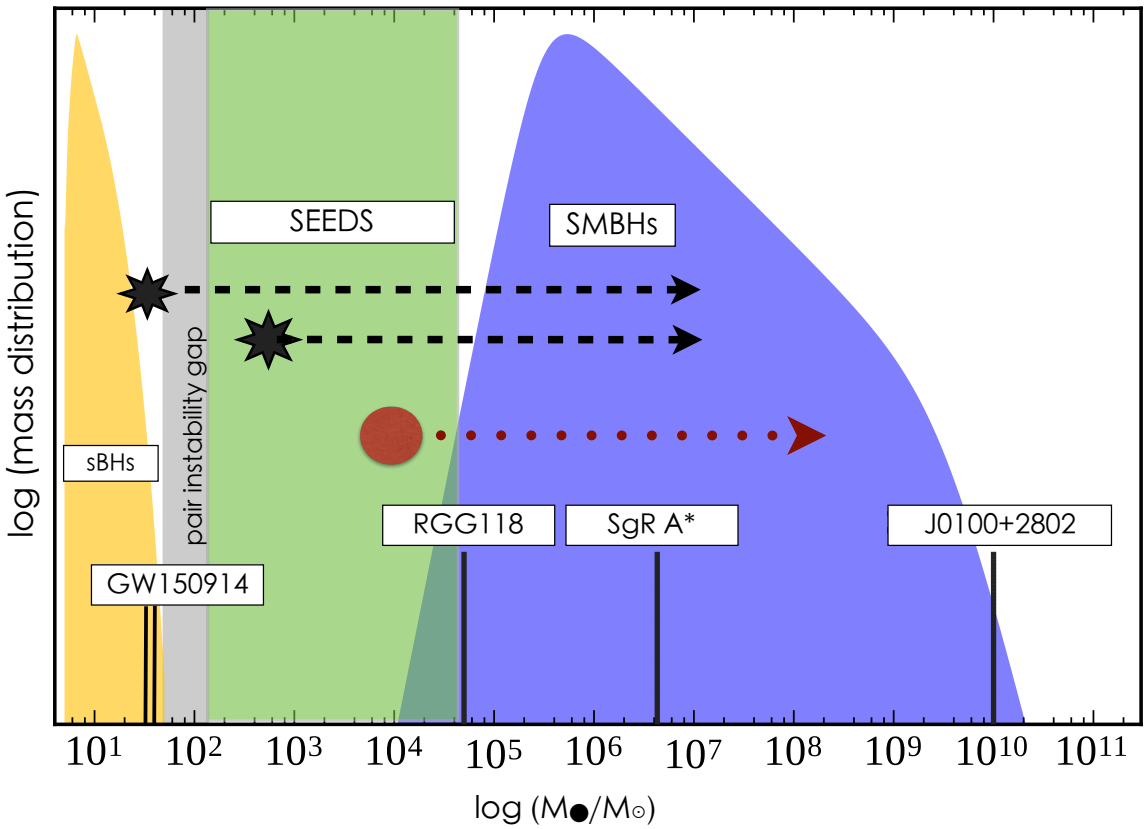


Figure 25.1: Cartoon illustrating the BH mass spectrum encompassing the whole astrophysical relevant range, from sBHs to SMBHs, through the unexplored (light-green) zone where BH seeds are expected to form and grow. Vertical black-lines denote the two sBH masses in GW150914, the mass $M_\bullet$ of RGG118 (the lightest SMBH known as of today in the dwarf galaxy RG118), of SgrA* in the Milky Way, and of J0100+2802 (the heaviest SMBH ever recorded). The mass distribution of sBHs, drawn from the observations of the Galactic sBH candidates, has been extended to account for the high-mass tail following the discovery of GW150914. The minimum (maximum) sBHs is set equal to 3 $M_\odot$ (60 $M_\odot$), and the theoretically predicted pair-instability gap is depicted as a narrow darker-grey strip. The SMBH distribution has been drawn scaling their mass according to the local galaxy mass function and $M_\bullet$-σ correlation. The decline below $\sim 10^5$ $M_\odot$ is set arbitrarily: BH of $\sim 10^{4-5}$ $M_\odot$ may not be ubiquitous in low-mass galaxies as often a nuclear star cluster is in place in these galaxies, which may or may not host a central IMBH Graham and Spitler (2009). The black stars and dashed tracks illustrate the possibility that a SMBH at high redshift forms as sBH-only (born on the left side of the sBH gap) or as light seed (on the right of the gap) which then grows through phases of super-Eddington accretion Lupi *et al.* (2016). The red circle and dotted track illustrates the possibility of a *genetic* divide between sBHs and SMBHs, and that a heavy seed forms through the direct collapse of a supermassive protostar in a metal free, atomic-hydrogen cooling, DM halo Latif *et al.* (2013); Schleicher *et al.* (2013). The seed later grows via gas accretion and mergers with SMBHs in other black halos.

information on the *BH genesis and evolution*. The *Gravitational Wave Universe* is the universe we can sense using GWs as messengers Colpi and Sesana (2017); Amaro-Seoane *et al.* (2017). In

this universe, BBHs are key sources carrying invaluable information on their masses, spins and luminosity distance that are encoded in the GW signal. There is one key condition that needs to be fulfilled: that the BHs we aim at detecting pair and form a binary with GW coalescence time smaller that the Hubble time, possibly close to the redshift of their formation. This condition, enabling the detection of seeds at very high redshifts, is extremely challenging to be fulfilled. BHs in binaries form at "large" separation. Thus, nature has to provide additional dissipative processes leading to the contraction of the BBH down to the scale where GWs drive the inspiral. This requires a strong coupling of the two BHs with the environment, before and after forming a binary system. As we now discuss, understanding this coupling is a current challenge in contemporary astrophysics, cosmology and computational physics Colpi (2014).

Black Hole Binaries: the difficulty of pairing

Due to the weakness of gravity, BBH inspirals driven by GW emission occur on a timescale:

$$\begin{aligned} t_{\rm coal} &= \frac{5c^5}{256G^3}\mathcal{G}(e)(1-e^2)^{7/2}\frac{a^4}{\nu\, M_{\rm BBH}^3} \\ &= \frac{5\cdot 2^4}{256}\mathcal{G}(e)(1-e^2)^{7/2}\frac{GM_{\rm BBH}}{\nu c^3}\tilde{a}^4, \end{aligned} \tag{25.1}$$

where $M_{\rm BBH}$ is the total mass of the BBH, a and e the semi-major axis and eccentricity respectively ($\mathcal{G}(e)$ a weak function of e, and $\mathcal{G}(0)=1$) and $\nu=\mu/M_{\rm BBH}$ the symmetric mass ratio ($\nu=1/4$ for equal mass binaries), with μ the reduced mass of the binary. The values of a and e at the time of formation of the binary determine $t_{\rm coal}$, and this is the longest timescale. A (circular) binary hosting two equal-mass seed BHs of 10^3 $\rm M_\odot$ ($M_{\rm BBH}=10^5$ $\rm M_\odot$) would reach coalescence in 0.27 Gyrs, corresponding to the cosmic time at redshift $z\sim 15$, if the two BHs are at an initial separation of $a\sim\nu^{1/4}4.84\times10^4 R_{\rm G}$ ($\nu^{1/4}\,1.5\times10^4 R_{\rm G}$) corresponding to $a\sim\nu^{1/4}\,0.1$ AU, ($\nu^{1/4}\,30$ AU). For the case of two equal-mass MBHs of 10^6 $\rm M_\odot$ coalescing at $z\sim3$ (close to the peak of the star-formation rate and AGN rate of activity in the universe) $a\sim\nu^{1/4}4.84\times10^6 R_{\rm G}$ corresponding to about one milli-parsec. These are *tiny* scales, and to reach these separations the binary needs to harden under a variety of dissipative processes. The quest for efficient mechanisms of binary shrinking, on AU-scales for sBHs and BH seeds, and sub-galactic scales for MBHs, make merger rate predictions extremely challenging, as Nature has to set rather fine-tuned conditions for a BBH to reach these critical separations. Only below these critical distances the binary contracts driven by GW emission. The merger occurs when the GW frequency (to leading order equal to twice the Keplerian frequency) reaches a maximum value,

$$f_{\rm GW}^{\rm max}\sim\frac{c^3}{\pi 6^{3/2}GM_{\rm BBH}}=4.4\times10^3\left(\frac{\rm M_\odot}{M_{\rm BBH}}\right)\ {\rm Hz}. \tag{25.2}$$

This frequency $f_{\rm GW}^{\rm max}$ scales with the inverse of the total mass of the binary, $M_{\rm BBH}$ as it is determined by the size of the horizon of the two BHs, at the time of coalescence.

Coalescing sBHs in binaries occur in galactic fields Belczynski *et al.* (2010a); Dominik *et al.* (2013), or/and in stellar systems such as globular clusters or/and nuclear star clusters Portegies Zwart and McMillan (2000); Benacquista and Downing (2013); Rodriguez *et al.* (2016); Antonini and Rasio (2016); Haster *et al.* (2016). Thus, sBHs describe phenomena *inside galaxies*. Since there is a time delay between formation of the binary and its coalescence, dictated by the efficiency of the hardening processes, sBHs can merge in galaxies of all types, as in this lapse time that can be of the order of Gyrs, host galaxies undergo strong evolution. Instead, coalescing IMBHs, seeds of the SMBHs, formed in DM halos at high redshifts, and thus track a different environment. Forming in pristine gas clouds their pairing either requires in-situ formation, e.g., from fissioning of rotating super-massive stars Reisswig *et al.* (2013), or via halo-halo mergers on cosmological scales subjected to rapid evolution and embedded in a cosmic web that feed baryons through gaseous stream Valiante *et al.* (2018). Coalescing MBHs refer exclusively to galaxy-galaxy mergers of different morphological types Colpi (2014) occurring during the clustering of cosmic structures, which encompass a wide range of redshifts, from $z\sim9$ to $z\sim0$ passing through the era of cosmic reionization, and of cosmic high noon when the averaged star formation rate has its peak.

In the following Sections we describe in detail the different channels proposed for the formation and pairing of BBHs at all scales. For each physical scenario we review the state of the art, challenges and unanswered questions and the most promising lines of research for the future. Ample space is devoted to stellar mass objects (BNS and BH-NS binaries and BBHs, with a particular focus on the latter), for which we discuss separately the three main formation channels: pairing of isolated binaries in the field, the various flavors of dynamical formation processes, relics from the early universe. We then move onto discuss the state of the art of our understanding of MBH binary pairing and evolution, the current theoretical and observational challenges, and the role of future surveys and pulsar timing arrays (PTAs) in unveiling the cosmic population of these elusive systems.

25.1.4 The formation of compact object mergers through classical binary stellar evolution

Contributors: K. Belczynski, T. Bulik, T. M. Tauris, G. Nelemans

Stellar-origin black holes

The LIGO/Virgo detections of BBH mergers can be explained with stellar-origin BHs Belczynski *et al.* (2016a) or by primordial BHs that have formed from density fluctuations right after Big Bang Garcia-Bellido *et al.* (2018), Stars of different ages and chemical compositions can form BHs and subsequently BBH mergers. In particular, the first metal-free (population III) stars could have produced BBH mergers in the early Universe ($z \approx 10$), while the local ($z \approx 0-2$) Universe is most likely dominated by mergers formed by subsequent generation of more metal-rich population II and I stars Belczynski *et al.* (2017a). The majority of population I/II stars (hereafter: stars) are found in galactic fields ($\sim 99\%$) where they do not experience frequent or strong dynamical interactions with other stars. In contrast, some small fraction of stars ($\sim 1\%$) are found in dense structures like globular or nuclear clusters, in which stellar densities are high enough that stars interact dynamically with other stars. Here, we briefly summarize basic concepts of isolated (galactic fields) stellar and binary evolution that leads to the formation of BBH mergers.

Single star evolution

Detailed evolutionary calculations with numerical stellar codes that include rotation (like BEC, MESA or the Geneva code, e.g., Yoon *et al.* (2010); Paxton *et al.* (2015); Eggenberger *et al.* (2012); Georgy *et al.* (2013)) allow us to calculate the evolution of massive stars. Note that these are not (detailed) hydrodynamic nor multi-dimensional calculations (as such computations are well beyond current computing capabilities), but they solve the basic equations of stellar structure/radiation, energy transport and element diffusion with corrections for effects of rotation. These calculations are burdened with uncertainties in treatment of various physical processes (nuclear reaction rates, convection and mixing, transport of angular momentum within a star, wind mass loss, pulsations and eruptions), yet progress is being made to improve on stellar modeling. Stellar models are used to predict the structure and physical properties of massive stars at the time of core-collapse, after nuclear fusion stops generating energy and (radiation) pressure that supports the star. This is also a point in which transition (at latest) to hydrodynamical calculations is being made to assess the fate of a collapsing star O'Connor and Ott (2011); Fryer *et al.* (2012); Ertl *et al.* (2016).

For a star to form a BH, it is required that either the explosion engine is weak or delayed (so energy can leak from the center of the collapsing star) or that the infalling stellar layers are dense and massive enough to choke the explosion engine adopted in a given hydrodynamical simulation. In consequence, BHs form either in weak supernovae explosions (with some material that is initially ejected falling back and accreting onto the BH or without a supernova explosion at all (in a so-called direct collapse). Note that signatures of BH formation may already have been detected. For example, in SN 1987A there is no sign of a pulsar Alp *et al.* (2018), although the pulsar may still appear when dust obscuration decreases or it simply beams in another direction. Further evidence is the disappearance with no sign of a supernova of a 25 $M_\odot$

supergiant star Adams *et al.* (2017), although this can be a potentially long period pulsating Mira variable star that will re-emerge after a deep decline in luminosity.

Stellar evolution and core-collapse simulations favor the formation of BHs with masses $M_{\rm BH} \sim 5-50$ M$_\odot$ and possibly with very high masses $M_{\rm BH} \gtrsim 135$ M$_\odot$. The low-mass limit is set by the so-called "first mass gap", coined after the scarcity of compact objects in mass range $2-5$ M$_\odot$ Bailyn *et al.* (1998); Özel *et al.* (2010). However, this mass gap may be narrower than previously thought as potential objects that fill the gap are discovered Freire *et al.* (2008); van Kerkwijk *et al.* (2011); Linares *et al.* (2018). The second gap arises from the occurrence of pair-instability SNe (PISN) as discussed below.

The first mass gap may be explained either by an observational bias in determination of BH masses in Galactic X-ray binaries Kreidberg *et al.* (2012) or in terms of a timescale of development of the supernova explosion engine: for short timescales ($\sim$100 ms) a mass gap is expected, while for longer timescales (~ 1 s) a mass gap does not appear and NSs and BHs should be present in the $2-5$ M$_\odot$ mass range Belczynski *et al.* (2012). The mass threshold between NSs and BHs is not yet established, but realistic equations-of-state indicate that this threshold lies somewhere in range $2.0-2.6$ M$_\odot$. The second limit at $M_{\rm BH} \sim 50$ M$_\odot$ is caused by (pulsational) PISNe Heger and Woosley (2002); Woosley (2016). Massive stars with He-cores in the mass range $45 \lesssim M_{\rm He} \lesssim 65$ M$_\odot$ are subject to pulsational PISNe before they undergo a core-collapse. These pulsations are predicted to remove the outer layers of a massive star (above the inner $40-50$ M$_\odot$) and therefore this process limits the BH mass to ~ 50 M$_\odot$. BHs within these two limits ($M_{\rm BH} \sim 5-50$ M$_\odot$) are the result of the evolution of stars with an initial mass $M_{\rm ZAMS} \approx 20-150$ M$_\odot$. For high-metallicity stars (typical of stars in the Milky Way disk, $Z = $ Z$_\odot = 0.01-0.02$; Asplund *et al.* (2009); Villante *et al.* (2014)) BHs form up to ~ 15 M$_\odot$, for medium-metallicity stars ($Z = 10\%$ Z$_\odot$) BHs form up to ~ 30 M$_\odot$, while for low-metallicity stars ($Z = 1\%$ Z$_\odot$) BHs form up to ~ 50 M$_\odot$ Belczynski *et al.* (2010b); Kruckow *et al.* (2018).

The remaining question is whether stars can form BHs above ~ 50 M$_\odot$. Stars with He-cores in mass range: $65 \lesssim M_{\rm He} \lesssim 135$ M$_\odot$ are subject to PISNe Bond *et al.* (1984); Fryer and Kalogera (2001); Heger and Woosley (2002) that totally disrupts the star and therefore does not produce a BH. However, it is expected that stars with He cores as massive as $M_{\rm He} \gtrsim 135$ M$_\odot$, although subject to pair instability, are too massive to be disrupted and they could possibly form massive BHs ($M_{\rm BH} \gtrsim 135$ M$_\odot$). If these massive BHs exist, then second mass gap will emerge with no BHs in the mass range $M_{\rm BH} \simeq 50-135$ M$_\odot$ Heger *et al.* (2003); Yusof *et al.* (2013); Spera *et al.* (2015b); Marchant *et al.* (2016). If these massive BHs exist, and if they find their way into merging BBH binaries then GW observatories will eventually find them Belczynski *et al.* (2014); Marchant *et al.* (2016). The existence of very massive BHs will constrain the extend of the stellar initial mass function (IMF) and wind mass-loss rates for the most massive stars ($M_{\rm ZAMS} > 300$ M$_\odot$) that can produce these BHs. So far, there are no physical limitations for the existence of such massive stars Massey (2011); Crowther *et al.* (2012). Note that the most massive stars known today are found in the LMC with current masses of ~ 200 M$_\odot$ Crowther *et al.* (2010).

BH formation may be accompanied by a natal kick. Natal kicks are observed for Galactic radio pulsars, that move significantly faster (with average 3-dimensional speeds of ~ 400 km s^{-1}, e.g., Hobbs *et al.* (2005)) than their typical progenitor star ($10-20$ km s^{-1}). These high velocities are argued to be associated with some supernova asymmetry: either asymmetric mass ejection Janka and Mueller (1994); Tamborra *et al.* (2014); Janka (2017) or asymmetric neutrino emission Kusenko and Segrè (1996); Fryer and Kusenko (2006); Socrates *et al.* (2005). Note that neutrino kick models all require (possibly unrealistic) strong magnetic fields, and simulations of core collapse without magnetic fields are unable to produce significant neutrino kicks. Naturally, in these simulations the authors find the need for asymmetric mass ejection to explain natal kicks (e.g., Tamborra *et al.* (2014)). Although BH natal kicks as high as observed for NSs cannot yet be observationally excluded, it is unlikely for BHs to receive such large natal kicks Mandel (2016); Repetto *et al.* (2017). It appears that some of the BHs may form without a natal kick Nelemans *et al.* (1999); Mirabel (2017), while some may form with a kick of the order of ~ 100 km s^{-1} Repetto *et al.* (2017).

The BH natal spin may simply depend on the angular momentum content of the progenitor star at the time of core collapse. Massive stars are known to rotate; with the majority of massive stars spinning at moderate surface velocities (about 90% at ~ 100 km s^{-1}) and with some stars spinning rather rapidly (10% at ~ 400 km s^{-1}). During its evolution, a star may transport angular momentum from its interior to its atmosphere. Then angular momentum is lost

from the star when the outer star layers are removed. The envelope removal in massive stars that are progenitors of BBH mergers is easily accomplished either by stellar winds or by mass transfer to a close companion star. However, the efficiency of angular momentum transport is unknown. Two competitive models are currently considered in the literature: very effective angular momentum transport by a magnetic dynamo Spruit (1999, 2002) included in the `MESA` stellar evolution code that leads to solid body rotation of the entire star, and mild angular momentum transport through meridional currents Eggenberger *et al.* (2012); Ekström *et al.* (2012) included in the `Geneva` code that leads to differential rotation of the star. Asteroseismology that probes the internal rotation of stars has not yet provided any data on massive stars (i.e. progenitors of BHs). The available measurements for intermediate-mass stars (B type main-sequence stars) show that some stars are well described by solid body rotation and some by differential rotation Aerts (2008). Depending on an the adopted model, the angular momentum content of a star at core-collapse could be very different. During BH formation some angular momentum may be lost affecting the natal BH spin if material is ejected in a supernova explosion. Whether BH formation is accompanied by mass loss is not at all clear and estimates that use different assumptions on mass ejection in the core-collapse process are underway Belczynski *et al.* (2017b); Schrøder *et al.* (2018). At the moment, from the modeling perspective, the BH natal spin is mostly unconstrained.

Binary star evolution

The majority ($\gtrsim 70\%$) of massive O/B stars, the potential progenitors of NSs and BHs, are found in close binary systems Sana *et al.* (2012). The evolution of massive stars in binaries deviates significantly from that of single stars Podsiadlowski *et al.* (1992); Wellstein and Langer (1999); Brown *et al.* (2001); Langer (2012). The main uncertainties affecting the calculation of BH merger rates are the metallicity, the common-envelope phase and the natal kick a BH receives at birth. These factors also determine the two main BH properties: mass and spin.

Two main scenarios were proposed for BBH merger formation from stars that evolve in galactic fields: classical isolated binary evolution similar to that developed for double neutron stars (e.g., Tutukov and Yungelson (1993); Lipunov *et al.* (1997); Belczynski *et al.* (2001); Voss and Tauris (2003); Mennekens and Vanbeveren (2014); Eldridge and Stanway (2016); Belczynski *et al.* (2016a); Stevenson *et al.* (2017)) and chemically homogeneous evolution (e.g., Maeder (1987); Yoon and Langer (2005); Marchant *et al.* (2016); Mandel and de Mink (2016); de Mink and Mandel (2016); Woosley (2016)). Classical binary evolution starts with two massive stars in a wide orbit ($a \gtrsim 50 - 1000$ R$_\odot$), and then binary components interact with each other through mass transfers decreasing the orbit below ~ 50 R$_\odot$ in common envelope (CE) evolution Webbink (1984); Ivanova *et al.* (2013). Depending on their mass, both stars collapse to BHs, either with or without supernova explosion, forming a compact BBH binary. The orbital separation of two BHs which merge within a Hubble time is below ~ 50 R$_\odot$ (for a circular orbit and two 30 M$_\odot$ BHs Peters (1964)). van den Heuvel *et al.* (2017) highlight that for the massive stars that are expected to form BHs, the mass ratio in the second mass-transfer phase is much less extreme, which means a CE phase may be avoided.

In the chemically homogeneous evolution scenario, two massive stars in a low-metallicity environment form in a very close binary ($\lesssim 50$ R$_\odot$) and interact strongly through tides Zahn (1992); Kushnir *et al.* (2016). Tidal interactions lock the stars in rapid rotation and allow for the very effective mixing of elements in their stellar interior that inhibits radial expansion of the stars. Hence, these stars remain compact throughout their evolution and collapse to BHs without experiencing a CE phase Marchant *et al.* (2016). This evolutionary scheme may well explain the most massive LIGO/Virgo BBH mergers, as the enhanced tidal mixing required in this channel only works for most massive stars ($\gtrsim 30$ M$_\odot$). It also predicts that both binary components evolve while rotating fairly rapidly and this may produce rapidly spinning BHs, unless angular momentum is lost very efficiently in the last phases of stellar evolution or during BH formation.

Reconciling observations and theory

There seems to be some confusion in the community as to what was expected and predicted by stellar/binary evolution models prior to LIGO/Virgo detections of the first sources. In particular, it is striking that often it is claimed that LIGO/Virgo detections of BBH mergers

with very massive BHs were surprising or unexpected. Before 2010, in fact most models were indicating that BNS are dominant GW sources for ground-based detectors (however, see also Ref. Voss and Tauris (2003), predicting LIGO detection rates strongly dominated by BBH binaries), and that stellar-origin BHs are formed with small masses of ~ 10 M$_\odot$ Abadie *et al.* (2010). The models before 2010 were limited to calculations for stars with high metallicity (typical of the current Milky Way population) and this has introduced a dramatic bias in predictions. However, already around 2010 it was shown that stars at low metallicities can produce much more massive ($30-80$ M$_\odot$) BHs than observed in the Milky Way Zampieri and Roberts (2009); Mapelli *et al.* (2009); Belczynski *et al.* (2010b). Additionally, it was demonstrated that binaries at low metallicities are much more likely to produce BBH mergers than high metallicity stars by one or two ordes of magnitude Belczynski *et al.* (2010a). This led directly to the pre-detection predictions that *(i)* the first LIGO/Virgo detection was expected when the detector (BNS) sensitivity range reached about $50-100$ Mpc (the first detection was made at 70 Mpc), that *(ii)* BBH mergers will be the first detected sources, and that *(iii)* the BBH merger chirp-mass distribution may reach 30 M$_\odot$ Belczynski *et al.* (2010a); Dominik *et al.* (2012, 2013, 2015). Additionally studies of the future evolution of X-ray binaries like IC10 X-1 and NGC300 X-1 Bulik *et al.* (2011) suggested that there exists a large population of merging BH binaries with masses in excess of 20 M$_\odot$.

Post-detection binary evolution studies expanded on earlier work to show agreement of calculated BBH merger rates and BBH masses with LIGO/Virgo observations Eldridge and Stanway (2016); Belczynski *et al.* (2016a); Stevenson *et al.* (2017); Kruckow *et al.* (2018). The range of calculated merger rates ($10-300$ Gpc^{-3} yr^{-1}) comfortably coincides with the observed rate estimates ($12-213$ Gpc^{-3} yr^{-1} for the LIGO/Virgo 90% credible interval). Note that these classical binary evolution rates are typically much higher than rates predicted for dynamical BBH formation channels ($5-10$ Gpc^{-3} yr^{-1}, Rodriguez *et al.* (2016a); Askar *et al.* (2017)). The most likely detection mass range that is predicted from classical isolated binary evolution is found in the total BBH merger mass range of $20-100$ M$_\odot$ (e.g.Kruckow *et al.* (2018)). Examples of merger rate and mass predictions for BBH mergers are given in Figures **??** and 25.3. A similar match between observed LIGO/Virgo BH masses and model predictions is obtained from the dynamical formation channel Rodriguez *et al.* (2016a); Askar *et al.* (2017). Note that this makes these two channels indistinguishable at the moment, although the merger rates are likely to be much smaller for the dynamical channel.

A caveat of concern for the prospects of LIGO/Virgo detecting BBH mergers with masses above the PISN gap is related to the relatively low GW frequencies of the such massive BBH binaries with chirp masses above 100 M$_\odot$. During the in-spiral, the emitted frequencies are expected to peak approximately at the innermost stable circular orbit (ISCO), before the plunge-in phase and the actual merging. Hence, the emitted frequencies are most likely less than 100 Hz, and with redshift corrections the frequencies to be detected are easily lower by a factor of two or more. A frequency this low is close to the (seismic noise) edge of the detection window of LIGO/Virgo and may not be resolved.

The current LIGO/Virgo broad range of an empirically determined local BBH merger-rate density ($12-213$ Gpc^{-3} yr^{-1}) can easily be explained by uncertainties in key input physics parameters of population synthesis modelling, such as the slope of the IMF or the efficiency of the CE ejection, see e.g. Table 5 in Kruckow *et al.* (2018). Alternatively, it may be explained by altering BH natal kicks Belczynski *et al.* (2016a) from full NS natal kicks corresponding to a low rate estimate) to almost no BH kicks (high rate estimate). Once LIGO/Virgo narrows its empirical estimate it may be possible to use the merge-rate density to constrain the input physics applied in modelling, although it should be cautioned that there is a large degree of degeneracy Voss and Tauris (2003); Kruckow *et al.* (2018).

LIGO/Virgo provides an estimate of the effective spin parameter that measures the projected BH spin components (a_1, a_2) parallel to binary angular momentum, weighted by BH masses (M_1, M_2):

$$\chi_{\rm eff} \equiv \frac{M_1 a_1 \cos\Theta_1 + M_2 a_2 \cos\Theta_2}{M_1 + M_2}\,, \tag{25.3}$$

where $\Theta_{1,2}$ are the angles between the BH spins and the orbital angular momentum vector. So far, for the six LIGO/Virgo BBH detections the effective spins cluster around $|\chi_{\rm eff}| < 0.35$ (e.g., Abbott *et al.* (2017c)). This defies the expectations for the main BBH formation channels. If spin magnitudes of stellar-origin BHs are significant, as estimated for several Galactic and extra-galactic X-ray binaries Fragos and McClintock (2015), then the dynamical forma-

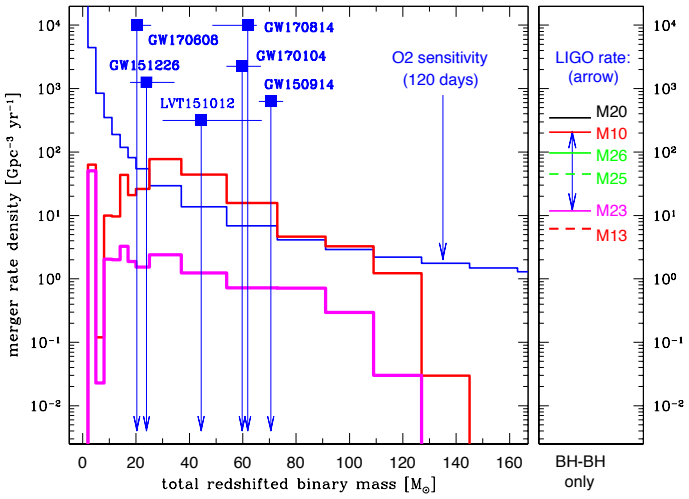


Figure 25.2: *Left:* Redshifted total merger mass distribution for two population synthesis models Belczynski *et al.* (2017b): M10 (low BH natal kicks) and M23 (high BH natal kicks). The O2 LIGO sensitivity is marked; the most likely detections are expected when models are closest to the sensitivity curve. We also mark LIGO/Virgo BBH merger detections (vertical positions have no meaning), all of which fall within the most likely detection region between $20 - 100$ $M_\odot$. *Right:* Source frame BBH merger-rate density of several population synthesis models for the local Universe ($z = 0$). The current LIGO O1/O2 BBH merger rate is 12–213 Gpc^{-3} yr^{-1} (blue double-headed arrow). Note that the models with fallback-attenuated BH natal kicks (M10, M20) are at the LIGO upper limit, while models with high BH natal kicks are at the LIGO lower limit (M13, M23). Models with small (M26) and intermediate (M25) BH kicks fall near the middle of the LIGO estimate.

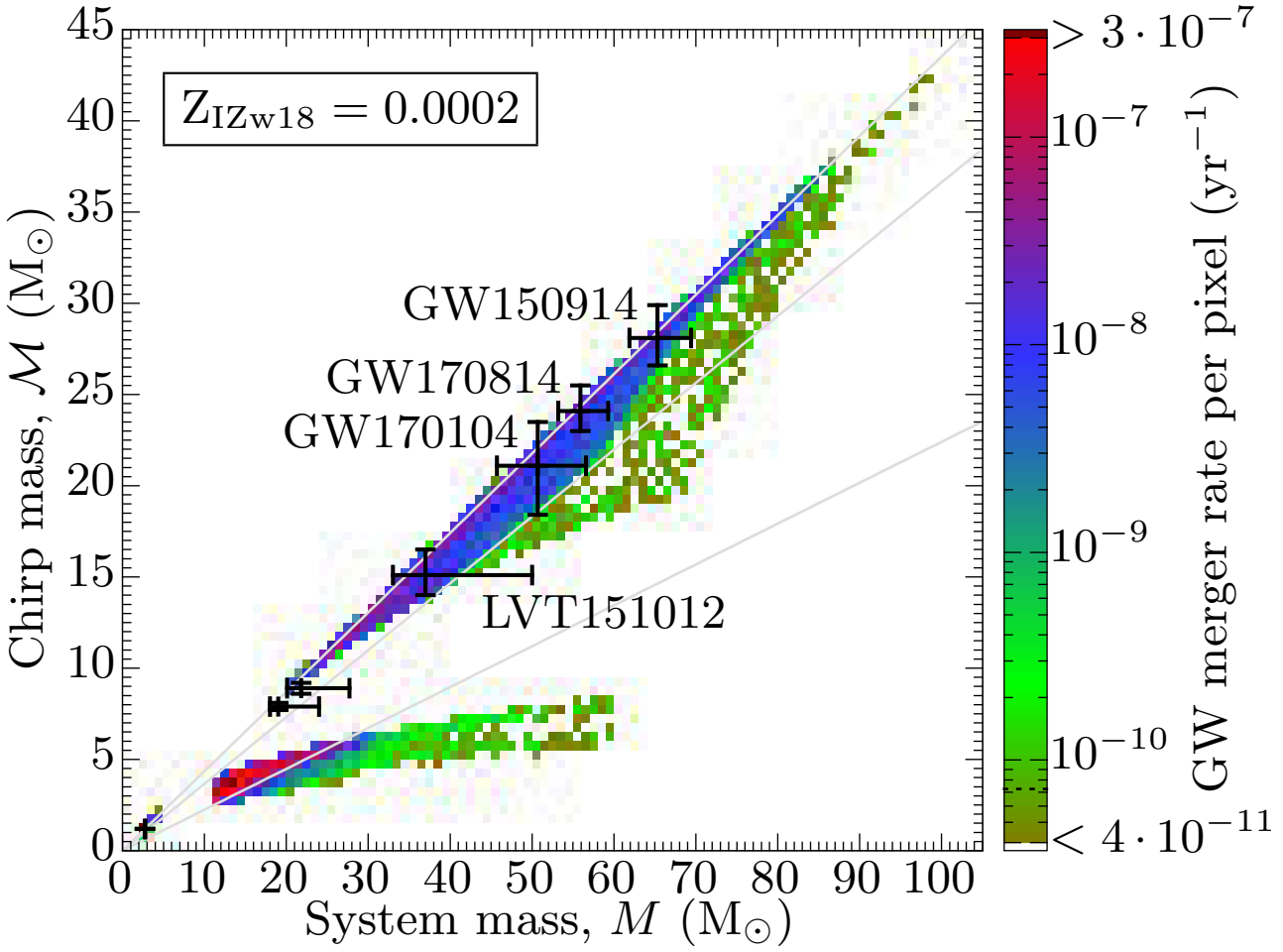


Figure 25.3: Distribution of simulated double compact object binaries in the total mass– chirp mass plane for a metallicity of Z = 0.0002. Three islands of data are visible, corresponding to BBH, mixed BH-NS and BNS systems. The colour code indicates the merger rate per pixel for a Milky Way equivalent galaxy. The three solid grey lines indicate a constant mass ratio of 1, 3 and 10 (from top to bottom). Observed LIGO/Virgo sources are shown with black crosses and event names are given for the four most massive cases. The lowest mass BBH mergers can only be reproduced with a higher metallicity. Figure taken from Ref. Kruckow *et al.* (2018).

tion channel (random BH capture) predicts an isotropic $\chi_{\rm eff}$ distribution, while the classical binary evolution channel mostly predicts aligned BH spins (aligned stellar spins that are only moderately misaligned by BH natal kicks). Hence, in the latter case one expects a distribution peaked at high values of $\chi_{\rm eff}$. On the one hand this tension is rather unfortunate, as it does not allow to distinguish between these two very different scenarios of BBH merger formation. On the other hand, this is a great opportunity to learn something new about stars and BHs that was so far not expected and is not easily understood in the framework of current knowledge.

There are five potential explanations of this apparent tension. First, there could be a mechanism that puts both BH spins in the plane of the binary orbit, producing $\chi_{\rm eff} = 0$ independent of BH masses and spin magnitudes. Such a mechanism is proposed to operate in triple stars Antonini *et al.* (2017). Note that triple stars are a minority of stars ($10 - 20\%$ of all field stars) and that the proposed mechanism requires very specific tuning to operate, so it is not clear how likely it is that it worked for all LIGO/Virgo sources. Second, there could be a mechanism that forces the BH spins to be in opposite directions so that they cancel out. For approximately equal mass BBH binaries (typical of LIGO/Virgo sources) this would imply 180 degree flip of spins. No mechanism is known to produce such configurations. Third, both BH spin magnitudes may be very small reducing effective spin parameter to $\chi_{\rm eff} = 0$, independent of other merger parameters. This was already proposed and is used in studies of angular momentum transport in stars Belczynski *et al.* (2017b). Fourth, LIGO/Virgo BHs may not have been produced by stars, but for example they come from a primordial population for which small spins are naturally expected Garcia-Bellido *et al.* (2018); Clesse and García-Bellido (2017a). Fifth, it may be the case that the spin of a BH (at least its direction) is not mainly determined by the angular momentum of the progenitor star, but a result of the physics of the collapse (spin tossing, e.g., Tauris *et al.* (2017)). In that case, there is no reason to assume the spins in mergers formed from isolated binary evolution are aligned and they may be isotropic. Note that with these five options, that need to be tested and developed further, one cannot determine the main formation channel of BBH mergers, as it was proposed in several recent studies Kushnir *et al.* (2016); Zaldarriaga *et al.* (2018); Hotokezaka and Piran (2017); Hotekezaka and Piran (2017).

The issue of spins is rather fundamental as the effective spin parameter most likely contains information on natal BH spin magnitudes and therefore information on stellar astrophysics regarding angular momentum transport in massive stars, which is still unconstrained by electromagnetic observations. Possibly the second-formed BH spin could have been increased in binary evolution by accretion of mass from a companion star. However, it is argued that BHs cannot accrete a significant amount of mass in the binary evolution leading to the BBH formation Belczynski *et al.* (2008, 2016a, 2017b). This is partly due to very low accretion rates during a CE of $1 - 10\%$ of the Bondi-Hoyle accretion rate Ricker and Taam (2008); MacLeod *et al.* (2017); Murguia-Berthier *et al.* (2017); Holgado *et al.* (2018)) and fast timescale Roche-lobe overflow (RLO) in massive progenitor binaries that leads to ejection of most of the exchanged matter from the binary system (due to super-Eddington mass-transfer rates). The amount of mass accreted by BHs in binary systems ($\lesssim 1 - 3$ M$_\odot$) cannot significantly spin up massive BHs ($10 - 30$ M$_\odot$) that are detected by LIGO/Virgo.

It is important to note the most challenging parts of the evolutionary predictions in the context of BBH formation. In the classical binary evolutionary channel, the two most uncertain aspects of input physics are related to the CE evolution and the natal BH kicks. Although some observational constraints on both processes exist, they are rather weak. Systems entering CE evolution have recently been reported. However, they are not as massive as stars that could produce NSs or BHs Tylenda and Kamiński (2016). The search for CE traces as IR outburts has so far yielded no clear detection of emerging or receding X-ray binaries as expected in this scenario Oskinova *et al.* (2018).

BH natal kicks are only measured indirectly by positions and motions of X-ray binaries hosting BHs, and usually only lower limits on natal kicks are derived Nelemans *et al.* (1999); Mandel (2016); Repetto *et al.* (2017); Belczynski *et al.* (2016c). On theoretical grounds, reliable models for CE Ivanova *et al.* (2013) and supernovae Janka *et al.* (2016) are missing. In the chemically homogeneous evolution channel the largest uncertainty is connected with the efficiency of the mixing, the number of massive binaries that can form in very close orbits, and the strength of tidal interactions in close binaries. Since initial orbital period distributions are measured only in the very local Universe Sana *et al.* (2012), it is not clear whether they apply to the majority of all stars and thus it is not fully understood how many stars are potentially subject to this kind of evolution. Even a deeper problem exists with our understanding of tides

and their effectiveness in close binaries Zahn (1992); Kushnir *et al.* (2016), and effective tides are the main component of input physics in chemically homogeneous evolution.

Astrophysical inferences from GW observations are currently limited. First, it is not known which formation channel (or what mixture of them) produces the known LIGO/Virgo BBH mergers. Since each channel is connected to specific set of conclusions (for example, the isolated binary channel informs about CE evolution and natal kicks; while the dynamical channel informs predominantly about stellar interactions in dense clusters) it is not clear which physics we are testing with GW observations. Second, within each channel there is degeneracy such that multiple model parameters are only weakly constrained by observations. As nobody so far was able to deliver a comprehensive study of the large multi-dimensional parameter space, the inferences on various model parameters (e.g. the strength of BH natal kicks or the CE efficiency) are hindered by various and untested model parameter degeneracies. However, it is already possible to test several aspects of stellar evolution as some processes leave unambiguous signatures in GW observations. For example, the existence of the first and the second mass gap, if confirmed by LIGO/Virgo, will constrain core-collapse supernovae and PISNe, respectively. Careful studies with detailed exposure of caveats are needed to transform future observations into astrophysical inferences.

It is expected that GW events resulting from the merger of stellar-mass BHs are unlikely to produce electromagnetic counterparts. Nevertheless, a (marginal) transient signal detected by the Fermi gamma-ray burst monitor, 0.4 seconds after GW150914, was reported Connaughton *et al.* (2016). This claim encouraged several theoretical speculations for a possible origin. It has been suggested de Mink and King (2017) that a tiny fraction of a solar mass of baryonic material could be retained in a circumbinary disk around the progenitor binary which probably shed a total mass of > 10 $M_\odot$ during its prior evolution. The sudden mass loss and recoil of the merged BH may then shock and heat this material, causing a transient electromagnetic signal. It will be interesting see if any further electromagnetic signals will be associated with BBH mergers in the near future.

BNS mergers

The formation of double NSs has been studied in detail following the discovery of the Hulse-Taylor pulsar Hulse and Taylor (1975) and currently more than 20 such BNS systems are known – see Tauris *et al.* (2017) for a details and a review on their formation and evolution. Whereas no BBH binaries had been detected prior to GW150914, detailed knowledge on BNS systems was known for many years from Galactic radio pulsar observations Lorimer and Kramer (2012).

LIGO/Virgo has currently only detected one BNS merger event (GW170817), located in the lenticular (S0) galaxy NGC 4993, and thus the local empirical BNS merger rate density still remains rather uncertain: 1540^{+3200}_{-1220} Gpc^{-3} yr^{-1} (90% credible limits Abbott *et al.* (2017f)). The study of double NSs is relevant for the study of BHs because it gives independent constraints on the evolution of similar massive binary populations from which binary BHs are formed. In particular the question which stars for NSs and which form BHs and if and how this depends on previous binary interactions is a question that likely only can be answered observationally by significant statistics on the relative abundance of double BHs, BNS and NS-BH binaries.

There are two major sites to produce BNS mergers: isolated binaries in galactic fields (the main contributor), and dense environments in globular and nuclear clusters. None of these sites (nor any combination of them) can easily reproduce the preliminary estimated LIGO/Virgo event rate, even if all elliptical host galaxies are included within the current LIGO/Virgo horizon Belczynski *et al.* (2017c). The local supernova rate can be estimated to be about 10^5 Gpc^{-3} yr^{-1}, so the current empirical BNS merger rate from LIGO/Virgo would imply a very high efficiency of BNS binary formation.

This apparent tension may be solved if BNS mergers are allowed to originate from a wide range of host galaxies and if the low-end of the LIGO/Virgo merger-rate estimate is used (320 Gpc^{-3} yr^{-1}). Population synthesis studies seem to agree that rates as high as $200 - 600$ Gpc^{-3} yr^{-1} can possibly be reached if favorable conditions are assumed for classical binary evolution Chruslinska *et al.* (2018); Kruckow *et al.* (2018); Vigna-Gómez *et al.* (2018). In the coming years, the statistics of the empirical BNS merger rate will improve significantly and reveal whether current theoretical BNS merger rates need a revision. It is interesting to notice, however, that calibrations with the rates of observed short gamma-ray bursts and the rate of mergers required to reproduce the abundances of heavy r-process elements favor a merger-

rate density significantly smaller than the current empirical rate announced by LIGO/Virgo Kruckow *et al.* (2018).

The main uncertainties of the theoretically predicted merger rate of BNS binaries are also related to CE evolution and SNe (similar to the case of BBH mergers). A CE evolution is needed to efficiently remove orbital angular momentum to tighten the binary orbit and allow a merger event within a Hubble time. However, the onset criterion and the efficiency of the in-spiral in a CE remain uncertain Ivanova *et al.* (2013); Kruckow *et al.* (2016). The kick velocities imparted on newborn NSs span a wide range from a few $\mathrm{km\,s^{-1}}$ (almost symmetric SNe) to more than 1000 $\mathrm{km\,s^{-1}}$ and are sometimes difficult to determine Verbunt *et al.* (2017). The kick magnitude seems to be related to the mass of the collapsing core, its density structure and the amount of surrounding envelope material Janka (2017). Additional important factors for the predicted merger rates include the slope of the initial-mass function and the efficiency of mass accretion during RLO Kruckow *et al.* (2018).

All taken together, the predicted merger rate of double NSs in a Milky Way equivalent galaxy vary by more than two orders of magnitude Abadie *et al.* (2010). The empirical merger rate that LIGO/Virgo will detect at design sensitivity in a few years is of uttermost importance for constraining the input physics behind the rate predictions. Besides the detection rates, the mass spectrum and the spin rates of the double NS mergers will reveal important information about their origin. Although their precise values cannot be determined due to degeneracy, the overall distribution of estimated NS masses will reveal information on their formation process (electron capture vs iron-core collapse SNe), as well as constraining the nuclear-matter equation-of-state. The latter will also be constrained from tidal deformations of the NSs in their last few orbits Abbott *et al.* (2017f).

An important observational signature of the merger event of BNS binaries is the detection of the ring-down signal of either a meta-stable highly massive NS or a BH remnant. Such information would set constraints on the fundamental equation-of-state of nuclear matter at high densities. Whereas LIGO/Virgo is not sensitive enough to detect a ring-down signal, it is the hope that third-generation GW detectors might be able to do so. Another important observational input is the distribution of mass ratios in BNS merger events. This distribution could provide important information about the formation of NSs and the nature of the supernovae (e.g. electron-capture vs iron core-collapse supernovae).

Optical follow-up will in many cases reveal the location of a double NS merger (e.g., Abbott *et al.* (2017g)). This will provide information on their formation environments Soares-Santos *et al.* (2017); Coulter *et al.* (2017) and kinematics Fong and Berger (2013), besides crucial information on heavy r-process nucleosynthesis Metzger *et al.* (2010).

Mixed BH-NS mergers

The formation of mixed BH/NS mergers is expected to follow similar scenarios as double NS or double BH Tutukov and Yungelson (1993); Voss and Tauris (2003) with all the associated uncertainties.

It is perhaps somewhat surprising that LIGO/Virgo detected a double NS merger (GW170817) before a mixed BH/NS merger, since (at least some) population synthesis codes predict a detection rate of mixed BH/NS systems which is an order of magnitude larger that the expected detection rate of double NS systems (with large uncertainties, e.g.,Kruckow *et al.* (2018)). Hence, if these predictions are correct, GW170817 is a statistical rare event and detections of mixed BH/NS systems are expected already in the upcoming O3/O4 LIGO runs. The detection of mixed BH-NS mergers is interesting for two reasons: (i) a key question is whether BH-NS and NS-BH binaries may be distinguished from one another (i.e. the formation order of the two compact objects, which leads to a (mildly) recycled pulsar in the latter case), and (ii) the detected in-spiral of mixed BH-NS mergers may reveal interesting deviations from GR and pure quadrupole radiation given the difference in compactness between BHs and NSs Will (1994).

25.1.5 Dynamical Formation of Stellar-mass Binary Black Holes

Contributors: B. Kocsis and A. Askar

Introduction

The recent GW observations from six BBH mergers (GW150914, LVT151012, GW151226, GW170104, GW170608, GW170814) and a BNS merger (GW170817) opened ways to test the astrophysical theories explaining the origin of these sources Abbott *et al.* (2016b,a, 2017c,e,c,f) . As discussed earlier, the component masses of these merging sources span a range between 8–35$M_\odot$ Abbott *et al.* (2017c), which is different from the distribution of BHs seen in X-ray binaries, 5 – 17$M_\odot$ Farr *et al.* (2011) with two possible exceptions (NGC300X-1 and IC10X-1). The event rates of BBH mergers are estimated to be between 40–213 $\mathrm{Gpc^{-3}yr^{-1}}$ for a power-law BH mass function and between 12–65 $\mathrm{Gpc^{-3}yr^{-1}}$ for a uniform-in-log BH mass function Abbott *et al.* (2017c), which is higher than previous theoretical expectations of dynamically formed mergers, for instance see Abadie *et al.* (2010). The event rates of BNS mergers is currently based on a single measurement which suggests a very high value of 1540^{+3200}_{-1220} $\mathrm{Gpc^{-3}yr^{-1}}$ Abbott *et al.* (2017f) (c.f. Belczynski *et al.* (2017c)). How do we explain the observed event rates and the distribution of masses, mass ratios, and spins?

Several astrophysical merger channels have been proposed to explain observations. Here we review some of the recent findings related to **dynamics**, their limitations and directions for future development. These ideas represent alternatives to the classical binary evolution picture, in which the stars undergo poorly understood processes, such as common envelope evolution. In all of these models the separation between the compact objects is reduced dynamically to less than an AU, so that GWs may drive the objects to merge within a Hubble time, $t_{\rm Hubble} = 10^{10}$ yr.

Merger rate estimates in dynamical channels

Dynamical formation and mergers in globular clusters

Although about 0.25% of the stellar mass is currently locked in globular clusters (GCs) Rosenblatt *et al.* (1988); Böker (2008); Harris *et al.* (2015), dynamical encounters greatly catalyze the probability of mergers compared to that in the field. Within the first few million years of GC evolution, BHs become the most massive objects. Due to dynamical friction, they will efficiently segregate to the cluster center Spitzer (1969) where they can dynamically interact and form binaries with other BHs Sigurdsson and Hernquist (1993); Ivanova *et al.* (2005). The dense environments of GCs can also lead to binary-single and binary-binary encounters involving BHs that could result in their merger. Collisional systems like GCs can also undergo core collapse, during which central densities can become very large leading to many strong dynamical interactions. The encounter rate density is proportional to $\mathcal{R} \sim \int dV \, \langle n_*^2 \rangle \, \sigma_{cs} v$, where n_* is the stellar number density, $\sigma_{\rm cs} \sim GMb/v^2$ is the capture cross section, M is the total mass, b is the impact parameter, v is the typical velocity dispersion. Note the scaling with $\langle n_*^2 \rangle$, where $\langle n_*^2 \rangle^{1/2} \sim 10^5 \mathrm{pc^{-3}}$ in GCs and $\sim 1 \mathrm{pc^{-3}}$ in the field.

Estimates using Monte Carlo method to simulate realistic GCs yield merger rates of at least $\mathcal{R}_{\rm GC} \sim 5\,\mathrm{Gpc^{-3}yr^{-1}}$ Rodriguez *et al.* (2016a); Askar *et al.* (2017), falling below the current limits on the observed rates. Rate estimates from results of direct N–body simulations also yield a similar value of $\mathcal{R}_{\rm GC} \sim 6.5\,\mathrm{Gpc^{-3}yr^{-1}}$ Park *et al.* (2017). In particular, these papers have shown that the low-mass GCs below $10^5 M_\odot$ have a negligible contribution to the rates. However, they also show that initially more massive GCs (more massive than $10^6 M_\odot$) contribute significantly to the rates. Askar *et al.* (2017) argue that actual merger rates from BHs originating in GCs could be 3 to 5 times larger than their estimated value of $\sim 5\,\mathrm{Gpc^{-3}yr^{-1}}$ due to uncertainties in initial GC mass function, initial mass function of stars in GCs, maximum initial stellar mass and evolution of BH progenitors. Furthermore, BBH merger rates can be significant in young clusters with masses $\sim 10^4\,M_\odot$ Mapelli (2016b); Banerjee (2017).

A simple robust upper limit may be derived by assuming that all BHs merge once in each GC in a Hubble time:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &\leq \frac{1}{2} f_{\rm BH} N_* \frac{n_{\rm GC}}{t_{\rm Hubble}} \\ &< \frac{1}{2} \frac{\int_{20M_\odot}^{150M_\odot} f_{\rm IMF}(m) dm}{\int_{0.08M_\odot}^{150M_\odot} m f_{\rm IMF}(m) dm} \times 10^{5.5} M_\odot \times \frac{0.8 \mathrm{Mpc^{-3}}}{10^{10} \mathrm{yr}} \\ &= 38\,\mathrm{Gpc^{-3}yr^{-1}} \end{aligned} \tag{25.4}$$

where $f_{\rm BH}$ is the fraction of stars that turn into BHs from a given stellar initial mass function $f_{\rm IMF}$, N_* is the initial number of stars in a GC, and $n_{\rm GC}$ is the cosmic number density of GCs, and $f_{\rm IMF}(m) \propto (m/0.5{\rm M}_\odot)^{-2.3}$ for $m > 0.5{\rm M}_\odot$ and $(m/0.5{\rm M}_\odot)^{-1.3}$ otherwise Kroupa (2001). The result is not sensitive to the assumed upper bound on mass of the BH progenitor, which is set by the pair instability supernova. Recent estimates find 110–130 $\rm M_\odot$ for GC metallicities Spera and Mapelli (2017). However, note that the mass in GCs may have been much higher than currently by a factor ~ 5, since many GCs evaporated or got tidally disrupted Gnedin *et al.* (2014); Arca-Sedda and Capuzzo-Dolcetta (2014). This effect increases the rates by at most a factor 2 at $z < 0.3$, but more than a factor 10 at $z > 2.5$ Fragione and Kocsis (2018).

Dynamical and relativistic mergers in galactic nuclei

The densest regions of stellar BHs in the Universe are expected to be in the centers of nuclear stars clusters (NSC), whose mass-segregated inner regions around the SMBH exceed $n_* \sim 10^{10}{\rm pc}^{-3}$ O'Leary *et al.* (2009). In contrast to GCs, the escape velocity of the SMBH in the central regions of NSCs is so high that compact objects are not expected to be ejected by dynamical encounters or supernova birth kicks. In these regions, close BH binaries may form due to GW emission in close single-single encounters O'Leary *et al.* (2009). Binary mergers may also be induced by the secular Kozai-Lidov effect of the SMBH Antonini and Perets (2012); Hoang *et al.* (2018); Petrovich and Antonini (2017); Arca-Sedda and Gualandris (2018); Arca-Sedda and Capuzzo-Dolcetta (2017); Hamers *et al.* (2018) and tidal effects Fernández and Kobayashi (2018). Detailed estimates give from the $\mathcal{R}_{\rm NSC} \sim 5 - 15\,{\rm Gpc}^{-3}{\rm yr}$ O'Leary *et al.* (2009); Hoang *et al.* (2018); Antonini and Perets (2012); Petrovich and Antonini (2017); Belczynski *et al.* (2017c), below the observed value. Higher values may be possible for top heavy BH mass functions and if black holes are distributed in disk configurations O'Leary *et al.* (2009); Szölgyén and Kocsis (2018).

These numbers are sensitive to the uncertain assumptions on the total supply of BHs in the NSCs, either formed in situ or delivered by infalling GCs Antonini *et al.* (2012); Antonini (2013); Gnedin *et al.* (2014); Arca-Sedda *et al.* (2015); Arca-Sedda *et al.* (2017). If all BHs merged in galactic nuclei once, an upper limit similar to Equation (25.4) is $\mathcal{R}_{\rm NSC} < 30\,{\rm Gpc}^{-3}{\rm yr}^{-1}$. Due to the high escape velocity from NSCs and a rate of infalling objects, this bound may be in principle exceeded.

Mergers facilitated by ambient gas

Dynamical friction facilitates mergers in regions where a significant amount of gas embeds the binary, which may carry away angular momentum efficiently. Particularly, this may happen in a star forming regions Tagawa *et al.* (2016); Belczynski *et al.* (2017a); Tagawa and Umemura (2018), in accretion disks around SMBHs in active galactic nuclei (AGN) Barausse and Rezzolla (2008); Kocsis *et al.* (2011) or if the stellar envelope is ejected in a stellar binary Tagawa *et al.* (2018). In AGN, the accretion disk may serve to capture stellar mass binaries from the NSC Bartos *et al.* (2017a), or help to form them in its outskirts by fragmentation Stone *et al.* (2017b). The rate estimates are at the order of $1\,{\rm Gpc}^{-3}{\rm yr}^{-1}$, below the observed value. Nevertheless, mergers in this channel deserve attention as they have electromagnetic counterparts, the population of AGNs, which may be used in a statistical sense Bartos *et al.* (2017b).

Isolated triples

The stellar progenitors of BHs are massive stars, which mostly reside not only in binaries, but in many cases in triples. The gravity of the triple companion drives eccentricity oscillations through the Kozai-Lidov effect, which may lead to GW mergers after close encounters. However, the rate estimates are around or below $6\,{\rm Gpc}^{-3}{\rm yr}^{-1}$, below the current observational range Silsbee and Tremaine (2017); Antonini *et al.* (2017). The rates may be higher 2–25 $\rm Gpc^{-3}yr^{-1}$ for low metallicity triples Rodriguez and Antonini (2018) and further increased by non-hierarchical configurations Arca-Sedda *et al.* (2018); Banerjee (2018) and by quadrupole systems Fang *et al.* (2018).

Mergers in dark matter halos

The first metal-free stars (Pop III) may form binaries dynamically and merge in DM halos Kinugawa *et al.* (2014), but the expected rates are below the observed rates Belczynski *et al.* (2017a). Futhermore, two dynamical channels have been suggested leading to a high number of BH mergers in DM halos. If PBHs constitute a significant fraction of DM, the merger rates following GW captures in single-single encounters match the observed rates Bird *et al.* (2016). However, this would also lead to the dispersion of weakly bound GCs in ultrafaint dwarf galaxies, contradicting an observed system Brandt (2016). More recent estimates show that the LIGO rates are matched by this channel even if only 1% of the DM is in PBHs Ali-Haimoud *et al.* (2017). The second PBH channel requires only a 0.1%– fraction of DM to be PBHs, given that they form binaries dynamically in the very early universe Sasaki *et al.* (2016). While these sources can match the observed rates, as discussed in the following Sec. 25.1.6, we await further strong theoretical arguments or observational evidence for the existence of these PBHs Sasaki *et al.* (2018).

Advances in numerical methods in dynamical modeling

Recent years have brought significant advances in modelling the dynamical environments leading to GW events.

Direct N-body integration

State of the art direct N–body simulations have been used to model the dynamics of GCs to interpret GW observations. These methods now reach $N = 10^6$, so that stars are represented close to 1:1 in the cluster Wang *et al.* (2016). Comparisons between the largest direct N–body and Monte Carlo simulations show an agreement Wang *et al.* (2016); Rodriguez *et al.* (2016b). However, due to their high numerical costs, only a very low number of initial conditions have been examined to date. Further development is needed to account for a higher number of primordial binaries, larger initial densities, a realistic mass spectrum, and a nonzero level of rotation and anisotropy.

Large direct N-body simulation have also been used to study the dynamics in nuclear star clusters (NSC) in galactic nuclei with an SMBH and the formation of NSCs from the infall of GCs Arca-Sedda *et al.* (2015). Recent simulations have reached $N = 10^6$ in regions embedding NSCs Panamarev *et al.* (2018a). Here, the number of simulated stars to real stars is 1:100. To interpret GW mergers in these systems, a 1:1 simulation of the innermost region of the NSC would be most valuable, even if the total simulated number is of the order 10^5–10^6. Including a mass distribution and primordial binaries would also be useful.

Direct N-body methods were also recently used to simulate the NSC in AGN with stellar captures by the accretion disk, to predict the rate of tidal disruption events and the formation of a nuclear stellar disk Kennedy *et al.* (2016); Panamarev *et al.* (2018b). The most important place for development is to relax the assumption of a rigid fixed disk in these simulations. Indeed, the disk may be expected to be significantly warped by the star cluster Kocsis and Tremaine (2011); Perets *et al.* (2018), and the stars and BHs captured in the disk may grow into IMBHs and open gaps in the disk Kocsis *et al.* (2011). Furthermore, an initially nonzero number of binaries, the binary-disk interaction, and a mass spectrum would be important to incorporate to make GW predictions.

Monte-Carlo methods

State of the art Monte-Carlo methods have also improved significantly during the past years, providing a numerically efficient way to model the evolution of GCs accurately. Recent developments showed that the BH subclusters do not necessarily decouple and evaporate at short time scales and that GCs with longer relaxation times can retain BHs up to a Hubble time Morscher *et al.* (2015); Arca Sedda *et al.* (2018); Askar *et al.* (2018). These methods have been used to predict the evolutionary pathways to some of the observed mergers Rodriguez *et al.* (2016); Chatterjee *et al.* (2017) and to interpret the distributions of masses and spins Rodriguez *et al.* (2016a); Askar *et al.* (2017). These methods have been used to study the formation of IMBHs Giersz *et al.* (2015). Most recently, 2.5-order post-Newtonian dissipative

effects were incorporated in order to re-simulate binary-single interactions involving three BHs from results of these Monte Carlo codes which increased the rate of eccentric mergers by a factor of 100 Rodriguez *et al.* (2018); Samsing *et al.* (2018); Samsing and D'Orazio (2018). The implementation of post-Newtonian terms and tidal dissipation Samsing *et al.* (2018a) for computing results of strong binary-single and binary-binary encounters involving at least two BHs could further increase merger rates for BBHs expected to originate from GCs. Moreover, implementation of two body gravitational and tidal capture within these codes could provide more insights into the role of dynamics in forming potentially merging BBHs.

Further development is needed to include resonant multibody effects. Moreover, simulations of galactic nuclei with Monte Carlo methods would be valuable to tracking the evolution of binaries, and accounting for long term global effects such as resonant relaxation.

Secular Symplectic N-body integration

Systems which are described by a spherical gravitational potential such as a galactic nucleus or a GC are affected by strong global resonances, in which the anisotropies of the system drive a rapid secular change in the angular momentum vectors of the objects, called resonant relaxation Rauch and Tremaine (1996). Vector and scalar resonant relaxation, which affect the distribution of orbital planes and the eccentricity, respectively, are expected to reach statistical equilibrium within a few Myr to a few 100 Myr, respectively. A secular symplectic N-body integration method was recently developed Kocsis and Tremaine (2015). Preliminary results show that objects such as BHs, which are heavier than the average star in a GC or a nuclear star cluster tend to be distributed in a disk Szölgyén and Kocsis (2018). Since LVC mergers happen more easily in BH disks, if they exist, future studies are necessary to explore the formation, evolution, and the expected properties of such configurations.

The statistical equilibrium phase space distribution of resonant relaxation is known only for a limited number of idealized configurations Touma and Tremaine (2014); Roupas *et al.* (2017); Takács and Kocsis (2018); Fouvry *et al.* (2018). Interestingly resonant relaxation has strong similarities to other systems in condensed matter physics such as point vortices and liquid crystals Touma and Tremaine (2014); Kocsis and Tremaine (2015); Roupas *et al.* (2017). This multidisciplinary connection may be used to study these probable sites of BH mergers Roupas *et al.* (2017).

Semianalytical methods

Semianalytical methods are developed to include the highest number of physical effects in an approximate way. The formation of the Galactic bulge from the infall of GCs was examined in great detail with this technique Gnedin *et al.* (2014); Arca-Sedda and Capuzzo-Dolcetta (2014). It was shown, that during this process, more than 95% of the initial GC population is destroyed. Thus, GCs were much more common at cosmologically early times. Since one way to form IMBHs in GCs is by runaway collisions of stars or BHs Portegies Zwart and McMillan (2002), their numbers may also expected to be higher than previously thought (however, this conclusion may be different in other IMBH formation channels Giersz *et al.* (2015)). GCs generate a high rate of mergers between stellar mass and 10^2–$10^3 M_\odot$ IMBHs detectable in the near future with advanced LIGO and Virgo detectors at design sensitivity at $z > 0.6$ Fragione *et al.* (2018); Arca-Sedda and Gualandris (2018); Arca-Sedda and Capuzzo-Dolcetta (2017). BH mergers with IMBHs with 10^3–$10^4 M_\odot$ may also be detected with LISA from the local Universe.

Astrophysical interpretation of dynamical sources

How can dynamical models test the astrophysical interpretation of GW sources? GW detectors can measure the binary component masses, the spin magnitudes and direction, the binary orbital plane orientation, the eccentricity, the distance to the source and the sky location. The observed distributions of these parameters may be compared statistically to the predicted distributions for each channel. Some smoking gun signatures of the astrophysical environment are also known for individual sources, discussed below.

Mass distribution

The mass distribution of mergers depends on the theoretically poorly known BH mass function times the mass-dependent likelihood of mergers. Particularly, the mergers of massive objects are favored in GCs, due to the mass dependence of binary formation in triple encounters, binary exchange interactions, dynamical friction, and the Spitzer instability. Monte Carlo and N-body simulations show that the likelihood of merger is proportional to M^4 in GCs O'Leary *et al.* (2016). The 2-dimensional total mass and mass ratio distribution of mergers may be used to test this prediction Zevin *et al.* (2017) and to determine the underlying BH mass function in these environments. The mass function of mergers may also vary with redshift as the most massive BHs are ejected earlier Rodriguez *et al.* (2016a).

Recently, Ref. Kocsis *et al.* (2018) introduced a parameter to discriminate among different astrophysical channels:

$$\alpha = -(m_1 + m_2)^2 \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial m_1 \partial m_2} \,. \tag{25.5}$$

This dimensionless number is 1 ± 0.03 for PBHs formed dynamically in the early universe (if the PBH mass function is assumed to be flat. For arbitrary PBH mass function the results can be substantially different Chen and Huang (2018)), 10/7 for BHs which form by GW emission in collisionless systems such as DM halos. For BHs which form by GW emission in collisional systems which exhibit mass segregation, this α varies for different component masses. In galactic nuclei it ranges between 10/7 for the low mass components in the population to -5 for the highest mass component. It would be very useful to make predictions for α for all other merger channels.

Spin distribution

Using the empirically measured rotation rate of Wolf-Rayet (WR) stars, the birth spin of the massive BHs is expected to be small Amaro-Seoane and Chen (2016). If BHs have undergone previous mergers, their spin is distributed around 0.7 Gerosa and Berti (2017); Fishbach *et al.* (2017). Dynamical effects may also spin up the WR-descendent BH Zaldarriaga *et al.* (2018). If the BH acquires a significant amount of mass due to accretion, it is expected to be highly spinning. Thus, second generation mergers are distinguishable in mass and spin from first generation mergers. Monte Carlo simulations predict that 10% are second generation in GCs O'Leary *et al.* (2016); Rodriguez *et al.* (2018). Results from Monte Carlo simulations have also been utilized to investigate the role of spin in gravitational recoil kicks on merged BHs Morawski *et al.* (2018). This has important implications for repeated mergers in dense environments like GCs, results from Ref. Morawski *et al.* (2018) suggest that that about 30% of merging BHs could be retained in GCs. According to a recent X-ray observing campaign, 7 out of the 22 Active Galactic Nuclei analyzed are candidates for being high spin SMBHs (with spin $> 98\%$), see Table 1 of Ref. Brenneman (2013). Some of the X-ray binaries show evidence of highly spinning stellar mass BHs McClintock *et al.* (2014). However, with the exception of a single source, current LVC sources are consistent with zero effective spin Farr *et al.* (2017). If spinning, the relative direction of spins is expected to be uncorrelated (isotropic) for spherical dynamical systems. This is different from the standard common envelope channel, where spin alignment is generally expected with the angular momentum vector and counteralignment is not likely, in case the BHs are spinning Farr *et al.* (2017, 2018).

Eccentricity distribution

Since GW emission circularizes binaries Peters (1964), they are expected to be nearly circular close to merger unless they form with a very small pericenter separation. Indeed, GW sources in GCs are expected to have a relatively small eccentricity in the LIGO band close to merger O'Leary *et al.* (2006). Moderate eccentricity of $e = 0.1$ is expected from 10% of GC sources at the low-frequency edge of the Advanced LIGO design sensitivity Rodriguez *et al.* (2018); Samsing *et al.* (2018). However, they may have a high eccentricity in the LISA band O'Leary *et al.* (2006); Breivik *et al.* (2016); Samsing and D'Orazio (2018); D'Orazio and Samsing (2018); Samsing *et al.* (2018b) or the DeciHz band Chen and Amaro-Seoane (2017). Field triples may also yield some eccentric LIGO mergers Silsbee and Tremaine (2017); Antonini *et al.* (2017);

Rodriguez and Antonini (2018); Arca-Sedda *et al.* (2018). Eccentricity may be much higher for sources forming by GW emission in close encounters O'Leary *et al.* (2009).

The eccentricity distribution of merging BH binaries in GCs is expected to have three distinct peaks corresponding to binaries which merge outside of the cluster after ejection following a binary-single hardening interaction, binary mergers which happen within a cluster in between two binary-single interactions, and mergers which happen during a binary-single interactions Samsing and D'Orazio (2018); D'Orazio and Samsing (2018).

For GW capture binaries, the typical eccentricity at the last stable orbit (LSO, extrapolating Peters (1964)) is set by the velocity dispersion of the source population σ as $e_{\rm LSO} \sim 0.03(\sigma/1000{\rm kms}^{-1})^{35/32}\,(4\eta)^{-35/16}$, where $\eta = m_1 m_2/(m_1+m_2)^2$ is the symmetric mass ratio Gondán *et al.* (2018a). The heavier stellar BHs and IMBHs are expected to merge with a higher eccentricity at around 0.1, while the lower mass BHs will have an eccentricity around 10^{-3} Gondán *et al.* (2018a). At design sensitivity Advanced LIGO and VIRGO may be more sensitive to eccentricity well before merger Gondán *et al.* (2018b).

Sky location distribution

Since GW sources are observed from beyond 100 Mpc, they are expected to be isotropically distributed. The sky location measurement accuracy is typically insufficient to identify a unique host galaxy counterpart for individual mergers. However, the power spectrum of sky location of all mergers may be measured. This may be useful to determine the typical galaxy types of mergers, particularly, whether the sources are in active galactic nuclei Bartos *et al.* (2017b).

Smoking gun signatures

Which other features may help to conclusively identify the host environment of individual GW sources?

Resolved clusters with electromagnetic counterparts

Recently it was shown that several inspiraling stellar mass black hole binaries of Milky Way GCs are expected to be in the LISA band Kremer *et al.* (2018). Therefore if LISA identifies these GW sources on the sky, it will constrain the event rates corresponding to the GC channel.

Modulation of the GW phase due to environmental effects

In the case of LISA sources, extreme mass ratio inspirals may be significantly affected by an a SMBH companion or gas-driven migration Yunes *et al.* (2011); Kocsis *et al.* (2011). For stellar-mass BH mergers, the most important effect of a perturbing object is a Doppler phase shift, which accumulates mostly at low GW frequencies Meiron *et al.* (2017). LIGO and LISA together will be able to measure the SMBH provided that the orbital period around the SMBH is less than $\mathcal{O}$(yr) Meiron *et al.* (2017); Inayoshi *et al.* (2017).

GW astrophysical echos

The identification of a secondary lensed signal by the SMBH using LVC may confirm that a LVC merger takes place in a galactic nucleus. This manifests as a GW echo with a nearly identical chirp waveform as the primary signal but with a typically fainter amplitude depending on direction and distance from the SMBH Kocsis (2013). If the distance between the source and the SMBH is less than $10^3 M_{\rm SMBH}$, the relative amplitude of the echo is of the order of 10%, and the time-delay is less than a few hours. Studies of the expected source parameters of sources with GW echos are underway.

Double mergers and mergers with electromagnetic counterparts

Finally, a case is conceivable in which in which a binary-single or binary-binary encounter results in a double merger, i.e. two mergers from the same direction within a short timespan Samsing and Ilan (2017). Such an observation would indicate a dense dynamical host environment. Furthermore, binary-single or binary-binary encounters involving at least 2 BHs and one or more stellar object may also lead to BBH mergers with with transient electromagnetic counterparts associated with the disruption or accretion of stellar matter on the BHs. Observation of such a counterpart would also indicate that the merging BHs originated in a dense dynamical environment. The inclusion of tidal and gravitational dissipation effects during the computation of such strong encounters Samsing *et al.* (2018a) within simulations of GCs could help to constrain rates for BBH mergers in which an electromagnetic counterpart could be expected.

25.1.6 Primordial Black Holes and Dark Matter

Contributors: G. Bertone, C. T. Byrnes, D. Gaggero, J. García-Bellido, B. J. Kavanagh

Motivation and Formation Scenarios.

The nature of Dark Matter (DM) is one of the most pressing open problems of Modern Cosmology. The evidence for this mysterious form of matter started to grow in the early 20th century Bertone and Hooper (2016), and it is today firmly established thanks to a wide array of independent observations Silk *et al.* (2010). Its nature is still unknown, and the candidates that have been proposed to explain its nature span over 90 orders of magnitude in mass, from ultra-light bosons, to massive BHs Bergström (2000); Bertone *et al.* (2005a); Feng (2010). An intriguing possibility is that at least a fraction of DM is in the form of PBHs Carr *et al.* (2016). The recent LVC detections Bird *et al.* (2016); Clesse and García-Bellido (2017a), have revived the interest in these objects, and prompted a reanalysis of the existing bounds Carr *et al.* (2016); García-Bellido and Clesse (2018) and new prospects for phenomenological signatures García-Bellido (2017); Clesse and García-Bellido (2017a).

PBHs might be produced from early universe phase transitions, topological defects (e.g., cosmic strings, domain walls), condensate fragmentation, bubble nucleation and large amplitude small scale fluctuations produced during inflation (see the reviews Green (2015); Sasaki *et al.* (2018) and references therein). Excluding the possibility of BH relics, non-evaporating PBHs could range in mass from 10^{-18} to 10^{6} solar masses today, although the most interesting range today is that associated with the observed LIGO BBHs, around a few to tens of solar masses. For those PBHs, amongst the most promising production mechanisms was the one first proposed in Garcia-Bellido *et al.* (1996) from high peaks in the matter power spectrum generated during inflation. When those fluctuations re-enter the horizon during the radiation era, their gradients induce a gravitational collapse that cannot be overcome even by the radiation pressure of the expanding plasma, producing BHs with a mass of order the horizon mass Clesse and García-Bellido (2015). Most of these PBH survive until today, and may dominate the Universe expansion at matter-radiation equality.

One important question is what fraction $f_{\rm PBH} = \Omega_{\rm PBH}/\Omega_{\rm DM}$ of DM should be made of O(10M) PBHs in order to match the BBH merger rate inferred by LIGO/Virgo ($\mathcal{R} \simeq 10$ - 200 Gpc^{-3} yr^{-1} Abbott *et al.* (2017c)). If one considers PBH binaries that form within virialized structures, the corresponding rate is compatible with $f_{\rm PBH} = 1$ Bird *et al.* (2016). However, PBH binary systems can form in the early Universe (deep in the radiation era) as well Nakamura *et al.* (1997); Ioka *et al.* (1998), if the orbital parameters of the pair allow the gravitational pull to overcome the Hubble flow and decouple from it. A recent calculation of the associated merger rate today Sasaki *et al.* (2016) – significantly extended in Ali-Haimoud *et al.* (2017) – provides a much larger estimate (compared to the former scenario): This result can be translated into a bound on $f_{\rm PBH}$, which is potentially stronger than any other astrophysical and cosmological constraint in the same range. The constraint has been recently put on more solid grounds in Kavanagh *et al.* (2018) by taking into account the impact of the DM mini-halos around PBHs, which have a dramatic effect on the orbits of PBH binaries, but surprisingly subtle effect on their merger rate today. Several aspects of this calculation are still under debate, including

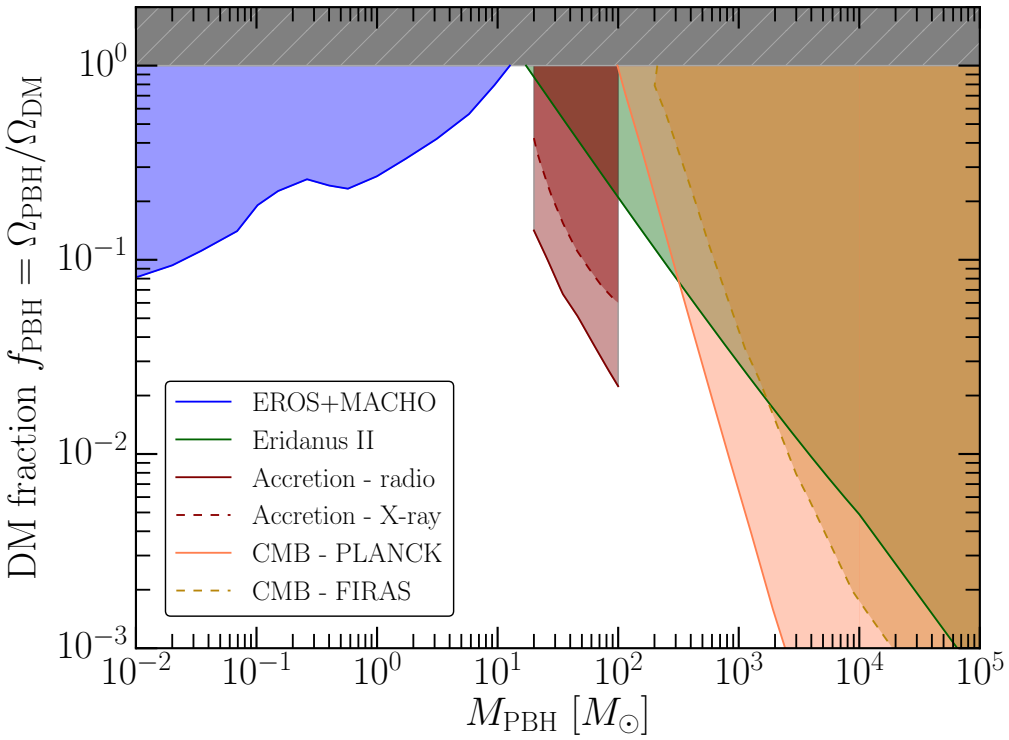


Figure 25.4: **Summary of astrophysical constraints on PBHs in the mass range $M \in [10^{-2}, 10^{5}]\, M_\odot$.** Details of the constraints are given in the main text and we plot here the most conservative. We emphasize that astrophysical constraints may have substantial systematic uncertainties and that the constraints shown here apply only for monochromatic mass functions.

the PBH mass distribution, the role of a circumbinary accretion disk of baryons, the impact of initial clustering of PBHs (see Ali-Haïmoud (2018)) and the survival until present time of the binary systems that decoupled in the radiation era.

The critical collapse threshold to form a PBH is typically taken to be $\delta_c \equiv \delta\rho_c/\rho \sim 0.5$, with an exponential sensitivity on the background equation of state, the initial density profile and angular momentum. Because any initial angular momentum suppresses PBH formation, PBHs are expected to spin slowly, a potential way to discriminate between them and (rapidly rotating) astrophyical BHs Chiba and Yokoyama (2017).

Inflationary models which generate PBHs are required to generate a much larger amplitude of perturbations on small scales compared to those observed on CMB scales. This can be achieved either through multiple-field effects or an inflection point in single-field inflation Ezquiaga *et al.* (2018); Garcia-Bellido and Ruiz Morales (2017). These typically generate a reasonably broad mass fraction of PBHs, in contrast to the monochromatic mass spectrum usually assumed when interpreting observational constraints. In addition, the softening of the equation of state during the QCD phase transition greatly enhances the formation probability of solar mass PBHs compared to the more massive merging BHs LIGO detected Byrnes *et al.* (2018). BHs below the Chandrasekhar mass limit would be a smoking gun of a primordial origin.

At non-linear order, scalar and tensor perturbations couple, implying that the large amplitude perturbations required to generate PBHs will also generate a stochastic background of GWs. For the LIGO mass range the corresponding GW frequency is constrained by pulsar timing arrays unless the scalar perturbations are non-Gaussian Nakama *et al.* (2017); Garcia-Bellido *et al.* (2017).

Astrophysical probes

Constraints on the PBH abundance are typically phrased in terms of $f_{\rm PBH} = \Omega_{\rm PBH}/\Omega_{\rm DM}$, the fraction of the total DM density which can be contributed by PBHs. Even in the case where $f_{\rm PBH} < 1$, a future detection via astrophysical probes or GW searches remains hopeful

Sasaki *et al.* (2016). We outline selected astrophysical constraints below, summarizing these in Fig. 25.4, where we focus on PBHs around the Solar mass range, most relevant for GW signals.

Micro-lensing: The MACHO Allsman *et al.* (2001) and EROS Tisserand *et al.* (2007) collaborations searched for micro-lensing events in the Magellanic Clouds in order to constrain the presence of Massive Compact Halo Objects (MACHOs) in the Milky Way Halo. Considering events on timescales of $\mathcal{O}$(1-800) days constrains $f_{\rm PBH} < 1$ for masses in the range $M_{\rm PBH} \in [10^{-7}, 30]\,M_\odot$ (though these constraints come with a number of caveats, see e.g. Hawkins (2015); García-Bellido and Clesse (2018)). Another promising target is M31: an important fraction of the Andromeda and Milky Way DM halo can be probed by micro-lensing surveys, and an interesting hint comes from the observation of 56 events in the $\mathcal{O}$(1-100) days range from this region of interest, which may suggest a MACHO population with $f \sim 0.5$ and mass $1\,M_\odot$ or lighter Calchi Novati *et al.* (2005); Lee *et al.* (2015). A recent search for lensing of Type Ia Supernovae obtained constraints on all PBH masses larger than around $10^{-2}\,M_\odot$, although substantial PBH fractions $f_{\rm PBH} \lesssim 0.6$ are still compatible with the data Zumalacarregui and Seljak (2017). For wide mass distributions the SN lensing constraints go away Garcia-Bellido *et al.* (2018) and PBH could still constitute all of the DM.

Early Universe constraints: PBHs are expected to accrete gas in the Early Universe, emitting radiation and injecting energy into the primordial plasma. This in turn can lead to observable distortions of the CMB spectrum and can affect CMB anisotropies Carr (1981). Early calculations over-estimated the effect Ricotti *et al.* (2008); Chen *et al.* (2016), with more recent studies finding weaker constraints Aloni *et al.* (2017); Ali-Haïmoud and Kamionkowski (2017). In spite of this, data from COBE/FIRAS Aloni *et al.* (2017); Clesse and García-Bellido (2017b) and PLANCK Ali-Haïmoud and Kamionkowski (2017) can still rule out PBHs with masses $M_{\rm PBH} \gtrsim 100\,M_\odot$ as the dominant DM component. It should be noted that these constraints depend sensitively on the details of accretion onto PBHs in the Early Universe (see e.g. Ref. Poulin *et al.* (2017)).

Dynamical constraints: The presence of PBHs is also expected to disrupt the dynamics of stars. Wide halo binaries may be perturbed by PBHs and the actual observation of such systems constrains the PBHs abundance above $\simeq 20\,M_\odot$ Monroy-Rodríguez and Allen (2014) (although significant fractions $f_{\rm PBH} \lesssim 0.2$ are still allowed). PBHs are also expected to dynamically heat and thereby deplete stars in the centre of dwarf galaxies. Observations of stellar clusters in Eridanus II Brandt (2016) and Segue I Koushiappas and Loeb (2017a) have been used to constrain PBHs heavier than $\mathcal{O}(1)\,M_\odot$ to be sub-dominant DM components, unless they have an IMBH at their center Li *et al.* (2017a).

Radio and X-ray constraints: If PBHs exist in the inner part of the Galaxy, which contains high gas densities, a significant fraction of them would inevitably form an accretion disk and emit a broad-band spectrum of radiation. A comparison with existing catalogs of radio and X-ray sources in the Galactic Ridge region already rules out the possibility that PBHs constitute all of the DM in the Galaxy, even under conservative assumptions on the physics of accretion Gaggero *et al.* (2017). During the next decade, the SKA experiment will provide an unprecedented increase in sensitivity in the radio band; in particular, SKA1-MID will have the unique opportunity to probe the presence of a subdominant population of PBHs in the Galaxy in the $10 \div 100\,M_\odot$ mass range, even if it amounts to a fraction as low as $\simeq 1\%$ of the DM.

In Fig. 25.4, we show only the most conservative of these constraints, which suggest that PBHs may still constitute all of the DM for masses close to $10\,M_\odot$, or a smaller fraction ($f_{\rm PBH} \gtrsim 0.1$) for masses up to $\mathcal{O}(100\,M_\odot)$. We highlight that such astrophysical constraints may have large systematic uncertainties and that these constraints apply only to PBHs with a mono-chromatic mass function. Recent studies have begun re-evaluating these constraints for extended mass functions Green (2016); Bellomo *et al.* (2018); Kühnel and Freese (2017); García-Bellido and Clesse (2018). For physically motivated mass functions, it may be possible to achieve up to $f_{\rm PBH} \sim 0.1$ for PBHs in the mass range $25 - 100\,M_\odot$ Carr *et al.* (2017). Relaxing certain dynamical constraints (which typically have large uncertainties) or considering more general mass functions may accommodate an even larger PBH fraction Carr *et al.* (2017); Lehmann *et al.* (2018).

Discriminating PBHs from astrophysical BHs

A number of observations may help discriminating PBHs from ordinary astrophysical BHs. The detection of GWs from a binary system including a compact object lighter than standard stellar BHs, say below 1 solar mass, would point towards the existence of PBHs. This can be

deduced from the highest frequency reached in the GW chirp signal, $f_{\rm ISCO} = 4400\,{\rm Hz}\,(M_\odot/M)$, and it is in principle possible already with Advanced LVC in the next run O3 García-Bellido (2017). The detection of GWs at redshift $z \gtrsim 40$ would imply a non-standard cosmology, or the existence of PBHs Koushiappas and Loeb (2017b). Further insights on the origin of BHs might be obtained through the analysis of 'environmental' effects, which are discussed in Sec. 25.3.5, and through the analysis of the spatial distribution and mass function of X-ray and radio sources powered by BHs.

25.1.7 Formation of supermassive black hole binaries in galaxy mergers

Contributors: M. Colpi, M. Volonteri, A. Sesana

When two galaxies, each hosting a central SMBH merge, the SMBHs start a long journey that should bring them from separations of tens of kpc (1 kpc $= 3.086 \times 10^{21}$ cm) down to milli-parsec scales, below which they merge through GWs. The initial *pairing* of BHs in merging galaxies, their binding into a *binary* on parsec scales, and their crossing to enter the GW-driven inspiral are the three main stages of this dynamical journey, sketched in Figure 25.5 Colpi (2014). In some cases, the two SMBHs become bound in the core of the merger remnant, cross to the gravitational-driven regime and eventually coalesce. However, there are cases in which the two SMBHs never form a binary: one of the SMBHs may remain stranded and unable to pair and bind Governato *et al.* (1994).

The cosmic context, the growth of DM halos through mergers with other halos gives us the backdrop upon which all the subsequent evolution develops. This is the first clock: the halo merger rate evolves over cosmic time and peaks at different redshift for different halo masses. Furthermore, the cosmic merger rate predicts that not all mergers occur with the same frequency: *major* mergers, of halos of comparable masses (from 1:1 down to $\sim$ 1:4) are rare, while minor mergers (mass ratio $<$ 1: 10) are more common. However, the dynamical evolution is much faster in major mergers than in minor mergers: if the mass ratio of the merging halos and galaxies is too small, the satellite halo is tidally disrupted early on in its dynamical evolution and its central SMBH is left on a wide orbit, too far from the center of the larger galaxy to ever merge with its SMBH Callegari *et al.* (2009); Tremmel *et al.* (2018). A population of wandering SMBHs is therefore predicted to exist in galaxies Volonteri and Perna (2005); Bellovary *et al.* (2010); Volonteri *et al.* (2016).

For mergers where the SMBHs can pair, i.e., find themselves in the newly formed core of the merger remnant, the second hurdle is to get close enough to form a gravitationally bound binary Yu (2002); Mayer *et al.* (2007); Roškar *et al.* (2015); Pfister *et al.* (2017). For SMBHs embedded in a singular isothermal sphere, a binary forms at a separation of $a = GM/2\sigma^2 \simeq 0.2\,{\rm pc}\,(M_{\rm BBH}/10^6\ {\rm M}_\odot)\,(\sigma/100\ {\rm km\ s^{-1}})^{-2}$, where the mass of the SMBHs exceeds the enclosed mass in stars, gas, and DM. The journey from the beginning of the merger, at tens of kpc, to the formation of the binary on pc to subpc scales, takes between a few tens of Myr for compact galaxies at very high redshift, $z > 3-4$ to several Gyr for larger, less dense galaxies at low redshift Yu (2002); Volonteri *et al.* (2003); Dosopoulou and Antonini (2017).

In the cases where the SMBHs form a bound binary within the Hubble time, the final crossing into the GW regime hinges on exchanges of energy through scattering with low angular momentum stars in the nucleus of the galaxy Begelman *et al.* (1980) or on extraction of angular momentum through gravitational torques coming from a gas disc that may result on the shrinking of its separation Goldreich and Tremaine (1980), or on a combination of the two processes. Recent results of direct N-body simulations, Monte Carlo methods and scattering experiments are giving an optimistic view of what has been considered to be the main bottleneck of the binary evolution for almost 40 years: the "final parsec problem," i.e., running out of low-angular momentum stars Begelman *et al.* (1980). The evolution of SMBH binaries through stellar scattering seems to continue at nearly a constant rate leading to merger in less than $\sim$1 Gyr Berczik *et al.* (2006); Vasiliev *et al.* (2015); Sesana and Khan (2015) once rotation, triaxiality and the granularity of the stellar distribution are taken into account.

If the binary environment is dominated by gas, rather than stars, the binary is expected to evolve through interaction with the accretion disk(s) surrounding the SMBHs, through the so called circumbinary disk phase. The disks are formed by the gas that inflows towards the SMBHs with an even small amount of angular momentum: in the single SMBH case these are referred to as "accretion discs" Shakura and Sunyaev (1973). Depending on the mass ratio q,

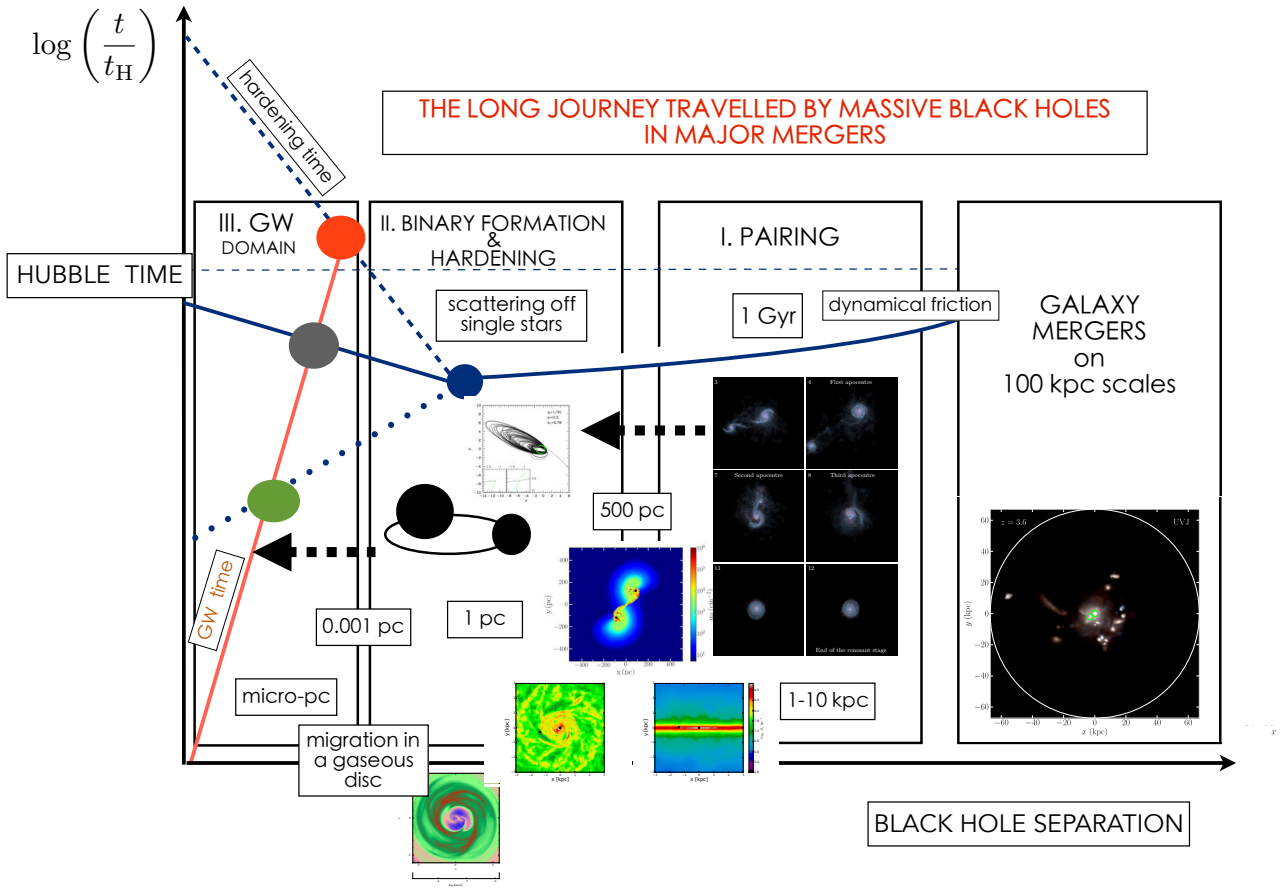


Figure 25.5: Cartoon illustrating the journey travelled by SMBHs of masses in the range 10^{6-8} $M_\odot$ during major galaxy-galaxy collisions. The x - axis informs on the SMBH separation given in various panels, while the y - informs on the timescale. The journey starts when two galaxies (embedded in their DM halos) collide on kpc scales (right-most plot). The inset shows a selected group of galaxies from the cosmological simulation described in Ref. Khan *et al.* (2016a). The inset in the second panel (from right to left), from Ref. Capelo *et al.* (2015), depicts the merger of two disc galaxies and their embedded SMBHs. Pairing occurs when the two SMBHs are in the midst of the new galaxy that has formed, at separations of a few kpc. The SMBHs sink under the action of star-gas-dynamical friction. In this phase, SMBHs may find themselves embedded in star forming nuclear discs, so that their dynamics can be altered by the presence of massive gas-clouds. Scattering off the clouds makes the SMBH orbit stochastic, potentially broadening the distribution of sinking times during the pairing phase Fiacconi *et al.* (2013); Lupi *et al.* (2015a); Tamburello *et al.* (2017); Lupi *et al.* (2015b). Furthermore, feedback from supernovae and AGN triggering by one or both the SMBHs affect the dynamics as these processes alter the thermodynamics of the gas and its density distribution, which in turn affect the process of gas-dynamical friction on the massive BHs. It is expected that eventually the SMBHs form a Keplerian binary, on pc scales. Then, individual scattering off stars harden the binary down to the GW-driven domain. This is an efficient mechanism (and not a bottleneck) if the relic galaxy displays some degree of triaxiality and/or rotation. In this case, there exists a large enough number of stars on low-angular momentum orbits capable to interact with the binary and extract orbital energy Vasiliev *et al.* (2015). The binary in this phase can also be surrounded by a (massive) circum-binary disc Roedig *et al.* (2012). In a process reminiscent to type II planet migration, the two SMBHs can continue to decrease their separation and they eventually cross the GW boundary. Then, GW radiation controls the orbital decay down to coalescence.

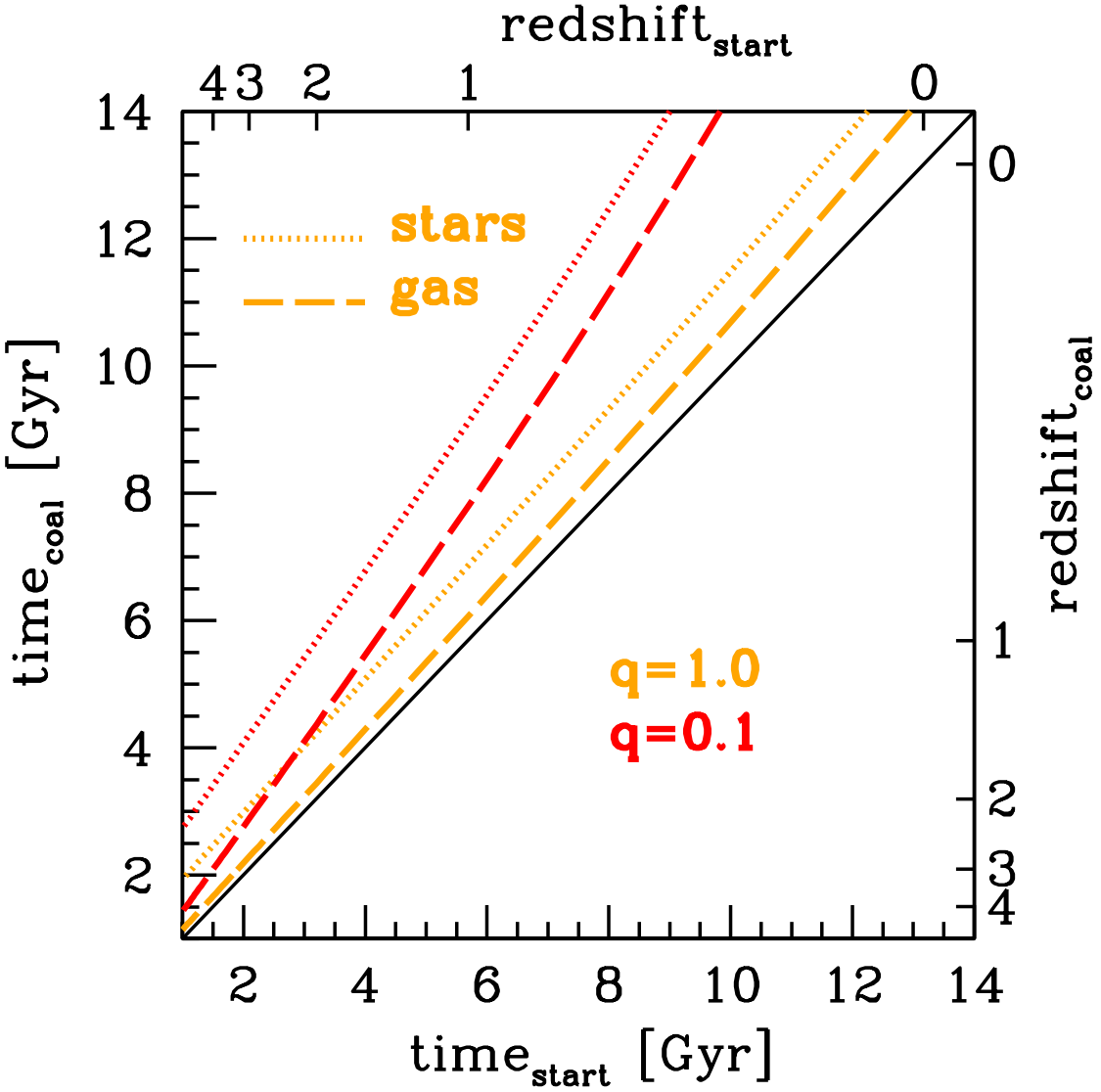


Figure 25.6: Relation between "$\text{time}_{\text{start}}$," corresponding to the cosmic time of onset of a galaxy-galaxy collision hosting SMBHs, and " $\text{time}_{\text{coal}}$" at which the SMBHs merge for circular binaries with the primary BH of 10^8 $M_\odot$ and mass ratios $q = 1$, and 0.1. Redshifts at start and coalescence are given in the same plot. Dotted and dashed lines refer to sinking times associated to the total of the merger time for the host halos and galaxies, the pairing of SMBH, and then the shrinking of the binary subject to either stellar and gaseous processes. The black solid line represents "$\text{time}_{\text{coal}} = \text{time}_{\text{start}}$ The Figure shows that galaxies colliding at $z \sim 1$ can display time delays as long as 3 Gyr.

the binary may or may not clear a gap within the circumbinary disk. In the former case (valid for $q \ll 1$) the less massive hole behaves as a fluid element within the accretion disk of the primary, thus experiencing what is known as Type I migration. In the latter case (generally valid for $q > 0.01$), the formation of a central cavity slows down the evolution of the binary (Type II migration). The energy and angular momentum transfer between the binary and the circumbinary disk is mediated by streams leaking from the inner rim into the cavity. The pace of the supermassive binary BH (SMBBH) evolution depends on the detailed dynamics of the streams crossing the gap, which are partially accreted by the two SMBHs and partially flung back to the disk, extracting the binary energy. Simulations generally concur that accretion into the central cavity is efficient enough to bring the SMBBH into the GW-dominated regime (~ 0.01 pc) within ∼1-100 Myr Armitage and Natarajan (2005); MacFadyen and Milosavljević (2008); Haiman *et al.* (2009); Roedig *et al.* (2011, 2012); Shi *et al.* (2012); D'Orazio *et al.* (2013); Shi and Krolik (2015). The role of AGN feedback on this scales, however, is still largely unexplored and may bring surprises.

In summary, SMBHs in merging galaxies have a long journey, that takes between 1 and 10 Gyr depending on the cosmic time, mass and mass ratios of the host galaxies, galaxy morphologies, stellar and gas content, and on the masses of the SMBH themselves. Figure 25.6 is an illustration of the delay timescales in the dynamics of SMBH mergers, during the pairing process in major mergers. This is a simplified example for circular binaries with the primary SMBH of 10^8 $M_\odot$ and mass ratios $q = 1$, and 0.1. Here we included the time for halos to merge Boylan-Kolchin *et al.* (2008), and then added an additional timescale for BHs to pair, based on the formalism of McWilliams *et al.* (2014), motivated by the recent results of Tremmel *et al.* (2018) who find that the halo merger timescale is insufficient to estimate the pairing timescale. We assumed 100 Myr from binary formation to coalescence for the gas-driven case and the fit proposed by Sesana and Khan (2015) for the stellar-driven case.

Theoretical studies and predictions, however, are still far from being complete: this is a severely multi-scale problem, intimately connected with the processes of galaxy clustering on cosmological scales, which involves a rich physics. Determining the distribution of merging times in SMBH mergers is critical, as only through the detailed knowledge of this distribution and associated processes, we are able to bracket the uncertainties in the estimates of the SMBH merger rates, relevant for the LISA mission, and to provide reliable estimate of the expected GW signal in the nHz band, relevant to PTAs.

25.1.8 Probing supermassive black hole binaries with pulsar timing arrays

Contributors: C. Mingarelli, M. Kramer, A. Sesana

Millisecond pulsars are excellent clocks over long timespans, making them ideal tools to search for GWs Sazhin (1978); Detweiler (1979); Backer *et al.* (1982); Hellings and Downs (1983); Romani (1989); Burke-Spolaor (2015); Lommen (2015, 2017). Indeed, an array of millisecond pulsars forms a galactic-scale nanohertz GW detector called a Pulsar Timing Array (PTA, Foster and Backer (1990)). The GWs change the proper distance between the Earth and the pulsars, which induces a timing delay or advance in the pulsar pulses. The difference between the expected pulse arrival time and the actual arrival time, called the timing residual, is used to search for signatures of low-frequency GWs. The frequency band where PTAs operate is set by the length of pulsar observations, and the cadence of the observations. Briefly, the lower limit is set by $1/T_{\rm obs}$, where $T_{\rm obs}$ is the total observation time, and the high-frequency limit is set by $1/\Delta t$, where Δt is the cadence of the pulsar observations. This sets the sensitivity band between 1 nHz and 100 nHz.

The most promising signals in the PTA frequencies are due to the expected cosmic population of SMBBHs. The systems of interest here have masses $> 10^8$ $M_\odot$, and can spend tens of millions of years emitting GWs in the relevant frequency band. The incoherent superposition of their signals gives rise to a stochastic GW background (GWB, see, e.g. Rajagopal and Romani (1995); Jaffe and Backer (2003); Wyithe and Loeb (2003); Sesana *et al.* (2004, 2008)). On top of it, particularly nearby and/or very massive SMBBHs might be individually resolved Sesana *et al.* (2009); Mingarelli *et al.* (2017), providing interesting targets for multimessenger observations. Moreover, the memory effect following the merger of those systems may also give rise to detectable bursts of GW radiation van Haasteren and Levin (2010); Madison *et al.* (2017). Gravitational radiation may also originate from cosmic strings Siemens *et al.* (2006); Leblond

et al. (2009); Sanidas *et al.* (2013), and primordial GWs from e.g. inflation Lasky *et al.* (2016).

Here we focus on the stochastic GWB and continuous GW sources, but it is worth mentioning that the correlation function present in GWB searches depends on both the underlying theory of gravity, the distribution of GW power on the sky, and the intra-pulsar distances. Indeed, additional GWB polarizations such as breathing modes can in principal be detected with PTA experiments, e.g. Lee *et al.* (2008); Chamberlin and Siemens (2012), as can departures from GWB isotropy Mingarelli *et al.* (2013); Taylor and Gair (2013); Mingarelli and Sidery (2014); Cornish and van Haasteren (2014); Gair *et al.* (2014); Taylor *et al.* (2015). Clustering of large-scale structure, resulting in an overdensity of merging SMBBHs, can lead to GWB anisotropy, as can nearby continuous GW sources which are individually unresolvable, but can contribute to GWB anisotropy at level of $\sim 20\%$ of the isotropic component, see Mingarelli *et al.* (2017). Moreover, pulsars separated by less than $\sim 3^\circ$ violate the short-wavelength approximation ms14, mm18, used to write down the Hellings and Downs curve, and exhibit an enhanced response to GWs which may help in their detection.

World-wide, PTA experiments have been taking data for over a decade, with efforts in North American governed by the North American Nanohertz Observatory for GWs (NANOGrav, see e.g. Arzoumanian *et al.* (2018a)), in Europe by the European PTA (EPTA) Desvignes *et al.* (2016), and in Australia by the Parkes PTA (PPTA) Shannon *et al.* (2015). The union of these PTAs forms the International Pulsar Timing Array (IPTA) Verbiest *et al.* (2016), where the PTAs share data in the effort to accelerate the first detection of nHz gravitational radiation, and to learn more about the individual millisecond pulsars. For a more comprehensive overview of PTA experiments, see e.g. Burke-Spolaor (2015); Lommen (2015, 2017)

The Gravitational-Wave Background

The cosmic merger history of SMBBHs is expected to form a low-frequency GWB, which may be detected by PTAs in the next few years Siemens *et al.* (2013); Rosado *et al.* (2015); Taylor *et al.* (2016). The time to detection depends strongly on the number of pulsars in the array, the total length of the dataset, and the underlying astrophysics which affects the SMBBH mergers, such as stellar hardening process, interactions with accretion disks, binary eccentricity, and potentially SMBH stalling. Searches for the GWB have resulted in evermore stringent limits on the amplitude A of the GWB reported at a reference frequency of 1/yr:

$$h_c = A \left(\frac{f}{\mathrm{yr}^{-1}} \right)^{-2/3} , \tag{25.6}$$

where h_c is the characteristic strain of the GWB Phinney (2001). This simple power-law scaling assumes the the SMBBH systems are circular when emitting GWs, and that they are fully decoupled from their environment. Binary eccentricity and interactions with gas and stars around the binary can deplete the GW signal at very low frequencies (equivalently at wide binary separations), causing the GW strain spectrum to turn over Kocsis and Sesana (2011); Ravi *et al.* (2014); Sampson *et al.* (2015); Arzoumanian *et al.* (2016). On the other hand, the amplitude of the GWB is affected by the abundance and mass range of the cosmic population of SMBHs. Therefore, future detections of a stochastic GWB will allow to constrain both the overall population of SMBBHs and the physics driving their local dynamics Sesana (2013); Taylor *et al.* (2017); Chen *et al.* (2017); Ryu *et al.* (2018); Kelley *et al.* (2017); Roebber *et al.* (2016); Inayoshi *et al.* (2018). Current non-detections have been used in Middleton *et al.* (2016) to challenge the popular $M_{\mathrm{BH}} - M_{\mathrm{bulge}}$ from Kormendy and Ho (2013b). However, a full analysis taking into account uncertainties in the merger rate, SMBBH dynamics and the possibility of stalling is needed to draw firm conclusions Middleton *et al.* (2018).

The current upper limit on A from the various PTA experiments are similar and are improving with time. From the EPTA is $A < 3 \times 10^{-15}$ Lentati *et al.* (2015), from the PPTA this is $A < 1 \times 10^{-15}$ Shannon *et al.* (2015), from NANOGrav this is $A < 1.45 \times 10^{-15}$ Arzoumanian *et al.* (2018b), and the IPTA limit is 1.7×10^{-15} Verbiest *et al.* (2016). In order to improve those, further more sensitive observations are needed, which can and will be provided by improved instrumentation and new telescopes like FAST, MeerKAT and eventually the SKA Janssen *et al.* (2015). Additionally, systematics needs to be addressed. For instance, solar system ephemeris errors can mimic a GWB signal, if the underlying data are sufficiently sensitive Tiburzi *et al.* (2016). Here, mitigation techniques can be applied, as already done in the recent analysis of

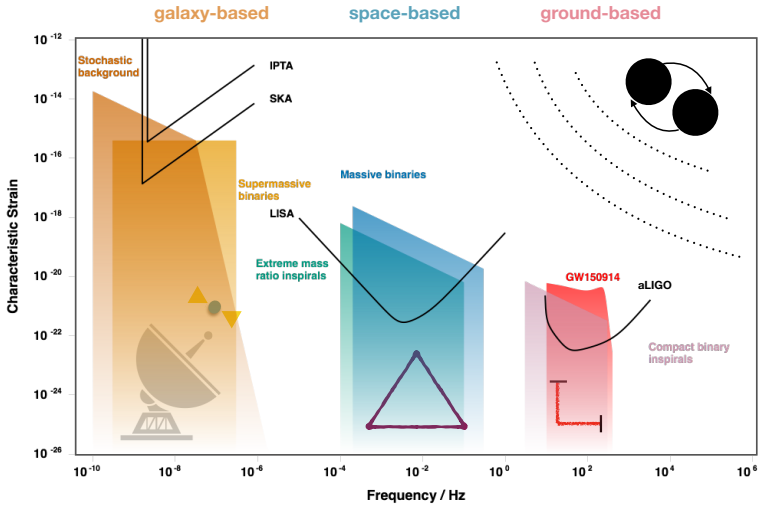


Figure 25.7: The spectrum of gravitational radiation from low-frequency (PTA) to high-frequency (LIGO). At very low frequencies pulsar timing arrays can detect both the GWB from supermassive black hole binaries, in the $10^8 - 10^{10}$ $M_\odot$ range, as well as radiation from individual binary sources which are sufficiently strong. We assume 20 pulsars with 100 ns timing precision with a 15 year dataset for IPTA, and 100 pulsars timed for 20 years with 30 ns timing precision for SKA. Both estimates assume 14-day observation cadence. This Figure was reproduced with minor changes from Mingarelli and Mingarelli (2018), who in turn also used free software from Moore *et al.* (2015).

the NANOGrav 11-year data Arzoumanian *et al.* (2018b), while other effects, such as the interstellar weather may be best addressed with multi-frequency observations. Future IPTA results will take those and other effects into account.

Continuous Gravitational Waves

Individual nearby and very massive SMBBHs emitting nHz GWs can also be detected with PTA experiments Lee *et al.* (2011); Babak and Sesana (2012); Arzoumanian *et al.* (2014); Babak *et al.* (2016). These SMBBHs are likely in giant elliptical galaxies, though the timescale between the galaxy merger and the subsequent SMBH merger is poorly understood. Unlike LIGO or LISA sources, these SMBBHs are in the PTA band for many millions of years, and will likely merge outside both the PTA and LISA band. The sky and polarization averaged strain of a continuous GW source is

$$h = \sqrt{\frac{32}{5}} \frac{\mathcal{M}_c^{5/3} [\pi f (1+z)]^{2/3}}{D_L}, \tag{25.7}$$

where $\mathcal{M}_c^{5/3} = [q/(1+q)^2] M^{5/3}$ is the binary chirp mass, $q < 1$ is the binary mass ratio, M is the total binary mass, f is the GW frequency and D_L is the luminosity distance to the binary.

The time to detection of continuous GW sources has been estimated in various ways: namely by simulating a GW source population based on cosmological simulations Sesana *et al.* (2009); Sesana and Vecchio (2010); Rosado *et al.* (2015), or by using an underlying galaxy catalog to estimate which nearby galaxies can host SMBBH systems which are PTA targets Mingarelli *et al.* (2017); Simon *et al.* (2014). Both these approaches largely agree that at least one SMBBH system will be detected in the next decade or so, with the details depending on the amount of red noise in the pulsars. Detecting individual SMBBH systems is expected to shed light on the so-called *final parsec problem*, providing valuable insights into how SMBBHs merge. In fact, pulsar distances are well-measured, it may be possible to measure the SMBH spins using the pulsar terms Mingarelli *et al.* (2012).

Importantly, resolving an individual SMBBH with PTAs will open new avenues in multimessenger astronomy Sesana *et al.* (2012); Tanaka *et al.* (2012); Burke-Spolaor (2013); Moustakas (2017). The combined GW and electromagnetic signals will allow to pin down the properties of the binary and its environment, to study the dynamics of the SMBBH pairing and the coupling with the surrounding gaseous disc, if present Sesana (2013); Burke-Spolaor (2015). Even a single joint detection will allow to nail down the distinctive electromagnetic properties of accreting SMBBHs. Analog systems can then be searched in the archival data of large surveys, to quantify their overall cosmic population. A promising way forward is to check candidates mined systematically in time domain surveys for peculiar spectral signatures, hence producing credible targets for PTAs.

25.1.9 Numerical Simulations of Stellar-mass Compact Object Mergers

Contributor: A. Perego

Motivations

Compact binary mergers (CBM) comprising at least one NS (i.e. BNS or BH-NS mergers) are unique cosmic laboratories for fundamental physics at the extreme. These powerful stellar collisions involve all fundamental interactions in a highly dynamical and intense regime (see, e.g., Rosswog (2015); Shibata and Taniguchi (2011); Baiotti and Rezzolla (2017); Paschalidis (2017) and references therein for more comprehensive overviews). Their study is extremely challenging and requires multidimensional, multiphysics and multiscale models. General relativistic hydrodynamical (GRHD) simulations, including a detailed, microphysical description of matter and radiation, are necessary to model the merger and to produce robust predictions for a large variety of observables. Their comparison with observations will provide an unprecedented test for our understanding of the fundamental laws of Nature, in regimes that will never be accessible in terrestrial laboratories.

CBMs are events of primary relevance in astrophysics and fundamental physics. They are intense sources of neutrinos Eichler *et al.* (1989a) and GWs Peters (1964), and primary targets for the present generation of ground-based GW detectors. Both theoretical and observational arguments support CBMs as progenitors of sGRB Paczynski (1986); Berger (2014). At the same time, they are the places where the heaviest elements in the Universe (including Gold and Uranium) are synthesized and ejected into space, via the so-called r-process nucleosynthesis Lattimer and Schramm (1974); Meyer *et al.* (1989); Freiburghaus *et al.* (1999). The radioactive decay of these freshly synthesized, neutron-rich elements in the ejecta powers a peculiar EM transient, called kilonova (or macronova), hours to days after the merger Paczynski (1998); Kulkarni (2005). Despite happening far away from the merger remnant, the γ-ray emission, the r-process nucleosynthesis, and the kilonova transient are extremely sensitive to physical processes happening where the gravitational curvature is stronger. In particular, the equation of state (EOS) of NS matter is thought to play a central role in all the emission processes, since it determines the compactness of the merging NSs, their tidal deformations, the lifetime and spin frequency of the remnant, the amount and the properties of the ejected mass.

On August, 17th 2017, the first detection of GWs from a CBM event compatible with a BNS merger marked the beginning of the multimessenger astronomy era Abbott *et al.* (2017f,g) and remarkably confirmed several years of intense and productive lines of research. The GW signal, GW170817, provided the link to associate a sGRB, GRB170817A Abbott *et al.* (2017a), and the kilonova AT2017gfo transient Pian *et al.* (2017); Tanvir *et al.* (2017); Coulter *et al.* (2017) to a CBM localized in the NGC4993 galaxy. Moreover, this single event set constraints on the EOS of NS matter and gave an independent measure of the Hubble constant Abbott *et al.* (2017b).

Many relevant aspects of the merger and of the emission processes are, however, not yet fully understood and relate to open questions in fundamental physics and astrophysics. The interpretation of the observational data strongly relies on the theoretical modeling of compact binary sources in GR. During the last years the unprecedented growth of computing power has allowed the development of increasingly sophisticated numerical models. The most advanced simulations in Numerical Relativity (NR) are set up using a first-principles and an ab-initio approach. Neutrino radiation and magnetic fields are thought to play a key role during the

merger and its aftermath. Their inclusion in detailed NR simulations, in association with micro-physical, finite temperature EOS for the description of matter at and above nuclear saturation density is one of the present challenges in the field. Reliable predictions do not only require the inclusion of all the relevant physics, but also accurate numerical schemes and numerically converging results. Robust and computationally stable discretizations are also essential to perform long-term and high-resolution simulations.

Recent results for binary neutron star mergers

Gravitational waves and remnant properties

A primary outcome of BNS simulations are accurate gravitational waveforms. Numerical models provide consistent and continuous GW signals for all three major phases: inspiral, merger, and post-merger/ring-down. As discussed earlier, key parameters encoded in the waveform are the masses and the spins of the coalescing objects, the quadrupolar tidal polarizability (depending on the NS EOS), and possibly the residual binary eccentricity. For the inspiral phase, state-of-the-art simulations cover at least 10 to 20 orbits before coalescence Bernuzzi *et al.* (2015); Kiuchi *et al.* (2017). Due to the cold character of this phase, zero-temperature EOSs for the NS matter are often used. High-order finite difference operators have been shown to be key to reach high-confidence numerical results Radice *et al.* (2014). Error control on the numerical results is essential for using NR waveforms for the analysis of data streams coming from GW detectors. State-of-art analysis of the error budget include the study of the numerical convergence, requiring multiple resolutions (4 or 5), and an estimate of the error due to the finite distance extraction of the GW signal within the computational domain. Only recently, initial conditions for rotating NSs have become available Tichy (2012). They were used to follow consistently, for the first time, the inspiral phase in numerical relativity, including spin precession as well as spin-spin and spin-orbit couplings Bernuzzi *et al.* (2014); Dietrich *et al.* (2015, 2017). The high computational costs have limited the exploration of the BNS wide parameter space. However, thanks to the large set of presently available waveforms, detailed comparisons with Analytical Relativity results (including post-Newtonian and Effective One Body approaches) are nowadays possible Bernuzzi *et al.* (2015); Hotokezaka *et al.* (2016); Hinderer *et al.* (2016). Moreover, large databases of NR waveforms led to the production of purely NR-based waveform models Dietrich and Ujevic (2017). These results are critical to improve the quality of semi-analytic waveforms employed in current GW data analysis.

The merger and its aftermath are highly dynamical and non-linear phases. A systematic study of the remnant properties and of its GW emission is presently made possible by large and extensive sets of simulations in NR (e.g., Hotokezaka *et al.* (2013); Bauswein *et al.* (2013); Zappa *et al.* (2018)), sometimes extending for tens of ms after the merger. Detailed analysis of the post-merger gravitational waveforms revealed the presence of characteristic high-frequency peaks, which will be possibly accessible by third generation GW detectors. These features in the GW spectrum are associated with properties of the nuclear EOS Hotokezaka *et al.* (2013); Bauswein *et al.* (2016); Rezzolla and Takami (2016), with the presence of a magnetised long-lived massive NS Ciolfi *et al.* (2017), with the development of one-arm spiral instabilities Paschalidis *et al.* (2015); Radice *et al.* (2016a); Lehner *et al.* (2016) or convective excitation of inertial modes inside the remnant De Pietri *et al.* (2018). However, a firm understanding of these structures in the GW frequency spectrum is still in progress. The remnant fate depends primarily on the masses of the colliding NS and on the nuclear EOS. The collapse timescales of metastable remnants to BHs crucially relies on physical processes that are still not fully understood, including angular momentum redistribution (possibly of magnetic origin) and neutrino cooling. A prompt collapse to a BH, expected in the case of massive enough NSs and soft EOS, results in the most luminous GW emissions at merger. For stiffer EOS or lower NS masses, differential rotation and thermal support can temporarily prevent the collapse of an object whose mass is larger than the mass of a maximally rotating NS, forming a so-called hypermassive NS (HMNS). Mergers producing a HMNS emit the largest amount of energy in GWs, since an intense luminosity is sustained for several dynamical timescales. If the remnant mass is below the maximum mass of a maximally rotating NS or even of a non-rotating NS, a supramassive or massive NS can form, respectively. Gravitational waveforms for a supramassive or massive NS are similar to those of a HMNS case, but weaker. The detection of this part of the spectrum is beyond the capability of the present generation of GW detectors Abbott *et al.* (2017k). NR simulations take consistently into account the angular momentum emitted

in GWs and in ejected mass, and predict the angular momentum of the final remnant to be $0.6 \lesssim J/M^2 \lesssim 0.85$. In the HMNS and supramassive NS cases, the super-Keplerian value of J provides a large reservoir to power subsequent angular momentum ejections. Within the first dynamical timescale, this leads to the formation of a massive, thick disk around the central remnant.

Matter ejection and electromagnetic counterparts

Numerical simulations are necessary to quantitatively model matter ejection from BNS. Different ejection mechanisms result in different ejecta properties. In addition to GW emission, BNS simulations predict the ejection of both tidal (cold) and shocked (hot) *dynamic ejecta*, a few ms after the GW peak Korobkin *et al.* (2012); Bauswein *et al.* (2013); Hotokezaka *et al.* (2013); Sekiguchi *et al.* (2015); Foucart *et al.* (2016); Radice *et al.* (2016b); Bovard *et al.* (2017). The most recent NR simulations employing microphysical, finite temperature EOS predict between 10^{-4} and a few 10^{-3} $M_\odot$ of dynamic ejecta, moving at $v \sim 0.3\,c$. This range covers both intrinsic variability in the binary (e.g., NS masses) and uncertainties in the nuclear EOS. However, results for the same systems from different groups agree only within a factor of a few. Differences in the treatments of the NS surface and of the floor atmosphere, as well as in the microphysical content and in the extraction of matter properties at finite radii possibly account for these discrepancies. Differently from what was previously thought, state-of-the-art simulations including weak reactions show that neutrino emission and absorption decrease the neutron richness of the equatorial ejecta and, more significantly, of the high latitude ejecta. The former can still synthesize the heaviest r-process elements Wanajo *et al.* (2014), while for the latter the formation of lanthanides can be inhibited. These results have been recently confirmed by parametric studies based on NR models Goriely *et al.* (2015); Martin *et al.* (2018).

Long term (100s of ms) simulations of the merger aftermath show *wind ejecta* coming from the remnant and the accretion disk. These winds are powered by neutrino absorption Perego *et al.* (2014); Fujibayashi *et al.* (2017) or, on the longer disk lifetime, by viscous processes of magnetic origin and nuclear recombination inside the disk Fernández and Metzger (2013); Just *et al.* (2015); Foucart *et al.* (2016); Siegel and Metzger (2018); Fujibayashi *et al.* (2018). If a HMNS has formed, the neutrino emission is expected to be more intense and the differential rotation can also power winds of magnetic origin Siegel *et al.* (2014). The unbound mass can sum up to several 10^{-2} $M_\odot$, depending on the disk mass, and moves at $\sim 0.1\,c$. Weak processes, including neutrino irradiation, decrease the neutron richness, particularly at high latitudes and for very long-lived remnants Lippuner *et al.* (2017). This implies the production of the first r-process peak in ν-driven winds and viscous ejecta. In the former case, the nucleosynthesis of lanthanides is highly suppressed, while in the latter the wider distribution of neutron richness leads to the production of possibly all r-process elements, from the first to the third peak (e.g.,Siegel and Metzger (2018); Lippuner *et al.* (2017); Wu *et al.* (2017); Just *et al.* (2015). Only a few simulations of the merger aftermath are presently available and only few of them were performed in a NR framework. While the study of the viscosity-driven ejecta led to a partial agreement between different groups, simulations of ν- and magnetically-driven winds are still very few and additional work is required.

The different compositions and kinematic properties of the different ejecta channels have implications for the magnitude, color, and duration of the kilonova (see Fernández and Metzger (2016) and Metzger (2017) for recent reviews). The presence of lanthanides in the ejecta is expected to significantly increase the photon opacity due to the presence of millions of mostly unknowns absorption lines Barnes and Kasen (2013). Detailed radiative transfer codes provide the most accurate models for the EM emission over timescales ranging from a few hours up to a few weeks Tanaka and Hotokezaka (2013); Kasen *et al.* (2015); Wollaeger *et al.* (2017). Due to the uncertainties in the opacity treatment and in the geometry of the ejecta, large differences could still arise between different models. More phenomenological approaches, characterized by significantly lower computational costs and accuracy, allow a more systematic and extensive exploration of the different parameters in the ejecta properties Grossman *et al.* (2014); Rosswog *et al.* (2017). Based on these models, it was suggested that, due to the absorption of neutrinos at high latitudes, the presence of lanthanide-free material (characterized by lower opacity) could result in a bluer and earlier ($\sim$ a few hours) emission, compared with the redder and dimmer emission powered by material enriched in lanthanides Metzger and Fernández (2014); Perego *et al.* (2014); Martin *et al.* (2015).

GW170817 and its counterparts

The detection of GW170817 and of its counterparts represents an unprecedented chance to test our understanding of BNS. The analysis of the gravitational waveform and the subsequent parameter estimation made use of large sets of approximated waveform templates. The most recent results obtained in NR could potentially improve this analysis and set more stringent constraints on the intrinsic binary parameters and on the EOS of NS matter. The interpretation of AT2017gfo as a kilonova transient revealed the need to consider at least two different components to explain both the early blue and the subsequent red emission Tanvir *et al.* (2017); Villar *et al.* (2017). More recently, the observed light curves have been traced back to the properties and to the geometry of the ejecta predicted by the most recent numerical models. This analysis has confirmed the multi-component and anisotropic character of the BNS ejecta, as well as the central role of weak interaction in setting the ejecta composition Tanaka *et al.* (2017); Perego *et al.* (2017a); Murguia-Berthier *et al.* (2017). Finally, the combination of the information extracted from the GW and from the EM signal enabled the possibility to set more stringent constraints on the nuclear EOS, in a genuine multimessenger approach Bauswein *et al.* (2017); Radice *et al.* (2018). Both very stiff and very soft EoSs seem to be disfavored by this kind of analysis. A similar approach has been used to show that the formation of a HMNS is the most probable outcome of this event Margalit and Metzger (2017).

Recent results for black hole-neutron star mergers

Modelling of BH-NS mergers in GR shares many similarities with BNS merger modelling, but reveals also differences and peculiarities (see Shibata and Taniguchi (2011) for a review). The larger ranges in masses and spins expected for stellar mass BHs significantly increase the parameter space. The large mass ratio between the colliding objects makes NR simulations more expensive, since the inspiral requires larger initial distances to cover a sufficient number of orbits, and the dissimilar lengthscales require higher resolutions. These numerical challenges have limited the number of models and waveforms that are presently available in comparison with the BNS case. If the final remnant is always represented by a spinning BH, the presence of a disk around it depends on the mass ratio and BH spin Kyutoku *et al.* (2013); Deaton *et al.* (2013); Foucart *et al.* (2014). Larger BHs, with moderate spins, swallow the NS during the plunge dynamical phase, while the decrease of the last stable orbit in the case of aligned, fast spinning BHs leads more easily to the tidal disruption of the NS (in the form of mass shedding) and to a massive accretion disk formation (with masses possibly in excess of 0.1 $M_\odot$). Misalignment between the orbital and the BH angular momentum induces non-trivial precessions, encoded both in the GW signal and in the amount of mass outside the BH horizon. The GW spectrum shows a characteristic cutoff frequency directly related with the orbital frequency at the NS tidal disruption or at the last stable orbit. Since this frequency decreases with increasing BH spin and with decreasing compactness, its detection could provide direct constraints on the NS matter EOS. Dynamical mass ejection from BH-NS merging system is expected to be caused by tidal torque when the NS is disrupted, and to happen predominantly along the equatorial plane. The ejected mass can be significantly larger than in the BNS case and neutrino irradiation is expected to have only a minor effect in changing the ejecta composition Roberts *et al.* (2017). Similarly to the BNS case, the viscous evolution of the disk drives significant matter outflows on the disk lifetime, while the absence of a central NS reduces the emission of neutrinos and the ejection of ν- or magnetically-driven winds Kiuchi *et al.* (2015). The weaker effect of neutrino processes on the dynamic ejecta results always in robust r-process nucleosynthesis between the second and the third r-process peaks, while viscous disk winds can still synthesize all r-process nuclei. The high lanthanide content in the ejecta is expected to produce a redder kilonova transient a few days after the merger Fernández *et al.* (2017).

Perspectives and future developments

A complete and dense exploration of the wide parameter space, including a consistent treatment of NS and BH spins and of their evolution, is one of the major challenges in the study of CBMs in NR. The extraction of waveforms from long inspiral simulations at high resolution, employing accurate high-order numerical schemes, is necessary to build a robust NR waveform database. These templates, in combination with more analytical approaches,

can guide the construction of complete and coherent semi-analytical waveforms for the GW data analysis, spanning many orbits from the inspiral to the actual coalescence. The large variety of properties in the colliding system potentially translates to a broad distribution of properties for the remnant and for the ejecta. Long term simulations of the merger and of its aftermath are the necessary tool to provide a complete and accurate description of the ejecta. The inclusion of the physics necessary to model the remnant and the matter ejection is still at its outset. In particular, the consistent inclusion of neutrino radiation and magnetic field evolution in NR model is extremely challenging. Leakage scheme for neutrino radiation are presently implemented in many CBM models (see, e.g., the introduction section of Perego *et al.* (2016) for a detailed discussion). They provide a robust and physically motivated treatment for neutrino cooling. However, they are too inaccurate to model long term evolution and neutrino absorption in optically thin conditions. State-of-the-art simulations include gray moment scheme Radice *et al.* (2016b); Foucart *et al.* (2016). Nevertheless, the significant dependence of neutrino cross-sections on particle energy requires spectral schemes. Large velocity gradients inside the computational domain make the accurate transformation of the neutrino energy spectrum between different observers and its transport highly non-trivial. Moreover, the application of moment schemes for colliding rays in free streaming conditions leads to closure artifacts in the funnel above the remnant. Monte Carlo radiation schemes represent an appealing alternative, but their computational cost is still far beyond our present capabilities. The usage of Monte Carlo techniques to provide more physical closures in moment scheme seems a more viable approach Foucart (2018). Neutrino masses have a potentially high impact on the propagation and flavor evolution of neutrinos from CBMs. New classes of neutrino oscillations, including the so-called matter neutrino resonances, can appear above the remnant of BNS and BH-NS mergers and influence the ejecta nucleosynthesis Malkus *et al.* (2016); Tian *et al.* (2017). However, numerical modelling of these phenomena is still at its dawn Zhu *et al.* (2016); Frensel *et al.* (2017); Wu *et al.* (2017).

General relativistic magneto-hydrodynamics codes are presently available and they have started to access the spatial scales necessary to consistently resolve the magneto-rotational instabilities (MRIs, Chandrasekhar (1960)). The latter appear in the presence of differential rotation and locally amplify the magnetic field. However, global simulations obtained with unprecedented spatial resolution (of the order of 12.5 m) do not show convergence yet, proving that we are still not able to resolve the most relevant scales for magnetic field amplification in a self-consistent way Kiuchi *et al.* (2018). In the past, sub-grid models have been used as alternative approaches to ab-initio treatments Palenzuela *et al.* (2015); Endrizzi *et al.* (2016); Ciolfi *et al.* (2017). More recently, two different formulations of effective MHD-turbulent viscosity in General Relativity have been proposed and used in both global BNS and long term aftermath simulations Radice (2017); Shibata *et al.* (2017). Moreover, the role of bulk viscosity in the post-merger phase has started being investigated Alford *et al.* (2018).

Accurate modelling of the GW and EM signals for CBMs are key to set tight constraints on the EOS of NS matter, which still represents one of the major sources of uncertainty in both fundamental physics and in numerical models. If the connection between CBMs and short GRBs will be confirmed by future detections, the knowledge of the remnant fate, as well as of the environment around it, will be crucial to address the problem of short GRB engines, including jet formation, collimation, and break-out. The accurate modelling of small-scale magnetic field amplification, as well as of heat redistribution due to neutrino transport, is key to predict the lifetime of the remnant for cases of astrophysical interest. In fact, the presence of highly rotating and magnetized massive NSs Perego *et al.* (2017b); Ciolfi *et al.* (2017), or of fast spinning BHs, is anticipated to play an essential role in solving the puzzle of the short GRB central engine.

The high computational costs required by long-term, high-resolution, numerically accurate and multiphysics models of CBMs point to the need of developing a new generation of numerical schemes and codes for the new generations of large supercomputers. These codes will need, for example, to improve scalability and to employ more heavily vectorization in the hybrid (shared & distributed) parallelization paradigm. This is perhaps the greatest challenge in the NR field for the years to come.

25.1.10 Electromagnetic Follow-up of Gravitational Wave Mergers

Contributor: A. Horesh

The year 2017 will be remembered as the year in which extraordinary achievements in observational astrophysics have been made. On 2017, August 17, the LIGO and Virgo detectors detected for the first time GWs from the merger of two NSs, dubbed GW 170817. Adding to the excitement was the detection of gamma-ray emission only two seconds after the merger event, by the *Fermi* satellite. The sensational discovery of a GW signal with a coincident EM emission led to one of the most comprehensive observational campaigns worldwide. A few hours after the GW detection, the LIGO and Virgo detectors managed to pinpoint the position of the GW event to an error circle of 34 sq. degrees in size (see Fig. 25.8 below). This area was small enough so that an international teams of astronomers encompassing more than a hundred instruments around the world on ground and in space could conduct an efficient search for EM counterparts.

Roughly 11 hours after the GW event, an optical counterpart was announced by the 1M2M ('Swope') project team Coulter *et al.* (2017); Kilpatrick *et al.* (2017). Many other teams around the world independently identified and observed the counterpart in parallel to the SWOPE team discovery. The optical detection of the counterpart pinpointed the source to a precise location in the galaxy NGC4993 at a distance of 40 Mpc, (which is also consistent with the distance estimate from the GW measurements; see Sec. 25.1.2). Overall, the counterpart (for which we will use the official IAU name AT 2017gfo) was detected across the spectrum with detections in the ultraviolet, optical, infrared (e.g., Coulter *et al.* (2017); Kilpatrick *et al.* (2017); Drout *et al.* (2017); Smartt *et al.* (2017); Tanvir *et al.* (2017); Chornock *et al.* (2017); Arcavi *et al.* (2017); Shappee *et al.* (2017); Kasliwal *et al.* (2017); Andreoni *et al.* (2017); McCully *et al.* (2017); Pian *et al.* (2017); Cowperthwaite *et al.* (2017)) and later on also in the X-ray (e.g., Troja *et al.* (2017); Haggard *et al.* (2017); Margutti *et al.* (2017)) and in the radio (e.g., Hallinan *et al.* (2017); Mooley *et al.* (2018)).

Below we briefly summarize the observational picture with respect to theoretical predictions.

The High-energy Counterpart

For many years it was hypothesized that short gamma-ray bursts (GRBs) that are by now routinely observed, are originating from NS mergers (e.g., Narayan *et al.* (1992)). The theoretical model includes the launching of a relativistic jet during the short period of accretion onto the merger remnant. This energetic jet is believed to be responsible for the prompt gamma-ray emission. In addition, the interaction of the jet with the interstellar medium will produce an afterglow emission in the optical, X-ray and also radio wavelengths.

The short GRB ($T_{90} = 2.0 \pm 0.5$ sec) that has been discovered about 1.7 second after the GW170817 merger event Goldstein *et al.* (2017) was irregular compared to other short GRBs observed so far. Most notable is the low equivalent isotropic energy $E_{iso} \approx 5 \times 10^{46}$ erg (in the $10 - 1000$ kev band), which is ~ 4 orders of magnitude lower than a typical short GRB energy. In addition to the initial detection by *Fermi-GBM*, there were observations made by the Integral satellite. Integral also detected the short GRB with a flux of $\sim 1.4 \times 10^{-7}\,\mathrm{erg\,cm^{-2}}$ (at $75 - 2000$ kev Savchenko *et al.* (2017)).

Following the initial detection and once the candidate counterpart had been localized, X-ray observations were made within less than a day of the merger event. The initial X-ray observations by both the Neil Gehrels Swift Observatory and by the Nuclear Spectroscopic Telescope Array (*NuSTAR*) resulted in null-detections. However, later on, on day ~ 9 after the merger, the *Chandra* telescope detected X-ray emission from the AT 2017gfo for the first time Troja *et al.* (2017) with an initial isotropic luminosity of $\approx 9 \times 10^{38}\,\mathrm{erg\,s^{-1}}$. In the following days, the X-ray luminosity appeared to continue to slowly rise Troja *et al.* (2017); Haggard *et al.* (2017). Late-time observations (109 days after the merger) by *Chandra* still show that the X-ray emission continues to slowly rise Margutti *et al.* (2018).

In order to reconcile the relatively faint prompt gamma-ray emission and the late onset of the X-ray emission, it was suggested that AT 2017gfo was a regular short GRB but one that is observed slightly off the main axis by ~ 10 degrees of the jet Troja *et al.* (2017). However, this interpretation has yet to be tested against observations in other wavelengths, such as the radio (see below).

The Optical and Infrared Counterpart

Over four decades ago, a prediction was made by Lattimer and Schramm (1974); Eichler *et al.* (1989b) that neutron-rich material can be tidally ejected in a NS merger. About a

decade later numerical simulations also showed that NS mergers will exhibit such mass ejections, where the mass ejected is expected to be in the mass range $10^{-5} - 10^{-2}\,M_\odot$ with velocities of $0.1 - 0.3\,c$ (e.g., Rosswog *et al.* (1999)). It was also predicted that heavy elements would form in the neutron rich ejected material via r-processes. As discussed in detail in the previous Section 25.1.9, additional material is also expected to be ejected by accretion disk winds and from the interface of the two merging stars (the latter material will be ejected mostly in the polar direction). In general, each ejected mass component may have a different neutron fraction leading to a different r-process element composition.

As the ejecta from the NS merger is radioactive, it can power transient emission, as proposed in Ref. Li and Paczynski (1998). The initial prediction was that the emission will be supernova-like and will be blue and peaking on a one-day timescale. Later on, more detailed calculations by Metzger *et al.* (2010) showed that the peak of the emission will be weaker at a level of $10^{41}\,\mathrm{erg\,s^{-1}}$. The next theoretical developments were made by Barnes and Kasen (2013); Tanaka and Hotokezaka (2013); Grossman *et al.* (2014) who for the first time calculated the effect of the heavy r-process element opacities on the emission. They found that due to very high opacities, the emission is expected to be even weaker, with its spectral peak now in the infrared (instead of the optical) and with the peak timescale being delayed. Since the various ejecta mass components may have different compositions, they therefore may have different opacities. Thus in principle, one component may form a blue short-lived emission (the so-called 'blue component') while another may emit in the infrared with week-long timescales (the so-called 'red component').

The optical emission from the AT 2017gfo peaked at a faint absolute magnitude of $M_V \approx -16$ in one day and began to rapidly decline, while the infrared emisson had a somewhat fainter and later (at approximately 2 days) peak compared to the optical emission. The overall observed brightness of the source in the optical and infrared bands and its evolution over time have shown in general an astonishing agreement with the predicted properties of such an event.

The multiple photometric and spectroscopic measurements sets obtained by the various groups paints the following picture: At early times, at about 0.5 days after the merger, the ejecta temperature was high at $T \sim 11,000\,\mathrm{K}$ (e.g. Shappee *et al.* (2017)). A day later the spectral peak was at ≈ 6000 Angstrom, and the temperature decreased to $T \approx 5000\,\mathrm{K}$ Pian *et al.* (2017). From this point onwards the spectral peak quickly moved into the infrared band. The combined optical and IR emission and its evolution were found to be consistent with an energy source powered by the radioactive decay of r-process elements (e.g. Drout *et al.* (2017); Smartt *et al.* (2017); Tanvir *et al.* (2017)). Based on both the photometric and spectroscopic analysis an estimate of the ejecta mass and its velocity were found to be $M_{ej} \approx 0.02 - 0.05\,M_\odot$ with a velocity in the range $0.1 - 0.3\,c$ Chornock *et al.* (2017); Arcavi *et al.* (2017); Smartt *et al.* (2017); Shappee *et al.* (2017); Andreoni *et al.* (2017); Drout *et al.* (2017); McCully *et al.* (2017); Pian *et al.* (2017); Cowperthwaite *et al.* (2017).

One of the main claims with regards to this event is that the observations provide evidence for the formation of r-process elements. This conclusion is mainly driven based on the evolution of the infrared emission Drout *et al.* (2017); Kasliwal *et al.* (2017). Tanvir *et al.* (2017), for example, obtained late-time IR measurements using the Hubble Space Telescope and argue that the slower evolution of the IR emission compared to the optical require high opacity r-process heavy elements with atomic number > 195. The infrared spectrum shows broad features which are presumably comprised of blended r-process elements Tanvir *et al.* (2017). These broad spectral features were compared to existing model predictions and show a general agreement, albeit there are still inconsistencies that need to be explained (e.g., Kasen *et al.* (2017); Metzger (2017); Kasliwal *et al.* (2017)). There is still an ongoing debate about the composition of the heavier elements. Ref. Smartt *et al.* (2017) claims that the observed infrared spectral features can be matched with CS and Te lines. Others estimate the overall fraction of the lanthanides in the ejecta and find it to be in the range $X_{lan} \approx 10^{-4} - 10^{-2}$. It seems that at early times (up to 3-5 days), the ejecta that dominates the emission has very low lanthanide fraction and that there are discrepancies between the predicted and observed optical light curves (e.g., Arcavi *et al.* (2017); McCully *et al.* (2017). Several works (e.g., Kasen *et al.* (2017); Metzger (2017); Cowperthwaite *et al.* (2017); Nicholl *et al.* (2017); Chornock *et al.* (2017); Kasliwal *et al.* (2017); Pian *et al.* (2017); Smartt *et al.* (2017)) explain the early *vs.* late-time behaviour of the emission by having an ejecta with two components (as also predicted in the literature). The first component is the "blue" kilonova, with a high electron fraction and thus a low fraction of heavy elements, which dominates the optical emission early only. A "red" kilonova is the second component that is comprised by heavy r-process elements and that produces the slow

IR evolution and the broad spectral features observed at late-times. Still there are some claims that even at late times, the emission can be originating from an ejecta with only low-mass elements Waxman *et al.* (2017).

The Radio Counterpart

In addition to the radio afterglow emission on the short time scale (days), radio emission is also expected on longer time scales (month to years). The latter is not a result of the relativistic jet but rather originating from the interaction of the slower dynamical ejecta with the insterstellar medium (ISM) Nakar and Piran (2011). This emission is expected to be rather weak where the strength of the peak emission depends on the velocity of the dynamical ejecta, the ISM density and on some microphysical parameters. While in the past, radio afterglows of short GRBs (not accompanied by GWs) were detected (e.g., Fong *et al.* (2015)), long-term radio emission was never observed until GW 170817 (including in the previous cases where kilonova candidates were discovered Horesh *et al.* (2016); Fong *et al.* (2016)).

Similar to any other wavelength, radio observations were undertaken within the day of the GW170817 merger discovery and the following days. The early time observations performed by The Jansky Very Large Array (VLA), The Australian Compact Array (ATCA), the Giant Meterwave Radio Telescope (GMRT) and the Atacama Large Millimeter Array (ALMA), all resulted in null-detections Hallinan *et al.* (2017); Alexander *et al.* (2017); Kim *et al.* (2017). Late-time VLA observations, however, finally revealed a radio counterpart ≈ 16 days after the merger Hallinan *et al.* (2017). The initial radio emission was weak at a level of a couple of tens of μJy only (at both 3 and 6 GHz). Follow-up ATCA observations confirmed the radio detection. Upon detection, a long-term radio monitoring campaign was initiated, and the results are reported in Ref. Mooley *et al.* (2018). They report that the radio emission still continued to rise at > 100 days after the merger. The multiple frequency observations also show that the radio emission is optically thin with a spectral index of $\alpha = -0.6$.

Hallinan *et al.* (2017) compared the radio observations to several predictions including an on-axis jet, a slightly off-axis jet, and being completely off-axis. In addition, they included in their comparison a model in which the jet forms a hot wide-angled mildly relativistic cocoon. This cocoon formed as the jet is working its way out of the dynamical ejecta, may also lead to gamma-ray, X-ray, and radio emission, but with different characteristics than the emission formed by either the highly relativistic jet or the slower dynamical ejecta. In fact, Hallinan *et al.* (2017) find that both an on-axis jet model, or even a slightly off-axis jet one, are expected to produce bright radio emission in the first few days after the merger which by day 16 should start fading, a prediction which does not match the rising observed radio source. The model that is the most consistent with current data is the cocoon model with either a choked or successful or 'structured' jet (see e.g., Lamb and Kobayashi (2017); Margutti *et al.* (2018)). In fact, the choked-jet cocoon model may also explain the relatively low energy of the gamma ray emission Gottlieb *et al.* (2017).

If both the late-time radio and X-ray emission originate from interaction of the material (whether it is the dynamical ejecta or a cocoon) with the ISM, one can test whether the observed emission in both wavelengths is indeed connected as expected. For now, it seems that the observed X-ray emission fits the prediction which is based on extrapolating the observed radio emission into higher energies. Both the X-rays and the radio emission have also roughly the same spectral slope. This suggests that there is no additional power source in play at this time.

Many Open Questions

While vast amounts of data have been collected for this amazing merger event, and while a flood of papers report many types of analysis and conclusions (by no means are we attempting to cover all of them here), there are still many open questions remaining. For example, is this event connected to short GRBs or do we still have to prove this connection? Which r-process elements form and at what time? Do the observations really require producing heavy r-process elements or can they all be explained by lighter-element components? How many components does the ejecta have and which one dominates the emission and when? Are there any other emission power sources in play such as a magnetar (even if at short time)? Are we really seeing a cocoon with a choked or successful jet or is there some other scenario that can explain the radio emission combined with all the other evidence?

As scientists around the world are still working on analyzing all the data in hand for this event and are also still collecting new data, they are also gearing up for the future, and preparing for the next year when the LIGO and Virgo detectors switch back on. At this time, hopefully more events with EM signatures will be discovered and more answers (and surely more new questions) will present themselves.

25.1.11 X-ray and gamma-ray binaries

Contributor: M. Chernyakova

The population of Galactic X-ray sources above 2 keV is dominated by the X-ray binaries, see e.g. Grimm *et al.* (2002). A typical X-ray binary contains either a NS or a BH accreting material from a companion star. Due to angular momentum in the system, accreted material does not flow directly onto the compact object, forming a differentially rotating disk around the BH known as an accretion disk . X-ray binaries can be further divided into two different classes, regardless the nature of the compact object, according to the mass of the companion star: high-mass X-ray binaries and low-mass X-ray binaries. The secondary of low-mass X-ray binary systems is a low-mass star, which transfers matter by Roche-lobe overflow. High-mass X-ray binaries comprise a compact object orbiting a massive OB class star. High-mass X-ray binaries systems are a strong X-ray emitter via the accretion of matter from the OB companion. At the moment 114 high-mass X-ray binaries Liu *et al.* (2006) and 187 low-mass X-ray binaries Liu *et al.* (2007) are known.

Black hole X-ray binaries are interacting binary systems where X-rays are produced by material accreting from a secondary companion star onto a BH primary Shakura and Sunyaev (1973). While some material accretes onto the BH, a portion of this inward falling material may also be removed from the system via an outflow in the form of a relativistic plasma jet or an accretion disk wind, see e.g. McClintock and Remillard (2006) for a review. Currently, the known Galactic BH X-ray population is made up of 19 dynamically confirmed BHs, and 60 BH candidates Tetarenko *et al.* (2016). The vast majority of these Galactic BH X-ray objects are low-mass X-ray binaries. Most of these systems are transient, cycling between periods of quiescence and outburst. This behaviour is associated with changing geometries of mass inflow and outflow, e.g. McClintock and Remillard (2006).

At higher energies, however the situation is drastically different. While current Cherenkov telescopes have detected around 80 Galactic sources (see the TeVCat catalogue TeV (accessed June 2018)), only 7 binary systems are regularly observed at TeV energies. Properties of PSR B1259-63, LS 5039, LSI +61 303, HESS J0632+057 and 1FGL J1018.6-5856 are reviewed in Dubus (2013). Since 2013 two more Galactic binaries have been discovered at TeV sky, PSR J2032+4127 Mirzoyan and Mukherjee (2017) and HESS J1832-093 Eger *et al.* (2016), but still the number of binaries observed at TeV sky is extremely small, and the reason why these systems are able to accelerate particles so efficiently is not known yet. These systems are called gamma-ray-loud binaries (GRLB), as the peak of their spectral energy distribution lies at GeV - TeV energy range.

All GRLB systems host compact objects orbiting around massive young star of O or Be spectral type. This allows to suggest, that the observed γ-ray emission is produced in the result of interaction of the relativistic outflow from the compact object with the non-relativistic wind and/or radiation field of the companion massive star. However, neither the nature of the compact object (BH or NS?) nor the geometry (isotropic or anisotropic?) of relativistic wind from the compact object are known in the most cases. Only in PSR B1259-63 and PSR J2032+4127 systems the compact object is known to be a young rotation powered pulsar which produces relativistic pulsar wind. Interaction of the pulsar wind with the wind of the Be star leads to the huge GeV flare, during which up to 80% of the spin-down luminosity is released Abdo *et al.* (2011); Chernyakova *et al.* (2015).

In all other cases the source of the high-energy activity of GRLBs is uncertain. It can be either accretion onto or dissipation of rotation energy of the compact object. In these systems the orbital period is much shorter than in PSR B1259-63 and PSR J2032+4127, and the compact object spend most of the time in the dense wind of the companion star. The optical depth of the wind to free-free absorption is big enough to suppress most of the radio emission within the orbit, including the pulsed signal of the rotating NS Zdziarski *et al.* (2010), making impossible direct detection of the possible pulsar.

In Ref. Massi *et al.* (2017) authors tried to deduce the nature of the compact source in LSI +61 303 studying the relation between X-ray luminosity and the photon index of its X-

ray spectrum. It turned out that existing X-ray observations of the system follows the same anti-correlation trend as BH X-ray binaries Yang *et al.* (2015). The hypothesis on microquasar nature of LSI +61 303 allowed to explain the observed radio morphology Bosch-Ramon and Paredes (2005) and explains the observed superorbital period as a beat frequency between the orbital and jet-precession periods Massi and Torricelli-Ciamponi (2016). At the same time it was shown that the model in which the compact source is a pulsar allowed naturally explain the keV-TeV spectrum of LSI +61 303 Zdziarski *et al.* (2010). Authors argued, that the radio source has a complex, varying morphology, and the jet emission is unlikely to dominate the spectrum through the whole orbit. Within this model the superorbital period of the source is explained as timescale of the gradual build-up and decay of the disk of the Be star. This hypothesis is also supported by the optical observations confirming the superorbital variability of the Be-star disk Paredes-Fortuny *et al.* (2015). A number of multi-wavelength campaigns are currently ongoing aiming to resolve the nature of these peculiar systems.

GeV observations revealed a few more binaries visible up to few GeV. Among them are Cyg X-1 Zanin *et al.* (2016); Zdziarski *et al.* (2017) and Cyg X-3 Cheung and Loh (2016). However, contrary to the GRLBs described above these systems are transients and seen only during the ares, or, in the case of Cyg X-1, during the hard state. In addition to this the peak of the spectral energy distribution of these systems happens at much lower energies than in the case of binaries visible at TeV energies.

However contrary to the GRLBs described above these systems are transients and seen only during the flares, or ,in the case of Cyg X-1, during the hard state. In addition to this the peak of the spectral energy distribution of these system happens at much lower energies than in the case of binaries visible at TeV energies. From these observations it seems that wind collision can accelerate particles more efficient that the accretion, but more sensitive observations are needed to prove it and understand the reason. Hopefully CTA CTA Consortium (2018) observations will be able to shed light on the details of the physical processes taking place in these systems.

25.1.12 Supermassive black hole binaries in the cores of AGN

Contributors: E. Bon, E. M. Rossi, A. Sesana, A. Stamerra

Following mergers it is expected that the galaxy cores should eventually end up close to each other. In this process, the term dual SMBHs refers to the stage where the two embedded SMBHs are still widely separated (gravitationally-bound to the surrounding gas and stars and not to one another), while SMBBHs denotes the evolutionary stage where they are gravitationally bounded in the close-orbiting system of SMBHs.

Bound SMBBHs on centi-pc scales are the most relevant to GW emission (and therefore to this roadmap). In the approximation of circular orbits, these systems emit GWs at twice their orbital frequency, i.e. $f_{\rm GW} = 2/P_{\rm orb} \gtrsim 1$ nHz. As we discuss in the next Section, this is the frequency at which PTAs are most sensitive Lentati *et al.* (2015); Shannon *et al.* (2015); Verbiest *et al.* (2016); Arzoumanian *et al.* (2018a), having a concrete chance to make a direct detection of these systems within the next decade Siemens *et al.* (2013); Rosado *et al.* (2015); Taylor *et al.* (2016). The presence of a SMBBH with an orbital period of several years introduces a natural timescale in the system. In fact, numerical simulations of SMBBHs embedded in circumbinary accretion disks display consistent periodic behaviors of the gas leaking into the cavity Artymowicz and Lubow (1994); MacFadyen and Milosavljević (2008); Roedig *et al.* (2012); Shi *et al.* (2012); D'Orazio *et al.* (2013); Farris *et al.* (2015). This led to the notion that SMBBHs might be detected via periodicity of their lightcurve. However, the diffusion time of the gas within the mini-disks surrounding the two holes is generally longer than the binary period, and it is not at all clear that the periodic supply of gas through the cavity will in turn result in periodicities in the binary lightcurves or their spectra Sesana *et al.* (2012). Even though the cross-gap accretion rate is generally periodic, only light generated at the accretion stream/minidisk or outgoing stream/circumbinary disk shocks is guaranteed to follow this modulation Roedig *et al.* (2014); Farris *et al.* (2015). Since some periodicity seems inevitable, we focus on this signature in the following discussion. We notice however, that several spectral signatures of close SMBBHs have also been proposed, including a dimming at UV wavelengths Tanaka *et al.* (2012), double Kα lines Sesana *et al.* (2012), notches in the spectral continuum Roedig *et al.* (2014), steepening of the thermal spectrum compared to the standard thin disk model Ryan and MacFadyen (2017).

Among many mechanisms proposed to explain the emission variability of active galactic nuclei (AGN) besides outflows, jet precession, disk precession, disk warping, spiral arms, flares,

and other kinds of accretion disk instabilities, one of the most intriguing possibilities involves the existence of a SMBBH system in their cores Komossa (2003); Bogdanović *et al.* (2008); Bogdanović (2015); Graham *et al.* (2015a); Nguyen and Bogdanović (2016), and the tidal disruption event (see Ref. Komossa (2015) and references therein).

The light variability emitted from AGN was tracked much before they were recognized as active galaxies. There are light curves showing AGN variability of over 100 years of observations, see for example Guo *et al.* (2014); Oknyanskij *et al.* (2016), with variability timescale of over decades. In fact, many AGN show variability of different time scales depending on time scales of processes that drive the variability, such as speeds at which variations propagate, for example the speed of light c $\sim 3 \cdot 10^5$ km/s or the speed of sound $v_s \sim (kT/m)^{1/2}$, where $c > v_{orb} \gg v_s$, or the time scale of the orbital motion $v_{orb} \sim (GM/R)^{1/2}$. The shortest timescale corresponds to the light crossing timescale, on which the reverberation mapping campaigns are based on. Orbital timescales are longer Netzer (2013), and are dominant in the case of SMBBH systems. Recently, possible connection of AGN variability time scales and orbital radius is presented in Bon *et al.* (2018), indicating that variability time scales may not be random, and that they might correspond to the orbiting time scales.

To identify possible candidates, we search for periodic variations in their light and radial velocity curves. We expect that periodic variability should correspond to orbital motion exclusively, while the other processes could produce only quasi periodic signals. Unfortunately, AGN were identified only about 70 years ago, so observing records are long for few decades only, which is of order of orbiting time scales, and therefore not long enough to trace many orbits in historical light curves, not to mention the radial velocity curves Begelman *et al.* (1980); Popović (2012); Bon *et al.* (2012, 2016); Li *et al.* (2016), which are harder to obtain because of their faintness, and even shorter records. Therefore, for AGN it is very hard to prove that the signal is actually periodic, especially if they are compared to the red noise like variability curves, that in fact, AGN light curves are very similar to Simm *et al.* (2016); Vaughan *et al.* (2016). Therefore, standard methods like Fourier and Lomb-Scargle Scargle (1982) may show peaks of high looking significance but the derived p-value may not be valid Vaughan *et al.* (2016); Bon *et al.* (2016, 2017).

Keeping in mind the aforementioned difficulties, a number of AGN have been proposed to display a significant periodical variability in their light curves Sillanpaa *et al.* (1988); Graham *et al.* (2015a,b); Charisi *et al.* (2016); Liu *et al.* (2016); Bhatta *et al.* (2016); Kovačević *et al.* (2017). Notable examples include the blazar OJ287 (11.5 yr period, Sillanpaa *et al.* (1988); Bhatta *et al.* (2016), the quasar PG1302-102 (6 yr period, Graham *et al.* (2015a)), the blazar PG 1553+113 (2 yr period, Ackermann *et al.* (2015)). Among those candidates, there are only few that could indicate periodic light and radial velocity curves in the same time Bon *et al.* (2016, 2012); Li *et al.* (2016); Li *et al.* (2017b), which therefore could be recognized as SMBBH candidates, like NGC4151 with a 15.9 year periodicity Bon *et al.* (2012), NGC5548 with a ≈15 year periodicity Li *et al.* (2016); Bon *et al.* (2016), and Akn120 with a ≈20 year periodicity Li *et al.* (2017b). We note that simulating the emission from such systems is very complex Cuadra *et al.* (2009); Farris *et al.* (2015); Hayasaki *et al.* (2008); Tang *et al.* (2017); Ryan and MacFadyen (2017), especially for the eccentric high-mass ratio systems Bogdanović *et al.* (2008); Miranda *et al.* (2017); Hayasaki *et al.* (2013).

Among AGN, the class of blazars is dominated by the emission from the jet due to beaming effects caused by the small angle of sight. Blazars show high variability in all wavebands from radio to gamma-rays. High energy emission is likely originated in small jet scales and therefore can be modulated by the orbital motion of the SMBH binary system. The modulation can be funneled through variations on the accretion rate induced by the perturbation on the disk by the companion SMBH, as suggested for OJ287, or in helical paths induced by precession Sobacchi *et al.* (2017) as suggested to explain the clear signature of a periodic modulation on the gamma-ray blazar PG 1553+113 Ackermann *et al.* (2015). More complex interplay among the different components in the jet, emitting at different wavelength is possible in the framework of a binary SMBH system (Rieger (2004)). We mention that quasi-periodicities in the jet emission can be induced by intrinsic oscillatory disk instabilities that can mimic periodical behaviour. The continuous gamma-ray monitoring of blazars by the *Fermi*-LAT satellite is providing new possible candidates showing periodic or quasi-periodic emission (see e.g., Prokhorov and Moraghan (2017), Sandrinelli *et al.* (2016)). Similarly, a 14 year periodicity is found in the X-ray and optical variations of 3C 273, while in OJ 287, the optical variability may not always be consistent with radio. Even, a detection of periodic variations of spinning jet could indicate presence of SMBBH Kun *et al.* (2014).

The time domain window has only been opened in the past decade with dedicated surveys such as CRTS, PTF and Pan-STARRS, and already produced several SMBBH candidates. Many of them, however, have been already severely constrained by PTA upper limits on the stochastic GW background they would imply Sesana *et al.* (2018). This confirms our poor understanding of SMBBH appearance. More sophisticated numerical simulations, including 3-D grids, radiative transport schemes, feedback from the accreting sources, etc., are needed to better understand the emission properties and peculiar signatures of SMBBHs. Under their guidance, future candidates should be then proposed based on systematic cross check of variability coupled with peculiar spectral features.

Modeling electromagnetic signatures of merging SMBBHs

Although the identification of compact SMBBHs might have an important impact on GW observations with PTAs in the near future, looking further ahead, LISA is expected to detect tens to hundreds of coalescing SMBBHs throughout the Universe. Electromagnetic observations related to the merger of SMBBHs are important both for cosmology and the astrophysics of galactic nuclei. Pinning down the host galaxy of the merger will allow us to combine redshift and distance from gravitational waves to constrain cosmological parameters (Tamanini *et al.* (2016), see next Section) and to study the large scale galactic environment of merging SMBBHs, adding to our understanding to the process galaxy formation. On the other hand, electromagnetic observations will give us access to the properties of matter in the relative close environment of a merger and to the gas an stars (hydro)-dynamics as they adjust in response to the merger.

Given the importance of such identification, there has been an extensive effort to predict observable electromagnetic signatures that can occur in nearly coincidence with the event ("prompt signals") or afterwards ("afterglows"). In the following few examples will be given; notably, some of them also inspired recent models for possible electromagnetic counterparts to SOBBH mergers, of the kind detected by LIGO and VIRGO. As mentioned previously, SMBBH mergers, especially at high redshifts, can happen in a gaseous environment that provides each SMBH with a "minidisc," fed through streams leaking from a circumbinary disc. Those minidiscs are likely to be retained even after the orbital decay due to gravitational radiation dominates, providing distinctive modulation of the emerging luminosity as the binary spirals in Tang *et al.* (2018); Bowen *et al.* (2018). During the final orbits, the surviving gas between the black holes gets squeezed possibly producing super-Eddington outflows as discussed in Armitage and Natarajan (2002); Cerioli *et al.* (2016), but see Fontecilla *et al.* (2017). Full GR simulations have also been employed to study the possible formation of precessing jets during the inspiral and merger, in the attempt of identifying distinctive signatures Palenzuela *et al.* (2010); Moesta *et al.* (2012); Gold *et al.* (2014). General relativity predicts that a newly formed black hole suffers a recoil because GWs carry away a non-zero linear momentum (e.g., Fitchett (1983); Campanelli *et al.* (2007a)). This recoil affects the circumbinary disc, bound to the black hole: a kick is imparted that shocks the gas producing a slowly rising, ~ 10 yr lasting afterglows Lippai *et al.* (2008); Schnittman and Krolik (2008); Shields and Bonning (2008); Megevand *et al.* (2009); Rossi *et al.* (2010). In stellar mass black hole merger, similar phenomena but on much shorter timescales can occur Perna *et al.* (2016); de Mink and King (2017). Contrary to the SMBH case, however, providing a gas rich environment for the merger is a challenge. A possible venue involves cold relic discs, formed as a result of weak supernovae, where accretion is suppressed until either the "squeezing" or the "kicking" heat them up again in the same configuration envisaged for SMBHs.

As already mentioned, the next theoretical challenge for these dynamical models is to predict realistic lightcurves and spectra, which will require non-trivial radiative transfer calculations (see, e.g., Schnittman *et al.* (2016)). With solid predictions in hand, appropriate strategies can be devised to coordinate electromagnetic follow-ups, to take full advantage of multimessenger astronomy in the LISA era.

25.1.13 Cosmology and cosmography with gravitational waves

Contributors: C. Caprini, G. Nardini, N. Tamanini

The recent direct measurement of GWs by the Earth-based interferometers LIGO and Virgo opened up a new observational window onto the universe and, right from the first detection, led to the discovery of a new, unexpected source: fairly massive stellar-origin BBHs. This demonstrates the great potential of GW observations to improve our knowledge of the universe.

Concerning cosmology, it is beyond doubt that the possible detection of a stochastic GW background (SGWB) from the early universe would be revolutionary from this point of view: similar to the discovery of the CMB, which constitutes a milestone in our understanding of the universe, rich of consequences that we are still investigating. Furthermore, the plethora of new GW detections expected in the next decades by both Earth and space-based interferometers will not only deliver fundamental information on the emitting astrophysical sources, but it will also bring complementary and independent data, with respect to standard EM observations, that can be used for cosmological purposes. In particular, by means of GW detections, we can probe the history of the universe both at early and late times, shedding new light on some of the most elusive cosmological mysteries, such as dark energy, DM and the origin of cosmic inhomogeneities. In this Section, we overview how the observation of GWs can enhance our knowledge of the history of the universe.

Standard sirens as a probe of the late universe

Within the theory of GR, a binary system composed by two compact astrophysical objects orbiting around each other, emits a GW signal with the two polarizations Maggiore (2007)

$$h_\times(t) = \frac{4}{d_L(z)}\left(\frac{G\mathcal{M}_c(z)}{c^2}\right)^{5/3}\left(\frac{\pi f(t)}{c}\right)^{2/3}\sin[\Phi(t)]\cos\iota\,, \tag{25.8}$$

$$h_+(t) = h_\times(t)\frac{1+\cos^2\iota}{2\cos\iota}\cot[\Phi(t)]\,, \tag{25.9}$$

where $h_{\times,+}(t)$ are the GW strains in the transverse-traceless gauge (we neglect here post-Newtonian contributions). In these expressions ι is the orientation of the orbital plane with respect to the detector, z is the redshift of the source, $d_L(z)$ is the luminosity distance, f is the GW frequency at the observer, $\Phi(t)$ is the phase of the GW, and $\mathcal{M}_c(z) = (1+z)(m_1m_2)^{3/5}/(m_1+m_2)^{1/5}$ is the redshifted chirp mass, with $m_{1,2}$ being the masses of the two binary bodies. An accurate detection of the GW signal allows to reconstruct all the parameters in Eqs. (25.8) and (25.9) within some (correlated) uncertainties Schutz (1986). In particular, thanks to the reconstruction of d_L, binaries can be employed as reliable cosmological distance indicators.

Eqs. (25.8) and (25.9) highlight three key aspects of using inspiralling binaries as cosmological distance indicators: *i)* The measurement of d_L from GW signals is not affected by any systematic uncertainties in the modelling of the source, since the dynamics of compact binary systems is directly determined by GR. This is in contrast with supernovae type-Ia (SNIa), which require the cosmic distance ladder, i.e. cross calibration with local measurements of sources of known distance, to overcome unknown systematics in the determination of their luminosity distance. *ii)* Due to the scaling $\propto d_L^{-1}$, GW cosmological indicators are suitable even at large distances where EM sources, whose intensity scales as d_L^{-2}, are too faint. This implies that given the same amount of emitted energy, a source producing GWs can be observed at higher distances with respect to a source emitting EM waves. *iii)* The measurement of the quoted waveform does not allow to determine the redshift of the source: in fact Eqs. (25.9) and (25.8) are invariant under the transformation $m_i \to m_i(1+z)$ plus $d_L \to d_L(1+z)$. In other words the waveform detected from any system with masses m_i at a distance d_L will be equivalent to a waveform produced by a system with masses $m_i(1+z)$ at a distance $d_L(1+z)$.

The luminosity distance d_L is tightly linked to the redshift z in a given cosmological setup. For a homogeneous and isotropic universe (at large scale), the luminosity distance is given by

$$d_L(z) = \frac{c}{H_0}\frac{1+z}{\sqrt{\Omega_k}}\sinh\left[\sqrt{\Omega_k}\int_0^z\frac{H_0}{H(z')}dz'\right]\,, \tag{25.10}$$

with Ω_k being the present value of the density parameter of the spatial curvature, $H(z)$ being the Hubble rate as a function of the redshift, and $H_0 = H(z=0)$. Therefore, if besides d_L (reconstructed from the waveform) one can independently establish the redshift z of a GW source, then one obtains a data point useful to constrain the relation (25.10). The parameters of any given cosmological model, which are implicitly included in $H(z)$ since its dynamics is determined by the Einstein equations, can then be statistically constrained by fitting Eq. (25.10)

against a number of $(z, d_L(z))$ data points. This can be done using observations from GW inspiralling binaries, if a determination of their redshift is available by some means. For this reason, well detectable binaries, for which the redshift is also known (or at least estimated), are dubbed *standard sirens*, in analogy with SNIa used as standard candles in cosmography Holz and Hughes (2005).

Of course, to obtain a robust bound, it is crucial to fit Eq. (25.10) with as many standard sirens as possible at the most diverse redshifts, especially if the cosmological model at hand contains many parameters. The outcome of such an analysis can be remarkable. It constitutes the first robust cosmological test not using EM radiation as the only messenger of astronomical information, and it allows to probe the validity of the cosmic distance ladder up to far distances. As demonstrated by the recent analysis of the LVC detection GW170817, discussed in section 25.1.13 below, it also provides a measurement of H_0 that is independent of the calibrations necessary to establish constraints using SNIa. In particular, if the current tension between the H_0 measurement from SNIa and CMB (assuming ΛCDM) will persist, standard sirens will be a very useful observable to decipher the origin of this tension.

Redshift information

The cosmography procedure just described assumes that the redshift of the GW sources can be acquired. This is however not straightforward. Because of their intrinsic nature, coalescing BHs do not guarantee any signature besides GWs. Nevertheless, EM counterparts can be envisaged for BBHs surrounded by matter, or for compact binaries where at least one of the two bodies is not a BH. For this reason, an EM counterpart is expected for merging massive BHs at the centre of galaxies, which may be surrounded by an accretion disk, and for BNSs, whose merger produces distinctive EM emissions, including gamma ray bursts and kilonovae. On the other hand, extreme mass ratio inspiral (EMRI) systems and stellar-origin BBHs (SOBBHs) are not expected to produce significant EM radiation at merger, although their merging environment is still unclear. Of course, in order to fit Eq. (25.10) with as many data points $(z,\ d_L)$ as possible, it would help substantially to determine the redshift of all detectable standard sirens, independently of whether they do or do not exhibit an EM counterpart. There are mainly two different ways to obtain redshift information for a standard siren, depending on the observation or not of an EM counterpart:

Method with EM counterpart: This method relies on EM telescopes to recognize the galaxy hosting the GW source Schutz (1986). Reaching a good sky localization ($\mathcal{O}(10\,\mathrm{deg}^2)$ or below) as soon as possible after the detection of the GW signal, is essential to alert EM telescopes and point them towards the solid angle determining the direction of the GW event to look for EM transients. Once such a transient is detected, the GW event can be associated with the nearest galaxy whose redshift can be measured either spectroscopically or photometrically. It is important for this method to have GW detectors able to rapidly reach a well-beamed sky localization of the GW source. A network of GW interferometers not only improves the sensitivity to a standard siren signal (improving the reconstruction of d_L) but also the identification of the sky solid angle containing the source thanks to spatial triangulation.

Method without EM counterpart: This method allows to determine the sky localization of the standard siren much after the GW event, with clear practical advantages, in particular, the presence of the source does not need to be recognized in real time, and moreover the SNR required for a good sky localization does not need to be reached before the stage at which the EM signal might be triggered). It adopts a statistical approach Schutz (1986); MacLeod and Hogan (2008). Indeed, given a galaxy catalogue, the galaxy hosting the standard siren has to be one of those contained in the box given by the identified solid angle (with its experimental error) times a properly-guessed redshift range. This range is obtained by applying a reasonable prior to the redshift obtained inverting Eq. (25.10). In this procedure one must of course take into account the dependency upon the cosmological parameters of $H(z)$, which will affect the final posterior on the parameters themselves. The redshift of the standard siren can be estimated as the weighted average of the redshifts of all the galaxies within the error box (an additional prior on the conformation of each galaxy may be also included). Due to the large uncertainty of this statistical approach,

this method is effective only when a limited amount of galaxies can be identified within the volume error box and only if a sufficiently large amount of GW events is observed.

These procedures suffer from some major uncertainties. The redshift appearing in Eq. (25.10) is the one due to the Hubble flow, and consequently the contribution due to the peculiar velocity of the host galaxy to the measured redshift should be subtracted. Moreover, the real geodesic followed by the GW is not the one resulting from the homogeneous and isotropic metric assumed in Eq. (25.10), and in fact the lensing contribution to d_L due to cosmic inhomogeneities should be removed. Although in principle very precise lensing maps and galaxy catalogues are helpful to estimate such source of uncertainty Jonsson *et al.* (2007); Shapiro *et al.* (2010); Hirata *et al.* (2010); Hilbert *et al.* (2011), still the lensing and peculiar velocity effects have to be treated as a (large) systematic error that can be reduced only by means of numerous detections (the uncertainty due to peculiar velocities dominating at low redshift, and the lensing uncertainty dominating at large redshift).

Standard sirens with current GW data: GW170817

The GW170817 event, corresponding to the coalescence of a BNS, is the exquisite progenitor of cosmography via standard sirens with EM counterpart. For that event, the LVC interferometer network recovered the luminosity distance $d_L = 43.8^{+2.9}_{-6.9}$ Mpc at 68% C.L., and a sky localization of 31 deg^2 Abbott *et al.* (2017f,g), corresponding to the solid angle shown in the left panel of Fig. 25.8 (green area). The optical telescopes exploring this portion of the sky identified an EM transient in association to the galaxy NGC4993, which is known to be departing from us at the speed of 3327 ± 72 km s^{-1}. Although part of the peculiar velocity of the galaxy NGC4993 could be subtracted Abbott *et al.* (2017g), remaining uncertainties on the peculiar motion eventually yield the estimate $v_H = 3017 \pm 166$ km s^{-1} for its Hubble flow velocity, corresponding to $z \simeq 10^{-2}$ (notice that at this redshift the lensing uncertainty is negligible). Using the Hubble law $d_L = z/H_0$, which is the leading order term in the expansion of Eq. (25.10) at small z, one obtains the posterior distribution for H_0 presented in Fig. 25.8 (right panel), providing the measurement $H_0 = 70.0^{+12.0}_{-8.0}$ km s^{-1}Mpc^{-1} at 68% C.L. Abbott *et al.* (2017b). The uncertainty on H_0 is too large to make the measurement competitive with CMB Ade *et al.* (2016) and SNIa constraints Riess *et al.* (2016). Nevertheless, this represents a local estimate of H_0 that is not dependent on the cosmic distance ladder and the first cosmological measurement not relying only on EM radiation. Moreover, the large number of events similar to GW170817 expected to be observed in the future will eventually yield constraints on H_0 at the level of both local and CMB measurements.

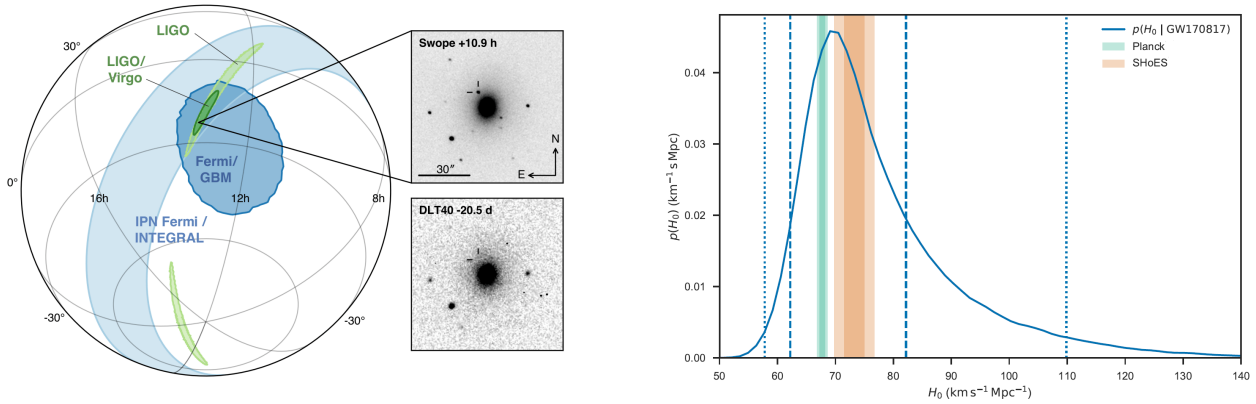


Figure 25.8: *Left panel: The multi-messanger sky localization of GW170817 and the identification of the host galaxy. Right panel: The posterior distribution of H_0 compared to the recent CMB and SNIa constraints Ade* et al. *(2016); Riess* et al. *(2016). Figures taken from Refs. Abbott* et al. *(2017g,b).*

Cosmological forecasts with standard sirens

The potential of current and forthcoming GW detectors for cosmology have been widely studied in the literature. To appreciate the capability of standard sirens to probe the late universe, here we report on the most recent forecasts (see e.g. Refs. Dalal *et al.* (2006); Nissanke *et al.* (2010); Del Pozzo (2012); Nissanke *et al.* (2013) (LVC) and Menou *et al.* (2008); Stavridis *et al.* (2009); Van Den Broeck *et al.* (2010); Shang and Haiman (2011); Sereno *et al.* (2011); Petiteau *et al.* (2011) (LISA) for previous studies). Such analyses are expected to continuously improve over the upcoming years of data taking.

Forecasts with ground-based interferometers: Ground-based interferometers can detect binary systems composed of NSs and/or stellar-origin BHs, with masses ranging from few solar masses up to tens of solar masses. By means of the planned LVC-KAGRA-LIGO India network, BNSs with counterpart will allow to put a tight constraint on H_0. For example, assuming the ΛCDM model, H_0 is expected to be measured roughly with a ∼1% error after ∼100 detections with counterpart Chen *et al.* (2018); Seto and Kyutoku (2018). The result would be even tighter if, for some SOBBHs, the host galaxy could be identified, or if BNSs with counterpart are considered instead, as only ∼10 detections would yield the same level of accuracy Chen *et al.* (2018); Nishizawa (2017). The forecasts drastically improve for third generation ground-based detectors, such as the Einstein Telescope (ET) Sathyaprakash *et al.* (2010); Taylor and Gair (2012); Cai and Yang (2017). In addition, besides the two approaches mentioned above for the redshift measurement, a further method, feasible only with an ET-like device, will become available Messenger and Read (2012) (see also Taylor *et al.* (2012) for a similar idea). Thanks to the tidal effects of a BNS waveform, the redshift-mass degeneracy can be broken. Consequently, by measuring the tidal effect in the waveform and assuming a prior knowledge on the NS equation of state, the redshift z entering the redshifted chirp mass can be reconstructed from the waveform itself. In this way, with more than 1000 detected BNS events, the ET is expected to constrain the parameters H_0 and Ω_m of the ΛCDM model roughly with an uncertainty of $\sim 8\%$ and $\sim 65\%$, respectively Del Pozzo *et al.* (2017). However, if the rate of BNS mergers in the universe will result to be in the higher limit of the currently allowed range, the ET will be able to see up to $\sim 10^7$ BNS mergers, ameliorating these constraints by two orders of magnitude.

Forecasts with space-based interferometers: Space-based GW interferometry will open the low-frequency window (mHz to Hz) in the GW landscape, which is complementary to Earth-based detectors (Hz to kHz) and PTA experiments (nHz). The Laser Interferometer Space Antenna (LISA) is currently the only planned space mission designed to detect GWs, as it has been selected by ESA Amaro-Seoane *et al.* (2017). Several new GW astrophysical sources will be observed by LISA, including SOBBHs, EMRIs and massive BBHs from 10^4 to 10^7 solar masses. These sources can not only be conveniently employed as standard sirens, but they will be detected at different redshift ranges, making LISA a unique cosmological probe, able to measure the expansion rate of the universe from local ($z \sim 0.01$) to very high ($z \sim 10$) redshift. The current forecasts, produced taking into account only massive BBHs Tamanini *et al.* (2016) (for which an EM counterpart is expected) or SOBBHs Kyutoku and Seto (2017); Del Pozzo *et al.* (2018) (for which no EM counterpart is expected), estimate constraints on H_0 down to a few percent. However, joining all possible GW sources that can be used as standard sirens with LISA in the same analysis, should not only provide better results for H_0, which will likely be constrained to the sub-percent level, but it will open up the possibility to constrain other cosmological parameters. The massive BBH data points at high redshifts will, moreover, be useful to test alternative cosmological models, predicting deviations from the ΛCDM expansion history at relatively early times Caprini and Tamanini (2016); Cai *et al.* (2017). Finally, more advanced futuristic missions, such as DECIGO or BBO, which at the moment have only been proposed on paper, may be able to probe the cosmological parameters, including the equation of state of dark energy, with ultra-high precision Cutler and Holz (2009); Nishizawa *et al.* (2011); Kawamura *et al.* (2011); Arabsalmani *et al.* (2013). They might also be able to detect the effect of the expansion of the universe directly on the phase of the binary GW waveform Seto *et al.* (2001); Nishizawa *et al.* (2012), although the

contribution due to peculiar accelerations would complicate such a measurement Bonvin *et al.* (2017); Inayoshi *et al.* (2017).

Future prospects

The recent GW170817 event has triggered numerous studies about the use of standard sirens for cosmography, and the forthcoming experimental and theoretical developments might change the priorities in the field. As mentioned above, the network of Earth-based GW interferometers is expected to detect an increasing number of GW sources employable as standard sirens, with or without EM counterparts. This will eventually yield a measurement of the Hubble constant competitive with CMB and SNIa constraints, which might be used to alleviate the tension between these two datasets. On the other hand, higher redshift ($z \gtrsim 1$) standard sirens data will probably be obtained only with third generation detectors or space-based interferometers. With these high redshift data we will start probing the expansion of the universe at large distances, implying that a clean, and not exclusively EM-based, measurement of other cosmological parameters will become a reality. Furthermore, the precision of cosmography via standard sirens might be boosted by improvements in other astronomical observations. This is the case if e.g. galactic catalogues and lensing maps improve substantially in the future, as expected.

Concerning present forecasts, there is room for improvements, especially regarding third generation Earth-based interferometers and space-borne GW detectors. The full cosmological potential of future GW experiments such as ET and LISA has still to be assessed. For ET we still do not have a full cosmological analysis taking into account all possible GW sources that will be used as standard sirens, using both the method with counterpart (BNSs) and the method without counterpart (SOBBHs and BNSs). Moreover, we still need to fully understand up to what extent the information on the NS equation of state can be used to infer the redshift of BNSs and NS-BH binaries, with the latterpotentially representing a new interesting future source of standard sirens Nissanke *et al.* (2010, 2013); Vitale and Chen (2018). Regarding LISA, there are still several issues to be addressed in order to produce reliable forecasts. For instance, the EMRI detection rate is still largely unknown Babak *et al.* (2017), although these sources might turn out to be excellent standard siren candidates at redshift $0.1 \lesssim z \lesssim 1$ Tamanini (2017). In addition, the prospects for massive BBH mergers as standard sirens would be more robust if an up-to-date model of the EM counterpart were implemented in the investigations. Performing these analyses and combining the results for all the different types of standard sirens observable by LISA will allow for a full assessment of the cosmological potential of the mission.

Most of the literature on standard sirens assumes GR and an homogeneous and isotropic universe at large scales. However, breakthroughs may occur by generalizing the aforementioned analyses to theories beyond GR, and in fact forecasts for scenarios not fulfilling these assumptions are flourishing topics with potentially revolutionary results. For example, some models of modified gravity, formulated to provide cosmic acceleration, have been strongly constrained by the measurement of the speed of GW (compared to the speed of light) with GW170817 Creminelli and Vernizzi (2017); Ezquiaga and Zumalacárregui (2017); Baker *et al.* (2017); Sakstein and Jain (2017). In general, in theories beyond GR or admitting extra dimensions, the cosmological propagation of GWs changes and a comparison between the values of d_L measured from GWs and inferred from EM observations can provide a strong test of the validity of these theories (see Belgacem *et al.* (2018b); Amendola *et al.* (2017); Linder (2018); Pardo *et al.* (2018) for recent works).

Finally we mention that the large number of GW sources expected to be observed by third generation interferometers such as ET or by future space-borne detectors such as DECIGO/BBO, might even be used to test the cosmological principle Yagi *et al.* (2012a); Namikawa *et al.* (2016); Cai *et al.* (2018) and to extract cosmological information by cross-correlating their spatial distribution with galaxy catalogues or lensing maps Camera and Nishizawa (2013); Oguri (2016); Raccanelli (2017).

Interplay between GWs from binaries and from early-universe sources

The gravitational interaction is so weak that GWs propagate practically unperturbed along their path from the source to us. GWs produced in the early universe thus can carry a unique

imprint of the pre-CMB era, in which the universe was not transparent to photons. In this sense, GW detection can provide for the first time direct, clean access to epochs that are very hard to probe by any other observational means. GWs of cosmological origin appear (pretty much as the CMB) to our detectors as a SGWB Romano and Cornish (2017); Caprini and Figueroa (2018).

Several pre-CMB phenomena sourcing GWs might have occurred along the cosmological history, from inflation to the epoch of the QCD phase transition. In such a case, the SGWB would be constituted by the sum of all single contributions, each of them potentially differing from the others in its spectral shape as a function of frequency, or because of other properties such as chirality and/or gaussianity. It is hence crucial to have precise predictions of all proposed cosmological sources to possibly isolate all components in the detected SGWB, with the aim of reconstructing the early time history of the universe.

On the other hand, binary systems can also be detected as a SGWB. This happens for those (independent) astrophysical events that are overall too weak to be individually resolved. The level of their "contamination" to the cosmological SGWB thus depends on the sensitivity and on the resolution of the available detector. Crucially, at LIGO-like and LISA-like experiments the astrophysical component might be stronger than the cosmological one, so that the information hidden in the pre-CMB signal would be impossible to recover, unless the astrophysical contribution is known in great detail and methods are found to subtract it.

Status and future prospects

No measurement of the SGWB has been done yet, but upper bounds have been inferred from the observations. These are usually expressed in terms of the SGWB energy density, which is given by $\Omega_{\rm GW}(f) = (f/\rho_c)\,\partial\rho_{\rm GW}/\partial f$, with ρ_c and $\rho_{\rm GW}$ being the critical and the SGWB energy densities, respectively. Specifically, by assuming the frequency shape $\Omega_{\rm GW}(f) = \Omega_\alpha (f/25{\rm Hz})^\alpha$, the LVC found the 95% C.L. limit $\Omega_{\alpha=0,2/3,3} < 17\times10^{-7}, 13\times10^{-7}$ and 1.7×10^{-8} in the $\mathcal{O}(10)$ – $\mathcal{O}(100)$ Hz frequency band Abbott *et al.* (2017l). The latest Pulsar Timing Array analysis, done with the data of the NANOGrav collaboration, yields $h^2\Omega_{\alpha=0} < 3.4\times10^{-10}$ at 95% C.L. at 3.17×10^{-8} Hz Arzoumanian *et al.* (2018b). Since the astrophysical sources are not expected to produce a SGWB with higher amplitude than these bounds, the latter are particularly relevant only for the most powerful cosmological signals Lasky *et al.* (2016); Abbott *et al.* (2018b).

However, it is probably only a matter of some years to achieve the first detection of the astrophysical SGWB by the LVC. Based on the current detection rates, the SOBBHs and BNSs lead to the power-law SGWBs $\Omega_{\rm BBH}(f) = 1.2^{+1.9}_{-0.9}\times10^{-9}\,(f/25\,{\rm Hz})^{2/3}$ and $\Omega_{\rm BBH+BNS}(f) = 1.8^{+2.7}_{-1.3}\times10^{-9}\,(f/25\,{\rm Hz})^{2/3}$ in the frequency band of both LVC and LISA Abbott *et al.* (2018c). These signals are expected to be measurable by the LIGO and Virgo detectors in around 40 months of observation time Abbott *et al.* (2018c), while in LISA they will reach a Signal to Noise Ratio (SNR) of $\mathcal{O}(10)$ in around one month of data taking Caprini *et al.*. On the other hand, given the large uncertainties on EMRIs Babak *et al.* (2017), it is not clear whether they can also give rise to an observable SGWB component in the LISA band.

Focusing exclusively on the SGWB contribution from astrophysical binaries, two general aspects about it are particularly worth investigating. The first regards the detailed prediction and characterization of this component. For the time being, the literature does not suggest any technique to disentangle the cosmological SGWB component from a generic astrophysical one. At present, it is believed that component separation will be (partially) feasible in the LISA data only for what concerns the SGWB signal due to galactic binaries. In this case, indeed, the anisotropy of the spatial distribution of the source (confined to the galactic plane), together with the motion of the LISA constellation, generates a SGWB signal modulated on a yearly basis, which allows to distinguish and subtract this component from the total SGWB Adams and Cornish (2014). Although a similar approach is not possible for the extra-galactic SGWB component, this example well illustrates that detailed predictions of the astrophysical signatures might highlight subtraction techniques allowing to perform component separation and hopefully isolate the information coming from the early universe (similarly to what done for foreground subtraction in CMB analyses).

The second aspect concerns the possibility of exploiting third generation detectors, such as the ET and Cosmic Explorer, to subtract the astrophysical SGWB component Regimbau

et al. (2017). Their exquisite sensitivity may allow to resolve many of the SOBBHs and BNSs that give rise to the SGWB in present detectors, including the full LVC-KAGRA-LIGO India network. This would clean the access to the cosmological SGWB down to a level of $\Omega_{\rm GW} \simeq 10^{-13}$ after five years of observation Regimbau *et al.* (2017). This technique not only applies in the frequency bandwidth of the Earth-based devices, but it can also be used to clean the LISA data and reach a potential SGWB of cosmological origin in the LISA band. Note that LISA might as well help in beating down the level of the SGWB from SOBBHs by exploiting possible multi-band detections of the same source Sesana (2016). The SOBBH would be detected first by LISA, during its inspiral phase; some years later, when the binary has arrived to the merger stage, it would reappear in Earth-based interferometers. These latter can therefore be alerted in advance, possibly leading to an increase in the number of detected BBHs (depending on their LISA SNR).

25.2 II: Modelling black-hole sources of gravitational waves: prospects and challenges

25.2.1 Introduction

The detection and characterization of gravitational-wave (GW) sources rely heavily on accurate models of the expected waveforms. This is particularly true for black hole binaries (BBHs) and other compact objects, for which accurate models are both necessary and hard to obtain. To appreciate the state of affairs, consider the following three examples. (i) While GW150914, the first BH merger event detected by LIGO, had initially been identified using a template-free search algorithm, some of the subsequent events, which were not as bright, would likely have been altogether missed if template-based searches had not been performed. (ii) While the error bars placed on the extracted physical parameters of detected BH mergers have so far come primarily from instrumental noise statistics, systematic errors from the finite accuracy of available signal models are only marginally smaller and would actually dominate the total error budget for sources of some other spin configurations or greater mass disparity; in the case of the binary neutron star (BNS) GW170817, deficiencies in available models of tidal effects already restrict the quality of science extractable from the signal. (iii) Even with a perfectly accurate model at hand, analysis of GW170817 would not have been possible within the timescale of weeks in which it was carried out, without the availability of a suitable reduced-order representation of the model, necessary to make such an analysis computationally manageable.

Indeed, accurate and computationally efficient models underpin all of GW data analysis. They do so now, and will increasingly do so even more in the future as more sensitive and broader-band instruments go online. The response of detectors like ET, and especially LISA, will be source-dominated, with some binary GW signals occurring at high signal-to-noise ratio (SNR) and remaining visible in band through many more wave cycles. The accuracy standard of models needs to increase commensurably with detector sensitivity, or else modelling error would restrict our ability to fully exploit the detected signals. As a stark example, consider that, in a scenario that is not unlikely, LISA's output will be dominated by a bright massive BH (MBH) merger signal visible with SNR of several 100s. This signal would have to be carefully "cleaned out" of the data in order to enable the extraction and analysis of any other sources buried underneath; any model inaccuracies would form a systematic noise residual, potentially hiding dimmer sources. In the case of Extreme Mass Ratio Inspirals (EMRIs), where $O(10^5)$ wave cycles are expected in the LISA band at a low SNR, a precise model is a crucial prerequisite for both detection and parameter extraction.

This chapter reviews the current situation with regard to the modelling of GW sources within GR, identifying the major remaining challenges and drawing a roadmap for future progress. To make our task manageable, we focus mainly on sources involving a pair of BHs in a vacuum environment in GR, but, especially in Sec. 25.2.5, we also touch upon various extensions beyond vacuum, GR and the standard model (SM) of particle physics.

Isolated vacuum BHs in GR are remarkably simple objects, described in exact form by the Kerr family of solutions to Einstein's field equations (see, however, Sec. 25.2.8 of this chapter). But let two such BHs interact with each other, and the resulting system displays a remarkably complicated dynamics, with no known exact solutions. Even numerical solutions have for decades proven elusive, and despite much progress following the breakthrough of 2005 they remain computationally very expensive—prohibitively so for mass ratios smaller than $\sim 1:10$—

and problematic for certain astrophysically relevant BH spin configurations. Systematic analytical approximations are possible and have been developed based around expansions of the field equations in the weak-field or extreme mass-ratio regimes, and these may be combined with fully numerical solutions to inform waveform models across broader areas of the parameter space. To facilitate the fast production of such waveforms, suitable for GW search pipelines, effective and phenomenological models have been developed, which package together and interpolate results from systematic numerical simulations and analytical approximations. With the rapid progress in GW experiments, there is now, more than ever, a need for a concentrated community effort to improve existing models in fidelity, accuracy and parameter-space reach, as well as in computational efficiency.

The structure of this chapter is as follows. In Secs. 25.2.2 and 25.2.3 we review the two main systematic approximations to the BBH problem: perturbation theory including the gravitational self-force (GSF) and post-Newtonian (PN) approaches, respectively. Section 25.2.4 surveys progress and prospects in the Numerical Relativity (NR) modelling of inspiralling and merging BHs in astrophysical settings, and Sec. 25.2.5 similarly reviews the role of NR in studying the dynamics of compact objects in the context of alternative theories of gravity and beyond the SM. Section 25.2.6 then reviews the Effective One Body (EOB) approach to the BBH problem, and the various phenomenological models that have been developed to facilitate fast production of waveform templates. Section 25.2.7 reviews the unique and highly involved challenge of data-analysis in GW astronomy, with particular emphasis on the role of source models; this data-analysis challenge sets the requirements and accuracy standards for such models. Finally, Sec. 25.2.8 gives a mathematical relativist's point of view, commenting on a variety of (often overlooked) foundational questions that are yet to be resolved in order to enable a mathematically rigorous and unambiguous interpretation of GW observations.

25.2.2 Perturbation Methods

Contributor: B. Wardell

Exact models for GWs from BBHs can only be obtained by exactly solving the full Einstein field equations. However, there is an important regime in which a perturbative treatment yields a highly accurate approximation. For BBH systems in which one of the BHs is much less massive than the other, one may treat the mass ratio as a small perturbation parameter. Then, the Einstein equations are amenable to a perturbative expansion in powers of this parameter. Such an expansion is particularly suitable for EMRIs, systems in which the mass ratio may be as small as 10^{-6}, or even smaller Magorrian *et al.* (1998); Gair *et al.* (2004); Amaro-Seoane *et al.* (2007); Gair (2009); Amaro-Seoane *et al.* (2013). In such cases, it has been established Hinderer and Flanagan (2008); Isoyama *et al.* (2013); Burko and Khanna (2013) that it will be necessary to incorporate information at second-from-leading perturbative order to achieve the accuracy that will be required for optimal parameter estimation by the planned LISA mission LISA Mission web site; Barack and Cutler (2004); Babak *et al.* (2011); Gair *et al.* (2011a); Babak *et al.* (2017). Aside from EMRIs, a perturbative expansion is likely to also be useful as a model for Intermediate Mass Ratio Inspirals (IMRIs): systems where the mass ratio may be as large as $\sim 10^{-2}$. Such systems, if they exist, are detectable in principle by Advanced LIGO and Virgo, and are indeed being looked for in the data of these experimentsAbbott *et al.* (2017m); Haster *et al.* (2016).

The perturbative approach (often called the *self-force*[11] approach) yields a set of equations for the motion of the smaller object about the larger one. For a detailed technical review of self-force physics, see Poisson *et al.* (2011), and for a most recent, pedagogical review, see Barack and Pound (2019). At zeroth order in the expansion, one recovers the standard geodesic equations for a test particle in orbit around (i.e. moving in the background spacetime of) the larger BH. At first order, we obtain coupled equations for an accelerated worldline forced off a geodesic by the GSF, which itself arises from the metric perturbation to the background spacetime sourced by the stress-energy of the smaller BH. In the GSF approach, it can be convenient to treat the smaller BH as a "point particle", with the GSF being computed from an effective *regularized*

[11]Strictly speaking, the term *self-force* refers to the case where local information about the perturbation in the vicinity of the smaller object is used; other calculations of, e.g., the flux of GW energy far from the binary also rely on a perturbative expansion Glampedakis and Kennefick (2002); Mino (2003); Hughes *et al.* (2005); Sago *et al.* (2006); Drasco *et al.* (2005); Drasco and Hughes (2006); Sundararajan *et al.* (2007); Fujita *et al.* (2009), but are not referred to as GSF calculations.

metric perturbation DeWitt and Brehme (1960); Hobbs (1968); Mino *et al.* (1997); Quinn and Wald (1997); Detweiler and Whiting (2003). Such an assumption is not strictly necessary, but has been validated by more careful treatments whereby both BHs are allowed to be extended bodies, and the point-particle-plus-regularization prescription is recovered by appropriately allowing the smaller BH to shrink down to zero size Gralla and Wald (2008); Pound (2010a,b, 2012a). These more careful treatments have also allowed the GSF prescription to be extended to second perturbative order Rosenthal (2005, 2006); Detweiler (2012); Gralla (2012); Pound (2012b,a); Pound and Miller (2014) and to the fully non-perturbative case Harte (2008, 2010, 2012).

The goal of the GSF approach is to develop efficient methods for computing the motion of the smaller object and the emitted GWs in astrophysically-relevant scenarios. These involve, most generally, a spinning (Kerr) large BH, and a small (possibly spinning) compact object in a generic (possibly inclined and eccentric) inspiral orbit around it. The data analysis goals of the LISA mission (which demand that the phase of the extracted waveform be accurate to within a fraction of a radian over the entire inspiral) require all contributions to the metric perturbation at first order, along with the dissipative contributions at second order Hinderer and Flanagan (2008).

Recent developments

Focused work on the GSF problem has been ongoing for at least the last two decades, during which time there has been substantial progress. Early work developed much of the mathematical formalism, particularly in how one constructs a well-motivated and unambiguous regularized first-order metric perturbation DeWitt and Brehme (1960); Hobbs (1968); Gal'tsov (1982); Mino *et al.* (1997); Quinn and Wald (1997); Detweiler and Whiting (2003); Gralla and Wald (2008); Pound (2010a). More recent work has addressed the conceptual challenges around how these initial results can be extended to second perturbative order Rosenthal (2005, 2006); Detweiler (2012); Gralla (2012); Pound (2012b,a); Pound and Miller (2014), and on turning the formal mathematical prescriptions into practical numerical schemes Poisson and Wiseman (1998); Barack and Ori (2000); Barack *et al.* (2002); Anderson and Wiseman (2005); Barack and Golbourn (2007); Vega and Detweiler (2008). As a result, we are now at the point where first-order GSF calculations are possible for almost any orbital configuration in a Kerr background spacetime van de Meent (2018). Indeed, we now have not one, but three practical schemes for computing the regularized first-order GSF Wardell and Gopakumar (2015). Some of the most recent highlights from the substantial body of work created by the GSF community are discussed below.

First-order gravitational self-force for generic orbits in Kerr spacetime

Progress in developing tools for GSF calculations has been incremental, starting out with the simplest toy model of a particle with scalar charge in a circular orbit about a Schwarzschild BH, and then extending to eccentric, inclined, and generic orbits about a spinning Kerr BH Barack and Burko (2000); Burko (2000); Burko and Liu (2001); Detweiler *et al.* (2003); Diaz-Rivera *et al.* (2004); Haas (2007); Ottewill and Wardell (2008, 2009); Lousto and Nakano (2008); Vega *et al.* (2009); Canizares and Sopuerta (2009); Dolan and Barack (2011); Thornburg (2010); Canizares *et al.* (2010); Warburton and Barack (2010, 2011); Diener *et al.* (2012); Dolan *et al.* (2011); Casals *et al.* (2012); Ottewill and Taylor (2012); Casals *et al.* (2013); Warburton and Wardell (2014); Vega *et al.* (2013); Wardell *et al.* (2014); Warburton (2015); Gralla *et al.* (2015); Thornburg and Wardell (2017); Heffernan *et al.* (2017). Progress has also been made towards developing tools for the conceptually similar, but computationally more challenging GSF problem; again starting out with simple circular orbits in Schwarzschild spacetime before extending to eccentric equatorial orbits and, most recently, fully generic orbits in Kerr spacetime Barack and Lousto (2002, 2005); Anderson and Wiseman (2005); Barack and Sago (2007); Sago (2009); Shah *et al.* (2011); Akcay (2011); Barack and Sago (2010); Keidl *et al.* (2010); Warburton *et al.* (2012); Dolan and Barack (2013); Shah *et al.* (2012); Dolan (2013); Akcay *et al.* (2013); Pound *et al.* (2014); Isoyama *et al.* (2014); Merlin and Shah (2015); Osburn *et al.* (2016); Gralla *et al.* (2016). Along the way, there have been many necessary detours in order to establish the most appropriate choice of gauge Keidl *et al.* (2010); Hopper and Evans (2013); Pound *et al.* (2014); Osburn *et al.* (2014); Merlin and Shah (2015); Pound (2015a); Shah *et al.* (2016); Thompson *et al.* (2017), reformulations of the regularization procedure

Haas and Poisson (2006); Barack *et al.* (2007); Wardell *et al.* (2012); Vega *et al.* (2011); Dolan and Barack (2013); Heffernan *et al.* (2012, 2014); Pound *et al.* (2014); Warburton and Wardell (2014); Linz *et al.* (2014); Wardell and Warburton (2015), and various numerical methods and computational optimisations Barack *et al.* (2008); Vega *et al.* (2009); Canizares and Sopuerta (2009); Field *et al.* (2009, 2010); Canizares *et al.* (2010); Hopper and Evans (2010); Akcay (2011); Hopper and Evans (2013); Dolan and Barack (2013); Akcay *et al.* (2013); Osburn *et al.* (2014); Hopper *et al.* (2015); Hopper (2018); Barack and Giudice (2017).

Extraction of gauge-invariant information

Both the regularized metric perturbation and the GSF associated with it are themselves gauge-dependent Barack and Ori (2001); Gralla (2011); Pound (2015a), but their combination encapsulates gauge-invariant information. A series of works have derived a set of gauge-invariant quantities accessible from the regularized metric and GSF, which quantify *conservative* aspects of the dynamics in EMRI systems beyond the geodesic approximation. (Strictly speaking, they are only "gauge invariant" within a particular, physically motivated class of gauge transformations. Nevertheless, even with this restriction the gauge invariance is very useful for comparisons with other results.) Examples include Detweiler's *red-shift* invariant Detweiler (2008), the frequency of the innermost stable circular orbit (ISCO) in Schwarzschild Barack and Sago (2009) and Kerr Isoyama *et al.* (2014), the periastron advance of slightly eccentric orbits in Schwarzschild Barack *et al.* (2010) and Kerr van de Meent (2017), spin (geodetic) precession Dolan *et al.* (2014); Shah and Pound (2015); Akcay *et al.* (2017); Akcay (2017), and, most recently, quadrupolar and octupolar tidal invariants Dolan *et al.* (2015); Nolan *et al.* (2015). The most important outcome from the development of these gauge invariants is the synergy it has enabled, both within the GSF programme Sago *et al.* (2008) (e.g., by allowing for direct comparisons between results computed in different gauges) and, as described next, with other approaches to the two-body problem.

Synergy with PN approximations, EOB theory, and NR

One of the most fruitful outcomes arising from the development of GSF gauge-invariants is the synergy it has enabled between the GSF and PN and EOB theories. With a gauge-invariant description of the physical problem available, it is possible to make direct connections between GSF, PN and EOB approximations. This synergy has worked in a bidirectional way: GSF calculations have been used to determine previously-unknown coefficients in both PN and EOB expansions Detweiler (2008); Blanchet *et al.* (2010a); Barack *et al.* (2010); Blanchet *et al.* (2010b); Akcay *et al.* (2012); Bini and Damour (2014a); Blanchet *et al.* (2014a); Bini *et al.* (2015, 2016); Kavanagh *et al.* (2015); Akcay and van de Meent (2016); Akcay *et al.* (2015); Hopper *et al.* (2016); Kavanagh *et al.* (2016); Bini *et al.* (2016b,c); Kavanagh *et al.* (2017); and EOB and PN calculations have been used to validate GSF results Bini and Damour (2014a), and even to assess the region of validity of the perturbative approximation Le Tiec *et al.* (2011, 2012a, 2013). More on this in Sec. 25.2.3.

Mirroring the synergy between GSF and PN/EOB, there have emerged methods for making comparisons between GSF and NR. This started out with direct comparisons of the periastron advance of slightly eccentric orbits Le Tiec *et al.* (2011, 2013). More recently, a similar comparison was made possible for Detweiler's redshift Zimmerman *et al.* (2016); Le Tiec and Grandclément (2017), facilitated by an emerging understating of the relation between Detweiler's red-shift and the horizon surface gravity of the small BH.

New and efficient calculational approaches

Despite the significant progress in developing numerical tools for computing the GSF, it is still a computationally challenging problem, particularly in cases where high accuracy is required. This challenge has prompted the development of new and efficient calculational approaches to the problem.

Initial GSF results were obtained in the Lorenz gauge Barack and Lousto (2005); Barack and Sago (2007, 2009, 2010); Akcay (2011); Barack and Sago (2011); Warburton *et al.* (2012); Akcay *et al.* (2013), where the regularization procedure is best understood. Unfortunately, the details

of a Lorenz-gauge calculation—in which one must solve coupled equations for the 10 components of the metric perturbation—are tedious and cumbersome, making it difficult to implement and even more difficult to achieve good accuracy. In the Schwarzschild case, other calculations based on variations of Regge-Wheeler gauge Detweiler (2005); Field *et al.* (2009, 2010); Hopper and Evans (2010, 2013); Osburn *et al.* (2016); Hopper and Cardoso (2018); Hopper (2018) were found to be much easier to implement and yielded much more accurate results. However, with regularization in Regge-Wheeler gauge less well understood, those calculations were restricted to the computation of gauge-invariant quantities. Perhaps more importantly, they are restricted to Schwarzschild spacetime, meaning they can not be used in astrophysically realistic cases where the larger BH is spinning. The radiation gauge—in which one solves the Teukolsky equation Teukolsky (1972, 1973) for a single complex pseudo-scalar ψ_4 (or, equivalently, ψ_0)—retains much of the simplicity of the Regge-Wheeler gauge, but has the significant benefit of being capable of describing perturbations of a Kerr BH. Furthermore, recent progress has clarified subtle issues related to regularization Pound *et al.* (2014) (including metric completion Merlin *et al.* (2016); van De Meent (2017)) in radiation gauge, paving the way for high-accuracy calculations of both gauge-invariant quantities and the GSF van de Meent and Shah (2015); van de Meent (2016, 2017, 2018).

Within these last two approaches (using Regge-Wheeler and radiation gauges) *functional methods* Leaver (1986); Mano *et al.* (1996); Sasaki and Tagoshi (2003) have emerged as a particularly efficient means of achieving high accuracy when computing the metric perturbation. Fundamentally, these methods rely on the fact that solutions of the Teukolsky (or Regge-Wheeler) equation can be written as a convergent series of hypergeometric functions. This essentially reduces the problem of computing the metric perturbation to the problem of evaluating hypergeometric functions. The approach has proved very successful, enabling both highly accurate numerical calculations Shah *et al.* (2014); Shah (2014); Johnson-McDaniel *et al.* (2015); van de Meent (2018) and even exact results in the low-frequency–large-radius (i.e. PN) regime Bini and Damour (2014a, 2015a,b); Bini *et al.* (2015, 2016); Kavanagh *et al.* (2015); Hopper *et al.* (2016); Kavanagh *et al.* (2016); Bini *et al.* (2016b,c); Kavanagh *et al.* (2017). A different type of analytic treatment is possible for modelling the radiation from the last stage of inspiral into a nearly extremal BH, thanks to the enhanced conformal symmetry in this scenario Porfyriadis and Strominger (2014); Hadar *et al.* (2014, 2015); Hadar and Porfyriadis (2017). This method, based on a scheme of matched asymptotic expansions, has so far been applied to equatorial orbits Gralla *et al.* (2015); Compère *et al.* (2018), with the GSF neglected.

Cosmic censorship

Independently of the goal of producing accurate waveforms for LISA data analysis, the GSF programme has also yielded several other important results. One particular area of interest has been in the relevance of the GSF to answering questions about cosmic censorship. Calculations based on test-particle motion made the surprising discovery that a test particle falling into a Kerr BH had the potential to increase the BH spin past the extremal limit, thus yielding a naked singularity Jacobson and Sotiriou (2009). (Analogous cases exist where an electric charge falling into a charged (Reissner-Nordström) BH may cause the charge on the BH to increase past the extremal limit Hubeny (1999); Saa and Santarelli (2011); Gao and Zhang (2013).) The intuitive expectation is that this is an artifact of the test-particle approximation, and that by including higher-order terms in this approximation the GSF may in effect act as a "cosmic censor" by preventing over-charging and restoring cosmic censorship Barausse *et al.* (2010). Several works have explored this issue in detail, studying the self-force on electric charges falling into a Reissner-Nördstrom BH Zimmerman *et al.* (2013); Revelar and Vega (2017) and on a massive particle falling into a Kerr BH Colleoni and Barack (2015); Colleoni *et al.* (2015). These works demonstrated with explicit calculations how the overspinning or overcharging scenarios are averted once the full effect of the self-force is taken into account (a result later rigorously proven in a more general context Sorce and Wald (2017)).

Remaining challenges and prospects

While the perturbative (self-force) approach has proven highly effective to date, there remain several important and challenging areas for further development. Here, we list a number of the most important future challenges and prospects for the GSF programme.

Efficient incorporation of self-force information into waveform models

There are at least two key aspects to producing an EMRI model: (i) computing the GSF; and (ii) using the GSF to actually drive an inspiral. Unfortunately, despite the substantial advances in calculational approaches, GSF calculations are still much too slow to be useful on their own as a means for producing LISA gravitational waveforms. Existing work has been able to produce first-order GSF driven inspirals for a small number of cases Diener *et al.* (2012); Warburton *et al.* (2012); Osburn *et al.* (2016); Warburton *et al.* (2017) but when one takes into account the large parameter space of EMRI systems it is clear that these existing methods are inadequate. It is therefore important to develop efficient methods for incorporating GSF information into EMRI models and waveforms. There has been some promising recent progress in this direction, with fast "kludge" codes producing approximate (but not sufficiently accurate) inspirals Glampedakis and Kennefick (2002); Hughes *et al.* (2005); Drasco and Hughes (2006); Sundararajan *et al.* (2007, 2008); Chua *et al.* (2017); Berry and Gair (2013), and with the emergence of mathematical frameworks based on near-identity transformations Van De Meent and Warburton (2018), renormalization group methods Galley and Rothstein (2017) and two-timescale expansions Moxon and Flanagan (2018).

To complicate matters, inspirals generically go through a number of transient resonances, when the momentary radial and polar frequencies of the orbit occur in a small rational ratio. During such resonances, approximations based on adiabaticity break down Flanagan and Hinderer (2012); Flanagan *et al.* (2014); van de Meent (2014a,b); Brink *et al.* (2015). Works so far have mapped the locations of resonances in the inspiral parameter space, studied how the orbital parameters (including energy and angular momentum) experience a "jump" upon resonant crossing, and illustrated how the magnitude of the jump depends sensitively on the precise resonant phase (the relative phase between the radial and polar motions at resonance). The impact of resonances on the detectability of EMRIs with LISA was studied in Refs. Berry *et al.* (2016, 2017) using an approximate model of the resonant crossing. But so far there has been no actual calculation of the orbital evolution through a resonance. Now that GSF codes for generic orbits are finally at hand, such calculations become possible, in principle. There is a vital need to perform such calculations, in order to allow orbital evolution methods to safely pass through resonances without a significant loss in the accuracy of the inspiral model.

Producing accurate waveform models: self-consistent evolution and second-order gravitational self-force

Possibly the most challenging outstanding obstacle to reaching the sub-radian phase accuracy required for LISA data analysis is the fact that the first-order GSF on its own is insufficient and one must also incorporate information at second perturbative order Hinderer and Flanagan (2008). There are ongoing efforts to develop tools for computing the second order GSF Pound (2010a, 2012b); Warburton and Wardell (2014); Pound and Miller (2014); Pound (2014, 2015b); Wardell and Warburton (2015); Miller *et al.* (2016); Pound (2017); Moxon and Flanagan (2018), but, despite significant progress, a full calculation of the second-order metric perturbation has yet to be completed.

One of the challenges of the GSF problem when considered through second order is that it is naturally formulated as a self-consistent problem, whereby the coupled equations for the metric perturbation and for the particle worldline are evolved simultaneously. Indeed, this self-consistent evolution has yet to be completed even for the first-order GSF (it has, however, been done for the toy-model scalar charge case Diener *et al.* (2012)). Even when methods are developed for computing the second order GSF, it will remain a further challenge to incorporate this information into a self-consistent evolution scheme.

Gravitational Green Function

One of the first proposals for a practical method for computing the GSF was based on writing the regularized metric perturbation in terms of a convolution, integrating the Green function for the wave equation along the worldline of the particle Poisson and Wiseman (1998); Anderson and Wiseman (2005). It took several years for this idea to be turned into a complete calculation of the GSF, and even then the results were restricted to the toy-model problem of a scalar charge moving in Schwarzschild spacetime Casals *et al.* (2013); Wardell *et al.* (2014).

Despite this deficiency, the Green function approach has produced a novel perspective on the GSF problem.

In principle, the methods used for a scalar field in Schwarzschild spacetime should be applicable to the GSF problem in Kerr. The challenge is two-fold: (i) to actually adapt the methods to the Kerr problem and to the relevant wave equation, which is the linearized Einstein equation in the Lorenz gauge; and (ii) to explore whether and how one can instead work with the much simpler Teukolsky wave equation.

Internal-structure effects

The vast majority of GSF calculations to date have been based on the assumption that the smaller object is spherically symmetric and non-spinning. This idealization ignores the possibility that the smaller BH may be spinning, or more generally that other internal-structure effects may be relevant. Unfortunately, this picture is inadequate; certain internal-structure effects can make important contributions to the equations of motion. For example, the coupling of the small body's spin to the larger BH's spacetime curvature (commonly referred to as the Mathisson-Papapetrou force) is expected to contribute to the phase evolution of a typical EMRI at the same order as the conservative piece of the first-order GSF Ruangsri *et al.* (2016). Furthermore, finite internal-structure is likely to be even more important in the case that the smaller body is a NS.

While there has been some progress in assessing the contribution from the smaller body's spin to the motion Faye *et al.* (2006); Han (2010); Ruangsri *et al.* (2016); Harms *et al.* (2016); Warburton *et al.* (2017); Maia *et al.* (2017a,b); Lukes-Gerakopoulos *et al.* (2017), existing work has focused on flux-based calculations or on the PN regime. It remains an outstanding challenge to determine the influence of internal-structure effects on the GSF, especially at second order.

EMRIs in alternative theories of gravity

In all of the discussion so far, we have made one overarching assumption: that BHs behave as described by General Relativity (GR). However, with EMRIs we have the exciting prospect of not simply assuming this fact, but of testing its validity with exquisite precision. There is initial work on the self-force in the context of scalar-tensor gravity Zimmerman (2015), but much more remains to be done to establish exactly what EMRIs can do to test the validity of GR (and how) when pushed to its most extreme limits. Much more on this in Chapter III (see, in particular, Sec. 25.3.3 therein)

Open tools and datasets

While there has been significant progress in developing tools for computing the GSF, much of it has been ad-hoc, with individual groups developing their own private tools and codes. Now that a clear picture has emerged of exactly which are the most useful methods and tools, the community has begun to combine their efforts. This has lead to the development of a number of initiatives, including (i) tabulated results for Kerr quasinormal modes and their excitation factors Cardoso and other (accessed June 2018); Berti (2017 (accessed June 2018); (ii) open source "kludge" codes for generating an approximate waveform for EMRIS Chua and Gair (2017); Chua *et al.* (2017); and (ii) online repositories of self-force results Fujita *et al.* (2017a). It is important for such efforts to continue, so that the results of the many years of development of GSF tools and methods are available to the widest possible user base. One promising initiative in this direction is the ongoing development of the *Black Hole Perturbation Toolkit* BHP (2017), a free and open source set of codes and results produced by the GSF community.

25.2.3 Post-Newtonian and Post-Minkowskian Methods

Contributor: A. Le Tiec

Background

The PN formalism is an approximation method in GR that is well suited to describe the orbital motion and the GW emission from binary systems of compact objects, in a regime where the orbital velocity is small compared to the speed of light and the gravitational fields are weak. This approximation method has played a key role in the recent detections, by the LIGO and Virgo observatories, of GWs generated by inspiralling and merging BH and NS binaries Abbott *et al.* (2016a,b, 2017c,c,f), by providing accurate template waveforms to search for those signals and to interpret them. Here we give a brief overview of the application of the PN approximation to binary systems of compact objects, focusing on recent developments and future prospects. See the review articles Futamase and Itoh (2007); Blanchet (2011); Schäfer (2010); Foffa and Sturani (2014); Rothstein (2014); Blanchet (2014); Porto (2016a); Schäfer and Jaranowski (2018) and the textbooks Maggiore (2007); Poisson and Will (2014) for more information.

In PN theory, relativistic corrections to the Newtonian solution are incorporated in a systematic manner into the equations of motion (EOM) and the radiation field, order by order in the small parameter $v^2/c^2 \sim Gm/(c^2 r)$, where v and r are the typical relative orbital velocity and binary separation, m is the sum of the component masses, and we used the fact that $v^2 \sim Gm/r$ for bound motion. (The most promising sources for current and future GW detectors are bound systems of compact objects.)

Another important approximation method is the post-Minkowskian (PM) approximation, or non-linearity expansion in Newton's gravitational constant G, which assumes weak fields ($Gm/c^2 r \ll 1$) but unrestricted speeds ($v^2/c^2 \lesssim 1$), and perturbs about the limit of special relativity. In fact, the construction of accurate gravitational waveforms for inspiralling compact binaries requires a combination of PN and PM techniques in order to solve two coupled problems, namely the problem of motion and that of wave generation.

The two-body EOM have been derived in a PN framework using three well-developed sets of techniques in classical GR: (i) the PN iteration of the Einstein field equations in harmonic coordinates Blanchet *et al.* (1998); Blanchet and Faye (2001); de Andrade *et al.* (2001); Blanchet *et al.* (2004a); Mitchell and Will (2007), (ii) the Arnowitt-Deser-Misner (ADM) canonical Hamiltonian formalism Jaranowski and Schaefer (1998); Damour *et al.* (2000, 2001), and (iii) a surface integral approach pioneered by Einstein, Infeld and Hoffmann Itoh *et al.* (2001); Itoh and Futamase (2003); Itoh (2004). By the early 2000s, each of these approaches has independently produced a computation of the EOM for binary systems of non-spinning compact objects through the 3rd PN order (3PN).[12] More recently, the application of effective field theory (EFT) methods Goldberger and Rothstein (2006), inspired from quantum field theory, has provided an additional independent derivation of the 3PN EOM Foffa and Sturani (2011). All of those results were shown to be in perfect agreement. Moreover, the 3.5PN terms—which constitute a 1PN relative correction to the leading radiation-reaction force—are also known Iyer and Will (1993, 1995); Jaranowski and Schaefer (1997); Pati and Will (2002); Konigsdorffer *et al.* (2003); Nissanke and Blanchet (2005).

At the same time, the problem of radiation (i.e., computing the field in the far/wave zone) has been extensively investigated within the multipolar PM wave generation formalism of Blanchet and Damour Blanchet and Damour (1986); Blanchet (1987, 1998), using the "direct integration of the relaxed Einstein equation" approach of Will, Wiseman and Pati Will and Wiseman (1996); Pati and Will (2000), and more recently with EFT techniques Goldberger and Ross (2010); Ross (2012). The application of these formalisms to non-spinning compact binaries has, so far, resulted in the computation of the GW phase up to the relative 3.5PN (resp. 3PN) order for quasi-circular (resp. quasi-eccentric) orbits Blanchet *et al.* (2002a,b, 2004b, 2005); Arun *et al.* (2008a,b, 2009); Moore *et al.* (2016), while amplitude corrections in the GW polarizations are known to 3PN order, and even to 3.5PN order for the quadrupolar mode Arun *et al.* (2004); Kidder *et al.* (2007); Kidder (2008); Blanchet *et al.* (2008); Faye *et al.* (2012); Mishra *et al.* (2015).

Recent developments

Over the last five years or so, significant progress on PN modelling of compact binary systems has been achieved on multiple fronts, including (i) the extension of the EOM to 4PN

[12] By convention, "nPN" refers to EOM terms that are $O(1/c^{2n})$ smaller than the Newtonian acceleration, or, in the radiation field, smaller by that factor relative to the standard quadrupolar field.

order for non-spinning bodies (with partial results also obtained for aspects of the two-body dynamics at the 5PN order Blanchet *et al.* (2010a); Barack *et al.* (2010); Foffa (2014)), (ii) the inclusion of spin effects in the binary dynamics and waveform, (iii) the comparison of several PN predictions to those from GSF theory, and (iv) the derivation of general laws controlling the mechanics of compact binaries.

4PN equations of motion for non-spinning compact-object binaries

Recently, the computation of the two-body EOM has been extended to 4PN order, by using both the canonical Hamiltonian framework in ADM-TT coordinates Jaranowski and Schafer (2012); Jaranowski and Schäfer (2013); Damour *et al.* (2014a); Jaranowski and Schäfer (2015); Damour *et al.* (2016); Damour and Jaranowski (2017) and a Fokker Lagrangian approach in harmonic coordinates Bernard *et al.* (2016, 2017a,b); Marchand *et al.* (2018); Bernard *et al.* (2018). Partial results at 4PN order have also been obtained using EFT techniques Foffa and Sturani (2013a); Foffa *et al.* (2017); Porto and Rothstein (2017). All of those high-order PN calculations resort to a point-particle model for the (non-spinning) compact objects, and rely on dimensional regularization to treat the local ultraviolet (UV) divergences that are associated with the use of point particles. The new 4PN results have been used to inform the EOB framework Damour *et al.* (2015), a semi-analytic model of the binary dynamics and wave emission (see Sec. 25.2.6 below).

The occurrence at the 4PN order of infrared (IR) divergences of spatial integrals led to the introduction of several *ambiguity parameters*; one in the ADM Hamiltonian approach and two in the Fokker Lagrangian approach. One of those IR ambiguity parameters was initially fixed by requiring agreement with an analytical GSF calculation Bini and Damour (2013) of the so-called Detweiler redshift along circular orbits Detweiler (2008); Sago *et al.* (2008). Recently, however, Marchand et al. Marchand *et al.* (2018) gave the first complete (i.e., ambiguity-free) derivation of the 4PN EOM. The last remaining ambiguity parameter was determined from first principles, by resorting to a matching between the near-zone and far-zone fields, together with a computation of the conservative 4PN tail effect in d dimensions, allowing to treat both UV and IR divergences using dimensional regularization.

Another interesting (and related) feature of the binary dynamics at the 4PN order is that it becomes *non-local* in time Damour *et al.* (2014a); Bernard *et al.* (2016), because of the occurence of a GW tail effect at that order: gravitational radiation that gets scattered off the background spacetime curvature backreacts on the orbital motion at later times, such that the binary's dynamics at a given moment in time depends on its entire past history Blanchet and Damour (1988); Foffa and Sturani (2013b); Galley *et al.* (2016).

Spin effects in the binary dynamics and gravitational waveform

Since stellar-mass and/or supermassive BHs may carry significant spins Reynolds (2013); Miller and Miller (2014), much effort has recently been devoted to include spin effects in PN template waveforms. In particular, spin-orbit coupling terms linear in either of the two spins have been computed up to the next-to-next-to leading order, corresponding to 3.5PN order in the EOM, using the ADM Hamiltonian framework Hartung and Steinhoff (2011a); Hartung *et al.* (2013), the PN iteration of the Einstein field equations in harmonic coordinates Marsat *et al.* (2013); Bohe *et al.* (2013), and EFT techniques Levi and Steinhoff (2016a). Spin-spin coupling terms proportional to the product of the two spins have also been computed to the next-to-next-to leading order, corresponding to 4PN order in the EOM, using the ADM Hamiltonian and EFT formalisms Hartung and Steinhoff (2011b); Levi (2012); Levi and Steinhoff (2014, 2016b,c). The leading order 3.5PN cubic-in-spin and 4PN quartic-in-spin contributions to the binary dynamics are also known for generic compact bodies Hergt and Schaefer (2008a,b); Marsat (2015); Levi and Steinhoff (2015); Vaidya (2015), as well as all higher-order-in-spin contributions for BBHs (to leading PN order) Vines and Steinhoff (2018). All these results are summarized in Fig. 25.9. 2PN BH binary spin precession was recently revisited using multi-timescale methods Gerosa *et al.* (2015a); Kesden *et al.* (2015), uncovering new phenomenology such as precessional instabilities Gerosa *et al.* (2015b) and nutational resonances Zhao *et al.* (2017).

Spin-related effects on the far-zone field have also been computed to high orders, for compact binaries on quasi-circular orbits. To linear order in the spins, those effects are known up to

the relative 4PN order in the GW energy flux and phasing Bohé *et al.* (2013); Marsat *et al.* (2014), and to 2PN in the wave polarizations Buonanno *et al.* (2013); Mishra *et al.* (2016). At quadratic order in the spins, the contributions to the GW energy flux and phasing have been computed to 3PN order Porto *et al.* (2011); Bohé *et al.* (2015), and partial results were derived for amplitude corrections to 2.5PN order Porto *et al.* (2012). The leading 3.5PN cubic-in-spin effects in the GW energy flux and phasing are known as well Marsat (2015).

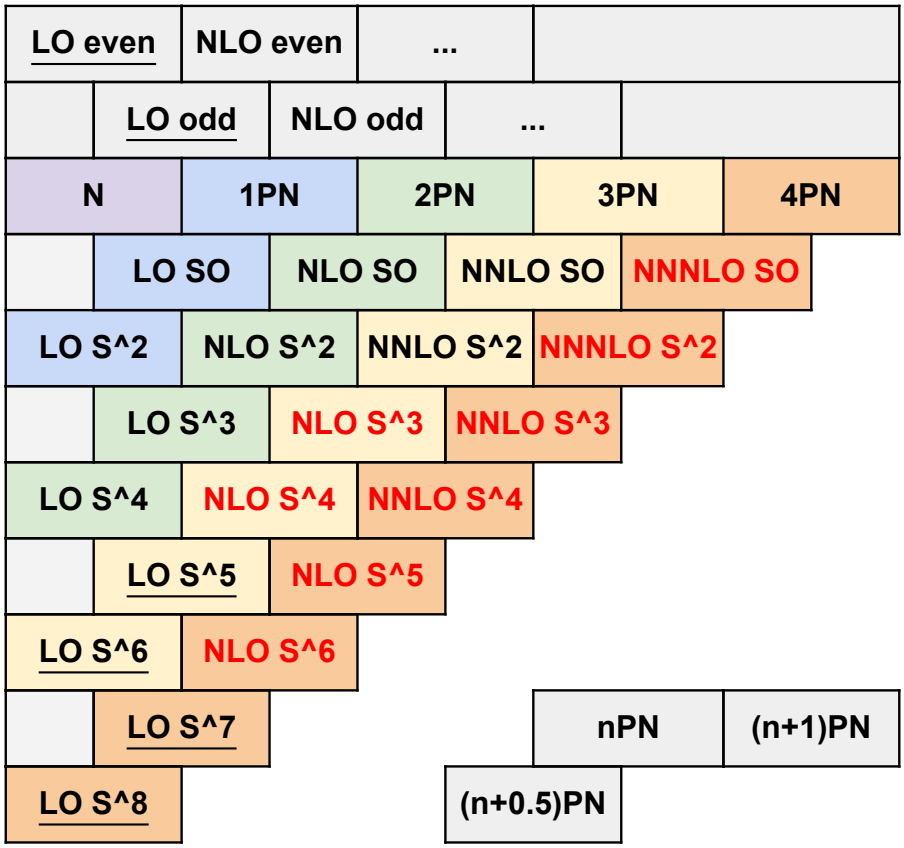


Figure 25.9: Contributions to the two-body Hamiltonian in the PN spin expansion, for arbitrary-mass-ratio binaries with spin induced multipole moments. Contributions in red are yet to be calculated. LO stands for "leading order", NLO for "next-to-leading order", and so on. SO stands for "spin-orbit". Figure from Ref. Vines and Steinhoff (2018).

Finally, some recent works have uncovered remarkable relationships between the PN Vines and Steinhoff (2018) and PM Vines (2018) dynamics of a binary system of spinning BHs with an arbitrary mass ratio on the one hand, and that of a test BH in a Kerr background spacetime on the other hand. Those results are especially relevant for the ongoing development of EOB models for spinning BH binaries (see Sec. 25.2.6), and in fact give new insight into the energy map at the core of such models.

Comparisons to perturbative gravitational self-force calculations

The GWs generated by a coalescing compact binary system are not the only observable of interest. As we have described in Sec. 25.2.2, over recent years, several *conservative* effects on the orbital dynamics of compact-object binaries moving along quasi-circular orbits have been used to compare the predictions of the PN approximation to those of the GSF framework, by making use of gauge-invariant quantities such as (i) the Detweiler redshift Detweiler (2008); Blanchet *et al.* (2010b,a); Damour (2010); Blanchet *et al.* (2014b,a), (ii) the relativistic periastron advance Barack *et al.* (2010); Le Tiec *et al.* (2011, 2013); van de Meent (2017), (iii) the geodetic spin precession frequency Dolan *et al.* (2014), and (iv) various tidal invariants Dolan *et al.* (2015); Nolan *et al.* (2015), all computed as functions of the circular-orbit frequency of the binary. Some of these comparisons were extended to generic bound (eccentric) orbits Barack and Sago (2011); Akcay *et al.* (2015, 2017). All of those comparisons showed perfect agreement

in the common domain of validity of the two approximation schemes, thus providing crucial tests for both methods. Building on recent progress on the second-order GSF problem Pound (2012b,a); Pound and Miller (2014); Pound (2015a); Miller *et al.* (2016); Pound (2017), we expect such comparisons to be extended to second order in the mass ratio, e.g. by using the redshift variable Pound (2014).

Independently, the BH perturbative techniques of Mano, Suzuki and Takasugi Mano *et al.* (1996); Mano and Takasugi (1997) have been applied to compute analytically, up to very high orders, the PN expansions of the GSF contributions to the redshift for circular Bini and Damour (2014b,c, 2015a); Kavanagh *et al.* (2016) and eccentric Bini *et al.* (2015, 2016); Hopper *et al.* (2016); Bini *et al.* (2016b,c) orbits, the geodetic spin precession frequency Bini and Damour (2014d, 2015b); Kavanagh *et al.* (2017), and various tidal invariants Bini and Damour (2014a); Shah and Pound (2015); Kavanagh *et al.* (2015). Additionally, using similar techniques, some of those quantities have been computed numerically, with very high accuracy, allowing the extraction of the exact, analytical values of many PN coefficients Shah *et al.* (2014); Johnson-McDaniel *et al.* (2015); van de Meent and Shah (2015).

First law of compact binary mechanics

The conservative dynamics of a binary system of compact objects has a fundamental property now known as the *first law of binary mechanics* Le Tiec *et al.* (2012b). Remarkably, this variational formula can be used to relate local physical quantities that characterize each body (e.g. the redshift) to global quantites that characterize the binary system (e.g. the binding energy). For point-particle binaries moving along circular orbits, this law is a particular case of a more general result, valid for systems of BHs and extended matter sources Friedman *et al.* (2002).

Using the ADM Hamiltonian formalism, the first law of Le Tiec *et al.* (2012b) was generalized to spinning point particles, for spins (anti-)aligned with the orbital angular momentum Blanchet *et al.* (2013), and to non-spinning binaries moving along generic bound (eccentric) orbits Le Tiec (2015). The derivation of the first law for eccentric motion was then extended to account for the non-locality in time of the orbital dynamics due to the occurence at the 4PN order of a GW tail effect Blanchet and Le Tiec (2017). These various laws were derived on general grounds, assuming only that the conservative dynamics of the binary derives from an autonomous canonical Hamiltonian. (First-law-type relationships have also been derived in the context of linear BH perturbation theory and the GSF framework Gralla and Le Tiec (2013); Le Tiec (2014); Fujita *et al.* (2017b).) Moreover, they have been checked to hold true up to 3PN order, and even up to 5PN order for some logarithmic terms.

So far the first laws have been applied to (i) determine the numerical value of the aforementioned ambiguity parameter appearing in derivations of the 4PN two-body EOM Bini and Damour (2013), (ii) calculate the exact linear-in-the-mass-ratio contributions to the binary's binding energy and angular momentum for circular motion Le Tiec *et al.* (2012a), (iii) compute the shift in the frequencies of the Schwarzschild and Kerr innermost stable circular orbits induced by the (conservative) GSF Barack and Sago (2009); Damour (2010); Barack and Sago (2010); Le Tiec *et al.* (2012a); Akcay *et al.* (2012); Isoyama *et al.* (2014); van de Meent (2017), (iv) test the weak cosmic censorship conjecture in a scenario where a massive particle subject to the GSF falls into a nonrotating BH along unbound orbits Colleoni and Barack (2015); Colleoni *et al.* (2015), (v) calibrate the effective potentials that enter the EOB model for circular Barausse *et al.* (2012b); Akcay *et al.* (2012) and mildly eccentric orbits Akcay and van de Meent (2016); Bini *et al.* (2016,b), and spin-orbit couplings for spinning binaries Bini *et al.* (2015), and (vi) define the analogue of the redshift of a particle for BHs in NR simulations, thus allowing further comparisons to PN and GSF calculations Zimmerman *et al.* (2016); Le Tiec and Grandclément (2017).

Prospects

On the theoretical side, an important goal is to extend the knowledge of the GW phase to the relative 4.5PN accuracy, at least for non-spinning binaries on quasi-circular orbits. (Partial results for some specific tail-related effects were recently derived Marchand *et al.* (2016).) This is essential in order to keep model systematics as a sub-dominant source of error when processing observed GW signals Abbott *et al.* (2017n). Accomplishing that will require, in particular, the calculation of the mass-type quadrupole moment of the binary to 4PN order and the

current-type quadrupole and mass-type octupole moments to 3PN order. Moreover, some spin contributions to the waveform—both in the phasing and amplitude corrections—still have to be computed to reach the 4PN level, especially at quadratic order in the spins.

Most of the PN results reviewed here have been established for circularized binaries, and often for spins aligned or anti-aligned with the orbital angular momentum. It is important to extend this large body of work to generic, eccentric, precessing systems. Progress on the two-body scattering problem would also be desirable Damour *et al.* (2014b); Bini and Damour (2018, 2017a). Additionally, much of what has been achieved in the context of GR could be done as well for well-motivated alternative theories of gravitation, such as for scalar-tensor gravity (e.g. Mirshekari and Will (2013); Lang (2014, 2015); Sennett *et al.* (2016); Bernard (2018)) or in quadratic gravity Yagi *et al.* (2012, 2013).

The first law of binary mechanics reviewed above could be extended to generic, precessing spinning systems, and the effects of higher-order spin-induced multipoles should be investigated. Recent work on the PM approximation applied to the gravitational dynamics of compact binaries has given new insight into the EOB model Damour (2016); Bini and Damour (2017b); Vines (2018); Damour (2018), and in particular into the energy map therein. These two lines of research may improve our physical understanding of the general relativistic two-body problem.

On the observational side, future GW detections from inspiralling compact-object binaries will allow testing GR in the strong-field/radiative regime, by constraining possible deviations from their GR values of the various PN coefficients that appear in the expression of the phase. This, in particular, can be used to test some important nonlinear features of GR such as the GW tail, tail-of-tail and nonlinear memory effects. Indeed, the first detections of GWs from inspiralling BH binaries have already been used to set bounds on these PN coefficients, including an $O(10\%)$ constraint on the leading tail effect at the 1.5PN order Abbott *et al.* (2016c); see Fig. 25.10 (or Ref. Abbott *et al.* (2017c) for a more up-to-date version thereof). More detections with a wider network of increasingly senstive interferometric GW detectors will of course improve those bounds.

Finally, following the official selection of the LISA mission by the European Space Agency (ESA), with a launch planned for 2034, we foresee an increased level of activity in source modelling of binary systems of MBHs and EMRIs, two promising classes of sources for a mHz GW antenna in space. This will motivate more work at the interface between the PN approximation and GSF theory.

25.2.4 Numerical Relativity and the Astrophysics of Black Hole Binaries

Contributor: P. Schmidt

The year of 2005 marked a remarkable breakthrough: the first successful numerical simulation of—and the extraction of the GWs from—an inspiraling pair of BHs through their merger and final ringdown Pretorius (2005a); Campanelli *et al.* (2006a); Baker *et al.* (2006a) (see e.g. Sperhake (2015) for a review).

NR provides us with accurate gravitational waveforms as predicted by GR. BBHs cover an eight-dimensional parameter space spanned by the mass ratio $q = m_1/m_2$, the spin angular momenta $\mathbf{S}_i$ and the eccentricity e. Simulations are computationally extremely expensive, thus the large BBH parameter space is still sparsely sampled. Nevertheless, NR waveforms already play a crucial part in the construction and verification of semi-analytic waveform models used in GW searches, which facilitated the first observations of GWs from BBH mergers Abbott *et al.* (2016a,b,c, 2017c,c). Furthermore, they play a key role in the estimation of source properties and in facilitating important tests of GR in its most extreme dynamical regime.

Since the initial breakthrough, NR has made significant progress: from the first simulations of equal-mass non-spinning BBHs spanning only the last few orbits Pretorius (2005a); Campanelli *et al.* (2006a); Baker *et al.* (2006a), to a realm of simulations exploring aligned-spin Campanelli *et al.* (2006b); Hannam *et al.* (2008a); Dain *et al.* (2008) as well as precessing quasi-circular binaries Campanelli *et al.* (2007b, 2009); Schmidt *et al.* (2011), eccentric-orbit binaries Sperhake *et al.* (2008a); Hinder *et al.* (2008), and evolutions long enough to reach into the early-inspiral regime where they can be matched onto PN models Szilágyi *et al.* (2015).

Today, several codes are capable of stably evolving BBHs and extracting their GW signal. They can roughly be divided into two categories: finite-differencing codes including BAM Bruegmann *et al.* (2008a), the Einstein Toolkit Loffler *et al.* (2012), LazEv Campan-

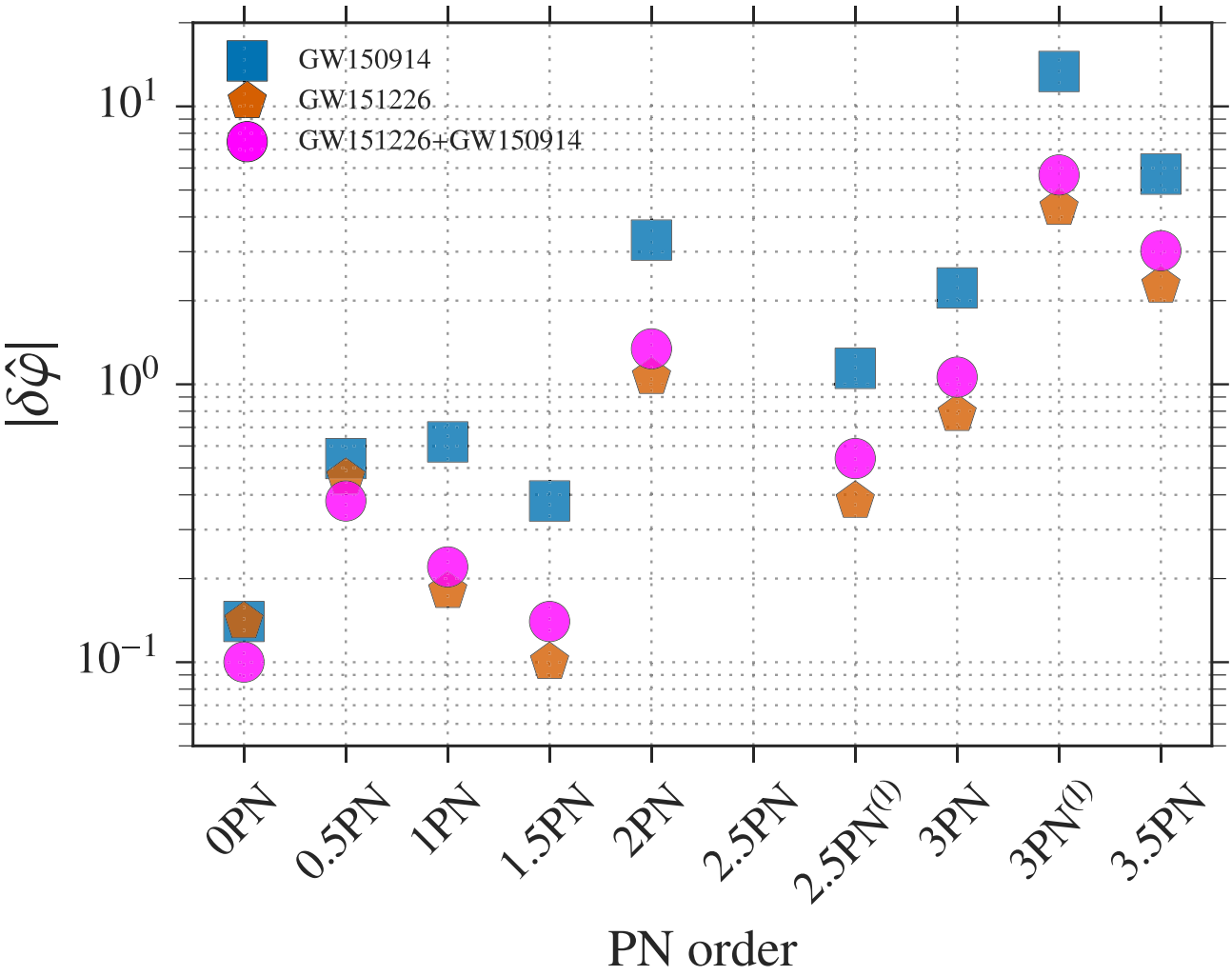


Figure 25.10: Two GW detections of inspiralling BH binaries were used to set bounds on possible deviations from their GR values of various PN coefficients that appear in the expression for the GW phase. Figure from Ref. Abbott *et al.* (2016c).

elli *et al.* (2006a,c,b, 2007a), MAYA Vaishnav *et al.* (2007), LEAN Sperhake (2007) as well as the codes described in Refs. Baker *et al.* (2006b); Pretorius (2005b,a); and (pseudo-)spectral codes such as the Spectral Einstein Code (`SpEC`) Scheel *et al.* (2006). Other evolution codes currently under development include Hilditch *et al.* (2016) and Clough *et al.* (2015). To date, these codes have together produced several thousands of BBH simulations Mroue *et al.* (2013); Chu *et al.* (2016); Jani *et al.* (2016); Healy *et al.* (2017).

Current status

Excision and puncture. In BBH simulations one numerically solves the vacuum Einstein equations with initial conditions that approximate a pair of separate BHs at some initial moment. An obvious complication is the presence of spacetime singularities inside the BHs, where the solution diverges. There are two approaches to this problem. The first is *excision* Thornburg (1987), whereby a region around the singularity is excised (removed) from the numerical domain. As no information can propagate outwards from the interior of the BH, the physical content of the numerical solution outside the BHs is unaffected. Since the excision boundary is spacelike (not timelike), one cannot and does not specify boundary conditions on it. Instead, the main technical challenge lies in ensuring that the excision boundary remains spacelike. The risk, for example, is that part of the boundary may become timelike if numerical noise isn't properly controlled Cook and Pfeiffer (2004); Szilágyi (2014); Kidder *et al.* (2000). It must also be ensured that non-physical gauge modes do not lead to numerical instabilities. Excision is used in `SpEC`, for example.

The second common way to deal with the BH singularities is to choose

singularity-avoiding coordinates. This is achieved by representing BHs as compactified topological wormholes Brandt and Bruegmann (1997) or infinitely long cylinders ("trumpets") Hannam *et al.* (2008b), known as *puncture* initial data. Specific gauge conditions allow the punctures to move across the numerical grid, giving this approach the name moving punctures Campanelli *et al.* (2006a); Baker *et al.* (2006a); van Meter *et al.* (2006); Gundlach and Martin-Garcia (2006); Hannam *et al.* (2008b).

Initial Data. No exact solutions are known, in general, for the BBH metric on the initial spatial surface, so one resorts to approximate initial conditions. Two types of initial data are commonly used: conformally flat and conformally curved. Most simulations that incorporate moving punctures use conformally flat initial data. Under this assumption, three of the four constraint equations (themselves a subset of the full Einstein field equations) are given analytically in terms of the Bowen-York solutions Bowen and York (1980). The maximal possible angular momentum in this approach is $a/m = 0.93$, known as the Bowen-York limit Dain *et al.* (2002). In order to go beyond this limit, conformally curved initial data have to be constructed. For codes that use excision, these can be obtained by solving the extended conformal thin sandwich (CTS) equations York (1999) with quasi-elliptical boundary conditions Gourgoulhon *et al.* (2002); Grandclement *et al.* (2002); Cook (2002); Pfeiffer and York (2003). The initial spatial metric is proportional to a superposition of the metrics of two boosted Kerr-Schild BHs Lovelace *et al.* (2008). More recently, the first non-conformally flat initial data within the moving punctures framework have been constructed Ruchlin *et al.* (2017); Zlochower *et al.* (2017) by superposing the metrics and extrinsic curvatures of two Lorentz-boosted, conformally Kerr BHs.

Evolution Systems. The successful evolution of a BBH spacetime further requires a numerically stable formulation of the Einstein field equations and appropriate gauge choices. Long-term stable evolutions today are most commonly performed with either a variant of the generalised harmonic Pretorius (2005a); Friedrich and Rendall (2000); Lindblom *et al.* (2006) or the Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura (BSSN) formulation Shibata and Nakamura (1995); Baumgarte and Shapiro (1999). Another formulation, Z4, combines constraint preserving boundary conditions with an evolution system very close to BSSN Bona *et al.* (2003); Bona and Palenzuela (2004); Gundlach *et al.* (2005); Hilditch *et al.* (2013). More advanced Z4-type formulations, which are conformal and traceless, were developed in Refs. Bernuzzi and Hilditch (2010); Alic *et al.* (2012); Dumbser *et al.* (2018)

Gravitational Wave Extraction. The GW signal emitted through the inspiral, merger and ringdown is usually extracted from the Newman-Penrose curvature scalar Ψ_4 Newman and Penrose (1962); Stewart (1990) associated with the computed metric. The extraction of the signal is typically performed on spheres of constant coordinate radius some distance from the binary, followed by extrapolation to infinity. The method of Cauchy-Characteristic Extraction (CCE) Bishop *et al.* (1996); Winicour (1999) allows us to extract the observable GW signal directly at future null infinity by matching the Cauchy evolution onto a characteristic evolution that extends the simulation to null infinity. In the Cauchy-Characteristic Extraction, the gravitational waveform is most naturally extracted from the Bondi news function Bondi *et al.* (1962); Sachs (1962).

Challenges

High spins. Numerical simulations of close to maximally spinning BHs are still challenging to carry out due to difficulties in the construction of initial data as well as increasingly demanding accuracy requirements during the evolutions. This particularly affects binary configurations of unequal masses and arbitrary spin orientation, despite significant developments made in the past five years Mroue *et al.* (2013); Chu *et al.* (2016); Jani *et al.* (2016); Healy *et al.* (2017); Husa *et al.* (2016). While spins up to 0.994 have been evolved stably Scheel *et al.* (2015), extensive work is still underway to reach the proposed Novikov-Thorne limit of 0.998 Thorne (1974) and beyond.

High mass ratios. The highest mass ratio BBH fully general-relativistic numerical simulation available to date is of $q = 100$ Lousto and Zlochower (2011a). (However, this simulation follows a relatively small number of orbital cycles.) For spinning BHs, simulations of mass ratio $q = 18$ have been performed Husa *et al.* (2016). Both of these have been

obtained in the moving punctures approach. For spectral methods, mass ratios higher than $q \sim 10$ are numerically very challenging. Generally, higher mass ratios are more computationally expensive as the disparate lengthscales demand higher spatial resolution, and because the number of orbital cycles increases in proportion to q. The choice of a Courant factor poses another problem in explicit evolution schemes, as it forces a small time step, which becomes increasingly challenging for high mass ratios. Implicit schemes could provide a potential solution to this Lau *et al.* (2011), but have not yet been applied to the fully relativistic binary problem. Improvements in numerical technique, and perhaps a synergy with the perturbative methods reviewed in Sec. 25.2.2, will be crucial for overcoming this problem in the hope of extending the reach of NR towards the extreme-mass-ratio regime.

Long simulations. It is crucial for simulations to track the binary evolution from the early inspiral, where it can be matched to a PN model, all the way down to the final merger and ringdown. However, such long evolutions are computationally very expensive, requiring many months of CPU time with existing codes. Note that the run time is not simply linear in the evolution time: a longer run would usually also require a larger spatial domain in order to keep spatial boundaries out of causal contact. To date, only one complete numerical simulation reaching well into the PN regime has been produced, using a modified version of `SpEC` Szilágyi *et al.* (2015). Significant modifications to existing codes would need to be made in order to be able to generate long simulations on a production scale.

Waveform accuracy. As the sensitivity of GW detectors increases, further work will be required to further improve models and assess their systematic errors Abbott *et al.* (2017n). Already, for large precessing spins, or large mass ratios, or non-negligible eccentricities, systemic modelling errors limit the accuracy with which LIGO and Virgo can extract source parameters (see Hannam (2009) for a more detailed discussion). This is due, in part, to relatively large errors in current models of high multipole-mode contributions, which we expect in the coming years to become resolvable in detected signals.

Beyond General Relativity. GW observations from merging compact binaries allow us to probe the strong-field regime and test GR (cf. Chapter III). While theory-agnostic ways to test deviations from GR are commonly used, testing a selection of well-motivated alternative theories through direct waveform comparison is desirable. First steps have been taken to simulate BBHs in alternative theories of gravity that admit BH solutions Berti *et al.* (2013); Okounkova *et al.* (2017). However, many issues remain to be addressed, not least of which the fact that some of these theories may not even possess a well-posed initial value formulation (see Papallo and Reall (2017); Delsate *et al.* (2015) for examples).

Numerical Relativity and GW observations

NR plays an important role in GW astrophysics and data analysis. The semi-analytical waveform models employed to search for BBHs (see Sec. 25.2.6 below) model the complete radiative evolution from the early inspiral, through the merger and to the final ringdown stage, with the later stages calibrated to BBH simulations Khan *et al.* (2016); Bohé *et al.* (2017). These models and more sophisticated ones incorporating more physical effects, for example precession Apostolatos *et al.* (1994); Kidder (1995), are used to determine the fundamental properties of the GW source, i.e. its masses and spin angular momenta as well as extrinsic quantities such as the orbital orientation relative to the observatories Hannam *et al.* (2014); Pan *et al.* (2014).

Alternatively, pure NR waveforms may be used directly Abbott *et al.* (2016n); Lange *et al.* (2017) or by the means of surrogate models Blackman *et al.* (2015, 2017a,b). But due to the computational cost of simulations, these have only been attempted so far on a very restricted portion of the parameter space. Despite this restriction, pure NR surrogate models have the advantage of incorporating more physical effects that may be limited or entirely neglected in currently available semi-analytic models.

The ringdown phase after the merger may be described by perturbation theory (see e.g. Kokkotas and Schmidt (1999) for a review), but the amplitudes of the excited quasi-normal modes can only be obtained from numerical simulations. These are of particular interest as measuring the amplitudes of individual quasinormal modes would allow to map the final state of the merger to the properties of the progenitor BHs Kamaretsos *et al.* (2012a,b)

and to test the BH nature of the source Berti *et al.* (2006) (see also Sections 25.3.4 and 25.3.4).

In order to estimate the mass and spin angular momentum of the remnant BH, fits to NR simulations are essential Barausse and Rezzolla (2009); Hemberger *et al.* (2013); Hofmann *et al.* (2016); Healy and Lousto (2017); Jiménez-Forteza *et al.* (2017); Buonanno *et al.* (2008); Rezzolla *et al.* (2008); Lousto *et al.* (2010); Bernuzzi and Hilditch (2010); Alic *et al.* (2012); Dumbser *et al.* (2018). Independent measurements of the binary properties from the inspiral portion of the GW signal and from the later stages of the binary evolution using fits from NR allow, when combined, to test the predictions from GR Ghosh *et al.* (2016); Abbott *et al.* (2016). While the phenomenological fit formulae have seen much improvement in recent years, modelling the final state of precessing BH binaries from numerical simulations still remains an open challenge.

Generically, when BHs merge, anisotropic emission of GWs leads to the build up of a net linear momentum. Due to the conservation of momentum, once the GW emission subsides, the remnant BH recoils ("kick"). While the recoil builds up during the entire binary evolution, it is largest during the non-linear merger phase. Kick velocities can be as high as several thousands km/s, with astrophysical consequences: a BH whose recoil velocity is larger than the escape velocity of its galaxy may leave its host. Numerical simulations are necessary to predict the recoil velocities Gonzalez *et al.* (2007a,b); Bruegmann *et al.* (2008b); Lousto and Zlochower (2011b) (a convenient surrogate model for these velocities was constructed recently in Gerosa *et al.* (2018)). It has been suggested that it may be possible to directly measure the recoil speed from the GW signal by observing the induced differential Doppler shift throughout the inspiral, merger and ringdown Gerosa and Moore (2016).

Numerical simulations of the strong field regime are also crucial for exploring other spin-related phenomena such as "spin-flips" Lousto *et al.* (2016) caused by spin-spin coupling, whose signatures may be observable. Understanding the spin evolution and correctly modelling spin effects is crucial for mapping out the spin distribution of astrophysical BHs from GW observations.

Waveform models as well as fitting formulae for remnant properties are prone to systematic modelling errors. For GW observations with low SNR, the statistical uncertainty dominates over the systematic modelling error in the parameter measurement accuracy. Improved sensitivities for current and future GW observatories (including, especially, LISA Berti (2006); Cutler and Vallisneri (2007)) will allow for high SNR observations reaching into the regime where systematic errors are accuracy limiting. This includes strongly inclined systems, higher-order modes, eccentricity, precession and kicks, all of which can be modelled more accurately through the inclusion of results from NR (see Abbott *et al.* (2017n) for a detailed discussion in the context of the first BBH observation GW150914).

25.2.5 Numerical relativity in fundamental physics

Contributor: U. Sperhake

The standard model of particle physics and Einstein's theory of GR provide us with an exquisite theoretical framework to understand much of what we observe in the Universe. From high-energy collisions at particle colliders to planetary motion, the GW symphony of NS and BH binaries and the cosmological evolution of the Universe at large, the theoretical models give us remarkably accurate descriptions. And yet, there are gaps in this picture that prompt us to believe that something is wrong or incomplete. Galactic rotation curves, strong gravitational lensing effects, X-ray observations of galactic halos and the cosmic microwave background cannot be explained in terms of the expected gravitational effects of the visible matter Bertone *et al.* (2005a). Either we are prepared to accept the need to modify the laws of gravity, or there exists a form of *dark matter* (DM) that at present we can not explain satisfactorily with the SM (or both). Different DM candidates and their status are reviewed in Section 25.3.5. Likewise, the accelerated expansion of the Universe Kowalski *et al.* (2008) calls for an exotic form of matter dubbed *dark energy* or (mathematically equivalently) the introduction of a cosmological constant with a value many orders of magnitude below the zero-point energy estimated by quantum field theory—the *cosmological constant problem*. Further chinks in the armor of the SM+GR model of the universe include the *hierarchy problem*, i.e. the extreme weakness of gravity relative to the other forces, and the seeming irreconcilability of GR with quantum theory.

Clearly, gravity is at the center of some of the most profound contemporary puzzles in physics. But it has now also given us a new observational handle on these puzzles, in the form of GWs Abbott *et al.* (2016a). Furthermore, the aforementioned 2005 breakthrough in NR Pretorius (2005a); Baker *et al.* (2006a); Campanelli *et al.* (2006a) has given us the tools needed to systematically explore the non-linear strong-field regime of gravity. For much of its history, NR was motivated by the modeling of astrophysical sources of GWs, as we have described in Sec. 25.2.4. As early as 1992, however, Choptuik's milestone discovery of critical behaviour in gravitational collapse Choptuik (1993) has demonstrated the enormous potential of NR as a tool for exploring a much wider range of gravitational phenomena. In this section we review the discoveries made in this field and highlight the key challenges and goals for future work.

Particle laboratories in outer space

DM, by its very definition, generates little if any electromagnetic radiation; rather, it interacts with its environment through gravity. Many DM candidates have been suggested (see also Section 25.3.5), ranging from primordial BH clouds to weakly interacting massive particles (WIMPs) and ultralight bosonic fields Bertone *et al.* (2005a); Feng (2010); Khlopov (2017). The latter are a particularly attractive candidate in the context of BH and GW physics due to their specific interaction with BHs. Ultralight fields, also referred to as weakly interacting slim particles (WISPs), typically have mass parameters orders of magnitude below an electron volt and arise in extensions of the SM of particle physics or extra dimensions in string theory. These include *axions* or axion-like particles, dark photons, non-topological solitons (so-called *Q-balls*) and condensations of bosonic states Bertone *et al.* (2005a); Arvanitaki and Dubovsky (2011); Ackerman *et al.* (2009); Klasen *et al.* (2015). For reference, we note that a mass $10^{-10}\,\mathrm{eV}$ ($10^{-20}\,\mathrm{eV}$) corresponds to a Compton wavelength of $\mathcal{O}(1)\,\mathrm{km}$ ($\mathcal{O}(10^2)\,\mathrm{AU}$) which covers the range of Schwarzschild radii of astrophysical BHs.

At first glance, one might think the interaction between such fundamental fields and BHs is simple; stationary states are constrained by the no-hair theorems and the field either falls into the BH or disperses away. In practice, however, the situation is more complex—and more exciting. NR simulations have illustrated the existence of long-lived, nearly periodic states of single, massive scalar or Proca (i.e. vector) fields around BHs Witek *et al.* (2013); Okawa *et al.* (2014); Zilhão *et al.* (2015). Intriguingly, these configurations are able to extract rotational energy from spinning BHs through *superradiance* Zel'dovich (1971, 1972); Misner (1972); Brito *et al.* (2015a), an effect akin to the Penrose process Penrose and Floyd (1971); Brito *et al.* (2015a). Further details on this process are provided in Section 25.3.5. In the presence of a confining mechanism that prevents the field from escaping to infinity, this may even lead to a runaway instability dubbed the *BH bomb* Press and Teukolsky (1972); Cardoso *et al.* (2004). Another peculiar consequence arising in the same context is the possibility of floating orbits where dissipation of energy through GW emission is compensated by energy gain through superradiance Cardoso *et al.* (2011); Fujita and Cardoso (2017).

Naturally, non-linear effects will limit the growth of the field amplitude or the lifetime of floating orbits, and recent years have seen the first numerical studies to explore the role of non-linearities in superradiance. These simulations have shown that massive, real scalar fields around BHs can become trapped inside a potential barrier outside the horizon, form a bound state and may grow due to superradiance Witek *et al.* (2013). Furthermore, beating phenomena result in a more complex structure in the evolution of the scalar field. These findings were confirmed in Okawa *et al.* (2014), which also demonstrated that the scalar clouds can source GW emission over long timescales. The amplification of GWs through superradiance around a BH spinning close to extremality has been modeled in Ref. East *et al.* (2014) and found to be maximal if the peak frequency of the wave is above the superradiant threshold but close to the dominant quasi-normal mode frequency of the BH. The generation of GW templates for the inspiral and merger of hairy BHs and the identification of possible smoking gun effects distinguishing them from their vacuum counterparts remains a key challenge for future NR simulations.

Numerical studies of the non-linear saturation of superradiance are very challenging due to the long time scales involved. A particularly convenient example of superradiance in spherical symmetry arises through the interaction of charged, massless scalar fields with Reissner-Nordström BHs in asymptotically anti-de Sitter spacetime or in a cavity; here energy is extracted from the BH charge rather than its rotation. The scalar field initially grows in accordance with superradiance, but eventually saturates, leaving behind a stable hairy BH Bosch

et al. (2016); Sanchis-Gual *et al.* (2016). Recently the instability of spinning BHs in AdS backgrounds was studied in full generality Chesler and Lowe (2018). The system displays extremely rich dynamics and it is unclear if there is a stationary final state.

The superradiant growth of a complex, massive vector field around a near-extremal Kerr BH has recently been modeled in axisymmetry East and Pretorius (2017). Over 9 % of the BH mass can be extracted until the process gradually saturates. Massive scalar fields can also pile up at the center of "normal" stars. Due to gravitational cooling, this pile-up does not lead to BH formation but stable configurations composed of the star with a "breathing" scalar field Brito *et al.* (2015b).

The hairy BH configurations considered so far are long-lived but not strictly stationary. A class of genuinely stationary hairy BH spacetimes with scalar or vector fields has been identified in a series of papers Herdeiro and Radu (2014); Brihaye *et al.* (2014); Benone *et al.* (2014); Herdeiro *et al.* (2016); Chodosh and Shlapentokh-Rothman (2017). The main characteristic of these systems is that the scalar field is *not stationary*—thus bypassing the no-hair theorems—but the spacetime metric and energy-momentum are. A subclass of these solutions smoothly interpolates between the Kerr metric and boson stars. A major challenge for numerical explorations is to evaluate whether these solutions are non-linearly stable and might thus be astrophysically viable. A recent study of linearized perturbations around the hairy BH solution of Herdeiro and Radu (2014) has found unstable modes with characteristic growth rates similar to or larger than those of a massive scalar field on a fixed Kerr background. However, such solution may still be of some astrophysical relevance Degollado *et al.* (2018). See also Sec. 25.3.4 of Chapter III for a related discussion.

Boson stars

The idea of stationary localized, soliton-like configurations made up of the type of fundamental fields discussed in the previous section goes back to Wheeler's "gravitational-electromagnetic entities" or *geons* of the 1950s Wheeler (1955). While Wheeler's solutions turn out to be unstable, replacing the electromagnetic field with a complex scalar field leads to "Klein-Gordon geons" first discovered by Kaup Kaup (1968) and now more commonly referred to as *boson stars*. The simplest type of boson stars, i.e. stationary solutions to the Einstein-complex-Klein-Gordon system, is obtained for a non-self-interacting field with harmonic time dependence $\phi \propto e^{i\omega t}$ where the potential contains only a mass term $V(\phi) = m^2|\phi|^2$. The resulting one-parameter family of these so-called *mini boson star* solutions is characterized by the central amplitude of the scalar field and leads to a mass-radius diagram qualitatively similar to that of static NSs; a maximum mass value of $M_{\max} = 0.633\, M^2_{\rm Planck}/m$ separates the stable und unstable branches Jetzer (1992); Mundim (2010); Liebling and Palenzuela (2012). For a particle mass $m = 30\,\mathrm{GeV}$, for instance, one obtains $M_{\max} \sim 10^{10}\,\mathrm{kg}$ with radius $R \sim 6 \times 10^{-18}\, m$ and a density 10^{48} times that of a NS Mielke and Schunck (1997).

A wider range of boson star models is obtained by adding self-interaction terms to the potential $V(\phi)$ which result in more astrophysically relevant bulk properties of the stars. For a quartic term $\lambda|\phi|^4/4$, for example, the maximal mass is given by $M_{\rm Planck}(0.1\,\mathrm{GeV}^2)\, M_\odot\, \lambda^{1/2}/m^2$ Colpi *et al.* (1986); for further types of boson stars with different potential terms see the reviews Mielke and Schunck (1997); Liebling and Palenzuela (2012); Helfer *et al.* (2017) and references therein. A particularly intriguing feature of rotating boson stars exemplifies their macroscopic quantum-like nature: the ratio of angular momentum to the conserved particle number must be of integer value which prevents a continuous transition from rotating to non-rotating configurations Kobayashi *et al.* (1994); Mielke and Schunck (1997). More recently, stationary, soliton-like configurations have also been found for complex, massive Proca fields Brito *et al.* (2016a). For real scalar fields, in contrast, stationary solutions do not exist, but localized, periodically oscillating solutions dubbed *oscillatons* have been identified in Ref. Seidel and Suen (1991).

Boson stars are natural candidates for DM Liebling and Palenzuela (2012), but may also act as BH mimickers Guzman and Rueda-Becerril (2009); Cardoso *et al.* (2016a). In the new era of GW observations, it is vital to understand the GW generation in boson-star binaries and search for specific signatures that may enable us to distinguish them from BH or NS systems. Recent perturbative calculations of the tidal deformation of boson stars demonstrate that the inspiral part of the waveform may allow us to discriminate boson stars, at least with third-generation detectors Sennett *et al.* (2017). Numerical studies of dynamic boson stars have so far mostly focused on the stability properties of single stars and confirmed the stable and unstable nature of

the branches either side of the maximum mass configuration; see e.g. Balakrishna *et al.* (1998); Valdez-Alvarado *et al.* (2013); Collodel *et al.* (2017); Sanchis-Gual *et al.* (2017). The modeling of head-on collisions of boson stars Palenzuela *et al.* (2007); Bezares *et al.* (2017) reveals rich structure in the scalar radiation and that the merger leads to the formation of another boson star. Head-on collisions have also served as a testbed for confirming the validity of the hoop conjecture in high-energy collisions Choptuik and Pretorius (2010). Inspiralling configurations result either in BH formation, dispersion of the scalar field to infinity or non-rotating stars Palenzuela *et al.* (2008, 2017), possibly a consequence of the quantized nature of the angular momentum that makes it difficult to form spinning boson stars instead.

Binary boson star systems thus remain largely uncharted territory, especially regarding the calculation of waveform templates for use in GW data analysis and the quantized nature of spinning boson stars and their potential constraints on forming rotating stars through mergers.

Compact objects in modified theories of gravity

New physical phenomena and the signature of new "modified" theories are typically encountered when probing extreme regimes not accessible to previous experiments and observations. Quantum effects, for instance, become prominent on microscopic scales and their observation led to the formulation of quantum theory while classical physics still provides an accurate description of macroscopic systems. Likewise, Galilean invariance and Newtonian theory accurately describe slow motion and weakly gravitating systems but break down at velocities comparable to the speed of light or in the regime of strong gravity. We therefore expect modifications of GR, if present, to reveal themselves in the study of extreme scales such as the large-scale dynamics of the universe or the strong curvature regime near compact objects.

The dawn of GW observations provides us with unprecedented opportunities to probe such effects. The modeling of compact objects in alternative theories of gravity represents one of the most important challenges for present and future NR studies, so that theoretical predictions can be confronted with observations. This challenge faces additional mathematical, numerical and conceptual challenges as compared to the GR case; a more detailed discussion of these is given in Sec. 25.3.3 below. A convenient way to classify the numerous modified theories of gravity is provided by the assumptions underlying Lovelock's theorem and, more specifically, which of these assumptions are dropped Berti *et al.* (2015). Unfortunately, for most of these candidate theories, well-posed formulations are not known (cf. Table 1 in Berti *et al.* (2015)) or presently available only in the form of a continuous limit to GR or linearization around some background Delsate *et al.* (2015); Okounkova *et al.* (2017). Prominent exceptions are (single- or multi-) scalar-tensor (ST) theories of gravity Fujii and Maeda (2007) which includes Brans-Dicke theory Brans and Dicke (1961) and, through mathematical equivalence, a subset of $f(R)$ theories De Felice and Tsujikawa (2010). ST theories inherit the well-posedness of GR through the Einstein frame formulation Damour and Esposito-Farése (1992); see also Salgado (2006); Salgado *et al.* (2008); Jakubiec and Kijowski (1989). Furthermore, ST physics would present the most conspicuous strong-field deviation from GR discovered so far, the *spontaneous scalarization* of NSs Damour and Esposito-Farèse (1993) (for a similar effect in vector-tensor theory see Ramazanoğlu (2017)). For these reasons, almost all NR studies have focused on this class of theories, even though its parameter space is significantly constrained by solar system tests and binary pulsar observations Bertotti *et al.* (2003).

The structure of equilibrium models of NSs in ST theories has been studied extensively in the literature (e.g. Damour and Esposito-Farèse (1993); Doneva *et al.* (2013); Mendes (2015); Silva *et al.* (2015); Horbatsch *et al.* (2015); Palenzuela and Liebling (2016); Ramazanoğlu and Pretorius (2016); Morisaki and Suyama (2017)) and leads to a mass-radius diagram that contains one branch of GR or GR-like models plus possible additional branches of strongly scalarized stars. The presence or absence of these additional branches depends on the coupling between the scalar and tensor sector of the theory.

Early numerical studies considered the collapse of dust in spherical symmetry Shibata *et al.* (1994); Scheel *et al.* (1995a,b); Harada *et al.* (1997) which leads to a hairless BH in agreement with the no-hair theorems, even though departures from GR are possible during the dynamic stages of the collapse. In a sequence of papers, Novak *et al* studied the collapse of NSs into a BH Novak (1998a), the transition of NSs between stable branches Novak (1998b) and the formation of NSs through gravitational collapse Novak and Ibanez (2000). In all cases, strong scalar radiation is generated for that part of the ST theory's parameter space that admits spontaneously scalarized equilibrium models. In Gerosa *et al.* (2016), the collapse of stellar cores

to BHs was found to be the most promising scenario to generate detectable scalar radiation for parameters allowed by the Cassini and pulsar observations; galactic sources at a distance $D = 10\,\mathrm{kpc}$ may be detected with present and future GW observatories or used to further constrain the theory's parameters. All these simulations, however, consider *massless ST theory*. For massive fields, low frequency interactions decay exponentially with distance, so that the pulsar and Cassini constraints may no longer apply Alsing *et al.* (2012). In consequence, massive ST theory still allows for very strongly scalarized equilibrium stars if $m \gtrsim 10^{-15}\,\mathrm{eV}$ Ramazanoğlu and Pretorius (2016); Morisaki and Suyama (2017). This has dramatic consequences for the GW signals that can be generated in massive ST theory as compared with its massless counterpart: GW amplitudes can be orders of magnitude larger and the waves are spread out into a nearly monochromatic signal over years or even centuries due to the dispersion of the massive field. GW searches may therefore be directed at historic supernovae such as SN1987A and either observe a signal or constrain the theory's parameter space Sperhake *et al.* (2017).

Numerical studies of binary systems in ST theory are rather scarce. The no-hair theorems strongly constrain possible deviations of pure BH spacetimes from GR. They can be bypassed, however, through non-trivial potentials Healy *et al.* (2012) or boundary conditions Berti *et al.* (2013) which leads to scalar wave emission. Nevertheless, NS systems appear to be the more natural candidate to search for imprints of ST theory. Dynamical scalarization has indeed been observed in simulations of the merger of two NSs with initially vanishing scalar charge Barausse *et al.* (2013); Palenzuela *et al.* (2014). Beyond GR and ST theory, we are only aware of one numerical study Okounkova *et al.* (2017), which simulated the evolution of BH binaries in the dynamical Chern-Simons (dCS) theory linearized around GR. LIGO observations may then measure or constrain the dCS length scale to $\lesssim \mathcal{O}(10)\,\mathrm{km}$.

With the dawn of GW astronomy Abbott *et al.* (2016a), the topics discussed so far in this section are becoming important subjects of observational studies with LIGO, Virgo and future GW detectors. These studies are still in an early stage and the generation of precision waveforms for scenarios involving modifications of gravity, fundamental fields or more exotic compact objects will be a key requirement for fully exploiting the scientific potential of this new channel to observing the universe.

The analysis of GW events has so far concentrated on testing the consistency of the observed signals with GR predictions, establishing bounds on phenomenological parametrizations of deviations from GR and obtaining constraints from the propagation of the GW signal. An extended study of GW150914 demonstrated consistency between the merger remnant's mass and spins obtained separately from the low-frequency inspiral and the high-frequency postinspiral signal Abbott *et al.* (2016). The Compton wavelength of the graviton was constrained with a 90 % lower bound of $10^{13}\,\mathrm{km}$ (corresponding to an upper bound for the mass of $\sim 10^{-22}\,\mathrm{eV}$) and parametrizations of violations of GR using high-order PN terms have been constrained; see also Abbott *et al.* (2017e,c). The first NSB observation Abbott *et al.* (2017f), combined with electromagnetic observations, limited the difference between the speed of propagation of GWs and that of light to within -3×10^{-15} and 7×10^{-16} times the speed of light Abbott *et al.* (2017a). Analysis of the polarization of the first triple coincidence detection GW170814 found Bayes' factors of 200 (1000) favoring a purely tensor polarization against purely vector (purely scalar) radiation. In summary, the GW observations have as yet not identified an inconsistency with the predictions of vacuum GR for BBH signals or GR predictions for NS systems.

Chapter III contains detailed discussions on many of the topics raised here, including motivation and brief description of certain broad classes of alternative to GR (Sec. 25.3.2), numerics beyond GR (Sec. 25.3.3), and the nature of compact objects beyond GR (Sec. 25.3.4).

High-energy collisions of black holes

The hierarchy problem of physics consists in the vast discrepancy between the weak coupling scale ($\approx 246\,\mathrm{GeV}$) and the Planck scale $1.31 \times 10^{19}\,\mathrm{GeV}$ or, equivalently, the relative weakness of gravity compared with the other interactions. A possible explanation has been suggested in the form of "large" extra spatial dimensions Antoniadis *et al.* (1998); Arkani-Hamed *et al.* (1998) or extra dimensions with a warp factor Randall and Sundrum (1999a,b). On short lengthscales $\lesssim 10^{-4}\,\mathrm{m}$, gravity is at present poorly constrained by experiment and would, according to these models, be diluted due to the steeper fall off in higher dimensions. All other interactions, on the other hand, would be constrained to a 3+1 dimensional brane and, hence, be unaffected. In these *braneworld* scenarios, the fundamental Planck scale would be much smaller than the four-dimensional value quoted above, possibly as low as $\mathcal{O}(\mathrm{TeV})$ which inspired the name *TeV*

gravity. This fundamental Planck scale determines the energy regime where gravity starts dominating the interaction, leading to the exciting possibility that BHs may be formed in particle collisions at the LHC or in high-energy cosmic rays hitting the atmosphere Banks and Fischler (1999); Dimopoulos and Landsberg (2001); Giddings and Thomas (2002).

The analysis of experimental data employs so-called Monte-Carlo event generators Frost *et al.* (2009) which require as input the cross section for BH formation and the loss of energy and momentum through GW emission. In the ultrarelativistic limit, the particles may be modeled as pointlike or, in GR, as BHs.

In $D = 4$ spacetime dimensions, high-energy collisions of BHs are by now well understood. Head-on collisions near the speed of light radiate about 14 % of the center-of-mass energy M in GWs Sperhake *et al.* (2008b); Healy *et al.* (2016). The impact parameter separating merging from scattering collisions with boost velocity v is $b/M = (2.50 \pm 0.05)/v$ Shibata *et al.* (2008). Grazing collisions exhibit zoom-whirl behaviour Pretorius and Khurana (2007); Sperhake *et al.* (2009) and can radiate up to $\sim 50\,\%$ of the total energy in GWs Sperhake *et al.* (2013). The collision dynamics furthermore become insensitive to the structure of the colliding objects – BHs or matter balls – at high velocities Choptuik and Pretorius (2010); East and Pretorius (2013); Rezzolla and Takami (2013); Sperhake *et al.* (2013, 2016) as expected when kinetic energy dominates the budget. Finally, NR simulations of hyperbolic BH encounters are in good agreement with predictions by the EOB method Damour *et al.* (2014b).

The key challenges are to generalize these results to the higher D scenarios relevant for TeV gravity (there are partial, perturbative results Galtsov *et al.* (2010); Berti *et al.* (2011); Gal'tsov *et al.* (2013)). Considering the symmetries of the collision experiments, it appears plausible to employ rotational symmetry in higher D numerics which is vital to keep the computational costs under control and underlies all NR studies performed so far Pretorius (2005b); Zilhao *et al.* (2010); Yoshino and Shibata (2011a,b); Cook *et al.* (2016). Nonetheless, NR in higher D faces new challenges. The extraction of GWs is more complex, but now tractable either with perturbative methods Kodama and Ishibashi (2003, 2004); Witek *et al.* (2010), using the Landau-Lifshitz pseudotensor Yoshino and Shibata (2009) or projections of the Weyl tensor Godazgar and Reall (2012); Cook and Sperhake (2017). Likewise, initial data can be obtained by generalizing four-dimensional techniques Zilhao *et al.* (2011). Studies performed so far, however, indicate that, for reasons not yet fully understood, obtaining numerically stable evolutions is harder than in $D = 4$ Okawa *et al.* (2011); Cook *et al.* (2017). Results for the scattering threshold are limited to $v \lesssim 0.5\,c$ Okawa *et al.* (2011) and the emission of GWs has only been computed for non-boosted collisions of equal and unequal mass BH binaries Witek *et al.* (2011, 2014); Cook *et al.* (2017). These simulations show a strong suppression of the radiated energy with D beyond its peak value $E_{\rm rad}/M \approx 9 \times 10^{-4}$ at $D = 5$ for equal-mass systems, but reveal more complex behaviour for low mass ratios. A remarkable outcome of BH grazing collisions in $D = 5$ is the possibility of super-Planckian curvature in a region outside the BH horizons Okawa *et al.* (2011).

Fundamental properties of black holes and non-asymptotically flat spacetimes

Recent years have seen a surge of NR applications to non-asymptotically flat spacetimes in the context of the gauge-gravity duality, cosmological settings and for the exploration of fundamental properties of BH spacetimes. We list here a brief selection of some results and open questions; more details can be found in the reviews Sperhake (2013); Cardoso *et al.* (2015).

Cosmic censorship has for a long time been a topic of interest in NR, but to date no generic, regular and asymptotically flat class of initial data are known to result in the formation of naked singularities in four spacetime dimensions. Higher-dimensional BHs, however, have a much richer phenomenology Emparan and Reall (2008), including in particular black rings which may be subject to the Gregory-Laflamme instability Gregory and Laflamme (1993). Thin black rings have indeed been found to cascade to a chain of nearly circular BHs connected by ever thinner segments in finite time Figueras *et al.* (2016) in the same way as infinite black strings Lehner and Pretorius (2010). Similarly, ultraspinning topologically spherical BHs in $D \geq 6$ dimensions are unstable Shibata and Yoshino (2010) and ultimately form ever thinner rings in violation of the weak cosmic censorship conjecture Figueras *et al.* (2017).

We have already mentioned Choptuik's discovery of critical phenomena in the collapse of spherical scalar fields Choptuik (1993). In asymptotically Anti-de Sitter (AdS) spacetimes, the dynamics change through the confining mechanism of the AdS boundary, allowing the scalar field to recollapse again and again until a BH forms Bizon and Rostworowski (2011);

Jalmuzna *et al.* (2011); Buchel *et al.* (2012); Bizoń and Jałmużna (2013); Santos-Oliván and Sopuerta (2016); see also Bantilan *et al.* (2017) for non-spherically symmetric configurations. NR simulations of asymptotically AdS spacetimes are very challenging due to the complex outer boundary conditions, in particular away from spherical symmetry, but recent years have seen the first simulations of BH collisions in AdS Bantilan *et al.* (2012); Bantilan and Romatschke (2015) which, assuming gauge-gravity duality, would imply a far-from hydrodynamic behaviour in heavy-ion collisions during the early time after merger.

Using a cosmological constant with an opposite sign leads to asymptotically de Sitter (dS) spacetimes widely believed to describe the Universe we live in. NR studies in dS have explored the possible impact of local structures on the cosmological expansion Bentivegna and Korzynski (2012); Yoo *et al.* (2013); Yoo and Okawa (2014); Bentivegna and Bruni (2016); Mertens *et al.* (2016) and found such inhomogeneities to not significantly affect the global expansion. Further work has explored the robustness of inflation under inhomogeneities Clough *et al.* (2017), the propagation of light in an expanding universe Bentivegna *et al.* (2017) and the impact of extreme values of the cosmological constant on the physics of BH collisions Zilhao *et al.* (2012).

25.2.6 Effective-One-Body and Phenomenological models

Contributor: T. Hinderer

This section surveys the status of two main classes of models that are currently used in GW data analysis: (i) the EOB approach, which describes both the dynamics and waveforms in the time domain for generic spinning binaries, and (ii) the phenomenological approach (Phenom), which provides a closed-form description of the waveform in the frequency domain and includes the dominant spin effects. The discussion below reviews mainly the current state-of-the-art models; a more comprehensive overview of prior work can be found in review articles such as Refs. Buonanno and Sathyaprakash (2015); Hannam (2014); Damour (2008).

Effective-one-body models

The EOB approach was introduced in Buonanno and Damour (1999, 2000) as a method to combine information from the test-particle limit with PN results (for early ideas in this spirit, see Ref.Maheshwari *et al.* (1981)). The model comprises a Hamiltonian for the inspiral dynamics, a prescription for computing the GWs and corresponding radiation reaction forces, and a smooth transition to the ringdown signals from a perturbed final BH. The idea is to map the conservative dynamics of the relative motion of two bodies, with masses $m_{1,2}$, spins $\boldsymbol{S}_{1,2}$, orbital separation $\boldsymbol{x}$ and relative momentum $\boldsymbol{p}$, onto an auxiliary Hamiltonian description of an effective particle of mass $\mu = m_1\, m_2/(m_1+m_2)$ and effective spin $\boldsymbol{S}_*(\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ moving in an effective spacetime $g^{\rm eff}_{\mu\nu}(M, \boldsymbol{S}_{\rm Kerr}; \nu)$ that is characterized by the total mass $M = m_1 + m_2$, symmetric mass ratio $\nu = \mu/M$, and total spin $\boldsymbol{S}_{\rm Kerr}(\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2)$. The basic requirements on this mapping are that (i) the test-particle limit reduces to a particle in Kerr spacetime, and (ii) in the weak-field, slow-motion limit the EOB Hamiltonian reduces to the PN Hamiltonian, up to canonical transformations. These considerations, together with insights from results in quantum-electrodynamics Brezin *et al.* (1970), scattering theory Damour (2016); Vines (2018), and explicit comparisons of the action variables Buonanno and Damour (1999) all lead to the "energy map" given by

$$H = M\sqrt{1 + 2\nu\left(\frac{H_{\rm eff}}{\mu} - 1\right)}, \tag{25.11}$$

where H and $H_{\rm eff}$ are the Hamiltonians describing the physical binary system and the effective particle respectively.

The details of the effective Hamiltonian $H_{\rm eff}$ are less constrained by theoretical considerations, and different descriptions have been proposed that differ in the structure of the Hamiltonian, the form of the potentials characterizing the effective spacetime, and the spin mapping between the physical and effective systems. The differences between these choices reflect current limitations of theoretical knowledge; they all agree in the PN and nonspinning test-particle limit. For the structure of $H_{\rm eff}$, the incarnation of the EOB model of Refs. Barausse *et al.* (2009); Barausse and Buonanno (2010, 2011); Taracchini *et al.* (2014); Bohé *et al.* (2017) imposes that the limiting case of a spinning test-particle in Kerr spacetime must be recovered, to linear order in the test-spin. The version of the model of Refs. Damour (2001); Damour *et al.* (2008); Nagar

(2011); Balmelli and Jetzer (2015); Damour and Nagar (2014a) does not include test-particle spin effects, which enables a more compact description. These different choices also result in different spin mappings, for both the Kerr parameter and the spin of the effective particle. Finally, these two branches of EOB models also employ different ways to re-write the potentials that are calculated as a Taylor series in a PN expansion in a "re-summed" form. This means that an empirically motivated non-analytic representation is used that consists either of a Pade-resummation Damour (2001); Damour *et al.* (2008); Nagar (2011) or has a logarithmic form Barausse and Buonanno (2010, 2011). In addition to the above choices for describing the strong-field, comparable-mass regime, the models also include parameterized terms whose coefficients are functions of the mass and spin parameters that are fixed by comparisons to NR results. In the model of Ref. Barausse and Buonanno (2010, 2011); Taracchini *et al.* (2014); Bohé *et al.* (2017), these calibration parameters are constrained by the requirement that the model must reproduce the GSF results for the ISCO shift in Schwarzschild Barack and Sago (2009).

The radiative sector in the EOB model is described by so-called factorized waveforms (instead of a PN Taylor series expansion) that are motivated from the structure of waveforms in the test-particle limit and have the form Damour and Nagar (2007); Damour *et al.* (2009)

$$h_{\ell m}^{\rm insp-plunge}(t) = h_{\ell m}^{(N,\epsilon)}\, \hat{S}_{\rm eff}^{(\epsilon)}\, T_{\ell m}\, e^{i\delta_{\ell m}}\, f_{\ell m}\, N_{\ell m}\,. \tag{25.12}$$

Here, $h_{\ell m}^{(N,\epsilon)}$ is the Newtonian contribution, and $\hat{S}_{\rm eff}^{(\epsilon)}$ is a certain effective "source term" that, depending on the parity ϵ of the mode, is related to either the energy or the angular momentum. The factor $T_{\ell m}$ contains the leading order logarithms arising from tail effects, the term $e^{i\delta_{\ell m}}$ is a phase correction due to sub-leading order logarithms in hereditary contributions, while the function $f_{\ell m}$ collects the remaining PN terms. Finally, the factor $N_{\ell m}$ is a phenomenological correction that accounts for deviations from quasi-circular motion Damour *et al.* (2003) and is calibrated to NR results. The modes from Eq. (25.12) are used to construct dissipative forces $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, in terms of which the equations of motion are given by

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\,, \qquad \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\mathcal{F}}\,, \tag{25.13}$$

$$\frac{d\boldsymbol{S}_{1,2}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{S}_{1,2}} \times \boldsymbol{S}_{1,2}. \tag{25.14}$$

This EOB description of the inspiral-plunge dynamics is smoothly connected to the merger-ringdown signal in the vicinity of the peak in the amplitude $|h_{22}|$. To perform this matching, initial nonspinning models and the aligned-spin models SEOBNRv1 Barausse and Buonanno (2011) and SEOBNRv2 Taracchini *et al.* (2014, 2012) (as well as in the models of the IHES group Damour *et al.* (2013); Damour (2001)) used a superposition of damped sinusoids similar to quasi-normal modes Buonanno and Damour (2000). This method is inspired by results for the infall of a test-particle into a BH and the close-limit approximation Price and Pullin (1994). More recently, a simpler phenomenological fit of the amplitude and phase inspired by the rotating source approximation Baker *et al.* (2008), which was adapted to the EOB context in Damour and Nagar (2014b), has become standard in SEOBNRv4 Bohé *et al.* (2017). This method provides a more stable and controlled way to connect the inspiral-plunge to the ringdown. A further key input into the merger-ringdown model is the frequency of the least-damped quadrupolar quasinormal mode σ_{220} of the remnant based on a fitting formula from NR for the mass and spin of the final object given the initial parameters, with the currently most up-to-date fit from Bohé *et al.* (2017).

Generic spin precession effects are also included in the model, by starting from a calibrated spin-aligned model and transforming to the precessing frame as dictated by the precession equations derived from the EOB Hamiltonian Pan *et al.* (2011a); Babak *et al.* (2017b), without further calibrations. The most recent refinement for generic precessing binaries from Ref. Babak *et al.* (2017b) is known as SEOBNRv3.

For non-vacuum binaries involving e.g. neutron stars, exotic compact objects, or condensates of fundamental fields around BHs, several effects of matter change the GWs from the inspiral relative to those from a BH binary, as described in Chapter III, Sec. 4.4, where also the signatures from such systems generated during the merger and ringdown are covered. Effects during the inspiral include spin-induced deformations of the objects, tidal effects, the

presence of a surface instead of an event horizon, tidal excitation of internal oscillation modes of the objects, and more complex spin-tidal couplings. Two classes of EOB models for such systems are currently available, corresponding to the two different baseline EOB models for BHs. One is known as TEOBRESUMS Nagar *et al.* (2018) and incorporates the effects of rotational deformation and adiabatic tidal effects Damour and Nagar (2010); Bini *et al.* (2012) in re-summed form that was inspired by Bini and Damour (2014a) and augmented as described in Bernuzzi *et al.* (2015). The other model is known as SEOBNRv4T and includes the spin-induced quadrupole as well as dynamical tides from the objects' fundamental oscillation modes Steinhoff *et al.* (2016); Hinderer *et al.* (2016).

Phenomenological (Phenom) models

The aim of the Phenom models is to provide a simple, efficient, closed-form expression for the GW signal in the frequency domain Ajith *et al.* (2007) by assuming the schematic form

$$\tilde{h}_{\rm phen}(f;\vec{\alpha};\vec{\beta}) := A(f;\vec{\alpha})e^{i\Psi(f;\vec{\beta})}, \tag{25.15}$$

where $\vec{\alpha}$ and $\vec{\beta}$ are amplitude and phase parameters in the model. Phenomenological ("Phenom") models were first developed for nonspinning binaries in Refs. Ajith *et al.* (2007, 2008) and subsequently refined to include aligned spins Ajith *et al.* (2011) known as "PhenomB". This model employed only a single weighted combination of the individual BH spins characterizing the dominant spin effect in the GWs, and was further refined in Santamaria *et al.* (2010) ("PhenomC"), and in Khan *et al.* (2016); Husa *et al.* (2016) ("PhenomD"). The latter has been calibrated using NR data for mass ratios up to 1:18 and dimensionless spins up to 0.85 (with a larger spin range for equal masses). An effective description of the dominant precession effects has also been developed Hannam *et al.* (2014) ("PhenomP") Schmidt *et al.* (2012, 2015). The PhenomP model provides an approximate mapping for obtaining a precessing waveform from any non-precessing model, with PhenomD being currently used as the baseline.

To construct these state-of-the-art Phenom models, the GW signal is divided into three main regimes: an inspiral, intermediate region, and merger-ringdown. The ansatz for the inspiral model is the PN result for the frequency-domain phasing obtained from energy balance in the stationary phase approximation ("TaylorF2"), accurate to 3.5PN in the nonspinning and linear-in-spin sector, and to 2PN in spin-spin terms. This has the form

$$\Psi_{\rm TF2} = 2\pi f t_c - \phi_c - \pi/4 + \frac{3}{128\nu}(\pi M f)^{-5/3}\sum_{i=0}^{7} c_i (\pi M f)^{i/3}, \tag{25.16}$$

where c_i are PN coefficients. The Phenom models add to this auxiliary terms so that the inspiral phase becomes

$$\Psi = \Psi_{\rm TF2} + \frac{1}{\nu}\sum_{i=0}^{6}\sigma_i f^{i/3}, \tag{25.17}$$

where σ_i are phenomenological coefficient with $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$.

A different ansatz is made for the late inspiral and merger-ringdown signals that are likewise closed-form expressions involving the frequency and phenomenological parameters; in total the model involves 17 phenomenological parameters. For the late inspiral portion, these are mapped to the set of two physical parameters $(\nu, \chi_{\rm PN})$, where $\chi_{\rm PN}$ is defined by

$$\chi_{\rm PN} = \chi_{\rm eff} - \frac{38\nu}{113}(\chi_1 + \chi_2)\,, \tag{25.18}$$

$$\chi_{\rm eff} = \frac{m_1}{M}\vec{\chi}_1\cdot\hat{L}_N + \frac{m_2}{M}\vec{\chi}_2\cdot\hat{L}_N\,, \tag{25.19}$$

where $\hat{L}_N$ is the direction of the Newtonian angular momentum and $\chi_i = S_i/m_i^2$. $\chi_{\rm PN}$ describes the dominant spin effect (the dependence on M is only a rescaling). The mapping is done by assuming a polynomial dependence $\sigma_i = \sum b_{ijk}\nu^j\chi_{\rm eff}^k$ to quadratic order in ν and third order in $\chi_{\rm PN}$ so that the coefficients vary smoothly across the parameter space. Finally, the

coefficients are calibrated to a large set of hybrid waveforms, which themselves are formed using the uncalibrated SEOBNRv2 model.

Spin effects in the Phenom models are described by several different combinations of parameters. In the aligned-spin baseline model, the description of the early inspiral depends on both spin parameters χ_1, χ_2 from PN. In the later inspiral regime, spin effects are described by the effective combination $\chi_{\rm PN}$ described above, while the merger-ringdown model is expressed in terms of the total spin. For generic spin orientations, an additional parameter χ_p that characterized the most readily measurable effects of precession is included in the model. The defnition of the precessional parameter χ_p is motivated by the observation that waveforms are simpler in the coprecessing frame that is aligned with the direction of the dominant radiation emission Schmidt *et al.* (2011); it is given by Schmidt *et al.* (2015)

$$\chi_p = \frac{1}{B_1 m_1^2} \max(B_1 S_{1\perp}, B_2 S_{2\perp}), \tag{25.20}$$

where $B_1 = 2 + 3m_2/(2m_1)$ and $B_2 = 2 + 3m_1/(2m_2)$ assuming the convention $m_1 > m_2$. Starting from an aligned-spin frequency-domain waveform model, an approximate precessing waveform is constructed by "twisting up" the non-precessing waveform with the precessional motion based on a single-spin PN description for the precession angles Schmidt *et al.* (2012); Hannam *et al.* (2014). While there are some broad similarities of PhenomP with the way the precessing EOB model is constructed, the two approaches differ in several details, as explained in Sec. IV of Ref. Babak *et al.* (2017b).

For non-BH objects, the effects of rotational and tidal deformations are included in the phasing using either PN information Krishnendu *et al.* (2017); Vines *et al.* (2011); Damour *et al.* (2012) or, for the case of binary neutron stars, using a model calibrated to NR Dietrich *et al.* (2017, 2018).

Remaining challenges

Important advances that all EOB and Phenom models aim to address in the near-future are higher modes, parameter space coverage (especially in the mass ratio) and inclusion of all available theoretical knowledge, reduction of systematic errors, and going beyond circular orbits.

To date, most of the effort in calibrating the EOB and Phenom models has focused on the $(2, 2)$ mode, although for the special case of nonspinning binaries an EOB multipolar approximant is available Pan *et al.* (2011b). An accurate model of higher modes is important for robust data analysis, especially for spinning binaries. Work is ongoing to address this within the EOB model Cotesta *et al.* (2018) and with studies that will inform the Phenom approach Calderon Bustillo *et al.* (2015). The parameter space over which current models have been calibrated and tested is limited by available NR simulations of sufficient accuracy and length (see Sec. 25.2.4), and systematic uncertainties remain a concern.

Extending the range in parameter space ties into the pressing issue that many available results from GSF calculations are not currently incorporated in these models. One of the obstacles is that GSF data for circular orbits only make sense above the "light ring" radius and cannot directly inform the EOB model across and below that radius. This issue is a further subject of ongoing work. Efforts are also underway to include effects of eccentricity Huerta *et al.* (2017); Hinder *et al.* (2017); Hinderer and Babak (2017). Effects such as the motion of the center-of-mass, BH radiation absorption, and radiation reaction for spins are also not yet included in current models.

For EOB models, efficiency for data analysis is a further concern, because computing EOB waveforms is relatively time-consuming. To overcome this issue, reduced-order models for EOB waveforms in the frequency domain have been developed for aligned-spin binaries Puerrer (2016); Bohé *et al.* (2017), with work being underway on the larger parameter space of precessing binaries. Also ongoing is work on theoretical aspects of spin effects in the EOB model, aimed at devising an improved description that is more robust and computationally efficient.

Tests of GR with EOB and Phenom models

The effective models described above have been used for tests of GR and exotic objects, e.g. in Abbott *et al.* (2016). One of the parameterized tests makes use of the general framework

"TIGER" Agathos *et al.* (2014) that has been implemented for data analysis, where parameterized fractional deviations from the GR coefficients are included in the frequency-domain phase evolution from Eq. (25.16). In recent studies, e.g. Abbott *et al.* (2016, 2017c), this framework was used on top of the PhenomD inspiral model Khan *et al.* (2016); Husa *et al.* (2016) to obtain bounds on non-GR effects, where the tests also included parameterized deviations in the intermediate and merger-ringdown regime. Work is ongoing to implement tests of GR within the EOB approach Brito *et al.* (2018). Finally, work is also underway to include in these models the option to test for exotic physics manifest in spin-quadrupole and tidal effects during the inspiral. Despite this recent progress on frameworks to test GR and the nature of BHs, substantial further work will be necessary to refine the level of sophistication and physical realism of such tests.

25.2.7 Source modelling and the data-analysis challenge

Contributor: J. R. Gair

Models of GW sources form an essential component of data analysis for GW detectors. Indeed, many of the scientific objectives of current and future GW detectors cannot be realised without having readily available accurate waveform models. In this section we first provide a brief overview of the primary techniques used for GW data analysis, and follow this with a discussion of the additional challenges that data analysis for future GW detectors will pose and the corresponding requirements that this will place on waveform models.

Overview of current data analysis methods

The LIGO-Virgo Collaboration (LVC) uses a variety of techniques to first identify and then characterise GW transients identified in their data. The majority of these make use of signal models in some way. We briefly describe these methods in the following.

Unmodelled searches

A number of LVC analysis pipelines are targeted towards "burst" sources for which the waveforms are not well modelled. These included Coherent Wave Burst Klimenko *et al.* (2008), X-pipeline Sutton *et al.* (2010); Was *et al.* (2012) and BayesWave Cornish and Littenberg (2015). All three algorithms make use of the fact that there are multiple detectors in the LVC network, which allows signals (common between different detectors) to be distinguished from noise (generally uncorrelated between detectors). The algorithms differ in their implementation. Coherent Wave Burst and X-pipeline operate on spectrograms (time-frequency) maps of the data, computed using wavelet transforms in the first case and a Fourier transform in the second. Both algorithms then identify "hot" pixels that have particularly large power, carry out clustering to identify candidate events, i.e., continuous tracks of excess power, in individual detectors, and then impose consistency in the properties of the tracks identified in the different detectors. BayesWave takes a slightly different approach, using Bayesian techniques to construct a model for the noise in each detector and any signal present. The signal is constructed as a superposition of wavelets, and reversible jump Markov Chain Monte Carlo is used to add or remove components from the signal and noise models.

These model-free searches are powerful tools for source identification. Indeed, the first algorithm to find GW150914, the first GW event detected by LIGO, was the Coherent Wave Burst Abbott *et al.* (2016a,m), because it was the only online search pipeline running at the time of the event. However, these algorithms are not as sensitive as searches based on models and the second clear GW event, GW151226, was only found with high significance by the template-based searches Abbott *et al.* (2016b). In addition, parameter estimation can only be done using models. Moreover, of the three algorithms, only BayesWave is truly independent of waveform models. Both Coherent Wave Burst and X-pipeline uses signal injections in order to determine the optimal choice of the various tunable thresholds in the algorithms that maximizes distinction between signal and noise. The injections use realistic GW signal waveforms, for which models are needed. BayesWave does not do tuning in this way, although the development of that algorithm and demonstration of its performance was done using signal injections.

Template based searches

The primary search pipelines within the LVC Compact Binary Coalescence (CBC) group use matched filtering. This involves using a precomputed bank of templates of possible GW signals and computing their overlap, i.e., inner product, with the data. The template bank needs to fully cover the parameter space so that if a signal is present, at least one of the templates will recover it confidently. There are two primary matched filtering based searches used by the LVC — pyCBC Dal Canton *et al.* (2014); Usman *et al.* (2016) and gstLAL Cannon *et al.* (2012); Privitera *et al.* (2014). The two searches differ in a number of ways, such as the choice of template bank and placement, and in the various consistency checks that are used to compare the signals identified in the different detectors and to compare the post-signal extraction residual to the expected noise distribution. We refer the interested reader to the previous references for more details. All the BBH systems identified by LIGO to date were found by both of these pipelines with very high significance, and several of them would not have been identified using template-free methods only. Matched filtering is only possible if models of GW signals are available that have sufficient fidelity to true signals.

Parameter estimation

The other primary area where GW signal models are essential is in parameter estimation. Once a potential signal has been identified by one of the search pipelines described above, the signal is characterized using the separate LALInference pipeline Veitch *et al.* (2015) (though other parameter inference methods are also used Pankow *et al.* (2015); Lange *et al.* (2018)). LALInference constructs a posterior probability distribution for the source parameters using Bayes theorem. This relies on a model for the likelihood which is taken to be the likelihood of the noise (assumed Gaussian on the short stretches of data around each signal). The noise is computed as observed data minus signal, and is therefore a function of the signal parameters and requires an accurate model of potential signals. LALInference includes two different algorithms — LALInferenceNest Veitch and Vecchio (2010) and LALInferenceMCMC van der Sluys *et al.* (2008). The first uses nested sampling to determine the posterior and associated model evidence, while the latter uses Markov Chain Monte Carlo techniques based on the Metropolis-Hastings algorithm.

Parameter estimation is essential to extract physical information from identified GW events, and the resulting posterior distributions summarise all our information about the properties of the source. Any physical effect that we wish to probe using GW observations must be included in the signal model used in parameter estimation. The recent NSB event observed by LIGO, GW170817 Abbott *et al.* (2017f), showed some evidence for tidal effects in the signal, which highlighted deficiencies in signal models with tides and the need for further work in that area Abbott *et al.* (2018d).

Challenges posed by future detectors

The next LIGO-Virgo observing run, O3, is scheduled to start in early 2019, and is expected to have a factor of ~ 2 improvement in sensitivity over the O2 run that finished in August 2017. LIGO/Virgo are expected to complete their first science runs at design sensitivity in the early 2020s Abbott *et al.* (2018a). Based on the earlier science runs, several tens of BBH systems and a small number of NSB events Abbott *et al.* (2016g, 2017f) are likely to be detected in O3. These events will be similar to sources previously identified and so the primary challenge will be computational — the LVC will need the capability to process multiple events simultaneously, which implies a need for accurate waveform models that are as fast to generate as possible. Further in the future there are plans for third generation ground based detectors, such as the Einstein Telescope Sathyaprakash *et al.* (2012) and Cosmic Explorer Abbott *et al.* (2017j), and a space-based GW detector, the Laser Interferometer Space Antenna (LISA) Amaro-Seoane *et al.* (2017). These new detectors will observe new types of source which will pose new modelling challenges.

Third-generation ground-based detectors

Planned third-generation ground-based detectors, like the Einstein Telescope (ET) Sathyaprakash *et al.* (2012) or the Cosmic Explorer Abbott *et al.* (2017j), aim to improve on advanced detectors in two ways. Firstly, they aim to have an increase in sensitivity by an order of magnitude. Secondly, they aim to improve low-frequency sensitivity, with the ultimate goal of sensitivity as low as 1Hz, compared to $\sim$ 30Hz for the LIGO/Virgo detectors in O2, and 10Hz at design sensitivity. For the ET, these aims will be achieved by increasing the arm-length to 10km, sitting the detector underground and using cryogenic cooling of the mirrors. ET will also have three arms in a triangular configuration, so that it is equivalent to having two detectors at the same site.

The increase in sensitivity will increase the number of sources detected by about a factor of a thousand. Data analysis must be able to keep pace with such a high source volume, which means algorithms must run quickly. This places constraints on the computational cost of waveform models, which is discussed further below. The improvement in low frequency sensitivity significantly increases the duration of any given signal in band. At leading order, the time to coalescence of a binary scales like $f^{-8/3}$ Peters (1964). The NSB event GW170817 was in the LIGO band for $40s$, starting from 30Hz, and generated 3000 waveform cycles Abbott *et al.* (2017f). For a detector with low frequency cut-off at 3Hz, the same source would be in band for $\sim$ 5h and generate $\sim 10^5$ cycles. This longer duration places more stringent requirements on waveform models, since fractional errors in the waveforms will need to be small enough that the templates are accurate to within 1 cycle of the 10^5 in band. This is mitigated partially by the fact that most of the additional cycles are generated in the weak field where analytic models are well understood.

Third-generation detectors also offer the prospect of detection of new classes of sources. These include higher-mass BH systems, made possible by the improved low-frequency sensitivity Sathyaprakash *et al.* (2012), and possibly intermediate mass ratio inspirals (the inspirals of stellar origin BHs into intermediate mass BHs with mass $\sim 100M_\odot$) Brown *et al.* (2007); Gair *et al.* (2011b). The former do not pose additional modelling challenges, as these signals will be well represented by rescaling templates for lower mass systems. The latter, however, lie in a regime where both finite mass-ratio effects and higher-order PN effects become important. The latter require numerical techniques, but these are limited in terms of the number of cycles that can be modelled, while the former requires perturbative techniques, but are then limited by the size of mass ratio corrections. Any IMRIs observed are likely to be at very low SNR and so will only be identifiable in the data if accurate templates are available. Initial attempts to construct hybrid IMRI models have been made Huerta and Gair (2011a,b); Huerta *et al.* (2012a,b), but considerable work is still required.

It is also hoped that it will be possible to test GR to high precision with third-generation ground-based detectors Sathyaprakash *et al.* (2012). This requires development of models in alternative theories. This challenge is common to space-based detectors and is discussed further in the next section.

The Laser Interferometer Space Antenna

LISA is a space-based GW detector that has been selected as the third large mission that ESA will launch in its current programme, with a provisional launch date of 2034. LISA will comprise three satellites, arranged in an approximately equilateral triangular formation with 2.5Mkm long arms and with laser links passing in both directions along each arm. By precisely measuring the phase of the outgoing and incoming laser light in each arm LISA can do interferometry and detect GWs. It will operate at lower frequency than the LIGO/Virgo detectors, in the range 0.1mHz–0.1Hz, with peak sensitivity around a few mHz. The lower frequency sensitivity means that the typical systems that LISA will observe have higher mass, $M \sim 10^4$–$10^7 M_\odot$. Such massive BHs (MBHs) are observed to reside in the centres of lower mass galaxies. LISA is expected to observe mergers of binaries comprised of two such MBHs, which are expected to occur following mergers between the BH host galaxies. MBHs are typically surrounded by clusters of stars, which include BHs similar to those observed by LIGO that were formed as the endpoint of stellar evolution. LISA is also expected to observe the EMRIs of such stellar origin BHs into MBHs. In addition to these MBH sources, LISA will also observe stellar compact binaries in the Milky Way, it could detect some of the stellar origin BH binaries

that LIGO will observe and may detect sources of cosmological origin Amaro-Seoane *et al.* (2017). The latter sources do not pose particular modelling challenges, but the BH sources do.

In contrast to the LIGO-Virgo network, there will be only one LISA constellation. While the three LISA arms allow, in principle, the construction of two independent data streams, there will inevitably be some correlation between noise in these channels. In addition, LISA sources are long-lived, lasting months or years in the data set, and so there will be hundreds of sources overlapping in the data. These properties make it much more difficult to construct unmodelled source pipelines like those used in LIGO and so LISA will rely even more heavily on having models of potential signals in order to identify them in the data. Typical MBH binary signals will have SNR in the tens to hundreds, with a few as high as a thousand. This allows much more precise estimates of parameters, but places much higher demands on the fidelity of waveform models. A template accurate to a few percent is fine for characterising a source that has SNR of a few tens as is typical for LIGO/Virgo, but for an SNR of one thousand, the residual after extracting that source will have SNR in the several tens, biasing parameter estimation and contaminating the extraction of subsequent sources. Templates need to be two orders of magnitude more accurate for use in LISA. This accuracy comes coupled to the need for longer duration templates, as for the third-generation ground based detectors, since the signals are present in the data stream for months. MBH binaries detected by LISA are additionally expected to have high spins Barausse (2012), in contrast to the observed LIGO/Virgo sources which are all consistent with low or zero spin Abbott *et al.* (2016c, 2017c,c,e); Wysocki *et al.* (2018a,b). Finally, MBH binaries are more likely to show precession. The likely presence of these physical effects in observed signals, coupled with the necessity of model-based searches for LISA places strong requirements on the MBH binary waveform models that must be available by the time LISA flies.

For EMRIs, expected SNRs are in the tens Babak *et al.* (2017); Berry *et al.* (2016), but this SNR is accumulated over $\sim 10^5$ cycles. This makes unmodelled EMRI searches impossible and imposes the requirement on modelled searches that the EMRI templates match the true signals to better than one cycle over 10^5. In addition, all of these cycles are generated in the strong-field where accurate modelling of the signals is more challenging. This drives the requirement for GSF EMRI models accurate to second order in the mass ratio described above. These models must include the effect of high spin in the central MBH, and eccentricity and inclination of the orbit of the smaller BH Amaro-Seoane *et al.* (2007); Amaro-Seoane (2018). EMRI models will also have to be computationally efficient. Naively, to match 10^5 cycles in a parameter space with 8 intrinsic (and 6 extrinsic) parameters, requires $(10^5)^8 \sim 10^{40}$ templates. This is a crude overestimate, but illustrates the complexity of a template-based EMRI search, and the need to be able to generate large numbers of templates in a small computational time. Semi-coherent methods have been proposed Gair *et al.* (2004) that have less stringent requirements, but still need templates accurate for 10^3 or more cycles.

Finally, one of LISA's primary science objectives is to carry out high precision tests of GR, including both tests of strong-field gravity and tests of the nature of compact objects by using EMRIs to probe the gravitational field structure in the vicinity of BHs. Many different tests have been proposed and we refer the reader to Gair *et al.* (2013) for a comprehensive review. Several methods exist for phenomenological tests, which assess consistency of the observed signal with the predictions of GR. However, understanding the significance of any constraints that LISA places, and interpreting any deviations that are identified requires models for deviations from the predictions of GR in alternate theories. We require strong-field predictions, most likely relying on numerical simulations, to compare to the merger signals from MBH binaries, which will be observable with high significance. We also require predictions for the sorts of deviations that might be present in the inspiral phase of EMRIs. The latter need to be accurate to a part in 10^5 and must allow for confusion between gravitational effects and effects of astrophysical origin, e.g., the presence of matter in the system, perturbations from distant objects, etc.

Computationally efficient models

As described above, a significant obstacle to data analysis for future detectors is computational. In order to analyse a large number of potential signals and search large parameter spaces, we require models that capture all the main physics reliably but can be evaluated rapidly. We describe the current status and outstanding challenges here.

Reduced-order models

In the context of LIGO/Virgo, interest in developing computationally efficient representations of waveform models arose due to the high cost of parameter estimation algorithms Veitch *et al.* (2015). This led to the development of reduced-order or surrogate models. The gstLAL search algorithm Cannon *et al.* (2012); Privitera *et al.* (2014) uses a singular-value decomposition (SVD) of the signal and noise parameter spaces to efficiently identify candidate signals. However, for parameter estimation we also need to quickly map such a representation onto physical parameters. One approach is to take Fourier representations of gravitational waveforms, construct an SVD of both of these and finally construct a fit to the dependence of the SVD coefficients on source parameters Pürrer (2014); Puerrer (2016). An alternative approach is to find a reduced-order representation of the waveform parameter space. A set of templates covering the whole parameter space is constructed and then waveforms are added sequentially to the reduced-basis set using a greedy algorithm. At each stage the template that is least well represented by the current reduced basis is added to the set Field *et al.* (2011, 2012). This procedure is terminated once the representation error of the basis is below a specified threshold, and typically the number of templates in the final basis is one or more orders of magnitude less than the size of the original set. Representing an arbitrary template with the basis is then achieved by requiring the basis representation to match the waveform at a specific set of points, i.e., interpolation rather than projection. These points are chosen by another greedy algorithm — picking the points at which the difference between the next basis waveform and its interpolation on the current basis is biggest. This method of representation then allows the likelihood of the data to be written as a quadrature rule sum over the values of the desired waveform at the interpolation points Canizares *et al.* (2013). This is typically a far smaller number of points than the original time series and so is much cheaper to evaluate than the full waveform. For numerical waveforms an additional step is needed in which the values of the waveform at the desired points is interpolated across parameter space Field *et al.* (2014).

The first GW application of this reduced-order quadrature method used a simple sine-Gaussian burst model Canizares *et al.* (2013) and the first implementation within the LIGO/Virgo analysis infrastructure was for a NS waveform model Canizares *et al.* (2015). Reduced-order models and associated quadrature rules have subsequently been developed for a number of other waveform models, including NR simulations for higher mass BH binaries Blackman *et al.* (2015, 2017a,b) and phenomenological inspiral-merger-ringdown waveform models Smith *et al.* (2016). Parameter estimation for GW170817 Abbott *et al.* (2017f) would arguably not have been possible within the timescale on which that paper was written if the reduced order model waveform had not been available.

Some of the existing reduced-order models and reduced-order quadratures will be useful for analysis of data from future detectors. However, the increased duration of signals will typically increase the size of the reduced basis and so work will be needed to optimize the models. In addition, new types of waveform models including higher spins, lower mass ratios or eccentricities do not yet have available reduced-order models, and so these will have to be developed for application to LISA searches for massive BHs and EMRIs. It is possible that some eventual advanced phenomenological models may on their own provide a competitive alternative to Reduced-order models.

Kludges

To model EMRIs, "kludge" models have been developed that capture the main qualitative features of true inspiral signals. There are two main kludge approaches. The analytic kludge (AK Barack and Cutler (2004)) starts from GW emission from Keplerian orbits, as described by Peters and Mathews (1963); Peters (1964), and then adds various strong-field effects on top—evolution of the orbit through GW emission, perihelion precession and orbital-plane precession. The model is semi-analytic and hence cheap to generate, which means it has been used extensively to scope out LISA data analysis Gair *et al.* (2004); Arnaud *et al.* (2007); Babak *et al.* (2008). However, it rapidly dephases from true EMRI signals. Versions of the AK that include deviations from GR arising from an excess quadrupole moment Barack and Cutler (2007) and generic changes in the spacetime structure Gair and Yunes (2011) have also been developed. The numerical kludge model (NK) is built around Kerr geodesic trajectories, with the parameters of the geodesic evolved as the object inspirals, using a combination of PN results and fits to perturbative computations Gair and Glampedakis (2006). A waveform

is generated from the trajectory by identifying the Boyer-Lindquist coordinates in the Kerr spacetime with spherical polar coordinates and using a flat-space GW emission formula Babak *et al.* (2007). The NK model is quite accurate when compared to trajectories computed using BH perturbation theory Babak *et al.* (2007). Versions of the NK model including conservative GSF corrections have also been developed Huerta and Gair (2009).

Current kludge models are fast but not sufficiently accurate to be used in LISA data analysis. The NK model can be improved using fits to improved perturbative results as these become available. An osculating element formalism has been developed Pound and Poisson (2008); Gair *et al.* (2011c) that can be used to compute the contribution appropriate corrections to the phase and orbital parameter evolution for an arbitrary perturbing force (see Warburton *et al.* (2012) for an example using the GSF). This model is likely to be sufficiently reliable for use in preliminary data analysis, but will have to be continually improved as the GSF calculations described in Sec. 25.2.2 are further developed. Although much faster than GSF models, the NK model is likely to be too expensive computationally for the first stages of data analysis, in which source candidates are identified using a large number of templates. The AK model in its current form is potentially fast enough, but is not sufficiently accurate. However, recently a hybrid model called the "Augmented Analytic Kludge" was proposed Chua and Gair (2015); Chua *et al.* (2017) that corrects the AK phase and orbital evolution equations so that they match numerical kludge trajectories. The "Augmented Analytic Kludge" model is almost as fast as the AK model and is almost as accurate as the NK model, so it is a promising approach to data analysis, though much work is needed to develop the preliminary model to include the full range of physical effects.

Computationally efficient models will be essential for identifying sources in data from current and future GW detectors. However, they can only be constructed if accurate physical waveform models have been developed, and the final stage of any parameter estimation pipeline must use the most accurate physical model available in order to best extract the source parameters. Accurate source modelling underpins all GW data analysis.

25.2.8 The view from Mathematical GR

Contributor: Piotr T. Chruściel

The detection of gravitational waves presents formidable challenges to the mathematical relativist: can one invoke mathematical GR to provide an unambiguous interpretation of observations, and a rigorous underpinning for some of the interpretations already made? Here we briefly discuss some of the issues arising, focusing on questions that are tractable using available methods in mathematical GR. We shall sidestep a host of other important problems, such as that of the global well-posedness of the Cauchy problem for binary BHs, or the related problem of *cosmic censorship*, which are currently completely out of reach to mathematical GR.

Quasi-Kerr remnants?

A working axiom in the GW community is that *Kerr BHs exhaust the collection of BH end states*. There is strong evidence for this, based on the "no-hair" theorem, which asserts that *suitably regular stationary, analytic, non-degenerate, connected, asymptotically flat vacuum BHs belong to the Kerr family*; see Ref. Chrusciel *et al.* (2012) for precise definitions and a list of many contributors (see also Secs. 25.3.4 and 25.3.4 of Chapter III for a discussion on no-hair theorems in the context of beyond-GR phenomenology). The analyticity assumption is highly undesirable, being rather curious: it implies that knowledge of a metric in a small space-time region determines the metric throughout the universe. This assumption was relaxed in Alexakis *et al.* (2010) for near-Kerr configurations and in Alexakis *et al.* (2014) for slowly rotating horizons, but the general case remains open. Next, the non-degeneracy assumption is essentially that of non-vanishing surface gravity: the maximally spinning Kerr BHs are degenerate in this sense. One often discards the extremal-Kerr case by declaring that it is unstable. This might well be the case, but it is perplexing that the spin range of observed SMBH candidates is clearly biased towards high spin, with a possible peak at extremality Brenneman (2013); Reynolds (2014). (Note, however, that these studies have an a priori assumption built-in, that the BHs are Kerr.) Finally, while the connectedness assumption is irrelevant when talking about an isolated BH, it is quite unsatisfactory to have it around: what mechanism could keep a many-BH vacuum configuration in a stationary state? All this makes it clear that

removing the undesirable assumptions of *analyticity, non-degeneracy, and connectedness* in the uniqueness theorems should be a high priority to mathematically-minded relativists.

Quasi-normal ringing?

The current paradigm is that, after a merger, the final BH settles to a stationary one by emitting radiation which, at the initial stage, has a characteristic profile determined by *quasi-normal modes*. This characteristic radiation field provides a very useful tool for determining the final mass and angular momentum of the solution. (Note that the extraction of these parameters from the ringdown profile assumes the final state to be Kerr, taking us back to the issues raised in the previous paragraph...) All this seems to be well supported by numerics. But we are still far behind by way of mathematical proof. Work by Dyatlov Dyatlov (2011, 2015) has rigorously established that quasi-normal modes are part of an asymptotic expansion of the time-behaviour of linear waves on the *Kerr-de Sitter* background with a nonzero cosmological constant. The asymptotically flat Kerr case turns out to be much more difficult to tackle, and so far no rigorous mathematical statements are available for it in the literature. The whole problem becomes even more difficult when non-linearities are introduced, with no results available so far. The recently announced proofs of nonlinear stability of the Schwarzschild solution within specific families of initial data Dafermos *et al.* (2018); Klainerman and Szeftel (2017) might serve as a starting point for further studies of this important problem.

Quasi-local masses, momenta and angular momenta?

It was mind-blowing, and still is, when LIGO detected two BHs of about 35 and 30 solar masses merging into one, of about 60 solar masses. But the question arises, what do these numbers mean? Assuming the end state to be Kerr, the last part of the statement is clear. But how can the pre-merger masses be determined, or even defined, given the non-stationarity of the BBH configuration? Each NR group uses its own method for assigning mass and spin parameters to the initial datasets used in their simulations, and it is not *a priori* clear how these numbers relate to each other. EOB models likewise employ their own definitions of mass and spin. Any differences are most likely irrelevant at the current level of detection accuracy. But one hopes that it will become observationally important at some stage, and is a fundamental issue in our formulation of the problem in any case.

To address the issue requires choosing benchmark definitions of quasi-local mass, momentum, and angular momentum that can be blindly calculated on numerical initial datasets, without knowing whether the data were obtained, e.g., by solving the spacelike constraints with an Ansatz, or by evolving some other Ansatz, or by matching spacelike and characteristic data. One can imagine a strategy whereby one first locates the apparent horizons within a unique preferred time-slicing (e.g., maximal, keeping in mind that apparent horizons are slicing-dependent), and then calculates the chosen quasi-local quantities for those. There exists a long list of candidates for quasi-local mass, with various degrees of computational difficulty, which could be used after extensive testing, all to be found in Szabados (2009); alphabetically: Bartnik's, Brown-York's, Hawking's (directly readable from the area), Kijowski's, Penrose's, with the currently-most-sophisticated one due to Chen, Wang and Yau (see Chen *et al.* (2018) and references therein). The issue is not whether there is an *optimal* definition of quasi-local quantities, which is an interesting theoretical question on its own, unlikely to find a universally agreed answer, but whether there is a *well-defined and computationally convenient one* that can be used for scientific communication. Such a definition would need to have an unambiguous Newtonian limit, necessary for making contact with non-GR astrophysical observations. Incidentally, in recent work Chen *et al.* (2019), the Wang and Yau mass has been calculated for balls of fixed radius receding to infinity along null geodesics. The key new observation is that the leading order volume integrand is the square of the Bondi news function. This is accompanied by an integral over the surface of the bounding spheres which deserves further investigation, numerically or otherwise.

Quasi-mathematical numerical relativity?

To an outsider, NR looks like a heroic struggle with a quasi-impossible task, which, after years of inspired attempts, resulted in a maze of incredibly complicated codes that manage to perform the calculations related to the problem at hand. It is conceivable that there is

no way to control the whole construction in a coherent way. However, some mathematically minded outsiders would like to get convinced that the numerical calculations are doing what they are supposed to do; compare Gustafsson *et al.* (2013); Sarbach and Tiglio (2012). In other words, is it possible to show that, at least some, if not most, if not all of the current numerical approximations to Einstein equations would converge to a real solution of the problem at hand if the numerical accuracy could be increased without limit? Standard convergence tests, or checks that the constraints are preserved, are of course very important, but they cannot on their own settle the point. A more rigorous proof of convergence is desirable.

25.3 III: Gravitational waves and fundamental physics

25.3.1 Introduction

Gravity is arguably the most poorly understood fundamental interaction. It is clear that General Relativity (GR) is not sufficient for describing the final stages of gravitational collapse or the very early universe. Additionally, a deeper understanding of the role of gravitation seems to be a necessary ingredient for solving almost any other major challenge in fundamental physics, cosmology, and astrophysics, such as the hierarchy problem, or the dark matter (DM) and dark energy problems. Gravitational waves (GWs) promise to turn gravity research into a data-driven field and potentially provide much needed insights. However, one needs to overcome a major obstacle first: that of extracting useful information about fundamental physics from GW observations. The reason this is a challenge should have become apparent in the previous chapter. The signal is buried inside noise and extracting it requires precise modelling. Doing so in GR is already a major feat and it only gets harder when one tries to add new ingredients to the problem. Nonetheless there is very strong motivation. Black hole binary (BBH) mergers are among the most violent events in the universe and some of the most interesting and exotic phenomena are expected to take place in the vicinity of BHs.

This chapter focusses on how BHs can be used to probe fundamental physics through GWs. The next section sets the background by discussing some examples of beyond-GR scenarios. Sec. 25.3.3 summarises the techniques that are being used or developed in order to probe new fundamental physics through GWs. Sec. 25.3.4 is devoted to the efforts to probe the nature and structure of the compact objects that are involved in binary mergers. Finally, Sec. 25.3.5 provide a thorough discussion on what GW observation might reveal on the nature of DM.

25.3.2 Beyond GR and the standard model

Alternative theories as an interface between new physics and observations

The most straightforward way to test new fundamental physics with GWs from BBH coalescences would be the following: select one's favourite scenario and model the system in full detail, extract a waveform (or better a template bank), and then look for the prediction in the data. The technical difficulties of doing so will become apparent below, where it will also be apparent that the required tools are at best incomplete and require further development. However, there is a clear non-technical drawback in this approach as well: it assumes that one knows what new fundamental physics to expect and how to model it to the required precision. One should contrast this with the fact that most quantum gravity candidates, for example, are not developed enough to give unique and precise predictions for the dynamics of a binary system. Moreover, ideally one would want to obtain the maximal amount of information from the data, instead of just looking for very specific predictions, in order not to miss unexpected new physics. Hence, the question one needs to ask is what is the optimal way to extract new physics from the data?

GW observations test gravity itself and the way matter interacts through gravity. Hence, at the theoretical level, they can test GR and the way GR couples to the Standard Model (SM) and its extensions. This suggests clearly that the new fundamental physics that can leave an imprint on GW observations can most likely be effectively modelled using an alternative theory of gravity. Recall that alternative theories of gravity generically contain extra degrees of freedom that can be nonminimally coupled to gravity.

The advantages of this approach are: (i) Alternative theories of gravity can act as *effective field theories* for describing certain effects and phenomena (*e.g.* violations of Lorentz symmetry

or parity) or be eventually linked to a specific more fundamental theory; (ii) they can provide a complete framework for obtaining predictions for binary evolutions and waveforms, as they come with fully nonlinear field equations; (iii) Their range of validity is broad, so they allow one to combine constraints coming from the strong gravity regime with many other bounds from e.g. the weak field regime, cosmology, astrophysics, laboratory tests, etc. The major drawback of this approach is that it requires theory-dependent modelling, which can be tedious and requires one to focus on specific alternative theories of gravity.

In this Section we will give a brief overview of some alternative theories that can be used to model new physics in GW observations. This is not meant to be a comprehensive list nor is it our intent to pinpoint interesting candidates. We simply focus on theories that have received significant attention in the literature in what regards their properties in the strong gravity regime and to which we plan to refer to in the coming Sections.

It is worth mentioning that a complementary approach is to use theory-agnostic *strong field parametrisations*. Their clear advantage is that they simplify the modelling drastically and they render it theory-independent. However, they fall short in points (i)-(ii) above. In specific, it is no always straightforward to physical interpret them, they typically describe only part of the waveform, and they do not allow one to combine constraints with other observations unless interpreted in the framework of a theory. Strong field parametrisations and their advantanges and disadvantages will be discussed in Secs. 25.3.3, 25.3.3 and 25.3.3.

Scalar-tensor theories

Contributors: T. P. Sotiriou, K. Yagi

One of the simplest ways to modify GR is to introduce a scalar field that is nonminimally coupled to gravity. In many cases, the term scalar-tensor theories refers to theories described by the action

$$S_{\rm st} = \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}\Big(\varphi R - \frac{\omega(\varphi)}{\varphi}\nabla^\mu\varphi\nabla_\mu\varphi - V(\varphi)\Big) + S_m(g_{\mu\nu},\psi)\,, \tag{25.21}$$

where g is the determinant of the spacetime metric $g_{\mu\nu}$, R is the Ricci scalar of the metric, and S_m is the matter action. ψ is used to collectively denote the matter fields, which are coupled minimally to $g_{\mu\nu}$. The functions $\omega(\varphi)$ and $V(\varphi)$ need to be specified to identify a specific theory within the class. Brans-Dicke theory is a special case with $\omega = \omega_0$ =constant and $V = 0$ Brans and Dicke (1961).

It is common in the literature to rewrite the action in terms of a different set of variables. In particular, the conformal transformation $\hat{g}_{\mu\nu} = G\varphi\, g_{\mu\nu}$, where G is Newton's constant, and the scalar field redefinition $2\varphi d\phi = \sqrt{2\omega(\varphi)+3}\, d\varphi$, can be employed to bring the action (25.21) to the form

$$S_{\rm st} = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-\hat{g}}\Big(\hat{R} - 2\hat{g}^{\nu\mu}\partial_\nu\phi\partial_\mu\phi - U(\phi)\Big) + S_m(g_{\mu\nu},\psi)\,, \tag{25.22}$$

where $U(\phi) = V(\varphi)/(G\varphi)^2$. The set of variables $(\hat{g}_{\mu\nu},\phi)$ is known as the *Einstein frame*, whereas the original set of variables $(g_{\mu\nu},\varphi)$ is known as the *Jordan frame*. Quantities with a hat are defined with $\hat{g}_{\mu\nu}$. In the Einstein frame, scalar-tensor theories seemingly take the form of Einstein's theory with a minimally coupled scalar field (hence the name). However, this comes at a price: ϕ now couples to the matter field ψ, as can be seen if S_m is written in terms of $\hat{g}_{\mu\nu}$, ϕ, and ψ. Hence, if one sticks to the Einstein frame variables, one would infer that matter experiences an interaction with ϕ (fifth force), and hence it cannot follow geodesics of $\hat{g}_{\mu\nu}$. In the Jordan frame instead, there is no interaction between φ and ψ (by definition), and this implies that matter follows geodesics of $g_{\mu\nu}$. This line of thinking allows one to ascribe a specific physical meaning to the Jordan frame metric, but it does not change the fact that the two frames are equivalent descriptions of the same theory (see Ref. Sotiriou *et al.* (2008) and references therein for a more detailed discussion).

Scalar-tensor theories are well-studied but generically disfavoured by weak field observations, *e.g.* Bertotti *et al.* (2003); Perivolaropoulos (2010). In brief, weak field tests dictate that the scalar field, if it exists, should be in a trivial configuration around the Sun and around weakly gravitating objects, such as test masses in laboratory experiments. These precision tests translate to very strong constraints on scalar-tensor theories; strong enough to make it

unlikely that there can be any interesting phenomenology in the strong gravity regime, which is our focus here. There is one notable known exception Damour and Esposito-Farèse (1993). To introduce these models it is best to first set $V = U = 0$ and then consider the equation of motion for ϕ, as obtained from varying action (25.22). It reads

$$\hat{\Box}\phi = -4\pi G\alpha(\phi)T\,, \tag{25.23}$$

where $T \equiv T^{\mu}_{\ \mu}$, $T_{\mu\nu} \equiv -2(-g)^{-1/2}\delta S_m/\delta g^{\mu\nu}$ is the Einstein frame stress energy tensor, and

$$\alpha(\phi) = -[2\omega(\varphi) + 3]^{-1/2}\,. \tag{25.24}$$

Solution with $\phi = \phi_0 =$ constant are admissible only if $\alpha(\phi_0) = 0$. This condition identifies a special class of theories and translates to $\omega(\varphi_0) \to \infty$ in the Jordan frame, where φ_0 is the corresponding value of φ. For $\phi = \phi_0$ solutions the corresponding metric is identical to the GR solution for the same system. However, these solutions are not unique. It turns out that they are preferable for objects that are less compact than a certain threshold, controlled by the value of $\alpha'(\phi_0)$. When compactness exceeds the threshold, a nontrivial scalar configuration is preferable, leading to deviations from GR Damour and Esposito-Farése (1992); Damour and Esposito-Farèse (1993); Damour and Esposito-Farese (1996). The phenomenon is called *spontaneous scalarization* and it is known to happen for neutron stars (NSs).

A NSB endowed with non-trivial scalar monopolar configurations would lose energy through dipole emission Will (2014) and this would affect the orbital dynamics. More specifically, this would be an additional, lower-order, contribution to the usual quadrupolar GW emission that changes the period of binary pulsars. Hence, binary pulsar constraints are extremely efficient in constraining spontaneous scalarization and the original scenario is almost ruled out Freire *et al.* (2012); Shao *et al.* (2017), with the exception of rapidly rotating stars. However, dipolar emission can be avoided if the scalar-scalar interaction between the stars is suppressed. This is the case is the scalar is massive Alsing *et al.* (2012); Ramazanoğlu and Pretorius (2016). The mass defines a characteristic distance, beyond which the fall-off of the scalar profile is exponential (as opposed to $1/r$), so if the value of the mass is in the right range, the stars can be scalarized and yet the binary will not exhibit any appreciable dipolar emission above a given separation. One can then avoid binary pulsar constraints and still hope to see some effect in GW emission from the late inspiral, merger, and ringdown. There is also the possibility that NSs will *dynamically* scalarize once they come close enough to each other Barausse *et al.* (2013); Palenzuela *et al.* (2014); Shibata *et al.* (2014); Taniguchi *et al.* (2015); Sennett and Buonanno (2016).

It should be noted that the known scalarization scenario faces the following issue. Usually, calculations assume flat asymptotics with a vanishing gradient for the scalar. However, realistically the value of the scalar far away from the star changes at cosmological timescales and it turns out that this change is sufficient to create conflict with observations Sampson *et al.* (2014); Anderson and Yunes (2017). This problem can be pushed into the future by tuning initial data, so it can technically be easily avoided. Nonetheless, one would eventually need to do away with the tuning, presumably by improving the model.

Black holes in scalar-tensor theories have received considerable attention, most notably in the context of no-hair theorems (*e.g.* Hawking (1972); Bekenstein (1995); Sotiriou and Faraoni (2012)) and their evasions (see also Ref. Sotiriou (2015b) for a discussion). Sections 25.3.4 and 25.3.4 are entirely devoted to this topic, so we will not discuss it further here.

The action of eq. (25.21) is the most general one can write that is quadratic in the first derivatives of the scalar, and hence it presents itself as a sensible effective field theory for a scalar field nonminimally coupled to the metric. However, this action can be generalized further if one is willing to include more derivatives. Imposing the requirement that variation leads to field equations that are second order in derivatives of both the metric and the scalar leads to the action

$$S_H \;=\; \int d^4x\sqrt{-g}\,(L_2 + L_3 + L_4 + L_5)\;, \tag{25.25}$$

where

$$L_2 = K(\phi, X), \tag{25.26}$$
$$L_3 = -G_3(\phi, X)\Box\phi, \tag{25.27}$$
$$L_4 = G_4(\phi, X)R + G_{4X}\left[(\Box\phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2\right], \tag{25.28}$$
$$L_5 = G_5(\phi, X)G_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\phi - \frac{G_{5X}}{6}\left[(\Box\phi)^3 - 3\Box\phi(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2 + 2(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^3\right], \tag{25.29}$$

where $X \equiv -\frac{1}{2}\nabla^\mu\phi\nabla_\mu\phi$, G_i need to be specified to pin down a model within the class, and $G_{iX} \equiv \partial G_i/\partial X$. Horndeski was the first to write down this action in an equivalent form Horndeski (1974) and it was rediscovered fairly recently in Ref. Deffayet *et al.* (2009). Theories described by this action are referred to as *generalized scalar-tensor theories*, Horndeski theories, *generalized galileons*, or simply scalar-tensor theories. We will reserve the last term here for the action (25.21) in order to avoid confusion. The term generalized galileons comes from the fact that these theories were (re)discovered as curved space generalization of a class of flat space scalar theories that are symmetric under $\phi \to \phi + c_\mu x^\mu + c$, where c_μ is a constant one-form and c is a constant (Galilean symmetry) Nicolis *et al.* (2009). In fact, the numbering of the L_i terms in the Lagrangian is a remnant of the original Galileons, where the i index indicates the number of copies of the field. This is no longer true in action (25.25), but now the L_i term contains $i-2$ second derivatives of the scalar.

In what regards strong gravity phenomenology, a lot of attention has been given to the shift-symmetric version of action (25.25). If $G_i = G_i(X)$, *i.e.* $\partial G_i/\partial\phi = 0$, then (25.25) is invariant under $\phi \to \phi+$constant. This symmetry protects the scalar from acquiring a mass from quantum corrections. It has been shown in Ref. Hui and Nicolis (2013) that asymptotically flat, static, spherically symmetric BHs in shift-symmetric Horndeski theories have trivial (constant) scalar configuration and are hence described by the Schwarzschild solution. This proof can be extended to slowly-rotating BHs, in which case the solution is the slowly rotating limit of the Kerr spacetime Sotiriou and Zhou (2014a). However, there is a specific, unique term in (25.25) that circumvents the no-hair theorem and leads to BHs that differ from those of GR and have nontrivial scalar configurations (hairy BHs) Sotiriou and Zhou (2014a): $\phi\mathcal{G}$, where $\mathcal{G} \equiv R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ is the the Gauss-Bonnet invariant.[13] This singles out

$$S_{\phi\mathcal{G}} = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\Big(R - \partial^\nu\phi\partial_\mu\phi + \alpha\phi\mathcal{G}\Big) + S_m(g_{\mu\nu}, \psi), \tag{25.30}$$

as the simplest action within the shift-symmetric Horndeski class that has hairy BHs. α is a coupling constant with dimension of a length squared. Hairy BHs in this theory Yunes and Stein (2011); Sotiriou and Zhou (2014b) are very similar to those found earlier in the (non-shift-symmetric) theory with exponential coupling Campbell *et al.* (1992); Kanti *et al.* (1996), *i.e.* $e^\phi\mathcal{G}$. The theory with exponential coupling is known as Einstein-dilaton Gauss-Bonnet theory and it arises as a low-energy effective theory of heterotic strings Metsaev and Tseytlin (1987); Maeda *et al.* (2009).

The subclass of theories described by the action

$$S_{f(\phi)\mathcal{G}} = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\Big(R - \frac{1}{2}\partial^\nu\phi\partial_\mu\phi + f(\phi)\mathcal{G}\Big) + S_m(g_{\mu\nu}, \psi), \tag{25.31}$$

seems to have interesting BH phenomenology in general. This theory admits GR solutions if $f'(\phi_0) = 0$ for some constant ϕ_0. Assuming this is the case, it has recently been proven in Ref. Silva *et al.* (2018) that stationary, asymptotically flat BH solutions will be identical to those of GR, provided $f''(\phi_0)\mathcal{G} < 0$. A similar proof, but restricted to spherical symmetry, can be found in Ref. Antoniou *et al.* (2018). Theories that do not satisfy the $f''(\phi_0)\mathcal{G} < 0$ exhibit an interesting phenomenon Doneva and Yazadjiev (2018); Silva *et al.* (2018): BH scalarization, similar to the NS scalarization discussed above. See also Ref. Antoniou *et al.* (2018b) for a

[13] Though this term does not seem to be part of action (25.25), it actually corresponds to the choice $G_5 \propto \ln|X|$ Kobayashi *et al.* (2011).

study of hairy BH solution in this class of theories and Ref. Blázquez-Salcedo *et al.* (2018) for a very recent exploration of linear stability.

The same class of theories can exhibit spontaneous scalarization in NSs Silva *et al.* (2018). On the other hand, in shift-symmetric Horndeski theories it is known that for NSs the scalar configuration will be trivial Barausse and Yagi (2015); Barausse (2017); Lehébel *et al.* (2017), provided that the $\phi\mathcal{G}$ terms is absent. Even if it is there, there will be a faster than $1/r$ fall-off Yagi *et al.* (2012, 2016). Hence, for shift-symmetric theories BH binaries are probably the prime strong gravity system of interest.

It should be noted that the speed of GWs in generalized scalar tensor theories can differ from the speed of light under certain circumstances and this has been used to obtain constraint recently Lombriser and Lima (2017); Lombriser and Taylor (2016); Sakstein and Jain (2017); Ezquiaga and Zumalacárregui (2017); Creminelli and Vernizzi (2017); Baker *et al.* (2017). These will be discussed in Sec. 25.3.3.

As mentioned above, action (25.25) is the most general one that leads to second order equations upon variation. Nonetheless, it has also been shown that there exist theories outside this class that contain no other degrees of freedom than the metric and the scalar field Zumalacárregui and García-Bellido (2014); Gleyzes *et al.* (2015a,b); Langlois and Noui (2016); Crisostomi *et al.* (2016); Ben Achour *et al.* (2016). These models are often referred to as *beyond-Horndeski* theories.

Last but not least, dynamical Chern-Simons (dCS) gravity Jackiw and Pi (2003); Alexander and Yunes (2009) is a scalar-tensor theory that introduces gravitational parity violation at the level of the field equations. It draws motivation from the standard model Weinberg (2013), heterotic superstring theory Green *et al.* (1987), loop quantum gravity Ashtekar *et al.* (1989); Alexander and Gates (2006); Taveras and Yunes (2008); Calcagni and Mercuri (2009); Gates *et al.* (2009) and effective field theories for inflation Weinberg (2008). dCS gravity is not a member of the Horndeski class. The scalar is actually a pseudo-scalar, *i.e.* it changes sign under a parity transformation. Moreover, it couples to the Pontryagin density ${}^*R^\alpha{}_\beta{}^{\gamma\delta}R^\beta{}_{\alpha\gamma\delta}$, where $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ is the Riemann tensor, ${}^*R^\alpha{}_\beta{}^{\gamma\delta} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\gamma\delta\mu\nu}R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ and $\epsilon^{\gamma\delta\mu\nu}$ is the Levi-Civita tensor. This coupling term gives rise to third-order derivatives in the field equations. The fact that the theory has higher-order equations implies that it is unlikely it is actually predictive as it stands Delsate *et al.* (2015) (see also Crisostomi *et al.* (2018)). Hence, most work has used a specific approach to circumvent that problem that is inspired by effective field theory and relies on allowing the coupling term to introduce only perturbative correction. This issue will be discussed in some detail in Sec. 25.3.3.

dCS gravity has received a lot of attention in the strong gravity regime. Non-rotating BH and NS solutions are the same as in GR, as such solutions do not break parity. On the other hand, slowly-rotating Yunes and Pretorius (2009a); Konno *et al.* (2009); Yagi *et al.* (2012c), rapidly-rotating Stein (2014) and extremal McNees *et al.* (2016); Chen and Stein (2018) BHs and slowly-rotating NSs Yagi *et al.* (2013) all differ from the corresponding GR solutions. In particular, such rotating compact objects acquire a scalar *dipole* hair and a correction to the quadrupole moment, which modify gravitational waveforms from compact binary inspirals Sopuerta and Yunes (2009); Pani *et al.* (2011); Yagi *et al.* (2012d); Canizares *et al.* (2012) and mergers Okounkova *et al.* (2017). Future GW observations will allow us to place bounds on the theory that are orders of magnitude stronger than the current bounds from Solar System Ali-Haimoud and Chen (2011) and table-top experiments Yagi *et al.* (2012c). Another interesting phenomenon in dCS gravity is gravitational amplitude birefringence, where the right-handed (left-handed) circularly-polarized GWs are either enhanced or suppressed (suppressed or enhanced) during their propagation from a source to Earth, which can be used to probe the evolution of the pseudo-scalar field Alexander *et al.* (2008); Yunes and Finn (2009); Yunes *et al.* (2010). Such GW observations are complementary Yagi and Yang (2018) to Solar System Smith *et al.* (2008) and binary pulsar Yunes and Spergel (2009); Ali-Haimoud (2011) probes.

For a general introduction to standard scalar-tensor theories see Refs. Fujii and Maeda (2007); Faraoni (2004) and for generalized scalar-tensor theories see Ref. Deffayet and Steer (2013), and for a recent brief review on gravity and scalar fields see Ref. Sotiriou (2015a).

Lorentz violations

Contributor: T. P. Sotiriou

Lorentz symmetry is a fundamental symmetry for the standard model of particle physics,

hence it is important to question whether it plays an equally important role in gravity. To address this question one needs to study Lorentz-violating (LV) theories of gravity for two distinct reasons: (i) to quantify how much one is allowed to deviated from GR without contradicting *combined* observations that are compatible with Lorentz symmetry one needs to model the deviations in the framework of a consistent theory; (ii) studying the properties of such theories can provide theoretical insights. We will briefly review two examples of LV theories here.

Einstein-aether theory (æ-theory) Jacobson and Mattingly (2001) is described by the action

$$S_{ae} = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}(-R - M^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\nabla_\alpha u^\mu \nabla_\beta u^\nu) \tag{25.32}$$

where

$$M^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} = c_1 g^{\alpha\beta}g_{\mu\nu} + c_2\delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu + c_3\delta^\alpha_\nu\delta^\beta_\mu + c_4 u^\alpha u^\beta g_{\mu\nu}\,, \tag{25.33}$$

c_i are dimensionless coupling constants and the aether u_μ is forced to satisfy the constraint $u^2 \equiv u^\mu u_\mu = 1$. This constraint can be enforced by adding to the action the Lagrange multiplier term $\lambda(u^2-1)$ or by restricting the variation of the aether so as to respect the constraint. Due to the constraint, the aether has to be timelike, thereby defining a *preferred threading* of spacetime by timelike curves, exactly like an observer would. It cannot vanish in any configuration, including flat space. Hence, local Lorentz symmetry, and more precisely boost invariance, is violated. (25.32) is the most general action that is quadratic in the first derivatives of a vector field that couples to GR and satisfies the unit constraint. Indeed, æ-theory is a good effective field theory for Lorentz-symmetry breaking with this field content Withers (2009). It should be emphasised that the aether brings 3 extra degrees of freedom into the theory, 2 vector modes and a scalar (longitudinal) mode. The speed of any mode, including the usual spin-2 mode that corresponds to GWs, can differ from the speed of light and is controlled by a certain combination of the c_i parameters.

One can straightforwardly obtain an LV theory with a smaller field content from action (25.32) by restricting the aether to be hypersurface orthogonal Jacobson (2010). This amounts to imposing

$$u_\mu = \frac{\partial_\mu T}{\sqrt{g^{\lambda\nu}\partial_\lambda T\partial_\nu T}} \tag{25.34}$$

where T is a scalar and the condition is imposed before the variation (*i.e.* one varies with respect to T). This condition incorporates already the unit constraint $u^2 = 1$ and removes the vector modes from the theory. It can be used to rewrite the action in terms of the metric and T only. T cannot vanish in any regular configuration that solves the field equations and its gradient will always be timelike. Hence, the aether is always orthogonal to some spacelike hypersurfaces over which T is constant. That is, T defines a preferred foliation and acts as a preferred time coordinate. Note that it appears in the action only through u_μ and the latter is invariant under $T \to f(T)$, so this is a symmetry of the theory and the preferred foliation can be relabelled freely.

One can actually use the freedom to choose the time coordinate and write this theory directly in the preferred foliation Jacobson (2010). Indeed, if T is selected as the time coordinate, the $T =$ constant surfaces define a foliation by spacelike hypersurfaces with extrinsic curvature K_{ij} and N and N^i are the lapse function and shift vector of this foliation. Then $u_\mu = N\delta^0_\mu$, and action (25.32) takes the form

$$S_T = \frac{1}{16\pi G'}\int dT d^3x\, N\sqrt{h}\left(K_{ij}K^{ij} - \lambda K^2 + \xi^{(3)}R + \eta a_i a^i\right)\,, \tag{25.35}$$

where $a_i \equiv \partial_i \ln N$ and

$$\frac{G'}{G} = \xi = \frac{1}{1-(c_1+c_3)}, \quad \lambda = \frac{1+c_2}{1-(c_1+c_3)}, \quad \eta = \frac{c_1+c_4}{1-(c_1+c_3)}\,. \tag{25.36}$$

Since T was chosen as a time coordinate, action (25.35) is no longer invariant under general diffeomorphisms. It is, however, invariant under the subset of diffeomorphisms that preserve the folation, or else the transformations $T \to T' = f(T)$ and $x^i \to x'^i = x'^i(T, x^i)$, which are

now the defining symmetry of the theory from a EFT perspective. In fact, this action can be thought of as the infrared (low-energy) limit of a larger theory with the same symmetry, called Hořava gravity Horava (2009). The most general action of Hořava gravity is Blas *et al.* (2010)

$$S_H = \frac{1}{16\pi G_H}\int dT d^3x\, N\sqrt{h}\left(L_2 + \frac{1}{M_\star^2}L_4 + \frac{1}{M_\star^4}L_6\right)\,, \tag{25.37}$$

where L_2 is precisely the Lagrangian of action (25.35). L_4 and L_6 collectively denote all the operators that are compatible with this symmetry and contain 4 and 6 spatial derivatives respectively (in the T foliation). The existence of higher order spatial derivatives implies that perturbation will satisfy higher order dispersion relations and $M_\star$ is a characteristic energy scale that suppresses the corresponding terms. Hořava gravity has been argued to be power-counting renormalizable and hence a quantum gravity candidate Horava (2009). The basic principle is that the higher-order spatial derivative operators modify the behaviour of the propagator in the ultraviolet and remove/regulate divergences (see Refs. Visser (2009a,b) for a discussion in the context of a simple scalar model). The *projectable* version of the theory Horava (2009); Sotiriou *et al.* (2009a), in which the lapse N is restricted to have vanishing spatial derivatives, has actually been shown to be renormalizable (beyond power-counting) in 4 dimensions Barvinsky *et al.* (2016), whereas the 3-dimensional version Sotiriou *et al.* (2011) is asymptotically Barvinsky *et al.* (2017). This restricted version does however suffer from serious viability issues at low energies Horava (2009); Sotiriou *et al.* (2009b); Charmousis *et al.* (2009); Blas *et al.* (2009); Koyama and Arroja (2010).

We will not discuss the precise form of L_4 and L_6 any further, as it not important for low-energy physics. It should be stressed though that such terms lead to higher order corrections to the dispersion relation of GWs and that of the extra scalar excitation Hořava gravity propagates. This implies that the speeds of GW polarizations can differ from the speed of light and acquire a frequency dependence. The relevant constraints from GW observations are discussed in Sec. 25.3.3 (see also Sotiriou (2018) for a critical discussion). At large wavenumber k, the dispersion relations scale as $\omega^2 \propto k^6$ (since by construction the leading order ultraviolet operators in the action contain 2 temporal and 6 spatial derivatives) and this implies that an excitation can reach any speed, provided it has short enough wavelength. More surprisingly, it has been shown that Hořava gravity exhibits instantaneous propagation even in the infrared limit, described by action (25.35). In this limit, dispersion relations are linear but, both at perturbative Blas and Sibiryakov (2011) and nonperturbative level Bhattacharyya *et al.* (2016a), there exists an extra degree of freedom that satisfies an elliptic equation on constant preferred time hypersurfaces. This equation is not preserved by time evolution and hence it transmits information instantaneously within these hypersurfaces. For a detailed discussion see Ref. Bhattacharyya *et al.* (2016b).

It should be clear from the discussion above that both æ-theory and Hořava gravity can exhibit superluminal propagation and this makes BHs particularly interesting in these theories. For both theories BHs differ from their GR counterparts and have very interesting feature that will be discussed further in Sec. 25.3.4. For a review see Ref. Barausse and Sotiriou (2013a).

For early reviews on æ-theory and Hořava gravity see Refs. Jacobson (2007) and Sotiriou (2011), respectively. For the most recent *combined* constraints see Refs. Emir Gumrukcuoglu *et al.* (2018); Oost *et al.* (2018) and references therein.

Massive gravity and tensor-tensor theories

Contributor: S. F. Hassan

In the appropriate limit GR reproduces Newton's famous inverse square law of gravitation. At the same time, linear excitations in GR (GWs) satisfy a linear dispersion relation without a mass term. In particle theory terminology, both of these statements imply that the graviton — the boson that mediates the gravitational interaction — is massless. Extensions of GR that attempt to give the graviton a mass are commonly referred to as massive gravity, bimetric gravity, and multimetric gravity theories. One of the original motivations for the study of these theories was the hope that they could provide a resolution to the cosmological constant problem by changing the gravitational interaction beyond some length scale (controlled by the mass of the graviton). However, a more fundamental motivation emerges from comparing the structure of GR with that of the standard model of particle physics that successfully accounts for all known particles interactions. This is elaborated below.

The standard model describes particle physics in terms of fields of spin 0 (the Higgs field), spin 1/2 (leptons and quarks) and spin 1 (gauge bosons). At the most basic level, these fields are governed by the respective field equation, namely, the Klein-Gordon equation, the Dirac equation and the Maxwell/Yang-Mills/Proca equations. The structures of these equations are uniquely fixed by the spin and mass of the field along with basic symmetry and consistency requirements, in particular, the absence of ghost instabilities, for example, in spin-1 theories. From this point of view, GR is the unique ghost-free theory of a massless spin-2 field; the metric $g_{\mu\nu}$. Then the Einstein equation, $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0$, with all its intricacies is simply the counterpart for a spin 2 field of the massless Klein-Gordon equation $\Box\phi = 0$, or of the Maxwell equation $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$. However, to describe physics, the standard model contains a second level of structure: At the fundamental level, all fields appear in multiplets allowing them to transform under symmetries, in particular under gauge symmetries which are in turn responsible for the renormalizability and hence, for the quantum consistency of the theory. The observed fields are related to the fundamental ones through spontaneous symmetry breaking and through mixings. For example, to obtain a single Higgs field, one needs to start with four scalar fields arranged in a complex $SU(2)$ doublet, rather than the one scalar field of the final theory. Similarly, although electrodynamics is very well described by Maxwell's equations as a standalone theory, its origin in the standard model is much more intricate, requiring the spontaneous breaking of a larger gauge symmetry and a specific mixing of the original gauge fields into the vector potential of electromagnetism. Now, one may contrast these intricate features of the standard model with GR which is the simplest possible theory of a single massless spin 2 field with no room for any further structure. The comparison suggests embedding GR in setups with more than one spin 2 field and investigating the resulting models. The aim would be to see if the new structures could address some of the issues raised above, either in analogy with the standard model, or through new mechanisms. This will shed light on a corner of the theory space that has remained unexplored so far.

However, implementing this program is not as straightforward as it may seem. It was known since the early 70's that adding other spin 2 fields to GR generically leads to ghost instabilities. The instability was first noted in the context of massive gravity, which contains an interaction potential between the gravitational metric $g_{\mu\nu}$ and a nondynamical predetermined metric $f_{\mu\nu}$. However it also plagues dynamical theories of two or more spin 2 fields. Recent developments since 2010 have shown that one can indeed construct ghost free theories of massive gravity (with a fixed auxiliary metric) de Rham *et al.* (2011); Hassan and Rosen (2012a), or fully dynamical ghost free bimetric theories Hassan and Rosen (2012b). In particular, the bimetric theory is the theory of gravitational metric that interacts with an extra spin-2 field in specific ways and contains several parameters. It propagates one massless and one massive spin-2 mode which are combinations of the two metrics. Consequently, it contains massive gravity and GR as two different limits. For a review of bimetric theory see Schmidt-May and von Strauss (2016).

In the massive gravity limit, as the name suggests, the theory has a single massive spin-2 field that mediates gravitational interactions in the background of a fixed auxiliary metric. The most relevant parameter then is the graviton mass which is constrained by different observations (for a review see, de Rham *et al.* (2017)). In particular, consistency with the detection of GWs by LIGO restricts the graviton mass to $m < 7.7 \times 10^{-23}$eV Abbott *et al.* (2016, 2017c). However, in this limit, it becomes difficult to describe both large scale and small scale phenomena consistently with the same fixed auxiliary metric.

Of course, the bimetric theory is more relevant phenomenologically close to the GR limit, where gravity is described by a mostly massless metric, interacting with a massive spin-2 field. Now the two most relevant parameters are the spin-2 mass m and the Planck mass M of the second spin-2 field, $M \ll M_P$, where M_P is the usual Planck mass of the gravitational metric. The presence of the second parameter M significantly relaxes the bounds on the spin-2 mass m. In the most commonly assumed scenarios, the stability of cosmological perturbations in the very early Universe requires $M \lesssim 100$GeV Akrami *et al.* (2015). In this case, GWs will contain a very small admixture of the massive mode, hence, m is not strongly constrained by LIGO and can be large. A new feature is that now the massive spin-2 field can be a DM candidate. Depending on the specific assumptions, the relevant allowed mass ranges are estimated as $10^{-4}\text{eV} \lesssim m \lesssim 10^{7}\text{eV}$ Aoki and Maeda (2018), or the higher range, $1\text{TeV} \lesssim m \lesssim 100\text{TeV}$ Babichev *et al.* (2016).

While some studies of cosmology in bimetric theory have been carried out, many important features of the theory are yet to be fully explored. One of these is the problem of causality and the well-posedness of the initial value problem. In particular, bigravity provides a framework for

investigating models where the causal metric need not always correspond to the gravitational metric Hassan and Kocic (2018); Kocic (2018). Another interesting question is if the bimetric interaction potential can be generated through some kind of Higgs mechanism, in analogy with the Proca mass term for spin 1 fields. From a phenomenological point of view, it is interesting to investigate the massive spin 2 field present in the theory as a DM candidate. Strong field effects in bimetric gravity are expected to show larger deviations from GR as compared to weak field effects.

While ghost free bimetric models have interesting properties, they do not admit enlarged symmetries, since the two spin 2 fields have only nonderivative interactions. Constructing ghost free theories of spin 2 multiplets with gauge or global symmetries is a more difficult problem which requires constructing ghost free derivative interactions. So far, this is an unresolved problem which needs to be further investigated. If such theories exist, they will provide the closest analogues of the standard model in the spin 2 sector.

25.3.3 Detecting new fields in the strong gravity regime

As has been discussed in some detail in Section 25.3.2, if new physics makes an appearance in the strong gravity regime, it can most likely be modelled as a new field that couples to gravity. In order to detect this field with GW observations, one has to model its effects on the dynamics of the binary system and produce waveforms that can be compared with observations. The 3 distinct phases of a binary coalescence — inspiral, merger, and ringdown — require different modelling techniques. The inspiral and the ringdown are susceptible to different types of perturbative treatment.

During most of the inspiral, the two members of the binary are well separated and, even though they are strongly gravitating objects individually, they interact weakly with each other. Hence, one can model this interaction perturbatively and this modeling can be used to produce a partial waveform for the inspiral phase. It should be stressed that this gives rise to a perturbation expansion whose parameters depend on the nature and structure of the members of the binary. Computing these parameters, known as *sensitivities*, generally requires modelling the objects composing the binary in a nonperturbative fashion. Moreover, if the objects are endowed with extra field configurations, then one needs to model them as translating in an ambient field (in principle created by the companion), in order to faithfully capture the extra interaction. This is the same calculation one performs to obtain constraints from binary pulsars Yagi *et al.* (2014); Sampson *et al.* (2014). An alternative is to try to prepare theory-agnostic, parametrised templates. Three different ways to achieve this will be discussed in detail in Sec. 25.3.3.

The ringdown can be modelled with linear perturbation theory around a known configuration for a compact object, but there are significant challenges. The most obvious ones are: (i) one needs to first have fully determined the structure of the quiescent object that will be used as background; (ii) the equations describing linear perturbations around such a background are not easy to solve (*e.g.* separability is an issue); (iii) both the background and the perturbation equations depend crucially on the scenario one is considering. An in-depth discussion in perturbation theory around BHs, and its use to describe the ringdown phase, will be given in Sec. 25.3.3.

The merger phase is highly nonlinear and modeling it requires full-blown numerical simulations. A prerequisite for performing such simulations is to have an initial value formulation and to show that the *initial value problem* (IVP) is well-posed (in an appropriate sense, as will be discussed in more detail below). This has not been addressed for the vast majority of gravity theories that are currently being considered. Sec. 25.3.3 focuses on the current state of the art in modeling the merger phase. It contains a critical discussion of the IVP in alternative theories of gravity and a summary of known numerical results.

Last but not least, one could attempt to detect new fields (polarisations) by the effect they have on GW propagation, as opposed to generation. This amounts to parametrizing the dispersion relation of the GWs and constraining the various parameters that enter this parameterisation, such as the mass, the speed, and the parameters of terms that lead to dispersive effects. The next section is devoted to propagation constraints.

Gravitational wave propagation

Contributor: T. P. Sotiriou

According to GR, GWs are massless and propagate at the speed of light, c. Hence, they satisfy the dispersion relation $E^2 = c^2p^2$, where E is energy and p is momentum. Deviations from GR can introduce modifications to this dispersion relation. LIGO uses the following parametrisation to model such deviations: $E^2 = c^2p^2 + Ac^\alpha p^\alpha$, $\alpha > 0$ Mirshekari *et al.* (2012)[14]. When $\alpha = 0$, A represents a mass term in the dispersion relation. The current upper bound on the the mass from GW observations is $7.7 \times 10^{-23}\text{eV}/c^2$ Abbott *et al.* (2017c). When $\alpha = 2$, A represents a correction to the speed of GWs. The fact that GWs from the NSB merger GW170817 almost coincided with the gamma ray burst GRB 170817A has given a spectacular double-sided constraint on the speed of GWs, which should agree with the speed of light to less than a part in 10^{15} Abbott *et al.* (2017a,f).

All other corrections introduce dispersive effects which accumulate with the distance the wave had to travel to reach the detector. This enhances the constraints in principle. However, it should be noted that A has dimensions $[A] = [E]^{2-\alpha}$, which implies that corrections that have $\alpha > 2$ are suppressed by positive powers of $cp/M_\star$. $M_\star$ denotes some characteristic energy scale and it is useful to think of the constraints on A as constraints on $M_\star$. GWs have long wavelengths, so one expects $\alpha > 2$ corrections to be heavily suppressed unless the aforementioned energy scale is unexpectedly small. For instance, for $\alpha = 3$ the current upper bound on $M_\star$ is in the $10^9\,\text{GeV}$ range, whereas for $\alpha = 4$ it drops well below the eV range Abbott *et al.* (2017c); Mirshekari *et al.* (2012); Yunes *et al.* (2016); Sotiriou (2018).

It is important to stress that all of the aforementioned constraints need to be interpreted within the framework of a theory (as is the case for any parametrisation). The mass bound can be turned to a constraint on the mass of the graviton in massive gravity theories, discussed in Sec. 25.3.2. Interestingly, it is not the strongest constraint one can obtain de Rham *et al.* (2017); Will (2018). All other bounds can in principle be interpreted as constraints on Lorentz symmetry. However, terms with odd powers of α require spatial parity violations as well and the bounds on terms with $\alpha > 2$ are probably too weak to give interesting constraints on Lorentz-violating gravity theories Sotiriou (2018). The double-sided bound on the speed of GWs certainly yields a very strong constraint on Lorentz-violating theories of gravity. However, one has to take into account that such models generically have a multidimensional parameter space even at low energies and generically exhibit extra polarisations, the existence/absence of which can potentially give stronger or additional constraints Sotiriou (2018). For details on the implications of this bound for Hořava gravity and for Einstein-æther theory, discussed in Sec. 25.3.2, see Refs. Emir Gumrukcuoglu *et al.* (2018) and Oost *et al.* (2018) respectively.

Lorentz symmetry breaking is not the only scenario in which GWs propagate at a different speed than light. Lorentz invariant theories can exhibit such behaviour as well if they satisfy two conditions: (i) they have extra fields that are in a nontrivial configuration between the emission and the detection locations; (ii) these fields couple to metric perturbations in a way that modifies their propagation. The second conditions generally requires specific types of nonminimal coupling between the extra fields and gravity. It is satisfied by certain generalised scalar tensor theories Lombriser and Taylor (2016), discussed in Sec. 25.3.2. Indeed, the bound on the speed has been used to obtain strong constraints on such theories as models of dark energy Lombriser and Taylor (2016); Lombriser and Lima (2017); Sakstein and Jain (2017); Ezquiaga and Zumalacárregui (2017); Creminelli and Vernizzi (2017); Baker *et al.* (2017). It should be stressed, however, that, due to condition (i), such constraints are inapplicable if one does not require that the scalar field be the dominant cosmological contribution that drives the cosmic speed-up. Hence, they should not be interpreted as viability constraints on the theories themselves, but only on the ability of such models to account for dark energy.

In summary, modifications in the dispersion relation of GWs can be turned into constraints on deviations from GR. How strong these constraints are depends on the theory or scenario one is considering. The clear advantage of propagation constraints is that they are straightforward to obtain and they do not require modeling of the sources in some alternative scenario. This reveals a hidden caveat: they are intrinsically conservative, as they assume that there is no deviation from the GR waveform at the source. Moreover, as should be clear from the discussion above, propagation constraints have other intrinsic limitations and can only provide significant constraints for models that lead to deviations in the dispersion relation of GWs for relatively long wavelengths. Hence, one generally expects to get significantly stronger or additional constraints by considering the deviation from the GR waveform at the source.

[14] A more general parametrisation Kostelecky and Mewes (2016) has been used in Ref. Abbott *et al.* (2017a).

Inspiral and parametrized templates

Contributor: K. Yagi

Post-Newtonian parametrisation

Rather than comparing GW data to template waveforms in non-GR theories to probe each theory one at a time, sometimes it is more efficient to prepare parameterized templates that capture deviations away from GR in a generic way so that one can carry out model-independent tests of gravity with GWs. We will mainly focus on the parameterized modification in the inspiral part of the waveform and discuss what needs to be done to construct parameterized waveforms in the merger-ringdown part of the waveform.

One way to prepare such parameterized templates is to treat coefficients of each post-Newtonian (PN) term in the waveform phase as an independent coefficient Arun *et al.* (2006,b); Mishra *et al.* (2010). For gravitational waveforms of non-spinning BBH mergers in GR, such coefficients only depend on the masses of individual BHs. Thus, if GR is correct, any two measurements of these coefficients give us the masses, and the measurement of a third coefficient allows us to carry out a consistency test of GR. This idea is similar to what has been done with binary pulsar observations with measurements of post-Keplerian parameters Stairs (2003); Perrodin and Sesana (2017). Though, it is nontrivial how to perform such tests for spinning BBHs. Moreover, this formalism does not allow us to probe non-GR corrections entering at negative PN orders due to e.g. scalar dipole emission.

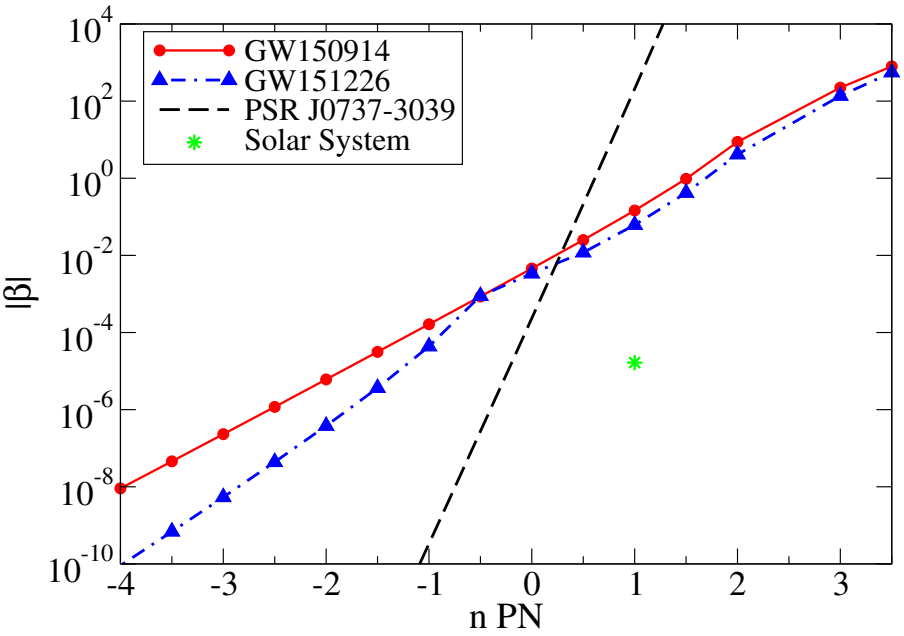


Figure 25.11: Upper bounds on the ppE parameter β with GW150914 and GW151226 entering at different PN orders. For comparison, we also present bounds from binary pulsar observations and Solar System experiments. This figure is taken and edited from Yunes *et al.* (2016).

Parameterized post-Einsteinian (ppE) formalism

In this formalism the modified waveform in the Fourier domain is given by $\tilde{h}(f) = \tilde{h}_{\rm GR}(f)\, e^{i\beta v^{2n-5}}$ Yunes and Pretorius (2009b). Here $\tilde{h}_{\rm GR}$ is the GR waveform, β is the ppE parameter representing the magnitude of the non-GR deviation while v is the relative velocity of the binary components. The above correction enters at nth PN order. Since n is arbitrary, this formalism can capture deviations from GR that enter at negative PN orders. It has been used in Yunes *et al.* (2016) to probe strong and dynamical field gravity with GW150914 Abbott *et al.* (2016a) and GW151226 Abbott *et al.* (2016b). Bounds on β at each PN order using a Fisher analysis are shown in Fig. 25.11. Here, the authors included non-GR corrections only in the inspiral part of the waveform. Having these bounds on generic

parameters at hand, one can map them to bounds on violations in fundamental pillars of GR. For example, a -4PN deviation maps to time variation of the gravitational constant G, that allows us to check the strong equivalence principle. 0PN (2PN) corrections can be used to probe violations in Lorentz (parity) invariance.

Phenomenological waveforms

The LIGO/Virgo Collaboration (LVC) used a generalized IMRPhenom waveform model Abbott *et al.* (2016) by promoting phenomenological parameters $\vec{p}$ in the GR waveform to $\vec{p}(1+\delta p)$, where δp corresponds to the fractional deviation from GR. For the inspiral part of the waveform, one can show that these waveforms are equivalent to the ppE waveform. LVC's bounds on non-GR parameters using a Bayesian analysis on the real data set are consistent with the Fisher bound in Fig. 25.11.

One important future direction to pursue is to come up with a meaningful parameterization of the waveform in the merger and ringdown phases. The generalized IMRPhenom waveform model used by LVC does contain non-GR parameters in the merger-ringdown part of the waveform, though it is not clear what they mean physically or how one can map such parameters to e.g. coupling constants in each non-GR theory. To achieve the above goal, one needs to carry out as many BBH merger simulations as possible in theories beyond GR Healy *et al.* (2012); Berti *et al.* (2013); Okounkova *et al.* (2017); Jai-akson *et al.* (2017); Hirschmann *et al.* (2018) to give us some insight on how we should modify the waveform from GR in the merger-ringdown phase.

Ringdown and black hole perturbations beyond General Relativity

Contributor: P. Pani

Depending on the physics being tested, the post-merger "ringdown" phase of a compact-binary coalescence might be better suited than the inspiral or the merger. For instance, in the inspiral phase the nature of the binary components shows up only at high PN order (though corrections due to extra polarizations can show up at low PN order) whereas the merger phase requires time-consuming and theory-dependent numerical simulations. On the other hand, the post-merger phase — during which the remnant BH settles down to a stationary configuration — can be appropriately described by perturbation theory and it is therefore relatively simple to model beyond GR. If the remnant is a BH in GR, the ringdown phase is well-described by a superposition of exponentially damped sinusoids,

$$h_+ + ih_\times \sim \sum_{lmn} A_{lmn}(r) e^{-t/\tau_{lmn}} \sin(\omega_{lmn} t + \phi_{lmn}) \,, \tag{25.38}$$

called quasinormal modes (QNMs) Kokkotas and Schmidt (1999); Ferrari and Gualtieri (2008); Berti *et al.* (2009); Konoplya (2003). Here, ω_{lmn} is the characteristic oscillation frequency of the final BH, τ_{lmn} is the damping time, A_{lmn} is the amplitude at a distance r, ϕ_{lmn} is the phase, l and m ($|m| \leq l$) are angular indices describing how radiation is distributed on the final BH's sky, and n is an overtone index labeling the (infinite, countable) number of modes.

Equation (25.38) sets the ground for *GW spectroscopy*: QNMs are the fingerprints of the final BH and extracting their frequency and damping time allows for a consistency check of the GW templates Abbott *et al.* (2016k), tests of gravity Berti *et al.* (2015); Abbott *et al.* (2016); Yunes *et al.* (2016), and of the no-hair properties of the Kerr solution Cardoso and Gualtieri (2016). As a corollary of the GR uniqueness theorem Carter (1971); Robinson (2009), the entire QNM spectrum of a Kerr BH eventually depends only on its mass and spin. Thus, detecting several modes allows for multiple null-hypothesis tests of the Kerr metric Gossan *et al.* (2012); Berti *et al.* (2016); Meidam *et al.* (2014) and, in turn, of one of the pillars of GR.

Background

BH perturbation theory beyond GR is well established in the case of nonspinning background solutions. Extending seminal work done in GR Vishveshwara (1970); Regge and Wheeler (1957); Zerilli (1970); Chandrasekhar (1998), the BH metric is approximated as $g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, where

$g^{(0)}_{\mu\nu}$ is the background solution, namely the static BH metric that solves the modified Einstein equations in a given theory, whereas $h_{\mu\nu} \ll 1$ are the metric perturbations. Likewise, all possible extra fields (e.g. the scalar field in a scalar-tensor theory) are linearized around their own background value. Perturbations of spherically symmetric objects can be conveniently decomposed in a basis of spherical harmonics, and modes with different harmonic indices (l, m) and different parity decouple from each other.

At linear order, the dynamics is described by two systems of ordinary differential equations: the axial (or odd parity) sector and the polar (or even parity) sector. When supplemented by physical boundary conditions at the horizon and at infinity Kokkotas and Schmidt (1999); Berti *et al.* (2009), each resulting linear system defines an eigenvalue problem whose solutions are the (complex) QNMs, $\omega_{lmn} - i/\tau_{lmn}$. Remarkably, for a Schwarzschild BH within GR the odd and even parity sectors are isospectral Chandrasekhar (1998), whereas this property is generically broken in other gravity theories.

Perturbations of spinning BHs beyond GR are much more involved. In GR, the gravitational perturbations of a Kerr BH can be separated using the Newman-Penrose formalism Teukolsky (1973); Chandrasekhar (1998) and the corresponding QNMs are described by a single master equation. This property does not generically hold beyond GR or for other classes of modes. To treat more generic cases, one could perform a perturbative analysis in the spin (the so-called slow-rotation approximation Pani *et al.* (2012a); Pani (2013)) or instead solve the corresponding set of partial differential equations with spectral methods and other elliptic solvers Dias *et al.* (2016). In general, the spectrum of spinning BHs beyond GR is richer and more difficult to study. This fact has limited the development of parametrized approaches to ringdown tests Barausse *et al.* (2014), which clearly require taking into account the spin of the final object.

Remarkably, there is a tight relation between the BH QNMs in the eikonal limit ($l \gg 1$) and some geodesic properties associated to the spherical photon orbit (the photon sphere) Ferrari and Mashhoon (1984); Cardoso *et al.* (2009); Yang *et al.* (2012). This "null geodesic correspondence" is useful as it requires only manipulation of background quantities which are easy to obtain. Furthermore, it provides a clear physical insight into the BH QNMs in terms of waves trapped within the photon sphere, slowly leaking out on a timescale given by the geodesic instability time scale. Within this approximation, the QNMs of BHs beyond GR have been recently studied in Refs. Blazquez-Salcedo *et al.* (2016) and a parametrized approach has been proposed in Ref. Glampedakis *et al.* (2017). There are however two important limitations. First, the correspondence is strictly valid only in the eikonal limit, $l \gg 1$, whereas the GW signal is typically dominated by the lowest-l modes. More importantly, the geodesic properties are "kinematical" and do not take into account dynamical aspects, e.g. those related to extra degrees of freedom Blazquez-Salcedo *et al.* (2016) or nonminimal couplings Konoplya and Stuchlík (2017). For example, Schwarzschild BHs in two different theories of gravity will share the same geodesics but will have in general different QNM spectra Barausse and Sotiriou (2008); Blazquez-Salcedo *et al.* (2016).

Signatures

There are several distinctive features of linearized BH dynamics that can be used to perform tests of gravity in the strong-field regime.

Ringdown tests & the no-hair theorem

For BBH mergers within GR, the QNMs excited to larger amplitudes are usually the $(2, 2, 0)$ and $(3, 3, 0)$ gravitational modes Buonanno *et al.* (2007); Berti *et al.* (2007a); Barausse *et al.* (2012c); Baibhav *et al.* (2018). Because the Kerr BH depends only on two parameters, extracting ω_{220} and τ_{220} allows to estimate the mass and spin of the final object, whereas extracting further subleading modes provides multiple independent consistency checks of the Kerr metric, since the QNMs are generically different in extensions of GR. Since QNMs probe a highly dynamical aspect of the theory, the latter statement is true even for those theories in which the Kerr metric is the only stationary vacuum solution Barausse and Sotiriou (2008). These tests requires high SNR in the ringdown phase and will be best performed with next generation detectors, especially with LISA Berti *et al.* (2005, 2006, 2007b, 2016), although coherent mode-stacking methods may be feasible also with advanced ground-based detectors Yang *et al.*

(2017). Furthermore, the ability to perform accurate tests will rely on understanding theoretical issues such the starting time of the ringdown Baibhav *et al.* (2018); Bhagwat *et al.* (2018) and on the modelling of higher harmonics Brito *et al.* (2018). Such tests are based on the prompt ringdown response and implicitly assume that the remnant object has an horizon. If an ultra-compact exotic compact object rather than a BH forms as a results of beyond-GR corrections, the ringdown signal depends strongly on the final object's compactness. If the compactness is comparable or slightly larger than that of a neutron star, the prompt ringdown will show distinctive signatures Pani *et al.* (2009); Macedo *et al.* (2013a); Chirenti and Rezzolla (2016). On the other hand, for objects as compact as BHs, the prompt ringdown is identical to that of a Kerr BH, but the signal is characterized by "echoes" at late times Cardoso *et al.* (2016a,b); Cardoso and Pani (2017) (see also Sec. 25.3.4).

Extra ringdown modes

In addition to the shift of gravitational modes discussed above, virtually any extension of GR predicts extra degrees of freedom Berti *et al.* (2015) which may be excited during the merger Blazquez-Salcedo *et al.* (2016); Okounkova *et al.* (2017); Tattersall *et al.* (2018); Tattersall and Ferreira (2018). Although the amplitude of such modes is still poorly estimated, this type of tests calls for novel ringdown searches including two modes of different nature Brustein *et al.* (2017a).

Isospectrality

Isospectrality of Schwarzschild BHs in GR has a bearing also on Kerr BHs. Since this property is generically broken in alternative theories, a clear signature of beyond-GR physics would be the appearance of a "mode doublet" (i.e., two modes with very similar frequency and damping time) in the waveform Barausse *et al.* (2014); Blazquez-Salcedo *et al.* (2016).

Instabilities

BHs in Einstein's theory are (linearly mode) stable. A notable exception relates to the superradiant instability triggered by minimally-coupled light bosonic fields Brito *et al.* (2015a) (see also Section 25.3.5 below). For astrophysical BHs, this instability is ineffective except for ultralight bosons with masses below 10^{-10} eV, in which case it has important phenomenological consequences (see Sec. 25.3.5). The situation is different in modified gravity, for example certain BH solutions are known to be unstable in scalar-tensor theories in the presence of matter Cardoso *et al.* (2013,b), in theories with higher-order curvature couplings Silva *et al.* (2018); Blázquez-Salcedo *et al.* (2018), and in massive (bi)-gravity Babichev and Fabbri (2013); Brito *et al.* (2013). These instabilities are not necessarily pathological, but simply indicate the existence of a different, stable, "ground state" in the spectrum of BH solutions to a given theory. Finally, as discussed in Sec. 25.3.4, extensions of GR might predict exotic compact objects without an event horizon. These objects are typically unstable and their instability can lead to peculiar signatures also in the GW signal Cardoso and Pani (2017); Cunha *et al.* (2017).

A parametrised ringdown approach?

It should be clear from the previous discussion that the Teukolsky formalism is insufficient to study BH perturbation theory in alternative theories of gravity. Extending it is hence a major open problem. One might be even more ambitious and attempt to develop a theory-agnostic parametrisation for the ringdown, similar in spirit to that discussed in Sec. 25.3.3 for the inspiral phase. This would generally be a two-faceted problem, since the quiescent BH that acts as the endpoint of evolution is not a Kerr BH, in general. Hence, one first needs to parametrise deviations from the Kerr spacetime and then propose a meaningful and accurate parametrisation of the perturbations around such non-Kerr background.

There have been several attempts to parametrise stationary deviations from the Kerr spacetime. *Bumpy* metrics were constructed in Refs. Collins and Hughes (2004); Vigeland and

Hughes (2010); Vigeland (2010) within GR, starting from a perturbation around the Schwarzschild metric and applying the Newman-Janis transformation Newman and Janis (1965) to construct a rotating configuration. The *quasi-Kerr* metric uses the Hartle-Thorne metric Hartle and Thorne (1968), valid for slowly-rotating configurations, and modifies the quadrupole moment Glampedakis and Babak (2006). Non-Kerr metrics can also be found, with the extra requirement that a Carter-like, second-order Killing tensor exists Vigeland *et al.* (2011). This approach and metric were later simplified in Ref. Johannsen (2013a). Note however that rotating BH solutions in alternative theories of gravity do not possess such a Killing tensor in general. Johannsen and Psaltis Johannsen and Psaltis (2011) proposed the *modified Kerr* metric by starting from a spherically symmetric and static metric (that does not necessarily satisfy the Einstein equations) and applying the Newman-Janis transformation. This approach was later extended in Ref. Cardoso *et al.* (2014a). Finally, modified axisymmetric spacetime geometries can be found by adopting a continued-fraction expansion to obtain a rapid convergence in the series Rezzolla and Zhidenko (2014); Konoplya *et al.* (2016). See e.g. Refs. Lin *et al.* (2015); Ghasemi-Nodehi and Bambi (2016) for other parameterizations for deviations from Kerr. Properties of various parameterized Kerr metrics have been studied in Johannsen (2013b). See also Ref. Yagi and Stein (2016) for more details on such generic parameterization of the Kerr metric.

It should be stressed that a shortfall of all of the aforementioned parametrisation is that they do not have a clear physical interpretation and this makes them rather *ad hoc*. Moreover, they only address half of the problem of parametrizing the ringdown. So far their use in modelling waveforms has been limited, but see Refs. Gair and Yunes (2011); Moore *et al.* (2017) and Ref. Glampedakis *et al.* (2017) for applications to extreme-mass ratio inspirals and BH ringdown respectively. At this stage there has been very little progress on how one can take the second step, *i.e.* parametrise linear perturbations around such spacetimes in a theory-agnostic way. Along these lines, a general theory of gravitational perturbations of a Schwarzschild metric has been developed in Ref. Tattersall *et al.* (2018) and applied to Horndeski theory in Ref. Tattersall and Ferreira (2018).

Merger, numerics, and complete waveforms beyond General Relativity

Contributors: C. Palenzuela, T. P. Sotiriou

The merger of binary compact objects will test the highly dynamical and strongly non-linear regime of gravity, that can only be modelled by using numerical simulations. As already discussed above, the recent direct detection of GWs from BBHs Abbott *et al.* (2016a,b, 2017c,c,e), and of the NSB merger Abbott *et al.* (2017f) with an associated short GRB Abbott *et al.* (2017a) and a plethora of concurrent electromagnetic signals from the same source Abbott *et al.* (2017g) has already provided constraints on deviations from GR in various forms and contexts (*e.g.* Yunes *et al.* (2016); Abbott *et al.* (2016); Sakstein and Jain (2017); Ezquiaga and Zumalacárregui (2017); Creminelli and Vernizzi (2017); Baker *et al.* (2017); Emir Gumrukcuoglu *et al.* (2018); Oost *et al.* (2018) respectively. However, most of these constraints use either partial, potentially parametrised, waveforms or rely on propagation effects. In fact, the true potential of testing GR is currently limited by the lack of knowledge of GW emission during the merger phase in alternatives to GR Yunes *et al.* (2016). This problem is particularly acute for heavier BH mergers, where only a short part of the inspiral is detected.

This suggests that constraints could be strengthened significantly in most cases if one had complete, theory-specific, waveforms. However, performing stable and accurate numerical simulations that would produce such waveforms requires an understanding of several complex issues. Probably the first among them is the well-posedness of the system of equations that describe evolution of a given alternative scenario to GR. In the next section we briefly describe the issue of well-posedness and discuss some techniques that have been used so far to obtain a well-posed evolution system in alternative theories. In Sec. 25.3.3 we overview some recent numerical studies of nonlinear evolution beyond GR.

Initial value formulation and predictivity beyond GR

Modelling the evolution of a binary system for given initial data is a type of initial value problem (IVP). An IVP is well-posed if the solution exists, is unique and does not change abruptly for small changes in the data. A theory with an ill-posed IVP cannot make predictions. The IVP is well-posed in GR Fourès-Bruhat (1952) but it is not clear if this is true for most

of its contenders. This is a vastly overlooked issue and a systematic exploration of the IVP in many interesting alternative theories, such as those discussed in Sec. 25.3.2, is pending.

A class of alternative theories of gravity that are known to be well-posed is scalar-tensor theories described by action (25.21). As discussed in Sec. 25.3.2, after suitable field redefinitions, these theories take the form of GR plus a scalar field with a canonical kinetic term and potential non-minimal couplings between the scalar and standard model fields, see action (25.22). Since these couplings do not contain more than two derivatives, one can argue for well-posedness using the known results for GR and the fact that lower-order derivative terms are not relevant for this discussion. Interestingly, most alternative theories actually include modifications to the leading order derivative terms in the modified Einstein's equations, so a theory-specific study is necessary. This has been attempted in very few cases and results are mostly very preliminary. In particular, there is evidence that dynamical Chern-Simons gravity is ill-posed Delsate *et al.* (2015). Certain generalised scalar-tensor theories appear to be ill-posed in a generalised harmonic gauge when linearised over a generic, weak field background Papallo (2017); however, note that this result is gauge-dependent, and hence not conclusive. Finally, in certain Lorentz-violating theories that exhibit instantaneous propagation, describing evolution might require solving a mixture of hyperbolic and elliptic equations (where the latter are not constraints as in GR) Bhattacharyya *et al.* (2016a,b).

Well-posedness and effective field theories

One is tempted to use well-posedness as a selection criterion for alternative theories of gravity, as a physical theory certainly needs to be predictive (in an appropriate sense). However, alternatives to GR can be thought of as effective field theories — truncations of a larger theory and hence inherently limited in their range of validity. This complicates the question of what one should do when a given theory turns out to be ill-posed. In fact, it even affects how one should view its field equations and the dynamics they describe in the first place. Effective field theories (EFTs) can often contain spurious degrees of freedom (*e.g.* ghosts) that lead to pathological dynamics. In linearised theories it is easy to remove such degrees of freedom and the corresponding pathologies, but there is no unique prescription to doing so in general. Hence, instead of setting aside theories that appear to be ill-posed when taken at face value, perhaps one should be looking for a way to 'cure' them and render them predictive at nonlinear level.

A very well-known EFT, viscous relativistic hydrodynamics, requires such 'curing' to control undesirable effects of higher order derivatives and a prescription for doing so has been given long ago Israel (1976); Israel and Stewart (1976); Israel and Stewart (1979). A similar prescription applicable to gravity theories has been given recently Cayuso *et al.* (2017). Roughly speaking, this approach treats the theory as a gradient expansion and, hence, it considers as the cause of the pathologies runaway energy transfer to the ultraviolet, that in turn renders the gradient expansion inapplicable. As a results, it attempts to modify the equations so as to prevent such transfer and to ensure that the system remains within the regime of validity of the effective descriptions throughout the evolution.

Another approach is to consider the theory as arising from a perturbative expansion is a certain parameter, say λ. If that were the case, then higher order corrections in λ have been neglected and, consequently, the solutions can only be trusted only up to a certain order in λ. Moreover, they have to be perturbatively close (in λ) to solutions with $\lambda = 0$, which are solution of GR. Hence, one can iteratively generate fully dynamical solutions order-by-order in λ. This process is effectively an *order-reduction* algorithm and yields a well-posed system of equations. It has a long history in gravity theories in different contexts (*e.g.* Bel and Zia (1985); Simon (1990); Sotiriou (2009)), but it has only recently been used for nonlinear, dynamical evolution in alternative theories Benkel *et al.* (2016, 2017); Okounkova *et al.* (2017).

These two 'cures' do not necessarily give the same results. Moreover, there is no reason to believe that there cannot be other ways to address this problem, so this remains a crucial open question. In principle, the way that an EFT is obtained from a more fundamental theory should strongly suggest which is the way forward when considering nonlinear evolution. However, in practice one often starts with an EFT and hopes to eventually relate it to some fundamental theory. Hence, it seems wise to consider all possible approaches. In principle different theories might require different approaches.

Numerical simulations in alternative theories

As mentioned above, one can straightforwardly argue that the IVP is well-posed in standard scalar-tensor theories described by action (25.21). However, as will be discussed in detail in Sec. 25.3.4, BHs in this class of theories are generically identical to GR and carry no scalar configuration. Hence, even though gravitational radiation in these theories can in principle contain a longitudinal component, it is highly unlikely it will get excited in a BBH. In Sec. 25.3.4 we outline the conditions under which BHs can differ from their GR counterparts in standard scalar-tensor theories.[15] When these conditions are satisfied there should be an imprint in GWs from BH binaries. It is worth highlighting here a couple of cases where numerical simulations have to be used to address this question. The first has to do with the role of asymptotics. It has been shown that time-dependent asymptotic for the scalar could lead to scalar radiation during the coalescence Berti *et al.* (2013), though this emission would probably be undetectable for realistic asymptotic values of the scalar field gradient. The second case has to do with whether matter in the vicinity of a BH can force it to develop a non-trivial configuration. This has been shown in idealised setups only in Refs. Cardoso *et al.* (2013,b). However, numerical simulations for the same phenomenon in NSs have been performed in Barausse *et al.* (2013); Shibata *et al.* (2014); Palenzuela *et al.* (2014).

$f(R)$ theories of gravity (see Ref. Sotiriou and Faraoni (2010) for a review), which are dynamically equivalent to a specific subclass of scalar-tensor theories, are also well-posed Lanahan-Tremblay and Faraoni (2007); Sotiriou and Faraoni (2010). A comparative study of NSB mergers in GR with those of a one-parameter model of $f(R) = R + aR^2$ gravity is performed in Sagunski *et al.* (2018).

A well-posed extension of scalar-tensor theories is Einstein-Maxwell-Dilaton gravity. It has its origin in low energy approximations of string theory and it includes, apart from the metric and a scalar, a U(1) gauge field. The scalar field couples exponentially to the gauge field, allowing for deviations from GR even for BHs with asymptotically constant scalar field. BBH simulations have shown that these deviations are rather small for reasonable values of the hidden charge Hirschmann *et al.* (2018), leading to weak constraints on the free parameters of the theory.

Finally, some first numerical results have recently appeared in scalar-Gauss–Bonnet gravity, and specifically the theory described by action (25.30), and in Chern-Simons gravity (see Sec. 25.3.2 for more details on the theories). Refs. Benkel *et al.* (2017, 2016) studied scalar evolution in scalar-Gauss–Bonnet gravity and Ref. Okounkova *et al.* (2017) performed the first binary evolution in Chern-Simons gravity. These results are notable for using a perturbative expansion in the free parameter of the theory, described in the previous section, in order to circumvent potential issues with well-posedness (as discussed above, if the field equation are taken at face value, well-posedness is known to be an issue for Chern-Simons gravity Delsate *et al.* (2015) and it might be an issue for scalar-Gauss–Bonnet gravity Papallo (2017)).

25.3.4 The nature of Compact Objects

No-hair theorems

Contributors: C. Herdeiro, T. P. Sotiriou

The discovery of the Schwarzschild solution in 1915-16 Schwarzschild (1916), shortly after Einstein's presentation of GR Einstein (1915), triggered a half-a-century long quest for its rotating counterpart, which ended with the discovery of the Kerr solution in 1963 Kerr (1963) - see Kerr (2007) for a historical account of this discovery. At this time, unlike in Schwarzschild's epoch, it was already considered plausible that these metrics could represent the endpoint of the gravitational collapse of stars, even though the name *black hole* to describe them only became widespread after being used by Wheeler in 1967-68 Wheeler and Ford (1998).

The extraordinary significance of the Kerr metric became clear with the establishment of the *uniqueness theorems* for BHs in GR - see Chrusciel *et al.* (2012) for a review. The first such theorem was that of Israel's for the static case Israel (1967). Then, Carter Carter (1971) and Robinson Robinson (1975) constructed a theorem stating: *An asymptotically flat stationary and axisymmetric vacuum spacetime that is non-singular on and outside a connected event horizon is*

[15] It might hence be preferable for readers that are not familiar with the literature on hairy BHs to return to this section after going through Secs. 25.3.4 and 25.3.4.

a member of the two-parameter Kerr family. The axial symmetry assumption was subsequently shown to be unnecessary (assuming analyticity, nondegenerary, and causality Carter (1997)); for BHs, stationarity actually implies axial symmetry, via the "rigidity theorem," which relates the teleologically defined "event horizon" to the locally defined "Killing horizon" Hawking (1972b). The upshot of these theorems is that a stationary vacuum BH, despite possessing an infinite number of non-trivial, appropriately defined multipolar moments Hansen (1974), has only two degrees of freedom: its mass and angular momentum. This simplicity was written in stone by Wheeler's dictum "*BHs have no hair*" Ruffini and Wheeler (1971).

In parallel to these developments the astrophysical evidence for BHs piled up over the last half century - see *e.g.* Narayan and McClintock (2013). In fact, the very conference where the Kerr solution was first presented (the first *Texas symposium on relativistic astrophysics*) held in December 1963, was largely motivated by the discovery of *quasars* in the 1950s and the growing belief that relativistic phenomena related to highly compact objects should be at the source of the extraordinary energies emitted by such very distant objects Schucking (1989). Gravitational collapse was envisaged to play a key role in the formation of these highly compact objects and such collapse starts from matter distributions, rather than vacuum. Thus, one may ask if BHs in the presence of matter, rather than in vacuum, still have *no-hair*. In this respect, Wheeler's dictum was a conjecture, rather than a synthetic expression of the uniqueness theorems. It hypothesised a much more general and ambitious conclusion than that allowed solely by these theorems. The conjecture stated that: *gravitational collapse leads to equilibrium BHs uniquely determined by mass, angular momentum and electric charge -asymptotically measured quantities subject to a Gauss law and no other independent characteristics (hair)* Misner *et al.* (1973). Here, the Gauss law plays a key role to single out the physical properties that survive gravitational collapse, because they are anchored to a fundamental (gauged) symmetry, whose conserved charge cannot be cloaked by the event horizon. The uniqueness theorems (which can be generalised to electro-vacuum Chrusciel *et al.* (2012)), together with the no-hair conjecture, lay down the foundation for the *Kerr hypothesis*, that the myriad of BHs that exist in the Cosmos are well described, when near equilibrium, by the Kerr metric. This astonishing realisation was elegantly summarised by S. Chandrasekhar Chandrasekhar (1987): *In my entire scientific life, extending over forty-five years, the most shattering experience has been the realisation that an exact solution of Einstein's field equations of GR, discovered by the New Zealand mathematician, Roy Kerr, provides the absolutely exact representation of untold numbers of massive BHs that populate the Universe.*

The Kerr hypothesis can be tested both theoretically and by confrontation with observations. On the theory front, the key question is whether BHs that are not described by the Kerr metric can constitute solutions of reasonable field equations that describe gravity and potentially other fields. Additionally, one can ask whether such BH solutions can form dynamically and are (sufficiently) stable as to be astrophysically relevant. On the observational front, the question is to which extent the BHs we observe are compatible with the Kerr hypothesis and what constraints can one extract from that.

A set of results on the non-existence of non-Kerr BHs in specific models, either including different matter terms in Einstein's GR or by considering theories of gravity beyond Einstein's GR (or both) have been established since the 1970s and are known as *no-hair theorems* - see *e.g.* the reviews Bekenstein (1996); Herdeiro and Radu (2015); Sotiriou (2015b); Volkov (2017).[16] No-hair theorems apply to specific models or classes of models and rely on assumptions regarding symmetries, asymptotics, etc. As will become evident in the next section, dropping one or more of these assumptions in order to circumvent the corresponding no-hair theorem can be a good tactic for finding non-Kerr BHs (see also Ref. Sotiriou (2015b) for a discussion). More generally, understanding the various sort of theorems, their assumptions and limitations is instructive.

A large body of work was dedicated to the case of scalar hair, partly due to the conceptual and technical simplicity of scalar fields. Indeed, one of the earliest examples of a no-hair theorem was provided by Chase Chase (1970), following Penney (1968). Chase inquired if a static, regular BH spacetime could be found in GR minimally coupled to a real, massless scalar field. Without assuming spherical symmetry, he could show that the scalar field necessarily becomes singular at a simply-connected event horizon. Thus, a static BH cannot support scalar hair,

[16] Often, the uniqueness theorems are also called no-hair theorems, under the rationale that they show that in vacuum (or electro-vacuum), BHs have no independent multipolar hair, and only two (or three, ignoring magnetic charge) degrees of freedom. Here we use no-hair theorems to refer to no-go results for non-Kerr BHs in models beyond electro-vacuum GR.

in this model. The 1970s witnessed the formulation of influential no-hair theorems, notably, by Bekenstein, who developed a different approach for establishing the non-existence of scalar hair, applicable to higher spin fields as well Bekenstein (1972a,b,c). An elegant no-hair theorem was given by Hawking Hawking (1972) for minimally coupled scalar fields without self interactions and for Brans-Dicke theory Brans and Dicke (1961). Hawking's theorem assumes stationarity (as opposed to staticity) and no other symmetry and its proof is particularly succinct. This theorem has been later generalised by Sotiriou and Faraoni Sotiriou and Faraoni (2012) to scalars that exhibit self interactions and to the class of scalar-tensor theories described by action (25.21). Hui and Nicolis Hui and Nicolis (2013) have proven a no-hair theorem for shift-symmetric (and hence massless) scalar fields that belong to the Horndeski class discussed in Sec. 25.3.2. This proof assumes staticity and spherical symmetry, though it can be easily generalized to slowly-rotating BHs Sotiriou and Zhou (2014a). It is also subject to a notable exception, as pointed out in Ref. Sotiriou and Zhou (2014a): a linear coupling between the scalar and the Gauss-Bonnet invariant is shift symmetric and yet circumvents the theorem [see Sec. 25.3.2 and action (25.30)]. Finally, a no-hair theorem has been given in Ref. Silva *et al.* (2018) for stationary BH solutions for the theory described by action (25.31), provided $f''(\phi_0)\mathcal{G} < 0$; a similar proof, but restricted to spherical symmetry, can be found in Ref. Antoniou *et al.* (2018).

Non-Kerr black holes

Contributors: C. Herdeiro, T. P. Sotiriou

Despite the many no-hair theorems discussed above, hairy BH solutions are known to exist in many different contexts. In GR, the 1980s and 1990s saw the construction of a variety of hairy BH solutions, typically in theories with non-linear matter sources - see *e.g.* the reviews Bizon (1994); Bekenstein (1996); Volkov and Gal'tsov (1999). The paradigmatic example are the coloured BHs, found in Einstein-Yang-Mills theory Volkov and Galtsov (1989, 1990); Künzle and Masood-ul-Alam (1990); Bizon (1990). However, these BHs are unstable and have no known formation mechanism. Hence, they should not be considered as counter examples to the weak no-hair conjecture, and it is unlikely that they play a role in the astrophysical scene.

Below we will review some more recent attempt to find hairy BH solutions that are potentially astrophysically relevant. We first focus on cases that are covered by no-hair theorems and discuss how dropping certain assumptions can lead to hairy BHs. We then move on to various cases of hairy BHs in theories and models that are simply not covered by no-hair theorems. This is not meant to be an exhaustive review but merely a discussion of some illuminating examples in order to highlight the interesting BH physics that GWs could potentially probe.

Circumventing no-hair theorems

No-hair theorems rely on assumptions, such as: (i) the asymptotic flatness of the metric and other fields; (ii) stationarity (or more restrictive symmetries); (iii) the absence of matter; (iv) stability, energy conditions and other theorem-specific conditions. There is no doubt that removing any one of these assumptions leads to BH hair. For example, standard scalar-tensor theories described by the action (25.21) are covered by the no-hair theorems discussed in the previous section Chase (1970); Bekenstein (1972a,b,c); Hawking (1972); Sotiriou and Faraoni (2012). Nonetheless, BHs with scalar hair exist in these theories if one allows for anti-de Sitter (AdS) asymptotics (*e.g.* Ref. Torii *et al.* (2001)), or attempts to "embed" the BHs in an evolving universe Jacobson (1999), or allows for matter to be in their vicinity Cardoso *et al.* (2013). The case of AdS asymptotics, though interesting theoretically, is not relevant for astrophysics. The fact that cosmic evolution could potentially endow astrophysical BHs with scalar hair is certainly enticing but the effect should be very small Horbatsch and Burgess (2012). Finally, it is not yet clear if the presence of matter in the vicinity of a BH could induce a scalar charge that is detectable with the current observations. See Ref. Sotiriou (2015b) for a more detailed discussion. Circumventing the theorems by violating stability arguments will be discussed in Sec. 25.3.4.

A perhaps less obvious way to obtain hairy solutions is to strictly impose the symmetry assumptions on the metric only and relax them for other fields. Even though the field equations relate the fields their symmetries do not need to match exactly in order to be compatible (see, for instance, Ref. Smolić (2017) for a recent discussion). A well-studied case is that of a complex, massive scalar field minimally coupled to gravity Herdeiro and Radu (2014, 2015b). The scalar

has a time-dependent phase, but its stress-energy tensor remains time-independent (thanks to some tuning) and the metric can remain stationary. See also Kleihaus *et al.* (2015); Herdeiro *et al.* (2015) for generalisations and Chodosh and Shlapentokh-Rothman (2017) for an existence proof of the solutions. BHs with Proca (massive vector) hair have also been found using the same approach Herdeiro *et al.* (2016).

Whether or not these hairy BH are relevant for astrophysical phenomena depends on three main factors: (1) the existence of (ultra-light) massive bosonic fields in Nature; (2) the existence of a formation mechanism and (3) their stability properties. The first factor is an open issue. Ultra-light bosonic fields of the sort necessary for the existence of these BHs with astrophysical masses do not occur in the standard model of particle physics. Some beyond the standard model scenarios, however, motivate the existence of this type of "matter," notably the axiverse scenario in string theory Arvanitaki *et al.* (2010). The second point has been positively answered by fully non-linear numerical simulations East and Pretorius (2017); Herdeiro and Radu (2017). There is at least one formation channel for these BHs, via the superradiant instability of Kerr BHs, in the presence of ultralight bosonic fields - see Brito *et al.* (2015a) for a review of this instability. The hairy BHs that result from this dynamical process, however, are never very hairy, being always rather Kerr-like. Concerning the third point, it has been recognised since their discovery, that these BHs could be afflicted by the superradiant instability themselves Herdeiro and Radu (2015b, 2014b). Recent work Ganchev and Santos (2018) succeeded in computing the corresponding timescales, and reported that the timescale of the strongest superradiant instability that can afflict hairy BH is roughly 1000 times longer than that of the strongest instability that can afflict the Kerr BH. This study, albeit based on the analysis of a very small sample of solutions, leaves room for the possibility that some of these BHs can form dynamically and be sufficiently stable to play a role in astrophysical processes Degollado *et al.* (2018). However, a more detailed analysis needs to be performed before definite conclusions can be drawn.

Hairy BHs have also been found in certain shift-symmetric scalar tensor theories by allowing the scalar to depend linearly on time while requiring that the metric be static Babichev and Charmousis (2014); Babichev *et al.* (2017a). This is possible because shift symmetry implies that the scalar only appears in the equations through its gradient and the linear time dependence renders the gradient time independent. The linear stability on such solutions has been explored in Refs. Ogawa *et al.* (2016); Babichev *et al.* (2018a,b). It remains largely unexplored whether these BHs can form dynamically and hence whether they are relevant for astrophysics.

Black holes with scalar hair

The most straightforward way to find hairy BH solutions is to consider theories that are not covered by no-hair theorems. In the case of scalar-tensor theories, it is known that couplings between the scalar (or pseudoescalar) and quadratic curvature invariants, such as the Gauss-Bonnet invariant $\mathcal{G} \equiv R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ or the Pontryagin density $*R^{\alpha}{}_{\beta}{}^{\gamma\delta}R^{\beta}{}_{\alpha\gamma\delta}$, can lead to scalar hair, see *e.g.* Campbell *et al.* (1992); Kanti *et al.* (1996); Yunes and Stein (2011); Sotiriou and Zhou (2014a,b). Indeed, the existence of hairy BHs singles out specific class of theories, such as dynamical Chern-Simons (dCS) gravity Jackiw and Pi (2003); Alexander and Yunes (2009) and the scalar-Gauss-Bonnet theories described by the action (25.31) of Sec. 25.3.2 (which have hairy BH solutions provided that $f'(\phi_0) \neq 0$ for any constant ϕ_0 Sotiriou and Zhou (2014a); Silva *et al.* (2018)). Sec. 25.3.2 already contains a discussion about these theories and their BH phenomenology, so we refer the reader there for details. See also Sec. 25.3.3 for a discussion on the first attempts to simulate dynamical evolution of hairy BHs and to produce waveforms for binaries that contain them.

Black hole scalarization

In the previous section the focus was on theories that are not covered by no hair theorems and have hairy BH for all masses. An interesting alternative was recently pointed out in Refs. Doneva and Yazadjiev (2018); Silva *et al.* (2018): that certain theories that marginally manage to escape no-hair theorems Silva *et al.* (2018); Antoniou *et al.* (2018) can have hairy BHs only in certain mass ranges, outside which BHs are identical to those of GR. The theories belong in the class describe by action (25.31) and the phenomenon resembles the"spontaneous scalarization" of stars that happens in certain models of the standard scalar-tensor theories

of action (25.21); see Sec. 25.3.2 for more details. In the mass ranges where hairy BHs exist the GR BHs of the same mass are expected to be unstable and this instability is supposed to gives rise to the scalar hair. However, depending on the model, the hairy solutions can also be unstable Blázquez-Salcedo *et al.* (2018) and this issue requires further investigation. It is also not clear if other theories can also exhibit BH scalarization and the astrophysical significance of the effect has not yet be explored.

Black holes in theories with vector fields and massive/bimetric theories

In analogy to the generalised scalar-tensor theories discussed in Sec. 25.3.2 and described by action (25.25), one can construct the most general vector-tensor theories with second-order equations of motion. These theories can be considered as generalised Proca theories and they contain new vector interactions Heisenberg (2014); Beltran Jimenez and Heisenberg (2016). Their phenomenology can be distinct from that of Horndeski scalars and BH solutions with vector hair are known to exist Chagoya *et al.* (2016); Minamitsuji (2016); Heisenberg *et al.* (2017,b); Fan (2016); Cisterna *et al.* (2016); Babichev *et al.* (2017). Depending on the order of derivative interactions, these BH solutions can have primary (*i.e.* the new charge is independent) or secondary (*i.e.* the new charge is not independent) Proca hair. The presence of a temporal vector component significantly enlarges the possibility for the existence of hairy BH solutions without the need of tuning the models Heisenberg *et al.* (2017,b).

Horndeski scalar-tensor and the generalised Proca theories can be unified into scalar-vector-tensor theories for both the gauge invariant and the gauge broken cases Heisenberg (2018). In the $U(1)$ gauge invariant and shift symmetric theories the presence of cubic scalar-vector-tensor interactions is crucial for obtaining scalar hair, which manifests itself around the event horizon. The inclusion of the quartic order scalar-vector-tensor interactions enables the presence of regular BH solutions endowed with scalar and vector hairs Heisenberg and Tsujikawa (2018). It is worth mentioning that this new type of hairy BH solutions are stable against odd-parity perturbations Heisenberg *et al.* (2018).

In massive and bimetric gravity theories the properties of the BH solutions depend heavily on choices one makes for the fiducial or dynamical second metric Volkov (2012, 2013); Brito *et al.* (2013b); Volkov (2015); Babichev and Brito (2015); Torsello *et al.* (2017). If the two metrics are forced to be diagonal in the same coordinate system (bidiagonal solutions) their horizons need to coincide if they are not singular Deffayet and Jacobson (2012). It should be stressed that generically there is not enough coordinate freedom to enforce the metrics to be bidiagonal. The analysis of linear perturbations reveals also an unstable mode with a Gregory-Laflamme instability Babichev and Fabbri (2013); Brito *et al.* (2013), which remains in bi-Kerr geometry. Perturbations of the non-bidiagonal geometry is better behaved Babichev and Fabbri (2014). Non-singular and time dependent numerical solutions were recently found in Rosen (2017).

Black holes in Lorentz-violating theories

Lorentz symmetry is central to the definition of a BH thanks to the assumption that the speed of light is the maximum attainable speed. Superluminal propagation is typical of Lorentz violating theories[17] and GW observations have already given a spectacular constraint: the detection of a NSB merger (GW170817) with coincident gamma ray emission has constrained the speed of GWs to a part in 10^{15} Abbott *et al.* (2017a). However, Lorentz-violating theories generically exhibit extra polarizations Sotiriou (2018), whose speed remains virtually unconstrained Emir Gumrukcuoglu *et al.* (2018). See also Sec. 25.3.3. Moreover, BHs in such theories are expected to always be hairy. The reason has essentially been explained in the discussion of Sec. 25.3.2: Lorentz-violating theories can generally be written in a covariant way (potentially after restoring diffeomorphism invariance through the introduction of a Stueckelberg field) and in this setup Lorentz symmetry breaking can be attributed to some extra field that has the property of being nontrivial in any solution to the field equation. That same property will then endow BHs with hair. Indeed, this is known to be true for the theories reviewed in Sec. 25.3.2. The structure of such BHs depends on the causal structure of the corresponding theory.

[17]It might be worth stressing that superluminal propagation does not necessarily lead to causal conundrums in Lorentz-violating theories.

In particular, in Einstein-aether theory (æ-theory), though speeds of linear perturbations can exceed the speed of light, they satisfy an upper bound set by the choice of the c_i parameters. Indeed, massless excitations travel along null cones of effective metrics composed by the metric that defines light propagation and the aether Eling and Jacobson (2006). This makes the causal structure quasi-relativistic, when one adopts the perspective of the effective metric with the widest null cone Bhattacharyya *et al.* (2016b). Stationary BHs turn out to have multiple nested horizons, each of which is a Killing horizon of one of the effective metrics and acts as a causal boundary of a specific excitation Eling and Jacobson (2006); Barausse *et al.* (2011).

In Hořava gravity there is no maximum speed, as already explained is Sec. 25.3.2 . There is a preferred foliation and all propagating modes have dispersion relations that scale as $\omega^2 \propto k^6$ for large wave numbers k and there is arbitrarily fast propagation. Even at low momenta, where the dispersion relations are truncated to be linear, there is also an instantaneous (elliptic) mode, both at perturbative Blas and Sibiryakov (2011) and nonperturbative level Bhattacharyya *et al.* (2016a). It would be tempting to conclude that BHs cannot exist in Hořava gravity. Nonetheless, there is a new type of causal horizon that allows one to properly define a BH, dubbed the universal horizon Barausse *et al.* (2011); Blas and Sibiryakov (2011). It is not a null surface of any metric, but a spacelike leaf of the preferred foliation that cloaks the singularity. Future-directed signals can only cross it in one direction and this shields the exterior from receiving any signal, even an instantaneous one, from the interior. Universal horizons persist in rotating BHs in Hořava gravity Barausse and Sotiriou (2013b); Sotiriou *et al.* (2014); Bhattacharyya *et al.* (2016b); Barausse and Sotiriou (2013a); Barausse *et al.* (2016) and have been rigorously defined without resorting to symmetries in Ref. Bhattacharyya *et al.* (2016b).

Even though BHs in Lorentz-violating theories and their GR counterparts have very different causal structure, their exteriors can be very similar and hard to tell apart with electromagnetic observations Barausse *et al.* (2011); Barausse and Sotiriou (2013a); Barausse *et al.* (2016). Nevertheless, the fact that Lorentz-violating theories have additional polarisations and their BHs are have hair suggests very strongly that binary systems will emit differently than in GR. Hence, confronting model-dependent waveforms with observations is likely to yields strong constraints for Lorentz violation in gravity.

Horizonless exotic compact objects

Contributors: V. Cardoso, V. Ferrari, P. Pani, F. H. Vincent

BHs are the most dramatic prediction of GR. They are defined by an event horizon, a null-like surface that causally disconnects the interior from our outside world. While initially considered only as curious mathematical solutions to GR, BHs have by now acquired a central role in astrophysics: they are commonly accepted to be the outcome of gravitational collapse, to power active galactic nuclei, and to grow hierarchically through mergers during galaxy evolution. The BH paradigm explains a variety of astrophysical phenomena and is so far the simplest explanation for all observations. It is, however, useful to remember that the only evidence for BHs in our universe is the existence of dark, compact and massive objects. In addition, BHs come hand in hand with singularities and unresolved quantum effects. Hence, it is useful to propose and to study exotic compact objects (ECOs) – dark objects more compact than NSs but without an event horizon.

Perhaps the strongest theoretical motivation to study ECO's follows from quantum gravity. Quantum modifications to GR are expected to shed light on theoretical issues such as the pathological inner structure of Kerr BHs and information loss in BH evaporation. While there is a host of recent research on the quantum structure of BHs, it is not clear whether these quantum effects are of no consequence on physics outside the horizon or will rather lead to new physics that resolves singularities and does away with horizons altogether. The consequence of any such detection, however small the chance, would no less than shake the foundations of physics. As there is no complete quantum gravity approach available yet, the study of ECOs, in various degrees of phenomenology, is absolutely crucial to connect to current GW observations.

In summary, ECOs should be used both as a testing ground to *quantify* the observational evidence for BHs, but also to understand the signatures of alternative proposals and to search for them in GW and electromagnetic data Cardoso and Pani (2017).

Classification: Compact objects can be conveniently classified according to their compactness, M/R, where M and R are the mass and (effective) radius of the object, respectively. NSs have $M/R \approx 0.1 - 0.2$, a Schwarzschild BH has $M/R = 1/2$, whereas a nearly extremal Kerr BH has $M/R \approx 1$. The study of the dynamics of light rays and of GWs shows that

the ability of ECOs to mimic BHs is tied to the existence of an unstable light ring in the geometry Abramowicz *et al.* (2002); Cardoso and Pani (2017,b). Accordingly, two important categories of this classification are Cardoso and Pani (2017,b):

1. *Ultracompact objects (UCOs)*, whose exterior spacetime has a photon sphere. In the static case, this requires $M/R > 1/3$. UCOs are expected to be very similar to BHs in terms of geodesic motion. NSs are not in this category, unless they are unrealistically compact and rapidly spinning.

2. *Clean-photon-sphere objects (ClePhOs)*, so compact that the light travel time from the photon sphere to the surface and back is longer than the characteristic time scale, $\tau_{\rm geo} \sim M$, associated with null geodesics along the photon sphere. These objects are therefore expected to be very similar to BHs at least over dynamical time scales $\sim M$. In the static case, this requires $M/R > 0.492$ Cardoso and Pani (2017,b).

Some models of ECOs have been proposed in attempts to challenge the BH paradigm. Others are motivated by (semiclassical) quantum gravity scenarios that suggest that BHs would either not form at all Mazur and Mottola (2004); Mathur (2005, 2009); Barceló *et al.* (2016); Danielsson *et al.* (2017); Danielsson and Giri (2018); Berthiere *et al.* (2017); Cardoso and Pani (2017b), or that new physics should drastically modify the structure of the horizon Giddings (2013, 2014, 2017).

In the presence of exotic matter fields (e.g. ultralight scalars), even classical GR can lead to ECOs. The most characteristic case is perhaps that of *boson stars* Feinblum and McKinley (1968); Kaup (1968); Ruffini and Bonazzola (1969): self-gravitating solutions of the Einstein-Klein-Gordon theory. They have no event horizon, no hard surface, and are regular in their interior. Depending on the scalar self-interactions, they can be as massive as supermassive compact objects and – when rapidly spinning – as compact as UCOs. Further details about these objects can be found elsewhere Liebling and Palenzuela (2017). Though boson stars are solutions of a well defined theory, most ECO-candidates currently arise from phenomenological considerations and employ some level of speculation. For instance, certain attempts of including quantum gravity effects in the physics of gravitational collapse postulate corrections in the geometry at a Planck distance away from the horizon, regardless of the mass (and, hence, of the curvature scale) of the object. Since $l_{\rm Planck} \ll M$, these objects naturally classify as ClePhOs. One example are fuzzballs, ensembles of horizonless microstates that emerge as rather generic solutions to several string theories Mathur (2005, 2009). In these solutions the classical horizon arises as a coarse-grained description of the (horizonless) microstate geometries. Another example are so-called gravitational-vacuum stars, or gravastars, ultracompact objects supported by a negative-pressure fluid Mazur and Mottola (2001, 2004); Cattoen *et al.* (2005); Chirenti and Rezzolla (2007), which might arise from one-loop effects in curved spacetime in the hydrodynamical limit Mottola and Vaulin (2006). Other examples of ClePhOs inspired by quantum corrections include black stars Barceló *et al.* (2009), superspinars Gimon and Horava (2009), collapsed polymers Brustein and Medved (2017); Brustein *et al.* (2017b), $2-2$-holes Holdom and Ren (2017), etc Cardoso and Pani (2017b). We should highlight that for most of these models, $1-2M/R \sim 10^{-39}-10^{-46}$ for stellar to supermassive dark objects. Thus, their phenomenology is very different from that of boson stars, for which $1-2M/R \sim \mathcal{O}(0.1)$ at most.

The speculative nature of most ECOs implies that their formation process has not been consistently explored (with notable exceptions Liebling and Palenzuela (2017)). If they exist they are likely subject to the so-called ergoregion instability. This was first found in Ref. Friedman (1978) for scalar and electromagnetic perturbations (see also Comins and Schutz (1978); Yoshida and Eriguchi (1996)), then shown to affect gravitational perturbations as well in Ref. Kokkotas *et al.* (2004), and recently proved rigorously in Ref. Moschidis (2018)). The instability affects any spinning compact object with an ergoregion but without a horizon and its time scale may be shorter than the age of the Universe Cardoso *et al.* (2008); Chirenti and Rezzolla (2008). The endpoint of the instability is unknown but a possibility is that the instability removes angular momentum Cardoso *et al.* (2014), leading to a slowly-spinning ECO Brito *et al.* (2015a), or perhaps it is quenched by dissipation within the object Maggio *et al.* (2017) (although the effects of viscosity in ECOs are practically unknown). An interesting question is also the outcome of a potential ECO coalescence. All known equilibrium configurations of ECOs have a maximum mass above which the object is unstable against radial perturbations and is expected to collapse. The configuration with maximum mass is also the most compact (stable) one.

Therefore, the more an ECO mimics a BH, the closer it is to its own maximum mass. Thus, if two ECOs are compact enough as to reproduce the inspiral of a BH coalescence (small enough deviations in the multipole moments, tidal heating, and tidal Love numbers relative to the BH case; see below), their merger would likely produce an ECO with mass above the critical mass of the model. Hence the final state could be expected to be a BH. In other words, one might face a "short blanket" problem: ECOs can mimic well *either* the post-merger ringdown phase of a BH *or* the pre-merger inspiral of two BHs, but they may find it difficult to mimic the entire inspiral-merger-ringdown signal of a BH coalescence with an $ECO+ECO \to ECO$ process. The only way out of this problem is to have a mass-radius diagram that resembles that of BHs for a wide range of masses. No classical model is known that behaves this way, yet.

It is worth noting that, even if the BH paradigm is correct, ECOs might be lurking in the universe along with BHs and NSs. Modelling the EM and GW signatures of these exotic sources is necessary to detect them, and may even provide clues for other outstanding puzzles in physics, such as DM (see also Section 25.3.5 below).

Testing the nature of compact objects

Contributors: V. Cardoso, V. Ferrari, M. Kramer, P. Pani, F. H. Vincent, N. Wex

EM diagnostics

EM radiation emitted from the vicinity of BH candidates can probe the properties of spacetime in the strong-field region and may lead to constraining the nature of the compact object. We focus our discussion on three popular EM probes, namely *shadows*, *X-ray spectra*, and *quasi-periodic oscillations*. We do not discuss here polarization, nor effects on stellar trajectories. Because all EM tests can be eventually traced back to geodesic motion, EM probes may distinguish between BHs and ECOs with $M/R < 0.492$, whereas it is much more challenging to tell a ClePhO from a BH through EM measurements.

Shadows

BHs appear on a bright background as a dark patch on the sky, due to photons captured by the horizon. This feature is known as the BH shadow Bardeen (1973); Falcke *et al.* (2000). The Event Horizon Telescope Doeleman *et al.* (2009), aiming at obtaining sub-millimeter images of the shadow of the supermassive object Sgr A* at the center of the Milky Way and of the supermassive object at the center of the elliptical galaxy M87, is a strong motivation for these studies.

A rigorous and more technical definition of the BH shadow is the following Cunha and Herdeiro (2018): it is the set of directions on an observer's local sky that asymptotically approach the event horizon when photons are ray traced backwards in time along them. Thus, by this definition, shadows are intrinsically linked with the existence of a horizon and, strictly speaking, an ECO cannot have a shadow. However, in practice ultracompact horizonless objects (in particular UCOs and ClePhOs) might be very efficient in mimicking the exterior spacetime of a Kerr BH. It is therefore interesting to study photon trajectories in such spacetimes and to contrast them with those occurring in the Kerr case.

In the analysis of shadows, one generally either considers parametrized spacetimes Johannsen and Psaltis (2011); Grenzebach *et al.* (2014); Ghasemi-Nodehi *et al.* (2015); Wang *et al.* (2017) (that allow to tune the departure from Kerr but might not map to known solutions of some theory), or takes into account a specific alternative theoretical framework Amarilla and Eiroa (2012, 2013); Wei and Liu (2013); Vincent (2014); Tinchev and Yazadjiev (2014); Moffat (2015); Schee and Stuchlík (2016); Cunha *et al.* (2017) or a particular compact object within GR Hioki and Maeda (2009); Nedkova *et al.* (2013); Cunha *et al.* (2015); Vincent *et al.* (2016). Most of these studies obtain differences with respect to the standard Kerr spacetime that are smaller than the current instrumental resolution ($< 10\,\mu$as). Some studies report more noticeable differences in the case of naked singularities Hioki and Maeda (2009), exotic matter that violates some energy condition Nedkova *et al.* (2013), or in models that allow for large values of the non-Kerrness parameters Tinchev and Yazadjiev (2014); Moffat (2015). Moreover, demonstrating a clear difference in the shadow is not enough to infer that a test can be made, since such difference might be degenerate with the mass, spin, distance, and inclination

of the source. Finally, the fact that horizonless objects lead to shadow-like regions that can share some clear resemblance with Kerr Vincent *et al.* (2016) shows the extreme difficulty of an unambiguous test based on such observables (for perspective tests with current observations see, e.g., Refs. Psaltis *et al.* (2015); Mizuno *et al.* (2018)).

$K\alpha$ iron line and continuum-fitting

The X-ray spectra of BHs in X-ray binaries and AGNs are routinely used to constrain the spin parameter of BHs, assuming a Kerr metric Reynolds and Nowak (2003); McClintock *et al.* (2011). In particular, the iron Kα emission line, that is the strongest observed and is strongly affected by relativistic effects, is an interesting probe.

Many authors have recently investigated the X-ray spectral observables associated to non-Kerr spacetimes Bambi (2017). The same distinction presented above for the tests of shadows can be made between parametric studies Johannsen and Psaltis (2013); Moore and Gair (2015); Ni *et al.* (2016a), specific alternative theoretical frameworks Harko *et al.* (2009a,b); Vincent (2014); Moore and Gair (2015); Schee and Stuchlík (2009), and alternative objects within classical GR Cao *et al.* (2016); Ni *et al.* (2016b).

Although differences with respect to Kerr are commonly found in various frameworks, these are generally degenerate with other parameters, such as mass, spin and inclination of the source. Moreover, the precise shape of the iron line depends on the subtle radiative transfer in the accretion disk, which is ignored in theoretical studies that generally favor simple analytic models. This is a great advantage of the shadow method, which is probably the EM probe least affected by astrophysical systematics.

QPOs

Quasi-periodic oscillations (QPOs) are narrow peaks in the power spectra, routinely observed in the X-ray light curves of binaries. QPOs are of the order of Keplerian frequencies in the innermost regions of the accretion flow Remillard and McClintock (2006).

A series of recent works were devoted to studying the QPO observables associated to alternative compact objects, be it in the context of parametric spacetimes Johannsen and Psaltis (2011); Bambi and Nampalliwar (2016), alternative theoretical frameworks Vincent (2014); Maselli *et al.* (2015); Chen *et al.* (2016), or alternative objects within GR Franchini *et al.* (2017). Although the QPO frequencies can be measured with great accuracy, QPO diagnostics suffer from the same limitations as the X-ray spectrum: degeneracies and astrophysical uncertainties. The non-Kerr parameters are often degenerate with the object's spin. Moreover, it is currently not even clear what the correct model for QPOs is.

Pulsar-BH systems

High-precision timing observations of radio pulsars provide very sensitive probes of the spacetime in the vicinity of compact objects. Indeed, the first evidence for the existence of gravitational waves were obtained from observations of binary pulsars Taylor (1994); light propagation in strong gravitational effects can be precisely tested with Shapiro delay experiments Kramer *et al.* (2006); relativistic spin-precession can be studied by examining pulse shape and polarisation properties of pulsars Kramer (1998); Breton *et al.* (2008). The very same techniques can be applied for pulsars to be found around BHs Wex and Kopeikin (1999).

While shadows, accretion-disk spectra, and QPOs are probing the near field of the BH, i.e. on a scale of a few Schwarzschild radii, it is not expected to find a pulsar that close to a BH. The lifetime of such a pulsar-BH system due to gravitational wave damping is very small, which makes a discovery of such a system extremely unlikely. This is also true for a pulsar around Sgr A*, although observational evidence stills point towards an observable pulsar population in the Galactic CentreWharton *et al.* (2012). Consequently, a pulsar-BH system, once discovered, is expected to provide a far field test, i.e. a test of only the leading multipole moments of the BH spacetime, in particular mass $M_\bullet$, spin $S_\bullet$ and — for IMBHs and Sgr A* — the quadrupole moment $Q_\bullet$ Liu *et al.* (2012, 2014); Zhang and Saha (2017). On the one hand, the measurement of $M_\bullet$, $S_\bullet$ and $Q_\bullet$ can be used to test the *Kerr hypothesis*. On the other hand, a pulsar can provide a complementary test to the near field test, and break potential degeneracies of, for

instance, a test based on the shadow of the BHGhasemi-Nodehi *et al.* (2015); Psaltis *et al.* (2016); Mizuno *et al.* (2018).

A pulsar in a sufficiently tight orbit (period $\lesssim$ few days) about a stellar-mass BH is expected to show a measurable amount of orbital shrinkage due to the emission of gravitational waves. Alternatives to GR generally show the existence of "gravitational charges" associated with additional long-range fields, like e.g. the scalar field in scalar-tensor theories. Any asymmetry in such "gravitational charge" generally leads to the emission of dipolar radiation, which is a particular strong source of energy loss, as it appears at the 1.5 post-Newtonian level in the equations of motion. Of particular interest here are theories that give rise to extra gravitational charges only for BHs and therefore evade any present binary pulsar tests. Certain shift-symmetric Horndeski theories known to have such properties Yunes and Stein (2011); Yagi *et al.* (2016); Sotiriou and Zhou (2014a,b), where a star that collapses to a BH suddenly acquires a scalar charge in a nontrivial manner Benkel *et al.* (2017, 2016) (cf. Sections 25.3.2 and 25.3.4). Based on mock timing data, Liu et al. Liu *et al.* (2014) have demonstrated the capability of utilizing a suitable pulsar-BH system to put tight constraints on any form of dipolar radiation.

Finally, there are interesting considerations how a pulsar-BH system could be used to constrain quantum effects related to BHs. For instance, there could be a change in the orbital period caused by the mass loss of an enhanced evaporation of the BH, for instance due to an extra spatial dimension. An absence of any such change in the timing data of the pulsar would lead to constraints on the effective length scale of the extra spatial dimension Simonetti *et al.* (2011). If quantum fluctuations of the spacetime geometry outside a BH do occur on macroscopic scales, the radio signals of a pulsar viewed in an (nearly) edge-on orbit around a BH could be used to look for such metric fluctuations. Such fluctuations are expected to modify the propagation of the radio signals and therefore lead to characteristic residuals in the timing data Estes *et al.* (2017).

Given the prospects and scientific rewards promised by PSR-BH systems, searches are ongoing to discover these elusive objects. Pulsars orbiting stellar-mass BHs are expected to be found in or near the Galactic plane. Since binary evolution requires such system to survive two supernova explosions, this implies a low systemic velocity, placing it close to its original birth place. On-going deep Galactic plane surveys, like those as part in the High Resolution Universe Survey Cameron *et al.* (2018) or upcoming surveys using the MeerKAT or FAST telescopes, clearly have the potential to uncover such systems. Looking at regions of high stellar density, one can expect even to find millisecond pulsars around BHs due to binary exchange interactions, making globular clusters Hessels *et al.* (2015) and the Galactic Centre Eatough *et al.* (2015) prime targets for current and future surveys. As discussed, finding a pulsar orbiting Sgr A* would be particularly rewarding. Past surveys are likely to have been limited by sensitivity and scattering effects due to the turbulent interstellar medium although the discovery of a radio magnetar in the Galactic Center Eatough *et al.* (2013) indicates that the situation may be more complicated than anticipated Dexter *et al.* (2017). Searches with sensitive high-frequency telescopes will ultimate provide the answer Goddi *et al.* (2016). Meanwhile, sensitive timing observations of pulsars in Globular cluster can also probe the proposed existence of Intermediate Mass Black Holes (IMBHs) in the cluster centres by sensing how the pulsars "fall" in the cluster potential. In some clusters, prominent claims Kızıltan *et al.* (2017) can be safely refuted Freire *et al.* (2017), while in other clusters IMBHs may still exist in the centre Perera *et al.* (2017); Perera *et al.* (2017) or their potential mass can at least be constrained meaningfully Prager *et al.* (2017).

In summary, current and future radio pulsars observations have the potential to study BH properties over a wide mass range, from stellar-mass to super-massive BHs providing important complementary observations presented in this chapter;

GW diagnostics

In contrast to EM probes, GW tests are able to probe also the interior of compact objects and are much less affected by the astrophysical environment Barausse *et al.* (2014). Thus, they are best suited to constraining all classes of ECOs.

GW tests based on the ringdown phase

The remnant of a binary merger is a highly distorted object that approaches a stationary configuration by emitting GWs during the "ringdown" phase. If the remnant is a BH in GR, the ringdown can be modeled as a superposition of damped sinusoids described by the quasinormal modes (QNMs) of the BH Kokkotas and Schmidt (1999); Ferrari and Gualtieri (2008); Berti *et al.* (2009) (see Sec. 25.3.3). If the remnant is an ECO, the ringdown signal is different:

- For UCOs, the ringdown signal can be qualitatively similar to that of a BH, but the QNMs are different from their Kerr counterpart Pani *et al.* (2009); Macedo *et al.* (2013a); Chirenti and Rezzolla (2016). The rates of binary mergers that allow for QNM spectroscopic tests depends on the astrophysical models of BH population Berti *et al.* (2016). The estimated rates are lower than 1/yr for current detectors even at design sensitivity. On the other hand, rates are higher for third-generation, Earth-based detectors and range between a few to 100 events per year for LISA, depending on the astrophysical model Berti *et al.* (2016). Even if the ringdown frequencies of a single source are hard to measure with current detectors, coherent mode stacking methods using multiple sources may enhance the ability of aLIGO/aVirgo to perform BH spectroscopy Yang *et al.* (2017). Such procedure is dependent upon careful control of the dependence of ringdown in alternative theories on the parameters of the system (mass, spin, etc).

- For ClePhOs, the prompt post-merger ringdown signal is identical to that of a BH, because it excited at the light ring Cardoso *et al.* (2016a); Cardoso and Pani (2017). However, ClePhOs generically support quasi-bound trapped modes Chandrasekhar and Ferrari (1991); Chandrasekhar and Ferrari (1992) which produce a modulated train of pulses at late times. The frequency and damping time of this sequence of pulses is described by the QNMs of the ClePhO (which are usually completely different from those of the corresponding BH) Correia and Cardoso (2018); Vicente *et al.* (2018). These modes were dubbed "GW echoes" and appear after a delay time that, in many models, scales as $\tau_{\rm echo} \sim M \log(1-2M/R)$ Cardoso *et al.* (2016b). Such logarithmic dependence is key to allow for tests of Planckian corrections at the horizon scale Cardoso *et al.* (2016b); Abedi *et al.* (2017a); Cardoso and Pani (2017). Models of ultracompact stars provide GW echoes with a different scaling Cardoso and Pani (2017b); Pani and Ferrari (2018), the latter being a possible smoking gun of exotic state of matter in the merger remnant.

- In addition to gravitational modes, matter modes can be excited in ECOs Yunes *et al.* (2016). So far, this problem has been studied only for boson stars Bezares *et al.* (2017); Palenzuela *et al.* (2017) and it is unclear whether matter QNMs would be highly redshifted for more compact ECOs Cardoso and Pani (2017b).

GW tests based on the inspiral phase

The nature of the binary components has a bearing also on the GW inspiral phase, chiefly through three effects:

- *Multipolar structure.* As a by-product of the BH uniqueness and no-hair theorems Robinson (2009), the mass and current multipole moments (M_ℓ, S_ℓ) of any stationary, isolated BH can be written only in terms of mass $M \equiv M_0$ and spin $\chi \equiv S_1/M^2$. The quadrupole moment of the binary components enters the GW phase at 2PN relative order, whereas higher multipoles enter at higher PN order Blanchet (2014). The multipole moments of an ECO are generically different, e.g. $M_2^{\rm ECO} = M_2^{\rm Kerr} + \delta q(\chi, M/R) M^3$, and it is therefore possible to constrain the dimensionless deviation δq by measuring the 2PN coefficient of the inspiral waveform. This was recently used to constrain $\mathcal{O}(\chi^2)$ parametrized deviations in δq Krishnendu *et al.* (2017). It should be mentioned that ECOs will generically display higher-order spin corrections in δq and that – at least for the known models of rotating ultracompact objects Pani (2015a); Uchikata *et al.* (2016); Yagi and Yunes (2015) – the multipole moments approach those of a Kerr BH in the high-compactness limit. Moreover, the quadrupole PN correction is degenerate with the spin-spin coupling. Such degeneracy can be broken using the I-Love-Q relations Yagi and Yunes (2013, 2017) for ECOs, as computed for instance in the case of gravastars Pani (2015a); Uchikata *et al.* (2016).

- *Tidal heating.* In a binary coalescence the inspiral proceeds through energy and angular momentum loss in the form of GWs emitted to infinity. If the binary components are BHs, a fraction of the energy loss is due to absorption at the horizon Alvi (2001); Hughes (2001); Taylor and Poisson (2008); Poisson (2009); Chatziioannou *et al.* (2013); Cardoso and Pani (2013). This effect introduces a 2.5PN $\times \log v$ correction to the GW phase of spinning binaries, where v is the orbital velocity. The sign of this correction depends on the spin Hughes (2001); Taylor and Poisson (2008); Poisson (2009), since highly spinning BHs can amplify radiation due to superradiance Brito *et al.* (2015a). In the absence of a horizon, GWs are not expected to be absorbed significantly, and tidal heating is negligible Maselli *et al.* (2018); Maggio *et al.* (2017). Highly spinning supermassive binaries detectable by LISA will provide a golden test of this effect Maselli *et al.* (2018).

- *Tidal deformability.* The gravitational field of the companion induces tidal deformations, which produce an effect at 5PN relative order, proportional to the so-called tidal Love numbers of the object Poisson and Will (2014). Remarkably, the tidal Love numbers of a BH are identically zero for static BHs Binnington and Poisson (2009); Damour and Nagar (2009); Fang and Lovelace (2005); Gürlebeck (2015), and for spinning BHs to first order in the spin Poisson (2015); Pani *et al.* (2015a,b), and to second order in the axisymmetric perturbations Pani *et al.* (2015a). On the other hand, the tidal Love numbers of ECOs are small but finite Pani (2015a); Uchikata *et al.* (2016); Porto (2016b); Cardoso *et al.* (2017a). Thus, the nature of ECOs can be probed by measuring the tidal deformability, similarly to what is done to infer the nuclear equation of state in NSBs Flanagan and Hinderer (2008); Hinderer (2008); Abbott *et al.* (2017f). Analysis of the LIGO data shows that interesting bounds on the tidal deformability can be imposed already, to the level that some boson star models (approximated through a polytropic fluid) can be excluded Johnson-McDaniel *et al.* (2018). The tidal Love numbers of a ClePhO vanish logarithmically in the BH limit Cardoso *et al.* (2017a), providing a way to probe horizon scales. For Planckian corrections near the horizon, the tidal Love numbers are about 4 orders of magnitude smaller than those of a NS. It is therefore expected that current and future ground-based detectors will not be sensitive enough to detect such small effect, while LISA might be able to measure the tidal deformability of highly-spinning supermassive binaries Maselli *et al.* (2018).

Finally, it is possible that ECOs' low-frequency modes are excited during the inspiral, leading to resonances in the emitted GW flux Pani *et al.* (2010); Macedo *et al.* (2013,a). Low-frequency modes certainly arise in the gravitational sector, as we discussed already. In addition, fluid modes at low frequency can also be excited, although this issue is poorly studied.

Challenges in modeling ECO coalescence waveforms

With the notable exception of boson stars Liebling and Palenzuela (2017), very little is known about the dynamical formation of isolated ECOs or about their coalescence. While the early inspiral and post-merger phases can be modelled within a PN expansion and perturbation theory, respectively, searches for ECO coalescence require a full inspiral-merger-ringdown waveform. Some combination of numerical and semianalytical techniques – analog to what is done to model precisely the waveform of BH binaries Taracchini *et al.* (2014); Husa *et al.* (2016); Khan *et al.* (2016) – is missing.

Concerning the post-merger ringdown part alone, it is important to develop accurate templates of GW echoes. While considerable progress has been recently done Nakano *et al.* (2017); Mark *et al.* (2017); Voelkel and Kokkotas (2017); Bueno *et al.* (2018); Maselli *et al.* (2017a); Wang *et al.* (2018a); Correia and Cardoso (2018); Wang and Afshordi (2018), a complete template which is both accurate and practical is missing. This is crucial to improve current searches for echoes in LIGO/Virgo data Abedi *et al.* (2017a); Ashton *et al.* (2016); Abedi *et al.* (2017b); Conklin *et al.* (2017); Westerweck *et al.* (2018); Abedi *et al.* (2018); Nielsen *et al.* (2018); Lo *et al.* (2018). Model-independent burst searches have recently been reported, and will be instrumental in the absence of compelling models Tsang *et al.* (2018).

25.3.5 The dark matter connection

Contributors: G. Bertone, D. Blas, R. Brito, C. Burrage, V. Cardoso, L. Urena-López

The nature and properties of DM and dark energy in the Universe are among the outstanding open issues of modern Cosmology. They seem to be the responsible agents for the formation of large scale structure and the present accelerated phase of the cosmic expansion. Quite surprisingly, there is a concordance model that fits all available set of observations at hand. This model is dubbed ΛCDM because it assumes that the main matter components at late times are in the form of a cosmological constant for the dark energy Carroll (2001); Copeland *et al.* (2006) and a pressureless component known as cold DM Peter (2012). These two assumptions, together with the theoretical basis for GR, make up a consistent physical view of the Universe Ade *et al.* (2016).

The nature of the missing mass in the Universe has proven difficult to determine, because it interacts very feebly with ordinary matter. Very little is known about the fundamental nature of DM, and models range from ultralight bosons with masses $\sim 10^{-22}$ eV to BHs with masses of order $10\,M_\odot$. Looking for matter with unknown properties is extremely challenging, and explains to a good extent why DM has never been directly detected in any experiment so far. However, the equivalence principle upon which GR stands – tested to remarkable accuracy with known matter – offers a solid starting point. All forms of energy gravitate and fall similarly in an external gravitational field. Thus, gravitational physics can help us unlock the mystery of DM: even if blind to other interactions, it should still "see" gravity. The feebleness with which DM interacts with baryonic matter, along with its small density in local astrophysical environments poses the question of how to look for DM signals with GWs.

BHs as DM

In light of the LIGO discoveries there has been a revival of interest in the possibility that DM could be composed of BHs with masses in the range $1 - 100 M_\odot$ Kashlinsky (2016); Clesse and García-Bellido (2017a); Bird *et al.* (2016); Sasaki *et al.* (2016); Wang *et al.* (2018b). To generate enough such BHs to be DM, they would need to be produced from the collapse of large primordial density fluctuations Carr and Hawking (1974); Carr (1975); Carr *et al.* (2016). The distribution of the BH masses that form depends on the model of inflation Byrnes *et al.* (2012). Such BHs can be produced with sufficiently large masses that they would not have evaporated by the current epoch. Alternatively, DM could be composed of ultracompact horizonless objects for which Hawking radiation is suppressed Raidal *et al.* (2018). Different formation scenarios and constraints on such objects were reviewed in Chapter I, Section 25.1.6.

If all of the DM is composed of such heavy compact objects a key signature is the frequency of microlensing events Paczynski (1986). Microlensing is the amplification, for a short period of time, of the light from a star when a compact object passes close to the line of sight between us and the star. How frequent and how strong these events will be, depends on the distribution of BH masses Griest (1991); De Rujula *et al.* (1991); Alcock *et al.* (1997). It has been claimed that DM composed entirely of primordial BHs in this mass range is excluded entirely by microlensing Carr *et al.* (2016); however, such study assumed that the BH mass distribution was a delta function. If the mass distribution is broadened the tension with the microlensing data weakens Green (2017, 2016); Bellomo *et al.* (2018), although whether realistic models can be compatible with the data remains a subject of debate Clesse and García-Bellido (2017a). Further observational signatures include the dynamical heating of dwarf galaxies, through two body interactions between BHs and stars Koushiappas and Loeb (2017a); Brandt (2016), electromagnetic signatures if regions of high BH density also have high gas densities (such as the center of the galaxy) Gaggero *et al.* (2017); Inoue and Kusenko (2017), constraints from the CMB due to energy injection into the plasma in the early universe Ali-Haïmoud and Kamionkowski (2017); Poulin *et al.* (2017) and from the (absence of) a stochastic background of GWs Wang *et al.* (2018b).

At the very least primordial BHs in the LIGO mass range can be a component of the DM in our universe. Future GW observations determining the mass and spatial distribution of BHs in our galaxy will be key to testing this hypothesis.

The DM Zoo and GWs

Despite the accumulation of evidence for the existence of DM, the determination of its fundamental properties remains elusive. The observations related to GWs may change this. GWs and their progenitors 'live' in a DM environment to which they are sensitive (at least

gravitationally though other interactions may occur). Furthermore, the DM sector may include new particles and forces that can change the nature and dynamics of the sources.

Before making any classification of DM candidates, we remind that the preferred models are those that: *i)* explain *all* the DM, *ii)* include a *natural* generation mechanism, *iii)* can be added to the SM to solve other (astrophysical or fundamental) puzzles, *iv)* can be tested beyond the common DM gravitational effects. None of these properties is really necessary, but their advantages are clear.

A first distinction one can make when classifying DM models is whether the state of DM is a distribution of fundamental particles or of compact objects. The masses of compact objects are determined by astrophysical evolution from initial overdensities in a matter field. As a consequence, the range and distribution of masses is quite broad. These models and their bounds are discussed in Sec. 25.3.5 (see also Sec. 25.1.3 for more details about astrophysical BHs).

Fundamental particles have fixed mass, which constrains the mass to be $m_\chi \lesssim M_P$ to treat gravity within an EFT formalism (see Garny *et al.* (2016) for a recent study of the top range). Furthermore, there is no candidate within the SM for these fundamental particles. Particles with typical energy scales in the electroweak range (WIMPs) have been preferred in the past because they satisfy the four points above Bertone *et al.* (2005a). Other popular candidates include axions and sterile neutrinos (see e.g. Ref. Feng (2010)).

The first classification of particle models is based on the DM spin. Fermionic DM can only exist with masses above[18] $m_\chi \gtrsim$ keV. This is because the phase-space available for fermions in virial equilibrium in dwarf spheroidals is limited Tremaine and Gunn (1979). The limit $m_\chi \gtrsim$ keV always applies for models where the DM was generated thermally. In this case, the distribution of DM particles is too 'hot' for lighter masses and there is a suppression of the growth of cosmological structures at small scales, in tension with observations Baur *et al.* (2016). Other 'out-of-equilibrium' production mechanisms allow for 'cold' distributions for all possible masses, see e.g. D'Agnolo *et al.* (2017) and references therein. The extreme situation are models where a bosonic candidate is generated 'at rest' as happens in the cases of misalignment or inflationary generation, see Marsh (2016). The fundamental limitation is then $m_\chi \gtrsim 10^{-22}$ eV, which comes from the wiping of structure at scales smaller than the de Broglie wavelength of the candidate. This scale should allow for the existence of dwarf spheroidals. Ultra-light candidates incorporate the existence of oscillating modes with coherence times long enough to generate new phenomena as compared to standard candidates (see below).

The complexity of the DM sector is also unknown. Models that incorporate natural candidates for DM (e.g. supersymmetric models or axion models) provide concrete proposals, but one should keep an open mind when thinking about DM phenomenology. The existence of a coupling DM-SM beyond the gravitational one may mean an extra interaction of gravitating bodies among themselves or with the DM background. This can modify the orbital properties and open new emission channels, if the DM candidate is light enough. Besides, different DM models may admit different DM distributions, depending on their production mechanism and type of interactions. The common feature is the existence of spherical DM halos, but more complex structures (mini-halos, DM disks, breathing modes,....) may occur.

Finally, the distribution of DM close to the galactic center is also quite uncertain Pato *et al.* (2015). This is because baryonic effects are more important. Still, one may be able to distinguish certain features, as the existence of huge overdensities, or solitons, characteristic of some DM models Schive *et al.* (2014a). For instance, the prediction of solitons in center of galaxies for masses $m \sim (10^{-22} \div 10^{-21})$ eV has been recently used in Bar *et al.* (2018) to claim that this mass range is in tension with data.

The cosmological perspective on DM: scalar field dark matter

Requiring a consistent cosmology limits some of the DM candidates, *if* they are to solve both the dark energy and DM puzzles. An intense experimental search in the last years has successfully imposed stringent limits on the interactions between DM and "ordinary" matter Aprile *et al.* (2017); Cui *et al.* (2017); Hoferichter *et al.* (2017). The Weakly Interacting Massive Particle (WIMP) hypothesis Queiroz (2017), while appealing, is under extreme pressure. Thus, alternative models need to be seriously considered Hooper (2017). Among the vast number

[18] All the limits of this section apply to candidates that represent *all* the DM. The bounds are less stringent for fractional components.

of possibilities, scalar fields have become increasingly tempting Copeland *et al.* (2006); Joyce *et al.* (2016). Scalar field DM is a model where the properties of the DM can be represented by a relativistic scalar field ϕ endowed with an appropriate scalar potential $V(\phi)$ Matos and Urena-Lopez (2001); Hu *et al.* (2000); Hui *et al.* (2017); Suárez *et al.* (2014); Marsh (2016). In the relativistic regime, the equation of motion for the scalar is the Klein-Gordon equation $\partial_\mu \partial^\mu \phi - \partial_\phi V = 0$, whereas the non-relativistic regime leads to a Schrödinger-type equation for the wave function. At the quantum level, the scalar represents the mean field value of a coherent state of boson particles with a large occupation number.

Although many possibilities exist for the potential $V(\phi)$ in DM models, it should possess a minimum at some critical value ϕ_c around which we can define a mass scale m for the boson particle, $m \equiv \partial^2_\phi V(\phi_c)$. The simplest possibility is the parabolic potential $V(\phi) = (1/2)m^2\phi^2$ (with $\phi_c = 0$), but higher order terms could play a role at higher energies. One representative example of the scalar field hypothesis is the axion from the Peccei-Quinn mechanism to solve the strong CP problem, for which the potential has the trigonometric form $V(\phi) = m^2 f^2[1 - \cos(\phi/f)]$, where f is the so-called decay constant of the axion particle Marsh (2016). In contrast to the parabolic potential, the axion potential is periodic, has an upper energy limit $V(\phi) \leq m^2 f^2$ and includes contributions from higher-order terms $\phi^4, \phi^6, \ldots$ Zhang and Chiueh (2017); Cedeño *et al.* (2017). For simplicity, we present below a summary of results obtained for the parabolic potential and their constraints arising from cosmological and astrophysical observations.

Cosmological background dynamics

Because of the resemblance of the KG equation to that of the harmonic oscillator, there are two main stages in the evolution of the scalar field: a damped phase with the Hubble constant $H \gg m$ during which $\phi \simeq$ const., and a stage of rapid field oscillations around the minimum of the potential that corresponds to $H \ll m$. A piece-wise solution for the two regimes can be envisaged from semi-analytical studies, but the real challenge arises in numerical simulations for which one desires a continuum solution for all the field variables. The two stages can be put together smoothly in numerical simulations Urena-Lopez and Gonzalez-Morales (2016). The evolution of the energy density $\rho_\phi = (1/2)\dot{\phi}^2 + (1/2)m^2\phi^2$ should transit from $\rho_\phi =$ const. to $\rho_\phi \propto a^{-3}$ (the expected one for a DM component) before the time of radiation-matter equality to obtain the correct amount of DM at the present time. A lower bound on the boson mass $m \geq 10^{-26}$eV arises from such a requirement Urena-Lopez and Gonzalez-Morales (2016).

Cosmological linear perturbations

For this to be a successful model, the scalar field DM must allow the formation of structure. Generically, it is found that small density fluctuations δ_ρ/ρ grow (decay) for wavelengths $k^2 < 2a^2mH$ ($k^2 > 2a^2mH$), which indicates the existence of an effective time-dependent Jeans wavenumber defined by $k_J^2 = 2a^2mH$, where a is the scale factor. The most noticeable aspect about the growth of linear perturbations is that the power spectrum has the same amplitude as that of CDM for large enough scales (ie $k < k_J$), and that a sharp-cut-off appears for small enough scales (ie $k > k_J$). The straightforward interpretation is that the SFDM models naturally predicts a dearth of small scale structure in the Universe, and that such dearth is directly related to the boson mass. This time the lower bound on the boson mass is somehow improved to $m \geq 10^{-24}$eV Urena-Lopez and Gonzalez-Morales (2016); Hlozek *et al.* (2015), but one is limited by the non-linear effects on smaller scales to impose a better constraint.

Cosmological non-linear perturbations

Although N-body simulations have been adapted to the field description required for SFDM, they cannot capture the full field dynamics and the best option remains to solve directly the so-called Schrödinger-Poisson system. Some studies suggest that the non-linear process of structure formation proceeds as in CDM for large enough scales Schive *et al.* (2014a); Mocz *et al.* (2017); Schwabe *et al.* (2016).

The gravitationally bound objects that one could identify with DM galaxy halos all have a common structure: a central soliton surrounded by a NFW-like envelope created by the

interference of the Schrödinger wave functions Schive *et al.* (2014a,b). In terms of the standard nomenclature, the scalar-field DM model belongs to the so-called non-cusp, or cored, types of DM models (towards which evidence is marginally pointing). Simulations suggest a close relationship between the soliton M_s and the total halo mass M_h of the form $M_s = \gamma(a) M_h^{1/3}$, so that massive halos also have massive central solitons Schive *et al.* (2014a,b); Mocz *et al.* (2017). Here $\gamma(a)$ is a time-dependent coefficient of proportionality.

These results then predict a minimum halo mass $M_{h,\rm min} = \gamma^{3/2}(1) \simeq (m/10^{-22}\,{\rm eV})^{-3/2}\, 10^7 M_\odot$ when the galaxy halo is just the central soliton. But the soliton scale radius r_s is related to its mass via $M_s r_s \simeq 2(m_{\rm Pl}/m)^2$, where $m_{\rm Pl} = G^{-1/2}$ is the Planck mass. For the aforementioned values of the soliton mass, $r_s = 300\,{\rm pc}$ if $M_s = 10^7\, M_\odot$, in remarkable agreement with observations Urena-Lopez *et al.* (2017) (see, however, Deng *et al.* (2018)). Furthermore, the previous relation between the soliton mass and the host halo mass can be used to predict the presence of a second peak in the velocity of rotation curves, closer to the galactic center Bar *et al.* (2018). This prediction is in tension with data for masses in the range $m \sim (10^{-22} \div 10^{-21})\,{\rm eV}$ Bar *et al.* (2018).

Finally, non-linear results also constrain the scalar mass through comparison with observations inferred from the Lyman-α forest Palanque-Delabrouille *et al.* (2013). These constraints require dedicated N-body simulations with gas and stars, so that the flux of quasars can be calculated. The constraints are obtained indirectly and subjected to uncertainties arising from our limited knowledge on the formation of realistic galaxies. In a first approximation we can estimate the power spectrum of the transmitted flux of the Lyman-α forest at linear order, and obtain a lower limit on the boson mass $m > 10^{-21}$eV if SFDM is to fulfill the DM budget completely Kobayashi *et al.* (2017).

In conclusion, scalar-field models of dark energy can account for the whole of DM as well, provided the scalar has a mass of order $10^{-21}\,{\rm eV}$. This model explains also the seemingly cored density profile in the central parts of the galaxies.

The DM environment

In the following we provide a (hopefully agnostic) view on how different DM models may affect GW emission by compact objects. The environment in which compact objects live – be it the interstellar medium plasma, accretion disks or DM – can influence the GW signal in different ways:

- *By modifying the structure of the compact objects themselves.* Accretion disks, for example, alter the spacetime multipolar structure relative to the standard Kerr geometry. Accretion disks are also known to limit the parameter space of Kerr BHs, preventing them from spinning beyond $cJ/(GM^2) \sim 0.998$ Thorne (1974). Likewise, if DM behaves as heavy particles, its effects parallel that of baryonic matter either in accretion disks or in the interstellar medium.

  In models where a particle description is insufficient (for example, if DM assumes the form of fundamental light bosons), Kerr BHs can either be unstable, or not be an equilibrium solution of the field equations at all Cardoso and Gualtieri (2016); Sotiriou (2015b); Herdeiro and Radu (2015) (see also discussion in Section 25.3.4). Some of the simplest forms of axionic DM have a more mild effect instead, contributing to the spinning down of astrophysical BHs Arvanitaki and Dubovsky (2011); Brito *et al.* (2015b, 2017a).

  Independently of the nature of DM, compact stars evolving in DM-rich environments may accrete a significant amount of DM: DM is captured by the star due to gravitational deflection and a non-vanishing cross-section for collision with the star material Press and Spergel (1985); Gould *et al.* (1990); Goldman and Nussinov (1989); Bertone and Fairbairn (2008); Brito *et al.* (2015b). The DM material eventually thermalizes with the star, and accumulates inside a finite-size core Brito *et al.* (2016b, 2015b); Gould *et al.* (1990); Goldman and Nussinov (1989).

- *By altering the way that GWs are generated.* The different equilibrium configuration of the compact objects, together with the possible self-gravity effects of DM and different structure of the field equations gives rise, generically, to a different GW output from that predicted in vacuum GR.

- The environment – interstellar dust, a cosmological constant or DM – must of course affect also the way that GWs *and* electromagnetic waves propagate. It is a common-day experience that light can be significantly affected by even low-density matter. For example, low-frequency light in a plasma travels at the group velocity $v_g = c\sqrt{1-\omega_p^2/\omega^2}$, with ω_p the plasma frequency $\omega_p^2 = \frac{n_0 q^2}{4\pi\epsilon_0\, m}$. Here, n_0 is the particle number density, q the electron charge and m its mass. Thus, light is delayed with respect to GWs, by an amount δt directly proportional to the total distance they both traversed

$$\begin{aligned}\delta t &= \frac{d\rho_0 q^2}{8\pi\epsilon_0\, c\, m^2\omega^2} \\ &= 6.7\frac{\rho_0}{1\,\mathrm{GeV/cm}^3}\left(\frac{6\mathrm{GHz}}{\omega}\right)^2 \mathrm{days}\,, \end{aligned} \tag{25.39}$$

  where in the last equality we substituted numbers for the very latest observation of GWs with an electromagnetic counterpart Abbott *et al.* (2017g). These numbers could be interesting: given the observed time delay of several days for radio waves, one may get constraints for models where DM consists of mili-charged matter (i.e., models where q and m may be a fraction of the electron charge and mass).

  Cold DM affects the propagation of GWs by inducing a small frequency dependent modification of the propagation speed Flauger and Weinberg (2018). Furthermore, the effect of viscous fluids or oscillators on the passage of GWs are discussed in Refs. Thorne (1989 (accessed May 2017); Annulli *et al.* (2018). These calculations indicate that the effect may be too small to be measurable in the near future.

These different effects have, so far, been explored and quantified in the context of a few possible mechanisms where DM plays a role.

Accretion and gravitational drag

The formation and growth of compact objects may lead to large overdensities of DM around them Gondolo and Silk (1999); Bertone *et al.* (2005b); Zhao and Silk (2005). Whatever the nature and amount of DM surrounding them, a binary of two BHs or compact stars evolving in a DM-rich environment will be subjected to at least two effects, depicted in Fig. 25.12. As it moves through the medium it accretes the surrounding material, but also exherts a gravitational pull (known as "gravitational drag") on all the medium, which affects the inspiral dynamics. To quantify these effects, it is important to know how DM behaves. Collisionless DM causes, generically, a gravitational drag different from that of normal fluids Macedo *et al.* (2013,a). The gravitational drag caused by DM which is coherent on large scales may be suppressed Hui *et al.* (2017), but further work is necessary to understand this quantitatively.

The phase evolution of a pair of BHs, taking gravitational radiation, accretion and drag as well as the DM self-gravity was studied recently Barausse *et al.* (2014); Macedo *et al.* (2013,a); Eda *et al.* (2015); Yue and Han (2018); Hannuksela *et al.* (2019). These estimates are all Newtonian, and the results depend crucially on the local DM density. Perhaps more importantly, back-reaction on the DM distribution was not taken into account in a systematic manner. The only studies available including backreaction, look only at the very last orbits of the binary, and are unlikely to capture well the full physics of DM dispersal Berti *et al.* (2013).

The merger of two dark stars

Gravitational drag and accretion have a cumulative effect: even though their magnitude is small, the effect piles up over a large number of orbits. By contrast, drag and accretion have a tiny effect during merger. The merger signal carries, mostly, an imprint of the configuration of the colliding objects. For BHs, the no-hair results strongly suggest that the colliding objects belong to the Kerr family, and it seems hopeless to find any DM imprints here. However, the no-hair results can be by-passed, as they assume stationarity of the spacetime or certain matter properties, as explained in Sec. 25.3.4 Cardoso and Gualtieri (2016); Sotiriou (2015b); Herdeiro and Radu (2015). Detailed investigations of BHs other than Kerr are still to be done. Smoking-gun effects arising from the merger of such objects are, likewise, unknown.

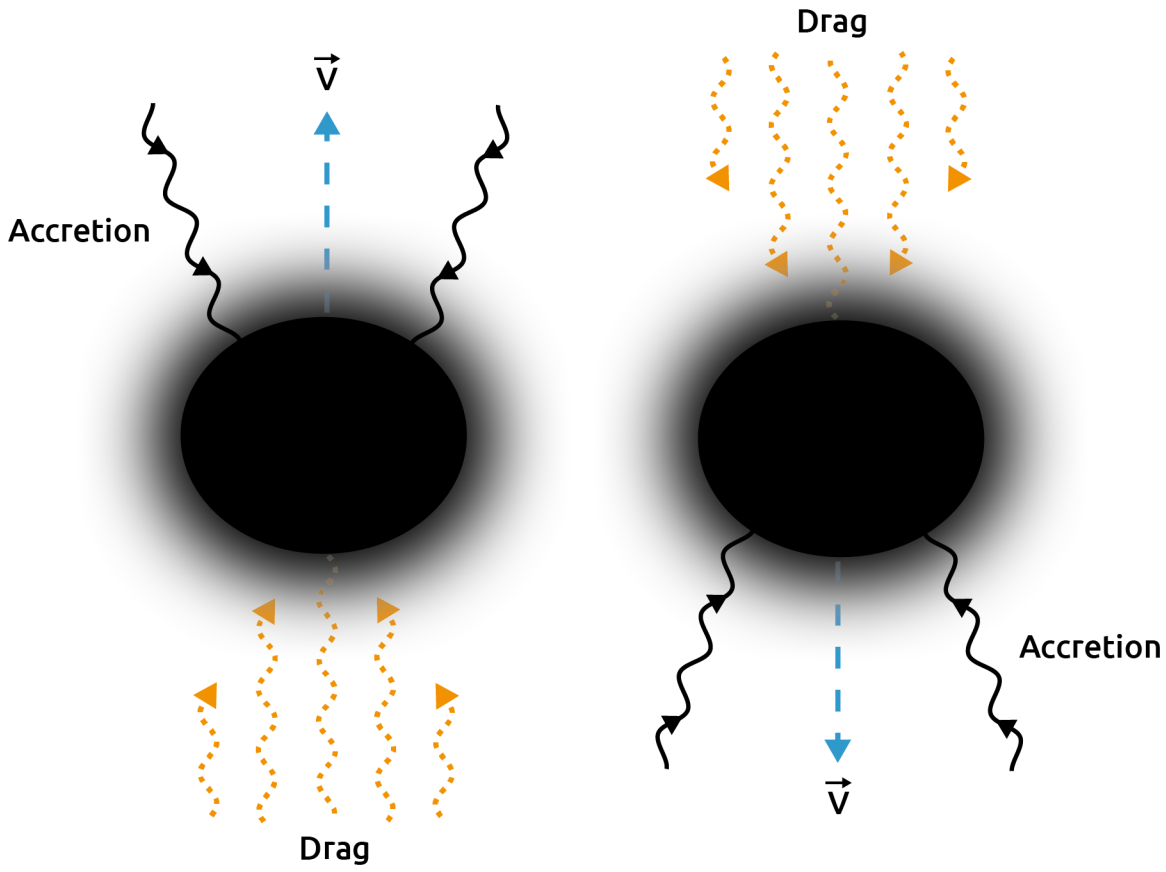


Figure 25.12: Depiction of a BBH evolving in a possible interstellar or DM environment. Each individual BH accretes and exherts a gravitational pull on the surrounding matter. Both effects contribute to decelerate the BHs, leading to a faster inspiral. Credit: Ana Sousa.

As we discussed, compact stars can grow DM cores at their center. It is conceivable that the DM core might imprint a signature on different phases of the coalescence of two of these objects. The effects of tidal deformations within the gravitational wave signal produced by binary DM stars have been investigated in Maselli *et al.* (2017b). Moreover, the imprint on the post-merger spectrum, so far only for analog-mechanical models, has been studied in Ellis *et al.* (2018).

Non-perturbative effects: superradiance and spin-down.

Spinning BHs are huge energy reservoirs from which all rotational energy can ultimately be extracted. In particular, due to the absence of a Pauli exclusion principle for bosons, bosonic waves can effectively extract energy from spinning BHs through a process known as rotational superradiance Brito *et al.* (2015a). The superradiant energy extraction might be used to rule out (or detect) ultralight bosons that might be a significant component of DM, such as the QCD axion or axion-like particles predicted by the string axiverse scenario Arvanitaki and Dubovsky (2011), dark photons Pani *et al.* (2012,a) and even massive spin-2 fields Brito *et al.* (2013). For boson masses in the range 10^{-21} – 10^{-11} eV, their Compton wavelength is of the order of the horizon of typical astrophysical BHs, the gravitational coupling of these two objects is strongest, and long-lived quasi-bound states of bosonic particles around BHs can form. For rotating BHs these states are typically superradiant, thus becoming an effective tap of rotational energy. The extracted energy condenses as a bosonic cloud around the BH producing "gravitational atoms" Arvanitaki and Dubovsky (2011); Brito *et al.* (2015b); East and Pretorius (2017). The evolution of these systems leads to several observational channels.

For complex bosonic fields, GW emission is suppressed and the end-state of the superradiant instability might be a Kerr BH with bosonic hair Herdeiro and Radu (2014); Herdeiro *et al.* (2016). These solutions are themselves unstable Ganchev and Santos (2018) which, over the age of the Universe, would likely lead to a slowly-rotating BH surrounded by a bosonic cloud populating the most unstable modes. On the other hand for real bosonic fields, this cloud would disperse over long timescales though the emission of nearly-monochromatic GWs, either observable individually or as a very strong stochastic GW background Arvanitaki *et al.* (2015, 2017); Yoshino and Kodama (2015); Baryakhtar *et al.* (2017); Brito *et al.* (2017b,a). These are appealing GW emitters with appropriate amplitude and frequency range for Earth- and space-based detectors. Although estimates from Ref. Brito *et al.* (2017b,a) suggest that current LIGO data can already be used constrain some range of scalar field masses, an analysis on real data has not yet been performed.

These models also predict that BHs affected by the instability would spin-down in the process, and therefore the mere observation of rotating BHs can place severe limits on these particles, thereby strongly constraining the theory. In fact, observations of spinning BHs can already be used to bound the photon Pani *et al.* (2012,a) and graviton masses Brito *et al.* (2013). These studies demonstrate that BHs have an enormous potential as theoretical laboratories, where particle physics can be put to the test using current observations.

All these studies neglect the possible decay of ultralight bosonic fields into Standard Model particles which is justified given the current constraints on ultralight bosons in this mass range (see e.g. Essig *et al.* (2013); Marsh (2016)). However, the superradiant instability leads to the generation of boson condensates around BHs with a very large particle number, which could enhance their decay through channels other than gravitational. For the coupling typical of the QCD axion with photons, stimulated decay into photon pairs becomes significant for axion masses above $\gtrsim 10^{-8}$ eV, and consequently for BHs with masses $\lesssim 0.01 M_\odot$ Rosa and Kephart (2018). If such systems exist, they would lead to extremely bright lasers with frequencies in the radio band. For the expected mass of the QCD axion $\sim 10^{-5}$ eV, such lasing effect would occur around primordial BHs with masses around $\sim 10^{24}$ Kg and lead to millisecond radio-bursts, which could suggest a link to the observed fast radio bursts Rosa and Kephart (2018).

In addition to these effects, the coupling of light DM bosons with Standard Model particles may also turn NSs unstable against superradiant amplification. Rotational superradiance is in fact a generic process and can happen in any rotating object, as long as some sort of dissipation mechanism is at work Brito *et al.* (2015a). Thus, even NSs can be superradiantly unstable against some models of DM, such as dark photons coupled to charged matter, which can already be used to put constraints on these models Cardoso *et al.* (2017b).

An important question that remains to be fully investigated is: if ultralight bosons do exist and we detect them through one or several of these channels, will we be able to start using compact objects to do precision particle physics, in particular can one infer fundamental properties such as their mass, spin and fundamental interactions? This will require a better understanding of higher-spin fields around rotating BHs.

Although some progress has been made to deal with massive vector fields using time-domain simulations, either in full GR Zilhão *et al.* (2015); East and Pretorius (2017) or by fixing the background geometry to be a Kerr BH Witek *et al.* (2013); East (2017), frequency-domain computations, which are more appropriate to span the parameter space, have mainly been dealt with by employing a small-spin approximation Pani *et al.* (2012,a); Brito *et al.* (2013), using an analytical matched asymptotics approach Baryakhtar *et al.* (2017) or using a field theory approach Endlich and Penco (2017), these last two being only valid in the Newtonian limit. Computations of the instability rates without employing any of these approximations have only recently started to be available Cardoso *et al.* (2018); Frolov *et al.* (2018). An estimate of the stochastic background coming from vector or tensor fields has also not been computed. Finally, besides some some estimates on the GWs from a bosenova collapse due to axion self-interations Yoshino and Kodama (2012), a detailed analysis of how self-interactions or interactions with other fields could affect the GW emission and its detectability is still missing.

Pulsar timing

The gravitational drag from particle DM candidates in the orbital motion of binary pulsars has been studied in Pani (2015b); Caputo *et al.* (2018). This may be important to constrain DM models that generate a thick DM disk Caputo *et al.* (2018) or to study the DM density closer to the galactic center, if a pulsar binary is discovered there and can be timed to high

precision.

DM, specially if under the form of light bosons, can also produce other peculiar effects, accessible through EM observations. In models where DM comes in the form of an ultralight boson, the DM configuration is able to support itself through pressure, which is in turn caused by a time-dependence of the field. This time-periodicity gives rise to an oscillating gravitational potential which is able to produce tiny, but potentially measurable, differences in the time-of-arrival signal from precise clocks, such as pulsars Khmelnitsky and Rubakov (2014); Blas *et al.* (2017).

Mini-galaxies around BHs

In addition, in these theories, BHs can grow (permanent or long-lived) time-oscillating, non-axisymmetric bosonic structures Brito *et al.* (2015a). Planets or stars in the vicinity of these BH are subjected to a periodic forcing, leading to Lindblad and co-rotation resonances. This phenomenon is akin to the forcing that spiral-armed galaxies exhert on its planets and stars, and it is conceivable that the same type of pattern appears, on smaller-scales, around supermassive hairy BHs Ferreira *et al.* (2017); Hannuksela *et al.* (2019).

GW detectors as DM probes

Finally, there are interesting proposals to use the GW detectors themselves as probes of DM, when used as extremely sensitive accelerometers Bekenstein and Magueijo (2006); Hall *et al.* (2016); Englert *et al.* (2017).

Gravity sits at the heart of some of the most important open problems in astrophysics, cosmology and fundamental physics, making it a subject of strong interdisciplinarity. Black holes are, in some ways, the "atoms" of gravity, the "simplest" astrophysical objects, yet they harbour some of the most remarkable predictions of GR, including that of its own ultimate failure. Gravitational-wave astronomy will allow us to test models of BH formation, growth and evolution, as well as models of GW generation and propagation. It will provide evidence for event horizons and ergoregions, test GR itself and may reveal the existence of new fundamental fields. The synthesis of these results has the potential to shed light on some of the most enigmatic issues in contemporary physics. This write-up summarized our present knowledge and key open challenges. We hope that it can serve as a guide for the exciting road ahead.

26 Prospects for Fundamental Physics with LISA by Barausse et al.

In this paper, which is of programmatic rather than quantitative nature, we aim to further delineate and sharpen the future potential of the LISA mission in the area of fundamental physics. Given the very broad range of topics that might be relevant to LISA, we present here a sample of what we view as particularly promising fundamental physics directions. We organize these directions through a "science-first" approach that allows us to classify how LISA data can inform theoretical physics in a variety of areas. For each of these theoretical physics classes, we identify the sources that are currently expected to provide the principal contribution to our knowledge, and the areas that need further development. The classification presented here should not be thought of as cast in stone, but rather as a fluid framework that is amenable to change with the flow of new insights in theoretical physics.

26.0.1 Introduction

Several of the deepest open questions in fundamental physics involve gravity in one way or another. These include the classical and quantum dynamics of black holes, a detailed understanding of the expansion and structure formation history in cosmology, and of course the fundamental nature of gravity and spacetime itself.

Gravitational wave (GW) observations have an enormous potential to inform and to falsify theoretical work in these areas, leading to exciting prospects for a fruitful interplay between fundamental theory and observation. On the one hand GWs give us access to largely unexplored

regions of the universe that are dark, such as the immediate environment of black holes and the earliest phases of large-scale structure formation, and to regions where light cannot penetrate, such as the very early universe. On the other hand GWs provide a source of information that complements conventional astronomy and cosmology, enabling a "multi-messenger" approach, thereby paving the way for a deeper understanding.

The observation of long-wavelength GWs with LISA is particularly promising as a probe of fundamental physics. Potential examples are anomalies in the data related to gravitational parity violation, which could provide a hint toward a resolution of the baryogenesis problem. Other anomalies related to violations of the Equivalence Principle or Lorentz invariance could produce modifications in the dispersion relation of matter or horizon-scale modifications in black hole physics due to quantum gravity effects. Observations of the dispersion relation of GWs could constrain a large class of modified theories, which include massive gravity models that attempt to explain the late-time acceleration of the universe, as well as other Lorentz-violating theories (such as Einstein-æther or Horava gravity), whose renormalizability makes them attractive candidates for quantum gravity.

The observational input that LISA will provide will also be complementary to that following from ground-based GW observations Abbott *et al.* (2016, 2017, 2019), carried out by LIGO, VIRGO and KAGRA, because the target sources are qualitatively different. LISA will observe GWs at much lower frequencies than ground-based instruments, allowing for the measurement of an entirely different class of sources: supermassive black hole mergers, EMRIs, galactic binaries, and stochastic GW backgrounds. Some of these sources, such as supermassive black hole mergers, will lead to extremely loud signals, with signal-to-noise ratios in the thousands, that will allow for a deep search of anomalies. Other classes of sources will lead to signals that may not be very loud, such as the EMRIs, but that will nonetheless be extremely complex with lots of amplitude and phase modulations, allowing for the search of qualitatively different anomalies. Moreover, weak signals may allow for tests of General Relativity (GR) that are statistically enhanced by the large number of events, and which might therefore be competitive against single events with extremely large signal-to-noise ratios. LISA observations also complement future GW observations via pulsar timing arrays and the B-mode polarization in the cosmic microwave background, both of which probe an even lower GW frequency range.

The goal of this paper is to identify and scientifically motivate a sample of topics in fundamental physics beyond the current standard models of particle physics, gravity and cosmology that we view are particularly relevant for the LISA scientific community. These topics are of interest to several Working Groups (WG) organized within the LISA Consortium: the Fundamental Physics, the Cosmology, the Astrophysics, and the Waveform-Modeling WGs, each of which approaches these from a different, complementary angle. We stress that here we shall discuss all the topics in a qualitative way, as precisely the more quantitative aspects will be subject to detailed investigations and are thus as such not yet know. Once new results will be available the relevance of certain topics will of course change and new ones, not yet known, might arise. Thus this paper has to be seen as a first step with the aim to somehow coordinate the effort needed towards formulating a realistic assessment in the area of the fundamental physics feasible with LISA. Thus this paper will definitively rise more questions than giving answers.

This initiative should be viewed not as an exhaustive classification but rather as a warmup for a more comprehensive and detailed account in the future. Our discussion will be organized in a *science-first* approach. That is, instead of first thinking about sources of GWs, we will first think about the theoretical physics that could be learned with LISA, irrespective of the source class. Of course, any such list will be, by definition, incomplete, and perhaps more importantly, only a snapshot of the interests of the field at the time of writing. One should thus think of the classes we will identify below as fluid, subject to change in the future, as the winds of physics start blowing in a different direction. With this caveat in mind, we identify the science drivers presented in Fig. 26.1, with each science driver defined and discussed in much more detail in each of the sections that follows. This classification implicitly assumes that work must be done in three main areas: theoretical development, waveform generation, and data analysis, with different drivers currently at different levels of development.

With the classes declared, we will then sub-organize each class with sub-classes, following a source classification approach. For the purpose of this document we will identify six different source sub-classes:

- Supermassive Black Hole Binaries (SMBHBs): Coalescences with mass ratio larger than 10^{-1} and total masses in $(10^5, 10^7)M_\odot$.

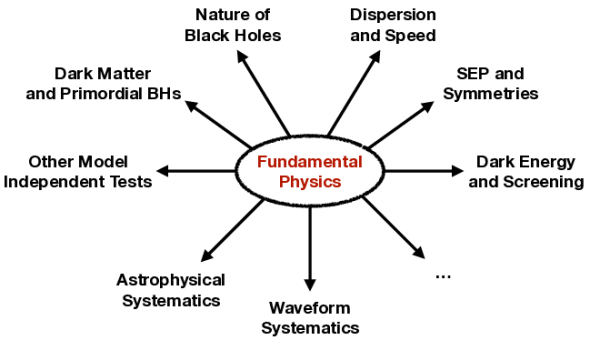


Figure 26.1: A taxonomy of LISA-related topics in fundamental physics. Each of them is discussed in a separate section in this paper. The ellipses stand for topics that may be considered in the future.

- Intermediate-Mass Black Hole Binaries (IMBHBs): Coalescences with mass ratio larger than 10^{-1} and total masses in $(10^2, 10^5)M_\odot$.
- Extreme mass-ratio and intermediate mass-ratio inspirals (EMRIs and IMRIs): Coalescences with mass ratios in $(10^{-6}, 10^{-3})$ and $(10^{-3}, 10^{-1})$, and total masses in $(10^3, 10^7)M_\odot$.
- Stellar origin BH binaries (SOBHBs): Inspirals with sufficiently low total mass (e.g. in $(50, 500)M_\odot$) such that they could be detected both by LISA and second- or third-generation ground-based detectors.
- Galactic Binaries: White dwarf or neutron star binary inspirals within the Milky Way that produce nearly monochromatic signals.
- Stochastic Backgrounds: Cosmological sources of GWs that produce a stochastic background.

Of these source sub-classes, SMBHBs with accretion disks, SOBHBs in nuclear galactic disks Bartos *et al.* (2017), and galactic binaries are expected to produce strong and coincident electromagnetic signals. By no means ought this to be thought of as final, since LISA could always detect sources that nobody expected. Inversely, we make no statements in this document about the astrophysical rates of these events, or even whether all of these will be detectable with LISA, as this will depend on the noise of the actual detector (see e.g. Moore *et al.* (2019)).

The rest of this paper is organized as follows. Section 26.0.2 discusses modified dispersion relations and the speed of gravity. Section 26.0.3 describes violations of the Equivalence Principle and violations of other fundamental symmetries. Section 26.0.4 covers tests of the nature of black holes. Section 26.0.5 discusses dark energy and screening. Section 26.0.6 describes dark matter and primordial black holes. Section 26.0.7 summarizes ideas for other model-independent tests. Section 26.0.8 discusses astrophysical systematics, while Sec. 26.0.9 covers waveform systematics. Section 26.0.10 summarizes and concludes with an outlook to the future. Henceforth, we employ geometric units when needed, in which $G = 1 = c$ and we follow the conventions of Misner *et al.* (1973).

26.0.2 Modified Dispersion Relations and the Speed of Gravity

According to Einstein's theory, GWs obey the dispersion relation $\omega^2 = k_i k^i$, with the contraction done with the flat Euclidean metric. This then immediately implies that the group and the phase velocity of GWs are the speed of light. Modified theories of gravity, in particular

those that attempt to unify quantum mechanics and GR, sometimes lead to different dispersion relations of the form

$$\omega^2 = k_i k^i + \frac{m_g^2}{\hbar^2} + A(k_i k^i)^\alpha \,, \tag{26.1}$$

where m_g is a hypothetical mass for the graviton, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ determines the type of modification introduced, and A controls its magnitude. This expression should be thought of as approximate, in the limit that $m_g^2/\hbar^2 \ll k^2$ and $A \ll k^{2-\alpha}$.

The parameterization of the correction to the propagation of GWs presented in Eq. (26.1) is obviously not unique, and other parameterizations have been considered in the literature, especially in the context of cosmology Ezquiaga and Zumalacárregui (2017); Baker *et al.* (2017); Ezquiaga and Zumalacárregui (2018); Sakstein and Jain (2017).

A commonly used parameterization is

$$\omega^2 + iH\omega\,(3 + \alpha_M) = (1 + \alpha_T)\, k_i k^i \,, \tag{26.2}$$

where we are here considering waves propagating in a cosmological background with Hubble parameter H. A more detailed discussion on these assumptions and consequences for black-hole properties can be found in Tattersall *et al.* (2018).

Clearly, $\alpha_T = A$ when $\alpha = 1$, and it controls the speed of GWs. The parameter α_M is not included in Eq. (26.1), and it controls the rate of dissipation of GWs (see e.g. Alexander and Yunes (2018)). Both parameterizations have advantages and disadvantages. For example, Eq. (26.1) allows one to constrain a kinematical graviton mass, while Eq. (26.2) does not, whereas Eq. (26.2) allows one to test the rate of GW dissipation, while Eq. (26.1) does not.

A modification of this type clearly leaves an imprint on the GWs that arrive on Earth, but this imprint is due to modifications in the propagation of the waves, and not modifications in their generation. One can think of this modification as a correction to the graviton propagator in quantum field theory language. Given this, one can in principle modify any wave generation scheme by simply modifying the way the GWs propagate from the source to the detector on Earth in vacuum. For a more detailed review of the way this modification affects the response function, see Mirshekari *et al.* (2012); Yunes and Siemens (2013).

The best systems to constrain these modifications are those that are as far away as possible from Earth, which reduces to SMBHBs (see e.g. Chamberlain and Yunes (2017)). This is because modifications to the propagation of GWs accumulate with distance traveled. In addition, constraints on the mass of the graviton are also enhanced for supermassive systems because the correction scales with the chirp mass. For $\alpha > 1$, however, the opposite is true, with constraints deteriorating as an inverse power of the chirp mass Mirshekari *et al.* (2012); Yunes and Siemens (2013).

A confirmation of the dispersion relation of GR could place constraints on theories with extra dimensions or quantum-inspired Lorentz violation (both predict $\alpha = 2$), and on modified gravity models that attempt to explain the late-time acceleration of the universe (that predict $\alpha = 0$ and $m_g \neq 0$). An important distinction should be made, however, regarding the speed of gravity. Typically, when we refer to the speed of gravity, we mean the constant coefficient in front of the first term on the right-hand side of Eq. (26.1). This constant cannot be measured precisely with only GWs detected with a space-based instrument or multiple ground-based detectors Blas *et al.* (2016); Cornish *et al.* (2017). Instead, its precise determination requires an electromagnetic coincident observation Abbott *et al.* (2017a). Therefore, constraints on the speed of gravity are typically only possible with neutron star binaries or black hole-neutron star binaries that induce an electromagnetic signal when considering ground-based detectors, and with supermassive black hole mergers when considering space-based detectors Dal Canton *et al.* (2019). EMRIs in which a neutron star falls into a supermassive black hole will not lead to tidal disruption outside the horizon of a supermassive black hole due to the latter's mass, thereby decreasing the chances to generate detectable electromagnetic signals. LIGO-Virgo observations have already constrained the speed of gravity to better than one part in 10^{15} Abbott *et al.* (2017a).

The current status on the development of models for this type of test is mostly complete. Not included above is the possibility to have an anisotropic dispersion relation, for example due to preferred frame effects; a classification of such anisotropic effects from the viewpoint of effective field theory can be found in Kostelecky and Mewes (2016); Mewes (2019). Modifications to the propagation of the GW can be implemented *a posteriori* after the wave generation problem has been solved. Typically, the propagation modification is modular and can be implemented on

any model in typically a straightforward way. Additional work could be devoted to verifying the validity of such an implementation in regimes where the stationary phase approximation breaks down.

26.0.3 Violations of the Equivalence Principle and Fundamental Symmetries

The equivalence principle has been a guiding principle in gravitation for centuries. In Newton's original formulation it refers to the equivalence between inertial mass and gravitational mass. The definition has evolved to avoid reference to the mass in a relativistic setup and it has also been expanded to include other principles. We refer the reader to Will (1993) for a thorough discussion.

The *Weak Equivalence Principle* (WEP), or simply universality of free fall, postulates that if an *uncharged test body* is placed at an initial event in spacetime and given an initial velocity there, then its subsequent trajectory will be independent of its structure and composition. The *Einstein Equivalence Principle* postulates that the WEP, Local Lorentz Invariance (LLI), and Local Position Invariance (LPI) hold true. LLI requires that the outcome of any local non-gravitational test experiment is independent of the velocity of the freely-falling apparatus. LPI requires that the outcome of said experiment is independent of where and when it is performed. The *Strong Equivalence Principle* (SEP) extends the WEP to self-gravitating bodies and the LLI and LPI to *any* experiment. In the context of the WEP, LLI and LPI are intimately linked with Lorentz symmetry and universality of couplings in the standard model, as there is reference to non-gravitational experiments. In the SEP, LLI and LPI can be seen as manifestations of Local Lorentz symmetry and universality of couplings in the standard model and gravitation.

Einstein's theory is the only known gravity theory that, minimally coupled to the standard model (SM) of particle physics, satisfies the SEP. So a null test of the SEP is usually considered as a confirmation of GR. Though there is no definitive proof that GR is unique in this respect, it is relatively straightforward to argue that generic deviations of GR and/or the standard model would indeed lead to SEP violations. The first step is to realize that deviation from the standard model or GR generically implies the existence of new fundamental fields. This is rather obvious for the SM, while for GR it is implied by Lovelock's theorem Lovelock (1972); Sotiriou (2015a).[19] To circumvent the latter and put together a gravity theory other than GR, one needs to either explicitly introduce new fields that couple non-minimally to gravity, allow for higher-order field equations, allow for more than 4 spacetime dimensions, or give up diffeomorphism invariance (general covariance). While from a fundamental physics perspective these options might be distinct, the latter three options lead back to having additional fields if one adopts a more phenomenological viewpoint. Indeed, higher-order equations mean more degrees of freedom generically, higher-dimensional models can be compactified down to 4 dimensions plus additional fields, and diffeomorphism invariance can be restored by rewriting the same theory using a larger field content (Stueckelberg trick). See Sotiriou (2015a) for a discussion.

It should now be clear why deviations from GR will generically lead to violations of the SEP. Extra fields imply additional interactions. If black holes and compact stars carry nontrivial configurations of the new fields then they can experience these new interactions. This would lead to a direct violation of the SEP. Additionally, the new interaction can also lead to additional GW polarizations (e.g. longitudinal dipolar emission) that affect orbital dynamics. Moreover, in the context of Lorentz-violating gravity theories, these new fields could select a preferred direction in spacetime, thereby leading to violations of the LLI. Finally, the configurations of these extra fields could depend on the spacetime location, thereby leading to violations of LPI.

Based on the above, and the fact that LISA's primary binary sources contain at least one black hole, LISA's ability to constrain violations of the SEP is intimately related to its ability to test the structure of black holes in a given beyond-GR scenario. This will be covered in some detail in the next section, so we will postpone the technical discussion until then. A theoretical limitation comes from no-hair theorems. Black holes in theories that are covered by no-hair theorems will not carry additional charges[20] and hence they will not exhibit any

[19] Theories with auxiliary fields manage to circumvent Lovelock theorem without introducing new dynamical degrees of freedom, but they have serious shortcomings Flanagan (2004); Barausse *et al.* (2008); Pani and Sotiriou (2012); Pani *et al.* (2013).

[20] The term charge is used here loosely, to refer to a non-trivial configuration of some new field, as has become

additional interactions. In such cases there will not be violation of the SEP, though one might hope to detect deviations from GR through quasinormal ringing (see Sec. 26.0.4), since the latter can be affected by nontrivial couplings even when the background solution is a GR black hole Barausse and Sotiriou (2008); Molina *et al.* (2010); Tattersall and Ferreira (2018).

No-hair theorems Hawking (1972); Sotiriou and Faraoni (2012); Hui and Nicolis (2013); Silva *et al.* (2018); Sotiriou (2015b); Herdeiro and Radu (2015) and ways to circumvent them have been heavily scrutinized in (generalized) scalar-tensor theories. Hairy black holes are known to exist in theories where the scalar couples to higher-order curvature invariants, such as the Gauss–Bonnet invariant Campbell *et al.* (1992); Kanti *et al.* (1996); Yunes and Stein (2011); Sotiriou and Zhou (2014a,b); Antoniou *et al.* (2018); Benkel *et al.* (2016, 2017) or the Pontryagin density Yunes and Pretorius (2009a); Stein (2014). Such couplings can arise from low-energy effective actions for quantum gravity candidates Metsaev and Tseytlin (1987); Maeda *et al.* (2009); Jackiw and Pi (2003); Green *et al.* (1987); Ashtekar *et al.* (1989). A coupling with the Pontryagin density breaks parity invariance as well and, hence, studying theories that include it offers a way to test parity violation in gravity[21] Jackiw and Pi (2003); Alexander and Yunes (2009). It has recently been shown that a suitable coupling with the Gauss–Bonnet invariant can lead to spontaneous scalarization of black holes Doneva and Yazadjiev (2018); Silva *et al.* (2018), *i.e.* black holes that have hair only if they lie in a critical mass range.

Modeling binaries numerically in theories with higher order curvature invariants is a challenging task that has just started Okounkova *et al.* (2017); Witek *et al.* (2019); Okounkova *et al.* (2019). Constraints based on orbital effects of dipolar scalar emission seem to suggest that LISA is not likely to be competitive relative to future ground based detectors, when it comes to binaries with similar masses Witek *et al.* (2019). This is because the scalar charge is determined by the curvature, i.e., the inverse of the BH mass. Thus, somewhat counter-intuitively, the scalar charge due to higher curvature corrections is small for supermassive BHs. At the same time large mass ratios seem to induce a strong scalar flux during the merger Witek *et al.* (2019), thus making IMRIs/EMRIs potentially interesting sources.

Nonetheless, the fact that LISA is probing a different mass range is quite important because, in a theory agnostic perspective, it will probe a different regime. Moreover, the effects of dipolar emission are not the only avenue for obtaining constraints. For example, it is not yet clear if modeling EMRIs within these theories could lead to stronger bounds.

Instead of focusing on theories for which no-hair theorems do not apply, one can try to circumvent no-hair theorems by violating their assumptions. A non exhaustive list of examples that can be astrophysically interesting include the following: long-lived scalar clouds powered by superradiance provided that the scalar field has a very small mass Arvanitaki and Dubovsky (2011); Brito *et al.* (2015a); truly hairy solutions branching off at the onset of the instability Herdeiro and Radu (2014) and long-lived scalar "wigs" even around non-rotating BHs Barranco *et al.* (2012, 2014); time-dependent scalar configuration Babichev and Charmousis (2014); Clough *et al.* (2019); Hui *et al.* (2019); Berti *et al.* (2013), if they can be supported by some non-trivial cosmological boundary conditions; hair induced by a non-trivial initial scalar field configuration Healy *et al.* (2012); hair induced by matter in the vicinity of a black hole Cardoso *et al.* (2013); Hui *et al.* (2019), though one might have to reach very high levels of precision; black holes in Einstein-dilaton-Maxwell theories Hirschmann *et al.* (2018); Juliè (2018); Astefanesei *et al.* (2019) and in generalized Proca theories Minamitsuji (2017); Babichev *et al.* (2017); Heisenberg *et al.* (2017); Kase *et al.* (2018); Rahman and Sen (2019).

We close this section with some additional remarks on testing LLI. Observations of gamma-ray bursts (see e.g. Amelino-Camelia *et al.* (1998)) and the binary neutron star merger GW170817 have already provided a strong constraint on Lorentz symmetry in gravity, in terms of a double-sided bound on the speed of GWs to a part in 10^{15} Abbott *et al.* (2017a). However, Lorentz-violating theories have multidimensional parameter spaces and generically exhibit additional polarizations Sotiriou (2018). The speed of these new polarizations remains virtually unconstrained Emir Gumrukcuoglu *et al.* (2018); Oost *et al.* (2018).

More generally, Lorentz symmetry is essential to the very definition, and hence the structure, of a black hole. Lorentz-violating theories, such as Einstein-aether theory Jacobson and Mattingly (2001); Jacobson (2007) and Hořava gravity Horava (2009); Blas *et al.* (2010); Sotiriou (2011), will typically exhibit superluminal or even instantaneous propagation of signals Blas and Sibiryakov (2011); Bhattacharyya *et al.* (2016a). This implies that black holes in these

customary in the relevant literature.

[21] Technically speaking, the non-minimal coupling in the action is through the product of a pseudoscalar and the Pontryagin density and the action is parity invariant. The solutions exhibit parity violations.

theories will have a different causal structure, featuring multiple horizons, corresponding to modes that travel at different speed Eling and Jacobson (2006); Barausse *et al.* (2011), or a new type of *universal* horizon that blocks all modes irrespective of propagation speed Barausse *et al.* (2011); Blas and Sibiryakov (2011); Bhattacharyya *et al.* (2016b). This different horizon structure is expected to leave an imprint in the quasi-normal spectrum of these black holes. Moreover, it is important to emphasize that black holes in Lorentz-violating theories will in general have hair (although see Ramos and Barausse (2019)): for the field that can be thought of as breaking Lorentz symmetry can never be trivial. Hence, though advances in modelling would have to be made to obtain quantitative estimate for constraints one could get with LISA, it should be clear that there is a strong potential for constraining Lorentz violations. It is worth emphasizing that bounds coming from testing the dispersion relation of GWs discussed in the previous section, are complementary to those discussed here.

26.0.4 Tests of the Nature of Black Holes

General Relativistic black holes are the simplest objects in the Universe. Within GR, the mass, angular momentum, and electric charge (although the latter is thought to be negligible[22]) of an astrophysical black holes uniquely define its entire multipolar structure and its quasinormal-mode (QNM) spectrum. This implies that the infinite number of multipole moments or of the QNM of a Kerr black hole are related to each other, a property that allows to perform multiple null-hypothesis tests of the no-hair theorem in various complementary ways.

In any extension of GR, the QNMs of a black hole can be parametrized as

$$\omega = \omega^{\rm Kerr} + \delta\omega\,, \tag{26.3}$$
$$\tau = \tau^{\rm Kerr} + \delta\tau\,, \tag{26.4}$$

where ω and τ are the frequency and damping time of the mode. Owing to its very large signal-to-noise ratio (SNR) in the ringdown phase of supermassive black holes, LISA will be able to perform *black hole spectroscopy* by measuring several QNMs for a single event up to redshift $z = 10$, thus constraining beyond-GR deviations, encoded in $\delta\omega$ and $\delta\tau$, with a precision that cannot be reached by any (present and future) ground-based GW interferometer Dreyer *et al.* (2004); Berti *et al.* (2006, 2016). Such modified ringdown frequencies for black holes arise, for example, in quadratic gravity. The dilation or axion coupled to, respectively, the Gauss–Bonnet invariant or the Pontryagin density lead to truly hairy black holes. Consequently, their ringdown exhibits a modulation due to the superposition of gravitational-led and scalar-led modes Molina *et al.* (2010); Witek *et al.* (2019); Okounkova *et al.* (2019).

Another way to test the no-hair theorem is by measuring the multipole moments of a black hole. Several gravity theories beyond GR predict deformations of the Kerr metric, which result in a different multipolar structure,

$$M_\ell = M_\ell^{\rm Kerr} + \delta M_\ell\,, \tag{26.5}$$
$$S_\ell = S_\ell^{\rm Kerr} + \delta S_\ell\,, \tag{26.6}$$

where M_ℓ and S_ℓ are the mass and current multipole moments, whereas δM_ℓ and δS_ℓ are theory-dependent corrections to the Kerr moments, which might even include cases in which the geometry breaks the equatorial symmetry Raposo *et al.* (2019). The most accurate way to measure the multipole moments is by probing accurately the spacetime near a compact object. LISA will be able to do so by detecting the coalescence of comparable-mass binaries at high SNR Kastha *et al.* (2018) and, especially, by detecting EMRIs that can perform millions of orbits around the central supermassive objects before plunging Barack and Cutler (2007); Amaro-Seoane *et al.* (2007); Babak *et al.* (2017). This allows to put constraints as stringent as $\delta M_2/M^3 < 10^{-4}$ on the quadrupole moment of the central supermassive object Ryan (1995, 1997); Sotiriou and Apostolatos (2005); Barack and Cutler (2007); Babak *et al.* (2017). Furthermore, the EMRI dynamics is also very sensitive to the existence of extra degrees of freedom predicted in almost any modified theory of gravity. In the presence of extra polarizations or dipolar radiation, the inspiral would proceed faster than in GR, affecting the GW phase in a

[22]The well-motivated assumption that black holes should be uncharged could also be tested; see Bozzola and Paschalidis (2019) for work in this direction.

detectable way Cardoso *et al.* (2011); Yunes *et al.* (2012); Barausse *et al.* (2016). Furthermore, it is also possible that low-frequency modes (which are absent in GR) can be excited during the inspiral, leaving a characteristic imprint in the waveform.

While in GR the geodesic motion of a test particle around a Kerr black hole is fully integrable, in some theories the orbital motion might even be chaotic Cardenas-Avendaño *et al.* (2018), which would also impact on the structure of the QNMs Pappas and Glampedakis (2018). The presence of chaos in EMRIs is expected to be encoded in chaotic plateaus in the temporal evolution of the fundamental frequencies of the motion Apostolatos *et al.* (2009); Lukes-Gerakopoulos *et al.* (2010, 2014); Contopoulos *et al.* (2011); Lukes-Gerakopoulos and Kopàcek (2017). Exactly how such plateaus affect the Fourier transform of the GW response function is not yet clear. Given that EMRIs are expected to lead to low signal-to-noise ratio sources, new data analysis techniques may be required to test for the presence of chaotic motion in EMRI GWs.

Finally, black holes and neutron stars might be just two "species" of a larger family of compact objects. More exotic species are theoretically predicted in extensions of GR, in the presence of beyond-standard model fields minimally coupled to gravity (e.g., boson stars Jetzer (1992); Liebling and Palenzuela (2012)), in Grand Unified Theories in the early Universe (e.g., cosmic strings), and in exotic states of matter. Several arguments Cardoso and Pani (2019) predict horizonless compact objects (e.g., fuzzballs, gravastars, and dark stars), or new physics at the horizon scale (e.g., firewalls).

GW observations provide a unique discovery opportunity in this context, since exotic matter or dark matter might not interact electromagnetically, and any electromagnetic signal from the surface of a compact object might be highly redshifted. Example GW signatures include finite-size and tidal-deformability effects, as well as critical behavior, in the inspiral which might be detectable for highly-spinning SBHBs Krishnendu *et al.* (2017); Maselli *et al.* (2018); Addazi *et al.* (2019); Compère *et al.* (2018) and for EMRIs Pani and Maselli (2019), a different QNM spectrum Chirenti and Rezzolla (2007); Pani *et al.* (2009); Glampedakis and Pappas (2018), excitation of internal oscillation modes of the object, and the presence of a surface instead of an event horizon. A smoking gun of the latter would be the presence of "GW echoes" in the post-merger GW signal of a coalescence Cardoso *et al.* (2016a,b); Cardoso and Pani (2017); Bueno *et al.* (2018) which are absent in the classical black hole picture in which the horizon is a one-way membrane. Supermassive black hole coalescence detectable by LISA with SNR as high as a few thousands will allow to constrain models of supermassive exotic compact objects in almost the entire region of their parameter space Testa and Pani (2018).

Theoretical studies of the viability of such horizonless objects are advancing in recent years Compère (2019); Giddings *et al.* (2019). One key criterion for their viability is their stability Eperon *et al.* (2016). Horizonless objects will be unstable to light-ring (non-linear) instabilities Keir (2016); Cardoso *et al.* (2014); Cunha *et al.* (2017) and to an ergoregion instability Maggio *et al.* (2019). The former can in principle be avoided if one modifies GR or if the horizonless object is made of matter that violates the energy conditions. The latter can be avoided if one allows the surface of the horizonless object to be partially absorbing Maggio *et al.* (2017). If the surface is absorbing, however, the horizonless object will collapse to a black hole due to accretion of material in the interstellar and in the intergalactic medium, accretion of dark matter, or absorption of GWs if in a binary system Chen *et al.* (2019); Yunes (2019). To avoid collapse, the surface of the horizonless object has to be a sufficiently far from the would-be horizon, possibly inducing other signatures when two such objects coalesce (see also Krishnendu *et al.* (2017) for more discussion). Finally gravitational collapse to horizonless compact objects may involve novel types of GW bursts following the main GW signal Hertog and Hartle (2017). To date, there is no theoretical framework at the level of precise field equations or an action principle usable to study whether these horizonless objects can form from the collapse of matter fields (regardless whether they satisfy the energy conditions).

26.0.5 Dark Energy and the ΛCDM Model

The observed late-time acceleration of the cosmic expansion is one of the greatest mysteries in modern cosmology. Currently, the tension in the observed value of the Hubble constant from Type IA supernova Riess *et al.* (2016) and the cosmic microwave background Ade *et al.* (2016) has only exacerbated this mystery. Although by now several observations have undoubtedly confirmed the presence of such anomalous acceleration Betoule *et al.* (2014); Ade *et al.* (2016); Aghanim *et al.* (2018), a convincingly theoretical explanation is still missing Copeland *et al.*

(2006). The simplest solution, relying on the addition of the so-called *cosmological constant* into the Einstein field equations, has always been at odds with theoretical expectations Weinberg (1989); Martin (2012) and is now challenged by mounting observational evidence, for example from supernova observationsRiess *et al.* (2018, 2019).

It is thus not surprising that alternative solutions proliferate in the literature Copeland *et al.* (2006); Joyce *et al.* (2016). The nature of the so-named *dark energy*, the invisible entity introduced to account for the observed cosmic acceleration, has been the subject of much speculation. Many different hypotheses have been considered to explain the origin of dark energy, including in particular introducing new cosmological matter fields and modifying GR Joyce *et al.* (2016). The resulting plethora of dark energy models must be tested against all observations collected so far in order to select the models that are physically viable. Future observations will further refine this set of viable dark energy models and possibly provide hints towards the solution of the cosmic acceleration riddle. These future observations include tests with catalogues of GW *standard sirens* collected by LISA.

Standard sirens are GW sources at cosmological distances that can be used as reliable and independent distance indicators, i.e. which yield a direct measurement of the luminosity distance which does not need to be calibrated with the cosmic distance ladder Schutz (1986); Holz and Hughes (2005). For cosmological applications they need a corresponding redshift measurement. Standard sirens can thus be employed either with the joint detection of an EM counterpart, from which the redshift of the GW source can be inferred, or without any EM counterpart identification, in which case the so-called "statistical method", which uses galaxy catalogues to infer redshift information, must be applied Schutz (1986); Del Pozzo (2012). LISA will detect mainly three types of GW sources at cosmological distances[23]: SMBHBs, EMRIs, and SOBHBs sources. All these sources can be used as standard sirens, although only SMBHBs are expected to provide observable EM counterparts. Interestingly the subset of these sources that will be relevant for cosmological analyses will be observed at different redshift ranges: SOBHBs will be mainly detected at $z < 0.1$ Kyutoku and Seto (2017); Del Pozzo *et al.* (2018), EMRIs at $0.1 < z < 1$ MacLeod and Hogan (2008); Babak *et al.* (2017) and SMBHBs at $1 < z < 10$ Tamanini *et al.* (2016). This implies that LISA can be considered as a cosmological probe able to test the expansion of the universe across the distance ladder Tamanini (2017).

All these standard sirens will provide a way to test models of dark energy through the *distance-redshift relation*, which is a standard cosmological relation connecting the luminosity distance to the redshift of any source and it crucially depends on the cosmological model that is chosen, particularly through some model parameters. A fit of this relation with the standard siren data gathered by LISA will thus provide an effective way to constrain dark energy models, in exactly the same way type-Ia supernova analyses are performed. Furthermore, many modified gravity models of dark energy, including for example viable Horndeski theories, bigravity and nonlocal gravity (see e.g. Maggiore (2014); Belgacem *et al.* (2018a)), predict a different distance scaling in the cosmological propagation of GWs. Specifically the amplitude of GWs does not decrease as simply the inverse of the luminosity distance, as required by GR, but instead it follows a different scaling generally dependent on the redshift through modified gravity terms Lombriser and Taylor (2016); Nishizawa (2018); Belgacem *et al.* (2018b,c). A similar feature is also predicted by models of dark energy evoking extra spacetime dimensions, where GWs are allowed to propagate in the higher dimensions as well Deffayet and Menou (2007); Pardo *et al.* (2018); Abbott *et al.* (2018). In these cases the comparison of the luminosity distance inferred from GW measurements with the luminosity distance as inferred from EM observations, will allow to test deviations from GR and thus to constrain modified gravity models of dark energy.

At present standard sirens are not able to constrain any dark energy model, since currently operating Earth-based detectors can only collect useful cosmological data at low redshift and consequently measure only the Hubble constant Abbott *et al.* (2017b); Fishbach *et al.* (2019); Soares-Santos *et al.* (2019); Chen *et al.* (2018). LISA will instead collect cosmological data at higher redshift (possibly up to $z \sim 10$ Tamanini *et al.* (2016)), and thus will in fact have the opportunity to test other cosmological parameters, including the ones specifying the nature of dark energy.

Although at the moment there is no complete investigation of the cosmological potential of LISA which takes into account all the possible types of standard sirens mentioned above, some studies considering only SMBHB data with EM counterparts have been performed Tamanini *et al.* (2016); Tamanini (2017). These analyses showed that LISA will effectively constrain

[23]IMBHBs will also be detected at cosmological distances, but their existence is still debated nowadays and consequently no cosmological applications of this class of sources have ever been considered.

dark energy models predicting deviations from the standard ΛCDM cosmological evolution at redshift $1 < z < 10$, such as for example early dark energy and interacting dark energy models Caprini and Tamanini (2016); Cai *et al.* (2017). Moreover similar investigations clearly pointed out that LISA will strongly constrain any deviation from the standard GR propagation of GWs, implying that LISA will efficiently test modified gravity models of dark energy Belgacem *et al.* (2019). To understand if and how LISA will test more conventional dark energy models, where deviations from ΛCDM appear only at low redshift, further analyses involving the other LISA standard siren sources, namely SOBHBs and EMRIs, are required. In any case, by probing possible departures from GR and by constraining deviations from ΛCDM at high redshift, LISA will definitely be able to shed new light on the nature of dark energy. One should also keep in mind that Athena-LISA combined observations might enhance further the possibilities to make progress on some of the issues mentioned in this white paper Group; ESA.

26.0.6 Dark Matter and Primordial Black Holes

LISA observations of rotating black holes could constrain or detect certain light bosonic fields that have been proposed as dark matter candidates Marsh (2016); Hui *et al.* (2017), even in the absence of a direct detection of stochastic GWs of cosmological origin. The reason is that ultra-light bosonic fields around spinning black holes can trigger a superradiant instability Detweiler (1980); Damour *et al.* (1976); Dolan (2007); Shlapentokh-Rothman (2014); Moschidis (2016); Frolov *et al.* (2018); Dolan (2018) (akin to Press and Teukolsky's "black hole bomb" Press and Teukolsky (1972)), forming a long-lived bosonic "cloud" outside the horizon. The superradiant instability spins the black hole down, transferring up to a few percent of the black hole's mass and angular momentum to the cloud Arvanitaki and Dubovsky (2011); Brito *et al.* (2015b); Arvanitaki *et al.* (2015); Yoshino and Kodama (2015); Brito *et al.* (2015a); Arvanitaki *et al.* (2017); Baryakhtar *et al.* (2017); East and Pretorius (2017); Ficarra *et al.* (2019). The condensate is then dissipated through the emission of GWs with frequency $f \sim m_s/\hbar$, where m_s is the mass of the field. Novel GW signatures are expected in binary systems that may be affected by resonant phenomena Blas *et al.* (2017); Baumann *et al.* (2019a); Berti *et al.* (2019); Baumann *et al.* (2019b); Cardoso *et al.* (2020) or superradiance of the binary system itself Wong *et al.* (2019); Wong (2019).

Superradiance is most effective when the boson's Compton wavelength is comparable to the black hole's gravitational radius Dolan (2007); Witek *et al.* (2013). Strong motivation to investigate this possibility comes e.g. from "string axiverse" scenarios (where axion-like particles arise over a broad range of masses in string theory compactifications as Kaluza-Klein zero modes of antisymmetric tensor fields Arvanitaki *et al.* (2010)) and from "fuzzy dark matter" scenarios (which require axions with masses $\approx 10^{-22}$ eV Hui *et al.* (2017)). We should note, however, that this effect has even more powerful implications: it is sensitive only to the gravitational interaction with (ultra-light) massive bosons and, thus, it enables us to probe a wide range of beyond-standard model particles in general.

Current Earth-based detectors can probe boson masses $m_s \sim 10^{-13}$–10^{-11} eV, while LISA can detect or rule out bosons of mass $m_s \sim 10^{-19}$–10^{-15} eV Brito *et al.* (2017a,b); Isi *et al.* (2019); Ghosh *et al.* (2018a); Tsukada *et al.* (2018); Baumann *et al.* (2019a); Berti *et al.* (2019). That is, axions in the "standard" mass range proposed to solve the strong CP problem of QCD could be tested by GW interferometers on Earth Arvanitaki *et al.* (2015, 2017); Brito *et al.* (2017a), LISA could test a broad range of masses relevant to string axiverse scenarios, as well as some candidates for fuzzy dark matter. An attractive possibility is the detection of EMRIs around black holes that have formed a boson cloud: the cloud would affect the phase evolution of the system in a characteristic, detectable manner Eda *et al.* (2013); Macedo *et al.* (2013); Eda *et al.* (2015); Hannuksela *et al.* (2019); Baumann *et al.* (2019a); Berti *et al.* (2019); Baumann *et al.* (2019b); Naoz and Silk (2019), which could be used to identify hypothetical dark matter candidates.

The range of allowed boson masses m_s can also be constrained by LISA measurements of the spins of black holes in binary systems. For a given m_s, black holes should spin down whenever their spin is large enough to trigger superradiant instabilities. Instability windows in the black hole spin versus mass plane, for selected values of m_s, can be obtained by requiring that the instability acts on timescales shorter than known astrophysical processes, such as accretion and mergers. Roughly speaking, continuum fitting or Iron Kα measurements (see e.g. Jovanovic *et al.* (2012)) of supermassive black hole spins probe the existence of bosons in the mass range $m_s \sim 10^{-19}$–10^{-17} eV. For stellar-mass black holes, the relevant mass range is

$m_s \sim 10^{-12}$–10^{-11} eV. Black hole spin measurements with a space-based GW detector can rule out light dark matter particles in the intermediate mass range $m_s \sim 10^{-16}$–10^{-13} eV, which is inaccessible to electromagnetic observations of stellar and massive black holes Cardoso *et al.* (2018). Therefore LISA can probe the existence of ultralight bosons in a large mass range that is not probed by other black hole spin measurement methods, or even measure m_s with $\sim 10\%$ accuracy if scalars in the mass range $[10^{-17}, 10^{-13}]$ eV exist in nature Brito *et al.* (2017b). Spin-one and spin-two fields (i.e., hypothetical dark photons or massive gravitons) would trigger even stronger superradiant instabilities. A space-based detector could detect resolved or stochastic GW from superradiant instabilities, or set strong constraints on the viable mass range for light bosons Pani *et al.* (2012); East and Pretorius (2017); Brito *et al.* (2013); Baryakhtar *et al.* (2017); Barausse *et al.* (2018); Alexander *et al.* (2018).

Self-interacting models of dark matter could also be constrained with LISA observations. Recently, Ref. Pollack *et al.* (2015) suggested that (ultra) self-interacting dark matter could form massive seed black holes. These seed black holes would later on grow through accretion to form the supermassive black holes at the centers of galaxies that we see today. Given that LISA can see $10^5 M_\odot$ SMBHBs to large distances, it may be possible to probe this scenario through the detection of SMBHB populations at large redshift.

Another interesting candidate for dark matter are primordial black holes (PBHs) Hawking (1971). In particular, PBHs in the stellar-mass range may contribute a non-negligible fraction of dark matter Bird *et al.* (2016); Clesse and García-Bellido (2017a); Sasaki *et al.* (2016, 2018). PBHs can dynamically form binaries, typically resulting in highly eccentric orbits at formation Ali-Haimoud *et al.* (2017). GW is a direct probe of the self-interaction of PBH dark matter Kovetz (2017). With its access to earlier stages of the inspiral, LISA could allow us to distinguish the PBH binary formation channel from stellar-origin formation channels through measurements of spin and eccentricity Cholis *et al.* (2016), as well as the mass spectrum Kovetz *et al.* (2017). Another source of unique information is through the stochastic background. The PBH merger rate at high redshift is not limited by the star formation rate, and so the stochastic background from these events should extend to lower frequencies (and higher redshifts) than for traditional binary black hole sources Mandic *et al.* (2016); Clesse and García-Bellido (2017b). If PBHs are to form from the collapse of overdense regions deep in the radiation domination era, the required $\mathcal{O}(1)$ fluctuations in the primordial curvature power spectrum will provide a second-order source of primordial GWs Ananda *et al.* (2007); Baumann *et al.* (2007); Garcia-Bellido *et al.* (2017). The characteristic frequency of these GWs is directly related to the PBH mass. Interestingly, one of the least constrained mass windows for PBH dark matter (from $10^{-13}\,M_\odot$ to $10^{-11}\,M_\odot$) corresponds precisely to the mHz frequency window accessible by LISA Bartolo *et al.* (2018a,b); Cai *et al.* (2018). It will thus be important to study whether LISA will be able to test the PBH dark matter scenario in this mass window through the two-point and three-point correlations of the GW signal Bartolo *et al.* (2016, 2018c).

26.0.7 Other Model-Independent Tests

One model independent way of probing GR, which will however require extensive investigations to see whether it is accurate enough, is to perform a residual test Abbott *et al.* (2016); LIG (2019). This is done by subtracting the most probable template from the data and carrying out a Bayesian model selection analysis to see whether the residual is consistent with noise or contains a signal. Such a test can capture not only beyond-GR effects un-modeled in GR template waveforms, but also systematics within GR. LISA is expected to detect GW signals with SNRs much higher than observed events with aLIGO and Virgo. It would be important to repeat the above residual tests to check consistency between LISA data and our GR and waveform expectations.

Another model-independent test is the consistency check among the inspiral-merger-ringdown (IMR) parts of the waveforms Ghosh *et al.* (2016); Abbott *et al.* (2016); Ghosh *et al.* (2018b); LIG (2019), an analysis that resembles a jack-knife test. This approach treats the inspiral and post-inspiral parts of the waveform (separated by the frequency at the innermost stable circular orbit of the binary) independently, and it estimates the remnant's mass and spin with the help of numerical relativity fits. These tests only work for high-mass systems, since one needs to detect *both* inspiral and post-inspiral signals independently. Given that large SNRs are expected for observations of GWs from SMBHBs with LISA, the measurement accuracy of masses and spins of remnant black holes should

improve significantly from current measurement of e.g. GW150914 LIG (2019), both with inspiral and post-inspiral parts of the waveform. Therefore, such IMR consistency tests will become more constraining with LISA.

The third model-independent test is to constrain parametric deviations from GR in the waveforms Arun *et al.* (2006); Mishra *et al.* (2010); Yunes and Pretorius (2009b); Cornish *et al.* (2011); Huwyler *et al.* (2012); Abbott *et al.* (2016, 2018); LIG (2019). The parameterized post-Einsteinian (ppE) formalism Yunes and Pretorius (2009b) introduces amplitude and phase corrections to the GR waveform that can capture non-GR effects that do not necessarily follow the GR structure in the waveform, such as corrections entering at negative post-Newtonian (PN) orders[24]. The LVC used the generalized IMRPhenom (gIMR) model Abbott *et al.* (2016), which also includes corrections in the merger-ringdown part of the waveform[25]. In the inspiral part, the ppE parameters have a one-to-one correspondence with the gIMR parameters Yunes *et al.* (2016). Bounds on these generic non-GR parameters can be mapped to test the fundamental pillars of GR, such as SEP and LLI Yunes *et al.* (2016). Reference Chamberlain and Yunes (2017) derived projected bounds on the ppE parameters for a variety of LISA sources and found that EMRIs would provide the most stringent constraints. Another interesting possibility is to perform a parameterized test of GR by combining LISA observations of a stellar-mass black hole binary with ground-based ones of the same source Sesana (2016, 2017); Tso *et al.* (2018); Gerosa *et al.* (2019); Cutler *et al.* (2019); Moore *et al.* (2019). Such multiband GW observations allow us to constrain the ppE parameters more stringently than ground-based detectors alone Barausse *et al.* (2016); Vitale (2016); Carson and Yagi (2020); Gnocchi *et al.* (2019); Carson and Yagi (2019a,b).

A fourth model-independent test is to probe non-GR polarization modes of GWs Chatziioannou *et al.* (2012); Abbott *et al.* (2017c, 2018); LIG (2019). GR only contains two tensorial polarizations, while metric theories of gravity in general can have additional scalar and vector polarization modes (two each) Will (1993, 2006). Reference Tinto and da Silva Alves (2010) derived sensitivities to such additional polarization modes with LISA. They found that sensitivities to vector and longitudinal (transversal) scalar modes are higher than (comparable to) those for the tensor modes. On the other hand, sensitivities of LISA to circular-polarization modes (due to e.g. parity violation in gravity) in stochastic GW background were discussed in Seto (2006, 2007); Smith and Caldwell (2017).

Other model-independent tests include probing the propagation speed of GWs (comparing to electromagnetic counterparts) or the existence of scalar dipole radiation. The latter is a common feature of non-GR theories with additional degrees of freedom, including scalar-tensor theories Berti *et al.* (2005), Einstein-dilaton-Gauss-Bonnet (EdGB) gravity Yagi *et al.* (2012) and vector-tensor theories Foster (2006, 2007); Blas and Sanctuary (2011); Yagi *et al.* (2014); Hansen *et al.* (2015). One can model such a correction by adding a formally -1PN term to the GW energy flux in GR. Observations of GW150914-like stellar-mass binary black hole GWs with LISA will be able to place stringent bounds on dipole emission Barausse *et al.* (2016). A possibility of using GW observations of galactic binary WDs with LISA is discussed in Littenberg and Yunes (2018), since the presence of dipole emission would effectively make these GWs not monochromatic.

26.0.8 Astrophysical Systematics

Unlike sources for LIGO/Virgo, many of the black hole systems targeted by LISA are believed to live in matter-rich environments Barausse *et al.* (2015, 2014). The reason is that massive black holes are supposed to spend at least roughly $1-10\%$ of their cosmological evolution in an AGN phase Shankar *et al.* (2013); Pardo *et al.* (2016); Jones *et al.* (2016), where they are expected to be surrounded by accretion disks.

For binaries involving two massive black holes, these accretion disks, even if they were to survive unscathed to the last stages of the binary evolution, are unlikely to affect the orbital evolution of the system in a detectable way, and hence they should not introduce significant systematic errors in the GW measurements. However, the circumbinary part of the accretion disk may anchor relatively strong magnetic fields, which coupled with the motion of the black

[24] A correction of N post-Newtonian, or NPN, order is one that is of $\mathcal{O}(v^{2N}/c^{2N})$ relative to the GR leading order term Blanchet (2014).

[25] The original ppE formalism also proposes a similar way to parameterize non-GR modifications in the ringdown phase Yunes and Pretorius (2009b)

hole binary and with black hole spins may trigger the launch of powerful electromagnetic jets Palenzuela *et al.* (2010); Giacomazzo *et al.* (2012). The latter may be observable by future radio telescopes that will be operational at the same time as LISA (e.g. SKA) and may thus provide a way to better localize the binary in the sky and possibly measure its redshift (either directly via the 21 cm line, or by identifying the host galaxy) Tamanini *et al.* (2016).

For EMRIs, the accretion disk potentially surrounding the central massive black hole is unlikely to be destroyed by the satellite, although the latter may carve a gap in the disk (depending on the disk's parameters – especially its height and viscosity – and the satellite's). Depending on the system's parameters, the satellite may undergo either type I or type II planetary migration, which may result in a dephasing of several radians during the LISA observation span Yunes *et al.* (2011); Kocsis *et al.* (2011, 2012a,b); Barausse *et al.* (2015, 2014); Derdzinski *et al.* (2018). Therefore, this effect is likely to be measurable (at least in the $1-10\%$ of EMRIs that are expected to involve an AGN) and if unaccounted for may even bias the measurement of the other parameters. Other potentially measurable effects, though with magnitude slightly lower than that of planetary migration, include dynamical friction and hydrodynamic drag from the disk (especially for inclined and/or counter-rotating orbits), and accretion onto the satellite and the central black hole Barausse and Rezzolla (2008); Barausse *et al.* (2015, 2014).

EMRIs form deep in the cluster that surrounds the massive black hole in galaxy centers. In such clusters, there will always be other stellar-mass bodies near the EMRI. These bodies will tidally perturb the EMRI spacetime, and thus perturb the smaller body's orbit. For most of an EMRI's inspiral, the impact of nearby perturbers is negligible, since the effect of the tidal perturbation averages away over an orbit. However, in every inspiral there will be multiple moments at which the inspiral's orbit resonates with the tidal distortion of the perturber. During such tidal resonances, the tidal perturbation does not average away, but instead kicks the system until it evolves out of resonance. Recent estimates Bonga *et al.* (2019) show that this will have a several radian impact on the waveform. More work is needed to examine how this will affect EMRI measurements, but it is certain to bias GW parameter estimation. Since tidal resonances cannot be predicted in advance but depend on the (random) distribution of stellar-mass objects near each EMRI, this will be a very difficult systematic to model.

Finally, especially if EMRIs exist in dwarf, dark-matter dominated galaxies, the dark-matter profile around the central black hole may develop a steep cusp Gondolo and Silk (1999), which may survive to low redshifts (where EMRIs are detectable) since dwarf galaxies only experience rare mergers (which may destroy the cusp), have low stellar to dark matter mass ratios (which is relevant since stars can destroy the cusps) and short relaxation times (i.e. short cusp regrowth times). Therefore, if these cusps exist, they may leave an observable imprint on these EMRIs (via direct gravitational pull, dynamical friction, hydrodynamic drag and accretion), and possibly bias the GW parameter estimation if not included in the waveform model Barausse *et al.* (2015, 2014); Eda *et al.* (2015).

In more conventional dark matter scenarios, however, the effect of dark matter is not expected to be observable with LISA and/or cause significant systematics Barausse *et al.* (2015, 2014). One notable exception, however, is provided by dark matter made of axions or boson Hui *et al.* (2017), i.e. the possibility that the dark matter may consist of an ultralight axion-like scalar field. As we discussed in Sec. 26.0.6, in such a scenario, the scalar field may form rotating dipolar condensates around spinning massive black holes, as a result of superradiance. These rotating dipoles would produce monochromatic GWs Okawa *et al.* (2014) that would be detectable by LISA as resolved sources or as a stochastic background Brito *et al.* (2017b,a). Moreover, the gravitational pull of these condensates on EMRIs would affect the phase evolution of the system in a characteristic, detectable manner Eda *et al.* (2013); Macedo *et al.* (2013); Eda *et al.* (2015); Baumann *et al.* (2019a); Hannuksela *et al.* (2019); Berti *et al.* (2019); Naoz and Silk (2019), as we discussed in Sec. 26.0.6.

Very little to no work has gone into the study of how astrophysical systematics could affect our ability to test GR. One could imagine that if astrophysical effects are not accounted for, one may confuse a GR deviation with an astrophysical deviation. If so, statistical methods could come to our rescue. If GR deviations are truly present in the signals, one would expect they would be present in all events, and not just in a subset that is prone to be contaminated by astrophysical systematics. If astrophysical effects can be modeled, one could further study whether they can be disentangled from GR deviations. This would be possible if the GR deviations modify the waveform at high PN order predominantly, while astrophysical effects enter first at lower PN order (as is the case, e.g. when considering migration of type I or II in EMRIs with an accretion disk).

26.0.9 Waveform Systematics

To use GWs as a tool to test the nature of gravity and the fundamental laws of physics, we need models which faithfully represent the predictions of these laws. The precision with which a theory's predictions can be measured is ultimately limited by how well one can model these predictions.

Phase counting arguments teach us that models used as templates for measuring a particular source must meet certain phase accuracy requirements. To be useful as *detection templates*, a model must match the phase of nature's signal to within a phase error $\delta\Phi \sim 1$ radian; to be useful as a *measurement template*, it must match to within $\delta\Phi \sim 1/\mathrm{SNR}$. "Detection templates" are waveform models that we use to demonstrate that a GW signal is present in detector noise. It is not necessary that a model faithfully represents the astrophysical signal — it may have significant systematic errors, but still match phase well enough that a signal can be found in noise. "Measurement templates" are waveform models whose phase is computed accurately enough that we can be confident that intrinsic systematic errors are smaller than the statistical uncertainty associated with measurement noise. Rigorous calculations backing up these rules of thumb can be found in Refs. Vallisneri (2008); Lindblom *et al.* (2008); Vallisneri (2011).

When thinking about using GWs as a tool for probing the fundamental laws of physics, one is ultimately limited by systematic modeling effects. For example, the simultaneous presence of multiple sources in the LISA data stream can make it difficult to extract fundamental physics from weak signals that are overshadowed by much stronger ones. That is, we expect to measure GWs emitted by (super-) massive BH binaries with an SNR of $\mathcal{O}(10^2 ... 10^3)$, so current modeling accuracy may suffice for identification and reasonable (10%) error in parameter estimation. However, these modeling requirements will also crucially affect our ability to extract and interpret signals contained in the residuals after the subtraction of such loud events, such as signals from EMRIs or SOBHs, or hints of new physics. Furthermore, the binaries' expected configurations will probably differ from that of LIGO sources. In particular, LISA will listen to eccentric binaries (that, in triple-systems can reach $\gtrsim 0.9$ Bonetti *et al.* (2019)), intermediate mass ratios, and highly spinning BHs.

The different sources discussed in this paper require diverse waveform modeling techniques, each with their own challenges. In practice, this Herculian task offers great opportunities for synergies and collaboration between different Working Groups of the LISA Consortium. For example, the accuracy requirements needed to search for deviations from our standard models of gravity, particle physics and cosmology will drive the development of innovative modeling techniques in GR and beyond. For the purpose of this paper, let us specify three sets of techniques to extract the most information about fundamental physics from LISA data:

- **Post-Newtonian (PN) methods:** These analytic techniques are a series expansion in weak fields and small velocities, yielding solutions that describe the dynamics of a binary well during the inspiral. PN is an established tool that has been used to produce two of the main waveform models deployed in LIGO data analysis. The accuracy of the description is controlled by the PN order, which identifies the relative order to which an expansion has been taken in small velocities and weak fields[26]. While waveforms of non-spinning, circular binaries are currently known up to 4PN order, those of eccentric, spinning or precessing binaries are currently only available up to 3PN and 3.5PN order.

  Possible advances that will lead to extensions to higher PN order are under way. These include novel connections to EMRI modeling Bini *et al.* (2016), the use of effective field theory and particle physics techniques Goldberger and Rothstein (2006), and the further development of Hamiltonian and Lagrangian methods coupled to dimensional and Hadamard regularization Marchand *et al.* (2018); Damour *et al.* (2016).

- **Numerical relativity (NR):** These numerical techniques solve the field equations through high-performance computing, yielding solutions that describe the dynamics of a binary during the merger. NR is an established tool that has produced extensive waveform catalogues (for LIGO) Boyle *et al.* (2019); SXS Collaboration; GATech; RIT. Yet, we face new challenges for LISA's source modeling that go far beyond "simply" increasing resolution to decrease numerical discretization errors. The latter demands major code enhancements to optimize performance and increase scalability to exa-scale

[26] A term that scales as $(v/c)^{2N}$ is said to be of N PN order relative to its leading-order controlling factor.

high-performance computing facilities, that has to go hand-in-hand with novel theoretical techniques.

Possible advances include new, constraint preserving formulations and appropriate gauge choices that ensure long-term stable and accurate solutions. Different avenues to address these challenges are underway.

- **Waveform modeling:** The construction of a final waveform model that covers the signal from the early inspiral all the way through the merger and ringdown will probably require the construction of phenomenological Husa *et al.* (2016); Khan *et al.* (2016) and of effective-one-body (EOB) techniques Buonanno and Damour (1999, 2000). The former "stitches" PN and ringdown waveforms together through the inclusion of higher PN order terms that are fitted to numerical simulations. The latter "stitches" a resummed version of the PN expansion to a ringdown waveform through the inclusion of higher PN order terms in the Hamiltonian and radiation-reaction force that are fitted to numerical simulations. These complementary methods are conceptually well established, but, their accuracy is ultimately limited by the present knowledge of their PN and numerical relativity components.

This list refers to upcoming tasks within GR. Any extension thereof – be it in a theory-specific or theory-agnostic fashion – requires major re-thinking of established concepts that is still in its infancy.

GWs from EMRIs are interesting for thinking about systematic effects, since they are a source class for which modeling is largely understood in principle, but for which practical considerations make modeling challenging in practice. Consider the following modeling challenges:

- **Self force order.** EMRIs are modeled by perturbing exact black hole spacetimes, and using the perturbation to calculate a "self force" Poisson *et al.* (2011); Barack and Pound (2019) that pushes the small body's motion away from leading black hole orbit. The perturbation is organized in powers of the EMRI mass ratio μ/M. A phase counting argument Hughes (2017) suggests that measurement templates will require us to go to at least second order in this expansion, a research program that is just getting underway.

- **Structure of the smaller body.** Most EMRI waveform models treat the smaller body as a point-like mass, ignoring the fact that it has finite extent and some form of internal structure. This body of course has some structure, which will couple to the background spacetime; see Witzany (2019) for recent discussion and review. This coupling causes the small body's spin to precess, and exerts a force (relative to the motion of a non-spinning body) which changes the small body's motion.

- **Resonances.** Most of the small body's inspiral phase arises from the orbit-averaged, dissipative effect of the self force, which is equivalent to the loss of energy and angular momentum due to GW emission. In every inspiral, there will be moments at which two of the orbit's orbital frequencies are commensurate. At these moments, terms which normally average to zero will fail to average away. At such resonant moments, the EMRI's evolution can change quite a bit Flanagan and Hinderer (2012); Flanagan *et al.* (2014). This is very similar to the tidal resonance discussed in Sec. 26.0.8. How an EMRI's evolution changes in detail depends on the relative phase of the orbit's radial and angular motions as it enters the resonance, much as the tidal resonance depends on the random distribution of perturbing stellar-mass objects near the EMRI.

It is worth emphasizing that these effects refer exclusively to EMRIs and they are difficult to model, but they are present in GR. It will be challenging to incorporate additional subtle effects that arise in different theories of gravity, and to understand how such effects may be disentangled from all other properties of the source with which they may be correlated. Resonance effects are particularly worrisome from the standpoint of waveform systematics. Because they depend on system characteristics that cannot be predicted in advance (the phase at which the system enters resonance; the distribution of nearby bodies), they may provide the ultimate systematic limitations on waveform phase precision. Precisely how such limitations percolate into limits on how well we can probe fundamental physics remains an open problem.

The above description should not be construed as implying that the only GW sources that may contain waveform systematics are EMRIs. In fact, similar modeling problems arise when considering other sources of GWs, such as SMBHBs and IMBHBs. The latter, for example, are

sources in which the PN approximation is not as accurate as when mass ratios are comparable (see e.g. Yunes and Berti (2008)). Perturbation theory techniques are also not very accurate for such sources because the mass-ratio is not as small as when considering EMRIs. Full numerical simulations are currently computationally challenging because large mass ratio binaries take longer to inspiral and require a larger dynamical range in adaptive mesh refinement. Without PN, perturbation theory or numerical waveforms, it becomes extremely challenging to validate resummed PN waveforms, such as those coming from the effective-one-body framework Buonanno and Damour (1999, 2000).

26.0.10 Conclusions

LISA has immense potential to test for GR deviations in the extreme gravity regime, where the gravitational interaction is enormous and curvatures are large and dynamically changing during the observation time. Such probes of fundamental physics will inform theoretical studies to resolve outstanding questions, of both theoretical and observational nature, in our standard gravitational and cosmological models. Although a lot of the work done so far has dealt with perturbative modifications to the predictions of GR, we note that also global non-perturbative modifications of the geometry may affect both the generation and propagation of GWs, which in turn could constrain quantum gravity models (see e.g. Calcagni *et al.* (2019a,b)).

We have here laid out the main physics drivers for such fundamental physics probes together with their current state of development. The goal of this paper is thus to serve as a guide and a reference for the community of people that may be interested in pursuing fundamental physics problems with LISA. Given that the physics drivers may change and evolve with time, the content of this paper should in some sense be understood as live and changing. We trust that this will constitute a basis for further studies of LISA science related to theoretical physics thereby strengthening the LISA scientific community as a whole.

Part IX
Deeper Understanding of Gravity and Hypothetical Ideas

27 General Relativity by Arifov

27.1 Physical Foundations of the Theory of Relativity

27.1.1 1. Equality of Inertial and Gravitational Mass

Экспериментальный факт, известный в физике под выражением «равенство инертной и тяжелой масс», лежит в основе логической структуры общей теории относительности, хотя понятие «тяжелая масса» принадлежит классической механике и теории тяготения Ньютона и деление массы на «инертную» и «тяжелую» имеет определенный смысл в рамках последней, но не в рамках теории тяготения Эйнштейна. Если, согласно Ньютону, гравитационное взаимодействие двух тел пропорционально их массам, именуемым тяжелыми в отличие от массы, фигурирующей во втором законе Ньютона и называемой инертной, то, согласно Эйнштейну, оно зависит уже не только от масс, но и от количества движения, тензора напряжения и т. д. и описывается уравнениями, в которых источником поля является тензор энергии-импульса. Поэтому понятие «тяжелая масса» не только не фигурирует в общей теории относительности, но даже не может быть включено в круг ее понятий.

Интересно, что сам Ньютон не делал различий между инертной и тяжелой массами, по крайней мере, явно. Уже в определении 1 кн. I (Ньютон, 1686) он использует экспериментальный факт в основании теории: «Определяется масса по весу тела, ибо она пропорциональна весу, что мною найдено опытами над маятниками, произведенными точнейшим образом...». Пропорциональность массы весу, экспериментально установленная Ньютоном, и есть то, что впоследствии было сформулировано как равенство инертной и тяжелой масс. Но если пропорциональность массы весу у Ньютона является не более чем констатацией факта, что сила, с которой данное тело притягивается к другому, пропорциональна его массе, то под утверждением «инертная и тяжелая массы равны» всегда подразумевается предположение о различии природы инертной и тяжелой масс, чнсленное совпадение значений которых требует объяснения.

Дифференциация понятия массы привела в последнее время (Bondi, 1957; Тредер, 1973) к необходимости различать «тяжелую пассивную» и «тяжелую активную» массы и поставила новые проблемы: экспериментально определить отношение численных значений пассивной и активной тяжелых масс и теоретически объяснить возможное их равенство или неравенство. Как бы то ни было, разделение массы на тяжелую и инертную стимулирует постоянное повышение точности измерения их отношения со времен Ньютона до наших дней (см., например, обзор в книге С. И. Вавилова, 1928). Наибольшая точность 5:10-9 была достигнута в опытах с крутильным маятником, предложенным для этой цели Этвешем (Etvs, 1896). В современных вариантах этого опыта граница возможного неравенства инертной и тяжелой масс понижена до 10^{-11} (Roll, Dicke, Krotkov, 1964) и $0,9 \cdot 10^{-12}$ (Брагинский, Панов, 1971).

Независимо от теоретической интерпретации данные опыта всегда сохраняют самостоятельное значение. Опыт Этвеша заключается в следующем. Пусть $\vec{i}, \vec{j}$ и $\vec{k}$ - тройка ортонормированных векторов, таких, что $\vec{i}$ направлен по касательной к меридиану север - юг, а $\vec{k}$ - по вертикали от поверхности Земли. Земля предполагается однородной и шаровидной (M, R, ω - масса, радиус и угловая скорость вращения Земли, φ - широта места).

На некоторое тело в данной точке Земли действует сила $\vec{F}$, складывающаяся из притяжения тела к центру Земли, пропорционального тяжелой массе m_g, и центробежной силы, пропорциональной инертной массе m_{ln} тела:

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m_g M}{R^2} \left(1 - \frac{m_{in}}{m_g} \cdot \frac{\omega^2 R^3 \cos^2 \varphi}{\gamma M}\right) \vec{k} + m_{ln} \omega^2 R \sin \varphi \cos \varphi \vec{i}.$$

Пусть теперь к концам свободно подвешенного на нити стержня с равными плечами l прикреплены два тела 1 и 2, на которые, следовательно, действуют силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Действие этих сил сводится к появлению моментов $\vec{M}_1$ и $\vec{M}_2$

$$\vec{M}_1 = \{(m_{ln})_1 - (m_{l\Omega})_2\} \omega^2 R l \sin \varphi \cos \varphi \sin \beta \vec{k},$$
$$\vec{M}_2 = \{(\text{Вес})_1 - (\text{Вес})_2\} l (\sin \vec{\beta} \iota - \cos \beta \vec{j})$$

относительно точки подвеса стержня, отклонению нити подвеса от вертикали и, наконец, к упругим продольным и поперечным деформациям стержня. Здесь β-угол между $\vec{i}$ и единичным вектором $\vec{n}$, направленным вдоль оси стержня от тела 2 к телу 1 (азимут направления тело 2 - тело 1);

$$\text{Вес} \equiv -(\vec{k}\vec{F}) = \gamma \frac{m_g M}{R^2} \left(1 - \frac{m_{ln}}{m_g} \cdot \frac{\omega^2 R^3 \cos^2 \varphi}{\gamma M}\right).$$

Из формулы видно, что $\vec{M}_2$ обращается в нуль в том и только том случае, если

$$(\text{Вес})_1 = (\text{Вес})_2$$

В этом и состонт смысл равенства весов двух тел-отсутствует момент сил вдоль горизонтальной оси, перпендикулярной к стержню в точке подвеса.

Если m_{in}/m_g - универсальная постоянная, то из равенства весов обоих тел, изготовленных из различных материалов (веществ), следует равенство их масс, как тяжелых, так и инертных. Если же m_{in}/m_g зависит от вещества исследуемых тел, то при равенстве их весов остается отличным от нуля крутящий момент $\vec{M}_1$. который уравновешивается упругим моментом закручивающейся нити. Направление закручивания нити при перестановке тел меняется на противоположное, поэтому

$$\vec{M}_1(2 \to 1) - \vec{M}_1(1 \to 2) = 2 \{(m_{in})_1 - (m_{ln})_2\} \omega^2 R l \sin \div \cos \varphi \sin \beta \vec{k}.$$

Угол закручивания нити при перестановке тел и измеряется в опыте Этвеша. Он имеет наибольшее значение, если стержень расположен вдоль широты, и равен нулю, когда вся система находится в плоскости меридиана.

На тела крутильного маятника, помимо силы $\vec{F}$, действует еще и притяжение Солнца, по порядку величины сравнимое с центробежной силой (притяжение тел Луной значительно слабее солнечного). Крутящий момент, обусловленный действием Солнца, пропорционален разностi тяжелых масс (при равенстве весов!), тел крутильного маятника и в отличие от крутящего момента. обусловленного центробежьой силой, имеет наибольшее значение по абсолютной величине на восходе и закате Солнца, если маятник расположен в плоскости меридиана. Благодаря суточному вращению Земли расположение тел маятника относительно Солнца на закате и на восходе отличается перестановкой $1 \rightleftarrows 2$, а значит, меняется на противоположное направление закручивания нити.

В соответствии с этим опыты Этвеша осуществлялись в двух вариантах: 1) широтное расположение маятника - измерялся угол закручивания нити при перестановке тел маятника местами. пропорциональный $\Delta m_{in}/m$; 2) меридиональное расположение маятника - измерялось изменение угла закручивания нити на закате и восходе, пропорциональное $\Delta m_g/m$. Этвеш, Пекар и Фекети (Etvs, Pekar, Feketi, 1922) измерили величину $\Delta m/m$ в обоих вариантах, а Ролл, Дике, Кротков и Брагинский, Панов - во втором.

Проекция сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ на горизонтальную плоскость не ограничивается парой, создающей момент $\vec{M}_1$. В направлении, перпен- дикулярном стержню, на каждое тело действуют, кроме того, равные силы

$$\frac{1}{2} \{(m_{ln})_1 + (m_{ln})_2\} \omega^2 R \sin \varphi \cos \varphi \sin \beta (\sin \vec{i} - \cos \beta \vec{j}),$$

а вдоль стержня -

$$(m_{ln})_1 \omega^2 R \sin \% \cos \rho \cos \beta (\cos \beta \vec{i} + \sin \beta \vec{j})$$

и

$$(m_{ln})_2 \omega^2 R \sin \varphi \cos \varphi \cos \beta (\cos \beta \vec{i} + \sin \beta \vec{j})$$

соответственно. Первые силы компенсируются компонентом натяжения нити благодаря упругим силам возникающей симметричной относительно точки подвеса деформации изгиба стержня, остальные также уравновешиваются соответствующими компонентами натяжения нити благодаря упругим силам продольной деформации стержня. Если на отрезке тело 1 - точка подвеса стержень испытывает деформацию растяжения, когда $-\frac{\pi}{2} < \beta < < \frac{\pi}{2}$, и сжатия, когда $\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{3}{2}\pi$, под действием сил $(m_{ln})_1 \omega^2 R \sin \varphi \cos \varphi \cos \beta$, приложенных к концам отрезка, то на отрезке тело 2 - точка подвеса стержень испытывает деформацию сжатия, когда $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$, и растяжения, когда $\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{3}{2}\pi$, под депствием силы $(m_{in})_2 \omega^2 R \sin \varphi \cos \varphi \cos \beta$.

Таким образом, в противоположность поперечным деформациям, симметричным относительно точки подвеса, продольные деформации в двух плечах стержня отличаются как по фазе, так и по абсолютному значению, если при равенстве весов инертные массы тел не равны. По разности продольных деформаций можно судить о величине $\{(m_{ln})_2 - (m_{tn})_1\}/m$. Так как силы пропорциональны $\cos \beta$ и $\sin \beta$, то вращением системы вокруг нити подвеса статические деформации можно преобразовать в периодические продольные и поперечные колебания, которые легче поддаются измерению. Успехи современной экспериментальной техники измерения деформаций с помощью пьезоэлектрических тензодатчиков позволяют думать, что такая вращающаяся система может оказаться в состоянии конкурировать с крутильными маятниками в опытах по снижению границы неравенства $\Delta m/m$. Чувствительность этой системы можно увеличить за счет размеров стержня, массы тел и скорости вращения, так как к нити подвеса в ней не предъявляются жесткие требования, предъявляемые к нити крутильного маятника. Наконец, возможность математической обработки длительного ряда измерений с выделением периодического полезного сигнала, период которого может задаваться экспериментатором, также способствует увеличению чувствительности. Какой же вывод следует из опыта Этвеша? Необходимо выразить результат опыта в терминах и понятиях теории, ведь сам по себе опыт Этвеша без привлечения теоретических представлений не.означает ничего, кроме неизменности состояния крутильного маятника при повороте его на 180° (первый вариант) или в течение суток (второй вариант). Причем суть не в обобщении эмпирического факта до возведения его в ранг какого-либо принципа (например, принцип эквивалентности!), а в его адекватном теоретическом выражении или нахождении его места в общей картине явлений. Результаты опыта Этвеша можно представить в нескольких теоретических выражениях:

Инертная и тяжелая массы физических систем равны.

Движение пробных тел во внешнем гравитационном поле не зависит от их массы.

Не существует специальных тяжелых масс (гравитационных зарядов), определяющих гравитационное взаимодействие, кроме известных механических характеристик, таких как массаэнергия, импульс и др.

На первый взгляд, второе выражение отличается от традиционного первого выражения опыта Этвеша объемом информации и содержит элемент обобщения. Это и так, и не так. Легко показать, что в рамках теории тяготения Ньютона оба выражения эквивалентны. Если в соответствии с первым выражением различать инертную и тяжелую массы, то второй закон Ньютона и его закон всемирного тяготения представляются формулами

$$m_{in} \frac{d^2 r}{dt^2} = \vec{F}.$$

$$\vec{F}_g = -\gamma \frac{m_g M_g}{r^3} \vec{r},$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор точки m, когда начало координат помещено в точку M_g; $\vec{F}_g$ - сила тяготения; $\vec{F}$ - произвольная сила, действующая на m. (Закон тяготения можно записать через градиент потенциала гравитационного поля, что не изменяет последующих рассуждений).

Из равенства инертной и тяжелой масс (первое выражение) и этих формул следует уравнение движения тела во внешнем гравитационном поле

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\gamma\frac{M_g}{r^3}\vec{r}$$

В этом уравнении отсутствуют физические характеристики тела (масса) и фигурируют только геометрические - радиус-вектор и его изменения со временем, что и составляет содержание второго выражения опыта Этвеша. И наоборот, из второго выражения и законов Ньютона следует первое выражение. Несмотря на эквивалентность в рамках теории Ньютона, в смысловом отношении первое и второе выражения опыта Этвеша не тождественны, ибо допускают две разные интерпретации теории тяготения Ньютона. В первой интерпретации основными законами теории являются (I.1), (I.2) и третий закон Ньютона, а равенство инертной и тяжелой масс из них не следует (как это должно быть в «хорошей» теории) и поэтому присоединяется основным законам в качестве дополнительного необходимого элемента теории. Следствием основных законов и этого дополнительного элемента, включенного в число основных законов теории, является уравнение движения (I.3). Отсутствие теоретического объяснения численного совпадения инертной и тяжелой масс и необходимость увеличения числа основных законов теории для включения опыта Этвеша в описываемый круг явлений вызывают некоторое вполне, впрочем, понятное чувство неудовлетворенности, которое в наиболее острой форме, по-видимому, было осознано впервые Эйнштейном (1911): «Этот опытный факт об одинаковом ускорении падения всех падающих в гравитационном поле тел является одним из наиболее общих фактов, установленных нами из наблюдений; несмотря на это, закон этот не нашел еще отражения в основах нашей физической картины мира. Однако мы придем k весьма удовлетворительной интерпретации этого опытного закона, если...». В целях удовлетворительной интерпретации Эйнштейн (1907) максимально обобщает результат опыта Этвеша и формулирует «принцип эквивалентности»: «...мы будем предполагать полную физическую равноценность гравитационного поля и соответствующего ускорения системы отсчета», неоднократно уточнявшийся им в последующем.

Второе выражение опыта Этвеша допускает другую интерпретацию. Основными законами теории в этой интерпретации являются (I.1), (I.3) и третий закон Ньютона. Этих законов достаточно, чтобы описать тот же круг явлений, который описывается теорией в первой интерпретации. Доказательство состоит в выведении основных законов второй интерпретации из основных законов, включая и дополнительный, первой интерпретации и наоборот. Прямое очевидно. Докажем обратное. Из (I.3) и (I.1) следует

$$\vec{F}_g = -\gamma\frac{m_{ln}M_g}{r^3}\vec{r}$$

Привлекая третий закон Ньютона к последнему равенству, получаем $m_{in}M_g = M_{in}m_g$ или $\frac{m_{in}}{m_g} = \frac{M_{ln}}{M_g} = \text{const}$. Универсальную постоянную можно приравнять единице, в противном случае потребуется изменить численное значение гравитационной постоянной. Поэтому

что и требовалось.

$$\frac{m_{ln}}{m_g} = \frac{M_{ln}}{M_g} = 1, \quad \vec{F}_g = -\gamma\frac{m_gM_g}{r^3}\vec{r}.$$

Теорема 1. Теории, основанные на втором законе Ньютона в форме (I.1), третьем законе Ньютона, законе всемирного тяготения в форме (I.2) и опыте Этвеша в первом выражении, с одной стороны, и на втором законе Ньютона в форме (I.1), третьем законе Ньютона и законе движения тел во внешнем гравитационном поле в форме (I.3), - с другой, совпадают по фактическому содержанию.

Однако с теоретико-познавательной точки зрения эти теории различаются - основные законы второй теории оказываются мощнее, что позволяет уменьшить число независимых основных законов и вывести, а не постулировать, равенство инертной и тяжелой масс.

Второе выражение опытов Этвеша наиболее соответствует духу рассуждений и опытов, принадлежащих еще Галилею.

Исаак Ньютон не находил, по-видимому, нужным различать инертную и тяжелую массы тел. Из наблюдений движения планет он вывел обратную зависимость силы

взаимного тяготения от квадрата расстояния между телами, а из лабораторных опытов с маятниками (кн. III, предл. 6), произведенных с точностью 10-3, и правильности движения спутников вокруг планет установил пропорциональность тяготения массе. В природе не существует других величин, характеризующих тела и ответственных за тяготение, кроме массы, а универсальность ускорения свободного падения является уже следствием этого и второго закона движения Ньютона. Поэтому сама постановка вопроса численного совпадения инертной и тяжелой масс или теоретическое обоснование такого совпадения более общими принципами лишены смысла в собственно ньютоновской интерпретации теории тяготения.

Впрочем, второе и третье (соответствующее духу Ньютона) выражения опыта Этвеша имеют уже то преимущество перед традиционным, что они обеспечивают себе определенное место не только в теории тяготения Ньютона, но и в релятивистской теории тяготения Эйнштейна. Этому способствует их негативный характер. Из позитивного же первого выражения следует принципиальная ограниченность специальной теории относительности и теории тяготения Ньютона, но само выражение в релятивистской теории тяготения лишается смысла.

27.1.2 2. Limitations of Special Relativity

Элементарным объектом, лежащим в основе всякого физического наблюдения, является событие в данный момент времени в данной точке пространства. Что означает «в данны момент времени»и что понимается под локализацией «в данной точке пространства»? Эти вопрозы не представляются простыми. Не случайно Ньютон уже в «Поучении к определениям» подробно останавливается на понятиях пространства, времени, места и движения. В современных теориях они пронизывают живую плоть физического миропонимания насквозь и разрешаются по мере насыщения теории содержанием отнюдь не на нижних ее этажах. Так, например, обстоит дело в квантовых теориях с квантовомеханическим описанием измерения и локализации микрообъектов. Поэтому ограничимся пока математическим представлением события как четверки чисел $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$, из которых x^0 неким образом связано с моментом времени t, но, вообще говоря, не совпадает с ним, а x^1, x^2 и x^3 как-то определяют пространственную локализацию события.

Определение 1. Физическим миром называется непрерывное множество событий мощности континуума.

Физический мир приобретает некоторую определенность благодаря тем или иным представлениям о геометрических свойствах объектов и их движении. В классической механике под физическим миром понимается, согласно Ньютону (кн. I, предисл. и Поучение к опред.), трех-+одномерное пространство, распадающееся на абсолютное трехмерное пространство Евклида и абсолютное время. После работ Эйнштейна (1905) и Минковского (1908) утвердились другие представления, составившне основу специальной теорни относительности.

Аксиома Минковского. Физический мир является миром Минковского.

Определение 2. Миром Минковского называется четырехмерное плоское пространство с сигнатурой, равной двум.

Согласно этому определению, в физическом мире вводится неопределенная фундаментальная квадратичная форма, или квадрат интервала

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

метрический тензор которой связан дифференциальными уравнениями второго порядка

$$R_{\mu\sim\alpha\beta} = 0$$

где $R_{\mu\ \text{каз;}}$ - тензор Римана - Кристоффеля (Эйзенхарт, 1948). Равенство кривизны пространства нулю, а сигнатуры двум означает, что в мире Минковского существует ∞^{10} таких координатных сеток, или соотнесений чисел $\{t, X^1, X^2, X^3\}$ событиям, в которых основная квадратичная форма (I.4) приводится к галилееву виду

$$ds^2 = -(dt)^2 + \left(dX^1\right)^2 + \left(dX^2\right)^2 + \left(dX^3\right)^2$$

Такие координатные сетки принадлежат инерциальным системам отсчета.

Геометрия мира Минковского вместе с тщательно разработанным Эйнштейном (1905) сопоставлением геометрических образов физическим понятиям применительно к инерциальным системам отсчета - одновременность и синхронизация, измерение промежутков времени между событиями в разных точках пространства, измерение пространственных расстояний, взаимосвязь результатов измерений, осуществляемых в различных системах отсчета,- и составляют основу специальной теории относительности.

Законы электродинамики в специальной теории относительности записываются следующим образом (Ландау, Лифшиц, 1973): уравнения Максвелла - Лоренца

$$e^{a\beta\mu\nu}F_{\beta\mu,\nu} = 0,$$
$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = 4\pi i^{\mu\nu}.$$

уравнение движения электрических зарядов

$$m\left(\frac{du^\mu}{d\sigma} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta\right) = eF^\mu_{.\alpha}u^\alpha$$

здесь $F_{\mu\nu}$ - антисимметричный тензор электромагнитного поля. выражаемый через напряженности электрического и магнитного полей; в инерциальной системе отсчета, например,

$$F_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -E_{X^1} & -E_{X^2} - E_{X^3} \\ E_{X^1} & 0 & H_{X^3} - H_{X^3} \\ E_{X^2} - H_{X^3} & 0 & H_{X^1} \\ E_{X^1} & H_{X^3} - H_{X^1} & 0 \end{pmatrix}$$

j^μ − 4-вектор плотности э.тектрического тока, $j^\nu \equiv \rho u^{\mu\nu}; \rho$ - инвариантная функция распределения электрических зарядов e; u^μ − 4-вектор скорости частицы или касательный вектор к линиям тока, $u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\sigma}, d\sigma \equiv \sqrt{|ds^2|}; \Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ - символы Кристоффеля второго рода (йзенхарт, 1948); запятая и точка с запятой означают частную и ковариантную относительно метрики $g_{\mu\nu}$ производные соответственно; $e^{\alpha^{j\prime}\nu}$ - единичный полностью антисимметричный тензор Леви-Чивита, $e^{\alpha 3\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}E^{\alpha\beta\mu\nu}$; g - детерминант метрического тензора; $E^{2\xi n\nu} = 1$ (или -1), если ($\alpha\beta\mu\nu$) есть четная (или нечетная) перестановка (0123) и $E^{a\ \text{азнv}} = 0$ в остальных случаях.

Определение 3. Мировой линией называется одномерная непространственноподобная непрерывная совокупность событий в физическом мире.

Примером мировой линии является совокупность событий, составляющих историю частицы. В случае непрерывного распределе-ния физического объекта (среда) мировая линия называется линией тока. Мировая линия задана, если заданы координаты события в функции некоторого параметра, и наоборот, четыре не- прерывные функции $x^\mu(\lambda)$ независимой переменной λ определяют мировую линию.

Теорема 2. Семейство непересекающихся мировых линий (линий тока) и поле мнимоединичных 4-векторов u^μ взаимно однозначно определяют друг друга.

Доказательство первой части теоремы тривиально. Докажем вторую часть. Пусть задано поле векторов $u^\mu(x)$. Система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx^\mu}{d\sigma} = u^\mu(x(\sigma))$$

имеет решение $x^\mu(\sigma)$ и притом единственное для заданного события $x^\mu = x^\mu_0$ и заданного значения σ_0 параметра (Смирнов, 1965). Легко видеть, что параметр σ с точностью до аддитивной постоянной совпадает здесь с канонической переменной $\sqrt{|ds^2|}$. Рассматривая заданное событие x^μ_0 как переменное, получаем семейство мировых линий, касательных в каждой точке заданному полю u'^2. Никакие две линии семейства не пересекаются, так как в точке пересечения они определили бы два несовпадающих касательных вектора, равных одному вектору поля u^μ в этой точке, что невозможно. Более того, никакие две линии семейства не касаются, поскольку точку касания можно также рассматривать как заданное событие, поэтому через точку

касания, согласно единственности решения системы уравнений (I.9), проходит одна и только одна мировая линия, что противоречит определению касания.

Уравнения (I.8) и (I.9) определяют мировые линии электрических зарядов, подверженных действию силы Лоренца. Если сила Лоренца отсутствует - электрический заряд частицы равен нулю или отсутствует электромагнитное поле в окрестности частицы,то мировая линия частицы совпадает с временноподобной геодезической линией мира Минковского. Проекция таких мировых линий на физическое (трехмерное) пространство, называемая траекторией частицы, является прямой в инерциальной системе отсчета, и, вообще говоря, не является прямой, если система отсчета неинерциальная.

Теорема 3. Для частицы, находящейся в заданном электромагнитном поле, существует одна и только одна мировая линия, имеющая своей касательной заданный 4-вектор скорости в заданной точке физического мира и удовлетворяющая уравнениям (I.8) и (I.9).

Доказательство теоремы состоит в применении общей теоремы существования и единственности решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (Смирнов, 1965) к уравнениям (I.8) и (I.9). Из (I.7) следует уравнение непрерывности для электрических зарядов

$$j^{\mu}_{;\mu} = 0$$

Действительно, если воспользоваться антисимметричностью $F^{\mu\nu}$ и тождеством Риччи (Эйзенхарт, 1948), то легко убедиться в справедливости равенств

$$F^{\mu\nu}_{;\nu\mu} = \frac{1}{2}\left(F^{\mu\nu}_{;\nu:\nu} - F^{\mu\nu}_{;\mu\nu}\right) = F^{\mu\nu}R_{\mu\nu}.$$

Тензор Риччи $R_{\mu\nu} \equiv R^{\alpha}_{-\mu\nu\alpha}$ симметричен, поэтому $F^{\mu\nu}_{;\nu\mu} = 0$, что вместе с (I.7) приводит к (I.10).

Уравнение непрерывности в интегральной форме выражает закон сохранения электрического заряда. Так как

$$j^{\mu}_{;\mu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{-g}j^{\mu}\right)$$

то, умножая (I.10) на инвариантный элемент объема мира $\sqrt{-g}dx^0dx^1dx^2dx^3$, интегрируя по конечному объему D и используя теорему Гаусса (Мицкевич, 1969), находим

$$\oint j^{\mu}dS_{\mu} = 0$$

где dS_{μ} - вектор, направление которого параллельно внешней нормали к гиперповерхности, ограничивающей объем интегрирования, а абсолютное значение равно инвариантному элементу объема dV этой гиперповерхности.

Пусть область интегрирования D ограничена двумя гиперповерхностями ω_1 и ω_2 из семейства произвольных пространственноподобных гиперповерхностей $\omega\left(x^{\alpha}\right) = \text{const}$ и временноподобной гиперповерхностью Σ, дополняющей две первых до замкнутой границы D. Физическая система называется замкнутой, если ее динамические переменные равны нулю на гиперповерхности Σ, каково бы ни было семейство пространственноподобных гиперповерхностей ω. Поэтому для замкнутой системы электрических зарядов последнее равенство можно переписать как

$$\int\limits_{(\omega_1)} j^{\mu}dS_{\mu} + \int\limits_{(\omega_2)} j^{\mu}dS_{\mu} = 0.$$

Замечая, что один из векторов dS_{μ} направлен в прошлое, и вводя единичный вектор нормали e_{μ} к пространственноподобной гиперповерхности в сторону будущего, получаем независимость интеграла от гиперповерхности семейства:

$$\int\limits_{(\omega)} f^2 e_\mu dV = \text{ const } = -\sum e.$$

Это и есть закон сохранения электрического заряда. Равенство (I.10a) можно рассматривать как определение плотности зарядов ρ_ω на гиперповерхности ω. Тогда

$$\rho_\omega = -pu^\mu e_\mu$$

Функции ρ_ω, как и ρ, инвариантны относительно произвольных преобразований координат в физическом мире, но зависят от выбора гиперповерхности в соответствии с изменением объема физической системы при переходе от одной пространственноподобной гиперповерхности к другой.

Уравнения Максвелла - Лоренца определяют тензор электромагнитного поля в зависимости от распределения электрических зарядов и токов. Из краевых задач наибольший интерес с физической точки зрения прдставляет задача Коши об интегрировании уравнений в частных производных для заданных значений и.скомых функций на заданной гиперповерхности. В физическом мире, согласно аксиоме Минковского и определению 2, существуют гиперповерхности трех типов: пространственноподобные, изотропные и временноподобные. Решение уравнений (I.7) существенно зависит от того, является ли заданная гиперповерхность изотропной или неизотропной. Подразделение неизотропных гиперповерхностей на пространственно- и временноподобные несущественно для решения уравнений (I.7), хотя в физических ситуация исключительный интерес для задания начальных условий представляет физическое пространство в начальный момент времени, являющееся пространственноподобной гиперповерхностью физического мира.

Пусть задана некоторая неизотропная гиперповерхность $\omega\left(x^\sigma\right) = 0$. Неизотропность означает, что вектор нормали $\frac{\partial\omega}{\partial x^\alpha}$ к гиперповерхности имеет ненулевое значение, т. е. $g^{\mu\nu}\frac{\partial\omega}{\partial x^\mu}X \;\; X\frac{\partial\omega}{\partial x^\nu} \neq 0$, причем гиперповерхность пространственноподобна, если норма нормали отрицательна, и временноподобна, если она положительна. Введем соответственно мнимоединичный или единичный векторы $\boldsymbol{e}^\alpha$ вдоль нормали к гиперповерхности. Определим инвариантные функции S и P и 4-векторы S^x и P^α следующим образом:

$$\left.\begin{array}{c} S = e_\alpha e^{\alpha\beta|\langle\nu} F_{\beta:1,\nu}, \quad P = e_\alpha\left(F^{\alpha\beta}_{;\beta} - 4\pi j^\alpha\right), \\ S^\alpha = e^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\beta\mu,\nu} + Se^\alpha \\ P^\alpha = F^{\alpha\beta}_{;\beta} - 4\pi j^\alpha + Pe^\alpha \end{array}\right\} \text{ если } e_\alpha e^\alpha = -1$$

$$\left.\begin{array}{c} S^\alpha = e^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\beta\mu,\nu} - Se^\alpha \\ P^\alpha = F^{\alpha\beta}_{;\beta} - 4\pi j^\alpha - Pe^\alpha \end{array}\right\} \text{ если } e_\alpha e^\alpha = 1.$$

В каждой точке физического мира векторы S^2 и P^α принадлежат одной из гиперповерхностей семейства $\omega = \text{const}$, поэтому имеют только по три (а не по четыре) линейно независимых компонента.

Лемма 1. Если S^2 и P^α равны нулю всюду, а S. и P равны нулю на одной из гиперповерхностей семейства, то они равны нулю всюду.

Пусть удовлетворяются условия леммы. Имеем

$$S^\alpha_{;\alpha} = 0,$$

$$S^\alpha_{;\alpha} = e^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\beta\mu;\upsilon\alpha} \pm \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}e^\alpha \pm Se^\alpha_{;\alpha}.$$

Первый член справа тождествен нулю из-за свойств симметрии, поэтому

$$\frac{\partial S}{\partial x^\alpha}e^\alpha + Se^\alpha_{;\alpha} = 0$$

Соответственно

$$P^{\alpha}_{;\alpha} = 0,$$
$$P^{\alpha}_{;\alpha} = F^{\alpha\beta}_{;\beta\alpha} - 4\pi j^{\alpha}_{,\alpha} \pm \frac{\partial P}{\partial x^{\alpha}} e^{\alpha} \pm P e^{\alpha}_{;\alpha}.$$

Первый член справа тождествен нулю, как было показано выше при выводе (I.10), а второй обращается в нуль благодаря уравнению непрерывности*. Поэтому находим, что функция P, как и S, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial P}{\partial x^{\alpha}} e^{\alpha} + P e^{\alpha}_{;\alpha} = 0$$

Эти уравнения имеют только нулевые решения для нулевых начальных значений S и P, что и доказывает лемму 1.

Разобьем уравнения Максвелла - Лоренца на две группы

$$S^{\alpha} = 0, \quad P^{\alpha} = 0,$$
$$S = 0, \quad P = 0.$$

Первая группа содержит шесть, а вторая - два независимых уравнения. Система восьми уравнений Максвелла - Лоренца определяет только шесть независимых искомых функций $F_{\mu\nu}$.

Обратим вниманне, что в доказательстве леммы сознательно не используются уравнения Максвелла-Лоренца. Теорема 4. Система уравнений Максвелла - Лоренца находится в инволюции: всякое решение группы уравнений (I.11), удовлетворяющее данным Коши на заданной неизотропной гиперповерхности, удовлетворяет также группе уравнений (I.12), если данные Коши удовлетворяют им.

Эта теорема легко доказывается на основании леммы 1. Она представляет собой инвариантное выражение известного в электродинамике факта (см., например, Левич, 1962).

Таким образом, задача Коши для уравнений Максвелла- Лоренца распадается на две: 1) отыскание данных Коши, удовлетворяющих на заданной неизотропной гиперповерхности уравнениям (I.12); 2) нахождение решения, удовлетворяющего уравнениям (I.11) и данным Коши.

Шесть уравнений (I.11) разрешаются относительно производных шести искомых функций вдоль нормали к заданной неизотропной гиперповерхности, поэтому, если данные Коши, т. е. функции $F_{\mu\nu}$ на этой гиперповерхности, определяют производные искомых функций вдоль нее, то уравнения (I.11) в разрешенной форме определяют производные искомых функций в точках гиперповерхности вдоль ее нормали через данные Коши и их производные. Таким образом, данные Коши и уравнения (I.11) определяют значения искомых функций и все их производные на заданной гиперповерхности.

Решение второй задачи в классе аналитических функций дается теоремой Ковалевской (Петровский, 1953), согласно которой уравнения удовлетворяются единственной системой аналитических функций, совпадающих на данной аналитической гиперповерхности с заданными аналитическими же функциями. Что касается класса неаналитических функций, непрерывных вместе с первыми производными, то здесь существует ряд достаточно общих теорем, хотя вопрос этот в наиболее полном объеме математиками еще не исследован.

Если заданная гиперповерхность такова, что не все производные искомых функций определяются данными Коши и уравнениями (I.11), то гиперповерхность называется характеристической. В случае характеристической гиперповерхности уравнения допускают решения с разрывом производных на ней и наоборот, решения дифференциальных уравнений имеют скачки производных на заданной гиперповерхности, если она характеристическая. Характеристическая гиперповерхность дифференциальных уравнений в частных производных имет непосредственный физический смысл, так как фронт распространяющегося физического процесса является двумерным сечением характеристической гиперповерхности, отнесенным к данному моменту времени. В непосредственной близости за фронтом имеет место описываемый физический процесс, в то время как перед фронтом физического процесса нет, так что некоторые производные функций, описывающих процесс, терпят на фронте разрыв. Следовательно, семейство движущихся фронтов (движущихся поверхностей разрыва)

составляет характеристическую гиперповерхность. Иногда мы будем называть фронтом саму характеристическую гиперповерхность, а не ее сечение, что будет ясно из контекста.

Если заданная гиперповерхность характеристическая, то решением уравнений Максвелла - Лоренца являются кусочно-гладкие функции класса C^1. (Кусочно-гладкими функциями класса C^r называются функции с непрерывными всюду производными вплоть до порядка r за исключением окрестностей конечного числа гиперповерхностей, с каждой стороны которых функции принадлежат классу C^r, а их производные вплоть до порядка r равномерно стремятся к определенным, но различным пределам). Поэтому производные тензора электромагнитного поля терпят разрыв на характеристической гиперповерхности. Изотропная и только изотропная гиперповерхность является характеристической гиперповерхностью уравнений Максвелла - Лоренца.

Теорема 5. Распространение фронта электромагнитной волны описывается уравнением

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial\omega}{\partial x^\mu}\frac{\partial m}{\partial x^\nu}=0$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пронумеруем компоненты тензора электромагнитного поля в следующем порядке: $F_{01}=F_1$, $F_{02}=F_2$, $F_{03}=F_3, F_{12}=F_4, F_{23}=F_5$ и $F_{31}=F_6$ и перепишем уравнения Максвелла - Лоренца в виде

$$\sum_{b=1}^{6}A^\alpha_{ab}\frac{\partial F_b}{\partial x^\alpha}=\Phi_a,\quad a=1,2,...,8.$$

Здесь функции Φ_a зависят от метрического тензора и его производных, от 4-вектора плотности электрического тока и тензора электромагнитного поля, но не зависят от производных тензора электромагнитного поля, а коэффициенты A^α_{ab} содержат только компоненты метрического тензора. Введем прямоугольную матрицу $\omega_{ab}=A^\alpha_{ab}\frac{\partial\omega}{\partial x^\alpha}$. Если обозначить $\frac{\partial\omega}{\partial x^\alpha}=\omega_\alpha$ и $g^{\alpha\beta}\frac{\partial\omega}{\partial x^\beta}=\omega^\alpha$, то в явном виде матрица запишется так:

$$\omega_{ab}=\begin{pmatrix}0&0&0&\omega_3&\omega_1&\omega_2\\0&-\omega_3&\omega_2&0&-\omega_0&0\\\omega_3&0&-\omega_1&0&0&-\omega_0\\-\omega_2&\omega_1&0&-\omega_0&0&0\\\omega^1&\omega^2&\omega^3&0&0&0\\-\omega^0&0&0&\omega^2&0&-\omega^3\\0&-\omega^0&0&-\omega^1&\omega^3&0\\0&0&-\omega^0&0&-\omega^2&\omega^1\end{pmatrix}$$

Гиперповерхность $\omega=0$ является характеристической, если ранг этой матрицы не превышает пяти*. Но все ее детерминанты шестого порядка тождественно равны нулю за исключением одного, составленного из строк с номерами $2,3,4,6,7$ и 8, значение которого равно $\omega_0\omega^0\left(\omega_\alpha\omega^\alpha\right)^2$. Ни ω_0, ни ω^0 не могут быть равны нулю, так как в противном случае уравнение гиперповерхности выродится в тождество. Действительно, пусть $\omega_0=0$, т. е. $\frac{\partial\omega}{\partial x^0}=0$. Поскольку сам вывод не зависит от системы координат, то в другой, например, штрихованной, координатной сетке также имеем $\frac{\partial\omega'(x')}{\partial x'v}=0$. Но

$$\frac{\partial\omega'(x')}{\partial x'^0}=\frac{\partial\omega}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^0}=\omega_0\frac{\partial x^0}{\partial x'^0}+\omega_i\frac{\partial x^l}{\partial x'^0}$$

(греческие индексы пробегают значения 1, 2, 3). Из равенства нулю ω_0 и $\frac{\partial\omega'(x')}{\partial x'^0}$ и произвольности $\frac{\partial x^i}{\partial x'^0}$ следует $\omega_i=0$, что невозможно. Аналогично можно показать, что и $\omega^0\neq0$.

Следовательно, только в том случае, если гиперповерхность удовлетворяет уравнению (I.13), все детерминанты шестого порядка обращаются в нуль, а гиперповерхность является характеристической.

Скачки производных тензора электромагнитного поля, равные разности производных с обеих сторон характеристической гиперповерхности, которые принято обозначать через $\left[\frac{\partial F_b}{\partial x^a}\right]$, пропорциональны 4-вектору нормали к гиперповерхности

$$\left[\frac{\partial F_b}{\partial x^\alpha}\right] = k_b \frac{\partial \omega}{\partial x^\alpha}.$$

а коэффициенты пропорциональности являются корнями системы алгебраических уравнений

$$\sum_{b=1}^{6} \omega_{ab} k_b = 0$$

Если ранг матрицы равен 6, то все k_b равны нулю, а производные тензора электромагнитного поля непрерывны на гиперповерхности. Дальнейший анализ характера разрыва электромагнитного поля на фронте возможен, если конкретизирована система отсчета и

Вывод необходимого условия, которому удовлетворяет характеристическая поверхность, когда число уравнений совпадает с числом искомых функций, можно найти у В. И. Смирнсва (1957). Обобщение его на случай, когда числю уравнений превышает число функций, не представляет трудности. Для уравнений типа (I.14) необходимое условие формулируется просто: если гиперповерхност, характеристическая, то ранг матрнцы ()аь меньше числа искомых функции.. определено физическое трехмерное пространство как множество одновременных событий в физическом мире.

В каждой точке физического мира изотропная гиперповерхность электромагнитного фронта определяет изотропный 4-вектор нормали $\frac{\partial \omega}{\partial x^\alpha}$, задающий в этой точке направление. Мировые линии, направление которых в каждой точке совпадает с задаваемым фронтом направлением, называются мировыми линиями электромагнитного фронта, или световыми линиями.

Теорема 6. Световые линии являются изотропными геодезическими физического мира.

Из определения следуют обыкновенные дифференциальные уравнения световых линий

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = g^{\mu\nu\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x^\nu}$$

которыми одновременно определяется с точностью до аддитивной постоянной и параметр λ. Если уравнение гиперповерхности задано, то правая часть уравнений (I.15) является известной функцией координат, и они могут быть проинтегрированы. Решение их в этом случае (при заданном уравнении гиперповерхности) определяет единственную световую линию, проходящую через данную точку физического мира. Вдоль всякой световой линии, как легко видеть из (I.15) и (I.13), интервал ds равен нулю.

Продифференцировав уравнения (I.15) вдоль световой линии ! воспо.тьзовавшись (I.13), получим уравнения световой линии в другой форме

$$\frac{d^2 x'^\nu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^3}{d\lambda} = 0, \quad g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0$$

выражением которой и является теорема 6. Уравнения (I.16) не содержат, в отличие от (I.15), функцию гиперповерхности ω, поэтому световые линии могут быть найдены из них и в том случае, если уравнение гиперповерхности не известно. Но теперь для определения единственной световой линии необходимо задать не только точку, через которую она проходйт, но и направление ее в этой точке. В инерциальной системе отсчета в галилеевых координатах $\Gamma^{12}_{a,3} = 0$, и общее решение уравнений (1.16) сводится к обычному выражению для светового луча, проходящего в начальный момент времени $t = 0$ через точку $\overrightarrow{r_0}$ в направлении единичного вектора $\vec{k}$:

$$(\vec{r} - \overrightarrow{r_0}) - t\vec{k} = 0$$

Замечательно, что распространение фронта электромагнитного процесса и соответственно характер световой линии совершенно не зависят ни от динамических переменных самого процесса, ни от каких-либо свойств излучающей системы электрических зарядов. Какова бы ни была излучающая система зарядов, каковы бы ни были энергия, поляризация или другие величины, характеризующие волну, световая линия определяется единственным образом только ее геометрическими данными.

Единственной величиной, входящей, кроме координат, в уравнения распространения света, является метрический тензор мира Минковского. Правда, необходимо подчеркнуть, что распространение фронта электромагнитной волны не зависит не от любых электрических зарядов, а только от тех, которые излучают данную волну. Если на пути рассматриваемой волны находится система зарядов, то под действием электромагнитного поля волны заряды системы излучают, а результирующая волна складывается из вторично излученных и первоначальной волн. Характер распространения фронта результирующей волны уже зависит от динамических переменных этой системы зарядов. Если электрические заряды образуют сплошную среду, пусть даже электрически нейтральную, то результат усреднения первичного и вторичных электромагнитных полей может быть описан, как известно, набором функций электрической и магнитной проницаемостей. Эти функции определяют, в частности, и распространение фронта в среде. Математически это проявляется в том, что в уравнениях Максвелла, заменяющих уравнения Максвелла-Лоренца после усреднения их по малому объему сплошной среды (Лоренц, 1956), коэффициенты A^{α}_{ab} при первых производных напряженностей электрического и магнитного полей, а потому и матрица ω_{ab}, содержат, помимо метрического тензора, функции электрической и магнитной проницаемости среды.

Однако существуют явления, которые должны оказывать влияние на характер распространения фронта электромагнитного процесса в пустом пространстве. К таким явлениям относятся гравитационные. Влияние тяготения на распространение фронта следует из опыта Этвеша и универсального закона Эйнштейна.

Универсальный закон Эйнштейна. Каждому количеству энергии любой формы соответствует определенное количество массы инертной, а каждому количеству массы инертной соответствует определенное количество энергии в какой-либо форме.

Эта пропорциональность энергии и инертности была выведена Эйнштейном (1905б) из принципа относите.ьности и уравнений электродинамики на частном примере, но через два года (1907б) Эйнштейн высказал предположение о ее универсальности, а позднее (1935) привел доказательство без обращения к электродинамике. Если коэффициент пропорциональности выбран нужным образом, то универсальный закон Эйнштейна выражается равенством

$$E = m$$

Так как электромагнитное поле имеет вполне определенную энергию, распределенную с некоторой плотностью в пространстве, то, согласно универсальному закону Эйнштейна, оно имеет равную ей распределенную в пространстве инертную массу, а согласно первому выражению опыта Этвеша,- и равную ей распределенную в пространстве тяжелую массу. Внешнее поле тяготения воздействует на тяжелую массу электромагнитного поля, вследствие чего должно наблюдаться отклонение световых линий от изотропной геодезической мира Минковского. При наблюдении из инерциальной системы отсчета это воздействие должно проявляться, например, в отклонении световых лучей от прямой и отличии скорости распространения света от фундаментальной скорости мира Минковского. Следовательно, характер световых линий, не зависящий от динамических переменных электромагнитного поля, зависит от гравитационного поля.

Следствие 1. Световые линии в пространстве между электрическими зарядами изменяются в функции поля тяготения и не являются изотропными геодезическими мира Минковского.

Универсальный закон Эйнштейна и опыт Этвеша в первом выражении приводят, таким образом, к прямому противоречию с теоремой 6, если ее содержание конкретизировать аксиомой Минковского. Уравнение (I.13), согласно следствию 1, не может описывать распространение фронта электромагнитной волны в гравитационном поле, если по-прежнему предполагать, что функциии $g^{\mu\nu}$, входящие в это уравнение, суть метрический тензор мира Минковского.

Уравнение, учитывающее воздействие поля тяготения на процесс распространения фронта, может отличаться от (I.13) либо алгебраической структурой относительно величины $\frac{\partial \omega}{\partial x^{\alpha}}$, либо, при той же структуре, видом функций $g^{\mu\nu}$, которые уже не будут удовлетворять уравнениям (I.5). Но оно должно отвечать тому же основному математическому смыслу, что и уравнение (I.13), а именно, должно быть уравнением характеристической гиперповерхности некоторой системы дифференциальных

уравнений в частных производных. Поэтому уравнения Максвелла - Лоренца (I.7), из которых следует уравнение характеристической гиперповерхности (I.13), не могут описать влияние гравитационного поля на электромагнитные процессы и должны быть изменены.

Рассмотрим, какого рода изменения могут быть внесены в уравнения Максвелла - Лоренца для учета тяготения. Очевидно, что электромагнитный процесс и в поле тяготения описывается напряженностями электрического и магнитного полей, или тензором $F_{\mu\nu}$. Очевидно также, что и в поле тяготения порядок дифференциальных уравнений, связывающих тензор $F_{\mu\nu}$, равен единице. В противном случае нарушается принцип причинности. Действительно, пусть физический мир разделен на две области D_1 и D_2, такие, что выполняются условия: 1) область D_1 содержит пространственноподобную гиперповерхность Ω_1, точки которой не принадлежат области D_2, а D_2 включает в себя пространственноподобную гиперповерхность Ω_2, точки которой не принадлежат D_1; 2) в D_1 поле тяготения отсутствует, а в D_2 оно отлично от нуля. В области D_1 электромагнитное поле удовлетворяет уравнениям Максвелла - Лоренца в форме (I.7) и единственным образом определяется в точках D_1 значениями $F^{(1)}_{\mu\nu}$ на гиперповерхности Ω_1. Если в области D_2 под влиянием поля тяготения электромагнитные процессы описываются дифференциальными уравнениями, например, второго порядка, то единственное решение этих уравнений в D_2 определяется значениями двенадцати функций $F^{(2)}_{\mu\nu}$ и $\frac{\partial F^{(2)}_{\mu\nu}}{\partial x_0}$ на Ω_2. Согласно принципу причинности, начальные данные на Ω_1 должны определять значения электромагнитного поля не только в области D_1, но и во всех точках физического мира, в том числе и в D_2, если, конечно, известны распределения зарядов и токов и потенциалы гравитационного поля во всем физическом мире, и наоборот, начальные данные Ω_2 должны определять значения поля и в D_1. Однако одни и те же функции поля не могут определяться и набором шести независимых начальных данных на Ω_1 и набором двенадцати независимых начальных данных на Ω_2. Например, начальные данные на Ω_2 можно рассматривать как значения поля в точках Ω_2, отвечающие начальным данным на Ω_1, тогда

$$F^{(2)}_{\mu\nu} = F^{(2)}_{\mu\nu}\left(F^{(1)}_{\alpha\beta}\right) \text{ и } \frac{\partial F^{(2)}_{\mu\nu}}{\partial x^0} = f_{\mu\nu}\left(F^{(1)}_{\alpha\beta}\right).$$

Разрешив первые равенства относительно $F^{(1)}_{\alpha\beta}$ и подставив во вторые, обнаружим зависимость всех $\frac{\partial F^{(2)}_{\mu\nu}}{\partial x^0}$ от $F^{(2)}_{\mu\nu}$, что противоречит предположению.

Таким образом, и в поле тяготения электромагнитные процессы должны описываться системой дифференциальных уравнений первого порядка, которую можно привести аналогично уравнениям Максвелла-Лоренца к виду (I.14). Коэффициенты A^{α}_{ab} и функции Φ_a в (I.14) должны учитывать неким образом влияние поля тяготения на электромагнитные процессы. Функции Φ_a нас сейчас не интересуют, так как уравнение характеристической гиперповерхности полностью определяется коэффициентами A^{α}_{ab} и, следовательно, матрицей ω_{ab}. Коэффициенты A^{α}_{ab}, соответствующие уравнениям Максвелла - Лоренца, зависят только от метрического тензора. Для того чтобы световые линии в гравитационном поле не совпадали с изотропными геодезическими мира Минковского, необходимо либо ввести в коэффициенты A^{α}_{ab}, помимо метрического тензора мира Минковского, некоторые дополнительные функции (назовем их условно функциями гравитационной прооницаемости), описывающие влияние поля тяготения, либо предположить, что метрический тензор не отвечает аксиоме Минковского.

Первое приводит к противоречию. В самом деле, пусть аксиома Минковского имеет место, а коэффициенты A^{α}_{ab} зависят от метрического тензора мира Минковского и функций гравитационной проницаемости так, что, согласно следствию 1, скорость распространения электромагнитного процесса вдоль световой линии отличается от фундаментальной скорости мира Минковского. Пусть скорость фронта меньше фундаментальной. Это значит, что распространение фронта зависит от инерциальной системы отсчета, причем существуют такие инерциальные системы отсчета, в которых оно невозможно в направлении движения самой системы. Рассмотрим однородное гравитационное поле, заполняющее физический мир, и две инерциальные системы отсчета S и S', движущиеся одна относительно другой со скоростью $\vec{v}$, превышающей

скорость фронта волны. Системы S и S' физически равноправны, так как, по предположению, в обеих основная квадратичная форма сводится к виду (I.6), а однородное всюду гравитационное поле проявляется одинаково до тех пор, пока $\vec{v}$ постоянна по ве.чичине и направлению относительно силовых линий гравитационного поля. В той же мере физически равноправны и две системы электрических зарядов, состояния которых описываются в соответствующей системе отсчета одинаковыми функциями $\varphi(t, X^1, X^2, X^3)$ и $\varphi(t', X'^1, X'^2; X'^3)$. С другой сторсны, если в системе отсчета S скорость распространения электромагнитной волны не зависит, например, от направления, то в системе отсчета S' она существенно анизотропна, и распространение волны возможно только в полупространстве, определяемом вектором $-\vec{v}$. Следовательно, электромагнитное взаимодействие электрических зарядов в этих двух системах различно, и две системы электрических зарядов в S и S' не могут быть равноправными.

Если же допустить, что скорость распространения фронта в гравитационном поле больше фундаментальной, то физический процесс - носитель фундаментальной скорости - окажется в таком же положении по отношению к процессу распространения электромагнитной волны, в каком оказался последний по отношению к первому в только что рассмотренном допущении, и противоречие снова неизбежно.

Следствие 2. Аксиома Минковского несовместима с опытом Этвеша и универсальным законом Эйнштейна.

27.1.3 3. Einstein's Theory of Gravitation

Появление специальной теории относительности продиктовано необходимостью устранить логическое противоречие между электродинамикой и классической механикой Ньютона. Эйнштейн разрешил это противоречие за счет классической механики. Включение гравитационных явлений в непротиворечивую физическую картину мира возможно (см. следствия 1 и 2) только путем отказа от аксиомы Минковского, а значит, и специальной теории относительности. С другой стороны, описание гравитационных явлений невозможно на основе закона всемирного тяготения Ньютона или уравнения Пуассона для гравитационного потенциала по двум причинам. Во-первых, теория тяготения Ньютона основана на дальнодействии, что неприемлемо в рамках современного физического мировоззрения. Во-вторых, согласно универсальному закону Эйнштейна и первому выражению опыта Этвеша, не только масса, но и механические характеристики: энергия, импульс, момент всякой физической системы - являются источником гравитационного поля. Это относится и к электромагнитному полю. Только в таком случае следствие 1 согласуется с одним из фундаментальных принципов физики - принципом взаимодействия. Если гравитационное поле оказывает действие на распространение фронта электромагнитной волны (следствие 1), то, в свою очередь, электромагнитное поле действует на поле тяготения.

Таким образом, для логического согласования гравитации, электромагнетизма и механики необходимо изменить как теорию тяготения Ньютона, так и представления специальной теории относительности о пространстве, времени и движении и уравнения электродинамики. Основные моменты такой непротиворечивой теории - общей теории относительности - сформулированы Эйнштейном в 1916 г.*.

Аксиома Эйнштейна. Физический мир является четырехмерным римановым пространством с сигнатурой, равной двум.

В отличие от аксиомы Минковского, здесь метрический тензор уже не связан жестким условием равенства нулю кривизны пространства, а зависит от поля тяготения, что позволяет удовлетворить, например, следствию 1. Поскольку кривизна пространства, вообще говоря, отлична от нуля, то основная квадратичная форма

Фактически построение общей теории относительности Эйнштейн завершил к концу 1915 г. выпуском в све1 небольшой статьи, которая заканчивается «Рздохом удовлетворения»: «Тем самым, наконец, завершено построение общей теории относительности как логической схемы». Творческий путь Эйнштейна в поисках правильной теории тяготения удивительно выпукло, прямо-таки скульптурно вылеплен им самим в его статьях в период с 1907 по 1915 гг. Путь этот захватывающе извилист, нередко великолепно ошибочен - и как убедителен Эйнштейн даже в заведомо ошибочных рассуждениях, - но настолько могуч в духовнсм напряжении, что не маг не увенчаться истиной. Чтение этих работ Эйнштейна доставляет высокое

интеллектуальное наслаждение, сравнимое, может быть, только с чтением книги Ньютона никаким выбором координатной сетки не может быть сведена к галилееву виду (I.6) во всем физическом мире, но это можно сделать в окрестности любого наперед заданного события или даже наперед заданной мировой линии (Fermi, 1922). Десять функций $g_{\mu\nu}(x)$, характеризующих геометрию физического мира, не могут, разумеется, оставаться совершенно произвольными, а определяются, по предположению Эйнштейна, распределением и движением вещества и потоками энергии.

Уравнения Эйнштейна. Метрический тензор физического мира определяет, помимо его геометрии, и гравитационные поля в нем и удовлетворяет дифференциальным уравнениям в частных производных второго порядка

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = - \times T_{\mu\nu}$$

Источником гравитационного поля является симметричный тензор энергии-импульса материи $T_{\mu\nu}$, который включает все виды вещества и все поля, за исключением гравитационного. Впрочем, энергия гравитационного поля не входит явно в правую часть уравнений Эйнштейна, в виде слагаемого тензора энергииимпульса, однако влияние гравитационного поля все же своеобразно учитывается. Дело в том, что тензор энергии-импульса не может быть задан произвольно в виде определенных функций координат, как не может быть задано и движение вещества; заданной в правой части уравнений Эйнштейна может быть лишь алгебраическая структура из динамических переменных физической системы, удовлетворяющих определенным связям между ними. Уравнения движения вещества следуют из уравнений Эйнштейна. Динамические переменные как функции координат являются решением самосогласованной системы уравнений Эйнштейна, уравнений движения и связей. Алгебраическая же структура тензора энергии-импульса и связи между динамическими переменными так или иначе содержат метрический тензор и его первые производные, которые и являются проводниками влияния гравитационного поля на источник гравитационного поля.

Например, тензор энергии-импульса среды, незаряженные частицы которой не взаимодействуют между собой (пыль, некогерентная жидкость) иначе, чем посредством тяготения, имеет вид

$$T^{\alpha\beta} = \mu u^\alpha u^\beta$$

тензор энергии-импульса идеальной жидкости -

$$T^{\alpha\beta} = (\mu + p) u^\alpha u^\beta + p g^{\alpha\beta}$$

твердого тела, вязкой жидкости и, вообще, сплошной среды самого общего вида -

$$T^{\alpha\beta} = \mu u^\alpha u^\beta - p^{\alpha\beta}$$

электромагнитного поля -

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\alpha\sigma}_{.\sigma} F^{\beta}_{.\sigma} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right);$$

здесь μ - инвариантная функция распределения массы (или энер. гии покоя); p - давление; $p^{\mu\nu}$ - симметричный тензор напряжений, имеющий только шесть независимых компонентов, так как он удовлетворяет алгебраическим равенствам $p_{\mu\nu} u^\nu = 0$. Вывод этих формул можно найти у Ландау и Лифшица (1973), Фока (1961) и др.

Под связями между динамическими переменными, о которых упоминалось выше, понимаются, например, уравнение состояния идеальной жидкости $p = f(\mu)$, законы упругости для твердого тела и т. П. Связями для тензора электромагнитного поля являются уравнения Максвелла - Лоренца (I.7). Здесь следует оговорить, что уравнения (I.7) в сочетании с аксиомой Эйнштейна существенно отличаются от уравнений (I.7) в сочетании с аксиомой Минковского. Так как функции $g_{.}$, входящие в уравнения (I.7), различны, то и рсшения уравненгій (I.7) в том и другом случаях различны. Это проявляется, в частности, в несовпадении мировых линий распространения света в поле тяготения и в отсутствии поля, хотя и те и другие следуют из уравнений Максвелла - Лоренца (I.7). Теоремы 3-6, относящиеся к уравнениям МаксвеллаЛоренца, имеют место

и в физическом мире Эйнштейна, так как в их доказательстве никак не используется равенство кривизны пространства нулю. Это же относится и к теореме 2.

Тензор энергии-импульса среды содержит четыре независимые динамические переменные μ и u^α, остальные определяются связями. Эти переменные удовлетворяют уравнениям движения, легко получаемым из уравнений Эйнштейна с помощью дифференциальных тождеств Бианки (Эйзенхарт, 1948).

Теорема 7. Динамические переменные μ и u^2 вещества удовлетворяют дифференциальным уравнениям движения

$$T^{\mu\nu}_{i\nu} = 0$$

Предположим, что в исследуемой области физического мира находится только некогерентная жидкость. Подставив ее тензор энергии-импульса в уравнения движения, получим

$$(\mu u^\alpha)_{;\alpha} u^\beta + \mu u^\alpha u^\beta_{;\alpha} = 0.$$

Умножим обе части равенства на u_β и учтем, что $u^\beta_{;} u_\beta = 0$. Тогда

$$(\mu u^\alpha)_{;a} = 0.$$
$$u^\beta_{;a} u^\alpha = 0.$$

Воспользовавшись теоремой 2 и заменив u^α касательным вектором $\frac{dx^\alpha}{d\sigma}$ к линиям тока среды, представим левую часть (I.20б) в виде абсолютной производной 4-вектора скорости u^β. Следовательно, уравнение (I.20б) означает равенство $\frac{\alpha^\beta}{\hat{\delta}\sigma}$ нулю. Подставив в его левую часть $\frac{dx^\beta}{d\sigma}$ вместо u^β, получим дифференциальные уравнения линий тока

$$\frac{d^2x^3}{d\sigma^2} + \Gamma^3_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0.$$

Элементом среды может быть и точечная частица. В этом случае плотность энергии ее является δ-образной функцией. Поэтому уравнение (I.21) определяет не только линии тока непрерывно распределенного вещества (I.18а), но и мировые линии свободных точечных частиц, если понятие «свободная частица» означает, что взаимодействие ее с остальными объектами мира осуществляется только через гравитационное поле.

Входящие в (I.21) функции $g_{\mu\nu}(x)$, от которых зависит конкретная форма мировых линий, являются решением уравнений Эйнштейна, одно из слагаемых правой части которых есть тензор энергии-импульса частиц, движущихся по этим мировым линиям. Таким образом, движение по мировым линиям (I.21) - это движение частиц в результирующем гравитационном поле, создаваемом всеми объектами, включая и рассматриваемые движущиеся частицы.

В качестве элементов некогерентной жидкости в исследуемой области мира можно рассмотреть систему свободных пробных частиц. Ее тензор энергии-импульса выражается равенством (I.18а), поэтому движение таких частиц также удовлетворяет уравнениям (I.20а) и (I.21). Пробной частицей называется такая частица, влияние которой на решение уравнений Эйнштейна пренебрежимо мало во всех точках физического мира. Если обозначить через $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$ решение уравнений Эйнштейна, когда правая их часть включает тензор энергии-импульса пробной частицы, а через $g_{\mu\nu}(x)$ - решение в отсутствие тензора, то условием «пробности» является неравенство $|g_{\mu\nu}(x) - \bar{g}_{\mu\nu}(x)| < \varepsilon$, где ε - наперед заданная положительная малая величина, значение которой зависит от конкретных условий. Тогда решение $g_{\mu\nu}(x)$ представляет внешнее для пробной частицы гравитационное поле, а мировая линия (I.21) пробной частицы - ее движение во внешнем гравитационном поле. Существование пробных частиц - в том смысле, что всегда можно ввести частицу, рассматриваемую как пробную,-в любом гравитационном поле обеспечивается тем, это влияние тензора энергии-импульса пробной частицы пропор- ционально ее массе, тогда как уравнение (I.21) от μ не зависит. Поэтому всегда существуют такие значения $\mu_0(\varepsilon)$ и ε, что $|g_{\mu\nu}(x) - \bar{g}_{\mu\nu}(x)| < \varepsilon$, если $\mu < \mu_0$

Следствие 3. Мировыми линиями (линиями тока) свободных частиц (некогерентной жидкости), а также свободных пробных частиц во внешнем гравитационном поле являются временноподобные геодезические физического мира.

Уравнения Эйнштейна и следствие 3 согласуются с опытом Этвеша в его втором и третьем выражениях.

Содержание следствия 3 и теоремы 6 часто называют принципом (Мак-Витти, 1961) или гипотезой (Синг, 1963) геодезических, выражая этим ту мысль, что оно является результатом независимого от уравнений Эйнштейна обобщения закона инерции механики Ньютона и световых линий спсциальной теории относительности на случай искривленного пространства-времени, что неверно. Такая точка зрения восходит к ранним работам Эйнштейна, взгляды которого на уравнения движения трансформировались со временем от привлечения гипотезы геодезических (1916) независимо и наряду с уравнениями гравитационного поля и тензором энергии-импульса в качестве его источника, до попыток (совместно с Инфельдом) объяснить движение вещества как движение сингулярностей поля на основании уравнений гравитационного поля для пустого пространства (1938, 1940 и 1949). Возможность реализации последних представлений Эйнштейна о веществе как о системе движущихся и взаимодействующих сингулярностей гравитационного поля в пустоте до сих пор остается неясной, хотя в этом направлении выполнен ряд работ (Инфельд, Плебаньский, 1961; Carmeli, 1965; Infeld, Michalska-Trautman, 1969). В них попрежнему используется метод последовательных приближений, а сходимость соответствующих рядов только предполагается. Между тем даже решение этой проблемы для конечного числа сингулярностей не разрешит ее в полном объеме, так как взаимодействие большого числа (практически бесконечного) сингулярностей в средеподобной системе через упругие, ядерные и другие силы, очевидно, снова потребует введения динамических переменных, подобных тем, что фигурируют в тензоре энергии-импульса. Если же вещество описывается тензором энергии-импульса, то принцип геодезических является строгим следствием уравнений Эйнштейна.

Уравнение (I.20а) по аналогии с (I.10) называется уравнением непрерывности массы. Плотность массы изменяется вдоль линий тока по закону

$$\mu = \mu(0) \exp\left(- \int_0^\sigma u_{i\nu}^{\nu} d\sigma \right)$$

но полная масса сохраняется в том же смысле, что и полный электрический заряд, т. е. интеграл от плотности массы по объему пространственноподобной гиперповерхности не зависит от выбора гиперповерхности из семейства.

Рассмотрим уравнения движения достаточно сложной физической системы - сплошной среды и электромагнитного поля. Распишем предварительно $T_{;\nu}^{\mu\nu}$ для электромагнитного поля:

$$\frac{1}{4\pi}\left\{ F^{\mu\sigma} F_{\sigma;\nu}^{\nu} + F_{\sigma}^{\nu} F_{;\nu}^{\mu\sigma} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta;\nu} \right\}$$

Приняв во внимание уравнения Максвелла - Лоренца, первый член заменим выражением $-F^{\mu\sigma} j_\sigma$, а второй, переписав сначала в виде $g^{\mu\alpha} F^{v\sigma} F_{\alpha\sigma;\nu}$, - суммой $g^{\mu\alpha} F^{v\sigma} \left(F_{\alpha v;\sigma} + F_{vj;\alpha} \right)$. Так как

$$F^{\nu J} F_{\alpha\nu;\sigma} = -F^{\nu J} F_{\alpha j;\nu},$$

ТО

$$g^{\mu\alpha} F^{v\sigma} F_{\alpha\sigma;\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} F^{v\sigma} F_{v\sigma;\alpha}$$

Следовательно,

$$T_{;\nu}^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu} j_\nu$$

Подставим теперь (I.18в и г) в (I.19) и учтем последнее равенство:

$$(\mu u^\nu)_{i\nu}\, u^\alpha + \mu u^\nu u^\alpha_{i\nu} - p^{\alpha\nu}_{;\nu} - F^{\alpha\nu} j_\nu = 0.$$

Заметив, что $F^{\alpha\nu} j_\nu u_\alpha = p F^{\alpha\nu} u_\nu u_\alpha = 0$, запишем это уравнение, как и в случае неккогерентной жидкости, в виде двух:

$$(\mu u^\nu)_{;\nu} = -p^{\alpha\nu}_{;\nu} u_\alpha,$$
$$\mu \frac{\delta u^\alpha}{\delta \sigma} = \left(\delta^\alpha_\beta + u^\alpha u_\beta\right) p^{\beta\nu}_{;\nu} + F^{\alpha\nu} j_\nu.$$

Если тензор напряжений отсутствует, т. е. среда представляет собой систему электрически заряженных частиц, взаимодействующих только через электромагнитное и гравитационное поля, то уравнение (I.22а) совпадает с (I.20а), а уравнение (I.22б) сводится к уравнению движения некогерентной жидкости в электромагнитном поле

$$\mu \left(\frac{du^\alpha}{d\sigma} + \Gamma^\alpha_{\nu\beta} u^\nu u^\beta \right) = \rho F^{\alpha\nu} u_\nu$$

Для системы, электрические заряды которой сосредоточены в точке, $\rho = \frac{e}{m}\mu$, и уравнение (I.23) совпадает с (I.8). Сила Лоренца не постулируется, как в классической электродинамике, а выводится из основных уравнений общей теории относительНОСТИ.

Следствие 4. Уравнение движения заряда в электромагнитном поле не является независимым элементом теории, а содержится в уравнениях Эйнштейна и Максвелла - Лоренца.

Действие электромагнитного поля на заряд сводится к тому, что его мировая линия (линия тока) отклоняется от неизотропной геодезической. Вектор главной нормали к мировой линии (Эйзенхарт, 1948) параллелен силе Лоренца, а первая кривизна мировой линии равна абсолютному значению силы Лоренца, отнесенной к единице массы.

В общем случае кривизна и направление отклонения линий тока (I.22б) от геодезических определяется действием силы Лоренца на заряд среды, упругих и других сил взаимодействия между.отдельными элементами среды. Вследствие последних плотность массы вдоль линий тока меняется и за счет изменения потенциальной энергии элементов среды.

Уравнения движения вещества должны решаться совместно с уравнениями гравитационного поля Эйнштейна и связями между динамическими переменными тензора энергии-импульса. Эта задача в общем случае необычайно трудна. Некоторые результаты в ее решении получены на пути использования метода последовательных приблиений (Фок, 1939, 1961; Петрова, 1940, 1949; Papapetrou, 1951; Кашкаров, 1954; Петрова, Кучина, 1973; Петрова, Сандина, 1974; Брумберг, 1968, 1972; Федорова, 1974 и др.).

27.1.4 4. The Correspondence Principle

Вещество и потоки энергии создают гравитационное поле, которое проявляется в отличной от нуля кривизне пространственно-временного многообразия. Если тензор энергии-импульса материи отличен от нуля в какой-либо области, то кривизна физического мира, согласно уравнениям Эйнштейна, также отлична от нуля, по крайней мере в этой же области. Равенство же нулю тензора энергии-импульса во всем физическом мире не означает еще равенства кривизны нулю. Уравнения Эйнштейна имеют своими решениями римановы пространства и в том случае, если вещество и потоки энергии отсутствуют. Отсутствие вещества в физическом мире, а не в какой-либо его области, означает его отсутствие везде и всегда.

Onределение 4. Пустым называется физический мир, метрический тензор которого не имеет особенностей и удовлетворяет уравнениям Эйнштейна с нулевой правой частью для всех событй.

Простейшим примером пустого физического мира является мир Минковского. Нетривиальный пример пустого мира с отличной от нуля кпивизной нашел Тауб (Taub, 1951):

$$ds^2 = -\exp\left[(C_1 + C_2)\, x^0\right] \operatorname{ch}\xi \left(dx^0\right)^2 +$$

$$+\exp\left(C_2x^0\right)\operatorname{ch}\xi\left(dx^1\right)^2+\frac{1}{\operatorname{ch}\xi}\left(dx^2\right)^2-2\frac{\sqrt{C_1C_2}x^1}{\operatorname{ch}\xi}dx^2dx^3+$$
$$+\left(\frac{C_1C_2\left(x^1\right)^2}{\operatorname{ch}\xi}+\exp\left(C_1x^0\right)c\hbar\,\xi\right)\left(dx^3\right)^2,$$
$$C_1=\text{ const},\ C_2=\text{ const},\ \xi=\sqrt{C_1C_2}\left(x^0+\text{const}\right).$$

Эта квадратичная форма не имеет особенностей, а тензор Риччи. построенный на ее основе, равен нулю, поэтому мир Тауба удовлетворяет определению 4. Кривизна мира Тауба отлична от нуля в каждый момент времени. Например, компоненты тензора кривизны

$$R^1_{.001}=\frac{1}{2}\frac{C_1C_2}{\operatorname{ch}^2\xi}\left(1-\frac{1}{2}\operatorname{ch}^2\xi-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}\operatorname{sh}\xi\operatorname{ch}\xi\right),$$
$$R^2_{.002}=-\frac{C_1C_2}{\operatorname{ch}^2\xi}\left(1-\frac{1}{2}\operatorname{ch}^2\xi-\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}+\sqrt{\frac{C_2}{C_1}}\right)\operatorname{sh}\xi\operatorname{ch}\xi\right),$$
$$R^3_{.003}=\frac{1}{2}\frac{C_1C_2}{\operatorname{ch}^2\xi^-}\left(1-\frac{1}{2}\operatorname{ch}^2\xi-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_2}{C_1}}\operatorname{sh}\xi\operatorname{ch}\xi\right)$$

не обращаются в нуль одновременно ни в какой момент времени, если $C_1\neq C_2$. Мир Тауба совпадает с мирсм Минковского, когда одна из постоянных C_1 или C_2 равна нулю.

Может показаться, что пустой мир не должен интересовать физика, тем более что от мира Минковского пришлось отказаться (следствие 2). Но это не так. Представление о пустом мире приложимо ко всем тем случаям, когда можно пренебречь влиянием гравитационного поля на изучаемые явления. Вообще, возможность пренебречь влиянием какого-либо поля на те или иные явления в конкретных условиях ограничивается заданной точностью, будь то физический прибор или теоретические расчеты. Мера воздействия любого (по крайней мере, неквантового) поля или другого физического агента взаимодействия, или мера проявления его в данном явлении уменьшается с уменьшением размеров области мира, в которой рассматривается это проявление. Поэтому для каждой заданной точности существует отличное от нуля значение размеров области мира, внутри которой мера данного проявления поля меньше заданной точности. Введем понятие о v-области.

Определение 5. v-Областью, принадлежащей событию, называется наибольшая область физического мира, содержащая данное событие, внутри которой мера проявления данного конкретного физического агента взаимодействия меньше заданной точности.

Существование v-областей обеспечено такими свойствами переноса взаимодействия, как непрерывность и близкодействие. Размеры v-области, интенсивность поля и заданная точность связаны таким образом, что размеры v-области при неизменной заданной точности тем меньше, чем больше интенсивность и наоборот, а при неизменной интенсивности тем меньше, чем больше заданная точность. Поэтому, например, наблюдение распада л-мезонов, обусловленного слабым взаимодействием, требует при прочих равных условиях большего времени, чем наблюдение электромагнитного распада π^0-мезонов.

Рассмотрим подробнее другой пример. Пусть электрическии заряд, скорость которого в начальный момент равна нулю, движется в электромагнитном поле. В единицу времени кинетическая энергия заряда увеличивается на W, а за время наблюдения T - на TW. Если заданная точность на уровне полной энергии частицы равна δ, то неопределенность энергии равна δm. v-Область в этом случае определится из условия, что приобретенная частицей под действием электрического поля энергия не превышает ее неопределенности, т. е. $TW\approx\delta m$. Но изменение в единицу времени кинетической энергии, приходящееся на единицу массы, равно первой кривизне k_1 мировой линии, поэтому

$$Tk_1\sim\delta$$

Аналогичному соотношению удовлетворяют и пространственные размеры v-области*:

$$lk_2 - \delta \text{ и } lk_3 \sim \delta$$

здесь k_2 и k_3 - вторая и третья кривизны мировой линии в направлениях второго и третьего пространственноподобных векторов ее нормалей, а δ - - заданная точность пространственного отклонения частицы, в пределах которой обнаружить действие электрического поля на частицу в v-области невозможно. В области мира, ограниченной размерами T и l, мировая линия заряженной частицы в приведенном примере совпадает с геодезической, хотя напряженность электрического поля, а значит, и сила Лоренца отличны от нуля.

Из-за необычайной малости константы гравитационного взаимодействия размеры v-области гравитационного взаимодействия в большинстве случаев достаточно велики даже вблизи больших масс и увеличиваются с удалением от них. Тензор энергии-импульса материи, находящейся в физическом мире, оказывает пренебрежимо малое влияние на физические процессы в такой v-области через гравитационное поле по сравнению с его проявлениями негравитационного характера. Гравитационное взаимодействие находится в нижнем ряду иерархии взаимодействий по силе, или по значению их констант, поэтому (и в соответствии с увеличением размеров v-области при уменьшении интенсивности в условия заданной точности) v-область гравитационного проявления мате-

Существующие в неквантовой физике представления допускают, что заданная точность в принципе может увеличиваться неограниченно, так что $\delta \to 0$. В квантовых явлениях заданная точность ограничена величиной, пропорциональной постоянной Планка. рии включает в себя -области проявления других взаимодействий.

Аксиома универсальной слабости. v-Область гравитационного взаимодействия содержит в себе v-области всех других взаимодействий, принадлежащих данному событию.

Гравитационное действие энергии-импульса, согласно уравнениям Эйнштейна, выражается через искривление физического мира, поэтому размеры v-области определяются в наиболее характерных случаях римановой кривизной K мира. Проиллюстрируем это на таком примере. Физический мир в окрестности Солнца искривлен его полем тяготения так, что кривизна на расстоянии R от него равна $\frac{\alpha}{R^3}$, где $\alpha \approx 3$ - гравитационная масса Солнца. В римановом пространстве сумма углов Σ геодезического треугольника не равна π, а зависит от кривизны в точках площади треугольника

$$\sum -\pi = \int\limits_{\text{is)}} K dS.$$

Геодезический треугольник в окрестности Солнца можно образовать двумя по.тожениями Земли на годичной орбите и положением какой-либо звезды, выбранными как вершины треугольника. Два положения Земли связаны неизотропной геодезической (следствие 3), две другие стороны являются изотропными геодезическими (теорема 6). Следовательно, экспериментальное измерение углового избытка $\Sigma - \pi$ этой фигуры является, по сути дела, измерением кривизны околосолнечного пространства. Подобного рода измерения (а именно, измерение суммы углов у основания проекции геодезического треугольника на физическое пространство) уже давно проводятся в астрономии при нахождении годичных параллаксов звезд (Арифов, Кадыев, 1968, 1975). Здесь v-область определяется соотношением

$$l^2 K \sim \delta$$

Если задаться точностью измерения углов $\delta \sim 10^{-8}$, что соответствует тысячным долям угловой секунды, то линейные размеры v-области окажутся меньше орбиты Земли, п в астрономических угловых измерениях следует учитывать воздействие массы Солнца на распространение света, проявляющееся в искривленности физического мира. При точности же 10^{-5}, соответствующей двум угловым секундам, размеры v-области значительно превышают орбиту Земли, и влиянием массы Солнца на распространение света можно пренебречь, а кривизну околосолнечного пространства считать равной нулю.

v-Область, внутри которой гравитационное проявление энергии-импульса материи, распределенной во всем физическом мире, исчезающе мало и в которой поэтому имеет место аксиома Мин- ковского, необходимо рассматривать как область мира Минковского. В этом выражается требование принципа соответствия.

Принцип соответствия 1. В окрестности каждого события физического мира для любой наперед заданной точности δ существует такая область v с характерными размерами $l(\delta)$, в которой имеет место аксиома Минковского, а основой физической картины мира является специальная теория относительности.

Необходимо подчеркнуть, что сформулированный принцип соответствия не тождествен утверждению о существовании геодезической системы координат, в которой квадратичная форма в окрестности события x_0^α приведена к виду

$$ds^2 = -\left(dx^0\right)^2 + \left(dx^1\right)^2 + \left(dx^2\right)^2 + \left(dx^3\right)^2 +$$
$$+C_{\alpha,\beta,p\gamma}\left(x^\alpha - x_0^\alpha\right)\left(x^\beta - x_0^\beta\right)dx^\rho dx^\gamma + O\left[\left(x - x_0\right)^3\right],$$
$$C_{\alpha\beta,p\gamma} = \text{ const.}$$

В этой системе координат квадратичная форма (I.24) с точностью до малых второго порядка совпадает с галилеевой формой (I.6), поэтому ее иногда называют локально-инерциальной системой отсчета. Область мира в окрестности события x_0^α, ограниченная условием малости $\left(x - x_0\right)^2$, является областью мира Минковского. Но из этого не следует еще, что такая окрестность сохраняет физическую значимость, 'так как в принципе не исключено, что, сужая окрестность $\left(x - x_0\right)$ в выражении (I.24), мы избавляемся не только от влияния гравитационного поля на явления в этой окрестности, но и от самих явлений. Это исключается только благодаря универсальной слабости гравитационного взаимодействия. Если в природе существует какое-либо более слабое взаимодействие, чем гравитационное, то принцип соответствия не имеет места, тогда как математический факт существования геодезических систем координат, в которых метрика имеет вид (I.24), конечно, от этого не зависит. Этот факт, называемый также локальной евклидовостью риманового пространства, не доказывая принципа соответствия и не противореча ему, служит лишь его математическим выражением в специальной системе отсчета.

Основанием принципа соответствия являются экспериментальный характер физики, который проявляется, в частности, в существовании v-области взаимодействия (определение 5), и универсальная слабость гравитационного взаимодействия. Кроме того, с физической точки зрения, геодезические системы координат интерпретируются как системы, связанные со свободным телом (например, свободно падающий «лифт Эйнштейна»). Согласно же принципу соответствия, в окрестности любого, в том числе и несвободного, тела существует область мира Минковского. Если рассматриваемое тело не свободное, то в системе отсчета, связанной с этим телом, вообще говоря, не существует координатной сетки, в которой квадратичная форма окрестности тела сводилась бы к виду (I.24), хотя эта окрестность и является миром Минковского.

Например, область мира, ограниченная некоторой площадкой, помещенной в лаборатории на поверхности Земли, может считаться при определенной точности областью мира Минковского. в которой допустимо использовать специальную теорию относительности, игнорируя кривизну физического мира, обусловленную полем тяготения Земли. В течение же короткого промежутка времени (который, однако, значительно больше характерного времени атомных и тем более ядерных процессов) и все пространство лаборатории является миром Минковского, чем объясняется отсутствие каких-либо «следов» влияния массы Земли на микроявления. Предположим теперь, что заданная точность достаточна, чтобы обнаружить разность хода лучей в оптическом опыте Майкельсона и Гейла (Michelson, Gale, 1925). Конструкция прибора в опыте и время пробегания лучей (10^{-5}с) удовлетворяют условиям, при которых область, занимаемая лабораторией, является миром Минковского. В опыте Майкельсона и Гейла обнаруживается, как известно, влияние суточного вращения Земли на оптические явления. Но на вращающемся теле, даже при условии равенства кривизны мира нулю всюду, квадратичная форма имеет негалилеев вид. Таким образом, хотя данная область мира и является при указанных условиях областью мира Минковского и удовлетворяет принципу соответствия, квадратичная форма в ней не приводима к виду (I.24) из-за вращения лаборатории вместе с поверхностью Земли. Чтобы привести ее к виду (I.24),

необходимо лабораторию либо сбросить в шахту («лифт Эйнштейна»), либо забросить на орбиту искусственного спутника. Но это уже будут другие лаборатории.

В общей теории относительности, таким образом, должен выполняться принцип соответствия 1.

Уравнениям Эйнштейна для пустого физического мира удовлетворяет мир Минковского, но этим еще не обеспечивается выполнение принципа соответствия. Мир Минковского - не единственное решение. Мир Тауба - только пример из многих возможных решений с отличной от нуля кривизной мира. Поэтому следует убедиться, что при определенных начальных условиях (данные Коши) мир Минковского является единственным пустым физическим миром. Аналогично обстоит дело, например, в классической электродинамике. Уравнения Максвелла - Лоренца допускают отличное от нуля решение и в том случае, если в пространстве вообще отсутствуют электрические заряды, никогда не существовали раньше и не появятся в будущем. Но нулевое решение является единственным, удовлетворяющим условию отсутствия электромагнитного поля в начальный момент. Именно этим обеспечивается то, что электромагнитное поле никогда не существовало в прошлом и не появится в пространстве в будущем. Пусть пространственноподобная гиперповерхность задана уравнением $\omega\left(x^0, x^i\right) = \text{const}$. Абсолютное значение ее нормали $\xi^\alpha = g^{\alpha\beta}\frac{\partial\omega}{\partial x^\xi}$ обозначим через ξ. На гиперповерхности определены коэффициенты h_{ik} первой и ω_{ik} второй квадратичных форм (Эйзенхарт, 1948).

Лемма 2. Коэффициенты второй квадратичной формы на каждой координатной гиперповерхности из семейства $\omega\left(x^0, x^i\right) = \text{const}$, ортогональной временной координате, равны половине производной коэффициентов первой квадратичной формы вдоль нормали к гиперповерхности.

Если $g_{0i} \neq 0$, то можно ввести штрихованные координаты

$$x'^0 = \omega(x), x'^i = \omega^i(x),$$

где функции $\omega^i(x)$ - три независимых решения (Смнрнов, 1965) уравнения

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial\omega}{\partial x^\mu}\frac{\partial\omega}{\partial x^\nu} = 0$$

В этих координатах $g'_{00}\left(x'\right) = -\frac{1}{(\xi)^2}, g'_{0l} = 0$, уравнение семейства принимает простой вид $x'^0 = \text{const}$, а $\xi'^\alpha = g'^{0\alpha}\left(x'\right)$. Коэффициенты первой квадратичной формы совпадают здесь с компонентами g'_{lk} метрического тензора, а несложные вычисления второй квадратичной формы приводят к формуле

$$\omega_{lk} = -\frac{\xi'}{2}g'_{ik,0}$$

Но

$$\xi' g'_{ik,0} = \xi'\frac{\partial h_{ik}}{\partial x'^0} = -\frac{1}{\xi'}\frac{\partial h_{ik}}{\partial x'^\alpha}\xi'^\alpha$$

поэтому

$$\omega_{ik} = \frac{1}{2}\frac{\partial h_{lk}}{\partial x'^\alpha}\cdot\frac{\xi'^\alpha}{\xi'}$$

в соответствии с леммой.

Тензор Римана - Кристоффеля физического мира можно выразить в этих координатах через соответствующий тензор P_{lkln} гиперповерхности и коэффициенты ее квадратичных форм. Компоненты R'_{ljkl} и R'_{0ijk} проще найти из уравнений Гаусса и Кодацци, а R'_{l00k} непосредственно вычислить:

$$R'_{ljbl}\left(x'\right) = P_{ljkl} + \omega_{lk}\omega_{jl} - \omega_{ll}\omega_{jk},$$
$$R'_{0ljk}\left(x'\right) = \frac{1}{\xi'}\left(\omega_{lk|j} - \omega_{lj|k}\right),$$

$$R'_{l00k}(x') = \frac{1}{\xi'}\left[\frac{1}{\xi'^2}\frac{\partial\omega_{lk}}{\partial x'^\alpha}\xi'^\alpha - \left(\frac{1}{\xi'}\right)_{|ik} - \frac{1}{\xi'}h^{nj}\omega_{in}\omega_{k\}}\right];$$

здесь вертикальной черточкой в индексе обозначено ковариантное дифференцирование по соответствующей координате на гиперповерхности.

Составляя из левых частей уравнений (I.26) компоненты тензора Риччи, можно выразить также тензор Эйнштейна (левую часть уравнений Эйнштейна):

$$G'_{00}(x') = \frac{1}{2}(\xi')^{-2}\left(P + \omega_{lk}\omega^{ik} - \left(\omega^l_l\right)^2\right)$$

$$G'_{0j}(x') = \frac{1}{\xi'}\left(\omega^k_{j|k} - \omega^k_{k|j}\right),$$

$$G'_{lk}(x') = -\frac{1}{\xi'}\frac{\partial\omega_{lk}}{\partial x'^\alpha}\xi'^\alpha + 2\omega_{in}\omega^n_k - \omega_{lk}\omega^n_n + P_{ik} +$$

$$+\xi'\left(\frac{1}{\xi'}\right)_{|lk} - \frac{1}{2}h_{lk}\left(P + 3\omega_{nj}\omega^{nj} - (\omega^n_n)^2 -\right.$$

$$\left.-2h^{nj}\frac{\partial\omega_{nj}}{\partial x^\alpha}\frac{\xi'^\alpha}{\xi'} + 2\xi' h^{nj}\left(\frac{1}{\xi'}\right)_{|nj}\right).$$

Теперь докажем теорему единственности решения уравнений Эйнштейна в пустоте для частного случая данных Коши.

Теорема 8. Если на заданной пространственноподобной гиперповерхности такой, что модуль ее нормали удовлетворяет уравнению $\left(\frac{1}{\xi}\right)_{|lk} = 0$, кривизна и коэффициенты второй квадратичной формы равны нулю, то пустой физический мир является миром Минковского.

Выпишем уравнения Эйнштейна для пустоты, воспользовавшись равенствами (I.27), в виде, азрешенном относительно производной ω_{ik} вдоль нормали:

$$P + \omega_{ik}\omega^{ik} - \left(\omega^l_l\right)^2 = 0$$

$$\omega^k_{j|k} - \omega^k_{k|j} = 0,$$

$$\frac{1}{\xi'}\frac{\partial\omega_{lk}}{\partial x'^\alpha}\xi'^\alpha = P_{ik} + 2\omega_{in}\omega^n_k - \omega_{lk}\omega^n_n + \xi'\left(\frac{1}{\xi'}\right)_{|lk} -$$

$$-\frac{1}{4}h_{lk}\left(P + \omega_{nj}\omega^{nj} - (\omega^n_n)^2\right).$$

Тензор Риччи гиперповерхности P_{ik}, а поэтому и P, содержит только коэффициенты h_{ik} и их производные на гиперповерхности. Операторы дифференцирования на гиперповерхності и вдоль нормали к ней хотя и не коммутируют, но связаны между собой соотношением

$$\frac{\xi'^\alpha}{\xi'}\frac{\partial}{\partial x'^\alpha}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x'^n}\right|_{\omega=\text{ const}}\right) = \left.\frac{\partial}{\partial x'^n}\right|_{\omega=\text{ const}}\left(\frac{\xi'^\alpha}{\xi'}\frac{\partial}{\partial x'^\alpha}\right) -$$

$$-\left.\frac{\partial\ln\xi'}{\partial x'^n}\right|_{\omega=\text{ const}}\cdot -\frac{\xi'^\alpha}{\xi'}\frac{\partial}{\partial x'^\alpha},$$

справедливость которого легко проверить в штрихованной системе координат. Поэтому производная F_{ik} степени a вдоль нормали к гиперповерхности является однородной алгебраической функцией производных h_{ik} степени не выше a вдоль нормали и их первых и вторых производных на гиперповерхности, или, если учесть (I.25), однородной алгебраической функцией ω_{ik}, пронзводных ω_{ik} вдоль нормали к гиперповерхности степени не выше $a-1$ и их пронзводных на гиперповерхности. Следовательно, если ω_{ik} и их производные вдоль нормали до $(a-1)$-й степени

включительно равны нулю на гиперповерхности, то равны нулю на гиперповерхности и все производные P_{ik} вдоль нормали до a-й степени включительно.

В свою очередь, производная $\omega_{ih}(a-1)$-й степени вдоль нормали к гиперповерхности, удовлетворяющей условию теоремы, является, согласно уравнению (I.28в), однородной алгебраической функцией ω_{ik} и их производных вдоль нормали до $(a-2)$-й степени включительно, если $a \geqslant 2$. Но по условиям теоремы ω_{ik} и P_{tk} равны нулю на гиперповерхности, а из уравнений (I. 28в) следует, что и первая производная ω_{ik} вдоль нормали равна нулю на гиперповерхности. Следовательно, ω_{ik} и P_{ik} равны нулю и в окрестности заданной гиперповерхности. Тензор Риччи трехмерного пространства есть однородная линейная алгебраическая функция компонентов тензора кривизны (Эйзенхарт, 1948), поэтому в окрестности заданной гиперповерхности равен нулю и тензор ее кривизны. Нулевым значениям ω_{ik} и P_{ijl} соответствуют, согласно (I.26), нулевые значения тензора кривизны мира в окрестности гиперповерхности.

Заметим, что в доказательстве теоремы использовались только уравнения (I.28в). Но как данные Коши теоремы, так и полученное решение уравнений (I.28в) в окрестности заданной гиперповерхности удовлетворяют уравнениям (I.28а) и (I.28б). (?)то - частное проявление теоремы 26, утверждающей, что система уравнений Эйнштейна (I.17) находится в инволюции.

Гиперповерхность с данными Коши, для которой доказана теорема 8, имеет специальный вид. Но данные Коши теоремы и вид гиперповерхности связаны взаимно однозначно.

Теорема 9. Если на пространственноподобной гиперповерхности в мире Минковского кривизна и коэффициенты второй квад- ратичной формы равны нулю, то модуль ее нормали удовлетворяет уравнениям

$$\left(\frac{1}{\xi}\right)_{1kk} = 0.$$

Смысл этой гиперповерхности заключается в том, что она совпадает с трехмерным физическим пространством в невращающейся ускоренной системе отсчета. В каждый момент времени поле абсолютного ускорения перпендикулярно некоторой движущейся плоскости, обратно пропорционально расстоянию от нее и имеет противоположные направления по ее разные стороны. Сама же движущаяся плоскость является горизонтом (Пенроуз, 1972) для любой частицы, покоящейся в этой системе отсчета. Выбором подходящей координатной сетки квадратичную форму мира можно привести в ней к виду

$$ds^2 = -\left(A + B_l x^l\right)^2 \left(dx^0\right)^2 + \left(dx^1\right)^2 + \left(dx^2\right)^2 + \left(dx^3\right)^2$$

где A и B_i - произвольные функции времени. Если $B_i = 0$, то система отсчета инерциальная, если $A = 0$, а $B_i = \text{const}$, то каждый элемент системы отсчета релятивистски равноускорен в направлении B_l.

В случае произвольной гиперповерхности данные Коши, определяющие единственность мира Минковского как пустого физического мира, неизвестны.

Рассмотрим в окрестности заданного события некоторую область мира D, включающую v-область гравитационного взаимодействия, принадлежащую событию. Согласно определению 5, в этой области нельзя пренебречь при заданной точности влиянием поля тяготения на физические явления, поэтому и кривизна в ней будет отлична от нуля. Однако в силу непрерывности отличие геометрии мира от мира Минковского в пределах выделенной области будет мало, если размеры ее незначительно превышают v-область. В этом случае метрику можно представить в виде суммы метрического тензора $\varepsilon_{\mu\nu}$ мира Минковского и малых поправочных функций, $\lambda_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu} + \lambda_{\mu\nu}$$

О характере поправочных функций в общем случае судить невозможно без предварительного решения уравнений Эйнштейна вместе с уравнениями движения и связями между динамическими переменными. Исключением является квазистатический случай, представляющий в то же время принципиальный интерес. Предположим в соответствии с квазистатичностью, что в системе отсчета. в которой метрика мира Минковского приводится к галилееву виду $\varepsilon_{00} = -1, \varepsilon_{0i} = 0$, $\varepsilon_{ik} = 1$, если $i = k$, и $\varepsilon_{ik} = 0$,

если $i \neq k$ производные $\lambda_{\mu\nu}$ по времени пренебрежимо малы по сравнению с пространственными производными. Тогда

$$R_{00} = \frac{1}{2}\Delta\lambda_{00} + O\left(\lambda^2\right)$$

где Δ-оператор Лапласа. Введя вместо g_{00} функцию φ такую, что $g_{00} = -e^{-2\varphi}$ и, следовательно, $2\varphi = \lambda_{00} + O\left(\lambda^2\right)$, перепишем

$$R_{00} = \Delta\varphi + O\left(\lambda^2\right).$$

Если в рассматриваемой области D отсутствуют массы, создающие гравитационное поле, или вкладом тензора энергии-импульса внутри области можно пренебречь по сравнению с тензорами источников, находящихся вне области, то уравнения Эйнштейна (I.17) внутри нее принимают вид $R_{\mu\nu} = 0$. Следовательно, функция φ удовлетворяет в этом приближении уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0,$$

как и гравитационный потенциал в теории Ньютона.

Если потребовать еще, чтобы гравитационное поле было достаточно слабым, то размеры рассматриваемой области мира можно увеличить так, чтобы в нее входили и источники поля. Под слабостью поля здесь понимается малость поправочных функций $\lambda_{\mu\nu}$. Подчеркнем. что если в предыдущем случае малость поправочных функций вытекала как следствие достаточной малости области D без предположения об интенсивности гравитационного поля, то теперь требуемая малость поправок как раз и выражает необходимое условие слабости поля тягстения во всей заданной области. При сделанных предположениях, включая и квазистатичность поля, а следовательно, и малые скорости источников, всеми слагаемыми тензора энергии-импульса можно пренебречь по сравнению с массой покоя, так что

$$u^0 = 1, u^l = 0, T^{00} = \mu, T^{9i} = T^{ik} = 0, T = -\mu.$$

Переписав уравнения Эйнштейна в виде

$$R_{\mu\nu} = -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)$$

и воспользовавшись (I.30), получим уравнение для φ

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{2}x\mu.$$

Сравнивая его с уравнением Пуассона для потенциала φ_N Ньютона, находим

$$\varphi = \varphi_N + \text{ const}, x = 8\pi\gamma.$$

Постоянная в (I.34) определяется условиями нормировок потенциала Ньютона и функции φ метрического тензора.

Принцип соответствия 2. В квазистатическом гравитационном поле существуют области мира D, содержащие v-область грави- тационного взаимодействия, принадлежащую, по крайней мере, одному из событий D, внутри которых при заданной точности логарифм абсолютного значения временного компонента метрического тензора мира удовлетворяет уравнению Лапласа. В слабом квазистатическом гравитационном поле существует содержащая источники область мира, внутри которой при заданной точности этот логарифм удовлетворяет уравнению Пуассона для потенциала Ньютона.

27.1.5 5. Measurement of the Metric of the Physical World

Возможность соотнесения числовых результатов измерений в физическом мире с теоретическими представлениями и изоморфного отображения наблюдаемых явлений на теоретическую картину связана, в первую очередь, с понятием собственного времени и возможностью его измерения. Рассмотрим некоторую частицу, история которой

изображается мировой линией. В собственной системе отсчета частица покоится, ее мировая линия есть множество чисел $\{x^0, x^i = \text{const}\}$, а ее 4-вектор скорости u^μ имеет компоненты $\{1/\sqrt{-g_{00}}, 0, 0, 0\}$. Состояние частицы не исчерпывается четырьмя числами $\{x^0, x^l\}$, фиксирующими ее положение нд мировой линии. Оно онисываетсл или может описываться некоторым наиором чисел, отвечающим каким-либо внутренним и внешним переменным состояния, так что каждому состояниi соответствует свой найор чисел.

Важнейшим свойством, присущим состоянию, является его изменяемость. Изменение состояния пронсходит не случайным образом, а в соответствии с определенными причинно-следственными связями внутренних переменных состояния между собой и с внешними переменными. История частицы есть непрерывная смена одного состояния другим, так что на линейном непрерывном множестве состояний существует выделенное направление, характеризуемое понятиями «прошлое»и «будущее». Упорядоченность состояний в смысле прошлое - будущее или раньше - позже называют иначе изменением состояния в собственном времени. Существование линейного непрерывного причинно-упорядоченного множества состояний и обеспечивает принципиальную возможность введения понятия собственного времени и его измерения.

Аксиома 1. Абсолютное значение интервала мировой линии частицы равно элементу ее собственного времени.

Основанием аксиомы служит предположение, что упорядоченное множество состояний частицы равномощно множеству событий на мировой линии, и вследствие этого существует одно-однозначное соответствие между событиями мировой линии и состояниями частицы. Справедливость этого предположения априорн неизвестна, но если оно имеет место, то содержание аксиомы сводится к утверждению, что метрический тензор физнческого мира осуществляет такое отображение событий мировой линии частицы на ее состояния, при котором абсолютное значение интервала ds между событиями $\{x^\mu\}$ и $\{x^\mu + dx^\mu\}$ равно промежутку собственного времени $d\tau$ между двумя состояниями, соответствующими этим событиям. Значение $d\tau$ равно

$$d\tau = \sqrt{|g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu|}$$

если события $\{x^\mu\}$ и $\{x^\mu + dx^\mu\}$ принадлежат мировой линии частицы или вектор dx^μ является касательным к мировой линии. Собственное время с точностью до аддитивной постоянной совпадает с каноническим параметром σ мировой линии.

В собственной системе отсчета

$$d\tau = \left|\sqrt{-g_{00}} dx^0\right|$$

и

$$\tau = \left| \int_{x_1^0}^{x_2^0} \sqrt{-g_{00}\,(x^0, x^l = \overline{\text{const}}} \right) dx^0 \mid .$$

Измерение интервала между любым событием мировой линии частицы и некоторым другим событием, не лежащим на мировой линии, но принадлежащим достаточно малой окрестности данного события, можно свести к измерению промежутков собственного времени частицы на мировой линии.

Теорема 10. Пусть P_0, P_1 и P_2 - события на гладкой мировой линии γ частицы, а P_3 - не принадлежащее γ событие, такое, что события P_1 и P_3, P_2 и P_3 попарно принадлежат световым линиям. И пусть $\tau(P_0, P_1) = \tau_1, \tau(P_0, P_2) = \tau_2$, а ξ^2 - абсолютное значение квадрата интервала между P_0 и P_3. Тогда для любого наперед заданного значения ε существует такое δ, что $\left|\xi - \sqrt{\tau_1 \tau_2}\right| < \varepsilon$, если $\tau_1 < \delta$ и $\tau_2 < \delta$.

Доказ ат ел в ство. Обозначим 4-векторы (P_0P_1) и (P_0P_2) через Δx_1^μ и $\Delta x_2^\mu, (P_0P_3)$ - через dx^μ, а (F_1P_3) и (P_3P_2) - через η_1^μ и η_2^μ соответственно; $dx^\mu = \xi e^\mu$, причем $e^\mu e_\mu = -1$ для временноподобного и $e^\mu e_\mu = 1$ для пространственноподобного нитервала (P_0, P_3). Эти векторы связаны между собой двумя равенствами (рис. 1):

$$\eta_1^\mu = dx^\mu - \Delta x_1^\mu, \eta_2^\mu = \Delta x_2^\mu - dx^\mu$$

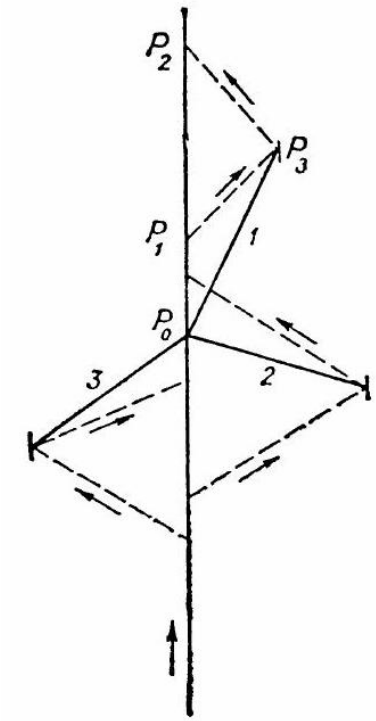
Для гладкой в точке P_0 мировой линии существует ненулевая окрестность, в которой имеет место равенство

$$\Delta x^\mu(\sigma) = u^\mu_{l_0}\sigma + \frac{1}{2}\frac{\delta u^\mu}{\delta\tau l_0}\sigma^2 + O\left(\sigma^3\right).$$

Действнтельно, введем геодезическую систему координнат x'^μ и разложим левую часть уравнения мировой линии в окрестности P_0 в ряд Тейлора. Если линия гладкая, то радиус сходимости ряда Тейлора отличен от нуля. Тогда

$$x'^\mu(\sigma) - x'^\mu_0 = u'^\mu_{1'^\mu_0} + \frac{1}{2}\frac{du'^\mu}{d\sigma}\sigma_0\sigma^2 + O\left(\sigma^3\right).$$

Если заменить производную $\frac{d}{d\sigma}\big|_0$ на абсолютную производную $\frac{\delta}{\delta\sigma 10}$, что допустимо в геодезической системе координат, то можно видеть, что правая часть равенства будет суммой векторов.



Это означает, что компоненты 4-вектора (P_0P), определяемого двумя событиями на мировой линии, равны разности координат событий в геодезической системе координат, поэтому, подставляя $\Delta x'^\mu(\sigma)$ в левую часть вместо $x'^\mu(\sigma) - x'^\mu_0$ и возвращаясь к исходной системе, получим (I.38).

Рис. 1. Здесь схематически изображено, как с помощью измерения только промежутков собственного времени на мировой линии частицы (вертикальная прямая) можно измерить временноподобные)1 и 3) и пространственноподобный (2) интервалы (каждому интервалу соответствуют две световые линии (пунктирные прямые)). Например, если τ_1-промежуток собственного времени между событием P_0 и событием P_1 отправки светового сигнала, и τ_2-между P_0 и событием приема сигнала P_2, отраженного в P_3, то временноподобный интервал (P_0, P_3) равен $\sqrt{\tau_1\tau_2}$. Аналогично во втором и третьем случаях.

В соответствии с последоватольностью событий P_0, P_1 и P_2 векторы Δx^μ_1 и Δx^μ_2 выражаются следующими равенствами:

$P_0 < P_1 < P_2, e^\mu e_\mu = -1$

$$\Delta x^\mu_1 = u^\mu_{l_0}\tau_1 + \frac{1}{2}\left.\frac{\delta u^\mu}{\delta\sigma}\right|_0 \tau_1^2 + O\left(\tau_1^3\right),$$

$$\Delta x^\mu_2 = u^\mu_{l_0}\tau_2 + \frac{1}{2}\frac{\delta u^\mu}{\delta\sigma l_0}\tau_2^2 + O\left(\tau_2^3\right);$$

$P_1 < P_0 < P_2, e^\mu e_\mu = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x_1^\mu = -u_{l_0}^\mu \tau_1 + \frac{1}{2}\frac{\delta u^\mu}{\delta\sigma}\Big|_0 \tau_1^2 + O\left(\tau_1^3\right), \\ \Delta x_2^\mu = u_{l_0}^\mu \tau_2 + \frac{1}{2}\frac{\delta u^\mu}{\delta\sigma}\Big|_0 \tau_2^2 + O\left(\tau_2^3\right); \end{array}\right\}$$

$P_1 < P_2 < P_0, e^\mu e_\mu = -1$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x_1^\mu = -u_{l_0}^\mu \tau_1 + \frac{1}{2}\frac{\delta u^\mu}{\delta\sigma l_0}\tau_1^2 + O\left(\tau_1^3\right), \\ \Delta x_2^\mu = -u_{l_0}^\mu \tau_2 + \frac{1}{2}\frac{\delta u^\mu}{\delta\sigma l_0}\tau_2^2 + O\left(\tau_2^3\right). \end{array}\right\}$$

По условию теоремы, события P_1 и P_3, P_2 и P_3 соединены изотропными геодезическими (теорема 6). Используя разложение в ряд Тейлора левой части уравнения (I.16) в окрестности событий P_1 и P_2, векторы η_1^μ и η_2^μ можно представнть аналогично Δx^μ в виде

$$\eta_1^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda_1 1_0}\lambda_1,$$
$$\eta_2^\mu = -\frac{dx^\mu}{d\lambda_2 1_0}\lambda_2,$$

где λ_1 и λ_2 - параметры вдоль изотропных геодезических, а $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ - изотропный вектор.

Подставляя (I.39) в (I.37) и вычисляя квадраты нормы правых частей с точностью до малых четвертого порядка, а также учитывая, что квадраты нормы левых частей равны нулю в соответствии с (I.40), получаем

$\xi^2 + \tau_1^2 + 2\xi\tau_1 C_1 + \xi\tau_1^2 C_2 + O\left(\tau^4\right) = 0$

$$\xi^2 + \tau_2^2 + 2\xi\tau_2 C_1 + \xi\tau_2^2 C_2 + O\left(\tau^4\right) = 0$$

$\xi^2 - \tau_1^2 + 2\xi\tau_1 C_1 - \xi\tau_1^2 C_2 + O\left(\tau^4\right) = 0$, $\xi^2 - \tau_2^2 - 2\xi\tau_2 C_1 - \xi\tau_2^2 C_2 + O\left(\tau^4\right) = 0$ $\xi^2 + \tau_1^2 - 2\xi\tau_1 C_1 + \xi\tau_1^2 C_2 + O\left(\tau^4\right) = 0$ $\xi^2 + \tau_2^2 - 2\xi\tau_2 C_1 + \xi\tau_2^2 C_2 + O\left(\tau^4\right) = 0$;

здесь $C_1 = e_\alpha u_{10}^\alpha, C_2 = e_\alpha \frac{\delta u^\alpha}{\delta\sigma} 1_0$.

Во всех случаях из выписанных равенств следует

$$\xi - \sqrt{\tau_1\tau_2} = \frac{1}{2}\tau_1\tau_2 C_2 + O\left(\tau^3\right).$$

Правая часть (I.41) стремится к нулю, когда $\tau_1 \to 0$ и $\tau_2 \to 0$. Поэтому, если положить

$$\varepsilon = \left|\frac{1}{2} - \delta^2 C_2 + O\left(\delta^3\right)\right|$$

ТО

$$|\xi - \sqrt{\tau_1\tau_2}| < \varepsilon$$

причем ? стремится к нулю как δ^2. Таким образом,

$$\lim_{\tau_1,\tau_2\to 0} \frac{\xi}{\sqrt{\tau_1\tau_{23}}} = 1$$

ИЛИ

$$\xi = \sqrt{\tau_1\tau_2}.$$

Формула (I.41) справедлива также, если τ_1 или τ_2 равны нулю, но смысл ее в этом случае тривиален, так как события P_0 и P_3 тогда связаны изотропной геодезической, интервал вдоль которой по определению равен нулю.

Замечание. Область применимости формулы (I.42) при заданной точности зависит от значения первой, второй и третьей кривизны мировой линии частицы. Если первая кривизна равна нулю, то $C_2 = 0$, и праеая часть (I.41) есть малая уже третьего порядка по τ, пропорциональная второй кривизне, а если и вторая кривизна равна нулю, то она есть малая четвертого порядка, пропорциональная третьей кривизне. В соответствии с

этим увеличиваются размеры области мира, в которой при заданной точности имеет место формула (I.42). Если мировая линия частицы - геодезическая, то правая часть (I.41) равна нулю, а формула (I.42) представляет собой точное равенство во всей той области мира, в которой две геодезические, исходящие из одного события, не пересекаются. Равенство (I.42) для случая, когда. мировая линия частицы является геодезнческой (свободная частица), а измеряемый интервал - пространственноподобный, впервые было предложено Вигнером (Wigner, 1957).

Рассмотрим в окрестности $P_0\left(x_0^\mu\right)$ десять событий $P_a\left(x_0^\mu + \left(dx^\mu\right)_a\right), a = 1, 2, ..., 10$ и введем обозначения: $ds^2\left(P_0, P_a\right) = e_a\xi_a^2, e_a = +1$ (или -1), если соответствующий интервал пространственно-(или временно-) подобный; $\left(dx^0\right)_a^2 = y_a^1, \left(dx^1\right)_a^2 = y_a^2, \left(dx^2\right)_a^2 = y_a^3, \left(dx^3\right)_a^2 = y_a^4, \quad \left(dx^0dx^1\right)_a = y_a^5, \quad \left(dx^0dx^2\right)_a = y_a^6, \left(dx^0dx^3\right)_a = y_a^7, \left(dx^1dx^2\right)_a = y_a^8, \quad \left(dx^2dx^3\right)_a = y_a^9, \quad \left(dx^3dx^1\right)_a = y_a^{10}; g_{00} = g_1, g_{11} = g_2, g_{22} = g_3, g_{33} = g_4, 2g_{01} = g_5, 2g_{02} = g_6, 2g_{03} = g_7, 2g_{12} = g_8, 2g_{23} = g_9, 2g_{31} = g_{10}$. Предположим, что, по крайней мере, один из десяти интервалов не изотропный. Будем называть одиннадцать событий P_0, P_a независимыми, если детерминант квадратной матрицы $\left(y_a^b\right)$ отличен от нуля. Согласно аксиоме Эйнштейна, интервалы ξ_a^2 связаны с координатами событий P_z алгебранческими уравнениями, которые в этих обозначениях имеют вид

$$e_b\xi_b^2 = g_a y_b^a$$

Так как события независимые и хотя бы для одного из них $\xi^2 \neq 0$, то неоднородная система линейных алгебраических уравнений (I.43) имеет единственное решение

$$g_c = e_b\xi_b^2 y_c^{-1b}$$

где $\left(y^{-1}\right)$ - матрица, обратная (y).

Существование одиннадцати независимых событий доказывается примером простейшего набора событий $P_0P_1\left\{dx^0, 0, 0, 0\right\}$, $P_0P_2\left\{0, dx^1, 0, 0, \right\} P_0P_3\left\{0, 0, dx^2, 0\right\}, P_0P_4\left\{0, 0, 0, dx^3\right\}, P_0P_5\left\{dx^0,\right.$ $\left.dx^1, 0, 0\right\}, P_0P_6\left\{dx^0, 0, dx^2, 0\right\}, P_0P_i\left\{dx^0, 0, 0, dx^3\right\}, P_0P_8\left\{0, dx^1,\right.$ $\left.dx^2, 0\right\}, P_0P_9\left\{0, 0, dx^2, dx^3\right\}, P_0P_{10}\left\{0, dx^1, 0, dx^3\right\}$, через координаты которых и соответствующие интервалы выражается, согласно (I.44), метрический тензор

$$g_{00} = -\xi_1^2/\left(dx^0\right)_1^2, g_{11} = \xi_2^2/\left(dx^1\right)_2^2,$$

$$g_{22} = \xi_3^2/\left(dx^2\right)_3^2, g_{33} = \xi_4^2/\left(dx^3\right)_4^2,$$

$$g_{01} = \frac{1}{2}\left\{\frac{e_5\xi_5^2}{\left(dx^{11}dx^1\right)_5} - \xi_2^2\frac{\left(dx^1\right)_5}{\left(dx^0\right)_5\left(dx^1\right)_2^2} + \xi_1^2\frac{\left(dx^0\right)_5}{\left(dx^1\right)_5\left(dx^0\right)_1^2}\right\},$$

$$g_{02} = \frac{1}{2}\left\{\frac{e_6\xi_6^2}{\left(dx^0dx^2\right)_6} - \xi_3^2\frac{\left(dx^2\right)_6}{\left(dx^0\right)_6\left(dx^2\right)_3^2} + \xi_1^2\frac{\left(dx^0\right)_6}{\left(dx^2\right)_6\left(dx^0\right)_1^2}\right\},$$

$$g_{03} = \frac{1}{2}\left\{\frac{e_7\xi_7^2}{\left(dx^0dx^3\right)_7} - \xi_4^2\frac{\left(dx^3\right)_7}{\left(dx^0\right)_7\left(dx^3\right)_4^2} + \xi_1^2\frac{\left(dx^0\right)_7}{\left(dx^3\right)_7\left(dx^0\right)_1^2}\right\},$$

$$g_{12} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\xi_8^2}{\left(dx^1dx^2\right)_8} - \xi_3^2\frac{\left(dx^2\right)_8}{\left(dx^1\right)_8\left(dx^2\right)_3^2} - \xi_2^2\frac{\left(dx^1\right)_8}{\left(dx_8^2\right)_8\left(dx^1\right)_2^2}\right\},$$

$$g_{23} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\xi_9^2}{\left(dx^2dx^3\right)_9} - \xi_4^2\frac{\left(dx^3\right)_9}{\left(dx^2\right)_9\left(dx^3\right)_4^2} - \xi_3^2 - \frac{\left(dx^2\right)_9}{\left(dx^3\right)_9\left(dx^2\right)_3^2}\right\},$$

$$g_{31} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\xi_{10}^2}{\left(dx^1dx^3\right)_{10}} - \xi_4^2\frac{\left(dx^3\right)_{1n}}{\left(dx^1\right)_{10}\left(dx^3\right)_4^2} - \xi_2^2\frac{\left(dx^1\right)_{10}}{\left(dx^3\right)_{10}\left(dx^1\right)_2^2}\right\}$$

Лемма 3. Если заданы десять интервалов (P_0, P_a) между одиннадцатью независимыми событиями P_0, P_a, то метрический тензор физического мира в точке P_0 является линейной

однород- ной формой (I.44) квадратов заданных интервалов, коэффициенты которой - определенные функции разности координат событий.

Замечание. Независимость одиннадцати событий P_0, P_a означает, что они не принадлежат изотропной гиперповерхности. Предположим обратное. Тогда все интервалы ξ_a равны нулю, а система уравнений (I.43) имеет только нулевое решение, если детерминант матрицы (y) не равен нулю, что противоречит аксиоме Эйнштейна.

На теореме 10 и лемме 3 покоится существование метода измерения метрики физического мира, имеющего принципиальное значение. Он сводится к выбору десяти событий P_a в окрестности события P_0, принадлежащеи области применимости формулы (I.42), которые вместе с P_0 образуют набор независимых событий, и измерению соответствующих собственных времен на мировой линии любой частицы, содержащей событие P_0. Тогда числа, являющиеся результатом измерения, выражают с помощью формул (I.42) и (I.44) компоненты метрического тензора в точке P_0 физического мира. Измерение метрики, следовательно, заключается в определенных измерительных операциях, независимых от метрики мира и строго локализованных на мировой линии измерительного прибора. Используемые световые линии не нарушают локальности измерения, так как в процесс непосредственного измерения вовлекаются только события пересечения их с мировой линией прибора, которые полностью определяются мировой линией прибора и событием отражения световой линии, но не зависят ни от конструкции прибора, ни от принципа измерения собственного времени. Принципиальная осуществимость такого измерения метрики переводит аксиому Эйнштейна из категории математических в категорию физических утверждений в том смысле, что метрическому тензору в каждой точке мира ставится в соответствие десять экспериментальных чисел, зависимость которых от априорных представлений о метрике ограничнвается аксиомой 1. Поэтому справедливость аксиомы Эйнштейна поддается непосредственному экспериментальному контролю. Итак, измерение метрики в окрестности данного события сводится к измерению собственного времени на какой-либо мировой линии, содержащей это событие. Поскольку существует множество событий, не принадлежащих данной временноподобной мировой линии, то для измерения метрики в окрестности всех событий некоторой конечной области мира необходимо, чтобы мировые линии измерительных приборов плотно заполняли измеряемую область. Непрерывное множество непересекающихся (или пересекающихся в конечном числе точек) временноподобных мировых линий, плотно заполняющих некоторую область физического мира и снабженных в каждой своей точке прибором для измерения собственного времени, будем называть (вслед за Вигнером) моллюском Эйнштейна. Теорема 11. Измерение метрики в окрестности любого события физического мира можно свести к измерению только промежутков собственного времени измерительного прибора, мировая линия которого содержит это событие, а измерение метрики как функции события заданной конечной области мира сводится к измерению метрики в окрестности события каждой мйровой линии произвольного моллюска Эйнштейна.

В идеальном случае для экспериментального нахождения метрики мира как функции события необходимо ее измерить в окрестности каждого события. Практически же достаточно измерить метрику в окрестности дискретного множества событий, образующих узлы настолько плотной четырехмерной решетки, чтобы оказалось возможным определить метрику между узлами путем интерполяции значений метрики в узлах. Плотность узлов в такой решетке зависит от заданной точности и степени гладкости метрического тензора.

27.1.6 6. Dimensionality of the Physical World

Коэффициенты при неизвестных и свободные члены алгебраических уравнений (I. 43) зависят от выбора одиннадцати независимых событий, поэтому и решение этих уравнений, вообще говоря, различно для различных наборов независимых событий. Аксиомой Эйнштейна предполагается независимость решения уравнений (I. 43) от набора событий, необходимая для того, чтобы решение можно было интерпретировать как метрический тензор физического мира. Поэтому метрическую природу непрерывного множества физических событий можно подвергнуть непосредственной опытной проверке. В четырехмерном метрическом пространстве в окрестности каждой точки существует десять и только десять независимых интервалов, а интервал между любыми двумя точками данной окрестности выражается через координаты этих точек и

десять интервалов, взятых в качестве независимых.

Вообще, в n-мерном метрическом пространстве имеется $\frac{n(n+1)}{2}$ независимых интервалов. Поскольку каждые две точки опредеЮт один интервал, то наименьшее число точек в окрестности данной точки пространства, определяющих $\frac{n(n+1)}{2}$ независимых интервалов, равно $n+1$. Эти точки образуют фигуру - n мерный симплекс. Задание $n+1$ вершин вместе с $\frac{n(n+1)}{2}$ сторонами какого-либо n-мерного симплекса эквивалентно заданию метрики. Однако задание сторон n-мерного симплекса естественно для математики, но не для физики - эти стороны должны быть измерены! Если же потребовать, чтобы все измерения в окрестности данного события были локализованы на мировой ли- нии частицы-прибора*, то задание вершин n-мерного симплекса не достаточно еще для измерения некоторых его сторон, не имеющих с мировой линией прибора общих тсчек. Поэтому наименьшее число точек в окрестности данного события, определяющих $\frac{n(n+1)}{2}$ независимых интервалов, которые имеют общую точку и могут быть измерены одним прибором, равно $\frac{n(n+1)}{2}+1$. В физическом мире число этих точек равно одиннадцати, поэтому любой набор одиннадцати независимых событий, определяющих десять независимых интервалов с одной общей точкой, соответствует одному метрическому тензору мира. Если имеются два набора независимых событий, для которых составлены уравнения (I. 43), то решение уравнений для одного из наборов, будучи подставлено в правую часть уравнений для другого, обращает последние в тождество, и наоборот. Это является следствием равенства размерности физического мира четырем.

Если бы существовало хотя бы два набора одиннадцати независимых событий, соответствующие измерения для которых привели бы к двум разным решениям уравнений (I. 43), то это означало бы, что размерность мира больше четырех, а события каждого из наборов принадлежат двум разным 4-мерным поверхностям объемлющего пространства. Независимо от сигнатуры n-мерного пространства, в которое был бы вложен физический мир в этом случае (в частности, сигнатура 5-мерного пространства может быть равна единице или трем), должны были бы существовать и такие наборы независимых событий, для которых детерминанты $g \equiv |g_{\mu\nu}|$, составленные из правых частей (I. 44), больше нуля. Тогда как изз равенства сигнатуры физического мира двум (аксиома Эйнштейна) следует, что для измерений влюбой точке физического мира должно быть $g<0$.

С другой стороны, в n-мерном метрическом прострaнстве детерминант метрического тензора отличен от нуля в окрестности любой точки пространства. Предположим противное. Пусть $g=0$,

Конечно, всякий реальный прибор не яв.яется математической точкой, а его история не описывается мировой линией Это-ндеализация, которая отражает предположенне о возможности измерений с помощью этого прибора в окрестности, выходящей за пределы собственного объема прибора, точнее, за пределы мировой трубки, представляющей собой псторию прибора в физическом мире. События - отражения световых линий (например, P_3 на рис. 1) - строго говоря, не являются частыо прибора для измерения интервала (см. 5), по крайней мере, не принадлежат его измеряющей или регистрирующей части. Непосредственно измеряютгя промежутки собственного времени между данным событием и событиями испускания и приема светового сигнала, поэтому измеряющим прибором являются часы для нзмерения собственного времени, а измерения локализованы в мировой трубке часов. Подобным образом измеряется, например, расстояние до Луны. Помещение с этой целью на Луне уголкового отражателя дает практические преимущества, но не является принципиальным. а μ и v пробегают значения от 1 до n. Тогда система алгебраических уравнений

$$g_{\mu\nu}\lambda^{\nu}=0$$

имеет отличное от нуля решение. Подставим это решение в дифференциальное уравнение

$$\lambda^{\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\nu}}=0$$

Обозначим $n-1$ независимых функций, удовлетворяющих последнему уравнению (Смирнов, 1965), через $\varphi_2, \varphi_3 \ldots, \varphi_n$ и рассмотрим преобразование координат

$$x'^1 = f(x), \quad x''^2 = \overset{\frown}{\mu}(x), \mu \neq 1$$

где функция f такова, что якобиан преобразования отличен от нуля. В новых координатах имеем

$$\lambda'^1 \neq 0, \lambda'^2 = \lambda'^3 = \cdots = \lambda'^n = 0$$

Так как

$$g_{\mu.\nu}\lambda^\nu = g'_{\mu l}\lambda'^1 = 0$$

То

$$g'_{\mu 1} = 0$$

Следовательно, интервал между любыми двумя точками пространства

$$ds^2 = g'_{i\nu}dx'^\mu dx'^\nu, \mu \neq 1 \text{ и } \nu \neq 1,$$

определяется только $n-1$ независимыми разностями координат. Равенство нулю детерминанта метрического тензора означает, таким образом, вырождение пространства, а именiо, уменьшение его размерности, по крайней мере, на единицу. Фактическая размерность пространства равна рангу матрицы $(g_{\mu\nu})$.

Интересные соображения относительно размерности физического мира привел Н. В. Мицкевич (1969). Оказывается, гипотетические миры, размерность которых меньше четырех, противоречат физическим представлениям, если в них постулировать уравнения Эйнштейна. Тем более, что априорных противор.чий в мирах с размерностью большей четырех, вообще говоря, не cyniectвyer.

В одномерном мире уравнения Эйнштейна теряют смысл, так как тензор кривизны линии отсутствует.

Если $n = 2$, то тензор кривизны из-за условий симметрии имеет только один независимый компонент R_{1212}. Сворачивая тензор кривизны сначала по двум индексам, а затем по четырем, видим,

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{g}g_{\mu\nu}R_{1212},$$
$$R = -\frac{2}{g}R_{1212}.$$

Поэтому в двумерном мире

$$R_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

Подставляя это выражение в уравнение Эйнштейна (I.17), находим, что двумерный мир - пустой, тензор энергии-импульса материи в нем всюду равен нулю.

В трехмерном мире тензор кривизны является линейной однородной алгебраической формой относительно тензора Риччи, поэтому он равен нулю всюду, где равен нулю тензор Риччи, т. е. согласно уравнениям Эйнштейна, во всех тех точках, в которых отсутствует тензор энергии-импульса материи. Таким образом, в трехмерном мире гравитационное поле отсутствует вне веществва, в нем отсутствует гравитационное взаимодействие тел через пустоту, поэтому отсутствуют планетные системы типа Солнечной.

27.1.7 7. Reference Frames. Absolute Acceleration

Измерение метрики мира возможно, если только задан моллюск Эйнштейна (теорема 11). Задание метрики без указания моллюска отсчета лишено смысла: метрика как функция события, измеренная относительно различных моллюсков отсчета, различается. Моллюск отсчета совпадает, по сути с системой отсчета классической физики. В самом деле, под системой отсчета в классической физике понимается, как правило, жесткая система тел, относительно которой рассматривается движение всякого тела, снабженная,

помимо часов, еще и жесткими эталонами длины. Если отбросить требование жесткости, смысл которого в общем случае (произвольное движение тел отсчета и произвольное поле тяготения) по меньшей мере неопределен, и наличия эталонов длины, в которых нет необходимости при измерении метрики, то система отсчета и моллюск отсчета есть одно и то же. При этом мировые линии элементов системы отсчета есть мировые линии моллюска Эйнштейна, а между частицами моллюска Эйнштейна могут существовать связи типа упругих сил, или каких-либо других взаимодействий.

Чтобы задать систему отсчета или моллюск Эйнштейна, достаточно указать систему частиц или все элементы сплошной среды, составляющие систему отсчета. Однако полное описание системы отсчета включает динамические переменные как функции события и связи между ними. К ним относятся плотность массы, 4-вектор скорости, тензор напряжений, плотность электрических зарядов, если система отсчета содержит заряженные элементы, и т. д. И если связи между динамическими переменными могут и должны быть заданы априори, то динамические переменные системы отсчета в общем случае задать произвольно до измерения метрики нельзя. Этому есть две причины. Во-первых, уравнения движения и связи содержат, помимо динамических переменных системы отсчета, еще и метрический тензор и его производные, вовторых, частицы или элементы вещества, составляющие систему отсчета, вместе с остальным веществом мира являются источником гравитационного поля, т. е. определяют через уравнения Эйнштейна ту или иную зависимость метрического тензора от события. Поэтому полное описание системы отсчета возможно только при совместном решении уравнений Эйнштейна, уравнений движения и связей для всего вещества мира, включая и вещество системы отсчета. При этом динамические переменные системы отсчета как функции события будут зависеть от данных Коши не только для вещества самой системы отсчета, но и для метрики и остального вещества мира, описываемых и измеряемых относительно этой системы отсчета. Характер и движение системы отсчета, относительно которой измеряется движение любого тела, зависят от распределения и движения всей материи мира. Это принципиально отличается от представлений классической физики, согласно которым характер и движение системы отсчета могут быть заданы наперед произвольным образом.

Считается, что движение любого тела имеет смысл только относительно заданной системы отсчета, как и движение самой системы отсчета - относительно другой. «...движение, - пишет Эйнштейн (1948), - с точки зрения возможнсго опыта всегда представляется как движение одного тела относительно другого (например, автомобиля относительно дороги или Земли относительно Солнца и неподвижных звезд). Движение никогда не наблюдается как «движение по отношению к пространству», иначе говоря, как «абсолютное движение». «Принцип относительности» в наиболее широком смысле состоит в следующем утверждении: все физические явления имеют такой характер, что не дают основания вводить понятие «абсолютного движения», или более коротко, но менее точно, «абсолютного движения не существует».

В сущности, понимание движения как только относительного - относительно чего-то - перекочевало в науку из повседневных наблюдений и кажется самоочевидным. Хотя Ньютон (1686, кн. I, Поучение к опред.) и различает относительное и абсолютное движения, абсолютное движение по Ньютону - это тоже относительное движение, но не относительно других тел, а относительно абсолютного пространства. Именно потому, что движение с самого начала понимается Ньютоном как только относительное, он вынужден ввести понятие абсолютного пространства. Абсолютное пространство Ньютона ненаблюдаемо, «..ибо части того не- подвижного пространства, о котором говорилось и в котором совершаются истинные движения тел, не ощущаются нашими чувствами». Логика, следуя которой Ньютон вводит абсолютное пространство, такова. Явления природы обнаруживают существование усккорения тела (опыт с ведром) безотносительно к другим телам - ускорение свидетельствует о движении тела - движение имеет смысл только относительно чего-либо - ускоренное тело движется относительно абсолютного пространства. Мах (1883) проанализировал механику Ньютона, исходя из того же постулата относительности движения: «О движении тела K можно судить лишь по отношению к другим телам $A, B, C, ...$ - и пришел к справедливому выводу, что существование абсолютного пространства не следует с необходимостью из существования, например, центробежных сил. Альтернативной точкой зрения, больше соответствующей исходному представлению об относительности движения, является предположение Маха, согласно которому появление сил инерции

обусловлено движением рассматриваемого тела относительно далеких звезд или центра масс Вселенной, а если нет абсолютного пространства, то нет и абсолютного движения как движения относительно абсолютного пространства. Таким образом, из движения исключается всякий элемент абсолютности, движение может быть только относительным. На основании этого предположения Маха поздиее был сформулирован принцип Маха; выражающий в той или иной форме влияние всех масс Вселенной и их распределения на инертность каждого изолированного тела.

Мах безусловно прав, когда указывает на недостаточность посылки для логического заключения о существовании абсолютного пространства. С другой стороны, развитие физики, кардинально изменившее ньютоновские представления о пространстве и времени (специальная, затем общая теория относительности), до сих пор идет как в экспериментальном, так и в теоретическом отношении по пути, на котором предположение Маха не находит места. Методы электронного и ядерного парамагнитного резонанса и эффект Мессбауэра позволили исследовать возможную анизотропию массы, т. е. завнсимость инертной массы от ориентации относительно центра Галактики (Radford, Hugnes, 1959; Harvey, Kamper, Lea. 1960; Sherwin et al., 1960; Beltran-Lopez, Robinson. 1961; Beltran-Lopez, Robinson, Hugnes, 1961; Drever, 1961). Следствием принципа Маха и может быть (хотя и не обязательно) именно анизотропия инертной массы. На возможность измерения ее с высокой точностью в условиях современной экспериментальной техники обратили внимание Коккони и Салпетер (Cocconi, Salpeter, 1958, 1960). Эксперименты (Drever, 1961), точность которых была доведена до $5 \cdot 10^{-23}$ (беспрецедентная точность в экспериментальной физике), не обнаружили какого-либо влияния неоднородности распределения звезд в Галактике на инертность атомов или ядер. Таким образом, экспериментальные данные не подтверждают принципа Маха. Из этого не следует, конечно, что они противоре- чат ему. Возможно, что влияние Галактики на инертность изолированного тела ничтожно мало по сравнению с влиянием остальных масс Вселенной, поэтому достигнутая точность измерения недостаточна. Соответствующих оценок не существует, так как неизвестно, каким именно образом масса вещества во Вселенной определяет инертность тел. И, наконец, из принципа Маха не следует с необходимостью анизотропия массь - она есть лишь возможный, но не обязательный вариант обусловленности инертности тел Вселенной Остается признать поэтому, что эксперименты никак не прояснили вяпроса об истинности принципа Маха.

Но и теоретической мысли также не удалось расчистить места в физике для принципа Маха. Первоначальные надежды Эйнштейна воплотить его в будущей релятивистской теории тяготения не оправдались. По крайней мере, общая теория относительности не несет в себе никаких следов влияния идей Маха. Это связано с тем, что она удовлетворяет принципу соответствия 1. Выделим некоторое событие на мировой линии рассматриваемого изолированного тела. В окрестности этого события существует v-область (определение 5) гравитационного взаимодействия, которая при любой наперед заданной точности является областью мира Минковского. В соответствии со специальной теорией относительности внутри v-области рассматриваемое тело во всех взаимодействиях проявляет инертность, пропорциональную массе покоя тела. Именно эта масса измеряется в опыте, в частности в экспериментах по исследованию анизотропии массы. Но ни само существование v-области в окрестности события тела, ни то, что геометрия v-области вполне определенная-псевдоевклидовая с сигнатурой, равной двум,-не зависят как от массы остального вещества во Вселенной, так и от его распределения. В основе общей теории относительности, генетически связанной с механикой Ньютона, лежит то же представление об инертности тел, и если она адекватна действительности, то принцип Маха, при всей его привлекательности с теоретико-познавательной точки зрения, является ложным.

Отказавшись от концепции Ньютона об абсолютном пространстве, Эйнштейн пытается по-своему релятивизировать ускорение, абсолютность которого, по его мнению, противоречит здравому смыслу, вернее - исходному постулату относительности движения. С этой целью уже в 1907 г. он формулирует принцип эквивалентности, к обсуждению которого обращается почти в каждой из последующих статей, посвященных теории относительности. Суть принципа эквивалентности заключается в следующем. Пусть имеются две системы отсчета S и S'. Предположим, что S - инерциальная система отсчета, помещенная в однородное гравитационное поле. Оно сообщает всем телам одинаковые ускорения относительно системы S (выражение второе опыта Этвеша). В

системе S' поле тяготения отсутствует, но она ускорена в направлении, противоположном действию гравитацнонного по- ля. Ускорение S' равно ускорению тел в системе S. Согласно классической механике, картины движения тел относительно каждой из систем S и S' одинаковы, поэтому никакими наблюдениями над поведением тел невозможно определить, какая из систем отсчета инерциальная в гравитационном поле, а какая ускоренная в отсутствие поля. Эта неразличимость и выражается принципом эквивалентности*. Если это так, то абсолютное ускорение лишается смысла, ибо одинаково верными будут оба высказывания о системе отсчета S': «система отсчета S' - ускоренная» и «система отсчета S' - инерциальная (неускоренная), но она находится в соответствующем поле тяготения».

Ярко и образно эта связь между принципом эквивалентности н относительностью ускорения описана Эйнштейном и Инфельдом (1938). После выяснения несправедливости евклидовой геометрии трехмерного пространства на вращающемся диске они предлагают примечательный диалог между двумя физиками C и H: первый, придерживающийся классических представлений, покоится в инерциальной системе отсчета, второй - адепт общей теории относительности, неподвижен относительно вращающегося диска.

«С. В вашей системе евклидова гесметрия несправедлива. Я следил за вашими измерениями и согласен, что отношение длин двух окружностей в вашей системе не равно отношению их радиусов. ...Ваш диск находится в абсолютном движении и с точки зрения классической физики образует недопустимую систему, в которой законы механики несправедливы.

Н. Я не хочу ничего слышать об абсолютном движении. Моя система так же хороша, как и ваша. Что я заметил, так это ваше вращение по отношению к моему диску. Никто не может мне запретить отнести все движения к моему диску.

С. Но не чувствовали ли вы странной силы, стремящейся удалить вас от центра диска? Если бы ваш диск не был быстро вращающейся каруселью, то вы не наблюдали бы двух вещей. Вы не заметили бы силы, толкающей вас к границе диска, и не заметили бы, что евклидова геометрия неприменима в вашей системе. Не достаточны ли эти факты, чтобы убедить вас, что ваша система находится в; абсолютном движении?

Н. Вовсе нет! Я, конечно, заметил оба факта, упомянутые вами, но я полагаю, что оба они вызываются сильным полем тяготения, действующим на мой диск. ...Принимая какую-либо систе-

Близкое по содержанию, но не по форме, утверждение имеется у Ньютона (кн. I, следствие VI): «Если несколько тел, движущихся как бы то ни было друг относительно друга, будут подвержены действию равных ускоряющих сил (вызывающих равные ускорения - Л. А.), направленных по параллельным между собою прямым, то эти тела будут продолжать двигаться друг относительно друга так же, как если бы сказанные си.пы на них не действовали». Эйнштейн не только сформулировал механический принцип эквивалентности в явной форме, но и обобщил его до любых физических явлений. му координат, я должен одновременно предположить наличие соответствующего поля тяготения и его влияние на твердые тела и часы».

Каково же действительное место принципа эквивалентности в современной физике? Во-первых, принцип эквивалентности следует понимать только в локальном смысле. На бесконечности поля тяготения, по крайней мере, обусловленные конечными и ограниченными источниками, исчезают, тогда как силы инерции либо неограниченно растут, либо, оставаясь конечными, не обращаются в нуль. Различное поведение на бесконечности ограничивает принцип эквивалентности наблюдениями в конечной области мира.

Во-вторых, принцип эквивалентности противоречит электродинамике. Пусть имеются два одинаковых набора электрических зарядов с различными массами. Поместим один набор в гравитационное поле и рассмотрим его в инерциальной системе отсчета S, а другой - в ускоренной системе S', соответствующей этому полю тяготения в духе принципа эквивалентности. Если относительные положения и скорости зарядов в том и другом наборе в начальный момент совпадают, то через некоторый интервал времени они будут разными. Это объясняется тем, что электромагнитное излучение зарядов в системе S, ускоряемых гравитационным полем, отличается от излучения зарядов второго набора, только рассматриваемых в ускоренной системе S', но не подвергающихся никакому внешнему ускорению. На заряды в S действуют дополнительные силы реакции излучения, зависящие от величины электрических зарядов, но не зависящие от их масс, поэтому дополнительные ускорения,

приобретаемые зарядами, различны для различных масс зарядов. В системе S' дополнительные силы отсутствуют. Различное поведение зарядов в S и S' можно обнаружить, таким образом, локальными наблюдениями над их относительными положениями и скоростями, не обращаясь к измерениям в волновой зоне, что противоречило бы локальному характеру принципа эквивалентности. Следовательно, системы S и S' различаются, если обратиться к электромагнитным явлениям.

В-третьих, принцип эквивалентности противоречит общей теории относительности. Согласно общей теории относительности, существует инвариантный критерий наличия или отсутствия поля тяготения. Кривизна области мира отлична от нуля, если в этой области есть поле тяготения, и равна нулю, если поля тягстения нет. Равенство или отличие от нуля кривизны мира и, более того, ее значение не зависит от системы отсчета, в которой она измеряется. Следовательно, достаточно измерить (см. теорему 19) кривизну мира в описанных выше системах S и S', чтобы обнаружить их физическое различие. В системе S кривизна мира не равна нулю, поэтому относительные положения и скорости двух свободных частиц в ней изменяются так, что в соответствии с уравнениями (I.78) де- виации геодезических вторая производная скорости отлична от нуля и обусловлена именно действием поля тяготения*. В системе S' кривизна мира равна нулю, и поведение двух соответствующих свободных частиц таково, что вторая производная их относительной скорости равна нулю. Кривизна мира, таким образом, является локальной, а не интегральной, характеристикой системы. Для измерения ее достаточно иметь две частицы в конечной области мира.

В обоснование принципа эквивалентности часто приводятся доводы двоякого рода. Первый довод связан с необходимостью для измерения кривизны, по крайней мере, двух частиц. Локальность тогда понимается в том смысле, что измерение должно быть ограничено одной единственной частицей. Предполагается, очевидно, что одна частица должна быть измеряющим прибором и измеряемым объектом. Такую точку зрения нельзя признать физической, ибо предпосылкой всякого физического суждения является существование по меньшей мере двух частиц, либо одного тела, обладающего частями. Другой довод также основан на неоправданном сужении понятия локальности. Принцип эквивалентности сводится здесь к утверждению, что физические проявления поля тяготения и соответствующих сил инерции неразличимы, если игнорировать высшие производные, например, вторые производные скоростей. В таком выражении принцип эквивалентности бесспорен, как, впрочем, бесспорно и другое утверждение физические проявления любых силовых полей неразличимы (и в этом смысле гравитационное поле эквивалентно, например, электромагнитному), если игнорировать первые производные скоростей частиц. В сущности, здесь следует говорить не о локальности, а о приближенном выполнении принципа эквивалентности. Неточный же принцип не может лежать ни в основе теории, в которой он и оказывается приближенным, ни в основе решения вопроса об относительности или абсолютности ускорения.

Парадоксально, но факт, что принцип эквивалентности, сформулированный и использованный Эйнштейном при релятивизации теории тяготения Ньютона, в механическом варианте строго выполняется в теории Ньютона, но не имеет места в теории Эйнштейна. Трудно поэтому не согласиться со своеобразным определением роли и места принципа эквивалентности в истории физики, которое дал Синг (1963): «Принцип эквивалентности выполнил важные обязанности повивальной бабки при рождении общей теории относительности, но, как заметил Эйнштейн, младенец никогда не вырос бы из пеленок, если бы не идея Минковского. Я предлагаю похоронить повивальную бабку с соответствующими почестямн...».

Отметим, что в примере с зарядами реакция электромагнитного излучеия, которая, в конечнсм счете, и позволяет различать системы S и S', тоже определяет значение второй производной скорости заряда. Уместно теперь закончить диалог между двумя физиками следующим образом:

С. Известна ли вам теория тяготения Эйнштейна? Я провел измерение кривизны мира в своей системе отсчета и обнаружил, что она равна нулю. Если вы проведете то же измерение на вашем диске, то получите также нулевую кривизну. А поэтому ваше предположение, что на вашем диске действует сильное поле тяготения, противоречит теории Эйнштейна. Если теория Эйнштейна истинна, то вам останется только признать ваше абсолютное вращение.

Ошибка и Ньютона, и Маха, а затем и Эйнштейна заключается в том, что они исходили из априорного постулата относительности движения, некритически

перенесенного в физику из обыденных представлений. Вопрос же об абсолютности или относительности движения, как и любой физической величины, должен решаться на основе анализа существующих или принципиально возможных способов измерения безотносительно к чему либо величин, характеризующих движение. Если движение допускает такое измерение, то оно абсолютно, если нет, то - относительно. Например, потенциал электрического поля - величина относительная, так как любое измерение значенйя потенциала в данной точке пространства сводится к сравнению его со значением потенциала в какой-либо другой точке, тогда как напряженность-абсолютная величина, характеризующая электрическое поле в данной и только данной точке.

Движение тела как физическое понятие включает в себя три элемента: положение тела в данный момент времени, скорость и ускорение. Рассматриваемое тело либо составляет часть (элемент) системы отсчета, либо не составляет. В последнем случае положение его определяется относительно тел системы отсчета и зависит от выбора той или иной системы отсчета. Положение тела является относительной величиной, характеризующей движение. Формально это проявляется в следующем.

Пусть положение тела в данный момент - событие P - представляется четырьмя числами-координатами (x^0, x^1, x^2, x^3). Вообще говоря, эти числа сами по себе еще не определяют событие P, так как одна и та же четверка чисел, отнесенная к различным моллюскам отсчета, определяет различные события. Выделим в заданной системе отсчета некоторое событие $\bar{P}$, которое в той же координатной сетке представлено четырьмя числами $\left(\overline{x^0}, \overline{x^1}, \overline{x^2}, x^3\right)$. Тогда 4-вектор $(\overline{PP})$ и определяет положение тела в заданной системе отсчета. В другой системе отсчета выделенное событие $\tilde{P}\left(\tilde{x^0}, \tilde{x^1}, \tilde{x^2}, \tilde{x^3}\right)$ отличается, вообще говоря, от события $\bar{P}$, поэтому и 4-вектор $(\widetilde{P}P)$, определяющий положение тела в ней, отличается от 4-вектора $(\bar{P}P)$. Таким образом, положение тела является относительным не из-за произвольности координат события, а из-за различия 4-векторов, определяющих событие в разных системах отсчета. Координаты события остаются произвольными даже в одной и той же системе отсчета, тогда как положение в этой системе отсчета фиксируется вполне однозначно.

Вообще говоря, следует различать системы координат (или координатные сетки) и системы отсчета. Система координат есть определенное соотнесение чисел событиям мира - арифметизация. пространства (Веблен, У айтхед, 1949). Но это соотнесение приобретает смысл, если указана система отсчта, в которой оно производится. В каждой заданной системе отсчета можно по-разному соотносить событиям мира четверки чисел, т. е. вводить различные координатные сетки и временные оси. Поэтому в заданной системе отсчета возможны преобразования координат (ЗельмаНОВ, 1956)

$$x'^{2} = x'^{2}\left(x^{\alpha}\right), \quad \frac{\partial x'^{l}}{\partial x^{0}} = 0$$

Множество всех координатных сеток, связанных преобразованиями группы (I.45), относится к одной и той ж: системе отсчета. Разные системы отсчета отличаются состоянием движения. Переход от одной системы отсчета к другой осуществляется в общем случае следующими формулами:

$$x'^{\mu} = x'^{\mu}\left(x^{\alpha}\right), \quad \frac{\partial x'}{\partial x^{0}} \neq 0$$

Преобразования (I.45) и (I.46) являются подгруппами общей группы

$$x'^{\mu} = x'^{\mu}\left(x^{\alpha}\right)$$

относительно которой основная квадратичная форма мира инвариантна, а уравнения Эйнштейна и остальные уравнения физики ковариантны.

Лемма 4. В каждой заданной системе отсчета три пространственных контравариантных компонента произвольного 4-вектора V^{α} являются контравариантными компонентами вектора, а величины $V_i - \frac{g_{0l}}{g_{00}}V_0$ и $V_0/\sqrt{-g_{00}}$, составленные из его ковариантных компонентов, - соответственно ковариантными компонентами вектора и скаляром.

Д ок а з а т е л в с т в о. Допустимые преобразования координат, не изменяющие заданной системы отсчета, ограничиваются, по определению, группой (I.45). Применив

к ней формулы преобразования компонентов 4-вектора и метрического тензора, легко убедиться в справедливости леммы.

Рассмотрим 4-вектор скорости тела. Его пространственные контравариантные компоненты u^l составляют, согласно лемме 4, вектор. Этот вектор пропорционален скорости. Так как u^α-вре- менноподобный 4-вектор, то его пространственные компоненты существенно зависят от системы отсчета в том смысле, что для любого 4-вектора скорости, пространственные компоненты которого в данной системе отсчета отличны от нуля, существует система отсчета такая, что $u^i = 0$. Действительно, пусть в заданной системе отсчета имеется 4-вектор u^α, причем $u^i \neq 0$. Как известно, подходящим преобразованием координат в n-мерном пространстве всегда можно обратить в нуль $n-1$ компонент n-вектора (Эйзенхарт, 1948). Временной компонент u^0 ни в какой системе координат не равен нулю, в противном случае была бы нарушена временноподобность u^2. Следовательно, существует преобразование координат, обращающее в нуль три пространственных компонента u^l. Поскольку они ведут себя относительно группы (I.45) как компоненты вектора (лемма 4), то это преобразование принадлежит к группе (I.46). Поэтому, если $u^l \neq 0$ в заданной системе отсчета, то преобразование координат, обращающее u^l в нуль, переводит его из заданной системы отсчета в другую. Таким образом, если скорость тела отлична от нуля в одной системе отсчета, то существует другая система отсчета, в которой скорость тела равна нулю, и наоборот. Модуль же 4-скорости вообще не характеризует данное тело, так как для- всех частиц и любых мировых линий он всегда равен -1. Скорость тела, следовательно, является относительной величиной, значение которой имеет смысл только относительно заданной системы отсчета.

Каждый элемент системы отсчета или каждая частица моллюска Эйнштейна обладает 4-вектором скорсти, который в этой системе отсчета имеет вид

$$u^l = 0, \quad u^0 = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}, \quad u_\alpha = \frac{g_{0a}}{\sqrt{-g_{00}}}.$$

В результате измерения метрического тензора мира можно получить в соответствии с последними формулами значения 4-вектора скорости элементов системы отсчета, и наоборот, значения компонентов 4-вектора скорости частицы определяют четыре компонента $g_{0\alpha}$ метрического тензора мира в системе отсчета, элементом которой она является.

Теорема 12. Значения четырех компонентов $g_{0\alpha}$ метрического тензора мира непосредственно зависят от системы отсчета, а именно, от 4-вектора скорости ее элементов и координатной сетки, выбранной из множества принадлежащих этой системе отсчета, и, вообще говоря, не содержат прямой информации о гравитационном поле.

Это не означает, конечно, что функции g_{0a} не могут зависеть, например, от массы источников гравитационного поля, но зависимость эта, если она имеет место в конкретной системе отсчета, достаточно случайна, ибо в другой системе отсчета такая зави- симость может полностью исчезнуть. Нетривиальный смысл теоремы 12 состоит в том, что значения некоторых величин, например, кривизна мира, определяются только гравитационным полем и никак не зависят от состояния движения системы отсчета, тогда как для любых двух миров существуют, по крайней мере, две системы отсчета, в которых компоненты g_{0a} их метрических тензоров равны. С другой стороны, в заданной системе отсчета нельзя преобразованием координат свести именно компоненты $g_{0\alpha}$ метрики к любым наперед заданным функциям. Этого можно достичь, если преобразование относится к общей группе (I.47), т. е. затрагивает наряду с координатной сеткой и систему отсчета. Последнее же представляет с точки зрения наблюдаемых экспериментальной физики переход от одной физической реальности к другой.

Из четырех компонентов g_{0x} компоненты g_{00} и g_{0i} в разной степени характеризуют системы отсчета и координатные сетки, принадлежащие системе отсчета.

Лемма 5. В любой системе отсчета существуют координатные сетки такие, что компонент g_{00} метрического тензора мира равен отрицательной единице.

Если в заданной системе отсчета $g_{00} \neq -1$, то легко добиться выполнения этого равенства преобразованием координат

$$x'^0 = \int V - g_{00}dx^0 + f\left(x^i\right), \quad x'^i = x'\left(x^k\right),$$

принадлежащим к группе (I.45).

Введем аксиальный вектор $\vec{\chi}$ через дуальный ему антисимметричный тензор

$$\chi_{lk} = \frac{1}{2g_{00}V - g_{0i}} \left[g_{0k}g_{0i,0} - g_{0i}g_{0k,0} + g_{00}\left(g_{0k,i} - g_{0i,k}\right) + \right.$$
$$\left. + g_{0i}g_{00,k} - g_{0k}g_{00,i}\right]$$

и полярные векторы $\vec{\rho}$ и $\vec{\pi}$ через их ковариантные

$$\varphi_i = \frac{1}{2g_{00}}\left(g_{00,t} + \frac{g_{0i}}{g_{0i}}g_{00,0} - 2g_{0i,0}\right)$$

и контравариантные компоненты

$$\pi^i = -\frac{1}{g_{i\omega}}\Gamma^l_{10}$$

Компоненты векторов $\vec{\rho}$ и $\vec{\pi}$ взаимно связаны равенствами

$$\pi^i = g^{ik}\rho_k,$$
$$\rho_i = \left(g_{ik} - \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{(k)}}\right)\pi^k.$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что правые части (I.49)-(I.51) преобразуются относительно группы (I.45) как тензоры второго ранга и ко- и контравариантные векторы соответственно.

Лемма 6. В заданной системе отсчета преобразованием координатной сетки можно обратить в нуль компоненты g_{0l} метрического тензора мира в том и только том случае, если в этой системе отсчета $\chi_{ik} = 0$.

Докк а а т ел ьст во. Пусть $g_{0i} \neq 0$. Рассмотрим преобразование координат из группы (I.45). Если $g'_{0l} = 0$ и только в этом случае можно записать уравнения

$$\frac{\partial x'^0}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^0}{\partial x^0}\frac{g_{0i}}{g_{00}},$$

определяющие координату x'^0. Необходимые и достаточные условия совместности этих уравнений (Эйзенхарт, 1947) приводят к равенству

$$g_{00}\left(g_{\theta i,k} - g_{0k,l}\right) + g_{0k}g_{00,l} - g_{0l}g_{00,k} + g_{0i}g_{0k,0} - g_{0k}g_{0i,0} = 0$$

что и доказывает лемму.

Лемма 7. Для того чтобы в заданной системе отсчета существовала координатная сетка, в которой одновременно выполнялись бы равенства $g_{00} = -1$ и1 $g_{0l} = 0$, необходимо и достаточно тождественное обращение в нуль обоих векторов $\vec{\rho}$ и $\vec{\chi}$. Если эта координатная сетка существует, то она единственная.

Доказательство аналогично предыдущему.

Векторы $\dot{\rho}$ и $\vec{\chi}$ определенным образом характеризуют системы отсчета. Системы отсчета, в которых $\vec{\chi} = 0$, уместно называть синхронными* (Арифов, 1965).

Четырехвектор ускорения тела или частицы определяется как абсолютная производная 4-вектора скорости

$$w^\mu = \frac{\delta u^\mu}{\delta\sigma} = \frac{du^\mu}{d\sigma} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta$$

В отличие от 4-вектора скорости вектор $^\alpha$ пространственноподобный, так как он ортогонален u^α, и его модуль является индивидуальной характеристикой движения тела. Пространственные компоненты ^{l} образуют, согласно лемме 4, в каждой системе отсче-

Не следует путать их с синхронными (или, что то же самое, нормальными гауссовыми) системами координат (Ландау, Лифшиц, 1973), определяемыми условиями $g_{00} = -1, g_{0t} = 0$. Как видно из леммы 7, указанные условия выделяют специальные координатные сетки в классе систем отсчета, являющемся подклассом синхронных, а именно, в классе неускоренных синхронных систем отсчета. та вектор. Вектор w^l

пропорционален вектору ускорения тела, а модуль 4-вектора ускорения равен абсолютному значению ускорения. Ускорение тела поэтому - величина абсолютная, не зависящая от системы отсчета, относительно которой она измеряется. Во-первых, абсолютное значение ускорения как модуля 4-вектора инвариантно при преобразованиях координат из общей группы (I.47) и одинаково при измерениях в различных системах отсчета. Во-вторых, если вектор ускорения w^l отличен от нуля в какойлибо одной системе отсчета, то никаким преобразованием координат (I.47) его нельзя обратить в нуль, так как это нарушило сы пространственноподобность 4-вектора ускорения. Если вектор ускорения отличен от нуля в одной системе отсчета, то он отличен от нуля в любой другой системе отсчета, и наоборот, если он равен нулю в одной, то равен нулю в любой другой системе отсчета.

В собственной системе отсчета, в которой тело «покоится», т. е. положение его неизменно, а скорость равна нулю, 4-вектор ускорения удовлетворяет равенствам

$$\left.\begin{array}{c} w^i = \pi^i, w_l = p_i, w^0 = -\frac{g_{0i}}{g_{00}}\pi^l, \\ w_0 = 0, \quad w^\alpha w_\alpha = p_l \pi^l, \end{array}\right\}$$

Поэтому векторы $\vec{p}$ или $\vec{\pi}$ представляют собой абсолютное ускорение тела в собственной системе отсчета либо абсолютное ускорение элементов самой -системы отсчета или частиц, принадлежащих моллюску Эйнштейна. В этом состоит физический смысл векторов $\vec{\rho}$ и $\vec{\pi}$. Равенство или отличие от нуля этих векторов означает неускоренность или ускоренность системы отсчета.

Равенства (I.53) позволяют дать простой способ измерения абсолютного ускорения тела и относительно той системы отсчета, в которой оно покоится. Для измерения ускорения в этом случае достаточно измерить метрический тензор мира и составить из его компонентов векторы в соответствии с формулами (I.50).

Теорема 13. С физической точки зрения движение тела определяется тремя элементами: положением тела, его скоростью и ускорением. Положение и скорость тела являются относительными величинами, имеющими смысл только относительно заданной системы отсчета, их значения существенно зависят от системы отсчета, в которой они измеряются. Ускорение тела является абсолютной величиной, смысл и значение которой не зависят от системы отсчета. Направление абсолютного ускорения определяется в заданной системе отсчета вектором w^t, а его абсолютное значение равно модулю 4-вектора ускорения. В собственной системе отсчета, относительно которой тело покоится, абсолютное уско- рение тела параллельно вектору $\vec{\pi}$, квадрат абсолютного значения ускорения совпадает со скалярным произведением векторов $\vec{\rho}$ и $\vec{\pi}$, а измерение ускорения сводится к измерению метрики мира.

27.1.8 8. Fermi Coordinates

В теории относительности широко используются различные специальные системы координат. К ним относятся геодезические в точке, римановы, нормальные (Петров, 1961), полугеодезические или нормальные гауссовые (Сакс, 1966) и др. Для решения некоторых задач удобны специальные координаты, которые будем называать координатами Ферми (в частном случае они являются геодезическими вдоль заданной кривой, впервые введенными Ферми).

Пусть в прооизвольных координатах некоторая неизотропная кривая γ задана параметрическими уравнениями $x^\alpha = x^\alpha(\sigma)$. Предположим для определенности, что кривая временноподобная. Введем в каждом событии кривой четверку ортонормированных векторов (тетраду) u^α, $\xi^\alpha_{(l)}$ (латинский индекс в скобках нумерует 4-векторы ξ^α). По определению

$$u^\alpha u_\alpha = -1, \quad u^\alpha \xi_{(i)\alpha} = 0,$$
$$\xi^\alpha_{(i)} \xi_{(k)\alpha} = \begin{cases} 1, i = k, \\ 0, \qquad i \neq k. \end{cases}$$

Рассмотрим степенную функцию трех незввисимых аргументов $\boldsymbol{z}^l$

$$x^\alpha = x^\alpha(\sigma) + \xi^\alpha_{(l)} z^l - \frac{1}{2}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}(\sigma)\xi^\mu_{(k)}\xi^\nu_{(n)} z^k z^n + \cdots,$$

определенную в каждом событии γ, и положим

$$z^0 = \sigma.$$

Эта функция осуществляет отображение каждого набора чисел $z^\alpha\{z^0, z^i\}$ на множество событий $\{x^\alpha\}$, поэтому (I.55) можно интерпретировать как преобразование координат Ферми z^α в координаты x^α. Допустимость такого преобразования легко доказать. Действительно, уравнение заданной кривой т в координатах Ферми имеет вид $z^i = 0$, поэтому из (I.55а) следует

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial z^l|_\gamma} = \xi^\alpha_{(i)}(\sigma), \quad \frac{\partial x^\alpha}{\partial z^0|_\gamma} = u^\alpha.$$

Так как 4-векторы тетрады линейно независимы, то детерминант матрицы преобразования отличен от нуля на γ, а в силу непрерывности отличен от нуля и в окрестности γ. Следователь- но, уравнения (1.55) однозначно разрешимы относительно z^α по крайней мере в малой окрестности γ и допускают обратное преобразование $x^\alpha \to z^\alpha$.

Координаты Ферми имеют следующие полезные для их применения свойства.

Начало системы координат перемещается вдоль заданной мировой линии γ, а временная ось совпадает с осью собственного времени на γ :

$$z^l_{I_\gamma} = 0, \quad z^0 = \tau_{1_\gamma} + \text{ const.}$$

Вдоль γ метрический тензор мира приведен к каноническому виду

$$g_{\mu\nu|_\gamma} = \begin{cases} -1, \mu = \nu = 0, \\ 0, \mu \neq \nu, \\ 1, \mu = \nu = 1, 2, 3, \end{cases}$$

поэтому его частные производные любого порядка по временной координате равны нулю вдоль γ. ствам

Первые производные метрики на γ удовлетворяют равен-

$$g_{00,\,i|_\gamma} = -2w_i,$$
$$(g_{0n,k} + g_{0k,n})_\gamma = 0,$$
$$(g_{0n,k} - g_{0k,n})_\gamma = 2\chi_{kn|_\gamma},$$
$$g_{lk,n_{|\gamma}} = 0.$$

Используя формулы преобразования компонентов символов Кристоффеля 2-го рода, можно показать, что в координатах Ферми

$$\Gamma^\alpha_{00|_\gamma} = w^\mu \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^\mu|_\gamma},$$
$$\Gamma^\alpha_{0k|_\gamma} = \frac{\delta\xi^2_{(k)}}{\delta\sigma}\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^\mu|_\gamma},$$
$$\Gamma^{\alpha\alpha}_{kn|_\gamma} = 0.$$

Из (I.60) сразу же следуют (I.57б и г), а из (I.49), (I.50) и (I.53) - (I.57 а и в), если применить к ним второе свойство координат Ферми.

Вторые производные временного компонента метрики выражаются формулой

$$g_{00,\,ik|_\gamma} = -2\left(R_{0i0k} + w_i w_k - \chi_{in}\chi^{\cdot n}_k\right)_\gamma.$$

Ее легко получить, имея в виду второе и третье свойства координат Ферми и явное выражение тензора Римана-Кристоффеля через вторые производные метрики.

Перепишем равенства (I.59) в удобном для анализа виде. Учтем при этом, что

$$\frac{\partial z^0}{\partial x^\alpha|_\gamma} = -u_\alpha, \quad \frac{\partial z^i}{\partial x^\alpha|_\gamma} = \xi^{(i)}_\alpha.$$

Четырехвекторы $\xi^{(i)}_\alpha$ совпадают с 4-векторами $\xi_{(i)\alpha}$, но порядковые номера их записаны вверху для соблюдения правила сумм. Последние равенства следуют из (I.56). И, наконец, подставляя в формулы преобразования векторов тетрады все необходимые величины и учитывая (I.54), получаем выражения для векторов тетрады в координатах Ферми:

$$u^\alpha\{1,0,0,0\}, \quad \xi^\alpha_{(i)} = \delta^\alpha_i, \quad \xi^{(i)}_\alpha = \delta^i_\alpha$$

Имеем теперь

$$\Gamma^0_{0k|_\gamma} = -u_\alpha \frac{\delta\xi^\alpha_{(k)}}{\delta\sigma} = w_k,$$
$$\Gamma_{0k,n|_\gamma} = \frac{1}{2}\left(\xi_{(n)\alpha}\frac{\delta\xi^\alpha_{(k)}}{\delta\sigma} - \xi_{(k)\alpha}\frac{\delta\xi^\alpha_{(n)}}{\delta\sigma}\right) = \chi_{kn|_\gamma}.$$

Ортонормированная тройка векторов $\xi^\alpha_{(i)}$ испытывает вращение при перемещении вдоль заданной мировой линии γ. Это вращение разлагается на две составляющие: вращение в пространственно-временной плоскости и чисто пространственное вращение. Первая составляющая вращения определяется проекцией на γ приращения этих векторов при смещении вдоль γ и, как это видно из (I.64), совпадает с первой нормалью γ или абсолютным ускорением частицы, которой принадлежит мировая линия γ. Вторая составляющая определяется проекциями их приращения на 4-векторы ортонормированной тройки и совпадает с вектором $\vec{\chi}$.

Определение 6. Тензор χ_{ik}, определенный равенствами (I.49), описывает вращение системы отсчета. В собственной системе отсчета его компоненты равны проекциям приращения одних пространственнопсдобных 4-векторов тетрады на другие при переносе тетрады вдоль мировой линии элементов системы отсчета.

Если вектор $\vec{\chi}$ вращения равен нулю, то каждый пространственноподобный вектор тетрады при смещении вдоль γ получает приращение, направленное вдоль γ, но не имеющее проекции в ортогоналыном к γ направлении, т. е. испытывает перенос Ферми\олкера. Действительно, пусть $\chi_{ik} = 0$. Из (I.65) и (I.54) следует, что приращение векторов $\xi^\alpha_{(i)}$ ортогонально каждому из $\xi^\alpha_{(k)}$, поЭТОМУ

$$\frac{\delta\xi^\alpha_{(l)}}{\delta\sigma} = b_{(l)}u^\alpha$$

Для нахождения b умножим скалярно последнее равенство справа и слева на u^α и учтем (I.54). Получим

$$-\frac{\delta\xi^\alpha(l)}{\delta\sigma} = \xi_{(l)\beta}u^\alpha w w^\beta$$

Это равенство совпадает с условием переноса вектора $\xi^\alpha_{(l)}$ вдоль γ по Ферми-Уолкеру (Мицкевич, 1969), которое в общем случае произвольного, неортогонального γ 4-вектора A^λ имеет вид

$$\frac{\delta A'^\mu}{\delta\sigma} = A_\alpha\left(u^\mu w^\alpha - u^\alpha w^\mu\right)$$

И наоборот, если 4-векторы тетрады (имеются в виду $\xi^\alpha_{(l)}$, так как касательный к кривой 4-вектор переносится вдоль самой кривой всегда по Ферми-У'опкеру) испытывают перенос Ферми-Уолкера вдоль γ, то вектор $\vec{\chi}$ вращения равен нулю. В этом, и только этом случае, вращение отсутствует.

Теорема 14. Ортонормированная тройка 4-векторов, ортогональных мировым линиям элементов системы отсчета, испытывает перенос Ферми - Уолкера вдоль этих мировых линий в том и только том случае, если отсутствует вращение системы отсчета.

Следует иметь в виду, что это релятивистское определение вращения включает в себя и такой случай, когда мировые линии системы отсчета геодезические, т. е. частицы или

элементы среды, составляющие систему отсчета, неускоренные, свободные, но система отсчета вращается, так как $\chi_{ik} \neq 0$. Примером может служить система отсчета в мире Мнковского, образованная мноЖеством непараллельных геодезических. Такая система не покрывает всю область, но если углы между геодезическими малы, то она может быть распространена достаточно далеко во времени (тем дальше, чем меньше углы), пока геодезические не пересекутся. В пределе, когда углы между геодезическими равны нулю, эта система отсчета превращается в инерциальную, покрывающую все события мира Минковского.

В случае, когда мировые линии системы отсчета геодезические (частицы неускоренные), вращение системы отсчета имеет сугубо кинематическую природу, в отличие от динамической природы вращения, когда мировые линии системы отсчета негеодезические, а частицы или элементы среды, составляющие систему отсчета, имеют ненулевое абсолютное ускорение. Заметим, что формулы (I.58) и (I.59) можно пактно, если ввести обозначение для $u^\alpha = \xi^\alpha_{(0)}$:

$$\Gamma^{\beta}_{0\alpha|_\gamma} = \chi^{\cdot(\beta)}_{(\alpha)|_\gamma},$$

где

$$\chi_{(\alpha)(\beta)|_Y} = \frac{1}{2}\left(\xi_{(\beta)\nu}\frac{\delta\xi^\nu_{(\alpha)}}{\delta\sigma} - \xi_{(\alpha)\times}\frac{\delta\xi^\nu_{(\beta)}\Big)}{\delta\sigma}\right).$$

Теорема 15. Величины, описывающие абсолютное ускорение и вращение системы отсчета, составляют единый антисимметричный инвариантный комплекс, определенный равенствами (I.67). В собственной системе отсчета в координатах Ферми его пространственно-временные компоненты равны соответствующим компонентам абсолютного ускорения системы отсчета, а пространственные компоненты - компонентам тензора вращения.

Если заданная мировая линия ψ геодезическая, т. е. $w^\alpha = 0$, а 4-векторы $\xi^\alpha_{(l)}$ переносятся вдоль нее параллельно (перенос Ферми - Уолкера вдоль геодезической совпадает с параллельным), что допустимо, то координаты Ферми являются геодезическими в каждой точке этой мировой линии. В другом частном случае, когда мировая линия не обязательно геодезическая, но тетрада переносится вдоль нее по Ферми - Уолкеру, на базе системы координат Ферми. Синг (1963) вводит специальные координаты, являющиеся инвариантами и также называемые координатами Ферми.

В качестве примера используем координаты Ферми для доказательства следующего утверждения.

Теорема 16. Длина дуги (или промежуток собственного времени) временноподобной геодезической и только геодезической между заданными событиями имеет стационарное значение. Оно является максимальным, если кривизна мира неотрицательная, в остальных случаях не является ни максимальным, ни минимальным.

Д ок а з а т ел ьст во. Пусть задана временноподобная кривая γ, которой принадлежат события P_0 и P_1. Свяжем с этой кривой систему координат Ферми. В соответствии с 1-м свойством координат Ферми имеем

$$z^\ell_{1_\gamma} = 0, \qquad z^0_{|_\gamma} = \tau,$$
$$z^0(P_0) = \tau_0, \quad z^0(P_1) = \tau_1,$$

поэтому

$$\tau(P_0, P_1; \gamma) = \tau_1 - \tau_0.$$

Уравнения произвольной кривой γ' в ε - окрестности γ, проходящей через события P_0 и P_1, имеют вид

$$z^l_{l_{\gamma'}} = \varepsilon l^i(\tau), \quad z^0_{l_{\gamma'}} = \tau,$$
$$l^l(\tau_0) = l^l(\tau_1) = 0.$$

З десь ε - малый положительный параметр, l^l - произвольные функции собственного времени на γ. (Следут подчеркнуть, что уравнения γ' заданы не в функции канонического

параметра длины дуги вдоль γ', а в функции длины дуги кривой γ, с которой связаны координаты Ферми).

Так как $z^l_{l'}$ малы, то они представляют собой пространственные компоненты 4-вектора смещения, ортогонального γ. Действительно,

$$z^\alpha_{1_{\gamma'}} - z^\alpha_{I_\gamma} = \Delta z^\alpha = \varepsilon l^\alpha$$

где $l^\alpha \left\{0, l^l\right\} - 4$-вектор. Поэтому $l_\alpha u^\alpha = 0$.

Обозначим длину дуги вдоль γ' между P_0 и P_1 через $\circ\left(P_0\,,\, P_1; \gamma'\right)$ (кривая γ' не обязана быть временноподобной). Она определяется следующей формулой:

$$\sigma\left(P_0, P_1; \gamma'\right) = \int_{\tau_0}^{\bar{i}_1} \sqrt{\left| g_{\mu\nu} \frac{dz^\mu}{d\tau} - \frac{dz^\nu}{d\tau} \right|} d\tau.$$

Кз уравнений γ' следует

$$\frac{dz^0}{d\tau} = 1, \quad \frac{dz^i}{d\tau} = \varepsilon \frac{dl^i}{d\tau}.$$

Разложим $g_{\mu\nu}(z)$ в ряд Тейлора в окрестности $z^i = 0$ и ограничимся квадратичными по ε членами:

$$g_{\mu\nu}(z) = g_{\mu\nu|_\gamma} + \varepsilon g_{\mu\nu,\,k|_\gamma} l^k + \frac{\varepsilon^2}{2} g_{\mu\nu,\,kn|_\gamma} l^k l^n$$

Используя свойства (I.57) и (I.61) координат Ферми, можно записать

$$\left| g_{\mu\nu} \frac{dz^\mu}{d\tau} \frac{dz^\nu}{d\tau} \right| = 1 + 2s w_\alpha l^\alpha - \varepsilon^2 K\left(u^\alpha, l^\alpha\right)_{l_\gamma} l^2 - \varepsilon^2 \left[g_{\alpha\beta} \frac{dl^\alpha}{d\tau} \frac{dl^\beta}{d\tau} - \right.$$
$$\left. - \left(w_\alpha l^\alpha\right)^2 + 2\chi_{kn} l^k \frac{dl^n}{d\tau} + \chi_{kj} \chi^{\cdot j}_n l^k l^n \right]_\gamma$$

где $K\left(u^\alpha, l^\alpha\right)_{l_\gamma}$ - кривизна мира в направдении, определяемом векторами u^α и l^α, в точках γ, а $l^2 = l_\alpha l^\alpha$. С учетом (1.64) и (1.65) формула (1.69) приводится к удобному виду:

$$\left| g_{\mu\nu} \frac{dz^\mu}{d\tau} \frac{dz^\nu}{d\tau} \right| = 1 + 2\varepsilon w_\alpha l^\alpha - \varepsilon^2 \left(\frac{\delta l^\alpha}{\delta\tau} \frac{\delta l_\alpha}{\delta\tau} + K\left(u^\alpha, l^\alpha\right)_{I_\gamma} l^2 \right).$$

Это равенство инвариантное и не зависит от системы координа Подставляя его в (I.68), находим окончательно

$$\sigma\left(P_0, P_1; \gamma'\right) = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[1 + 2\varepsilon w_\alpha l^\alpha - \varepsilon^2 \left(\frac{\delta l^\alpha}{\delta\tau} \frac{\delta l_\alpha}{\delta\tau} + \right. \right.$$
$$\left. \left. + K\left(u^\alpha, l^\alpha\right)_{l_\gamma} l^2 \right) \right]^{1/2} d\tau.$$

При произвольных функциях l^α равенство

$$\left. \frac{d\sigma\left(P_0, P_1; \gamma'\right)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

выполняется в том и только том случае, если $w_\alpha = 0$, т. е. заданная кривая γ - геодезическая. При этом условии

$$\left. \frac{d^2\sigma\left(P_0, P_1; \gamma'\right)}{d\varepsilon^2} \right|_{\Sigma=0} = -\int_{\tau_j}^{\tau_1} \left(\frac{\delta l^\alpha}{\delta\tau} - \delta l_\alpha - K\tau^- + K\left(u^\alpha, l^\alpha\right)_{l_\gamma} l^2 \right) d\tau.$$

Из ортогональности l^2 геодезической γ следует пространственноподобность $\frac{\delta l^\alpha}{\delta\tau}$, поэтому 1 -й член в подынтегральном выражении неотрицательный, а знак и величина второго члена зависят от кривизны мира. Если кривизна мира неотрицательная, то длина дуги имеет максимальное значение, в остальных случаях ни максимальное, ни минимальное.

Следствие 5. Промежуток собственного времени между любыми заданными событиями вдоль геодезической мировой линии мира Минковского имеет максимальное значение.

27.1.9 9. Measurement of Absolute Acceleration

Особая роль геодезической с физической точки зрения заключается в том, что она реализует свободное движение частицы. Частица с нулевым абсолютным ускорением описывает геодезическую мировую линию. Значение понятий свободная частица и геодезическая как мировая линня свободной частицы в общей теории относительности почти также велико, как и в классической механике, в которой понятия о неускоренном движении и ускорении лежат в основе фундаментальных представлений об абсолютном пространстве и инерциальных системах отсчета. В отличие от последней в теории относительности ускорение инвариантно относительно преобразований общей группы (I.47), поэтому его абсолютное значенне не зависит от системы отсчета, в которой оно измеряется. В 7 уже указывалось на возможность измерения ускорения путем измерения метрики. Однако должны существовать, по крайней мере в принципе, и независимые способы измерения абсолютного ускорения, которые оправдывали бы оперирование понятиями ускорение и мировая линия свободной частицы на стадии до измерения метрики.

Простейший метод измерения абсолютного ускорения тела заключается в измерении его ускорения относительно какого-либо неускоренного тела. Но этот метод не отвечает поставленной цели, так как предполагает известным отсутствие ускорения у неускоренного тела. Указание на отсутствие ускорения правомочно только в том случае, если оно является следствием определенной измерительной процедуры. Ссылка на отсутствие каких-либо внешних сил, действующих на тело,- свободное тело,-возвращает нас опять к необходимости измерения ускорения, так как действие сил и полей в конечном счете обнаруживается путем изучения движения тел. Необходимо иметь метод измерения абсолютного ускорения, в котором бы не использовались априорные предположения о значениях ускорения тел, включенных в процесс измерения.

Такой способ измерения предоставляет формула (I.71). Пусть имеется частица, абсолютное ускорение которой требуется измерить, и некоторая вспомогательная частица, мировая линия которой принадлежит ε-окрестности мировой линии исследуемой частицы и пересекает ее в двух событиях. Обозначим собственное время между событиями пересечения, измеренное по часам исследуемой частицы, через $T_0\,(T_0 = \tau_1 - \tau_0)$, а по часам вспомогательной -через T. предположим, что движение вспомогательной частицы является линейным. Тогда проекция абсолютного ускорения исследуемой частицы на направление движения вспомогательной определяется формулой

$$w_\alpha e^\alpha = \lim_{T_0\to 0} \frac{T - T_n}{\bar{T}T_0}$$

Здесь e^α - единичный 4-вектор, ортогональный мировой линии исследуемой частицы, так что $l^\alpha = le^\alpha$ (в отличие от предыдущего параграфа малый параметр ε не выделен в явном виде, поэтому $\varepsilon l^\alpha \to l^\alpha$, а l^α - малые функции), $\bar{l}$-среднее значение за время T_0, т. е.

$$l = \frac{1}{\tau_1 - \tau_0} \int_{\tau_0}^{\tau_1} l(\tau) d\tau.$$

Линейность движения вспомогательной частицы означает постоянство направления движения во времени τ, вследствие чего $\frac{de^l}{d\tau} = 0$ на отрезке от τ_0 до τ_1. Постоянный вектор e^α может испытывать вращение вместе с репером $\xi^\alpha_{(l)}$ или, что то же, вращение вместе

с системой отсчета, но эффекты, обусловленные вращением, квадратичны по порядку малости и при получении формулы (I.72) могут не учитываться.

При стремлении T_0 к нулю $\tau_1 \to \tau_0$, а функция l также стремится к нулю, поэтому, разлагая подынтегральное выражение (I.71) в ряд по малым функциям, отбрасывая все члены, кроме линейного, и интегрируя по теореме о среднем, получаем (I.72). Впрочем, на малом интервале ускорение можно считать постояниым. По крайней мере, уменьшая интервал интегрирования, всегда можно достичь пренебрежимо малого изменения ускорения внутри интервала.

Способ измерения на мировой линии исследуемой частицы функции $l(\tau)$ как интервала между событием на этой мировой линии в момент τ и другим событием, фиксирующим положение вспомогательной частицы, описан в §5. Необходимо только иметь в виду, что 4-вектор, определяемый событиями этого интервала, ортогонален мировой линии исследуемой частицы. Для учета этого обстоятельства необходимо воспользоваться леммой 8.

Лемма 8. Если $P_1 < P_0 < P_2$ - последовательность событий на мировой линии, а события P_1 и P_3, P_8 и P_2 попарно связаны световыми линиями (рис. 1, случай 2), то равенство

$$\tau\left(P_1, P_0\right) = \tau\left(P_0, P_2\right)$$

является необходимым и достаточным условием ортогональности 4вектора (P_0P_3) к мировой линии.

Повторяя рассуждения, использованные в 5, для проекции пространственноподобного 4-вектора (P_0P_3) на мировую линию получаем значение $\frac{1}{2}\left[\tau\left(P_1, P_0\right) - \tau\left(P_0, P_2\right)\right]$, из которого и следует доказательство утверждения.

Предположим, что с мировой линии исследуемой частицы непрерывно посылаются и регистрируются отраженные от вспомогательной частицы световые сигналы. Обозначим через $\boldsymbol{\tau}'$ и $''$ моменты посылки и регистрации отраженного сигнала соответственно. Тогда формулы

$$\left.\begin{array}{rl} l(\tau) & = \frac{\tau''-\tau'}{2}, \\ \tau = \frac{\tau'+\tau''}{2} & \end{array}\right\}$$

выражают искомую функцию через значения измеряемого на мировой линии собственного времени. В случае произвольного движения вспомогательной частицы, когда $\frac{de^l}{d\tau} \neq 0$, вместо (I.72) имеет место другая формула-

$$w_\alpha \bar{l}^\alpha = \frac{T - T_0}{T_0}$$

в которой равенство выполняется тем лучше, чем меньше T_0. Из четырех чисел $\bar{l}^\alpha$ в формуле фигурируют на самом деле только три числа

$$\tau^l = \frac{1}{\tau_1 - \tau_0} \int\limits_{\tau_0}^{\tau_1} l^l(\tau) d\tau,$$

поскольку w_0 и l^0 равны нулю. Функции $l^l(\tau)$ выражаются через значения собственного времени, измеряемого на исследуемой частице, аналогично функции $l(\tau)$.

Следовательно, измерение абсолютного ускорения сводится **k** сопоставлению промежутков собственного времени между какими-либо двумя событиями мира, измеренных на двух пересекающихся в этих событияX мировых линиях.

Теорема 17. Если мировая линия вспомогательной частицы, движущейся линейно относительно наблюдателя (или прибора), пересекает мировую линию наблюдателя в двух событиях, то проекция абсолютного ускорения наблюдателя на направление движения вспомогательной частицы равна пределу отношения разности промежутков собственного времени вспомогательной частицы и наблюдателя между этими событиями к произведению среднего расстояния между наблюдателем и вспомогательной частицей на промежуток собственного времени наблюдателя. когда последний стремится к нулю. В случае произвольного движения вспомогательной частицы абсолютное ускорение наблюдателя определяется формулой (I.75). Измерение абсолютного ускорения сводится

к измерениям промежутков собственного времени на мировой линии наблюдателя и измерению одного промежутка собственного времени вспомогательной частицы, производимому непосредственно в событиях пересечения мировых линин наблюдателя и вспомогательной частицы.

27.1.10 10. Measurement of the Curvature of the Physical World

Кривизна, как и другие геометрические свойства физического мира, определяется метрикой, и может быть вычислена по соответствующей формуле постольку, поскольку метрический тензор измерен в окрестности каждого события мира. Однако в ряде случаев возникает необходимость измерения кривизны непосредственно физическими методами без обращения к измерению метрики. Например, в решении проблемы оснащения мира эта- лонами собственного времени предполагается, что хотя бы в принципе такой метод существует. Идею одного из методов измерения кривизны указал Вигнер (Wigner*, 1957).

Теорема 18. Пусть γ_1 и γ_2 - временноподобные геодезические; P_1, P_2, P_6 и P_9 - события на γ_1, а P_3, P_5 и P_7 - события на γ_2 такие, что P_1 и P_3, P_3 и P_2, P_2 и P_5, P_5 и P_6, P_6 и P_7 и P_7 и P^2 попарно связаны световыми линиями, и пусть $\tau(P_1, P_2) = \tau_1\ \tau(P_2, P_6) = \tau_2, \tau(P_0, P_9) = \tau_3$. Если P_0 - событие на γ_1 такое, что, $\tau(P_1, P_0) = \tau(P_0, P_2) = \frac{1}{2}\tau_1$, а e^α - единичный 4-вектор в направлении 4-вектора (P_0P_3), то имеет место формула

$$K(u^\alpha, e^\alpha) = 16\frac{\tau_1\tau_3 - \tau_2^2}{\tau_1(\tau_1+\tau_2)(\tau_2+\tau_3)(\tau_1+2\tau_2+\tau_3)} - \frac{\delta e^\alpha}{\delta\tau}\frac{\delta e_\alpha}{\delta\tau},$$

связывающая кривизну мира в P_0 с измеряемыми на γ_1 промежутками собственного времени.

Для вывода формулы (I.77) воспользуемся уравнением деви. ации геодезических (Levi-Civita, 1927; Синг, 1963). Рассмотрим двупараметрическое семейство геодезических $x^\mu(\sigma, \mathrm{v})$, включаю= щее γ_1 и $\gamma_2(\sigma$ - канонический параметр вдоль геодезических, **v** параметр, постоянный на каждой геодезической семейства). Введем обозначение

$$\mathrm{w}^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \mathrm{v}}, \quad \mathrm{w}^\mu = \mathrm{w}e^\mu$$

Тогда уравнение девиации можно записать в виде

$$\frac{\delta^2 w^\mu}{\delta\sigma^2} = R^\mu_{-va\beta}u^\nu u^\alpha w^\beta$$

Поместим в P_0 начало римановых координат y^α и разложим произвольный тензор $A^{\alpha^1\cdots\alpha^p}_{\beta^1\ldots\beta^r}$ в ряд Тейлора в окрестности P_0. Заменив частные производные на ковариантные и положив, согласно определению римановых координат (Петров, 1961).

$$y^\alpha = u^\alpha_{1p_0}\sigma$$

вследствие чего ковариантные производные в каждом члене ря: да Тейлора вместе с соответствующими сомножителями образуют абсолютные производные, получим формулу

Эта работа Вигнера содержит ошибку, которую он исправил позднее (1960) и получил правильную формулу для кривизны в случае, когда мировые линии частицы и зеркала параллельны в евклидовом прнближении, или когда относительная скорость частицы и зеркала (по терминологии Вигнера) близка к нулю.

Расширение этой формулы на непараллельные мировые линии, сделанное Вигнером (Wigner, 1960), также ошибочно. Ниже приводится другой вывод общей формулы, отличающийся при математической строгости прозрачным физическнм смыслом.

$$A^{a^1\cdots\alpha^p}_{\beta^1\ldots\beta^r}(P) = A^{a^1\cdots\alpha^p}_{\beta^1\ldots\beta^r}(P_0) + \left(\frac{\delta}{\delta\sigma}A^{\alpha^1\cdots\alpha^p}_{\beta^1\ldots\beta^r}\right)_{P_0}\sigma +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2}{\delta\sigma^2}A^{\alpha^1\ldots\alpha^p}_{\beta^1\ldots\beta^r}\right)_{P_0}\sigma^2+\frac{1}{6}\left\{\sum_{k=1}^{r}R^{p}_{\cdot\mu\nu\beta^k}A^{\alpha^1\ldots\alpha^p}_{\beta^1\ldots\beta^{k-1}\rho^{k+1}_{\beta}\ldots\beta^r}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{p}R^{x^k}_{\cdot\mu\nu\rho}A^{\alpha^1\cdots\alpha^{k-1}_{\rho}\alpha^{k+1}\ldots\alpha^{\rho}}_{\beta^1\ldots\beta^r}\right\}_{P_0}u^{\mu}_{1P_0}u^{\nu}_{1P_0}\sigma^2+\cdots$$

Применим эту формулу к 4-вектору w $^{\alpha}(P)$. Имеем

$$\mathrm{w}^{\alpha}(P)=\mathrm{w}^{\alpha}\left(P_0\right)+\left.\frac{\delta\mathrm{w}^{\alpha}}{\delta\sigma}\right|_{P_0}\sigma+\frac{1}{2}\left.\frac{\delta^2\mathrm{w}^{\alpha}}{\delta\sigma^2}\right|_{P_0}\sigma^2-$$
$$-\frac{1}{6}\left(R^{\alpha}_{\cdot\mu\nu\beta}u^{\mu}u^{\nu}\mathrm{w}^{\beta}\right)_{P_0}\sigma^2+\cdots$$

Подставляя сюда (I.78), получаем

$$\mathrm{w}^{\alpha}(P)=\mathrm{w}^{\alpha}\left(P_0\right)+\left.\frac{\delta\mathrm{w}^{\alpha}}{\delta\sigma}\right|_{P_0}\sigma+\frac{1}{3}\left(R^{\alpha}_{\cdot\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}\mathrm{w}^{3}\right)_{P_0}\sigma^2+\cdots$$

Аналогично

$$\mathrm{w}_{\alpha}(P)=\mathrm{w}_{\alpha}\left(P_0\right)+\left.\frac{\delta\mathrm{w}_{\alpha}}{\delta\sigma}\right|_{P_0}\sigma+\frac{2}{3}\left.\left(R_{\alpha\mu\nu\beta}u^{\mu}u^{\nu}\mathrm{w}^{\beta}\right|_{P_0}\sigma^2+\cdots\right.$$

Поэтому

$$\mathrm{w}(P)=\mathrm{w}\left(P_0\right)+\left.\frac{d\mathrm{w}}{d\sigma}\right|_{P_0}\sigma+\frac{1}{2}K\left(u^{\alpha},e^{\alpha}\right)_{P_0}\mathrm{w}\left(P_0\right)\sigma^2+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\delta e^{\alpha}}{\delta\sigma}\frac{\delta e_{\alpha}}{\delta\sigma}\right)_{P_0}\mathrm{w}\left(P_0\right)\sigma^2+\cdots.$$

При получении (I.80) учтено, что e^{α} всюду ортогонален γ_1. Этому условию легко удовлетворить. Действительно, скалярное произведение w $^{\alpha}u_{\alpha}$ постоянно вдоль геодезических семейства, так как

$$\frac{\delta}{\delta\sigma}\left(u_{\alpha}\mathrm{W}^{\alpha}\right)=u_{\alpha}\frac{\delta\mathrm{w}^{\alpha}}{\delta\sigma}=u_{\alpha}\frac{\delta u^{\alpha}}{\delta\mathrm{v}}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\mathrm{v}}\left(u_{\alpha}u^{\alpha}\right)=0.$$

Поэтому достаточно ортогонализовать 4-векторы u^{α} и w $^{\alpha}$ в одной точке геодезических, чего можно достигнуть линейным преобразованием канонического параметра σ.

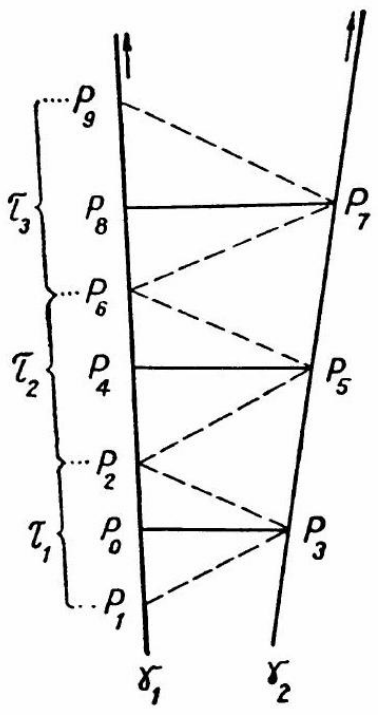
Равенство (I.80) инвариантно относительно преобразований из общей группь: (I.47), поэтому справедливо не только в римановых координатах, но и в произвольной системе координат. Рассмотрнм события P_4 и P_8 на γ_1 (рис. 2) такне, что

$$\tau\left(P_2,P_4\right)=\tau\left(P_4,P_6\right)=\frac{1}{2}\tau_2,$$
$$\tau\left(P_8,P_8\right)=\tau\left(P_8,P_9\right)=\frac{1}{2}\tau_3.$$

Согласно лемме 8, четырехвекторы $\left(P_0P_3\right),\left(P_4P_5\right)$ и $\left(P_8P_7\right)$ ортогональны γ_1. Если на γ_1 параметр семейства геодезнческих принимает значение v_1, а на γ_2- зачение $\mathrm{v}_2=\mathrm{v}_1+\Delta\mathrm{v}$, то 4-вектор w* Δv в событиях P_0,P_4 и P_8 совпадает с 4-векторами $\left(P_0P_3\right)$, $\left(P_4P_5\right)$ и $\left(P_8P_7\right)$, а так как нормы этих последних равны. согласно (I.42), $\frac{1}{2}\tau_1,\frac{1}{2}\tau_2$ и $\frac{1}{2}\tau_3$ соответственНо, то

$$\mathrm{w}\,(P_0)\,\Delta\mathrm{v} = \frac{1}{2}\tau_1,$$
$$\mathrm{w}\,(P_4)\,\Delta\mathrm{v} = \frac{1}{2}\tau_2,$$
$$\mathrm{w}\,(P_8)\,\Delta\mathrm{v} = \frac{1}{2}\tau_3.$$

Рис. 2. Измерение на мировой линии γ_1 свободной частицы значений трех последовательных промежутков τ_1, τ_2 и τ_3 собственного времени между соответствующнми событнями отправления светового сигнала с частицы и возвращения на нее после отражения от другой свободной частицы, мировах линия γ_2 которой компланарна γ_1, позволяет вычислить по формуле (I. 84) крнвизну мира в направленни, определяемом мировыми линиями обеих частнц.



Подставив в (I.80) значения σ, соответствующие событиям P_4 и P_8, именно, $(P_4) = \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2)$ и $(P_8) = \tau_2 + \frac{1}{2}(\tau_2 + \tau_3)$, и использовав (I.81), получим два уравнения

$$\tau_2 = \tau_1 + (\tau_1 + \tau_2)\left.\frac{d\mathrm{w}}{d\sigma}\right|_{P_0}\Delta\mathrm{v} + \frac{1}{8}\tau_1(\tau_1 + \tau_2)^2 \times$$
$$\times\left[K(u^\alpha, e^\alpha) + \frac{\delta e^\alpha}{\delta\sigma}\frac{\delta e_\alpha}{\delta\sigma}\right]_{P_0} + \cdots,$$
$$\tau_8 = \tau_1 + (\tau_1 + 2\tau_2 + \tau_3)\left.\frac{d\mathrm{w}}{d\sigma}\right|_{P_0}\Delta\mathrm{v} + -\frac{1}{8} - \tau_1(\tau_1 + 2\tau_2 + \tau_3)^2 \times$$
$$\times\left[K(u^\alpha, e^\alpha) + \frac{\delta e^\alpha}{\delta\sigma} - e_{\delta\sigma}\right]_{P_0} + \cdots.$$

Разрешая их относительно $\left.\frac{d\mathrm{w}}{d\sigma}\right|_{P_0}$ и $K(u^\alpha, e^\alpha)_{|P_0'}$ находим

$$\frac{d\mathrm{w}}{d\sigma P_{P_0}}\Delta\mathrm{v} = \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_2 + \tau_1} - 2\frac{\tau_1\tau_3 - \tau_2^2}{(\tau_2 + \tau_3)(\tau_1 + 2\tau_2 + \tau_3)}$$

и формулу (I.77).

Четырехвектор $\frac{\delta e_\alpha}{\delta\sigma}$ - пространственноподобный. В самом деле,

$$u_\alpha \frac{8e^\alpha}{\delta\sigma} = \frac{d}{d\sigma}\left(u_\alpha e^\alpha\right) = 0$$

rak как

$$\frac{8u^*}{\delta\sigma} = 0 \quad \text{и} \quad u^\alpha e_\alpha = 0.$$

Поэтому

$$\frac{\partial e^\alpha}{\partial\sigma} - \frac{\delta e_\alpha}{\delta\sigma} \geqslant 0$$

Он определяет скорость пространственного вращения 4-вектора $\mathbf{w}^\alpha$. в плоскости $\left(e^\alpha, \frac{\delta e^\alpha}{\delta\sigma}\right)$ в процессе его переноса вдоль геодезической, или меру некомпланарности геодезических $\boldsymbol{\gamma}_1$ и $\boldsymbol{\gamma}_2$.

Пусть через событие P_3 проходят различные геодезнческие, образующие непрерывное множество. аждая геодезическая этого множества при фикснрованной геодезической γ_1 характеризуется своим значением $\frac{\delta e^\alpha}{\delta\sigma}\big|_{P_0}$, и для каждой из них справедлива формула (I.77). Поскольку кривизна мира в событии P_0 в двумерном направлении, образуемом 4-векторами u^a и (P_0P_3), не зависит от геодезической γ_2, то левая, а стало быть, и правая части. формулы (I.77) имеют одно.и то же значение для всех γ_2 из множества. Если ограничиться измерением значений только τ_1, τ_2 и τ_3, то измеряемой величиной из правой части (I.77) является первое слагаемое. Второе же слагаемое в данном варианте измерения остается неопределенным. Но второе слагаемое удовлетворяет условию (I.83), поэтому существует такая геодезическая $\boldsymbol{\gamma}_2$, для которой второе слагаемое обращается в нуль, а первое слагаемое имеет минимальное значение для множества геодезических γ_2.

Теорема 19. Кривизна мира в заданном событии в заданном двумерном временноподобном направленни определяется формулой

$$K = 16\left\{\frac{\tau_1\tau_3 - \tau_2^2}{\tau_1\left(\tau_1+\tau_2\right)\left(\tau_2+\tau_3\right)\left(\tau_1+2\tau_2+\tau_3\right)}\right\}_{\min}.$$

Таким образом, измерение кривизны мира сводится к измерению множества троек значений собственного времени τ_1, τ_2 и $\tau_{\mathbf{3}}$ и выявлению той из них, которая минимизирует правую часть (1.84)

27.1.11 11. Standards for Measuring Proper Time

В §5 было показано, что измерение метрики в окрестности данного события сводится к измерению собственного времени на мировой линии частицы, содержащей это событие. Последнее же есть, по сути, простое сравнение измеряемого промежутка с эталоном времени, установленным на мировой линии частицы. Эталоном времени может служить любой периодический процесс. например, период излучения атома, соответствующего переходу между двумя его определенными энергетическими состояниями. Принято считать, что установление эталонов является актом свободной воли экспериментатора или соглашения многих экспериментаторов, поэтому возникает вопрос, как сказывается на метрике мира тот или иной выбор эталонов.

Предположим, что E - система эталонов времени, выбранных на каждой мировой линии моллюска Эйнштейна, а $g_{\mu\nu}(x)$ - мегрический тензор физического мира, измеренный в этой системе единиц времени. Пусть $\bar{E}$ - другая система эталонов. Если выбор эталонов на каждой мировой линии произволен, то отношение масштабов систем E и $\dot{E}$ является произвольной функцией точки мира, которая подчиняется естественному требованию: эта функция достаточно гладкая и существенно положительная, т. е. нигде н обращается в нуль или бесконечность. Связь между системами эталонов E и E можно символически выразить так:

$$\bar{E} = e^{-\lambda(x)}E$$

где $\lambda(x)$ - произвольная функция. Не исключается, что изменение эталона может происходить не только от одной мировой линии моллюска к другой, но и с течением собственного времени на одной мировой линии.

Поскольку числовое выражение всех промежутков собственного времени на каждой мировой линии изменяется с переходом от E к $\bar{E}$, постольку (теорема 11) изменяется и результат измерения метрики. Метрический тензор $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$ в системе эталонов $\bar{E}$ выражается через $g_{\mu\nu}(x)$ равенством

$$\bar{g}_{\mu\nu}(x) = e^{2\lambda(x)} g_{\mu\nu}(x)$$

Теорема 20. В результате измерения метрика физического мира определяется только с точностью до произвольнов ко конформной функции, соответствующей произволу в системе эталонов собственного времени на мировых линиях моллюска Эйнштейна. Два физических мира, метрические тензоры которых связаны конформным преобразованием (I.86), существенно отличаются как в геометрическом, так и в физическом отношении. Более того, уравнения Эйнштейна, как, впрочем, и электродинамики, не сохраняют своего вида, если в них подставить вместо $g_{\mu\nu}$ тензор $\bar{g}_{\mu\nu}$, а λ считать функцией координат. Из законов физики, служащих одновременно определениями массы, электрического заряда и других величин, следует, что преобразованию (I.86) соответствуют конформные преобразования

$$\bar{m} = m,$$
$$\bar{\mu} = e^{-3\lambda}\mu,$$
$$\bar{e} = e^{\frac{1}{2}\lambda} e,$$
$$\bar{p} = e^{-\frac{5}{2}\lambda}\rho,$$
$$\bar{u}^{\mu} = e^{-\lambda} u^{\mu},$$
$$\bar{F}^{\mu}_{.\nu} = e^{-\frac{3}{2}\lambda} F^{\mu}_{\nu\nu},$$
$$\bar{T}^{\mu}_{\nu} = e^{-3\lambda} T^{\mu}_{\nu},$$
$$\bar{x} = e^{\lambda} x.$$

Дифференциальные уравнения физики, в частности уравнения Эйнштейна и Максвелла-Лоренца, инвариантны относительно преобразований (I.86) и (I.87), если только $\lambda = \text{const}$. В самом деле, уравнения Максвелла-Лоренца (I.7), например, инвариантны относительно (I.86) и (I.87 в-е) в том и только том случае, если функция λ удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$F^{\mu\nu}\lambda_{,v} = 0,$$
$$e^{\alpha\beta\nu\nu} F_{\beta\mu}\lambda_{,\nu} = 0,$$

единственным решением которых, отвечающим произвольному электромагнитному полю, является $\lambda = \text{const}$.

Из отсутствия инвариантности законов физики относительно произвольного конформного преобразования (I.86) следует существование единственной системы эталонов собственного времени, в которой законы природы принимают вполне определенную форму: законы электродинамики - форму уравнений Максвелла Лоренца, законы гравитации - уравнений Эйнштейна и т. д. Такую систему будем называть системой согласованных эталонов. Причем мы не будем различать любые две системы, эталоны ко- торых отличаются постоянным конформным множителем, т. е. две системы, для которых $\bar{E}(x)/E(x) = \text{const}$, будем относить к одной.

Обратимся снова к уравнениям электродинамики. Пусть в системе эталонов E, установленных каким-то образом на мировых линиях моллюска Эйнштейна, измерены метрический тензор мира и распределения напряженностей электромагнитного поля, электрического заряда и его скорости. Составим из результатов измерения величины $F^{\mu\nu}_{;\nu} - 4\pi j^{\alpha\nu}$ и $e^{\alpha\xi\mu\nu} F_{\beta\mu,\nu}$. Согласно уравнениям Максвелла-Лоренца, они должны обратиться в нуль в каждой точке мира. Однако этого может и не случиться, если эталоны времени не согласованы между собой.

Докажем последнее от противного. Пусть, напротив, эти величины равны нулю в каждой точке мира. Введем другую систему эталонов $\overline{E}$,связанную с первой формулой

(I.85), тогда результаты измерения $\bar{g}_{\mu\nu}, \bar{F}_{\mu\nu}, -\rho$ и $\bar{u}^\mu$ будут связаны с результатами измерения в системе E соответственно формулами (I.86), (I.87е), (I.87г) и (I.87д). Поэтому

$$\bar{F}^{\mu\nu}_{;\nu} - 4\pi\bar{j}^{\alpha\nu} = e^{-\frac{7}{2}\lambda}\left(F^{\mu\nu}_{i\nu} - 4\pi j^\lambda + \frac{1}{2}F^{\mu\nu}\lambda_{,\nu}\right).$$

$$\bar{e}^{\alpha\beta\mu\nu}\bar{F}_{\beta\mu,\nu} = e^{-\frac{7}{2}\lambda}\left(e^{\alpha\beta\mu\nu}F_{i\mu,\nu} + \frac{1}{2}e^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\beta\mu}\lambda_{,\nu}\right).$$

Если, по предположению, $F^{\mu\nu}_{;\nu} - 4\pi j^\mu$ и $e^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\beta\mu,\nu}$ равны нулю в каждой точке мира, то из (I.88) следует, что результатом измерения этих величин в системе $\bar{E}$ будут значения, отличные от нуля. Поскольку первая система эталонов E никакими особыми признаками не обладает, то величины $F^{\mu\nu}_{;\nu} - 4\pi j^\mu$ и $e^{\alpha\beta_{\mu\nu}}F_{\beta\mu,\nu}$, полученные в результате измерения в ней, только случайно могут обратиться в нуль в каждой точке мира.

Итак, предположим, что в результате измерения получены значения $F^{\mu\nu}_{;\nu} - 4\pi j^\mu \neq 0$ и $e^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\beta\mu,\nu} \neq 0$. Введем другую систему эталонов $\bar{E}$ такую, что в ней удовлетворяются уравнения Максвелла-Лоренца

$$\bar{F}^{\mu\nu}_{;\nu} - 4\pi\bar{j}^\mu = 0,$$
$$\bar{e}^{\alpha\beta\mu\nu}\bar{F}_{\beta\mu,\nu} = 0.$$

Подставляя эти равенства в (I.88), получаем уравнения

$$\left.\begin{aligned} F^{\mu\nu}\lambda_{,\nu} &= -2\left(F^{\mu\nu}_{;\nu} - 4\pi j^\mu\right), \\ e^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\beta\mu}\lambda_{,\nu} &= -2e^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\beta\mu,\nu}. \end{aligned}\right\}$$

Здесь все функции, кроме $\lambda(x)$, известны, по предположению, как результат измерения. Уравнения (I.89) представляют собой неоднородные линейные алгебраические уравнения относительно неизвестных $\lambda_{,v}$, поэтому все характеристические определители (Смирнов, 1956) системы (I.89) равны нулю. В противном случае не существует функции λ, удовлетворяющей (I.89), а следовательно, уравнения Максвелла - Лоренца не имеют места ни в какой системе эталонов собственного времени. С другой стороны, ранг матрицы коэффициентов левой части (I.89) в случае произвольного электромагнитного поля не меньше четырех. Поэтому в общем случае уравнения (I.89) имеют единственное решение, которое можно записать в виде

$$\frac{d\lambda}{dx^v} = Q_v(F, j, g)$$

откуда

$$\lambda = \int Q_\nu(F, j, g)dx^\nu + \text{ const.}$$

Таким образом, если в заданной системе эталонов измеренные значения величин не удовлетворяют уравнениям Максвелла Лоренца вследствие несогласованности эталонов системы, то можно найти такую функцию $\lambda(x)$, которая переводит эталоны заданной системы в эталоны согласованной системы, где уравнения Максвелла - Лоренца удовлетворяются, причем эта функция единственная с точностью до аддитивной постоянной. То же относится и к другим уравнениям физики.

Теорема 21. Существует единственная с точностью до конформной постоянной система согласованных эталонов собственного времени, в которой законы физики принимают определенную форму. Эти законы допускают только согласованный произвол в выборе эталонов собственного времени, по которому изменение эталонов на всех мировых линиях во все моменты времени возможно только единым образом.

На первый взгляд, содержание этой теоремы достаточно тривиально и акцентировать на ней внимание нет оснований. Это не так. Релятивизация физики вносит свои коррективы в вопросы выбора и согласования эталонов измерения. В классической (нерелятивистской) физике с ее однородным пространством и инерциальными системами

отсчета в явной или неявной форме используется следующее предположение об эталонах: два идентичных эталона, локализованных в разных точках физического мира, но находящихся в идентичных физических условиях, равны (тождественны) независимо от того, изготовлен ли каждый из них в точке своей локализации, или оттранспортирован в нее после нзготовления в одной общей точке мира. Под идентичными эта-лонами, например, длины понимаются зталоны, состоящие из атомов одного сорта в определенной твердотельной структуре, с одинаковым числом межатомных расстояний, под идентичными физическими условиями - равенство температур, давлений, экранировка от электрических и магнитных полей и др. Это предпоожение согласуется с основными представлениями классической физики и не противоречт результатам эксперимента, пока точность измерения не превышает некоторого значения. Если заданная точность невелика, так что релятивистскими поправками, обусловленными эффектами специальной или общей теории относительности, можно пренебречь, то для согласования эталонов измерения достаточно изготовить их идентичными в одной тОчке мира и оттранспортировать в другие точки мира с соблюдением необходимых мер предосторожности.

В полном соответствии с этим в 1889 г. Международный комитет мер и весов изготовил серию идентичных эталонов длины из платиново-иридиевого сплава, которые были разосланы в различные пункты Земли, а в 1960 г., учитывая достижения современной измерительной техники и высокое постоянство свойств атомов, принял новые эталоны длины и времени: длину волны и частоту определенных спектральных линий криптона-86 и цезия соответственно. Платиново-иридиевые эталоны, хранящиеся в Международном бюро мер и весов близ Парижа и в национальных бюро стандартов, считаются равными (хотя они локализованы в различных точках физического мира) на том основании, что при кх изГотовлении в одной точке и повторном сличении после транспортировки одного из эталонов из точки изготовления в точку хранения и обратно они совпадают. Что касается новых эталонов спектральные линии атомов - то вопроса об их изготовлении в одной точке не возникает, так как предполагается, что спектральные линии атома, оттранспортированного из одной точки мира в другую, совпадают с линиями атома того же элемента в этой другой точке. Свойства атома не зависят от его истории. На этом основании спектральные линии атомов одного элемента, локализованных в разных точках физического мира, считаются одинаковыми. Все платиново-иридиевые эталоны длины и все атомные эталоны длины и времени соответственно идентичны друг другу. Таким образом, по воле Международного комитета мер и весов, все точки Земли «снабжены»идентичными эталонами собственного времени.

Такое положение с эталонами измерения согласуется не только с представлениями нерелятивистской классической физики, но и с представлением, получившим широкое распространение в общей теории относительности. Наиболее ясно оно сформулировано Сингом. Хотя Эйнштейн в своих работах по общей теории относительности недостаточно четко определяет понятия «идентичные часы»или «измерительные линейки», за что, в частности, критикует его Бриллюэн (1972), тем не менее содержание их позволяет заключить, что идентичные масштабы у Эйнштейна имеЮт смысл описанных выше не только при сопоставлении измери- тельных процедур в двух инерциальных системах отсчета, но и в общем случае. Например, Эйнштейн и Кнфельд (1938) так описывают измерительные процедуры, осуществляемые на вращающемся диске наблюдателями, один из которых покоится относительно диска (внутренний), а другой - относительно инерциальной системы отсчета (внешний). «Он (внутренний наблюдатель -. А.) использует такой же небольшой измерительный масштаб, какой был использован внешним наблюдателем. «Такой же» означает либо действительно тот же, просто переданный внешним наблюдателем внутреннему, либо один из двух масштабов, имеющих одинаковую длину в покоящейся системе координат». Согласно этому представлению, атомы одного элемента, размещенные на каждой мировой линии моллюска Эйнштейна, образуют систему идентичных часов, пригодных для метризации мира. Проанализируем поэтому такую систему эталонов на предмет их согласованности.

Можно ли считать идентичные атомы, или, более широко, идентичные часы, размещенные на разных мировых линиях, тождественными, а их периоды и соответственно показания-равными? Иными словами, образуют ли идентичные измерительные эталоны, размещенные в различных точках - событиях физического мира,-согласованную систему эталонов в любом случае? Рассмотрим мир Минковского,

в котором отсутствует поле тяготения. Если в инерциальной системе отсчета ввести цилиндрическую систему пространственных координа1, то квадрат интервала (I.6) запишется так:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$$

Время t здесь измеряется в системе эталонов времени, размещенных в каждой точке (r, φ, z) инерциальной системы отсчета, каковыми являются, например, покоящиеся атомы одного элемента Пусть $\{t', r', p', z'\}$ - координаты события во вращающейся относительно оси $r = 0$ системе отсчета. Переход от инерциальной к вращающейся системе отсчета можно описать формуламп преобразования координат

$$t' = t, r' = r, \varphi' = \varphi - \omega t, z' = z$$

Тогда

$$ds^2 = -\left(1 - \omega^2 r'^2\right)\left(dt'\right)^2 + 2\omega r'^2 d\varphi' dt' + dr'^2 + r'^2 d\varphi'^2 + dz'^2$$

Чем характерна квадратичная форма (I.92) вращающейся системы отсчета? Во-первых, тензор кривизны мира равен нулю. как это и должно быть для мира Минковского. Во-вторых, время t', или временная координата, измеряется в эталонах, покоящихся относительно инерциальной системы отсчета, и следовательно, вращающихся (в обратном направлении) относительно штрихованной системы отсчета. Это следует из $t' = t$. В-третьих, периоды T' атомов, покоящихся относительно вращающейся системы отсчета и вращающихся относительно инерциальной, выражаются через период T атомов того же элемента, покоящихся относительно инерциальной системы отсчета, с помощью формулы

$$T' = \left(1 - \omega^2 r'^2\right)^{-\frac{1}{2}} T$$

так что периоды двух атомов, локализованных в разных точках r'_1 и r'_2, связаны равенством

$$\frac{T'\left(r'_1\right)}{T'\left(r'_2\right)} = \sqrt{\frac{1 - \omega^2 r'^2_2}{1 - \omega^2 r'^2_1}}.$$

Зту формулу можно вывести теоретически, но сейчас важнее то, что она получнла экспериментальное подтверждение (Champeney, Moon, 1961; Hay, Schiffer, Cranshaw, Egelstaff, 1960). Если в качестве эталонов собственного времени во вращающейся системе отсчета принять периоды атомов одного элемента, покоящихся в этой системе отсчета, что эквивалентно переходу (I.85) к системе эталонов $\bar{E}$, осуществляемому функцией $\lambda(x) = \frac{1}{2}\ln\left(1 - \omega^2 r'^2\right)$. то в результате измерения метрики во вращающейся системе отсчета вместо квадратичной формы (I.92) получим форму

$$\begin{aligned} d\bar{s}^2 = &-\left(1 - \omega^2 r'^2\right)^2 \left(dt'\right)^2 + 2\omega r''\left(1 - \omega^2 r'^2\right) d\varphi' dt' + \\ &+ \left(1 - \omega^2 r'^2\right)\left(dr'^2 + r'^2 d\varphi'^2 + dz'^2\right). \end{aligned}$$

Тензор кривизны, построенный на метрике (1.94), отличен от нуля:

$$\begin{aligned} &\bar{R}_{0101} = -\omega^2, \bar{R}_{0202} = \bar{R}_{2332} = \frac{\omega^2 r'^2\left(1 - 2\omega^2 r'^2\right)}{1 - \omega^2 r'^2}, \\ &\bar{R}_{0303} = 2\omega^4 r'^2, \bar{R}_{0121} = \frac{2\omega^3 r'^2}{1 - \omega^2 r'^2}, \bar{R}_{1212} = \frac{2\omega^2 r'^2}{1 - \omega^2 r'^2}, \\ &\bar{R}_{0323} = \frac{\omega^3 r'^2\left(1 - 2\omega^2 r'^2\right)}{1 - \omega^2 r'^2}, \bar{R}_{1313} = \frac{\omega^2\left(1 + \omega^2 r'^2\right)}{1 - \omega^2 r'^2}, \end{aligned}$$

остальные его компоненты равны нулю. Таким образом, если в соответствии со специальной теорией относительности принимается, что пустой физический мир

является миром Минковского, то покоящиеся на вращающемся теле атомы не могут служить системой согласованных эталонов собственного времени. Из этого примера следует отрицательный ответ на поставленный выше Вопрос.

Теорема 22. Собственные периоды атомов, как и любые идентичные измерительные эталоны, принадлежащие различным ми- ровым линиям произвольного моллюска Эйнштейна, или различным событиям одной и той же мировой линии, вообще говоря, не образуют согласованной системы эталонов.

Следовательно, предположение, лежащее в основе теоретического и практического использования идентичных измерительных эталонов, локализованных в разных точках физического мира, и сводящееся к утверждению их тождества или равенства, в общем случае неверно. Оно истинно в исключительных случаях. В частности, это предположение согласуется со взглядами на пространство и время применительно к инерциальным системам отсчета специальной теории относительности и не противоречит результатам практических измерений на Земле в тех пределах точности, в которых Земля является инерциальной системой отсчета, а ее полем тяготения можно пренебречь. Но оно перестает быть верным, если идентичные эталоны используются в таких измерениях на Земле, в которых поле тяготения и неинерциальность ее движения сказываются на величине эталонов.

Простейшим примером является система идентичных математических маятниковых часов, локализованных в разных точках на поверхности Земли. Маятниковые часы идентичны, если их упругие нити и подвески изготовлены так, что число атомов, образующих одну и ту же твердотельную структуру, одннаково у всех маятников. Непосредственное сравнение любых двух маятников этой системы, оттранспортированных и совмещенных в какой-либо одной точке, безусловно, покажет равенство их периодов, тогда как периоды этих же маятников, размещенных на разных широтах не совпадут, что и было замечено в практических измерения **x** Жаном Рише еще в 1672 г. Обнаружить на практике несовпадение периодов идентичных маятниковых часов оказалось возможным благодаря тому, что существует единый для всех точек поверхности Земли эталон времени, неизменный в пределах точности 10^{-3},- суточный период вращения Земли. Теоретическое же объяснение зависимости периода идентичных маятников от широты места пришло с построением Ньютоном классической механики и открытием им закона всемирного тяготения.

Именно разность потенциалов поля тяготения Земли в точках нахождения сравниваемых идентичных маятников и разность центробежных сил, обусловленных неинерциальностью системы отсчета, связанной с вращающейся Землей, и определяют различие их периодов. Поэтому система идентичных маятниковых эталонов собственного времени не является согласованной, если точность измерения выше 10^{-3}.

Из-за суточного вращения Земли величина идентичных атомных эталонов времени должна изменяться на поверхности Земли в пределах $1,2 \cdot 10^{-12}$ в соответствии с опытами для вращающегося диска (Hay, Schiffer, Cranshaw, Egelstaff, 1960). Кроме того, величина атомных эталонов меняется, согласно эффекту, предсказанному Эйнштейном (1907) и подтвержденному опытами (Pound, Reb- ka, 1960; Cranshaw, Schiffer, Whitehead, 1960), который состоит взависимости частоты атомов от потенциала поля тяготения. Вследствие различия гравитационного потенциала Земли в разных точках ее поверхности величина атомных эталонов, покоящихся в них, различается до $2,4 \cdot 10^{-12}$. Влияние вращения Земли и ее гравитационного потенциала на величину атомных эталоновпротивоположно по знаку. Так что в показаниях атомных часов, покоящихся на экваторе и полюсе, за 30 лет набежит разность примерно в 1 мс. Прямое сравнение показаний двух атомных часов, расположенных на разных высотах-одни часы находились. на уровне 250 м (г. Турин), а другие были подняты до 3500 м на Плато Роза (Италия), - подтвердило зависимость атомных эталонов собственного времени от потенциала поля тяготения Земли (Briatore, Seschiutta, 1977).

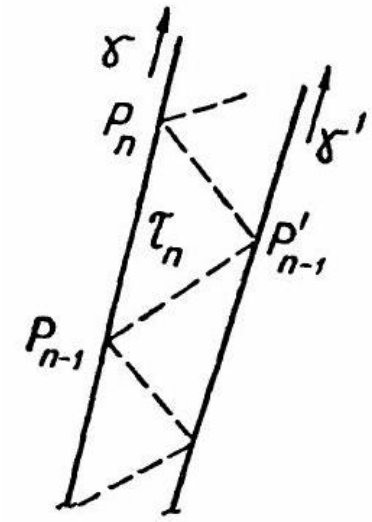
Следовательно, система идентичных атомных эталонов времени не согласованная, если точность измерения превышает 10^{-12}, и введенные в 1960 г. Международным комитетом мер и весов эталоны измерения времени отвечают своему назначению только в данных пределах точности измерения. Использование же спектральных линий атома в качестве эталонов длины может привести к противоречию уже при точности измерения 10^{-6}, что связано с анизотропией длины волны света на вращающемся теле (Арифов, 1976)

Система идентичных эталонов, локализованных в разных событиях одной и той же мировой линии моллюска Эйнштейна, физически может быть интерпретирована как один

эталон, рассматриваемый в различные моменты собственного времени, соответствующие событиям локализации эталона. Тем не менее, и такая система эталонов, согласно теореме 22, не является в общем случае согласованной, поскольку величина эталона есть функция собственного времени.

27.1.12 12. Equipping the World with Standards of Proper Time

Результаты измерения метрики физического мира находятся. или могут находиться, в соответствии с определенной формой физики, в частности с уравнениями Максвелла - Лоренца, только в том случае, если для измерения метрики используется согласованная система эталонов собственного времени. Это следует из теорем 20 и 21. Поэтому те или иные заключения или предсказания теории относительности о пространственно-временных закономерностях мира имеют смысл, если наряду с процедурой измерения метрики (теорема 11) указан рецепт согласования эталонов собственного времени, принадлежащих каждому событию мира. Поскольку малый промежуток собственного времени совпадает (аксиома 1) с интервалом между двумя близкими событиями, принадлежащими мировой линии частицы, то возникает задача уравнения интервалов, служащих эталонами в различных событиях мира, или сведения их к одному заданному интервалу. Задачу можно сформулировать следующим образом. Пусть имеются два близких события P_0 и P_1. Предположим, что интервал $d\sigma\,(P_0, P_1)$, равный норме времениподобного 4-вектора (P_0P_1), выбран в качестве эталона интервалов. Он может быть равен, например, собственному периоду в P_0 некоторого атома, мировой линии которого принадлежат оба события. Необходимо предложить процедуру сравнения этого интервала



с произвольным интервалом между двумя другими, но также близкими друг другу событиями. О такой процедур будем говорить, что она позволяет оснастить события мира согласованными (тождественными) эталонами собственного времени или, что то же, снабдить все точки пространства одинаково идущими тождественными часами.

В основу искомой процедуры можно положить геодезический перенос эталона от одного

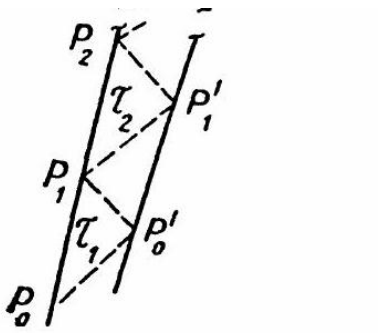


Рис. 3. На мировой линии γ свободной частицы измеряются промежутки собственного времени $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n, ...$ между последовательными событиями отправле. ния и возвращения светового сигнала, отраженного от зеркала (γ'-мировая линия свободно движущегося зеркала). Длительность n-го промежутка времени выражается через τ_1 и τ_2 по формуле (I.100).

события к другому, как угодно удаленному от первого, но принадлежащему его абсолютному будущему или прошлому. Предварительно докажем следующее утверждение.

Лемма 9. Пусть γ и γ' - компланарные временноподобные геодезические линии; $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ - промежутки собственного времени, измеряемого на γ, между последовательными событиями P_0 и P_1, P_1 и $P_2, ..., P_{n-1}$ и P_n, Связанными световыми линиями с событиями $P'_0, P'_1, ...P'_{n-1}$ на γ' (рис. 3); $\tau(1,n)$ - промежуток собственного времени между событиями P_0 и P_n. Если кривизна мира ограничена в окрестности γ между событиями P_0 и P_n, а отношение τ_2 к τ_1 имеет фиксированное значение, то для любых событий P_0 и P_n и любого положительного наперед заданного существуют такие $\delta(\varepsilon)$ и $n(\varepsilon)$, что

$$\left|1 - \frac{\tau_n}{\tau_1}\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{n-1}\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\tau(1,n) - \tau_1 \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^i\right| < \varepsilon,$$

если

$$\tau_1 < \delta$$

Доказ ательство. Обозначим через K_i кривизну мирав срединпой точке интервала (P_{t-1}, P_t). Так как геодезические, по условию, компланарны, т. е. $\delta e^\alpha/\delta\tau = 0$, то, согласно (I.84), имеем

$$K_{l-2} = 16\frac{\tau_{l-2}\tau_l - \tau_{l-1}^2}{\tau_{l-2}\left(\tau_{l-2}+\tau_{l-1}\right)\left(\tau_{l-1}+\tau_l\right)\left(\tau_{l-2}+2\tau_{l-1}+\tau_l\right)}, i \geqslant 3.$$

Разрешив это равенство относительно τ_i, получим

$$\tau_l - \tau_{l-2}\left(\frac{\tau_{l-1}}{\tau_{l-2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\tau_{l-2}+\tau_{i-1}}{A_{l-2}}\left[1 - A_{i-2}\left(1+2\frac{\tau_{l-1}}{\tau_{l-2}}\right)\right]\left\{1 - \left[1 - 4A_{i-2}^2\frac{\frac{\tau_{l-1}}{\tau_{l-2}}\left(1+\frac{\tau_{l-1}}{\tau_{l-2}}\right)}{\left(1 - A_{i-2}\left(1+2\frac{\tau_{l-1}}{\tau_{l-2}}\right)\right)^2}\right]^{1/2}\right\}$$

где

$$A_{l-2} = \frac{1}{16}K_{l-2}\tau_{i-2}^2\left(1+\frac{\tau_{i-1}}{\tau_{i-2}}\right)$$

Знак перед хорнем в правой части этого равенства удовлетворяет требованию равенства нулю его левой части, если $K_{i-2} = 0$.

Обозначим правую часть (I.95), деленную на τ_{i-2}, через B_{i-2} и перепишем равенство в виде рекуррентной формулы

$$\frac{\tau_l}{\tau_{l-1}} = \frac{\tau_{i-1}}{\tau_{i-2}} + \frac{\tau_{l-2}}{\tau_{l-1}}B_{l-2}$$

Решением этого соотношения является равенство

$$\tau_i = \tau_1\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{i-1} + \sum_{k=2}^{l-1}\tau_k\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{l-k-1}\sum_{l=1}^{k-1}\frac{\tau_l}{\tau_{l+1}}B_l,$$

из которого следует

$$\frac{\tau_n - \tau_1\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{n-1}}{\tau_1\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{n-1}} = \sum_{k=2}^{n-1}\frac{\tau_k}{\tau_2}\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)^{k-1}\sum_{l=1}^{k-1}\frac{\tau_l}{\tau_{l+1}}B_l.$$

Определим $\tau(1,i)$ равенством $\tau(1,i) = \sum\limits_{m=1}^{i}\tau_m$, тогда

$$\tau(1,i) = \tau_1 + \tau_2 + \sum_{m=3}\tau_1\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{m-1} +$$
$$+\sum_{m=3}^{l}\sum_{k=2}^{m-1}\tau_k\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{m-k-1}\sum_{l=1}^{k-1}\frac{\tau_l}{\tau_{l+1}}B_l.$$

Поэтому

$$\tau(1,n) - \tau_1\sum_{l=0}^{n-1}\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{l} =$$
$$= \tau_1\sum_{m=3}^{n}\sum_{k=2}^{m-1}\frac{\tau_k}{\tau_2}\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{m-k}\sum_{l=1}^{k-1}\frac{\tau_l}{\tau_{l+1}}B_l.$$

Если значение τ_2/τ_1 зафиксировано, а все K_l ограничены, то $\tau_l \to 0, B_l \to 0$, а $\frac{\tau_l}{\tau_{l+1}} \to \frac{\tau_2}{\tau_1}$, когда $\tau_1 \to 0$. Поэтому правые части уравнений (I.98) и (I.99) стремятся к нулю при $\tau_1 \to 0$. Обозначим их через $Q(\tau_1)$ и $R(\tau_1)$ соответственно. Найдем такие ненулевые δ_1 и δ_2; что $|Q(\delta_1)| \leqslant \varepsilon$ и $|R(\delta_2)| \leqslant \varepsilon$. Существование δ_1 и δ_2, удовлетворяющих этим условиям, обеспечено поведением функций Q и R в окрестности нуля. Поскольку. значение $\tau(1,n)$ определено заданными событиями P_0 и P_n, то для каждого малого $\tau_1 < \delta_2$ искомое n является решением алгебраического уравненння, получающегося подстановкой нуля вместо правой части (I.99). Достаточно теперь приравнять δ меньшему из δ_1 и δ_2, чтобы придти к доказательству леммы.

Следовательно, для любой наперед заданной точности в окрестности неизотропной геодезической γ существует область мира такая, что для любых событий P_0 и P_n на γ и заданного τ_2/τ_s в ней имеют место формулы

$$\tau_n = \tau_1\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{n-1},$$
$$\tau(1,n) = \tau_1\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{i}.$$

С увеличением точности при неизменной кривизне мира допустимое значение τ_1 уменьшается, а n - растет. В мире Минковского формулы (I.100) и (I.101) являются точными.

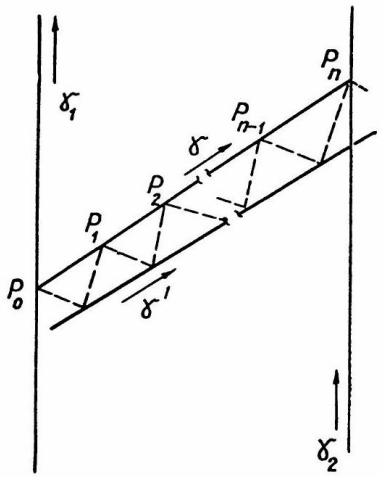
Теперь можно определить геодезический перенос эталона собственного времени. Пусть событие P_0 принадлежит одной из мировых линнй γ_1, а P_n - другой мировой линии γ_2 (рис. 4). Интер- валы (P_0,P_1) и (P_0,P_2) могут быть измерены на γ_1 и выражены через величину эталона E_0 собственного времени, локализованного в P_0. Отношение двух интервалов, измеренных одним эталоном, не зависит от величины эталона, поэтому

$$\left.\frac{(P_0P_2)-(P_0,P_1)}{(P_0,P_1)}\right|_{\gamma_1} = \left.\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)\right|_{\gamma_1} = k.$$

Интервал (P_{n-1},P_n) может быть измерен на γ_2 и выражен через величину эталона E_n, локализованного в P_n на γ_2. Согласно (I.100), имеем

$$\frac{\tau_n}{E_n}\frac{E_0}{\tau_1} = \frac{E_0}{E_n}k^{n-1}$$

Рис. 4. Если γ_1 и γ_2-мировые линии, проходящие через события P_0 и P_n соответственно; γ-мировая линия, содержащая P_0 и P_n; γ' - мировая линия свободно движущегося зеркала, компланарная γ, то интервал $(P_{n-1},\ P_n)$ связан с интервалами (P_0, P_1) и (P_1, P_2) формулой (I.100). Поэтому, измерив (P_{n-1}, P_n) на γ_2, а (P_0, P_1) и (P_0, P_2) на γ_1, можно выразить величину эталона в событии P_n на γ_2 через величину эталона в P_0 на γ_1.



Поэтому отношение величин эталонов E_0 и E_n выразится форМулой

$$\frac{E_n}{E_0} = \frac{(P_0, P_1)_{\gamma_1}}{(P_{n-1}, P_n)_{\gamma_2}} k^{n-1}.$$

Определение 7. Эталон E_n собственного времени, локализованный пиа мировой линии γ_2 в событии P_n, равен эталону E_0, локализованному на γ_1 в событии P_0, если значения интервалов $(P_0, P_1)_{\gamma_1}$ и $(P_{n-1}, P_n)_{\gamma_2}$, выраженные в эталонах E_0 и E_n соответственно, удовлетворяют равенству

$$\frac{(P_{n-1} \cdot P_n)_{Y_2}}{(P_0, P_1)_{Y_1}} = k^{n-1}.$$

В этом случае будем говорить, что эталон E_n совпадает с E_0, геодезически перенесенным из P_0 в P_n.

Если необходимо сравнить эталоны, локализованные в событиях P_0 и P на разных мировых линиях, причем P не принадле- жит световому конусу P_0, а поэтому не существует временноподобной геодезической, связывающей события P_0 и P, то достаточно выбрать какое-либо третье событие $\widetilde{P}$, принадлежащее световым конусам двух первых, так, чтобы события P_0 и $\tilde{P}, P$ и $\tilde{P}$ попарно можно было связать двумя разными, но единственными временноподобными геодезическими, осуществить вдоль них геодезический перенос эталонов из событий P_0 и P в $\widetilde{P}$ и сравнить их в этой общей точке.

С помощью геодезического переноса эталонов можно снабдить равными эталонами собственного времени все события каждой мировой линии моллюска Эйнштейна. Этим решается проблема оснащения физического мира системой согласованных эталонов собственного времени. Простейший способ согласования двух эталонов, локализованных в любых близких событиях P_0 и P_1, заключается в том, чтобы приравнять значения интервала (P_0, P_1). измеренного соответствующим эталоном в событиях P_0 и P_1. Этот способ следует из определения 7, если положить $n = 1$.

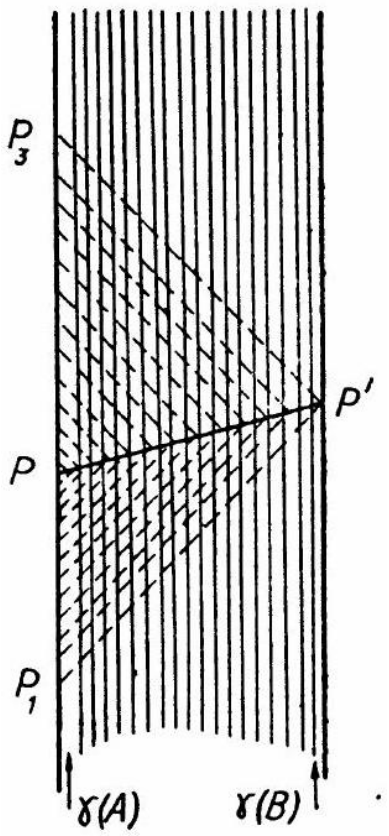
Заметим, что в случае $\tau_2 = \tau_1$ относительное расстояние между геодезическими γ и γ', вдоль которых осуществляется геодезический перенос эталонов, постоянно в приближении, в котором можно пренебречь кривизной мира. Это следует из формулы (I.82). Такие геодезические можно назвать параллельными. Для параллельных линий геодезический перенос эталонов сводится **k** осуществлению идеи геодезических часов Марцке и Уилера (1965), которые предложили любопытный метод чисто геометрического построения параллельных временноподобных геодезических линий. Их обращение к идее геодезических часов объясняется стремлением доказать существование

внутреннего по отношению к классической (не квантовой) теории относительности устройства. позволяющего в принципе измерять и сравнивать интервалы без привлечения таких внешних для этой теории устройств, как атомные часы.

27.1.13 13. Synchronization of Clocks

Для полного описания физической картины мира недостаточно только знания его метрики. Полное описание предполагает еще известным и способ разделения четырехмерного пространства мира на физическое время и трехмерное физическое пространство как множество одновременных событий. Помимо введения понятия собственного времени, отсчитываемого часами на каждой мировой линии моллюска Эйнштейна или системы отсчета, и оснащения часов единым эталоном собственного времени, необходимо также синхронизировать эти часы, чтобы оказалось возможным определять временные отношения любых событий и взаимные положения в физическом пространстве. Рассмотрим мысленный эксперимент. Пусть имеется покоящийся в данной системе отсчета твердотельный стержень. К нему не предъявляется требований абсолютной твердости, или несжимаемости, или других, столь же невыполнимых, но предполагается, что его свойства и в особенности геометрические параметры, такие как длина или поперечная деформация, не изменяются в течение короткого промежутка времени, пока длится эксперимент. Если приняты известные меры предосторожности и если длина стержня и длительность эксперимента меньше размеров и-области гравитационного взаимодействия, то это условие выполняется с любой наперед заданной точностью. Пусть один из концов A снабжен устройством, способным испускать и регистрировать световые сигналы, а другой конец B и промежуточные точки стержня снабжены полупрозрачными зеркалами, способными как отражать, так и пропускать световые сигналы. Число зеркал (вплоть до непрерывного размещения их вдоль стержня) и расстояние между ними определяются потребностями эксперимента. Мировые линии частиц стержня образуют двумерную область мира. Эта об-

Рис. 5. P_1 и P_3-события на мировой лкнин точки A, P'-событне на мировой нинии точки B, принадлежащее световым линиям P_1, P' и P', P_3. Пунктиром изображены световые линии сигналов, непрерывно испускаемых в A в интервале (P_1, P) к регистрируемых в той же точке в ннтервале (P, P_3) после их отражения от соответствующих зеркал, расположенных между P н P'.



ласть на рис. 5 изображена вертикальными прямыми между мировыми линиями $\gamma(A)$ и $\gamma(B)$ концов стержня.

Предположим теперь, что начиная с некоторого момента времени (событие P_1) из A непрерывно испускаются световые сигналы, каждый из которых отражается, по крайней мере, от одного из зеркал и регистрируется в точке A. Среди всех мировых линий сигналов, события испускания и регистрации которых заключены в интервале (P_1, P_3), существует множество непересекающихся между собой мировых линий, изображенных на рис. 5 пунктиром. Существование этого множества обеспечивается характером метрики мира: если в малой области мира отсутствуют особые точки, то каждому событию области принадлежит световая гиперповерхность, определяемая как множество всех изотропных геодезических, содержащих это событие, не пересекающаяся, по крайней мере в малой области, со световой гиперпо. верхностью любого другого события, в хронологическом будущем нли прошлом которого находится первое событие. В этом смысле каждая мировая линия светового сигнала выделенного множества лежит между событиями испускания и отражения в хронологическом будущем всех предыдущих событий испускания сигналов и не пересекается с их мировыми линиями, а между событиями отражения и регистрации - в хронологическом прошлом всех последующих событий регистрации сигналов и также не пересекается с их мировыми линиями. События отражения сигналов от зеркал, принадлежащие этому множеству, образуют линейную последовательность, ограниченную событием P' отражения сигнала от конца B стержня, с одной стороны, и некоторым предельным событием P на мировой линии конца A, с другой. В предельном событии P все три акта- испускание сигнала, отражение и регистрация - совпадают. Мировые линии световых сигналов осуществляют естественное взаимно однозначное отображение событий испускания сигналов в интервале (P_1, P) на последовательность событий $P...P'$ их отражения, чем в случае непрерывности испускания сигналов и, следовательно, гомеоморфности указанного отображения обеспечивается единственность множества непересекающихся между собой мировых линий световых сигналов.

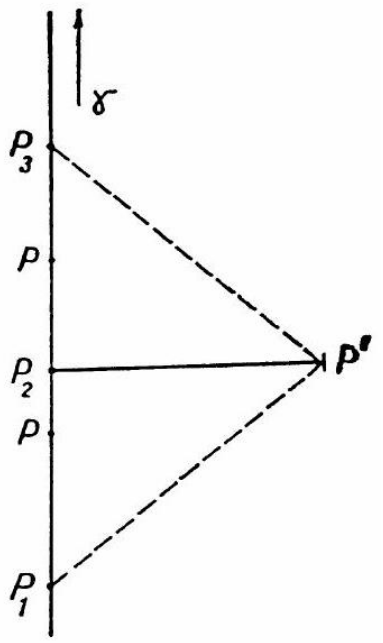
Первый вывод, который можно сделать из этого мысленного опыта, заключается в том, что совокупность событий $P...P'$ отражения снгналов представляет собой объективный трехмерный образ твердого стержня. Интергал пространственноподобной линейной последовательности $P..P'$ равен длине l стержня, а направление пространственноподобного 4-вектора (PP') в пределе, когда $P' \to P$, совпадает с трехмерным направлением $\overrightarrow{AB}$ вдоль стержня в точке A. Второй вывод - события последовательности $P..P'$ являются одновременными. Третий вывод - локальная скорость света v_c в направлениях $A \to B$ и $B \to A$ может быть найдена из данных этого опыта как пределы соответствующих отношений

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{v}_c(A \to B) = \lim_{P' \to P} \frac{l(P,P')}{\tau(P_1,P)}, \\ \boldsymbol{v}_c(B \to A) = \lim_{P' \to P} \frac{l(P \quad P')}{\tau(P,P_3)}. \end{array}\right\}$$

Если форма трехмерного образа твердого стержня и его длина, определяемые из мысленного опыта, зависят или могут зависеть от его конкретных физических и механических свойств (материал стержня, его плотность, упругость и т. д.), то два последних вывода не зависят от выбора конкретного твердого стержня, поскольку они характеризуют только закономерности распространения электромагнитной волны и особенности системы отсчета, в которую помещен неподвижный твердый стержень и в которой, следовательно, производится опыт.

Экспериментальная картина мира, следовательно, содержит и такие элементы, которые не могут быть включены в теорию, бази- рующуюся только на знании метрики мира. Задача нахождения последовательности событий отражения сигналов в рассмотренном опыте не может быть решена (не только из-за математической ее трудности в техническом отношении), до тех пор пока неизвестно уравнение твердого стержня, покоящегося в заданной системе отсчета, или двумерная область мира, образуемая мировыми линиями его частиц. Теорию необходимо дополнить либо способом синхронизации часов, либо уравнением твердого стержня*. Первое дополнение относится к общим свойствам мира в заданной системе отсчета и позволяет включить в картину мира такие наблюдаемые, как скорость света и др. Второе более мощное, содержит, помимо этого, частную информацию о форме трехмерного образа конкретного твердого стержня. Ни то, ни

Рис. 6. P_1 и P_3-события на мировой линии γ, событие P' принадлежит световым линиям P_1, P' и P', P_3 (пунктирные прямые). Событие P_2-середина интервала $[P_1, P_3]$-одновременно, по Эйнштейну, событию P'. Это верно, когда скорость света не зависит от направления. Если же она больше в направлении от $\boldsymbol{\gamma}$ к P', то событие P, одновременное с P', лежит в интервале (P_1, P_2), в противном случае-в интервале (P_2, P_3)



другое не априорно, а должно быть найдено из определенных экспериментальных данных. Проблема заключается именно в том, чтобы установить те дополнительные экспериментальные данные, которые наряду с экспериментальными значениями метрического тензора лежат в основе полного теоретического описания картины мира в заданной системе отсчета.

Пусть событиям P_1 и P_3 на мировой линии γ каких-либо часов, покоящихся в заданной системе отсчета, соответствуют испускание и регистрация светового сигнала, отраженного (событие P') от зеркала, которое вместе с другими часами системы отсчета находится на небольшом удалении от первых (рис. 6). Каждому из этих событий отвечают моменты собственного времени $\tau(P_1)$, $\tau(P_2)$ и $\tau(P')$. События P_1, P' и P_3 причинно связаны между собой, поэтому они находятся в определенном временном отношении: событие P_3 произошло позже P', а P' - позже P_1. Из-за транзитивности отношений «раньше» и «позже» (если событие P_a произошло раньше P_b, а P_b - раньше P_c, то событие P_a произошло раньше P_c, и наоборот, если P_a - позже P_b, а P_b - позже P_c, то P_a произошло позже P_c) события на мировой линии γ, проис-

Для инерциальных систем стсчета теория относительности использует оба дополнения. Часы синхронизируются способом Эйнштейна (1905a), а уравнение твердого тела определяется двумерной областью мира, «заметаемой» отрезком прямой трехмерного евклидова пространства. ходящие позже P_3 и раньше P_1, также находятся в определенном временном отношении с P', а именно, P' происходит позже всех событий, лежащих на γ раньше P_1, и раньше всех событий, лежащих на γ позже P_3, или, иначе, часть мировой линии γ до события P_1 вместе с P_1 находится в абсолютном прошлом, а часть γ после события P_3 вместе с P_3 - в абсолютном будущем P'.

Временное отношение P' с событиями на γ, лежащими между P_1 и P_3, пока еще остается неопределенным. Хотя все события в интервале (P_1, P_3) находятся в определенном временном отношении между собой, никакое суждение, например, событие P' происходит раньше (или позже) того или иного события из интервала (P_1, P_3), не имеет достаточного основания в изображенном на рис. 6 случае обмена одиночным сигналом и его эхом. Вместе с тем из прнведенного выше анализа мысленного опыта следует. что событию P' соответствует вполне определенное одновременное событие из интервала (P_1, P_3), поэтому P' находится во вполне определенном объективном временном отношении и с событиями интервала (P_1, P_3). Недостающая для установления

одновременного P' событня из интервала (P_1, P_3) информация заключена в постулируемом условии одновременности.

Одновременность событий, по Эйнштейну, основана на предположении о незавнсимости локальной скорости света от направления распространения.

Определение Эйнштейна. Одновременным событию P' являет- ся срединное событие P_2 интервала (P_1, P_3). Часы синхронизированы, если моменты $\tau(P_1), \tau(P_3)$ и $\tau(P')$ собственного времени удовлетворяют условию

$$\tau(P') = \tau(P_2) = \frac{1}{2}[\tau(P_1) + \tau(P_3)]$$

Используя определение Эйнштейна, можно получить уравнение, связывающее координаты одновременных событий, и выразить пространственное расстояние между ними через их координаты (Ландау, Лифшиц, 1973).

Лемма 10. Если события $P'\left(x^0, x^l\right)$ и $P_2\left(x^0 + dx^0, x^l + dx^l\right)$ одновременны, то их координаты удовлетворяют уравнению

$$dx^0 + \frac{g_{0l}}{g_{00}} dx^l = 0$$

а квадрат расстояния между ними определяется формулой

$$dl^2 = h_{ik} dx^i dx^k$$

где

$$h_{ik} = g_{ik} - \frac{g_{0i} g_{0k}}{g_{00}}$$

Доказательство. Положим $P_1\left(x^0 + dx^0_-, x^t + dx^l\right)$ и $P_3\left(x^0 + dx^0_+, x^l + dx^l\right)$. Поскольку события P_1 н P', P^0 и P_3 связаны попарно световыми сигналамн, вдоль которых $ds^2 = 0$, то

$$dx^0_\pm = -\frac{g_{0t}}{g_{00}} dx^l \pm \left(-\frac{h_{lk}}{g_{00}} dx^l dx^k\right)^{1/2}$$

Если теперь переписать условие (I.105) в виде

$$\tau(P_2) - \tau(P_1) = \frac{1}{2}[\tau(P_3) - \tau(P_1)]$$

и воспользоваться (I.36a), то получим справа
$\frac{1}{2}[\tau(P_3) - \tau(P_1)] = \frac{1}{2} V\overline{-g_{00}}\,(x^0(P_3) - x^0(P_1)) = \sqrt{h_{lk} dx^i dx^k}$.
а слева

$$\tau(P_2) - \tau(P_1) = V\overline{-g_{00}}\left(x^0(P_2) - x^0(P_1)\right) =$$
$$= V\overline{-g_{00}}\left(dx^0 + \frac{g_{0l}}{g_{00}} dx^l + \sqrt{-\frac{h_{lk}}{g_{00}} dx^l dx^k}\right).$$

Приравнивая, находим уравнение (I.106) одновременных событий. Определив элементарную пространственную длнну dl между одновременными событиями как модуль пространственноподобного 4-вектора $(P_2 P')$ и использовав (I.106), приходим к формуле(I.107).

Следствие 6. Локальная скорость света одинакова в противоположных направлениях и равна единице.

В этом легко убедиться, если заметить, что

$$\tau(P_1, P_2) = \tau(D_2, P_3) = l(P_2, P')$$

Следствие 7. Если событие $P_a(x^0, x^i)$ принадлежит мировой линии часов, а близкое ему событие $P_b(x^0 + dx^0, x^i + dx^i)$, вообще говоря, не принадлежит ей, то промежуток собственного времени между этими событиями выражается формулой

$$d\tau = \sqrt{-g_{00}}\left(dx^0 + \frac{g_{0t}}{g_{00}}dx^l\right).$$

Найдем событие $P_{\mathrm{c}}\left(x^0 + \Delta x^0, x^i\right)$, принадлежащее мировой линии часов и одновременное с P_b. Из (I.106) следует

$$\Delta x^0 = dx^0 + \frac{g_{0l}}{g_{00}}dx^l$$

Промежуток собственного времени между P_a и P_c равен, очевидно, искомому промежутку времени между событием P_a и од- новременным событию P_c событием P_b, а, согласно

(I36a) $\tau\left(P_a, P_c\right) = \sqrt{-g_{00}}\Delta x^0$, поэтому имеет место (I.109).

Уравнение (I.106) одновременных событий эквивалентно равенству нулю $d\tau$. Свойства линейной формы Пфаффа (I.109) и размерность интегрального многообразия уравнения Пфаффа (I.106) зависят от значения вектора $\vec{\chi}$. Необходимые и достаточные условия голономности (Степанов, 1952) формы (I.109) сводятся к равенству нулю $\vec{\chi}$, поэтому в синхронных и только синхронных системах отсчета правая часть (I.109) голономна и представляется в виде произведения $\mathrm{v}\ du$ двух скалярных относитегьно группы (I.45) функций $\mathrm{v} = \mathrm{v}\left(x^0, x^i\right)$ и $\mathrm{u} = \mathrm{u}\left(x^0, x^i\right)$, а интегральное многообразие уравнения одновременных событий является гиперповерхностью

$$\mathrm{u}\left(x^0, x^l\right) = C = \ \mathrm{const}$$

Iли

$$x^0 = \tilde{\mathrm{u}}\left(x^l; C\right)$$

Второе уравнение есть разрешенная относительно x^0 форма первого.

Фундаментальная квадратичная форма гиперповерхности (I.110) совпадает с квадратом элемента пространственной длины (I.107), поэтому физическое пространство представляется пространственноподобной гиперповерхностью одновременных точек. Коэффициенты же ω_{ik} второй ее квадратичной формы определяются равенствами

$$\omega_{ik} = -\frac{1}{2}\frac{1}{V - g_{00}}\frac{\partial h_{ik}}{\partial x^0}.$$

Метрический тензор (I.108) и коэффициенты второй квадратичной формы (I.111) задают внутреннюю и внешнюю геометрии физического пространства в каждый момент времени. Векторы $\vec{\rho}$ и $\vec{\pi}$ в этом случае совпадают.

Хотя правая часть (I.109) в синхронных системах отсчета не является, вообще говоря, полным дифференциалом, существование ее интегрирующего множителя, или, что эквивалентно, существование гилерповерхности (I.110) одновременных событий. дает возможность естественным образом ввести функцию t, значения которой равны промежуткам времени между любыми, не только близкими, событиями в данной системе отсчета (Арифов, Беспалова, 1970).

Следствие 8. В синхронной системе отсчета время t между любыми событиями (x_0^0, x_0^i) и (x^0, x^i), измеренное по часам, покоящимся в точке x_0^i, определяется формулой

$$t = \int_{x_0^0}^{\bar{u}} \sqrt{-g_{00}\left(\xi, x_0^l\right)}d\xi,$$

$$\overline{\mathrm{u}} \equiv \tilde{\mathrm{u}}\left(x_0^l; \mathrm{u}\left(x^0, x^l\right)\right).$$

Назовем точку нахождения измеряющих часов опорной, к пусть в точке x_1^i пронсходит событие, значение временной координаты которого обозначим через x_1^0. Координаты всех событий, одновременных этому, удовлетворяют в соответствии с (I.110б) уравнению

$$x^0 = \tilde{\mathrm{u}}\left(x^i; \mathrm{u}\left(x_{\mathrm{i}}^0, x_1^i\right)\right)$$

которое превращается в тождество, если $x^l = x_1^l$ и $x^0 = x_1^0$. В частности, $\tilde{\mathrm{u}}\left(x_0^i, \mathrm{u}\left(x_1^0, x_1^l\right)\right)$ определяет в опорной точке x_0^i значение временной координаты события, одновременного событию $\left(x_1^0, x_1^l\right)$. Поэтому интеграл

$$t = \int_{x_0^0}^{\bar{u}} \sqrt{-g_{00}\left(x^0, x_0^i\right)} dx^0, \bar{\mathrm{u}} \equiv \tilde{\mathrm{u}}\left(x_0^i; \mathrm{u}\left(x_1^0, x_1^i\right)\right)$$

представляет собой время между событиями $\left(x_0^0, x_0^l\right)$ и $(x_1^0,\ x_1^i)$, измеренное по часам в опорной точке. Опуская индекс 1^* из-за произвольности события (x_1^0, x_1^i), получаем выражение (I.112a) для времени t между любым событием (x^0, x^i) и событием (x_0^0, x_0^i), выбранным за начало отсчета времени в опорной точке x_0^i.

Время t является, таким образом, функцией двух событий

$$t = t\left(x_0^0, x_0^l; x^0, x^l\right)$$

и удовлетворяет очевидным соотношениям

$$t\left(x_0^0, x_0^l; x^0, x_0^i\right) = \tau\left(x^0, x_0^l\right),$$
$$t\left(x_0^0, x^l; x^0, x^l\right) = \tau\left(x^0, x^i\right).$$

Из (I.110a) и (I.112a) следует, что уравнение гиперповерхности одновременных событий можно переписать в привычном виде

$$t = \text{ const}.$$

Удобно для применения выражение дифференциала времени

$$dt = e^{\varphi}\sqrt{-g_{00}}\left(dx^0 + \frac{g_{0l}}{g_{00}} dx^l\right)$$

где скалярная функция φ определяется криволинейным интегралом

$$\varphi = -\int_{\left(x_0^l\right)}^{\left(x^l\right)} \rho_k\left(t = \text{ const},\ x^n\right) dx^k.$$

Введем операции производной по времени

$$\partial_0 \equiv \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{x^l = \text{const}} = \left.\frac{e^{-\varphi}}{\sqrt{-g_{00}}} \frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x^i = \text{ const}}$$

и производной в физическом пространстве

$$\partial_l \equiv \left.\frac{\partial}{\partial x^l}\right|_{t = \text{ const}} = \left.\frac{\partial}{\partial x^l}\right|_{x^0 = \text{ const}} - \left.\frac{g_{0i}}{g_{00}} \frac{\partial}{\partial x^0}\right|_{x^k = \text{ const}.}$$

Используя их, можно убедиться, что ротор вектора $\vec{\rho}$ в синхронных системах отсчета равен нулю, поэтому функция φ существует и однозначна.

Обе части соотношения (I.113) инвариантны относительно преобразования координат (I.45), оставляющего неизменной систему отсчета, поэтому достаточно проверить их равенство в одной из координатных сеток синхронной системы отсчета. Для этой цели удобно воспользоваться координатной сеткой, в которой $g_{0i} = 0$. Существование такой сетки в синхронной системе отсчета обеспечивается леммой 6. Если $g_{0i} = 0$, то левая часть сразу же вычисляется дифференцированием (I.112a), а правая - подстановкой (I.50a) в (I.114). При этом следует учесть, что гиперповерхность $t = \text{const}$ в данном случае совпадает с гиперповерхностью $x^0 = \text{const}$.

Учитывая (I.108) и (I.113), интервал ds представим в каноническом виде

$$ds^2 = -e^{-2\varphi}dt^2 + dl^2$$

Физический смысл функции $\varphi\left(t, x^l; x_0^l\right)$ состоит в том, что она равна взятому с обратным знаком логарифму скорости света $\boldsymbol{v_c}$ в момент времени t в точке пространства x^i, измеренной по часам, находящимся в точке x_0^l. Локальная скорость света, измеренная по местным часам, равна единице. Это следует из свойства функции φ

$$\varphi\left(t, x_0^l; x_0^i\right) = \varphi\left(t, x^l; x^l\right) = 0.$$

Вообще же скорость света отлична от единиды и, как и время t, является функцией двух точек: точки пространства, для которой она измеряется, и местоположения измерительного прибора. Однако в любой точке скорость света остается наибольшей из всех возможных в физических процессах.

Градиент скорости света определяется свойствами системы отсчета только в данной точке в данный момент времени

$$\partial \ln v_c = \rho_l$$

так что направление увеличения скорости света совпадает с направлением абсолютного ускорения системы отсчета.

Функция времени (I.112) в общем случае несимметрична относительно перестановки событий (x_0^0, x_0^i) и (x^0, x^i). Она симметрична, если система отсчета не только синхронная, но и неускоренная. В неускоренной синхронной системе отсчета $\varphi = 0$, временная ось совпадает с единственной временной координатой x^0, в которой, согласно лемме 7, $g_{00} = -1$ и $g_{0i} = 0$.

В несинхронной системе отсчета $\chi_{lk} \neq 0$, поэтому необходимое и достаточное условне голономности формы Пфаффа (I.109) не выполняется, и размерность интегрального многообразия уравнения одновременных событий (I.106) меньше трех. В таких системах отсчета не существует образов времени и физического пространства, которые в малом удовлетворяли бы определению одновременности Эйнштейна. Эта невозможность глобального описания физических процессов в пространстве и во врмени, однако, обусловлена не каким-либо свойством, присущим природе мира илн неснхронной системе отсчета, а предположением, лежащнм в основе определения Эйнштейна.

Лемма 11. Определение Эйнштейна одновременных событий удовлетворяет локальному условию транзитнвности в снхронных и только синхронных снстемах отсчета.

Д ок а з а т е л ст в о. Рассмотрим мировые линии трех блнзких элементов системы отсчета (рии. 7). Пусть P_1 одновременно P_0, а P_2 одновременно P_1, тогда P_2 одновременно P_0 в том и только том случае, если $\chi_{lk} = 0$. Действительно, коорднnаты одновременных событий P_0, P_1, P_2 и P_3 связаны в соответствии с (I.106) равенствами

$$x^0(P_1) = x^0(P_0) - \left(\frac{g_{0l}}{g_{00}}\right)_{P_0} dx^i,$$

$$x^0(P_2) = x^0(P_1) - \left(\frac{g_{0l}}{g_{00}}\right)_{P_1} \left(\delta x^i - dx^i\right),$$

$$x^0(P_2) = x^0(P_2) + \left(\frac{g_{0i}}{g_{00}}\right)_{p} \delta x^l.$$

Складывая их почленно, получаем

$$x^0(P_3) - x^0(P_0) = -\left(\frac{g_{0i}}{g_{00}}\right)_{P_0} dx^l - \left(\frac{g_0 i}{g_{00}}\right)_{P_1} \Delta x^i - \left(\frac{g_{0l}}{g_{00}}\right)_{P_2} \left(-\delta x^i\right)$$

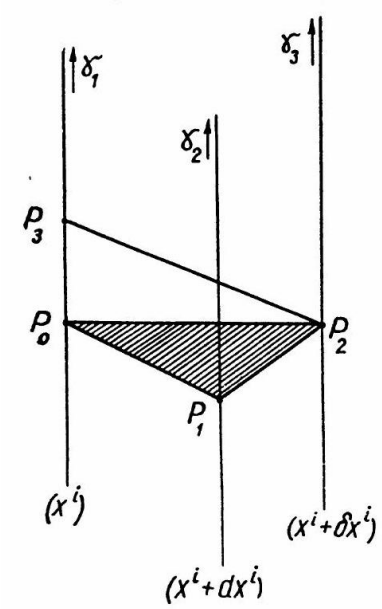
здесь $\Delta x^i = \delta x^i - dx^l$. Так как δx^i и Δx^i малы, то правую часть по формуле Стокса (Смирнов, 1965) можно заменить выражением

$$-e^{ikl} n_l \partial_k \left(\frac{g_{0l}}{g_{00}}\right) dS$$

представляющим собой произведение площади треугольника $P_0P_1P_2$ на проекцию ротора величины g_{0l}/g_{00} на единичный вектор нормали $\vec{n}$ к треугольнику ($e^{\imath kl}$ - тензор Леви-Чивита). Поэтому

$$\tau\left(P_3\right)-\tau\left(P_0\right)=2(\vec{n}\chi)dS$$

Если $\vec{\chi}=0$, то событие P_3, одновременное P_2, совпадает с P_0, и условие транзитивности удовлетворяется. В несинхронных же систе-



мах отсчета события P_0 и P_3 не совпадают.

Предположение о независимости скорости света от направления естественно для инерциальных систем отсчета мира Минковского и оправдано отсутствием противоречия между следствия-

Рис. 7. В несинхронной системе отсчета одновременность по Эйнштейну не удовлетворяет условию транзитивности. Пусть γ_1,γ_2 и γ_3-мировые линии близких элементов системы отсчета. Событке P_1 одновременно P_0, а P_2-событию P_1, согласно определению Эйнштейна. Но P_2 не одновременно P_0, если тензор вращения отлкчен от нуля. На γ_1 событию P_2 одновременно P_3. Событие P_3 находится в абсолютном будущем P_0, если направление обхода P_0,P_1,P_2,P_0 совпадает с направлением вращения системы отсчета, и-в абсолютном прошлом P_0, если оно противоположно.

ми, вытекающими из него, и опытными данными. Но применение его к произвольным системам отсчета ничем не обосновано. Из опе ределения Эйнштейна, например, непосредственно следует постоянство локальной скорости света в синхронных системах отсчета. Но нет никаких оснований ожидать постоянства или хотя бы изотропности скорости света в несинхронных системах отсчета. Напротив, известный оптический опыт Саньяка (Sagnac, 1914) указывает на явную зависимость локальной скорости света от направления распространения во вращающейся снстеме отсчета, которая относится как раз к классу несинхронных. Но если скорость света по сути своей анизотропна, одновременные событня не могут удовлетворять определению Эйнштейна. Если она различна в противоположных направлениях, то событие P, одновременное с P' (рис. 6), делит, как это следует из формул (I.104), интервал (P_1,P_3) на неравные части. Поэтому, отказавшись от определения Эйнштейна, постулируем другое достаточно общее определение одновременности, свободное от априорного требования независимости скорости света от направления (Арифов, 1973 а)

Определение 8. Одновременным событию P' является событие P, момент собственного времени которого удовлетворяет условию.

$$\tau(P)=\frac{1}{2}\left[\tau\left(P_1\right)+\tau\left(P_3\right)\right]+\frac{1}{2}\left[\tau\left(P_1\right)-\tau\left(P_3\right)\right]\frac{a_n dx^n}{\sqrt{\left(g_{ik}-\frac{g_{0l}g_{0k}}{g_{00}}\right)dx^l dx^k}}.$$

Здесь $dx^l=x^l(P)-x^i\left(P'\right)$. Часы синхронизированы, если $\tau\left(P'\right)=\tau(P)$

Условие (I.116) отличается от условия Эйнштейна (I.105) слагаемым, пропорциональным проекции вектора $\vec{a}$ иа направление, которое задается одновременными событнями P н P' (рис. 6). Это слагаемое и определяет степень анизотропности скорости света в данном направлении в данной системе отсчета. В синхронной системе отсчета скорость света не зависит от направления, поэтому условие одновременности (I.116) сводится к условию Эйнштейна:

$$\vec{a} = 0, \text{ когда } \vec{\chi} = 0.$$

В произвольной же системе отсчета векторное поле $\vec{a}$, вообще, отлично от нуля и определенным образом характеризует несинхронную систему отсчета.

Из существования причинной связи между событиями P_1, P' и P_3 и из определения 8 следует неравенство, которому удовлетворяет поле $\vec{a}$:

$$|a_n dx^n| < \sqrt{\left(g_{ik} - \frac{g_{0l}g_{0k}}{g_{00}}\right) dx^l dx^k}$$

Лемма 12. Если события $P'\left(x^0, x^l\right)$ и $P\left(x^0 + dx^0, x^l + dx^l\right)$. одновременны согласно определению 8, то их координаты удовлетворяют уравнению

$$dx^0 + \frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^l + \frac{a_n}{\sqrt{-g_{00}}} dx^n = 0$$

а квадрат расстояния между ними определяется формулой

$$dl^2 = h_{lk} dx^l dx^k$$

тде

$$h_{lk} = g_{lk} - \frac{g_{0t}g_{0k}}{g_{00}} - a_t a_k$$

Промежуток собственного времени между двумя произвольными, но близкими событиями $P_a\left(x^0, x^t\right)$ и $P_b\left(x^0 + dx^0, x^t + dx^t\right)$, первое из которых принадлежит мировой линии часов, выражается формулой

$$d\tau = V\overline{-g_{00}} \left(dx^0 + \frac{g_{0l}}{g_{00}} dx^l\right) + a_\imath dx^l.$$

Лемма доказывается так же, как лемма 10 и следствие 7.

Поскольку физическое пространство в некоторый фиксированный момент времени есть гиперповерхность одновременных точек, то размерность интегрального многообразия уравнения Пфаффа (I.119) одновременных точек должна быть равна трем. Это возможно в том и только том случае, если линейная форма Пфаффа (I.122) голономная. Условия голономности формы (I.122)

$$a_{l,k} - a_{k,l} - \left(\frac{g_{0k}}{g_{00}} + \frac{a_k}{V - g_{00}}\right) a_{l,0} + \left(\frac{g_{0l}}{g_{00}} + \frac{a_i}{V - g_{00}}\right) a_{k,0} + \\ + a_k \rho_i - a_l \rho_k = -2\chi_{lk}$$

представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, которым подчиняется векторное поле $\vec{a}$.

Интегральное многообразие (гиперповерхность) уравнения Пфаффа (I.119) по-прежнему можно представить равенствами (I.110). Коэффициенты первой квадратичной формы этой гиперповерхности совпадают с компонентами тензора (I.121). Геометрический смысл неравенства (I.118) поэтому состоит в существенной положительности длины дуги в физическом пространстве.

Повторив рассуждения, использованные в оправдание следствия 8, можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Следствие 9. Если в заданной системе отсчета гиперповерхность $\mathrm{u}\left(x^0, x^l\right) = C$, или в разрешенной форме $x^0 = \tilde{\mathrm{u}}\left(x^l; C\right)$, является интегральным многообразием уравнения (I.119) одновременных точек, то время между любыми событиями $\left(x_0^0, x_0^i\right)$ и $\left(x^0, x^l\right)$,

измеренное по часам, покоящимся в точке x_0^l, определяется формулой (I.112a). Хотя время $t\left(x_{0,}^n, x_0^1; x_2^0, x_2^l\right) - t\left(x_0^0, x_0^i; x_1^0, x_1^i\right)$ между произвольными двумя событиями $\left(x_1^0, x_1^l\right)$ и $\left(x_2^0, x_2^i\right)$ зависит от опорной точки x_0^l, в которой оно измеряется, геометрия пространства не зависит от выбора этой точки. Все события, одновременные относительно одной опорной точки, одновременны также и относительно любой другой. Одна и та же совокупность событий, удовлетворяющих уравнению $dt = 0$, представляет собой физическое пространство во всех возможных опорных точках, но в разных опорных точках эта совокупность отнесена к разным моментам времени. Поэтому результат любого геометрического измерения, проведенного на пространственной гнперповерхности в некоторый момент времени относительно данной опорной точки, совпадает с результатом измерения, проведенного на пространственной гиперповерхности в соответствующий момент времени относительно другой опорной точки.

Лемма 13. Пусть скалярная функция двух точек $\varphi\left(x_0^0, x_0^l; x^0, x^1\right)$ определена так, что

$$\vartheta = -\int\limits_{\left(x_0^l\right)}^{\left(x^l\right)} \beta_k\left(t = \text{ const}, x^n\right) dx^k,$$

где

$$\beta_i = \rho_t - \frac{1}{\sqrt{-y_{00}}} a_{l,0}$$

Тогда дифференциал времени выражается формулой

$$dt = e^{\varphi}\left[\sqrt{-g_{00}}\left(dx^0 + \frac{g_{0\ell}}{g_{00}} dx^l\right) + a_l dx^l\right]$$

Д о к а з а т е л ьст в о. Криволинейнь:й интеграл в (I.124) не зависнт от пути интегрирования, так как ротор вектора $\vec{\beta}$ равен нулю. Это нетрудно проверить, применив к (I.125) операцию производной в физическом пространстве

$$\partial_t \equiv \left.\frac{\partial}{\partial x^l}\right|_{t=\text{ const}} = \frac{\partial}{\partial x^l|_{x^0=\text{ const}}} - \left(\frac{g_{0i}}{g_{00}} + \frac{a_\imath}{\sqrt{-g_{00}}}\right)\frac{\partial}{\partial x^0}$$

и воспо.тьзовавшись (I.49), (I.50 а) и (I.123). Поэтому функция φ, определенная равенством (I.124), существует и однозначна.

Так как $dt = 0$ есть уравнение гиперповерхности одновременных точек, то dt отличается от левой части (I.119) только нехоторой функцией, являющейся интегрирующим множителем формы (I.122) Пфаффа. Обозначив эту функцию через e^{φ}, получим (I.126). Цокажем теперь, что логарифм интегрирующего множителя удовлетворяет равенству (I.124). Произведем для этого преобразование координат из группы (I.45)

$$x^0 \to x'^0 = t\left(x^0, x^l\right)$$

Обратное ему преобразование запишем в виде

$$x'^0 \to x^0 = x^0\left(x'^0, x^i\right) = x^0\left(t, x^l\right).$$

В силу инвариантности обеих частей равенства (I.126) относительно группы (I.45) можно переписать его в координатах (x^{00}, x^i) :

$$dt = e^{\varphi'}\left[\sqrt{-g'_{00}}\left(dx'^0 + \frac{g'_{0i}}{g'_{00}} dx^i\right) + a'_i dx^i\right].$$

Но из преобразования координаты x^0 непосредственно следует

$$dt = dx'^0$$

Сравнивая последние равенства, находим

$$e^{-\varphi'} = \sqrt{-g'_{00}}, \quad a'_i = \frac{g'_{0l}}{\sqrt{-g'_{00}}}$$

или

$$e^{-\varphi} = \sqrt{-g_{00}}\frac{\partial x_0}{\partial t},$$
$$a_i = \frac{g_{0t}}{\sqrt{-g_{00}}} - \sqrt{-g_{00}}\frac{\partial x^0}{\partial x^l|_{t=\text{ const}}}.$$

Разрешая их относительно производных, получаем систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка для искоМой $x^0(t, x^i)$

$$\frac{\partial x^0}{\partial t} = \frac{e^{-\varphi}}{\sqrt{-g_{00}}},$$
$$\frac{\partial x^0}{\partial x^l} = -\frac{g_{0i}}{g_{00}} - \frac{a_i}{\sqrt{-g_{00}}}.$$

Решение этой системы существует, так как существует обратное преобразование $x'^0 \to x^0(t, x^i)$, поэтому условия совместности уравнений системы выполняются тождественно. Одна группа условий совместности

$$\partial_l\left(\frac{g_{0k}}{g_{00}} + \frac{a_k}{\sqrt{-g_{00}}}\right) - \partial_k\left(\frac{g_{0i}}{g_{00}} + \frac{a_l}{\sqrt{-g_{00}}}\right) = 0$$

выполняетя благодаря уравнениям (I.123), а вторая

$$\partial_t\left(\frac{e^{-\varphi}}{\sqrt{-g_{00}}}\right) = -\partial_0\left(\frac{g_{0\ell}}{g_{00}} + \frac{a_t}{\sqrt{-g_{00}}}\right)$$

сводится к уравнению

$$\partial_t\varphi = -\beta_\ell$$

которое интегрируется равенством (I.124). Лемма доказана.

Имея в виду (I.126) и (I.120), интервал ds теперь запишем в каноническом виде

$$ds^2 = -e^{-2\varphi}dt^2 + 2e^{-\varphi}a_t dx^i dt + dl^2$$

В соответствии с этим скалярное φ и векторное $\vec{a}$ поля естественно назвать метрическими.

Если в заданной системе отсчета известны метрический тензор мира и метрическое векторное поле в функции координат x^0 и x^i, то, согласно лемме 12 и следствию 9, можно построить однопараметрическое семейство гиперповерхностей одновременных событий, представляющих образ физического пространства в каждый данный момент времени, синхронизнровать часы во всем пространстве и отыскать метрическое скалярное поле. наоборот, часы синхронизированы, если заданные в функции координат t и x^i метрические скалярное и векторное поля и метрический тензор пространства связаны с метрическим тензором мира, заданным в этих же координатах, алгебраическими равенствами

$$g_{00}\left(t, x^k\right) = -e^{-2\varphi}, g_{0i}\left(t, x^k\right) = e^{-\varphi}a_l, g_{in}\left(t, x^k\right) = h_{in}$$

Поэтому имеет место следующая теорема.

Теорема 23. Для полного теоретического описания картины мира в данной системе отсчета необходимо знание, помимо метрики мира, метрического векторного поля в функции координат x^α.

Так как метрика пространства выражается через метрическнй тензор мира и ковариантные компоненты метрического векторного поля равенством (I.121), то контравариантные компоненты метрического тензора пространства и метрического вектора определяются соответственно

$$h^{ik} = g^{lk} + g^{ln}g^{kl}a_n a_l \left(1 - g^{mj}a_m a_j\right)^{-1},$$
$$a^l = g^{lk}a_k \left(1 - g^{mj}a_m a_j\right)^{-1}.$$

Поэтому для модуля метрнческого вектора имеем

$$a = \sqrt{\frac{g^{lk}a_i a_k}{1 - g^{mj}a_m a_j}}.$$

Используя эти равенства и (I.51), находим, что

$$\vec{\rho} = \vec{\pi} + \vec{a}(\vec{a}\vec{\pi}), \quad \vec{\pi} = \vec{p} - \vec{a}\frac{(\vec{a}\vec{p})}{1 + a^2}$$

Векторы $\vec{\rho}$ и $\vec{\pi}$, определяющие абсолютное ускорение системы отсчета (теорема 13), совпадают, если снстема отсчета сннхронная иди метрический вектор нормален К ним. Метрическое векторное поле отлично от нуля только в несинхронных системах отсчета, источником его является аксиальный вектор $\vec{x}$, поэтому естественно предположить, что метрический вектор удовлетворяет условию

$$(\vec{a}-) = 0$$

или

$$e^{ikl}\chi_{ik}a_l = 0$$

метрический вектор, по этому предположению, ортогонален оси вращения.

27.1.14 14. Anisotropy of the Speed of Light

Из канонического выражения (I.127) квадратичной формы мира следует формула для модуля скорости света в направлении, составляющем с метрическим вектором угол α:

$$v_c = e^{-\xi}\left(-a\cos\alpha + \sqrt{1 + a^2\cos^2\alpha}\right)$$

Скорость света, таким образом, зависит в данной точке от направления распространения, имеет наименьшее значение в направлении метрического вектора и наибольшее - в противоположном. Во всех направлениях, образующих круглую коническую поверхность с вершиной в данной точке и осью симметрии вдоль метрического вектора, скорость света одинакова. Произведение модулей скорости света в любых двух направлениях, принадлежащих разным взаимно дополняющим коническим поверхностям, не зависит от направления:

$$\sqrt{v_c(\alpha)v_c(\pi - \alpha)} = e^{-\varphi}$$

В частности, произведение значений скорости в двух противоположных направлениях постоянно в данной точке, и если обозначить через $\bar{v}_c$ модуль вектора $(-\vec{v}_c)$, то

$$e^{2\varepsilon}v_c\bar{v}_c = 1$$

В случае локальной скорости света, когда точка отнесения скорости света совпадает с опорной и $\varphi = 0$ в соответствии с (I.134), имеем

$$v_c(\alpha) = v_c^{-1}(\pi - \alpha) \text{ и } \boldsymbol{v}_c = \bar{v}_c^{-1}$$

Прямые вычисления показывают, что правые части формул (I.104) сводятся к выражению в скобках (I.134), как это и должно быть для локальной скорости света. Величина или степень анизотропности скорости света равна модулю метрического вектора, т. е.

$$\frac{v_c^{(\max)} - v_c^{(\min)}}{2\sqrt{v_c^{(\max)}v_c^{(\min)}}} = a.$$

Поверхностью анизотропии скорости света в данной точке M, определяемой как совокупность точек, расстояние которых от M равно модулю локальной скорости света в направлении этих точек, является сфера радиуса $\sqrt{1+a^2}$ с центром, смещенным от M на вектор - $\vec{a}$.

В синхронной и только синхронной системе отсчета, когда метрический вектор вслед за $\vec{\chi}$ обращается в нуль, скорость света не зависит от направления, в несинхронной же системе она анизотропна. Это характернейшее свойство распространения света трудно обнаружить в прямом физическом эксперименте, и еще менее вероятна материализация в том или ином варианте мысленного опыта, предложенного в начале §13. Но оно проявляется в различных физических процессах. В 24 обсуждается один из возможных способов измерения метрического векторного поля и, следовательно, нахождения поверхности анизотропии скорости света.

Гуусть $x^\alpha(\sigma)$ - координаты текущей точки временноподобной мировой линии частицы. Подставляя (I.134) в квадрат интервала (I.127) вдоль мировой линии и имея в виду скорость света в направлении скорости $\vec{v}$ частицы, находим, что

$$-ds^2 = d\sigma^2 = dt^2\,(\sigma_c - v)\,(\bar{v}_c + v)$$

Временноподобные геодезические являются, с одной стороны, мировыми линиями свободной частицы (следствие 3), с другой экстремалями функционала (Эйзенхарт, 1948)

$$\text{const} \int\limits_{(1)}^{(2)} d\sigma,$$

поэтому действие S свободной частицы можно записать следующим образом:

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} L dt,$$

$$L = -m\sqrt{(v_c - v)\,(\bar{v}_c + v)}.$$

Функции Лагранжа свободной частицы возвращена каноническая форма ее выражения.

27.1.15 15. Rotating Reference Frame

Примером несинхронной системы отсчета может быть равномерно вращающаяся система в мире Минковского. Она представляет особый интерес, так как реальная система отсчета, в которой суждено находиться земному наблюдателю, в первом приближении является именно такой.

Квадратичная форма мира Минковского в равномерно вращающейся системе отсчета имеет вид (I.92). Перепишем ее, опустив для удобства штрихи у r, φ, z и заменив t' обычным обозначением x^0:

$$ds^2 = -\left(1-\omega^2 r^2\right)\left(dx^0\right)^2 + 2\omega r^2 d\varphi dx^0 + dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$$

Имеем, следовательно,

$$\left.\begin{array}{c} g_{00} = -\left(1-\omega^2 r^2\right), \quad g_{02} = \omega r^2, \quad g_{11} = g_{33} = 1 \\ g_{22} = r^2, \quad \rho_1 = \pi^1 = -\frac{\omega^2 r}{1-\omega^2 r^2} \\ \chi_{12} = \frac{\omega r}{(1-\omega^2 r^2)^{3/2}} \end{array}\right\}$$

остальные компоненты равны нулю.

Согласно теореме 13, абсолютное ускорение каждого элемента этой системы отсчета направлено к оси вращения и имеет значение $\omega^2 r/\left(1-\omega^2 r^2\right)$.

Уравнения (I.123) после подстановки в них (I.137) имеют единственное решение, удовлетворяющее к тому же условиям постоянства и симметрии, (I.117) и алгебраическому уравнению (1.133):

$$a_1 = a_3 = 0, \quad a_2 = \frac{\omega r^2}{\sqrt{1-\omega^2 r^2}}$$

или

$$\vec{a} = \frac{[\vec{\omega}\vec{r}]}{\sqrt{1-\omega^2 r^2}}.$$

Произведя необходимые вычисления, получим

$$t = \sqrt{1-\omega^2 r_0^2}\left(x^0 - x_0^0\right),$$

$$e^{\varphi(P_0,P)} = \sqrt{\frac{1-\omega^2 r_0^2}{1-\omega^2 r^2}},$$

$$h_{11} = h_{33} = 1, \quad h_{22} = r^2, \quad h_{12} = h_{13} = h_{23} = 0,$$

$$v_c = \left(1-\omega^2 r_0^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\omega r\cos\alpha + \sqrt{1-\omega^2 r^2\sin^2\alpha}\right);$$

здесь $P_0\left(x_0^0, r_0, Q_0, z_0\right)$ - опорное событие, α - угол между направлением распространения света и метрическим вектором. Теорема 24. В мире Минковского события, одновременные в равномерно вращающейся системе отсчета, одновременны и в инерциальной системе отсчета, относительно которой ось вращающейся системы неподвижна; геометрия пространства евклидова; скорость света анизотропна, имеет наименьшее значение в направлении вращения и наибольшее - в противоположном.

Бытующие в литературе представления противоречат теореме 24. В частности, длина пространственной кривой определяется формулой (Эддингтон, 1934; Мёллер, 1975; Ландау, Лифшиц, 1973; Зельдович, Новиков, 1967; Тоннела 1962 и др., см., например, ссылки у Тоннела)

$$dl^2 = dr^2 + \frac{r^2 d\varphi^2}{1-\omega^2 r^2} + dz^2$$

следующей из (I.107) после подстановки в нее (I.137). Пространство с такой квадратичной формой действительно неевклидово, в чем обычно предлагается убедиться простым вычислением отношения длины окружности с центром на оси вращения **k** ее радиусу. Но это пространство не является подпространством мира Минковского. Если предположить, что пространство (I.143) вложено в мир Минковского, то коэффнциенты второй квадратичной формы его должны удовлетворять уравнениям Гаусса и Кодации (I.26 а, б) с нулями в левой части. Можно видеть, однако, что эти уравнения при подстановке в их правые части коэффициентов первой квадратичной формы (I.143) не имеют решения в действительной области значений второй квадратичной формы. Полученное противоречие означает, что в мире Минковского не существует гиперповерхности с метрикой (I.143). Этот же вывод, впрочем, следует и из отсутствия интегрального многообразия нужной размерности уравнения

$$dx^0 - \frac{\omega r^2 d\varphi}{1-\omega^2 r^2} = 0$$

которое получается из (I.106) подстановкой в него (I.137). Именно это уравнение превращает пространство (I.143) в подпространство мира Минковского (I.136). Отсутствие трехмерного интегрального многообразия этого уравнения связано с отличием от нуля вектора $\vec{x}$, т. е. несинхронностью вращающейся системы отсчета.

Таким образом, предлагаемые обычно исследования геодезических линий в пространстве (I.143) как траекторий движения материальной точки на вращающемся диске или расчеты отношения длины окружности к радиусу остаются полезными математическими упражнениями, но не имеют отношения к равномерно вращающейся системе отсчета в мире Минковского*.

Результаты вычисления отношения длины окружности к радиусу в про. странстве (I.143) совпадают с выводом, к которому пришел Эйнштейн (1921), анализируя процесс измерения на вращающемся диске. Он учитывает лоренцево сокращение длины, но

игнорирует влияние ускорения на эталоны, считая его несущественным Это предположение, достаточно произвольное само по себе, следует теперь признать неоправданным. В эффекте анизотропности скорости света состоит простое объяснение опыта Саньяка с точки зрения наблюдателя, покоящегося на вращающемся теле. Для инерциального наблюдателя объяснение эффекта Саньяка заключается, как известно, в различии длины путей, проходимых лучами в противоположных направлениях, из-за движения точки, в которой лучи расщепляются, а затем интерферируют. Для покоящегося же на вращающемся теле наблюдателя объяснение заключается в различии скорости света в противоположных направлениях. Разность времени прохождения лучами одного и того же замкнутого контура в противоположных направлениях определяется криволинейным интегралом

$$\Delta t = \oint \left(\frac{1}{v_c} - \frac{1}{\bar{v}_c} \right) dl,$$

который в первом приближении по $\omega r \ll 1$ равен $\pm 4\omega S$(S - площадь проекции фигуры, описанной лучами, на плоскость $z = \text{const}$). Эта разность и соответствующая ей разность оптического хода лучей обусловливают интерференционную картину в опыте Саньяка.

Необходимо подчеркнуть всю важность объяснения опыта Саньяка именно с позиции находящегося на вращающемся теле наблюдателя, так как этот опыт весьма прозрачно свидетельствует в пользу зависимости локальной скорости света от направления. Пусть из точки положения этого наблюдателя исходят два луча, обегают в противоположных направлениях замкнутый контур длины l и снова сходятся в начальной точке. Наблюдатель измеряет по своим часам время пробегания контура лучами, иначе говоря, ставит опыт Саньяка, и обнаруживает, что лучи обходят контур за различное время: $t^+ = l + 2\omega S$ (в направлении вращения) и $t^- = l - 2\omega S$. Он вправе заключить, что им проведено прямое измерение средних скоростей света $v^+_{\text{ср}} = 1 - \frac{2\omega S}{l}$ и $v^-_{\text{ср}} = 1 + \frac{2\omega S}{l}$ на коптуре. поскольку метрики мира и пространства постоянны и среда отсутствует, то каждый малый элемент контура лучи проходят в одинаковых условиях, если не принимать во внимание направление прохождения. Поэтому из различия измеренных средних скоростей света на контуре с необходимостью следует вывод о различии скоростей света в каждом элементе контура в зависимости от направления. Анизотропность скорости света для вращающегося наблюдателя является экспериментальным фактом.

27.1.16 16. Covariant Formulation of Simultaneity

Определению одновременности можно придать форму, ковариантную относительно общей группы преобразований (I.47) координат. Изложение проблемы синхронизации часов в форме трехмерных наблюдаемых отвечает требованию большей прозрачности физического смысла, однако явная общековариантная форма уравнений имеет свои достоинства (сводящиеся, как правило, к математической простоте и эвристичности).

Из формулы (I.65) видно, что компоненты тензора вращения (I.49) представляются набором инвариантов общей группы преобразований. Это возможно вследствие совпадения их в собственной системе отсчета с компонентами 4-тензора:

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(u_{\beta,\alpha} - u_{\alpha,\beta} + u_\alpha w_\beta - u_\beta w_\alpha \right).$$

Действительно, из определения следует, что тензор $\chi_{\alpha'_\rho}$ ортогонален u^α :

$$\chi_{\alpha^\rho_i} u^\beta = 0$$

а 4-векторы скорости и абсолютного ускорения в собственной системе отсчета выражаются через метрику мира равенствами (I.48) и (I.53), поэтому $\chi_{0\alpha} = 0$, а χ_{ik} совпадают с правой частью. (I.49). Введем 4-вектор a_μ, ортогональный 4-скорости элемента системы отсчета. В собственной системе отсчета его временная компонента равна нулю. Отождествим пространственные компоненты 4-вектора $a_\mu c$ метрическим вектором a_i в собственной системе отсчета. Тогда равенства (I.116), (I.122) - (I.126) перепишутся в виде

$$\tau(P) = \frac{1}{2}\left[\tau\left(P_1\right) + \tau\left(P_3\right)\right] +$$
$$+\frac{1}{2}\left[\tau\left(P_1\right) - \tau\left(P_3\right)\right]\frac{a_\mu dx^\mu}{V - g_{\alpha,3} + u_\alpha u_\beta)\, dx^\alpha dx^\beta},$$
$$d\tau = \left(a_\mu - u_\mu\right) dx^\mu,$$
$$dt = e^\nu \left(a_\mu - u_\mu\right) dx^\mu,$$
$$a_{\mu,\nu} - a_{v,\mu} + a_v w_\mu - a_\mu w_v + \left[\left(a_\mu - u_\mu\right)\left(a_{v,\alpha} - a_{\alpha,\nu}\right) -\right.$$
$$\left. - \left(a_v - u_v\right)\left(a_{\mu,\alpha} - a_{\alpha,\mu}\right)\right] u^\alpha = 2\chi_{v\mu},$$
$$\varphi = -\int\limits_{(P_0)} \beta_\alpha \left(t = c_\alpha\right)$$
$$\beta_\alpha = w_\alpha + \left(a_{\mu,\alpha} - a_{\alpha,\mu}\right) u^\mu.$$

И, наконец, если определить 4-тензор $h_{\mu\nu}$ равенством

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_{\mu\nu} u_\nu - a_\mu a_\nu$$

то его пространственные компоненты в собственной системе отсчета совпадут с правой частью (I.121), а компоненты $h_{0\alpha}$ будут равны нулю. Формула (I.120) тогда примет вид

$$dl^2 = h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Следует иметь в виду, что матрица $(\boldsymbol{h}_{\mu\nu})$ особенная, так как ее ранг равен трем, и обратная ей матрица не существует. Поэтому необходимо отличать величины, определенные равенствами

$$h^{\ell k} = g^{l\alpha} g^{k\beta} h_{\alpha\beta}$$

от величин, опредсленных в (I.129). Это же относится к контравариантным компонентам 4-вектора a_μ. В частности (см. формулы (I.130) и (I.131)),

$$g^{\alpha\beta} a_\alpha a_\beta = \frac{a^2}{1 + a^2}$$

4

$$g^{la} a_\alpha = \frac{a^l}{1 + a^2}$$

Наряду с 4-тензором вращения $\chi_{\alpha\beta}$ можно ввести и 4-вектор вращения

$$\chi^\alpha = \frac{1}{2} e^{\alpha\beta\mu\nu} u_\beta \chi_{\mu\nu}$$

пространственные компоненты которого в собственной системе отсчета совпадают с компонентами вектора вращения.

Ковариантная дивергенция тензора вращения всегда отлична от нуля и обращается в нуль только вместе с самим тензором вращения. Определим вектор b^α:

$$b^\alpha = \chi^{\alpha,3}_{;\beta} + 2u^\alpha \chi^2$$

где

$$\chi^2 = \frac{1}{2} \chi^{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta}$$

Он ортогонален 4-скорости элемента системы отсчета и может быть представлен в виде суммы двух других слагаемых:

$$b^\alpha = e^{\alpha\beta\mu\nu} u_\beta \left(w_\mu \chi_\nu + \chi_{\nu,\mu}\right).$$

В собственной системе отсчета пространственные компоненты первого слагаемого совпадают с компонентами векторного произведения векторов абсолютного ускорения и вращения элемента системы отсчета, а второго слагаемого - с компонентом рото- ра вектора вращения на ортогональной к 4-скорости гиперповерхности.

В каждой точке системы отсчета 4-тензор вращения порождает тройку единичных ортогональных друг другу и к 4-вектору скорости пространственноподобных 4-векторов:

$$j^\alpha = \frac{\chi^\alpha}{\chi},$$
$$q^\alpha = \frac{j^\alpha b_\nu j^\nu - b^\alpha}{\sqrt{b_\lambda b^\lambda - (b_\lambda j^\lambda)^2}},$$
$$i^\alpha = e^{\alpha\beta\mu\nu} u_\beta q_\mu j_\nu,$$

образующих вместе с 4-вектором u^α тетраду.

Выразим, согласно (I.65), компоненты тензора вращения через векторы этой тетрады. Тогда получим

$$i_\alpha \frac{\delta j^\alpha}{\delta\tau} = q_\alpha \frac{\delta j^\alpha}{\delta\tau} = 0,$$
$$j_\alpha \frac{\delta i^\alpha}{\delta\tau} = f_\alpha \frac{\delta q^\alpha}{\delta\tau} = 0,$$
$$q_\alpha \frac{\delta i^\alpha}{\delta\tau} = -i_\alpha \frac{\delta q^\alpha}{\delta\tau} = \chi_{12}.$$

Поэтому

$$\frac{\delta j^\alpha}{\delta\tau} = j_\nu w^\nu u^\alpha,$$
$$\frac{\delta q^\alpha}{\delta\tau} = q_\beta w^\beta u^\alpha - \chi_{12} i^\alpha,$$
$$\frac{\delta i^\alpha}{\delta\tau} = i_\beta w^\beta u^\alpha + \chi_{12} q^\alpha,$$
$$\frac{\delta u^\alpha}{\delta\tau} = i_\beta w^\beta i^\alpha + q_\beta w^\beta q^\alpha + j_\beta w^\beta j^\alpha.$$

Следовательно, два 4-вектора тетрады испытывают перенос Ферми - Уолкера вдоль мировой линии элементов системы отсчета4-вектор скорости'и единичный 4-вектор в направлении вектора вращения.

Условие (I.133 б) ортогональности метрического вектора к оси вращения можно выразить одним из следующих двух инвариантных относительно общей группы равенств:

$$e^{\mu\nu\alpha\beta} u_\mu a_\nu \chi_{\alpha\beta 3} = 0$$

Ю ЛИ

$$e^{uv\alpha\beta} a_v \gamma_{\alpha\beta} = 0$$

эквивалентных друг другу.

Единичный 4-вектор нормали к семейству гиперповерхностей одновременных событий - пространственных гиперповерхностей $t = \text{const}$,- направленный в будущее, определяется следующей формулой:

$$e^\alpha = \sqrt{1 + a^2}\,(u^\alpha - a^\alpha).$$

Частица, мировой линией которой является огибающая нормалей к этому семейству, движется со скоростью

$$\vec{v} = -e^{-\varphi}\vec{a}$$

относительно системы отсчета. В синхронных и только синхронных системах отсчета мировые линии элементов системы отсчета совпадают с огибающими нормалей к

семейству пространственных гиперповерхностей, а линии времени ортогональны пространству.

27.1.17 17. Uniqueness of the Metric Vector Field

В синхронной системе отсчета метрический вектор равен нулю, в несинхронной он отличен от нуля и удовлетворяет уравнениям (I.123) и (I.133 б). Определим степень произвола, который допускают эти уравнения. Введем обозначения

$$A_i = \frac{a_i}{V - g_{00}} + \frac{g_{0i}}{g_{00}}$$

и

$$B_{lk} = 2\chi_{kl} + a_{k,l} - a_{i,k} + a_i\rho_k - a_k\rho_l.$$

Перепишем уравнения (I.123) и (I.133 б) в этих обозначениях:

$$A_l a_{k,0} - A_k a_{l,0} = B_{lk},$$
$$e^{lkl} a_i \chi_{kl} = 0.$$

Предположим, не ограничивая общности, что $A_3 \neq 0$. Величина A_ℓ имеет линейный неоднородный закон преобразования относительно группы (I.45), поэтому преобразованием $x^0 \to x'^0 = x'^0(x^\alpha)$ всегда можно добиться выполнения этого неравенства, если в исходной координатной сетке заданной системы отсчета $A_3 = 0$. Уравнения же (I.152) ковариантны относительно группы (I.45). Сказанное об A_3 можно повторить и о величине $e^{ikl}A_l\chi_{kl}$, поэтому предположим также, что

$$e^{ikl}A_l\chi_{kl} \neq 0$$

Следующая система уравнений:

$$a_{l,0} = \frac{B_{3l}}{A_3} - \frac{A_l}{e^{jkl}A_j\chi_{kl}} e^{mnr}\left(a_m\chi_{nr,0} + \frac{B_{3m}}{A_3}\chi_{nr}\right),$$
$$e^{ikl}a_l\chi_{kl} = 0,$$
$$e^{lkl}A_l B_{kl} = 0$$

эквивалентна системе (I.152). Действительно, уравнения (I.152 а) представляют собой линейные неоднородные алгебраические уравнения относительно неизвестных $a_{i,0}$. Число уравнений равно числу неизвестных. Детерминант этой системы равен нулю, а ранг матрицы коэффициентов - двум. Поэтому система (I.152 а) совместна и может быть разрешена относительно $a_{1,0}$ и $a_{2,0}$, если характеристический определитель, равный $\frac{1}{2}A_3E^{kl}A_lB_{kl}$, обращается в нуль (Смирнов, 1956). Следовательно, уравнение (I.152а) - можно переписать в разрешенном относительно $a_{1,0}$ и $a_{2,0}$ виде:

$$a_{1,0} = \frac{1}{A_3}\left(B_{31} + A_1 a_{3,0}\right),$$
$$a_{2,0} = \frac{1}{A_3}\left(B_{32} + A_2 a_{3,0}\right),$$
$$E^{ikl}A_l B_{kl} = 0.$$

Продифференцировав (I.152 б) по x^0, присоединив его к последним уравнениям и разрешив алгебраически относительно $a_{i,}$, получим систему (I.153) и (I.154). И наоборот, если уравнения (I.153) и (I.154) удовлетворяются, то выполняются также и уравнения (I.152).

Если метрический тензор мира известен в функции координат x^α, то в правой части уравнений (I.153) присутствуют либо известные функции, либо искомые a_i и их производные только по координатам x^i. Поэтому уравнения (I.153) определяют значения искомых a_i в окрестности начальной гиперповерхности $x^0 = \text{const}$ по их значениям на начальной гиперповерхности.

Лемма 14. Уравнения (I. 153) и (I. 154) находятся в инволюции - решение уравнений (I.153) удовлетворяет в окрестности начальной гиперповерхности также и уравнениям (I.154), если данные Коши удовлетворяют им.

Д о к а з а т е л в с т в о. Пусть имеется решение $a_i\left(x^0, x^k\right)$ уравнений (I.153). Подставим его в (I.153), которые теперь превратятся в тождества. Выразим величины B_{31} и B_{32} из тождеств, соответствующих $i = 1$ и $i = 2$, и подставим в тождество, соответствующее $i = 3$. Получим

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\left(e^{ikl}a_l\chi_{kl}\right) = 0$$

Любое решение (I.153) превращает величину $e^{lkl}a_l\chi_{kl}$ в функцию координат, не зависящую от гиперповерхности семейства, поэтому она равна нулю на всем семействе, если равна нулю на начальной гиперповерхности. Тем самым лемма доказана для (I.154 а). Чтобы доказать ее для (I.154 б), введем 4-вектор

$$P^\alpha = e^{\alpha\beta\mu\nu}\left(a_\beta - u_\beta\right)\left(\chi_{\nu\mu} + a_{v,\mu} + a_\mu w_\nu\right).$$

В собственной системе отсчета

$$P^0 = \frac{1}{2}e^{\imath kl}A_lB_{kl},$$
$$P^n = -\frac{1}{2}e^{nkl}\left(B_{kl} - 2A_ka_{l,0}\right).$$

Подставляя в последнее равенство значения $a_{l,0}$ из (I. 153), находим, что

$$P^n = -\frac{P^0}{A_3}\delta_3^n$$

Следоватьльно, если выполняется равенство (I.154 б), то выполняется также равенство

$$P^\alpha = 0$$

и наоборот. Инвариантное относительно общей группы преобразований уравнение

$$P^\alpha_{;\alpha} = 0$$

в собственной системе отсчета имеет вид

$$P^0_{,0} = \left(\frac{P^0}{A_3}\right)_{,3} - \left(\Gamma^\alpha_{0\alpha} - \frac{1}{A_3}\Gamma^\alpha_{3\alpha}\right)P^0.$$

Это уравнение имеет только нулевое решение при нулевом начальном значении, поэтому P^0, а следовательно, и P^α и $e^{ikl}A_lB_{kl}$ равны нулю в окрестности начальной гиперповерхности, если они равны нулю на ней.

Так как система уравнений (I.153) « (I.154) находится в инволюции, то ее общее решение совпадает с общим решением снстемы (I.153), удовлетворяющим (I.154) на начальной гиперповерхности. Обее решение системы (I.153) содержит три произвольные функции a_i от трех переменных x_i на начальной иперповерхности. Одна из них исключается алгебраическим уравнением (I.154 а) на начальной гиперповерхности. Оставшиеся две функции трех переменных должны удовлетворять дифференциальному относительно $a_{\imath,k}$ уравнению (I.154 б) на начальной гиперповерхности, что уменьшает число независимых переменных одной из них до двух. Поэтому общее решение системы (I.153) и (I.154) зависит от двух произвольных функций трех и двух независимых, переменных соответственно. На самом деле произвол, допускаемый уравнениями (I.153) и (I.154), еще меньше. Одну функцию трех переменных можно исключить преобразованием координат $x^l \to x'^t = x'\left(x^k\right)$ на начальной гиперповерхности, обращающим, например, a_1 в нуль. (тим преобразованием нельзя, вообще говоря, обратить в нуль сразу два компонента вектора a_i. Для этого необходимо и достаточно, чтобы заданные a_i на начальной гиперповерхности удовлетворяли условию

$$e^{ikl}a_i a_{k,l} = 0$$

которое в общем случае не выполняется). Следовательно, наибольший произвол, допускаемый уравнекіияи (I.153) и (I.154), заключается в одной функции двух переменных на начальной гиперповерхности.

Теорема 25. Если в заданной системе отсчета известна метрика мира, то существует единственное метрическое векторное поле, удовлетворяющее уравнениям (I.123) и (I.133 б) и принимающее на начальной гиперповерхности заданные значения, связанные уравнением (I.133 б). Наибольший произвол в определении данных Коши заключается в одной функции от двух переменных на начальной гиперповерхности.

Общее решение можно записать в следующем виде:

$$a_l = \frac{g_{0l}}{\sqrt{-g_{00}}} + \sqrt{-g_{00}}\left(\frac{\partial f}{\partial x^0}\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial x^i},$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_0} \neq 0;$$

здесь $f\left(x^\alpha\right)$ - функция, зависимость которой от всех четырех переменных ограничена только уравнениями (I.154). Подставив (I.157) в (I.154 а) и переписав в разрешенной относительно $\partial f/\partial x^\circ$ форме, находим, что уравнение (I.154 а) ограничивает функцию f зависимостью от трех переменных. Уравнение же (I.154 б) на начальной гиперповерхности вместе с допустимыми преобразованиями координат снижает число независимых переменных до двух.

Покажем, что $f\left(x^\alpha\right) = F\left(t\left(x^\alpha\right)\right)$. Подставим (I.157) в (I.125), учтем (I.50 а) и воспользуемся производной на гиперповерхности $t = \text{const}$. Получим

$$\beta_l = \partial_i\left(\ln\frac{\frac{\partial f}{\partial x^0}}{\sqrt{-g_{00}}}\right).$$

Отсюда, согласно (I.124), следует

$$\varphi = \left[\ln\left(\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}\frac{\partial f}{\partial x^0}\right)\right]_{\left(x_0^l\right)}^{\left(x^l\right)}.$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$\frac{\partial f\left(x^\alpha\right)}{\partial t} = \frac{\partial f\left(x^\alpha\right)}{\partial t}|x^l = x_0^l.$$

Следовательно,

$$f\left(x^\alpha\right) = F(t) + f_1\left(x^l\right), \frac{\partial f_1}{\partial t} = 0$$

С другой стороны, если подставить (I.157) в (I.126) и учесть, чТО

$$df = \frac{dF}{dt}dt + \partial_i f_1 dx^l$$

то получим

$$dt\left[1 - e^\varphi\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)^{-1}\sqrt{-g_{00}}\frac{dF}{at}\right] = \partial_i f_1 dx^l$$

В пространстве t =const левая часть этого равенства равна нулю независимо от dx^i, поэтому $\partial_i f_1 = 0$ и поскольку $\partial f_i \partial_1 t$ также равна нулю, то f_1 - постоянная. Приравнивая эту постоянную нулю (переобозначая F), приходим к выводу, что функция f в (I.157) зависит только от времени t.

Таким образом, каждой несинхронной системе отсчета, характеризующейся ненулевым тензором вращения, принадлежит ненулевой 4-вектор a_μ, обусловленный

анизотропностью скорости света. Он ортогонален двум ортам u^α и j^α тетрады (u, i, q, j), поэтому условие ортогональности его и третьему орту i^α

$$i^\alpha a_\alpha = 0$$

или коллинеарности орту q^α представляется разумным. При этом метрическое векторное поле определяется единственным образом.

Четырехвекторы $i^\alpha, j^\alpha, e^\alpha$ вместе с единичным пространственноподобным 4-вектором k^α, определенным равенством

$$k^\alpha = e^{\alpha\beta;\nu} e_\beta j_\mu i_\nu,$$

образуют новую тетраду, принадлежащую системе отсчета. Обе тетрады являются естественными для несинхронной системы отсчета. Три пространственноподобных орта этой второй тетрады (e, i, k, j) принадлежат физическому пространству $t = \text{const}$, а временноподобный орт ортогонален ему. Из четырех ортов первой тетрады только два орта i^α н j^α, общие для обеих тетрад, принадлежат пространству. Линии времени системы отсчета являются огибающими временноподобных ортов первой тетрады, а физическое пространство всюду ортогонально временноподобным ортам второй тетрады. Вращение системы отсчета происходит в плоскости ортов ι^α и q^α, не принадлежащей (как и для всякого движения) пространству, но ось вращения лежит в пространстве в в направлении орта j^α.

В синхронных системах отсчета, когда тензор вращения равен нулю, обе тетрады вырождаются - их временноподобные орты совпадают, соответственно физическое пространство всюду ортогонально линиям времени, а пространственноподобные орты становятся неопределенными. Неопределенность поло‘хения (направления) пространственного репера естественных тетрад в синхронной системе отсчета является следствием независимости скорости света от направления.

27.1.18 18. The Cauchy Problem and Reference Frames

Десять функций, определяющих метрику мира, подчиняются системе десяти уравнений Эйнштейна (I.17), в соответствии с которыми геометрия мира изменяется со временем. Но не все они играют одинаковую роль - часть уравнений Эйнштейна является связями, которым должны подчиняться начальные данные, остальные ограничивают эволюцию мира. Пусть имеется семейство неизотропных гиперповерхностей $\omega(x^\alpha) = \text{const}$. Тогда едничный вектир

$$e_\alpha = \frac{\frac{\partial \omega}{\partial x^\alpha}}{\sqrt{\left| g^{\mu\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x^\mu} \frac{\partial \omega}{\partial x^\nu} \right|}}$$

ортогонален к гиперповерхностям, и $e_\alpha e^\alpha = -1$ (или 1), если гиперповерхности пространственноподобные (или временноподобные). В каждой точке мира существуют 4-тензоры первого и второго ранга

$$S^\mu = e_\nu \left(G^{\mu\nu} + x T^{\mu\nu} \right),$$
$$S^{\mu\nu} = G^{\mu\nu} + x T^{\mu\nu} - e^\mu S^\nu - e^\nu S^\mu + e^\mu e^\nu e_\alpha S^\alpha, \text{ если } e_\alpha e^\alpha = 1,$$
$$S^{\mu\nu} = G^{\mu\nu} + x T^{\mu\nu} + e^\mu S^\nu + e^\nu S^\mu + e^\mu e^\nu e_\alpha S^\alpha,$$
$$\text{если } e_\alpha e^\alpha = -1;$$

здесь $G^{\mu\nu}$ - левая, а $T^{\mu\nu}$ - правая части уравнений Эйнштейна. Так как $S^{\mu\nu}$ удовлетворяет алгебраическим тождествам

$$S^{\mu\nu} = S^{\nu\mu}, e_\nu S^{\mu\nu} = 0$$

$$S^\mu = 0.$$
$$S^{\mu\nu} = 0.$$

В этой записи уравнения Эйнштейна естественным образом разбиты на две группы: первая (I.162 а) содержит четыре, а вторая (I.162 б) - шесть уравнений.

Лемма 15. Если $S^{\mu\nu}$ равен нулю всюду, а S^x равен нулю на одной из гиперповерхностей семейства, то S^α также равен нулю всюду.

Доказательство. Рассмотрим случай временноподобных гиперповерхностей. Продифференцируем ковариантно обе части (I.161 а) по координате x^ν и учтем, что $S^{\mu\nu}$ равен нулю по условию леммы, а $G^{\mu\nu}_{iv}$ и $T^{\mu\nu}_{iv}$ - согласно дифференциальным тождествам Бьянки (Эйзенхарт, 1948) и уравнениям движения (I.19), тогда

$S^\mu_{i\nu}e^\nu = e_\alpha S^\alpha e^\mu_{i\nu}e^\nu - e^\mu S^\nu_{i\nu} - S^\nu e^\mu_{;\nu} - S^\mu e^\nu_{i\nu} + e^\mu\left(e^\nu e_\alpha S^\alpha\right)_{;\nu}$.

Заметим, что в каждой точке мира 4-вектор $S^\alpha - e^\alpha e_\mu S^\mu$ принадлежит гиперповерхности семейства, содержащей эту точку. Обозначим единичный вектор вдоль нее через n^α, так что $n_\alpha e^\alpha = 0$, а $n_\alpha n^\alpha = \pm 1$. Поэтому

$$S^\nu = e^\nu e_\alpha S^\alpha \pm n^\nu n_\alpha S^\alpha$$

Отсюда

$$\left(e^\nu e_\alpha S^\alpha\right)_{i,} = S^\nu_{iv} \mp n^\nu\left(n_\alpha S^\alpha\right)_{i\vee} \mp n_\alpha S^\alpha n^\nu_{;\nu}$$

Подставляя последнее равенство в (I.163), получаем

$$S^\mu_{i\nu}e^\nu = e_\alpha S^\alpha e^\mu_{i\nu}e^\nu - S^\mu e^\nu_{;\nu} - S^\nu e^\mu_{;\nu} \mp e^\mu n_\alpha S^\alpha n^\nu_{i\nu} \mp e^\mu\left(n_\alpha S^\alpha\right)_{;\nu} n^\nu.$$

Величина $\left(n_\alpha S^\alpha\right)_{;,} n^\nu$ есть абсолютная производная от $\left(n_\alpha S^\alpha\right)$ на гиперповерхности семейства, а $S^\mu_{;,}e^\nu$ - в направлении нормали k гиперговерхности, поэтому уравнение (I.164) при нулевом значении S^α на одной из гиперповерхностей имеет только нулевое решение и вне ее.

В случае пространственноподобных гиперповерхностей лемма доказывается аналогично.

Теорема 26. Система уравнений Эйнштейна находится в инволюции: всякое решение уравнений (I.162 б), принимающее на заданной неизотропной гиперповерхности заданные начальные значения (данные Коши), является также решением уравнений (I.162 а), если они удовлетворяются на гиперповерхности данными Коши.

В соответствии с этой теоремой задача Коши для уравнений Эйнштейна распадается на две (Lichnerowicz, 1955):

задача отыскания данных Коши, удовлетворяющих уравнениям (I.162 а) на заданной гиперповерхности;

задача интегрирования уравнений (I.162 б) с известными данными Коши.

Существование и единственность решения второй задачи в классе неаналитических функций (при достаточно слабых требованиях дифференцируемости) доказаны Фурье-Брюа (FouresBruhat, 1956). Она использовала предположение, что начальные значения заданы на гиперповерхности $x^0 = \text{const}$ в нормальных гауссовых координатах ($g_{00} = -1, g_{0i} = 0$). В классе аналитических функций эта задача решается теоремой Ковалевской. Доказательство существования и единственности решения в гармонических координатах проведено Хокингом и Эллисом (1977).

Уравнения, связывающие данные Коши, и их частные решения при различных предположениях обсуждались во многих работах (Lichnerowicz, 1955; Франкль, 1956; Araki, 1959; Brill, 1959; Baierlein, Sharp, Wheeler, 1962; Пелых, 1979 и др., см. также Уилер, 1965; Петров, 1961, 1966; Синг, 1963; Хокинг, Эллис, 1977).

В последующем изложении будем считать гиперповерхности семейства пространственноподобными. Именно они представляют наибольший физический интерес. Введем три 4-вектора $\eta^\alpha_{(l)}$ (латинский индекс в скобках нумерует 4-векторы), касательные к координатным линиям на гиперповерхности, так что $\eta^\alpha_{(l)}\left\{-\frac{\partial\omega}{\partial x^l}/\frac{\partial\omega}{\partial x^0}\cdot\right.$ $\left.\delta^1_l, \delta^2_l, \delta^3_l\right\}$, и обозначим как обычно через h_{lk} и ω_{lk} коэффициенты первой и второй квадратичных форм гиперповерхности, P_{lkln} - тензор ее кривизны, P_{tk} и P-соответственно тензор Рич чи и скалярную кривизну, ξ - абсолютное значение нормали к гиперповерхности. Теперь можно конкретизировать вид уравнений Эйнштейна (I.162).

Теорема 27. Если гиперповерхности семейства пространственноподобные, то система уравнений

$$\left.\begin{array}{l}\omega^k_{k|n} - \omega^k_{n|k} = -xT_{\alpha\beta}e^\alpha\eta^\beta_{(n)} \\ \omega^{\imath k} - \left(\omega^n_n\right)^2 = -2xT_{\alpha\beta}e^\alpha e^\beta\end{array}\right\}$$

эквивалентна уравнениям Эйнштейна (I.162 а), а система

$$\frac{\partial\omega_{ik}}{\partial x^\alpha}e^\alpha = P_{ik} + 2\omega_{in}\omega_k^n - \omega_{ik}\omega_n^n + \xi\left(\frac{1}{\xi}\right)_{1kk} + x\left(T_{\alpha\beta}\eta_{(l)}^\alpha\eta_{(k)}^\beta - \frac{1}{2}h_{ik}T\right)$$

Докказ а те льство. Из определения $\eta_{(i)}^\alpha$ следует

$$\boldsymbol{h}_{tk} = g_{\mu\nu}\eta_{(l)}^\mu\eta_{(k)}^\nu$$

Введем, как в доказательстве леммы 2, штрихованные координаты $x'^0 = \omega\left(x'', x^l\right), x'' = \omega^l\left(x^0, x^k\right)$, причем три скалярные функции $\omega^l\left(x^\alpha\right)$ суть независимые решения уравнений

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial\omega}{\partial x^\mu}\frac{\partial\omega^l}{\partial x^\nu} = 0$$

В этих координатах выполняются равенства

$$\left.\begin{array}{c} g'^{00} = -\xi^2, g'^{0t} = 0, g'^{lk} = h^{lk} = g^{\alpha.3}\eta_\alpha^{(l)}\eta_j^{(k)}, \\ g_{\mu\nu} = -e_\mu e_v + h_{lk}\eta_\mu^{(l)}\eta_\nu^{(k)}; \end{array}\right\}$$

здесь для 4-векторов $\frac{\partial\omega^l}{\partial x^a}$ введены обозначения $\eta_a^{(l)}$. Заметим, что метрические тензоры гиперповерхности, определенные равенствами (I.167) и (I.169), совпадают, вочбще говоря, только с точностью до преобразования ее внутренних координат. Воспользовавшись таким преобразованием $\omega^l \to \omega'^t = \omega'^i\left(\omega^k\right)$ (функции ω'^l - по-прежнему решения (I.168)), всегда можно привести их к точному равенству, что и предполагается выполненным. Поэтому векторы $\eta_{(l)}^\alpha$, $\eta_a^{(l)}$ и e_a удовлетворяют очевидным соотношепиям

$$\left.\begin{array}{c} \eta_\alpha^{(l)} = h^{(k}\eta_{(k)a}, \eta_{(k)}^\alpha = h_{kn}\eta^{(n)a}, \\ \gamma_{l_2}^{(k)} = \delta_i^k, \eta_{(l)}^\mu\eta_\nu^{(l)} = \delta_v^\mu + e^\mu e_v, \\ e_\alpha\eta_{(l)}^\alpha = 0, e_\alpha\eta^{(l)a} = 0. \end{array}\right\}$$

В штрихованных координатах тензоры Римана - Кристоффеля и Эйнштейна выражаются через величины, принадлежащие гиперповерхности, равенствами (I.26) и (I.27) соответственно. Используя обратное преобразование от штрихованных координат к исходным и имея в виду, что $\frac{\partial x'^0}{\partial x^\mu} = \xi e_\mu$ и $\frac{\partial x'^l}{\partial x^\mu} = \eta_\mu^{(i)}$, можно записать

$$R_{a\beta\mu\nu} = \left(P_{ljkl} + \omega_{lk}\omega_{jl} - \omega_{ll}\omega_{jk}\right)\eta_a^{(l)}\eta_3^{(j)}\eta_\mu^{(k)}\eta_\nu^{(l)} +$$
$$+ \left(\omega_{kn|l} - \omega_{kl|n}\right)\left(e_a\eta_3^{(k)}\eta_\mu^{(l)}\eta_\nu^{(n)} + e_\mu\eta_\nu^{(k)}\eta_a^{(l)}\eta_\beta^{(n)} -\right.$$

$$\left. - e_\beta\eta_\alpha^{(k)}\eta_\mu^{(l)}\eta_\nu^{(n)} - e_\nu\eta_\mu^{(k)}\eta_\alpha^{(l)}\eta_\beta^{(n)}\right) + \left[\frac{\partial\omega_{kn}}{\partial x^\gamma}e^\gamma - \xi\left(\frac{1}{\xi}\right)_{|kn} - \omega_{lk}\omega_n^l\right]\times$$
$$\times\left(e_\alpha e_\nu\eta_\xi^{(k)}\eta_\mu^{(n)} + e_\beta e_\mu\eta_\alpha^{(k)}\eta_\nu^{(n)} - e_\alpha e_\mu\eta_\beta^{(k)}\eta_\nu^{(n)} - e_\beta e_\nu\eta_\alpha^{(k)}\eta_\mu^{(n)}\right), \quad \text{(I.171)}$$
$$G_{\mu\beta} = \frac{1}{2}\left(P + \omega_{lk}\omega^{ik} - (\omega_n^n)^2\right)e_\mu e_\beta + \left(\omega_{i|k}^k - \omega_{kll}^k\right)\left(e_\mu\eta_j^{(l)} + e_\beta\gamma_{i_\mu}^{(i)}\right) +$$
$$+\left\{-\frac{\partial\omega_{lk}}{\partial x^\alpha}e^\alpha + 2\omega_{in}\omega_k^n - \omega_{ik}\omega_n^n + \right.$$
$$\left. + P_{ik} + \xi\left(\frac{1}{\xi}\right)_{1kk} - \frac{1}{2}h_{lk}\left[P + 3\omega_{nj}\omega^{nj} - (\omega_n^n)^2 - 2k^{nj}\left(\frac{\partial\omega_{nj}}{\partial x^\alpha}e^\alpha - -\xi\left(\frac{1}{\xi}\right)_{nj}\right)\right]\right\}\eta_\mu^{(l)}r_\beta^{(k)}.$$

Подставляя (I.172), (I.160) и (I.161б) в (I.162), получаем

$$\left(\omega^k_{k|n} - \omega^k_{n|k}\right)\eta^{(n)}_\mu - \frac{1}{2}e_\mu\left(P + \omega_{nl}\omega^{nl} - (\omega^n_n)^2\right) + xT_{\mu\alpha}e^\alpha = 0$$

$$\left\{P_{lk} + 2\omega_{in}\omega^n_k - \omega_{lk}\omega^n_n - \frac{\partial\omega_{lk}}{\partial x^\alpha}e^\alpha + \xi\left(\frac{1}{\xi}\right)_{1/k} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}h_{lk}\left[P + \omega_{nl}\omega^{nl} - (\omega^n_n)^2 + 2x\left(T + T_{\alpha\beta}e^\alpha e^\beta\right)\right]\right\}\eta^{(l)}_\mu\gamma^{(k)}_{lv} +$$

$$+ x\left(T_{\mu\nu} + T_{\mu\alpha}e^\alpha e_\nu + T_{v\alpha}e^\alpha e_\mu + e_\mu e_\nu T_{\alpha\beta}e^\alpha e^\beta\right) = 0$$

Если теперь умножить первое уравнение (I.165) на $\eta^{(n)}_\mu$ и вычесть второе, умноженное на $\frac{1}{2}e_\mu$, то получим (1.173), и наоборот, из (I.173) можно получить уравнения (I.165) умножением на $\eta^\mu_{(l)}$ и e^μ соответственно. Аналогично устанавливается эквивалентность уравнений (I.166) и (I.174), что и доказывает теорему.

Уравнения (I.165) и (I.166) нобходимо дополнить формулой, связывающей коэффициенты первой и второй квадратичных форм гиперповерхностей.

Лемма 16. Коэффициенты второй квадратичной формы пространственноподобной гиперповерхности выражаются через производные коэффициентов первой квадратичной формы вдоль нормали к гиперповерхности следующим образом:

$\frac{\partial h_{lk}}{\partial x^\alpha}e^\alpha = 2\omega_{ik} + \left(\gamma^\alpha_{(i);\nu}\eta^\nu_{(k)} + \eta^\alpha_{(k);\nu}\eta^\nu_{(i)}\right)e_\alpha + \left(\eta^\alpha_{(i);\nu}\eta_{(k)\alpha} + \eta^\alpha_{(k);\nu}\eta_{(l)\alpha}\right)e^\nu.$

Общую формулу, определяющую вторую квадратичную форму (Эйзенхарт, 1948), можно привести к виду

$$\omega_{ik} = \eta_{(i)\nu}\eta^\alpha_{(k)}e^v_{;\alpha}$$

если учесть специальные свойства 4-векторов $\eta^\alpha_{(t)}$. Тогда доказательство леммы состоит в дифференцировании равенства (I.167) и использовании (I.176). Лемма 2 является частным случаем последней леммы. В правой части (I.175) второй и третий члены не содержат производных метрики мира вдоль нормали к гиперповерхности, в чем легко убедиться, расписав ковариантные производные, но содержат только производные $g_{\mu\nu}$ и $\eta^\alpha_{(l)}$ на гиперповерхности и $\eta^\alpha_{(l)}$ вдоль нормали к гиперповерхности.

Таким образом, вторая из задач, на которые распадается задача Коши, сводится к интегрированию системы 12 уравнений (I.166) и (I.175) первого порядка, разрешенных относительно производных вдоль нормали к гиперповерхностям, или 6 уравнений второго порядка, получающихся из (I.166) подстановкой в них (I.175), также разрешенных относительно вторых производных вдоль нормали. Для обеспечения единственности решения этих уравнений необходимо иметь 12 функций (данные Коши) на заданной начальной гиперповерхности семейства. Ими могут быть либо h_{ik} и ω_{ik}, либо h_{ik} и $\frac{\partial h_{ik}}{\partial x^\alpha}e^\alpha$. Согласно теореме 26, данные Коши должны удовлетворять уравнениям (I.165) на начальной гиперповерхности. Но этих данных недостаточно не только для обеспечения единственности, но даже для конкретного интегрирования уравнений (I.166) и (I.175). Уравнения содержат, помимо искомых функций h_{ik} и ω_{ik}, еще и неизвестные функции g_{0a}. Попытка использовать уравнения (I.165) для определения g_{0a} - тогда данные Коши h_{ik} и ω_{ik} оказались бы свободными, не связанными никакими соотношениями на начальной гиперповерхности - не может быть успешной именно из-за теоремы 26: уравнения (I.165) могут связать частные производные функции g_{0a} (при условии, что данными Коши будут h_{ik} и $\frac{h\partial_{ik}}{\partial x^\alpha}e^\alpha$) только на начальной гиперповерхности и не связывают их вне ее. Поэтому метод "тонкого сэндвича" (Baierlein, Sharp, Wheeler, 1962), разработанный для получения начальных значений $g_{0\alpha}$ при произвольных h_{lk} на двух близкнх $_n$ начальных гиперповерхностях, что эквивалентно произвольным h_{lk} и $\frac{\partial h_{lk}}{\partial x^\alpha}e^\alpha$ на одной начальной гиперповерхности, также не приводит к желаемому результату.

В этом состоит глубокое различие уравнений Эйнштейна и Максвелла-Лоренца. В элетродинамике ни уравнения (I.12), связывающие данные Коши, ни (I.11), определяющие искомые функции вне начальной гиперповерхности, не содержат дополнительных неизвестных функций, поэтому данные Коши, удов- летворяющие на начальной гиперповерхности двум уравнениям связи (I.12), определяют единственные

шесть искомых функций $F^{\mu\nu}$, удовлетворяющие такому же числу уравнений (I.11) в области интегрирования.

Обычно считается, что функции g_{0a} можно приравнять наперед заданным, и тогда уравнения (I.166) и (I.175) не будут содержать неизвестные функции, кроме искомых, либо наложить на них какие-либо дополнительные нековариантные алгебраические или дифференцнальные связи - координатные условия. Общее рассуждение, обосновывающее не только допустимость, но и необходимость четырех дополнительных нековариантных условий для решения уравнений Эйнштейна, восходит к Гильберту и состоит в том, что искомое решение должно определяться с точностью до общей группы преобразований координат (I.47). Если предположить, что нскомое решение найдено, то, воспользовавшись четырьмя произвольными функциями общей группы (I.47), можно привести к наперед заданным функциям столько же компонентов решения, вследствие чего, согласно этому рассуждению, останется только шесть искомых функций, подлежащих определению. И вообще, вследствие общей ковариантности уравнений и допустимости общей группы преобразований координат числ уравнений должно быть меньше числа искомых функций. В соответствии с этим в теории относительности предложены и используются самые разнообразные координатные условия, а некоторые координатные системы (гармонические) даже объявляются привилегированными, реализующими особые координатные условия, имеющие некий глубокий физический смысл.

В действительности же эти арифметические подсчеты числа уравнений и числа искомых функций слишком просты, чтобы оправдывать себя прн решении дифференциальных уравнений в частных производных. Порочность приведенного рассуждения оонаруживается сразу же, если применить его к электродинамике. Уравнения электродинамики общековариантны, как и уравнения Эйнштейна, и решение их ищется так же с точностью до общей группы преобразований координат. Можно было бы ожидать уменьшения числа уравнений Максвелла-Лоренца (I.11), определяющих поле вне заданной гиперповерхности, до двух, так как четыре компонента из шести $F^{\mu\nu}$ подходящим преобразованием координат, как известно, можно обратить в нуль. Тем не менее, число этих уравнений равно шести, а не двум, и все они нужны для нахождения единственного решения, удовлетворяющего данным Коши, поскольку до их решения неизвестна как раз та система координат (вернее, система отсчета), в которых четыре компонента $F^{\mu\nu}$ равны нулю. К тому же эта система может оказаться вообще физически нереализуемой.

Не ограничиваясь этим замечанием, докажем теорему, из которой следует недостаточность данных Коши h_{ik} и ω_{tk} (или h_{ik} н $\frac{\partial h_{tk}}{\partial x^\alpha}e^\alpha$) для единственности решения уравнений (I.166) **n** (I.175): Пусть в двух многообразиях $\left\{x^0, x^l\right\}$, метрики которых еще предстоит определить, дано семейство трехмерных многообразий $\omega\left(x^\alpha\right) = \text{const}$ и даны $h_{lk}(x)_{\omega_1}$ и $\omega_{lk}(x)_{|\omega_1}$ на многообразии $\omega = \omega_1 = \text{const}$ из семейства, причем первая квадратичная форма на ω_1 положительно определенная. Введем координату x'^0 с помощьо преобразования $x^0 \to x'^0 = \omega\left(x^0, x^n\right)$. оставляющего значения h_{tk} и ω_{lk} на ω_1 без изменения, и рассмотрим в многообразиях $\left\{x^0, x^l\right\}$ две различные метрики $g_{\mu\nu}$ и $\bar{g}_{\mu\nu}$ (после чего многообразия превращаются в два мира) такие, что

$$g_{00} = -1, g_{0\ell} = 0, g_{lk}\left(x'^0, x^n\right), g_{\imath k}\left(\omega_1, x^n\right) = h_{lk|\cdots_1},$$
$$\bar{g}_{00} = -f\left(x'^0, x^n\right), \bar{g}_{0l} = f_l\left(x'^0, x^n\right), \bar{g}_{lk}\left(x'^0, x^n\right),$$
$$\bar{g}_{\imath k}\left(\omega_1, x^n\right) = h_{lk|\omega_1}.$$

а функции f и f_l - произвольные.

Теорема 28. Квадратичные формы двух миров с коэффициентами (I.177), вообще говоря, неприводимы друг к другу никакими преобразованиями координат.

Прежде докажем две леммы. Если $w^\alpha = e^\alpha_{;\beta}e^\beta$ − 4-вектор, принадлежащин гиперповерхности, то справедливо следующее. Лемма 17. Нормальная гауссова система координат, принадлежащая данному семейству пространственноподобных гиперповерхностей, т. е. такая, что $g_{00} = -1, g_{0l} = 0, x^0 = \text{const}\,\omega$, су ществует в том и только том случае, если $^\alpha$ равен нуль.

Д остато ч ность. Пусть в произвольных координатах $\left(x^0,\ x^k\right) w^\alpha = 0$. Воспользуемся преобразованием $x^0 \to x'^0 = \omega\left(x^\alpha\right)$, $x^i \to x' = \omega^l\left(x^\alpha\right)$, где ω^i - независимые решения

уравнений (J.168). Тогда $g'^{00} = -\xi'^2, g'^{0t} = 0, e'_\alpha \left\{\frac{1}{\xi'}, 0, 0, 0\right\}, e'^\alpha \{-\xi', 0, 0, 0\}$, а из уравнений $w'^\alpha = 0$ следует $\xi' = \text{const}$. Поэтому преобразование $x^0 \to x'^0 = \frac{1}{\xi}\omega(x^\alpha), x^l \to x'^l = \omega^l(x^\alpha)$ приводит к нормальным гауссовым координатам, принадлежащим данному семейству.

Необходимость легко проверяется.

Уравнение семейства $\omega = \text{const}$ определяет в многообразии $\{x^0, x^i\}$ 4-вектор $\frac{\partial\omega}{\partial x^\alpha}$, ортогональный к трехмерному многообразию семейства, но только введением в многообразие метрики $g_{\mu\nu}$ определяется единичный ортогональный 4-вектор e_μ. Лемма 18. Если в двух многообразиях с заданным семейством $\omega = \text{const}$ введены метрики $g_{\mu\nu}$ и $\bar{g}_{\mu\nu}$, для которых многообразия семейства являются пространственноподобными гиперповерхностями, и $w^\alpha = 0$, а $\bar{w}^\alpha \neq 0$, то метрики неприводимы никакими преобразованиями координат.

Предположим, что такое преобразование существует. Тогда в результате приведения метрики $\bar{g}_{\mu\nu}$ к $g_{\mu\nu}$ 4-векторы $\bar{w}^\alpha$ и $^\alpha$ совпадут, что невозможно.

Доказ ательство теоремы 28. Согласно леиме 17, $^\alpha$ в мире (I.177а) равен нулю. Функции f и f_i в мире (I.177б) всегда можно выбрать так, чгобы $\bar{\varpi}^\alpha \neq 0$. Для этого достаточно, например, положить $f_i = 0$, а $\frac{\partial f}{\partial x^l} \neq 0$. В этом частном случае$\bar{w}^\alpha \left\{0, h^{\imath k}\frac{\partial \ln V\bar{f}}{\partial x^k}\right\}$. Тогда, согласно лемме 18, метрики (I.177) не-приводкім.

Теорема 29. Для каждого заданного в многообразии $\left\{x^0, x^l\right\}$ семейства $\omega(x^\alpha) = \text{const}$ и заданных начальных функций $h_{|k|\omega_1}$ и $\omega_{\llcorner k|_{\omega_1}}$ или $h_{lk|_{\omega_1}}$ и $\left(h_{ik,\alpha}e^\alpha\right)_{\omega_1}$ таких, что квадратичная форма $\left(h_{lk}dx^l dx^k\right)_{\omega\omega_1}$ положительно определенная и уравнения (I.165), удовлетворяются на начальном многообразии ω_1, принадлежащем семейству, уравнения Эйнштейна допускают в $\{x^0, x^i\}$ множество решений, принимающих на ω_1 значения $\dot{h}_{lk|_{\omega_1}}$ и неприводимых друг к другу преобразованиями координат.

Доказательст во. Достаточно проанализировать уравнения Эйнштейна вне вещества. Возьмем в качестве g_{ik} и $\bar{g}_{ik}$ в. (I.177) два решения уравнений (I.166) и (I.175/, удовлетворяющие одним и тем же данным Коши $h_{lk_{\omega_2}}$ и $\omega_{lk|_{\omega_1}}$ и соответствующие функциям $g_{0\alpha}\left(x'^0, x^k\right) = \{-1, 0, 0, 0\}$ и $g_{0\alpha}\left(x', x^k\right) = \left\{-f\left(x'^0, x^k\right), f_1\left(x'^0, x^k\right), f_2\left(x', x^k\right), f_3\left(x'^0, x^k\right)\right\}$. Если данныеКоши удовлетворяют (I.165) на ω_1, то метрнки (I.177а) и (I.177б) являются двумя решениями уравнений Эйнштейна для одних и тех же данных Коши на ω_1. Согласно теореме 28, эти два решения неприводимы друг к другу.

Предположим теперь, что данными Коши на ω_1 являются $h_{ik|\omega_1}$ и $\left(h_{ik,a}e^\alpha\right)_{\omega_1}$. Если $g_{0\alpha}$ выбрать, как в (I.177а), то в соответствии с условием теоремы $\omega_{lk'\omega_1}\left[=\frac{1}{2}\left(h_{lk,\alpha}e^\alpha\right)_{|\omega_1}\right]$ вместе с $h_{lk|_{\omega_1}}$ должны удовлетворять (I.165). Возьмем снова в качестве- $g_{tk}(x', x^n)$ решение (I.166) и (I.175), принимающее при выбранных g_{0a} значения $h_{tk|_{\omega_1}}$ и $\omega_{tk|_{\omega_1}}\left[=\frac{1}{2}\left(h_{tk,\alpha}e^\alpha\right)_{|\omega_1}\right]$ на ω_1, тогда метрика (I.177а) является решением уравнений Эйнштейна.

Выберем теперь g_{0a}, как в (I.177б). Подставляя данные Коши в (I.175), получаем ω_{tk} на ω_1. Значения $\omega_{lk|_{\omega_1}}$ зависят еще от значений четырех произвольных функций f и f_l и их производных на ω_1, которыми можно распорядиться так, чтобы $\omega_{lk|_{\omega_1}}$ вместе с данными $h_{lk|\omega_1}$ удовлетворяли (I.165). Это всегда можно сделать. Например, если $f_l = 0$, а $\frac{\partial f}{\partial x^l} \neq 0$, то $\omega_{tk|_{\omega_l}}$ снова равны данным Коши $\frac{1}{2}\left(h_{tk,\alpha}e^\alpha\right)_{|\omega_i}$, поэтому они вместе с $h_{lk|_{\omega_1}}$ снова удовлетворяют (I.165), так как вне вещества правая часть уравнений (I.165) обращается в нуль, а левая зависит только от $h_{tk|_{\omega_1}}$ и $\omega_{tk|_{\omega_1}}$. Возьмем в качестве $\bar{g}_{lk}(x'', x^n)$ решение уравнений (I.166) и (I.175), принимающее на ω_1 значения данных Коши $h_{tk|_{\omega_1}}$ и полученных $\omega_{ik\omega_1}$. Тогда метрика (I.176б) также является решением уравнений Эйнштейна, соответствующим тем же данным Коши, но неприводима к (I.177а). Теорема доказана.

Следствие 10. Заданных значений коэффициентов первой и второй квадратичных форм начальной гиперповерхности или коэффициентов первой квадратичной формы и их производных вдоль нормали к начальной гиперповерхности недостаточно для единственности решения уравнений Эйнштейна с точностью до общего преобразования

координат.

Следствие 11. Координатные условия, произвольно присоединяемые к уравнениям Эйнштейна, произвольно же ограничивают их решения таким образом, что из множества неприводимых друг к другу решений, удовлетворяющих одним и тем же начальным.значениям h_{lk} и ω_{tk} на начальной гиперповерхности, отбираются только те (или то), которые удовлетворяют еще и координатным условиям.

Следовательно, при доказательстве существования и единственности решения задачи Коши или при фактическом интегрировании уравнений Эйнштейна координатные условия не только не необходимы, но даже недопустимы в общем случае. Можно вскрыть физический смысл теорем 28 и 29, если обратить внимание на следующее. аждому семейству пространственноподобных гиперповерхностей принадлежит конгруэнция мировых линий, ортогональных к ним в каждой точке. На этих мировых линиях, находится)или может находиться) наблюдатель, абсолютное ускорение которого w^α равно $e^\alpha_{;\beta}e^\beta$. Оно подчиняется уравнениям движенння в метрическом поле, определяемом уравнениями Эйнштейна, и априори не известно ни на начальной гиперповерхности, ни тем более вне ее. Однако координатные условия и являются именно теми связями, которые совершенно произвольно накладываются (по крайней мере, частично) на абсолютное ускорение этого наблюдателя. Использование координатных условий, соответствующих нормальным гауссовым координатам, например, равнозначно требованию, чтобы абсолютное ускорение наблюдателя, мировая линия которого ортогональна к гиперповерхностям данного семейства, непременно было равно нулю. Координатные же условия, соответствующие гармоническим координатам, напротив, требуют применительно к тому же семейству, чтобы абсолютное ускорение того же наблюдателя было отличным от нуля. Действительное же его значение хотя и вполне определенно, но, как уже отмечалось, априори не известно.

Поэтому к начальным значениям h_{lk} и ω_{lk} на начальном многообразии семейства необходимо присоединить и другие начальные данные, чтобы решение было единственным. Ими могли бы быть, например, значения единичного вектора нормали e^α на ω_1. Тогда, если на мировых линиях, ортогональных к заданному семейству, существует вещество, то уравнения его движения можно было бы использовать для нахождения e^α вне ω_1. Задание e^α на ω_1 соответствует заданию 4-вектора скорости элементов этого вещества, а абсолютное их ускорение определяется из совместного решения уравнений поля и движения. В общем случае, однако, ортогональные к семейству мировые линии могут оказаться пустыми, и тогда задание e^α на ω_1 как 4-вектора скорости вещества не может быть реализовано. Но всегда можно использовать для получения дополнительных начальных данных мировые линии моллюска Эйнштейна или системы отсчета. Данные Коши в физической задаче представляют собой в самом общем случае совокупность результатов тех или иных измерений, поэтому формулировка задачи Коши корректна с физической точки зрения только тогда, когда предусмотрена принципиальная возможность измерения используемых в задаче данных Коши и учтено возможное влияние процесса измерения на решение.

Измерение начальных данных h_{lk} и ω_{12} на начальном многообразии предполагает, согласно теореме 11, существование непустых мировых линий, проходящих в идеальном случае через каждое событие начального многообразия. Пренебречь в общем случае влиянием массы вещества, принадлежащего этим мировым линиям, и его движения на искомую метрику мира нельзя. Нельзя также задать наперед движение этого вещества или, что то же, форму мировых линий моллюска Эйнштейна. В процессе измерения метрики на начальной гиперповерхности указывается (или может быть указана) базисная частица или элемент системы отсчета и измеряются начальные значения динамических перемен- ных системы отсчета. Однако ни значения динамических переменных системы отсчета, ни ее мировые линии не известны вненачальной гиперповерхности. Мировые линии системы отсчета неизвестны до решения задачи Коши даже в том простейшем случае, когда они являются геодезическими, а базисные частицы системы отсчета - свободными пробными. Событие мира вне начальной гиперповерхности, принадлежащее той мировой линии, которая пересекает начальную гиперповерхность в заданном событии, определяется метрикой мира вне начальной гиперповерхности, и может быть найдено только после решения задачи Коши. Поэтому кажется естественной такая постановка задачи Коши, при решении которой не только восстанавливается метрика мира, но и система отсчета - конгруэнция ее мировых линий и ее динамические переменные,- в которой заданы начальные значения. В корректной

формулировке задачи Коши необходимо задать (измерить) на начальном многообразии ω_1 значения 4-вектора скорости вещества системы отсчета или единичный касательный к мировым линиям моллюска 4-вектор $u_{(S)|_{\omega_1}}$ и распределение массы покоя $\boldsymbol{\mu}_{(S)|_{\omega_1}}$, а их значения вне ω_1 определить из совместного решения уравнений Эйнштейна и уравнений движения всей материи, включая уравнения движения вещества системы отсчета. Четырехвектор $u^{\alpha}_{(s)}$ элементов системы отсчета, в которой измеряются начальные значения $h_{ik|_{(1}}$ и $\omega_{ik|_{\omega_1}}$, алгебраически выражается через $g_{0\alpha}$ (I.48), а компоненты их абсолютного ускорения $w^{\alpha}_{(s)}$ - через векторы $\vec{\rho}$ или $\vec{\pi}$ (I.53), поэтому уравнения движения (I.22) элементов системы отсчета принимают вид

$$\mu_{(S)}\rho_l = \left(g_{lk} - \frac{g_{01}g_{0k}}{g_{(0}}\right) p^{kv}_{(S);v} + \frac{\rho_{(S)}}{v - g_{00}} - F_{l0},$$
$$\mu_{(S),0} = -p^{\nu}_{(S)),} + \frac{1}{2}\mu_{(S)}\left(\frac{g_{00,0}}{g_{00}} - g^{v\alpha}g_{v\alpha,0}\right).$$

Вектор ρ, по определению (I.50 а), содержит $g_{0\ell,0}$, поэтому уравнения (I.178 а) можно присоединить к уравнениям Эйнштейна для нахождения функций g_{0i} вне начального многообразия, если на нем заданы значения $g_{0:|_{\omega,}}$ В уравнении же для определения g_{00} вне ω_1 нет надобности, так как, согласно лемме 5, в любой системе отсчета преобразованием только x^0-координаты, не изменяющим начальных данных $h_{ik}\omega_1$ и $\omega_{ik|_{\omega,}}$, можно получить $g_{00} = -1$. Для этого достаточно использовать в качестве временной координаты события моменты собственного времени, измеряемого в окрестности события. Предположим поэтому, что в многообразии введены координаты $\left(\tau, x^k\right)$, в которых $g_{00} = -1$. Тогда уравнения (I.178) можно разрешить относительно $g_{0\ell,\alpha}e^{\alpha}$ и записать

$$g_{0l,\alpha}e^{\alpha} = \Phi_{(l)}\left(\mu_{(S)}; p^{\alpha_3}_{(S)}; g_{0k}; h_{kn}; \omega_{kn}; \eta^{\alpha}_{(k)}\right),$$
$$\mu_{(S),\alpha}e^{\alpha} = \Phi\left(\mu_{(S)}; p^{\alpha_3}_{(S)}; g_{02}; h_{kn}; \omega_{kn}; \eta^{\alpha}_{(k)}\right),$$
$$p^{\alpha_\beta}_{(S)} = p^{\alpha_3}_{(S)}\left(\mu_{(S)}\right).$$

Функции $\Phi_{(i)}$ и зависят от величин, определенных на многообразии семейства, и их производных на многообразии, но не вдоль нормали к нему. Уравнения (I.179 а) определяют значения функций g_{0i} вне ω_1 и одновременно формируют мировые линии моллюска Эйнштейна, а (I.179 б) - распределение плотности вещества системы отсчета.

Система уравнений Эйнштейна (I.165), (I.166) и (I.175) вместе с присоединенными к ним уравнениями (I.179) составляет теперь полную систему уравнений для метрики мира. Если к ним добавить уравнения движения остального вещества, уравнения его состояния и уравнения электродинамики, то получим полную систему уравнений мира (Арифов, 1978; подобную же формулировку задачи Коши в частном случае космологической проблемы предлагает и Агаков, 1981).

Задача Коши. Пусть в многообразии $\left\{\tau, x^k\right\}$ задано семейство $\omega\left(\tau, x^k\right) = \text{const}$. Требуется найти функции $h_{tk}, \omega_{lk}, g_{\text{ul}}$ и $\mu_{(s)}$, удовлетворяющие уравнениям (I.165), (I.166). (I.175) и (I.179); и динамические переменные вещества и электромагнитного поля, удовлетворяющие остальным уравнениям полной системы уравнений мира, которые на начальном многообразии ω_1 принимают заданные значения $h_{lk\omega_{|\omega}}, \omega_{lk|_{\omega_1}}, g_{\Omega|_{\cdot v_1}}$ и $\mu_{(S)_{(\omega_1}}$ и значения данных Коши динам:ческих Перемен ы и элктромагн:тного поля.

Доказательство существования и единственности решения задачи Коши в такой формулировке встречает определенные трудности, хотя все уравнения и записаны в форме, разрешенной относительно высших производных вдоль нормали к многообразиям семейства. Это связано с тем, что доказательство с самого начала необходимо проводить в классе неаналитических функций. Корректная постановка задачи Коши для уравнений Эйнштейна в принципе не позволяет рассматривать ее вне вещества (по крайней мере, вне вещества системы отсчета), а функции, описывающие вещество, как правило, терпят разрывы на некоторых поверхностях. Тем не менее, если наложить жесткие условия на функции, описывающие вещество системы отсчета, то

формальное применение теоремы Ковалевской к области мира вне остального вещества позволяет сделать вывод о существовании и един- ственности решения задачи Коши в классе аналитических функций. Можно надеяться, что такое доказательство существует и для класса более реалистических функций.

Теорема 30. Решение задачи Коши в классе реалистических функций существует и оно единственное.

Следствие 12. Движение, и в частности абсолютное ускорение, системы отсчета не может быть задано наперед, но определяется, движением и распределением массы остального вещества в мире, начальным распределением массы вещества системы отсчета, его термодинамическим состоянием и начальными значениями метрического вектора $\vec{a}$ (или g_{0i}), а также внутренней и внешней геометриями начальной пространственноподобной гиперповерхности.

Отметим, что практическое значение задачи Коши в теории относительности невелико, так как вряд ли возможно фактическое задание начальных значений на всей пространственноподобной гиперповерхности (особенно в незамкнутом мире). Но возможность корректной ее формулировки имеет принципиальное значение для любой физической теории.

27.1.19 19. Conservation Laws

В §2 было показано, что уравнени непрерывности (I.10) для электрического 4-вектора тока можно привести к интегральной фсрме (I.1) а), которая интерпретируется как математическая запись закона сохранения электрических зарядов. Рассмотрим этот вопрос подробнее. Пусть имеются поле 4-вектора J^α, удовлетворяющего уравнению непрерывности

$$J^\alpha_{;a} = 0$$

и область мира D, ограниченная двумя кусками Γ_1 и Γ_2 пересечения D с пространственноподобными гиперповерхностями ω_1 и ω_2 семейства $\omega\left(x^\alpha\right) = \text{const}$, причем ни одно из событий ω_1 не принадлежит будущему любого события ω_2. «Боковую» временноподобную гиперповерхность, образованную мировыми линиями точек замкнутой двумерной поверхности, ограничивающей Γ_1, и замыкающую вместе с Γ_1 и Γ_2 границу D, обозначим через Σ.

Умножая (I.180) на инвариантный элемент объема D и преобразуя по теореме Гаусса объемный интеграл к интегралу по граничной гиперповерхности, получаем

$$\int\limits_{(\Gamma_2)} J^\alpha e_\alpha dV - \int\limits_{(\Gamma_1)} J^\alpha e_\alpha dV = -\int\limits_{(\mathrm{I})} J^\alpha n_\alpha dV$$

где e^α - единичный 4-вектор, ортогональный к ω в направлении будущего; n^α - единичный 4-вектор внешней нормали $\sum$; dV - инвариантный элемент объема. События сечения Σ гиперповерхностями ω образуют двумерные поверхности, ограничивающие соответствующие трехмерные области Γ, поэтому правая часть (I.181) представляет собой суммарный поток вектора J^2 через границу области. Если величина Q распределена на ω с плотностью $q = -J^a e_a$, то левая часть (I.181) есть разность количеств Q, содержащихся в объемах Γ_2 и Γ_1, а равенство (I.181) выражает закон сохранения величины Q. Если D выбрана таким образом, что J^α на Σ равно нулю, то (I.181) сводится независимости Q от гиперповерхности семейства

$$Q = -\int\limits_{(\Gamma)} J^a e_a dV = \text{ const.}$$

Физическая система, описываемая полем J^2, для которой существуют такие области D, называется замкнутой.

Уравнение непрерывности и закон сохранения, соответствующий ему, можно записать в привычной трехмерной форме. Введем скалярное q и векторное $\vec{q}$ поля равенствами

$$q = -\sqrt{1+a^2}\left(\frac{J_0}{\sqrt{-g_{00}}} - a_i J^i\right),$$
$$q^l = \sqrt{1+a^2}e^{-\varphi}J^l.$$

Легко проверить справедливость тождества

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{h}q) + \partial_\ell\left(V\bar{h}q^i\right) \equiv \sqrt{1+a^2}V\overline{-g_{00}h}J^\alpha_{;a}$$

где h-детерминант метрического тензора (I.121) физического пространства. Поэтому в каждой системе отсчета уравнение непрерывности (I.180) эквивалентно следующему:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{h}q) + \partial_l\left(\sqrt{h}q^l\right) = 0.$$

Умножая последнее на $dx^1dx^2dx^3$ и интегрируя, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{(\Gamma)} q dv = -\oint\limits_{(S)}(\vec{q}d\vec{S})$$

Скалярная функция, определенная равенством (I.183 а), совпадает с фигурирующей в (I.181), так как нормаль к физическому пространству в сторону будущего есть единичный 4-вектор $e_\alpha\left\{-\sqrt{-g_{00}\,(1+a^2)}, \sqrt{1+a^2}\left(\frac{g_{0i}}{\sqrt{-g_{00}}} - a_l\right)\right\}$. Элемент объема $dv = \sqrt{h}dx^1dx^2dx^3$ пространства инвариантен относительно группы преобразований (I.45), но, вообще, не совпадает с dV, инвариантным относительно общей группы (I.47). Теорема 31. Уравнение непрерывности (I. 180) или (I. 184) 'есть дифференциальная форма закона сохранения (I.181) или (I.185). Если 4-векторное поле удовлетворяет уравнению непрерывности, то его проекция на ортогональное к пространственноподобной гиперповерхности направление совпадает с плотностью сохраняющейся величины. Равенства (I.180), (I.181), (I.184) и (I.185) выполняются, если для произвольнсй области мира выполняется хотя бы одно из них.

Уравнению непрерывности удовлетворяют плотности токов электрических зарядов (I.10) и массы свободных частиц или элементов некогерентной жидкости (I.20 а). Удовлетворяет ему и «плотность тока электромагнитього излучения», если в рассматриваемой области мира отсутствуют электрические заряды. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля (I.18г) в этом случае приводится к виду (Петров, 1961; Хокинг, Эллис, 1977)

$$T^{(\mathrm{rad})}_{\alpha,\beta} = u_{(\mathrm{rad})}\ \left(u_\alpha u_\beta + u_\alpha \mathrm{v}_\beta + u_\beta \mathrm{v}_\alpha + \mathrm{v}_\alpha \mathrm{v}_\beta\right),$$

где $\mu_{(\mathrm{rad})}$ - собственное значение в собсгвенных направлениях u_α и $\mathrm{v}_\alpha, u^\alpha u_\alpha = -1, \mathrm{v}^\alpha \mathrm{v}_\alpha = 1, u^\alpha \mathrm{v}_\alpha = 0$. Если ввести изотропный векТор λ_α

$$i_\alpha = u_\alpha + v_\alpha$$

то (I.186) можно переписать

$$T^{(\mathrm{rad})}_{\alpha\beta} = \mu_{(\mathrm{rad})}\lambda_\alpha\lambda_\beta$$

Тензор энергии-импульса излучения имеет ту же алгебраическую структуру, что и тензор свободных частиц (I.18 а), поэтому излучение (свободное электромагнитное поле) ведет себя в определенном смысле так же, как свободные частицы (следствие 3), - линиями тока излучения являются геодезические мира, но в отличие от свободных частиц, они изотропны, а «собственная энергия» излучения, распределенная по объему пространственноподобной гиперповерхности с плотностью $\left(-\frac{\mu_{(\mathrm{rad})}}{A}\lambda^\alpha e_\alpha\right)$, подчиняется закону сохранения. Здесь

$$A = A_j \exp\left\{\int\limits_{\Lambda_0}^{\lambda} u_\alpha v^\alpha_{,\beta}\frac{dx^3}{d\dot{\lambda}}d\lambda\right\},$$

а λ-канонический параметр вдоль линий тока излучения. Действительно, из уравнений движения (I.19), которые имеют место для излучения в том случае, когда в рассматриваемой области мира отсутствуют электрические заряды, сразу же следуют уравнения (см. также теорему 6)

$$\frac{8}{8} - \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = 0$$

для мировыХ линий

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda} = A\lambda^\alpha$$

и уравнения непрерывности

$$\left(\mu^*_{(\mathrm{rad})}\lambda^\alpha\right)_{;\alpha} = 0, \mu_{(\mathrm{rad})} \equiv \frac{\mu_{(\mathrm{rad})}}{A}.$$

Смысл функции $\mu_{(\mathrm{rad})}$ заключается в том, что в системе отсчета вектор нормали к физическому пространству которой совпадает с собственным вектором u^α излучения, $\mu_{(\mathrm{вad}}$ совпадает с его плотностью энергии. Впрочем, это относится и к первым двум сохраняющимся токам - электрнческих зарядов и массы свободных частиц. Кнвариантные функции ρ, μ и $\mu_{(\mathrm{rad})}$, характеризующие системы электрических зарядов, свободных частид и поток излучения, суть плотности электрических зарядов, массы покоя и энергии излучения соответственно на семействе таких гиперповерхностей, ортогональные направления к которым параллельны их временноподобным собственным направлениям. Такие гиперповерхности существуют не всегда.

Лемма 19. Семейство гиперповерхностей, ортогональных к касательным u^α заданных временноподобных мировых линй, существует в том и только том случае, если и $_\alpha$ удовлетворяет равенствВам

$$\chi_{\alpha\beta} = 0$$

Не о бхо д и м о с т ь. Пусть гиперповерхности ортогональны u^α. Тогда

$$\frac{\partial\omega}{\partial x^\alpha} = \xi u_\alpha$$

Введем $f = \ln|\xi|$ и запишем условие совместности (I.192)

$$u_{\beta;\alpha} - u_{\alpha;\beta} + u_\beta f_{,\alpha} - u_\alpha f_{,\beta} = 0.$$

Умножая его на u^α, получаем

$$f_{,\beta} = -u_{\beta;\alpha}u^\alpha - u_\beta f_{,\alpha}u^\alpha$$

Из двух последних уравнений следуют (I.191).

Д ост аточ но ст ь. Если выполняются (I.191), то любое решение (I.194) удовлетворяет (I.193), поэтому уравнения (I.192) совместны, и гиперповерхности существуют. Решение же (I.194) в этом случае существует, так как в системе отсчета $u^\alpha\{u^0, 0, 0, 0\}$ уравнения (I.191) сводятся К$\chi_{lk} = 0$, а (I.194) - к уравнениям

$$f_{,l} = -p_t + \frac{g_{0l}}{g_{00}}f_{,0}$$

условня совместности которых, следовательно, выполняются. Гиперповерхности, удовлетворяющие условиям леммы, представляют собой физическое пространство в собственной системе отсчета электрических зарядов, свободных частиц и потока излучения (под собственной здесь понимается система отсчета, мировые линии элементов которой касательны к временноподобным собственным направлениям излучения u^α, а не к линиям тока излучения λ^α), когда эта система отсчета синхронная.

Следствие 13. В синхронной собственной системе отсчета и только в ней плотности электрических зарядов, массы покоя свободных частиц и энергии излучения совпадают с инвариантными функциями ρ, μ и $\mu^*_{(rad)}$ соответствующих сохраняющихся токов.

Как это виднс из (I.183 б), в собственной системе отсчета плотность потока сохраняющейся величины равна нулю в случае электрических зарядов и свободных частиц, а в случае излучения отлична от нуля и направлена параллельно его собственному пространственноподобному вектору v^α.

Всякий симметричный тензор второго ранга можно привести к одному из четырех типов (Хокинг, Эллис, 1977), но тензорыэнергии - импульса вещества и полей принадлежат только двум типам: для иззлучения или безмассовых частиц (второй тип) он имеет вид (I.186) или (I.188), а для вещества и связанного поля (первый тип) приводится к виду

$$T_{\alpha\beta} = \mu u_\alpha u_\beta + \sum_{a=1}^{3} p^{(a)} \mathrm{v}_\alpha^{\prime a)} \mathrm{v}_\beta^{(a)},$$

где μ - собственное значение в направлении собственного временноподобного единичного вектора u_α, а $p^{(a)}$ - три собственных значения в соответствующих им собственных пространственноподобных направлениях единичных векторов $\mathrm{v}_\alpha^{(a)}$. Все собственные векторы ортогональны друг другу. В случае вещества u^α — 4-вектор скорости частиц или элементов сплошной среды, а $p^{(a)}$ - главные значепия тензора напряжений.

Тензоры энергии-импульса всех известных видов вещества и полей удовлетворяют условиям энергодоминантности, и есть основания думать, что эти условия являются необходимыми для любого физически значимого тензора энергии-импульса.

Определение 9 (условия энергодоминантности). Для любого временноподобного единичного вектора e^α тензор энергии-импульса удовлетворяет двум условиям: 1) инвариант $\mathscr{E} \equiv T_{\alpha\beta} e^\alpha e^\beta$ не отрицательный; 2) вектор $P_\alpha \equiv -T_{\alpha\beta} e^\beta$ не пространственноподобный.

Лемма 20. Тензор энергии-импульса удовлетворяет условиям энергодоминантности в том и только том случае, если $\mu_{(\mathrm{rad})} \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0, \mu \geqslant \left|p^{(a)}\right|$ Д ок а з а тельство. Пусть имеется произвольный временноподобный единичный вектор e^α. Разложим его по ортонормированным собственным векторам тензора энергии-импульса первого типа:

$$e^\alpha = bu^\alpha + cv^{(1)\alpha} + dv^{(2)\alpha} + hv^{(3)\alpha}, b \neq 0$$

Тогда

$$\mathscr{E} = \mu + c^2\left(\mu + p^{(1)}\right) + d^2\left(\mu + p^{(2)}\right) + h^2\left(\mu + p^{(3)}\right)$$

К

$$P^\alpha P_\alpha = -\left\{\mu^2 + c^2\left(\mu^2 - p^{(1)2}\right) + d^2\left(\mu^2 - p^{(2)2}\right) + h^2\left(\mu^2 - p^{(3)2}\right)\right\}.$$

Если $\mu \geqslant 0, \mu + p^{(a)} \geqslant 0$ и $\mu^2 - p^{(a)2} \geqslant 0$, то $\mathscr{E} \geqslant 0$ и $P^a P_a \leqslant 0$ независимо от значений коэффициентов разложения, и наоборот. если $\mathscr{E} \geqslant 0$ и $P^\alpha P_\alpha \leqslant 0$ при любых c, d и h, то $\mu \geqslant 0, \mu + p^{(a)} \geqslant 0$ и $\mu^2 - p^{(a)2} \geqslant 0$.

Для тензоров второго типа доказательство очевидно, если воспользоваться (I.188) и учесть, что $e^\alpha \lambda_\alpha \neq 0$.

Лемма 21. Если тензор энергии-импульса удовлетворяет условиям энергодоминантности и $\mathscr{E}$ равен нулю для какого-лнбо временноподобного вектора e^α, то он равен нулю.

Доказательство. Пусть $T_{\alpha\beta}$ - тензор второго типа. Так как $e^\alpha \lambda_\alpha \neq 0$, то из $= 0$ следует $\mu_{(\mathrm{rad})} = 0$, поэтому и $T_{\alpha\beta} = 0$. Пусть $T_{\alpha\beta}$ пр:хнадлежит первому типу. Если левая часть (I.196) равна нулю, то из неотрицательности $\left(\mu + p^{(\alpha)}\right)$ и μ (лемма 20) следует $\mu = 0$ независимо от значений c, d и h, а из неотрицательности $\mu^2 - p^{(a)2}$ следует $p^{(a)} = 0$. Следовательно, и в этом случае $T_{a,3} = 0$.

Кнвариант $\mathscr{E}$ и 4-векторы P_α и $p_\alpha \equiv P_\alpha - \mathscr{E} e_\alpha$ условно можно назвать плотностью энергии, 4-вектором плотности энергии-импульса и 4-вектором плотности импульса на пространственноподобной гиперповерхности, ортогональной e_α. Вектор p_a пространственноподобный, принадлежит гиперповерхности и иначе может быть представлен равенством

$$p_\mu = -T_{\alpha\beta} e^\beta \eta_{(n)}^\alpha \eta_\mu^{(n)}$$

Легко видеть, что

$$\mathscr{E}^2 - p_\alpha p^\alpha = -P_\alpha p^\alpha \geqslant 0$$

т. е. плотность энергии не меньше (равна в случае излучения) абсолютного значения плотности импульса. Отсюда термин энергодоминантность. Плотность энергии вещества и излучения вместе с собственными значениями тензора энергии-импульса вещества определяет среднюю кривизну мира в точках гиперповерхности в пространственно- и временноподобных направлениях. Средней кривизной мира $\bar{K}_R$ на гиперповерхности в пространственноподобном направлении называется треть суммы кривизн в любых трех взаимно ортогональных направлениях, принадлежащих гиперповерхности, а средней кривизной $\bar{K}_T$ во временноподобных направлениях называется треть суммы кривизн мира в любых трех взаимно ортогональных направлениях, ортогональных к гиперповерхности.

Теорема 32. Средняя кривизна мира на пространственноподобной гиперповерхности в пространственноподобных направлениях равна

$$\bar{K}_R = \frac{1}{3} \times \mathscr{C}$$

а во временноподобных направлениях -

$$\bar{K}_T = -\frac{x}{6}\left(2\mathscr{C} - \mu + p^{(1)} + p^{(2)} + p^{(3)}\right)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя формулу (1.171), выражаю. щую тензор кривизны мира через геометрические величины, принадлежащие заданной пространственноподобной гиперповерхности, можно вычислить кривизну мира в направлениях, определяемых парами векторов $e^\alpha, \eta^\alpha_{(n)}$ и $\eta^\alpha_{(n)}, \eta^\alpha_{(l)}$:

$$K\left(e^\alpha, \eta^\alpha_{(n)}\right) = \frac{1}{h_{nn}}\left\{P_{nn} + \omega_{nj}\omega^j_n - \omega_{nn}\omega^j_j + x\left(T_{\mu\nu}\eta^{(2}_{(n)}\eta^{\nu}_{(n)} - \frac{1}{2}h_{nn}T\right)\right\},$$

$$K\left(\eta^\alpha_{(l)}, \eta^\alpha_{(n)}\right) = \frac{1}{h_{ll}h_{nn} - h^2_{nl}}\left(P_{nlnl} + \omega_{nn}\omega_{ll} - \omega^2_{nl}\right).$$

Ортогонализируя векторы $\eta^\alpha_{(n)}$ и учитывая уравнения Эйнштейна в форме (I.165), легко теперь получить формулы (I.199 а), (I.199 6)

Следствие 14. Средняя кривизна мира определяется собственными значениями тензора энергии-импульса вещества в соответствии с формулой

$$\bar{K} = \frac{x}{12}\left(\mu - p^{(1)} - p^{(2)} - p^{(3)}\right).$$

Теорема 33. Гауссова кривизна пространственноподобной гиперповерхности определяется ее второй квадратичной формой и плотностью энергии вещества и излучения, согласно формуле

$$K_G = \frac{x}{3}\,\mathscr{B} + \frac{1}{6}\left(\omega_{tk}\omega^{ik} - (\omega^n_n)^2\right)$$

Гауссовой кривизной называется средняя внутренняя кривизна гиперповерхности. Теорему легко доказать, отталкиваясь от уравнений (I.165).

Термины плотность энергии, плотность энергии-импульса и плотность импульса присвоены соответствующим величинам условно, так как они не всегда имеют глубокий смысл сохраняющихся физических величин. Скорее наоборот. Пусть в мире существует вектор Киллинга ξ_α (Эйзенхарт, 1947), который, по определению, удовлетворяет уравнениям

$$\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0$$

Этому вектору соответствует поле $J^\mu \equiv -T^{\mu\nu}\xi_\nu$, удовлетворяющее в силу уравнений движения (теорема 7) уравнению непрерывности (I.180). Поэтому каждому вектору Киллинга отвечает сохраняющаяся величина, распределенная с плотностью $T^{\mu\nu}\xi_\nu e_\mu$

(теорема 31). Если e_α - также вектор Киллинга, как это имеет место, например, в инерциальных системах отсчета, то плотность сохраняющейся величины есть проекция $T^{\text{ац}}$ на два вектора Киллинга - на две степени свободы (подвижности) мира,-и в этом ее глубокий физический смысл. Тогда плотность энергии $\mathscr{E}$ является плотностью сохраняющейся полной энергии и имеет смысл таковой только в системах отсчета, физическое пространство которых ортогонально временноподобному вектору Киллинга. Если к тому же и $\eta^\alpha_{(n)}$ (или только один из них) будут векторами Киллинга, то плотности соответствующих им сохраняющихся величин совпадают с проекцией 4-вектора плотности импульса на $\boldsymbol{\eta}^\alpha_{(n)}$. При этом плотность потока энергии через двумерную поверхность равна проекции плотности импульса на ортогональное к поверхности направление. Другим векторам Киллинга отвечают хаконы сохранения момента импульса и движения центра инерции физической системы.

Теорема 34. Если в мире существуют направления подвижности мира, среди которых одно - временноподобнфе, то в нем существуют и системы отсчета, в которых выполняются законы сохранения энергии и других механических величин, таких как проекции импульса и момента импульса вещества и излучения. Физическое пространство этих систем отсчета ортогонально временноподобному направлению подвижности мира. Число сохраняющихся величин вместе с энергией равно числу независимых направлений.

Условие максимальности числа сохраняющихся величин совпадает с условием максимальной однородности мира*. В мире постоянной кривизны существуют системы отсчета, в которых вы-

Это и другое, близкое, хотя и не совсем совпадающее по содержанию с теоремой 34, утверждения впервые, по-видимому, сформулированы Фоком ·(1960) полняется закон сохранения всех десяти механических величин. В мире Минковского, в частности, ими являются инерциальные системы отсчета.

Заметим, что теорема 34 является по сути, своеобразной формой применения теоремы Нётер* (Noether, 1918). Действительно, если использовать выражение Гильберта для тензора энергии-импульса через вариационную производную действия физической системы по метрическому тензору, то из инвариантности действия относительно группы движения мира следуют сразу же как уравнения (I.19), так и уравнения непрерывности (I.180) для 4-вектора $(-T^{2\nu}\xi_{\text{v}})$. Последнее и есть равенство нулю дивергенции в частных производных, в соответствии с теоремой Нётер.

Если в мире не существует векторов Киллинга, а в общем случае неоднородных и неизотропных миров так оно и есть, то говорить о законах сохранения механических величин вещества и излучения не приходится. Уравнения движения (I.19) нельзя преобразовать так, чтобы дивергенция тензора энергии-импульса в частных производных была равна нулю. Поэтому считается обычно, что для формулировки интегральных законов сохранения необходимо к $T_{\mu\nu}$ присоединить энергию и импульс гравитационного поля $\Theta_{\mu\nu}$. Последние часто называют квазитензором энергии-импульса поля тяготения. Предполагается, что дивергнция в частных производных суммы $T^{:2\nu} + \Theta^{\mu\nu}$ во всех системах отсчета равна нулю, поэтому полная энергия, полный импульс и т. д. всегда подчиняются законам сохранения. Величины $\Theta^{\mu\nu}$ действительно существуют и даже представлены многими формами метрического тензора и его производных. Поиску $\Theta^{\mu\nu}$ и формулировке законов сохранения в теории относительности посвящены работы Эйнштейна (1916, 1918), Мицкевича (1969), Мёллера (1975) и др. Детальный анализ этой проблемы с обсуждением самых разных подходов ее решения дан в книге Мицкевича (1969).

Если квазитензор энергии-импульса гравитационного поля выражается только через метрический тензор и его первые производные, т. е. не зависит непосредственно от кривизны мира, то он, вообще говоря, отличен от нуля в мире Минковского, что, очевидно, лишено смысла, так как в мире Минковского отсутствует поле тяготения. Если же $\Theta^{\mu\nu}$ зависит от кривизны мира, то энергия и импульс гравитационного поля содержат вторые производные метрического тензора, т. е. выражаются не только через данные Коши физической системы, а законы сохранения уже не играют своей ограничивающей эволюцию системы роли. Обращение же к неортодоксальным «языкам» теории - тетрадный, матричный, двуметрический формализмы - сопряжено с существенным недостатком другого рода: принципиальным отсутствием единст-

О теореме Нётер см. Полак, 1960; Боголюбов, Ширков, 1957. венности. Вообще, при обсуждении проблемы сохраняющихся величин представляется необходимым учитывать некоторые специфические стороны этой проблемы, обусловленные физической

корректностью (или некорректностью) ее постановки.

Во-первых, интегральные величины не принадлежат так же физической снстеме, как их плотности. Например, если о плотности импульса можно сказать, что она в известном смысле существует в природе - плотность импульса (импульс) принадлежит элементу среды (частице) и переносится вместе с ним (ней) от события к событию мира, - то полного импульса, вообще говоря, не существует, как не существует и точки его приложения (в месте положения центра масс вообще может не быть никакой части физической системы). То же относится и к другим интегральным величинам, не являющимся просто числом, как, например, число частиц. Поэтому интегральные законы сохранения таких величин являются модельным построением теории, приспособленным к условиям классической физики - к аксиомам однородности мира и существования инерциальных систем отсчета,-и не всегда адекватным природе. С нарушением однородности мира это модельное построение теряет под собой почву. Возможность же введения «законов сохранения», слабых и сильных, выполняющихся вследствие уравнения поля и движения или независимо от таковых, не связаа (или не всегда связана) с какими-либо глубокими пространственно-временными свойствами мира. Это можно видеть на примере теоремы Нётер. Теорема в том виде, как она предложена Нётер, утверждает существование равенств или тождеств типа уравнения непрерывности, если функционал (действие физической системы, например) инвариантен относительно некоторой группы преобразований, в частности группы движения пространства-времени. При этом число равенств равно числу параметров группы. Но теорема Нётер формально верна II в том случае, если рассматривается инвариантность функционала относительно произвольной группы преобразований координат - не движения. Фактически при этом используется не инвариантность формы функционала - условие теоремы Нётер,- а инвариантность значения или ковариантность формы, а это совсем не то же самое. Тем не менее из формального применения теоремы Нётер, а именно в такой форме она применяется в общей теории относительности, также следуют равенства типа уравнений непрерывности, но их физический смысл не глубок.

В этой ситуации можно вспомнить замечание В. А. Фока об отсутствии глубокого физического смысла ковариантности уравнений физики, в отличие от их инвариантности (хотя определенное значение ковариантности для формулировки законов физики в разных системах отсчета не отрицается). Если уравнения не ковариантны относительно какого-либо преобразования, то всегда с помощью некоторых дооснлнительных функций, введенных для этой цели, можно сделать эти уравнения ковариантными. Но тогда будет инвариантным (по значению, или ковариантным по форме) действие, экстремизация которого приводит к данным уравнениям, и значит, после формального применения теоремы Нётер появится (или может появиться) и некоторая новая сохракившаяся величина, не имеющая к физике отношения.

Во-вторых, законы сохранения механических величин даже в однородном мире формулируются только для инерциальных (или подобным им) систем отсчета, физическое пространство которых ортогонально временноподобному вектору Киллинга. Пусть физическая система описывается в двух инерциальных системах отсчета S_1 и S_2. Ясно, что, например, полная энергия (н ее плотность) в S_1 и S_2 различна, поскольку различаются векторы e^α для S_1 и S_2. Пусть теперь некоторая неинерциальная система отсчета S_3 до момента времени t_1 совпадает с S_1, а после t_2 совпадает с S_2. Очевидно, энергия физической системы в S_3 до t_1 совпадает с энергией системы в S_1, а после t_2 - с энергией в S_2. Следовательно, энергия в S_3 уже не сохраняется, ее значение после t_2 не равно значению до t_1. Если же ввести некую величину, которую будем интерпретировать как сохраняюшуюся в S_3 энергию, то возникнут вопросы: почему эта новая величина не совпадает с энергией в S_1 до t_1 и с энергией в S_2 после t_2, почему, например, в системах S_1 и S_3, совпадающих до t_1, под энергией надо понимать разные величины.

Следовательно, хотя в неинерциальных системах отсчета и можно ввести различные комплексы, которые по внешней форме подчиняются законам, напоминающим законы сохранения, они не могут быть естественным образом вплетены в теорию. Модельное представление о сохраняющихся полных величинах предполагает, что сама инерциальная система отсчета никак не влияет или влияет одинаково во все моменты времени на результат измерения наблюдаемых, так как все ее состояния в каждый момент времени тождественны. Поэтому можно было ожидать, что законы сохранения в инерциальных системах отсчета отражают некий факт, подчиненный внутренним законам физической системы «безотносительно» к процессу измерения в какой-либо

системе отсчета. Поскольку же неинерциальная система отсчета сама подвержена изменению, то и результаты измерения в этой системе не могут не нести определенной информации о системе отсчета и ее изменениях. Здесь уместно провести аналогию (но только аналогию!) с невыполнением закона сохранения энергии квантовой системы в процессе ее измерения классическим прибором. Поскольку измеряемая энергия подчиняется соотношению неопределенностей Гейзенберга, то о точном ее постоянстве не может быть речи.

В поле тяготения, согласно теории Эйнштейна, вообще нарушается однородность мира и, как следствие этого, не существует инерциальных систем отсчета, поэтому поиски сохраняющихся величин, таких как энергия и т. п., а вернее, понски столь же глу- бокой, как в классической физике, интерпретации подобных величин, по-видимому, обречены на неудачу. Это не означает, конечно, что гравитационное поле не обладает (или не переносит) энергией или нарушается закон сохранения энергии, а указывает только на возможную некорректность привычной формулировки закона сохранения в общей теории относительности.

Эволюция физической системы определяется уравнениями поля и движения, а отсутствие в теории «эффектов» исчезновения или появления из «ничего» вещества и излучения гарантируется следующей теоремой (Хокинг, Эллис, 1977).

Рассмотрим снова область мира D, ограниченную кусками гиперповерхностей Γ_1, Γ_2 и $\sum$. Теперь $\sum$ не обязательно временноподобна, в некоторых частях она может быть и пространственноподобной.

Теорема 35 (законы сохранения). Если тензор $T_{a,3}$ равен нулю на $\sum$ и на одной из границ Γ_1 или Γ_2 области D и удовлетворяет условиям энергодоминантности, то он равен нулю в D, включая границы Γ_2 или Γ_1 соответственно.

Д ок аз а т е л в с т в о. Предположим обратное. Пусть $T_{\alpha\beta} \neq 0$ в D. Введем функцию $f(x)$ такую, чтобы выполнялось уравнение

$$T^{\mu\nu} e_\nu f_{,\mu} + \frac{1}{2} f \left(T^{\mu\nu} e_\nu\right)_{;\mu} = 0$$

На всех ω внутри $D\mathscr{E} \neq 0$ (лемма 21), поэтому (I.203) можно переписать в виде

$$f_{,\mu} e^\mu = -\frac{1}{\mathscr{E}} p^\alpha f_{,\alpha} + \frac{1}{2\mathscr{E}} \left(T^{\mu\nu} e_v\right)_{;\mu} f$$

Так как 4-вектор p^α принадлежит ω, то последнее уравнение имеет единственное решение в области D, удовлетворяющее заданным значениям на какой-либо ω внутри D. Следовательно, функция f существует и при сделанном предположении отлична от нуля.

Уравнение (I.203) сводится в D к уравнению непрерывности

$$\left(T^{\mu\nu} e_v f^2\right)_{;\mu} = 0$$

Если D_1 и D_2 - подобласти D, на которые делится D произвольной гиперповерхностью ω, лежащей между ω_1 и ω_2, а Γ - пересечение D с ω, то, интегрируя по D_1 и D_2 и используя теорему Гаусса, получаем

$$\int\limits_{(\Gamma)} f^2 \mathscr{E} dV - \int\limits_{(\Gamma_1)} f^2 \mathscr{E} dV = 0,$$

$$\int\limits_{(\Gamma_2)} f^2 \mathscr{E} dV - \int\limits_{(\Gamma)} f^2 \mathscr{E} dV = 0.$$

Так как $\mathscr{E} \geqslant 0$, а $T_{\alpha\beta} = 0$ на Γ_1 по условию, то $\mathscr{E} = 0$ на Γ, тогда в силу произвольности ω и леммы $21 T_{a\beta} = 0$ в D. То же, если $T_{\alpha\beta} = 0$ на Γ_2, что и требовалось доказать.

Эта теорема является своеобразной формулировкой законов сохранения, так как из нее следует, что вещество и излучение не могут ни возникнуть, ни исчезнуть из некоторой области мнра иначе, как проходя через ее границу.

Следующая теорема в некотором роде обратна предыдущей. Теорема 36. Если тензор $T_{\alpha 3}$ равен нулю на Σ и на одной из границ Γ_1 или Γ_2 области D и отличен от нуля на Γ_2 или Γ_1 соответственно и в их окрестиости, принадлежащей D, то он не удовлетворяет условиям энергодоминантности.

Доказат ельство. Пусть $T_{\alpha,} = 0$ на $\sum$ и Γ_1 и $T_{\alpha\beta} \neq 0$ на Γ_2. Тогда можно построить функцию f, удовлетворяющую уравнению (I.203) в окрестности Γ_2 и во всех частях D, в которых $T_{\alpha\beta} \neq 0$. В остальных частях D, где $T_{\alpha\beta} = 0$, функция f произвольна, отлична от нуля, и достаточно гладкая. Если $T^{2\beta}e_\beta$ - непространственноподобный не во всех точках вектор, то в качестве начальной гиперповерхности для посгроения следует взять гиперповерхность, ни в одной своей точке не содержащую $T^{\alpha\beta}e_\beta$. В этом случае уравнение (I.203) снова разрешается относительно нормальной производной и существование его решения при заданных начальных значениях обеспечено.

Интегрируя теперь (I.204) по D, получаем

$$\int\limits_{(\Gamma_2)} f^{2\mathscr{E}} dV = 0$$

Следовательно, $\mathscr{E} < 0$ в некоторых точках Γ_2. Аналогично, если $T_{\alpha\beta} = 0$ на Γ_2 и $T_{\alpha\beta} \neq 0$ на Γ_1, то $\mathscr{E} < 0$ в некоторых точках Γ_1. Поэтому $T_{\alpha\beta}$ не удовлетворяет условиям энергодоминантности.

Представляется справедливой и другая обратная теорема.

Теорема 37. Если симметричный тензор второго ранга не удовлетворяет условиям энергодоминантности, то существует такая область D мира, в которой он равен нулю на Σ и Γ_1 (или Γ_2), но отличен от нуля на Γ_2 (или Γ_1).

Доказательство этой теоремы явилось бы одновременно доказательством и того, что любой физически значимый тензор энергии-импульса должен удовлетворять условиям энергодоминантности.

27.2 Relativistic Geometrical Optics by Arifov

27.2.1 20. Method and Problems

Под релятивистской понимается геометрическая оптика теории относительности - специальной и общей,- причем оптическая среда, наблюдамые и приборы связаны или относятся к произвольной системе отсчета. Частным случаем оптической среды является ее отсутствие - геометрическая оптика в вакууме. Строго говоря, законы геометрической оптики следует выводить из уравэений Максвелла-Лоренца (I.7) и уравнения движения электрических зарядов (I.8), анализируя электромагнитное поле в приближении оольших частот, с одной стороны, и исследуя оптические свойства среды как результат усреднения по малому, но макроскопическому объему,- с другой. В такой постановке эта задача достаточно сложна даже в простейшем случае, когда оптическая среда покоится в инерциальной системе отсчета, и сводится к тем или иным модельным и полуфеноменологическим представлениям. Поэтому даже те общие законы и теоремы, которые можно получить не обращаясь к уравнениям электродинамики, а основываясь только на уравнениях распространения характеристической гиперповерхности и изотропной геодезической, представляющей мировую линию луча света, имеют определенную ценность. Здесь удается строго сформулировать принцип Ферма для распространения волны в вакууме со всеми вытекающими из него следствиями, а это уже открывает прямой путь к обобщению принципа Ферма на оптическую среду и получению некоторых закономерностей распространения волны в среде, поддающихся прямой экспериментальной проверке.

Другая причина, заставляющая сосредоточить внимание на геометрической оптике сразу же за основами теории относительности, кроется в принципиальных соображениях. Из анализа основных положений вытекает, что для полного описания физической картины мира необходимо иметь средства и метод, по крайней мере в принципе, для измерения, помимо метрического тензора мира, еще и метрического вектора. Существованию последнего физически отвечает анизотропность скорости света. Неустрани- мость его в несинхронных системах отсчета никакими преобразованиями координат означает, что анизотропность скорости света существенна и неуничтожима в данной системе отсчета. Она может быть уничтожена только переходом от данной несинхронной к любой синхронной системе отсчета. Метрическое векторное поле вполне определенным образом должно проявлять себя в наблюдаемых явлениях, в первую очередь, через анизотропность скорости света в оптических, поэтому не составит трудаа

отыскать в оптических явлениях принципиальный метод его измерения. Ясно, что i с точки зрения технической измеримости наибольшие возможности дают также оптические явления.

К вопросам геометрической оптики в теории относительности обращались многие авторы. Достаточно указать на специальную главу в монографии Синга (1963), в которой наиболее последовательно излагается большинство результатов, полученных ранее. Необходимо отметить в связи с этим, что предлагаемую ниже геометрическую оптику отличает не только фактический материал, как например, принцип Ферма и его обобщение на оптическую среду, или законы отражения и преломления лучей на границе, и не столько фактический материал. Самое существеиное отличие заключается в том, что все изложение геометрической оптики ведется здесь на языке «трехмерных» понятий и наблюдаемых величин, что позволяет получить не только ясную физическую картину, но и, главное, предсказать новые принципиально наблюдаемые оптические эффекты. К ним относятся, например, эффекты, в которых анизотропность скорости света должна специфически обнаруживать себя, такие как зависимость длины волны от направления, отличие законов отражения и преломления от законов Снеллиуса и др. Оставаясь в рамках четырехмерного описания законов геометрической оптики, в принципе нельзя ни получить необходимые формулы, ни тем более предсказать такие из наблюдаемых эффектов, которые связаны с положением лучей в трехмерном физическом пространстве.

Полное описание физической системы предполагает так или иначе оперирование с проекциями четырехмерных величин на физическое пространство $t = \text{const}$ и временную ось и сопоставление их с набліодаемыми в эксперименте. Поэтому изложение релятивистской геометрической оптики на языке трехмерных наблюдаемых представлялось бы обоснованным и необходимым даже в том случае, если бы в нем не была заложена, как указывалось выше, потенциальная возможность предсказать конкретные оптические эффекты. Причем выражение закономерностей геометрической оптики в терминах трехмерных наблюдаемых вовсе не означает их неинвариантности относительно переходов от одной системы отсчета к другой. Напротив, поскольку нигде не фиксируется специфика той или иной системы! отсчта, за исключением тех случаев, когда специально рассматриваются конкретные, например, вращающнеся системы отсчета, а исследуются процессы в про- извольной системе отсчета, то и формулируемые закономерности релятивистской геометрической оптики инвариантны относительно любых преобразований системы отсчета. Здесь имеет место скрытая инвариантность формы, в отличие от явно инвариантной четырехмерной формы.

27.2.2 21. Fermat's Principle

Пусть кривая C задана в пространстве параметрически

$$x^i = x^i(\lambda), \quad t = 1, 2, 3$$

так что для двух заданных точек M_1 и M_2 выполняются условия

$$x^l(\lambda_1) = x^i(M_1), x^l(\lambda_2) = x^l(M_2).$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dt}{d\lambda} = e^i \left(a_l \xi^l + \sqrt{(h_{lk} + a_i a_k)\, \xi^l \xi^k} \right)$$

с начальным условием

$$t(\lambda_1) = t_1$$

где ξ^l - вектор, касательный к кривой C:

$$\xi^l(\lambda) = \frac{dx^i}{d\lambda}$$

φ, a_i и h_{ik} - скалярное, векторное и тензорное метрические поля соответственно, являющиеся известными функциями пространственных координат x^i и времени t.

Лемма 22. Для всякой пространственной кривой C, проходящей через заданные точки M_1 и M_2, и заданного начального условия (II.3 б) сушествует одна и только одна изотропная мировая -линия, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (II.3а), такая что $P_2\left(t\left(\lambda_2\right), M_2\right) > P_1\left(t\left(\lambda_1\right), M_1\right)$, если $\lambda_2 > \lambda_1$.

Доказ ат ельст во. Уравнение (II.3 а) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для неизвестной функции t от аргумента λ, разрешенное относительно производной, если в него подставить параметрические уравнения кривой C. Его решение существует и оно единственное для заданного значения $t\left(\lambda_1\right)$:

$$t = t\left(\lambda, \lambda_1; C\right)$$

Решение (II.4) вместе с уравнениями (II.1) кривой определяет мировую линию. Вдоль нее интервал ds, определяемый формулой (I.127), равен нулю. Так как правая часть (II.3а) всегда положительна, то из $\lambda_2 > \lambda_1$ следует $t\left(\lambda_2\right) > t\left(\lambda_1\right)$, т. е. событие $P_2\left(t\left(\lambda_2\right), M_2\right)$ лежит в будущем относительно события $P_1\left(t\left(\lambda_1\right), M_1\right)$ Обозначим правую часть (II.3а) через $F\left(t; x^l(\lambda); \xi^l(\lambda)\right)$ и рассмотрим кривую $\bar{C}$ в окрестности C, уравнения которой можно записать в виде

$$\bar{x}^i = x^i(\lambda) + \delta x^i(\lambda)$$

где $\delta x^l(\lambda)$ - малые функции.

Лемма 23. Изменение значения функции, удовлетворяющей уравнению (II.3 а), в области $[\lambda_1, \lambda]$ изменения аргумента с точностью до бесконечно малых второго порядка выражается формулой

$$\delta t\left(\lambda, \lambda_1; C\right) = \delta t\left(\lambda_1, \lambda_1; C\right) \exp\left(\int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{\partial F}{\partial t} d\lambda\right) + \frac{\partial F}{\partial \xi^i} \delta x^i \Big|_{\lambda} -$$

$$- \frac{\partial F}{\partial \xi^l} \delta x^i \Big|_{\lambda_1} + \exp\left(\int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{\partial F}{\partial t} d\lambda\right) \int_{\lambda_1}^{\lambda} \exp\left(-\int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{\partial F}{\partial t} d\lambda\right) \times$$

$$\times \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial \xi^l} + \frac{\partial F}{\partial \xi^i_i} \frac{\partial F}{\partial t}\right) \delta x^i d\lambda$$

для любого малого отклонения кривой C.

Кривой $\bar{C}$ соответствует решение $\bar{t}\left(\lambda, \lambda_1; \bar{C}\right)$, мало отличающееся от $t\left(\lambda, \lambda_1; C\right)$. Обозначим

$$\partial t\left(\lambda, \lambda_1; C\right) = \bar{t}\left(\lambda, \lambda_1; \bar{C}\right) - t\left(\lambda, \lambda_1; C\right),$$

$$\delta^{\dagger} = \frac{d}{d\lambda} \delta x^t.$$

$$\vdots$$

Имеем с точностью до бесконечно малых второго порядка
$F\left(\bar{t}; \bar{x}^l(\lambda); \bar{\xi}^l(\lambda)\right) = F\left(t; x^i(\lambda); \xi^l(\lambda)\right) + \frac{\partial F}{\partial t}\delta t + \frac{\partial F}{\partial x^l}\delta x^i + \frac{\partial F}{\partial \xi^l}\delta \xi^l$.

Всспользуемся теперь уравнением (II.3 а) и получим

$$\frac{d\dot{t}t}{d\lambda} - \frac{\partial F}{\partial t}\delta t = \frac{\partial F}{\partial x^l}\delta x^l + \frac{\partial F}{\partial \xi^l}\delta \xi^l$$

Если в величины $\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial x^l}$ и $\frac{\partial F}{\partial \xi^l}$ подставить уравнения изотроп-. ной мировой линии, удовлетворяющей (II.3) для кривой C, то для заданных функций $\delta x^i(\lambda)$ малого отклонения кривой неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение (II.6) определяет искомую функцию δt. Его общее решение представляется формулой (II.5). Постоянная интегрирования $\delta t\left(\lambda_1, \lambda_1; C\right)$ равна разности начальных значений решений уравнения (II.3а) для кривых $\bar{C}$ и C соответственно. Решение уравнения (II.3а) называется стационарным в точках M_1 и M_2, если для любых пространственных кривых из окрестности кривой C, проходящих через эти точки, и фиксированного начального значения $t\left(\lambda_1\right)$ функция $t\left(\lambda_2, \lambda_1; C\right)$ имеет с точностью до бесконечно малых второго

порядка одно и то же значение. Кривая, для которой решение уравнения стационарно в точках M_1 и M_2, называется экстремальной: Пусть кривая $\bar{C}$ принадлежит окрестности C и проходит через точки M_1 и M_2. Тогда $\delta x^l(\lambda_1) = \delta x^l(\lambda_2) = 0$. Из определения следует, что $\delta t(\lambda_2,\ \lambda_1; C) = 0$ в том и только том случае, если кривая C экстремальная, а $\delta t(\lambda_1, \lambda_1; C) = 0$. Применяя к этому случаю лемму 23, приходим к выводу, что экстремальная и только экстремальная кривая уравнения (II.3а) удовлетворяет трем обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial F}{\partial \xi^l} - \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial \xi^i} - \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0$$

Таким образом, система трех уравнений (II.7) вместе (II.3 а) определяют единственную изотропную мировую линию, проходящую через заданные точки, причем через одну из этих точек - в заданный момент времени. Нетрудно убедиться непосредственно, что система (II.7) и (II.3 а) эквивалентiа уравнениям изотропной геодезической линии (I.16), т. е. в координатном выражении совпадает с ними. Поэтому имеет место теорема, выражающая принцип Ферма (Арифов, 1973 б) в теории относительности.

Теорема 38. Распространение света между заданными точками пространства происходит вдоль экстремальной кривой уравнения (II. 3), а время распространения света является его стационарным в этих точках решением.

Такая формулировка принципа Ферма справедлива в самом общем случае без ограничений типа статичности или постоянства, налагаемых на метрику мира, а в этих последних случаях сводится к известным выражениям (Паули, 1947; Ландау, Лившиц, 1973). Уравнения (II. 7) представляют собой, по сути, результат применения вариационного принципа в своеобразной форме. Если метрические поля постоянны, то (II.7) и вовсе совпадают с уравнениями Эйлера - Лагранжа, а искомая функция $t(\lambda, \lambda_1; C)$ уравнения (II.3 а) легко приводится к виду функционала

$$t(\lambda, \lambda_1; C) = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda} F\left(x^i(\lambda); \xi^l(\lambda)\right) d\lambda.$$

Вывод уравнений изотропной геодезической в такой вариационной форме имеет смысл еще и потому, что применение вариационного принципа в форме Лагранжа к изотропной геодезнческой вызывает сомнение. В лагранжевой форме в качестве функционалов, экстремалями которых и должны быть изотропные геодезические, принимаются либо длина интервала (Паули, 1947).

$$S = \int\limits_{(P_1)}^{(P_2)} |ds|$$

либо величина, пропорциональная квадрату длнны ннтервала (Мёллер, 1975; Синг, 1963).

$$S = \text{ const } \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left|\frac{ds}{d\lambda}\right|^2 d\lambda$$

Изотропные геодезические обращают эти функционалы в нуль (минималыное значение), однако в окрестности каждой изотропной геодезической существует множество изотропных, но не геодезических мировых линий, которым принадлежат два фиксированных события P_1 и P_2, принадлежащие также и изотропной геодезической, и которые также обращают их в нуль. Поэтому в теории римановых пространств с неопределенной квадратичной формой приходится отказаться от вариацнонной задачи для изотропных геодезических в лагранжевой форме и обратиться к геометрическому определению (Фавар, 1960), согласно которому изотропная геодезическая - это такая мировая линия, вдоль которой ее касательный вектор переносится параллельно.

Пространственная кривая C, являющаяся экстремальной кривой уравнения (II. 3), называется лучом. Луч, проходящий через заданные две точки M_1 и M_2 пространства,

определяется уравнениями (II. 7) вместе с граничными условиями (II.2). Форма луча существенно зависит от момента времени $t\left(M_1\right)$, в который свет проходит через начальную точку. Только в том случае, когда метрические поля постоянны, форма луча определяется единственным образом заданием двух его точек. Направление луча в каждой точке задается единичным вектором $\vec{e}$

$$e^l = \frac{\xi^l}{\sqrt{h_{mn}\xi^m\xi^n}}.$$

Если из параметрических уравнений (II. 1) и (II. 4) распространения света исключить параметр и перейти от функции $x^i(\lambda)$ к $x^i(t)$, то вектор $\vec{e}(t)$ укажет направление луча в заданной точке пространства в момент времени, соответствующий прохождению света через эту точку. Подставим уравнения луча (II. 7) в формулу (II.5) и положим $\lambda = \lambda_2$. Получим

$$\delta t\left(\lambda_2, \lambda_1\right) = \left.\frac{\partial F}{\partial \xi^i}\delta x^i\right|_{\lambda_2} - \left.\frac{\partial F}{\partial \xi^i}\delta x^i\right|_{\lambda_1} + \delta t\left(\lambda_1, \lambda_1\right)\exp\left(\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{\partial F}{\partial t}d\lambda\right).$$

Первые два члена справа определяют изменение времени распространения света между заданными точками M_1 и M_2 пространства в функции смещения этих точек, третий - разность времен распространения света между фиксированными точками M_1 и M_2 луча, когда между двумя прохождениями света через начальную точку M_1 имеется временной сдвиг $\delta t\left(\lambda_1, \lambda_1\right)$. Время распространения света между заданными точками зависит, следовательно, как и форма луча, от момента времени $t\left(M_1\right)$, в который свет проходит через начальную точку. Только в постоянном метрическом поле это время постоянно для заданных двух точек на луче.

Постоянную $\delta t\left(\lambda_1, \lambda_1\right)$ необходимо сохранять в формуле (II. 8). в явном виде, так как в некоторых задачах геометрической оптики приходится разбивать интервал (λ_1, λ_2) изменения параметра между исходной и конечной точками на несколько подынтервалов (например, в точках разрыва непрерывностй оптического показателя преломления). Тогда приращение δt на каждом подынтервале имеет своим начальным значением приращение времени на предшествующем подынтервале. Только в постоянном метрическом поле, где все функции инвариантны относительно сдвига времени, приращение на всем интервале равно сумме приращений на подынтервалах.

27.2.3 22. Propagation of Light in a Metric Field

Сформулированный в §21 принцип Ферма позволяет исследовать процесс распространения электромагнитных волн в метрическом поле в приближении геометрической оптики в отсутствие оптической среды (Арифов, 1975). Обозначим единичный вектор в направлении $\frac{\partial F}{\partial \xi^i}$ через $\vec{\eta}$, а модуль вектора $\frac{\partial F}{\partial \xi^i}$ - через n_g. Легко получить формулы, выражающие n_g и η через известные функции метрического поля и единичный вектор $\vec{e}$, касательный к лучу:

$$n_g = e^{\varphi}\sqrt{1+a^2}\left(1 + \frac{a\cos\alpha}{\sqrt{1+a^2\cos^2\alpha}}\right)$$

$$\vec{\eta} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\left[\vec{a} + \left(-a\cos\alpha + \sqrt{1+a^2\cos^2\alpha}\right)\vec{e}\right]$$

здесь α−-угол между направлениями луча и векторного метрического поля.

Рассмотрим совокупность лучей, исходящих в некоторый момент времени t_1 из общей точки M_1, и поверхность, образуемую текущими точками лучей в момент времени t_2. По определению, эта поверхность является фронтом волны (или волновой поверхностью), если лучи связаны общим физическим пронсхождением. Выделим из совокупности два близких луча, координаты точек пересечения которых с фронтом волны различаются на некоторый вектор $\delta x^l\left(\lambda_2\right)$. Последний, очевидно, касателен к фронту. Для выделенных лучей $\delta x^l\left(\lambda_1\right) = 0, \delta t\left(\lambda_1, \lambda_1\right) = 0$ и $\delta t\left(\lambda_2, \lambda_1\right) = 0$. Поэтому из формулы (II.8) следует, что вектор $\vec{\eta}$ направлен вдоль нормали к фронту волны.

Можно показать также, что ортогональность вектора $\vec{\eta}$ к фронту волны сохраняется при распространении фронта. Пусть имеются два близких луча таких, что начальные их точки лежат на фронте волны, соответствующем моменту t_1, а конечные - на фронте в момент t_2. Координаты начальных и конечных точек различаются на векторы $\delta x^l(\lambda_1)$ и $\delta x^l(\lambda_2)$, касательные соответствующим фронтам. Так как для этих лучей $\delta t(\lambda_2, \lambda_1) = \delta t(\lambda_1, \lambda_1) = 0$, то из (II.8) получаем

$$n_g(t_1)(\overrightarrow{\eta\delta x})_{|_1} = n_g(t_2)(\overrightarrow{\eta\delta x})_{|_2}$$

Отсюда следует, что вектор $\vec{\eta}$ всюду ортогонален фронту волны.

Теорема 39. Нормали в фронту электромагнитной волны в метрическом поле в общем случае не касаются лучей, а наклонены к ним под углом β, определяемым формулой

$$\cos\beta = \sqrt{\frac{1 + a^2\cos^2\alpha}{1 + a^2}}.$$

Лучи и нормали к фронту совпадают по направлению в синх. ронных системах отсчета, в которых метрический вектор равен нулю. В несинхронных же системах они, вообще говоря, не совпадают. Физически это объясняется анизотропностью скорости света, когда метрический вектор отличен от нуля. Угол между нормалью к волновой поверхности и касательным к лучу вектором обращается в нуль в несинхронной системе отсчета только в том случае, когда скорость света в направлении луча имеет наименьшее или наибольшее из всех возможных в данной точке значений.

Волновая скорость света v_p, определямая через лучевую скорость как $v_c\cos\beta$, выражается простой формулой

$$v_p = \frac{1}{n_g}$$

Следовательно, величина n_g имеет смысл гравитационного (метрического) показателя преломления. Отождествление n_g с показателем преломления оправдано еще и тем, что криволинейный интеграл $\int\limits_{(1)}^{(2)} n_g(\vec{\eta}d\vec{l})$ от вектора $n_g\vec{\eta}$ вдоль луча имеет стационарное значение. Здесь вектор $d\vec{l}$ совпадает по направлению с лу- чом, а по модулю равен дифференциалу длины дуги луча. Криволинейный интеграл равен времени распространения света между точками M_1 и M_2, в чем можно убедиться, подставив в уравнение (II.3а) выражения для скорости света (I.134) с учетом (II.9) и (II.10). Поэтому стационарность данного интеграла следует из теоремы 38.

Следствие 15. В приближении геометрической оптики метрические поля проявляют себя как анизотропная недиспергирующая оптическая среда с гравитационным показателем преломления $\boldsymbol{n}_g$.

В общем случае показатель преломления n_g не является скалярным полем, а определен только в точках пространства вдоль луча. В синхронных системах отсчета n_g является скалярным полем, а первая кривизна луча зависит как от градиента показателя преломления, так и от коэффициентов w_{ik} второй квадратичной формы пространства (I. 111):

$$\sqrt{(\vec{x})^2 - (\overrightarrow{xe})^2}$$

где

$$x_l = \partial_l(\ln n_g) + 2\omega_{lk}e^k$$

Запишем алгебраическое уравнение распространения фронта волны в неявном виде

$$\omega\left(t, x^t\right) = \text{const}$$

и продифференцируем его вдоль луча. Воспользовавшись (II. 8): для дифференциала времени, получим

$$\left(n_g \frac{\partial \omega}{\partial t}\eta_i + \partial_t \omega\right) dx^i = 0$$

Учтем, что градиент $\partial_i \omega$ направлен по нормали к фронту и, следовательно, параллелен вектору $\vec{\eta}$

$$\vec{\nabla}\omega = |\vec{\nabla}\omega|\vec{\eta};$$

здесь $\vec{\nabla}$ - дифференциальный оператор Гамильтона на пространственной гиперповерхности $t = \text{const}$, компоненты которого обозначены через ∂_l; $|\vec{\nabla}\omega|$ - абсолютное значение градиента ω.

Подставляя последнее равенство в предыдущее, получаем

$$\left(n_g \frac{\partial \omega}{\partial t} + |\vec{\nabla}\omega|\right) \eta_i dx^l = 0.$$

Так как $\eta_i dx^i$ вдоль луча всегда отлично от нуля, то

$$|\vec{\nabla}\omega| = -n_g \frac{\partial \omega}{\partial t}$$

Такнм ооразом

$$\vec{\nabla}\omega = -n_g \frac{\partial \omega}{\partial t}\vec{\eta}$$

Легко убедиться подстановкой всех необходимых функций, что равенство, получаемое после возведения (II. 15) в квадрат, совпадает с уравнением (I. 13) характеристической гиперповерхности уравнений Максвелла - Лоренца. Уравнение (II. 15) является трехмерным представлением дифференциального уравнения распространения фронта.

Определим эйконал L равенством

$$L = -\operatorname{sign}\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)\omega$$

и введем волновой вектор

$$\vec{k} = \vec{\Gamma} L$$

частоту

$$\nu = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Тогда уравнение (II. 15) принимает форму

$$\vec{k} = n_g \vec{\nu}$$

а его квадрат - форму уравнения эйконала

$$(\vec{\Gamma} L)^2 = n_g^2 v^2$$

В постоянном метрическом поле частота волны вдоль луча постоянна, поэтому $L = v\,(L_0 - t)$, где L_0 - функция, совпадающая с эйконалом, определенным обычным образом в геометрической оптике (см., например, Борн, Вольф, 1970), и удовлетворяющая обычному уравнению эйконала для оптической среды с показателем преломления n_g

$$\left(\vec{\nabla} L_0\right)^2 = n_g^2$$

Уравнение эйконала (II. 17) является основным в релятивистской геометрической оптике для вакуума. Его можно привести удобному виду, в котором фигурируют, кроме эйконала, только метрические поля. Для этого частоту нужно выразить через волновое число $k = |\vec{k}|$ и записать уравнение дисперсии для вакуума

$$v = ke^{-i}\left[\sqrt{1+a^2} - \left(\vec{a}\frac{\vec{k}}{k}\right)\right],$$

через волновое же число нужно выразить и гравитационный показатель преломления

$$\frac{1}{n_g} = e^{-\varphi}\left[\sqrt{1+a^2} - \left(\vec{a}\frac{\vec{k}}{k}\right)\right]$$

Подставляя эти равенства в (II. 17), получаем следующее уравнение, которому должен удовлетворять эйконал

$$e^{2\varphi}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)^2 - 2e^{\varphi}\frac{\partial L}{\partial \vec{t}}\left(\overrightarrow{a\nabla}L\right) - \left(1+a^2\right)\left(\vec{\nabla}L\right)^2 + \left(\vec{a}\vec{\nabla}L\right)^2 = 0.$$

Имея уравнение дисперсии (II. 18), можно, как известно, записать и другую основную систему уравнений геометрической оптики, а именно, уравнения лучей (уравнения Гамильтона)

$$\frac{dx^l}{dt} = \frac{\partial \nu}{\partial k_l}, \frac{dk_l}{dt} = -\partial_\iota \nu$$

Первая группа этих уравнений связывает нормали к фронту с касательными к лучу векторами, т. е. совпадает, по существу, с уравнениями (II.16), а вторая представляет собой дифференциальные уравнения изотропной геодезической в гамильтоновой форме.

Из уравнения дисперсии видно, что частота неявно зависит от времени и координат. Дифференцируя ее вдоль луча и используя уравнения (II. 21), получаем

$$dv = \frac{\partial \nu}{\partial t}dt$$

Частную производную частоты по времени можно найти из уравнения дисперсии

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -v\psi$$

где

$$\psi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{1+a^2\cos^2\alpha}} - \left[e^l\frac{\partial a_l}{\partial t} + \frac{1}{2}e^l e^k\frac{\partial h_{lk}}{\partial t}\left(-a\cos\alpha + \sqrt{1+a^2\cos^2\alpha}\right)\right].$$

Поэтому изменение частоты волны при ее распространении в метрическом поле определяется формулой

$$\nu = \nu\left(t_1\right)\exp\left(-\int\limits_{t_1}^{t^2}\psi dt\right)$$

В постоянном метрическом поле частота, как и следовало ожидать, постоянна вдоль луча. В переменном же она изменяется не только от точки к точке вдоль луча, но и зависит от луча, соединяющего две заданные точки пространства. Два луча, исходящие из одной точки и имеющие в этой точке равные частоты, в другой точке их пересечения будут иметь уже разные частоты, если лучи не совпадают по всей своей длине.

Длина волны λ, определяемая как расстояние, проходимое волной вдоль луча, а не вдоль нормали к фронту, в течение одного периода $\frac{1}{v}$, не совпадает с обратным волновым числом и связана с частотой формулой

$$\lambda.\frac{e^{-\varphi}}{\nu}\left(-a\cos\alpha + \sqrt{1+a^2\cos^2\alpha}\right).$$

Формулы (II. 22) и (II. 23) полностью определяют для процесса распространения света в метрическом поле значения частоты и длины волны в любой точке вдоль луча через начальное значение частоты. Очевидно, общая формула (II.23) сохраняет силу и для процесса излучения света, но в отличие от процесса распространения, когда угол α в каждой точке данного луча имеет одно вполне определенное значение, в процессе излучения этот угол является независимой величиной, каждое значение которой в интервале $[0, \pi]$ задает коническую поверхность направлений излучения. Длина волны, таким образом, зависит от направления излучения.

Теорема 40. Длина волны, излучаемой атомом в данной точке метрического поля, зависит от направления излучения, согласно формуле

$$\frac{\lambda(\alpha)}{\lambda(\pi/2)} = -a\cos\alpha + \sqrt{1 + a^2\cos^2\alpha}$$

а частота волны не зависит от направления.

Длина волны имеет наибольшее значение в направлении, противоположном векторному метрическому полю, и наименьшее в направлении, параллельном ему. Степень анизотропности длины волны определяется удвоенным значением модуля метрического вектора в данной точке

$$\frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda(\pi/2)} = 2a$$

Анизотропность длины волны есть следствие анизотропности скорости света в несинхронных системах отсчета. Ее можно подвергнуть прямой экспериментальной проверке с помощью интерферометров или дифракционной решетки (Арифов, 1976 а). Независимость же частоты от направления излучения с высокой степенью точности подтверждена измерениями, в которых использовались газовые лазеры (Jaseja et al., 1964). Эксперимент Джазейа был задуман и поставлен с целью повышения точности опыта Май- кельсона по обнаружению в электромагнитных процессах движения Земли по орбите. Поэтому и схема экспериментальной установки в общих чертах схожа с установкой опыта Майкельсона. Принципиальным отличием является использование двух резонаторов, в которых возбуждаются электромагнитные колебания, и которые играют роль плеч интерферометра Майкельсона, и измерение разности частот возбуждаемых колебаний вместо наблюдения интерференции двух лучей. Современная техника измерения разности частот позволила авторам этого опыта достичь точности 10^{-14}. С этой точностью никаких изменений в частотах колебаний при поворотах установки в горизонтальной плоскости не обнаружено. Так как относительная величина ожидаемой из законов классической физики разности частот, обусловленной орбитальным движением Земли, равна 10-8, то авторы и пришли к выводу, что ими повышена точность опыта Майкельсона.

Отставив в сторону авторскую интерпретацию опыта, поскольку обсуждать проблему невозможности обнаружения в явлениях инерциального движения имеет смысл лишь с точки зрения истории физики, подчеркием тот непосредственный вывод, который следует из опыта Джазейа, - отсутствие изменения разности частот при поворотах прибора свидетельствует о независимости с точностью 10-14 частоты колебаний, возбуждаемых в резонаторах, от их направления. Существенно, что в опыте Джазейа испытанию подвергалась частота, а не длина волны. В опыте Майкельсона изменение интерференционной картины при повороте прибора обусловлено изменением разности фаз когерентных лучей, т. е., в конечном счете, изменением соотношения между длиной волны и длиной плеча интерферометра. При повороте интерферометра длина фиксированного плеча не изменяется, поэтому изменение интерференционной картины зависит только от того, изменяется длина волны при изменении направления или нет. Таким образом, в опыте Майкельсона фактически исследуется зависимость длины волны от направления, тогда как в опыте Джазейа - зависимость частоты от направления. Из-за суточного вращения Земли в опыте Майкельсона должна проявляться анизотропность длины волны и, поскольку линейный эффект в опыте Майкельсона исчезает, то необходимая для обнаружения анизотропности точность составляет 10-12. Результат же опыта Джазейа согласуется с теоремой 40.

Локальная скорость света, его частота и длина волны связаны одним соотношением $v_c = \lambda v$, поэтому экспериментальные значения частоты и длины волны, измеренные

независимо, однозначно определяют свойства скорости света. Возможности же независимого измерения частоты и длины волны света могут быть реализованы благодаря существованию физических приборов двух различных типов, например, резонаторов для измерения частоты и интерферометров для измерения длины волны. Различие физической природы этих двух типов приборов несущественно, если скорость света изотропна, а частота и длина волны отличаются, в сущности, только единицами измерения (скорость света в этом случае играет роль переводного коэффициента). Различие их природы становится принципиальным, когда длина волны и скорость света анизотропны. Тогда исследование зависимости от направления устанавливает не только факт изотропности или анизотропности скорости света, но и величину (степень) анизотропности, поскольку степень анизотропности длины волны совпадает с этой величиной для скорости света.

27.2.4 23. Anisotropy of Wavelength on a Rotating Body

Зависимость длины волны от направления, связанная с несинхронностью системы отсчета, может быть обнаружена при измерениях на вращающемся теле (Арифов, 1976 а). Для вращающейся системы отсчета (см. §15) метрические скалярное и векторное поля равны соответственно

$$\varphi = \ln \sqrt{\frac{1-\omega^2 r_0^2}{1-\omega^2 r^2}}, \vec{a} = \frac{[\vec{\omega}\vec{r}]}{\sqrt{1-\omega^2 r^2}}$$

где $\vec{\omega}$ - вектор угловой скорости вращения тела; r и r_0 - расстояния от оси вращения текущей и опорной точек; поэтому степень анизотропности длины волны пропорциональна $2\omega r$. Вследствие суточного вращения ($\omega r \sim 10^{-6}$ на экваторе) Земля представляет собой такую несинхроную систему отсчета, поэтому на ее поверхности равенство (II. 23) принимает вид

$$\lambda(x) = \frac{1}{\nu\sqrt{1-\omega^2 r_0^2}} \left(-\omega r \cos\alpha + \sqrt{1-\omega^2 r^2 \sin^2\alpha}\right).$$

В этом равенстве частота вдоль луча не меняется из-за постоянства метрического поля Земли.

Рассмотрим возможности интерферометров различного типа для измерения эффекта анизотропности длины волны. Основной ве.тичнной, определяющей интерференционную картину, является изменение фазы $\mathscr{P}$ волны на участке между точками M_1 и M_2

$$\mathscr{O}(M_1, M_2) = \int_{M_1}^{M_2} \frac{dl}{\lambda(\alpha)} = \sqrt{1-\omega^2 r_0^L} \int_{M_1}^{M_2} \frac{\omega r \cos\alpha + \sqrt{1-\omega^2 r^2 \sin^2\alpha}}{1-\omega^2 r^2} v dl,$$

где dl - дифференциал длины дуги луча.

В соответствии со значением релятивистской доли изменения фазы волны вдоль луча, пропорциональной той или иной степени малой величины ωr, следует различать три класса интерферометров: 1. Интерферометры типа дифракционной решетки. Интерферирующие лучи незамкнутые, в слабом поле $\omega r \ll 1$ релятивистская доля изменения фазы (р. д. ф.) пропорциональна первой степени ωr

$$\text{р.д.ф.} = \nu \int_{M_1}^{M_2} \omega r \cos\alpha dl.$$

Интерферометры Саньяка. Интерферирующие лучи замкнутые; площадь области, оконтуренной лучами, отлична от нуля. В слабом поле релятивистская доля изменения фазы определяется значением этой площади. Замечая, что линейная по ωr часть подынтегрального выражения в изменении фазы есть проекция вектора $\vec{a}$ на направление луча, можно записать

$$\text{р.д.ф.} \quad = \vee \oint (\vec{a} d\vec{l}) = \pm v \int (\operatorname{rot} \vec{a} d\vec{S}) = \pm 2\omega S \vee$$

Здесь использована теорема Стокса; S - площадь области, границей которой является луч; $d\vec{S}$ - векторный элемент площади; знак зависит от направления обхода лучом контура интегрирования: плюс, если направление обхода совпадает с направлением вращения системы отсчета, и минус, когда эти направления протіввоположны.

Интерферометры Майкельсона. Интерферирующие лучи замкнутые или почти замкнутые; площадь области, оконтуренной лучами, исчезающе мала. В слабом поле релятивистская доля изменения фазы волны пропорциональна второй степени ωr. В самом деле, линейная часть изменения фазы для луча, пробегающего один и тот же путь в том и другом направлениях, входит дважды с противоположными знаками, поэтому она исчезаюше мала. Слагаемое в квадратичной части, пропорциональное $\omega^2 r_0^2$, несущественно в силу своего постоянства как при фиксированной ориентации интерферометра, так и при ее изменении. Оно может быть отброшено, поэтому

$$\text{р. д. } \phi = \frac{\nu}{2} \int_{M_1}^{M_2} \omega^2 r^2 \left(1 + \cos^2 \alpha\right) dl.$$

Таким образом, следует озкидать анизотропность длины волны в линейном и квадратичном приближениях.

А. Линейный эффект. Результаты опытов Саньяка и Майкельсона - Гейла, в которых использовался интерферометр Саньяка для обнаружения интерференции на вращаюемся диске и на поверхности вращающейся Земли соответственно, уже обсуждались в §15 в связи с анизотропностью скорости света. В сущностн, эти опыты непосредственно доказывают зависимость длины волны от направления на вращающемся теле, а следовательно, и зависимость скорости света. Тем не менее использование дифракионной решгки для обнаружения линейного эффекта анизотропности длины волны имеет особое значение (по сравнению с интерферометром Саньяка), так как она полностью удовлетворяет смыслу локальности измерения.

Схему измерения с использованием дифракционной решетки можно представить следующим образом. Пусть: 1) оптическая ось решетки и вектор линейной скорости врашения образуют плоскость Σ; 2) решетка ориентирована так, что ее щели (или штрихи) перпендикулярны плоскости Σ; 3) линия пересечения фокальной плоскости линзы решетки с плоскостью Σ образует ось x, а центральный главный максимум дифракционной картины ось y; 4) угол θ между вектором $\vec{a}$ и оптической осью (которая считается направленной от собственно решетки к дифракционной картине) изменяется в пределах $[0, \pi]$, если вектор $\vec{\alpha}$ лежит в полуплоскости $x :\geqslant 0$, и в пределах $[0, -\pi]$,- если в полуплоскости $x \leqslant 0$; 5) угол отсчитывается в плоскости Σ от оптической оси и меняется в пределах $|0, \frac{\pi}{2})$ для $x \geqslant 0$ и $\left[0, -\frac{\pi}{2}\right)$ для $x \leqslant 0$. Углы α, θ и Φ связаны так, что $\cos\alpha = \cos(\Phi - \theta)$. Тогда

$$x(k) = h \operatorname{tg} \Phi \left(1 - \frac{\omega r \cos(\Phi - \theta)}{\cos^2 \Phi}\right), \sin \Phi = k \frac{\lambda\left(\frac{\pi}{2}\right)}{b};$$

здесь $x(k)$ - расстояние от центрального максимума до главного максимума порядка k; b - постоянная решетки; h - расстояние от решетки до фокальной плоскости линзы.

При данном θ расположение главных максимумов одинаковых по модулю порядков должно быть асимметрично относительно центрального максимума: асимметрия максимальна при $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ и должна исчезнуть, когда $\theta = 0$ и $\theta = \pm\pi$. Ожидается, что с изменением угла θ от $-\pi$ до π значение $|x(k)|$ непрерывно меняется от $|x(k)|_{\max}$ до $|x(k)|_{\min}$, так что

$$\frac{|x(k)|_{\max} - |x(k)|_{\min}}{|x(\xi)|} = 2\frac{\omega r}{\cos^2 \Phi}.$$

Наблюдение эффекта анизотропности длины волны за счет суточного вращения Земли может состоять, таким образом, в обнаружении и измерении изменения значения

$x(k)$ при поворотах дифракционной решетки в горизонтальной плоскости. Ожидаемая относительная величина изменения $x(k)$ должна составить несколько единиц 10^{-6}.

Б. Эффект второго порядка. Опыты Майкельсона ставились с целью обнаружения в электромагнитных процессах орбитального движения Земли. В последних вариантах этого опыта (Joss, 1930; Kennedi, 1926 и др.) точность была доведена до $\approx 10^{-11}$. В пределах этой точности никакого эффекта не обнаружено, что и должно быть с точки зрения релятивистской физики. Однако, имея в виду не только орбитальное, но и суточное движение Земли, эти опыты следует интерпретировать еще и в другой плоскости. Идея опыта заключается в том, что два когерентных луча обходят каждый вполне определенный путь вдоль соответствующего плеча интерферометра, после чего интерферируют. В результате каждый приобретает некоторое изменение фазы, равное отношению длины пути к длине волны (точнее, разности отношения и той его наибольшей части, которая кратна 2π, что, впрочем, несущественно). Интерференционная картина зависит от разности изменения фаз, приобретаемых лучами. Весь прибор как жесткое целое поворачивается в горизонтальной плоскости. При повороте взаимное расположение частей считается неизменным (принимаются все меры предосторожности, чтобы избежать смещения частей прибора), поэтому пути, пробегаемые лучами, остаются неизменными в системе отсчета прибора. Следовательно, неизменность или смещение интерференционных полос при повороте прибора прямо свидетельствуют о независимости или, наоборот, зависимости длины волны от ориентации плеч интерферометра. Отрицательные результаты опытов Майкельсона, выполненных до сих пор, означают отсутствие зависимости длины волны от направления, по крайней мере такой, которая могла бы вызвать смещение интерференционных полос на величину, большую чем $\sim 2\frac{h}{\lambda}10^{-11}$, где h - длина плеч интерферометра.

Но из теории следует, что изменение фазы интерферирующих лучей в интерферометре Майкельсона, обусловленное эффектом анизотропии длины волны за счет суточного вращения Земли, пропорционально квадрату малой величины ωr, поэтому ожидаемое смещение полос в опытах Майкельсона оценивается числом $2^{-h}_{\lambda}Q10^{-12}$. Здесь Q - численный коэффициент порядка единицы.

Значение Q для интерферометра конкретной конструкции может быть вычислено с учетом законов отражения света на границе среды (зеркала), покоящейся на вращающемся теле, обусловливающих дополнительное смещение интерференционных полос на величину, также пропорциональную второй степени ωr. Таким образом, относительная точность, достигнутая в опытах Майкельсона, почти на порядок ниже необходимой для того, чтобы обнаружить предсказываемый теорией эффект зависимости длины волны света в несинхронной системе отсчета.

27.2.5 24. Measurement of the Metric Vector Field

Зависимость длины волны, излучаемой атомом, от направления излучения (теорема 40) является принципиальным основа- нием для метода измерения метрического векторного поля. Пусть в окрестности данного события физического мира имеется совокупность тождественных приборов для измерения длины волны, ориентированных в различных пространственных направлениях. Такими приборами могут служить, например, дифракционные решетки. Необходимость в совокупности тождественных приборов объясняется потребностью одновременного измерения длины в раз. ных направлениях в окрестности одной и той же точки. Их тождественность может быть проверена непосредственным совмещением в результате поворота. Значения длины волны в разных пространственных направлениях образуют, согласно теореме 40, двумерную замкнутую поверхность. Диаметральные точки этой поверхности, соответствующие экспериментальным значениям $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$ лежат на оси симметрии поверхности. Ось симметрии в направлении от наибольшего к наименьшему значению длины волны совпадает с направлением метрического вектора, а степень анизотропности длины волны, определяемая формулой (II. 25) и характеризующая степень отличия этой поверхности от сферы, равна удвоенному его абсолютному значению. Впрочем, для определения модуля векторного поля достаточно знать только экстремальные значения длины волны, так как из теоремы 40 следует равенство

$$a = \frac{1}{2}\frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\sqrt{\lambda_{\max}\lambda_{\min}}}.$$

Измеряя таким образом метрический вектор в окрестности каждого события конечной области мира, можно получить значения метрического векторного поля в функции события мира или в функции его координат (x^0, x^i).

Необходимо подчеркнуть два существенных обстоятельства в измерении метрического вектора. Первое-ни результат, ни сам процесс измерения не зависят и, более того, не предполагают предварительной синхронизации часов на мировых линиях системы отсчета (моллюска Эйнштейна). Значение метрического поля является однозначным результатом определенной измерительной процедуры, лишенным каких-либо элементов произвольности. Второе-значение метрического векторного поля не зависит ни от единицы измерения, ни от эталонов. Это следует из того, что абсолютное значение метрического вектора есть отношение измеряемых величин. Поэтому процедура измерения метрического поля не предполагает также предварительного согласования эталонов измерения собственного временя. При его измерении в окрестности каждого события мира может быть использован любой эталон.

Теорема 41. Для измерения метрического векторного поля в ко нечной области физического мира достаточно путем измереннэ длины волны с помощью совокупности приборов в окрестности каждого события области выделить направление между экстремальными значениями длины волны, от наибольшего значения к наименьшему, и измерить их отношение. Абсолютное значение метрического векторного поля определяется измеренным отношением в соответствии с формулой

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} - \frac{\lambda_{\mathrm{mIn}}}{\lambda_{\max}}}$$

а его направление совпадает с выделенным.

27.2.6 25. Dependence of Emission Frequency on the Metric Field

Эффект смещения спектральных линий атома, находящегося в поле тяготения или сил инерции, как известно, был предсказан Эйнштейном (1907) и получил подтверждение в опытах (Pound, Rebka, 1960; Xay et al., 1960). Ниже будет приведено теоретическое объяснение эффекта, но прежде коротко остановимся на некоторых позициях, с которых это явление рассматривается в литературе.

Дело в том, что этому, в общем-то простому, вопросу посвящено очень большое число статей, и поток их еще увеличился, когда с открытием эффекта Мессбауэра были поставлены тонкие эксперименты по измерению смещения частоты излучения ядер, находящихся в точках с разными гравитационными потенциалами Земли, или в точках с разными значениями центробежной силы (на вращающемся диске). Причем. объяснения и методы получения величины смещения у разных авторов столь различны, что нередко прямо противоположны друг другу или противоречат здравому смыслу. Оставим в стороне крайние утверждения, подобные тому, что эффект смещения линий доказывает только закон сохранения энергии и ничего больше, или, что причина смещения заключается в изменении частоты γ-кванта уже на пути между излучателем и поглотителем при неизменной и одинаковой частоте самих ядер, не звисящей от потенциала тяготения в месте их положения. Трудно также согласиться с Сингом, который видит причину смещения в относительной скорости излучателя и поглотителя, ибо из объяснения Синга следует, что даже неподвижные относительно системы отсчета, в которой поле тяготения постоянно, излучатель и поглотитель имеют ненулевую относительную скорость.

Рассмотрим характерную точку зрения на это явление, которая основана на принципе эквивалентности и восходит к Эйнштейну. Ход рассуждений примерно таков. Наряду с инерциальной системой отсчета вводится ускоренная. Это может быть как вращающаяся система отсчета, так и равномерно ускоренная. Допустим, что на вращающемся диске помещены два атома: один (для простоты) в центре, другой на некотором расстоянии от оси вращения. При наблюдении из инерциальной системы от- счета из-за поперечного эффекта Допплера частота периферийного атома меньше частоты атома, находящегося в центре. Для атомов, неподвижных в равноускоренной системе отсчета, используется,

естественно, продольный эффект Допплера. То же уменьшение частоты должен зафиксировать наблюдатель, покоящийся возле одного из этих атомов. Отсюда с привлечением принципа эквивалентности и заменой поля сил инерции «эквивалентным» полем тяготения выводится формула для смещения частоты в гравитационном поле.

Такая последовательность суждений понятна, если речь идет о ранних работах Эйнштейна на пути построения общей теории относительности, но не приемлема теперь. Атомы могут находиться на больших расстояниях друг от друга, поэтому принцип эквивалентности неприменим здесь даже при самом «либеральном» его толковании. Но и в том случае, если ограничиться малой областью пространства, замена сил инерции полем тяготения неправомерна, так как кривизна мира на вращающемся диске равна нулю. В то же время молчаливо обходится наиболее интересный в этой ситуации вопрос, как должен объяснить изменение частоты наблюдатель, покоящийся на вращающемся диске. Этст иаблюдатель неподвижен относительно обоих атомов, поэтому не может ссылаться на эффект Допплера. В теории относительности явление считается объясненным полностью только тогда, когда оно объяснено как для наблюдателя в собственной системе отсчета, так и для произвольно движущегося наблюдателя.

Обратимся теперь к сути явления смещения спектральных линий. Независимо от того, находятся ли рассматриваемые излучатель и поглотитель волны в поле сил инерции или в гравитационном поле, они находятся в метрическом поле $\varphi, \vec{a}, h_{ik}$. Промежуток собственного времени события P выражается через время в опорном событии P_0 (см. §13)

$$d\tau = e^{-\varphi(P_0,P)}dt$$

Рассмотрим v-области гравитационного взаимодействия, принадлежащие событиям P_0 и P. Пусть в них имеются идентичные атомы, помещенные в идентичные условия. Тогда, согласно принципу соответствия 1, их линейчатые спектры одинаковы. Впервые на это обстоятельство обратил внимание Эйнштейн (1911). Одинаковость линейчатых спектров означает

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)_{P_0} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)_{P} = \text{ const}$$

где T_1 и T_2 - любые два периода излучения атома. Отсюда следует равенство

$$T(P) = T\left(P_0\right) f\left(P_0, P\right)$$

Функция f зависит только от событий P_0 и P. Эту зависимость можно конкретизировать, если сравнить последнее равенство с формулой, связывающей элементы собственного времени в события P_0 и P. Тогда

$$T(P) = e^{\varphi(P_0,P)}T\left(P_0\right)$$

Замедление собственного времени в P по сравнению с P_0 означает, что периоды атомов в P увеличиваются, и наоборот. В этом, в частности, и заключается физический смысл любых утверждений о «ходе часов» в разных точках мира.

Заметим, что в случае статического метрического поля формула (II. 28) следует из уравнения Шредингера для стационарных состояний атома, если в энергию стационарного состояния включить,гравитационную" энергию $E_g = E\left(1 - e^{\varphi}\right)$, где E - полная энергия состояния, **a** в гамильтониан - соответствующий оператор взаимодействия. Поскольку $E = E_0 + E_g$, то $E = E_0 e^{-\varphi}$. Здесь E_0 - негравитационная энергия состояния атома, т. е. сумма кинетической $m/\sqrt{\left(1 - \frac{v}{v_c}\right)\left(1 + \frac{v}{v_c}\right)}$ и потенциальной энергий электрона в атоме.

Скалярное метрическое поле обладает свойствами

$$\varphi\left(P_0, P\right) = -\varphi\left(P, P_0\right),$$
$$\vartheta\left(P_2, P_0\right) + \varphi\left(P_0, P_1\right) = \varphi\left(P_2, P_1\right).$$

Из (II.28) находим для двух атомов, локализованных в окрестностях событий P_1 и P_2,

$$\frac{T\left(P_1\right)}{T\left(P_2\right)} = e^{-\varphi(P_1,P_2)}$$

Теорема 42. Частоты излучения атомов зависят от метрического скалярного поля. Отношение частот двух идентичных атомов, локализованных в окрестностях событий P_1 и P_2, определяется формулой

$$\frac{\nu(P_1)}{\nu(P_2)} = e^{\varphi(P_1,P_2)}$$

Если система отсчета синхронная и неускоренная, т. е. мировые линии каждого элемента системы отсчета геодезические, так что абсолютное ускорение каждого элемента равно нулю, то $\varphi = 0$, а частота излучения атомов, покоящихся относительно такой системы отсчета, не зависит от метрического поля.

Пусть в окрестности события P_1 атом излучает волну с частотой $v(P_1)$. Волна распространяется и достигает окрестности события P_2, где и наблюдается. Частота волны изменяется вдоль лу- ча по закону (II.22), так что в окрестности P_2 ее частота $v(P_1, P_2)$ равна

$$\nu(P_1, P_2) = \nu(P_1) \exp\left(-\int\limits_{t(P_1)}^{t(P_2)} \psi dt\right).$$

Эта частота сравнивается с частотой атома в P_2:

$$\frac{v(P_2) - v(P_1, P_2)}{v(P_2)} = \frac{\Delta v}{v}.$$

Подставляя сюда выражения для $v(P_2)$ из (II. 30) и $v(P_1, P_2)$, получаем

$$\frac{\Delta v}{v} = 1 - \exp\left(-\varphi(P_2, P_1) - \int\limits_{t(P_1)}^{t(P_2)} \psi dt\right).$$

Эта формула выражает эффект смещения спектральных линий в метрическом поле в самом общем случае в собственной системе отсчета.

Теорема 43. Относительная величина разности частот двух электромагнитных волн, одна из которых излучается в окрестности P_1 и распространяется до окрестности события P_2, в котором и наблюдается, а другая испускается в P_2, определяется формулой (II. 31) и зависит от метрического поля. В постоянном метрическом поле она зависит только от значений метрического скалярного поля в точках испускания и наблюдения.

Смещение частоты, как это видно из (II. 31), зависит от двух сомножителей: первый определяется изначальной разностью частот атомов в точках P_1 и P_2, а второй - изменением метрического поля за время распространения волны. Единственная причина появления первого сомножителя - это действие на атомы внешних сил, удерживающих их в покое относительно данной системы отсчета. В опытах Паунда и Ребки (Pound, Rebka, 1960, и Крэншоу, Шифера и Уайтхэда (Cranshaw, Schiffer, Whitehad, 1960) измерялась разность частот излучения ядер, находящихся на разной высоте относительно поверхности Земли

$$\frac{\Delta v}{v} = 1 - 7/\frac{\overline{1 - \frac{\alpha}{r_1}}}{1 - \frac{\alpha}{r_2}} \approx -\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{r_1} - \frac{\alpha}{r_2}\right).$$

где α - гравитационный радиус Земли; r - расстояние от ее центра. Внешними силами, действующими на атомы, являются упругие силы, удерживающие их от падения в центр. В других опытах (Хау et al., 1960, Champeney, Moon, 1961) измерялась разность частот ядер, закрепленных на разных расстояниях от оси вращающегося диска

$$\frac{\Delta v}{v} = 1 - \sqrt{\frac{1 - \omega^2 r_1^2}{1 - \omega^2 r_2^2}}.$$

Здесь упругие силы удерживают ядра в покое, компенсируя действие сил инерции. И в том и в другом случае наблюдатель, находящийся в месте одного из атомов, вполне

определенными внутренними измерениями обнаруживает поле внешних сил, действующих в его системе отсчета и создающих абсолютное ускорение на каждом элементе системы. Если к тому же добавочными измерениями он обнаружит, что в его физическом мире кривизна равна нулю, то объяснит разность частот (например, во втором случае) как проявление действия внешних сил на вращающемся теле. Инерциальный наблюдатель этот же эффект объясняет поперечным эффектом Допплера.

27.2.7 26. Isotropic Optical Medium

Сформулированный в §21 принцип Ферма для вакуума открывает путь к прямому обобщению его на случай распространения волны в изотропной оптической среде. К определению изотропной среды необходимо подходить с некоторыми предосторожностями. Всякая среда, поскольку она находится в метрическом поле, должна проявлять в определенной мере анизотропные оптические свойства. Эта анизотропность (наведенная) обусловлена, помимо влияния структуры ее атомного строения, оптической анизотропностью метрического поля и может исчезнуть только вместе с обращением в нуль метрического векторного поля, т. е. с помещением среды в синхронную систему отсчета. Но и в этом случае она не свободна от влияния метрического скалярного поля, которое должно порождать дополнительную к собственной оптическую неоднородность среды. Оптические свойства среды полностью отвечают характеру ее внутреннего строения в том и только том случае, когда она покоится в неускоренной синхронной системе отсчета, т. е. когда $\varphi = 0$ и $\vec{a} = 0$. В метрическом же поле она подвергается сложным деформациям, изменяющим ее оптические свойства.

Назовем поэтому изотропной оптической средой такую, которая будучи помещена в неускоренную синхронную систему отсчета является таковой. Допустимо считать, что функции, описывающие оптические свойства таких сред, зависят от точки среды, частоты волны, вообще говоря, времени (среда может меняться со временем) и векторного метрического поля. Именно векторное метрическае поле и может создавать наведенную анизотропию среды. Поскольку в изотропной оптической среде отсутствуют выделенные собственные направления, то зависимость от векторного метрического поля может входить только через его модуль и скалярную функцию $\cos\alpha$ - проекцию векторного поля на на- правление луча. Предположим, таким образом, что оптическая изотропная среда описывается показателем преломления n, представляющим собой в самом общем случае функцию

$$n = n\left(x^i, t, v, a, a\cos\alpha\right)$$

Определение этой функции, исходя из строения вещества, является одной из задач электродинамики произвольно движущихся сред или, что то же, сред, покоящихся в произвольной системе отсчета. В геометрической же оптике эта функция считается известной.

Удобнее исходить из другой функции

$$p = p\left(x^l, t, v, a, a\cos\alpha\right)$$

которая связывает лучевые скорости света в вакууме и оптической среде. Эта функция, которую уместно называть показателем замедления, вполне определенным образом выражается через показатель преломления и наоборот, и в неускоренной синхронной системе отсчета совпадает с ним (Арифов, 1978).

Обобщение принципа Ферма на диспергирующие среды в переменном метрическом поле становится трудоемким, так как частота здесь не остается постоянной вдоль луча, а зависит от метрического поля. Но в постоянном поле частота волны постоянна, и соответствующие формулы значительно упрощаются. Поэтому в последующем положим, что 1) оптическая среда не диспергирующая, если метрическое поле переменное; 2) оптическая среда может быть и диспергирующей, если метрическое поле постоянНое.

Пусть скорость света в среде выражается формулой

$$\frac{dl}{dt} = \frac{v_c}{p} = \frac{1}{p}e^{-\varphi}\left(-a\cos\alpha + \sqrt{1 + a^2\cos^2\alpha}\right)$$

Тогда, имея в виду, что

$$dl = \xi d\lambda, a\cos\alpha = \frac{(\overrightarrow{a\xi})}{\xi},$$

получаем уравнение вдоль луча

$$\frac{dt}{d\lambda} = pe^{\varphi}\left[(\overrightarrow{a\xi}) + \sqrt{(\vec{\xi}\vec{\xi}) + (\overrightarrow{a\xi})^2}\right].$$

Теперь можно сформулировать теорему, выражающую принцип Ферма для изотропной среды.

Теорема 44. Распространение света между заданными точками в изотропной оптической среде происходит вдоль экстремальной кривой уравнения (II. 35), а время распространения света является его стационарным в этих точках решением.

Следуя методу, изложенному в §21, легко вывести уравнення экстремальной крнвой

$$\frac{\partial pF}{\partial x^l} + \frac{\partial pF}{\partial t}\frac{\partial pF}{\partial \xi^l} - \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial pF}{\partial \xi^l} = 0$$

и формулу для изменения значения функции, удовлетворяющей (II. 35), в случае малого отклонения кривой от экстремальной -

$$\delta t\,(\lambda, \lambda_1; C) = \frac{\partial pF}{\partial \xi^l}\delta x^l{}_{|_\lambda} - \frac{\partial pF}{\partial \xi^l}\delta x^l{}_{|^l_{\lambda_1}} +$$
$$+\delta t\,(\lambda_1, \lambda_1; C)\exp\left(\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda}\frac{\partial pF}{\partial t}d\lambda\right).$$

Вычислим квадрат интервала вдоль экстремальной линии, для чего подставим (II. 34) в формулу (I. 127). Вдоль луча в среде имеем

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{1}{p}\right)e^{-2\varphi}dt^2\left[1 + \frac{1}{p}\left(a\cos\alpha - \sqrt{1 + a^2\cos^2\alpha}\right)^2\right]$$

Так как вдоль луча переносится энергия волны, то световая линия в среде не может быть пространственноподобной, поэтому всегда $p \geqslant 1$. Вводя обозначения

$$\frac{\partial pF}{\partial \xi^i} = nq_i$$

и учитывая

$$\frac{\partial a\cos\alpha}{\partial \xi^i} = \frac{1}{\xi}(a_l - a\cos\alpha e_l)$$

получаем

$$n = pe^{\varphi}\left(a\cos\alpha + \sqrt{1 + a^2\cos^2\alpha}\right) \times$$
$$x\left[1 + a^2\sin^2\alpha\left(\frac{\partial \ln p}{\partial a\cos\alpha} + \frac{1}{\sqrt{1 + a^2\cos^2\alpha}}\right)^2\right]^{1/2},$$

$$\vec{q} = \frac{\vec{e} + \left(\frac{\partial \ln p}{\partial a\cos\alpha} + \frac{1}{\sqrt{1+a^2\cos^2\alpha}}\right)(\vec{a} - a\cos\alpha\vec{e})}{\left[1 + a^2\sin^2\alpha\left(\frac{\partial \ln p}{\partial a\cos\alpha} + \frac{1}{\sqrt{1+a^2\cos^2\alpha}}\right)^2\right]^{1/2}}.$$

Если $p = 1$, то $n = n_g, \vec{q} = \vec{\eta}$.

Легко выяснить, как и в случае распространения света в вакууме, что n-показатель преломления среды, а вектор $\vec{q}$ совпадает с нормалью к фронту. Поэтому угол между лучом и нормалью находится просто скалярным умножением равенства (II. 39) на вектор $\vec{e}$:

$$\cos\beta = \left[1 + a^2\sin^2\alpha\left(\frac{\partial \ln p}{\partial a\cos\alpha} + \frac{1}{\sqrt{1+a^2\cos^2\alpha}}\right)^2\right]^{-1/2}$$

Определим, как прежде, волновой вектор и частоту через функцию эйконала. Тогда вместо (II. 16) и (II. 17) получим уравнения

$$\vec{k} = n \vee \vec{q},$$
$$(\vec{\nabla} L)^2 = n^2\nu^2.$$

Умножим (II. 39) скалярно на $\vec{a}$ и разрешим полученное алгебраическое уравнение относительно acas α. Это возможно, потому что векторы $\vec{q}$ и $\vec{k}$ параллельны, что следует из (II. 41), а зависимость показателя замедления от $a\cos\alpha$ предполагается известной. После подстановки $a\cos\alpha$ как функции скаляра $\left(\vec{a}\frac{\vec{k}}{k}\right)$ в (II. 38) получим показатель преломления n в функции волнового вектора. Имея все это в виду, запишем уравнение дисперсии

$$v = \frac{k}{n\left(x^l, t, \nu, a\cdot\left(\vec{a}\frac{\vec{k}}{k}\right)\right)},$$

а также уравнения лучей для оптической среды

$$\frac{dx^l}{dt} = \frac{\partial v}{\partial k_l}, \frac{dk_l}{dt} = -\partial_l v$$

Формулу (II. 38) можно рассматривать как дифференциальное уравнение, связывающее обе функции - показатели преломления и замедления,- характеризующие оптическую среду. Если задана функция p, то из (II. 38) сразу же можно получить показатель преломления. Если же известна функция n, то показатель замедления может быть получен как решение дифференциального уравнения (II. 38).

Теорема 45. При заданном показателе преломления оптической среды показатель замедления является единственным решением уравнения (II. 38), регулярным во всех точках области определения.

Доказ ательст во. Пусть функция $n\left(x^l, t, \nu, a, a\cos\alpha\right)$ известна. Перепишем уравнение (II.38) в следующем виде:

$$ne^{-\varphi}\left(-a\cos\alpha + \sqrt{1+a^2\cos^2\alpha}\right) =$$
$$= \sqrt{p^2 + (a^2 - a^2\cos^2\alpha)\left(\frac{\partial p}{\partial a\cos\alpha} + \frac{1}{\sqrt{1+a^2\cos^2\alpha}}\right)^2}.$$

Разложим правую и левую части этого равенства в ряд Тейлора в окрестности плоскостей $a = 0$ и $a\cos\alpha = \pm a$ пространства аргументов $\{x^i, t, v, a, a\cos\alpha\}$ и приравняем коэффициенты при нулевой и первой степенях. Получим

$$p_0 = n_0\left(e^{-\varphi}\right)_{a=0}$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial a}\right|_{a=0} = \left(\frac{\partial n e^{-\varphi}}{\partial a}\right)_{a=0},$$

$$p_{|a\cos\alpha=\pm a} = \left(\mp a + \sqrt{1+a^2}\right)\left(n e^{-\varphi}\right)_{a\cos\alpha=\pm a'}$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial a\cos\alpha}\right|_{a\cos\alpha=\pm a} = -p_{|a\cos\alpha=\pm a}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \mp \right.$$

$$\left. \mp\frac{1}{2a}\left[1 - \sqrt{1 \mp 4a\left(\frac{\partial}{\partial a\cos\alpha}\ln\left(n e^{-\varphi}\right)\right)_{a\cos\alpha=\pm a}}\right]\right\}.$$

Здесь использованы обозначения

$$p_0 = p_{1a=0}, n_0 = n_{1a=0}.$$

Из (II. 46) и (II. 49) следует также

$$\left.\frac{\partial p}{\partial a\cos\alpha}\right|_{a=0} = -p_0 + \left.\frac{\partial n e^{-\varphi}}{\partial a\cos\alpha}\right|_{a=0}.$$

Уравнение (II. 38) можно привести к виду дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, разрешенного относительно первой производной искомой функцжи p по аргументу $a\cos\alpha$. Тогда равенство (II. 48) определяет данные Коши этого уравнения на плоскости a cas $\alpha = a$, нли $a\cos\alpha = -a$ в пространстве аргументов. Из существования и единственности решения задачи Коши (Смирнов, 1957) следует доказательство теоремы. Остается показать разрешимость уравнения (II. 38) относительно производной p по $a\cos\alpha$. Сомножитель $a\sin\alpha$ производной искомой функции в (II. 38) обращается в нуль только при $a = 0$ и $a\cos\alpha = \pm a$. Поэтому разрешимость уравнения (II. 38) очевидна для всех точек $a \neq 0$ и $a\cos\alpha \neq \pm a$. Для точек, принадлежащих плоскостям $a = 0$ и $a\cos\alpha = \pm a$ пространства аргументов, разрешимость в классе регулярных функций следует из равенств (II. 49) и (II.50).

В частности, если среда отсутствует, то $n = n_g$, и в соответствии с (II. 9)

$$\left(n_g e^{-\varphi}\right)_{a=0} = 1, \left.\frac{\partial n_g e^{-\varphi}}{\partial a}\right|_{a=0} = 0,$$

$$\left(n_g e^{-\varphi}\right)_{a\cos\alpha=\pm a} = \left(\pm a + \sqrt{1+a^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial n_g e^{-\varphi}}{\partial a\cos\alpha}\right)_{a\cos\alpha=\pm a} = \frac{1}{1+a^2}.$$

Функция $p = 1$ удовлетворяет в этом случае как уравнению (II. 38), так и равенствам (II. 46) - (II. 50). Из единственности решения следует, что $p = 1$– единственная функция в отсутствие среды, как это и должно быть. Информацию о функциях p и n, определяющих оптические свойства среды в приближении геометрической оптики, можно получить из анализа экспериментальных данных. Для примера рассмотрим однородную диспергирующую среду, покоящуюся на вращающемся теле.

Теорема 46. Если однородная диспергирующая оптическая среда покоится на вращающемся с угловой скоростью ω теле, а гравитационное поле отсутствует, то в линейном по $\omega r \ll 1$ приближении ее показатель преломления определяется формулой

$$n(\nu, a\cos\alpha) = n(\nu) + \omega r\cos\alpha.$$

Так как метрическое поле в системе отсчета вращающегося тела постоянно, а показатель преломления однородной среды есть функция $n(v, \omega r\cos\alpha)$, то из уравнений лучей (II. 44) следует, что частота волны также постоянна вдоль луча. Тогда в линейном приближении $e^{\varphi} \approx 1, a \approx \omega r$

$$\lambda = \frac{1}{v p_0}\left(1 - \omega r\cos\alpha - \left.\frac{\partial \ln p}{\partial \omega r\cos\alpha}\right|_0 \omega r\cos\alpha\right)$$

Предположим, что два когерентных луча обходят замкнутый контур внутри оптической среды в противоположных направлениях и интерферируют. Пусть при этом выполняются условия: 1) в точках пересечения контуром границы среды лучи нормальны к границе, 2) нормали к границе направлены по касательным **k** окружностям в плоскости вращения. В этом случае нормали **k** границе параллельны метрическому вектору, и лучи при прохождении через нее не испытывают преломления. Действительно, все три вектора - нормаль к границе, метрический вектор и вектор, касательный к падающему лучу,-коллинеарны, а какое-либо выделенное направление в изотропной среде отсутствует, следовательно, и преломленный луч коллинеарен падающему. Из этого можно заключить, что оба луча пробегают один и тот же путь, но в разных направлениях. Если обозначить через $\mathscr{P}_{\pm}$нзменения фазы волны при прохождении контура в направлении вращения (t) и в противоположном направлении $(-)$, то

$$\mathscr{P}^{\mathscr{P}} = \oint_{i\pm 1} \frac{dl}{\lambda}$$

где dl - элемент длины луча.

Подставим сюда (II. 52) и вычислим интегралы

$$\oint_{(\pm)} \frac{dl}{\lambda} = vp_0 \left[l \pm \left(1 + \frac{\partial \ln p}{\partial a \cos\alpha}\bigg|_0 \right) 2\omega S \right]$$

здесь l - длина контура; S - площадь фигуры, ограниченной контуром. Для простоты предполагается, что контур проходит по точкам либо только среды $(p \neq 1)$, либо только вакуума $(p = 1)$. Интерферирующие лучи имеют, следовательно, разность фаз

$$\mathscr{P}_+ - \mathscr{P}_- = 4\omega S_{vp_0} \left(1 + \frac{\partial \ln p}{\partial a \cos\alpha}\bigg|_0 \right).$$

Описанный здесь процесс интерференции схематически восстанавливает опыты Саньяка (Sagnac, 1914) и Гарреса (1912). В опыте Саньяка среда отсутствует, а интерференционная картина соответствует разности фаз $(\mathscr{P}_+ - \mathscr{O}_-)_S = 4\omega S\mathrm{v}$. В опыте Гарреса, напротив, лучи пробегают в кольце из стеклянных призм. Интерференционные полосы и в этом случае соответствуют разности фаз лучей, равной $(\mathscr{O}_+ - \mathscr{P}_-)_H = 4\omega S\mathrm{v}$. Теоретическую формулу (II.53) можно привести в соответствие с экспериментальными данными, если положить

$$p_0 \left(1 + \frac{\partial \ln p}{\partial a \cos\alpha}\bigg|_0 \right) = 1.$$

Подставляя это равенство в ряд Тейлора функции p, получаем

$$p(\nu, a\cos\alpha) = p(\nu) + [1 - p(\nu)]\omega r \cos\alpha,$$

а следовательно, и (II. 51).

Из уравнения (II. 39) в линейном приближении легко получить равенство

$$\left(\vec{a}\frac{\vec{k}}{k} \right) = a\cos\alpha$$

Используя это равенство, а также (II. 49) и теорему 43, приходим к уравнению дисперсии однородной среды.

Следствие 16. Если однородная диспергирующая оптическая среда покоится на вращающемся теле, то ее уравнение дисперсин в линейном по $\omega r \ll 1$ приближении имеет вид

$$\nu = \frac{k}{n(v) + \left(\vec{a}\frac{\vec{k}}{k} \right)}.$$

Для получения явной зависимости частоты от волнового числа необходимо алгебраически разрешить это уравнение относительно частоты.

27.2.8 27. Reflection and Refraction of Light at the Boundary of a Medium

В формулу (II. 8) можно вложить иной смысл, помимо раскрытого уже в тексте $21. Поскольку она получена подстановкой в (II. 5) уравнения луча,то ее правая часть может определять изменение значения функции, удовлетворяющей уравнению (II. 3 а), при малом отклонении кривой C с незакрепленными концами в окрестности луча (экстремальной кривой). То же относится к формуле (II. 37). Использование их именно в этом смысле вместе с принципом Ферма позволяет получить законы отражения и преломления на границе вакуум - среда в приближении геометрической оптики. Для этого луч, проходящий через две заданные точки такие, что точка отражения (преломления) находится между ними, делится на два отрезка: между начальной точкой и точкой отражения (преломления) и между точкой отражения (преломления) и конечной точкой. На первом отрезке зафиксирована начальная точка, а на втором - конечная. Следует иметь в виду, что показатель преломления, будь то гравитационный показатель для вакуума (II. 9) или показатель преломления среды (II. 32). имеет разные значения не только для падающего и преломленного лучей, но и для падающего и отраженного, так как он зависит, помимо прочего, еще и от проекции метрического вектора на направление луча. Показатель преломления изменяется на границе скачком не только по разные стороны от границы, но и по одну ее сторону при изменении направления луча.

Отражение на границе вакуум - среда. Найдем законы отражения луча в вакууме. На границе луч удовлетворяет условию

$$\left(\left(n_{g_2}\vec{\eta}_2 - n_{g_1}\vec{\eta}_1\right)\delta\vec{x}\right) = 0$$

где $\overrightarrow{bx}$ - вектор произвольного малого смещения на границе, а индексы «1»и «2» относятся соответственно к падающему и отраЖенному лучам.

Пусть граница задана единичным вектором $\vec{N}$ нормали, направленным из среды в вакуум. Введем обозначения: i - угол падения луча, γ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{N}$ в точке отражения. Тогда, разрешая (II. 56) и используя формулу (II. 10), связывающую единичные векторы вдоль луча и нормали к фронту, получаем

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{A}\left\{2\cos i\left[\left(1+a^2\right)\vec{N} - a\cos\gamma\vec{a}\right] + \left(1+a^2\sin^2\gamma\right)\overrightarrow{e_1}\right\},$$

$$A = \left\{\left(1+a^2\sin^2\gamma\right)^2 - 4a^2\cos^2\gamma\cos^2 i - \right.$$
$$\left. -4a^2\cos\gamma\cos\alpha_1\cos i\left(1+a^2\sin^2\gamma\right)\right\}^{1/2}.$$

Формула (II.58) и представляет собой закон отражения света от границы вакуум - среда в пронзвольном метрическом поле. Согласно ей, только в синхронных системах отсчета углы падения и отражения равны, а плоскости отраженного и падающего лучей совпадают. В несинхронных же системах отсчета плоскость луча при отражении поворачивается, а угол отражения не равен углу падения. Из (II. 57) следуют формулы для вектора $\vec{\Omega}$ поворота плоскости луча в направлении от плоскости падающего к плоскости отраженного луча

$$\vec{Q} = \frac{2a\cos\gamma\operatorname{ctg} t}{\sqrt{A^2 - \left(1+a^2\sin^2\gamma\right)^2\cos^2 i}}\left(\vec{N}\left[\overrightarrow{ae_1}\right]\right)\vec{N}$$

и угла r отражения

$$\cos r = \frac{1+a^2\sin^2\gamma}{A}\cos i$$

Заметим, что три угла i, γ и α_1 удовлетворяют неравенству

$$-\cos(\gamma - i) \leqslant \cos\alpha_1 \leqslant -\cos(\gamma + i).$$

В слабом метрическом поле, когда $a \ll 1$, разность углов отражения и падения, а также угол поворота плоскости луча пропорциональны квадрату абсолютного значения метрического вектора.

Отражение на границе среда - вакуум. Вектор нормали к границе направлен внутрь среды, остальные обозначения те же, что и в первом пункте. Закон отражения выражается формулой

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{m_2\left(1 - a\cos\alpha_2\mathscr{E}_2\right)}\left\{m_1\left(1 - a\cos\alpha_1\mathscr{E}_1\right)\vec{e}_1 + \left(m_1\mathscr{E}_1 - m_2\mathscr{E}_2\right)\vec{a} + B\vec{N}\right\},$$

где

$$m = pe^{\varphi}\left(a\cos\alpha + \sqrt{1 + a^2\cos^2\alpha}\right),$$

$$\mathscr{E} = \frac{\partial \ln p}{\partial a\cos\alpha} + \frac{1}{\sqrt{1 + a^2\cos^2\alpha}}$$

$$B = -n_1 D + \sqrt{n_2^2 - n_1^2\left(1 - D^2\right)}$$

$$D = \frac{-\cos i + \mathscr{E}_1\left(a\cos\gamma + a\cos\alpha_1\cos i\right)}{V\sqrt{1 + a^2\sin^2\alpha_1\mathscr{E}_1^2}}.$$

Следует заметить, что в (II. 61) справа присутствуют функции, зависящие от угла α_2, поэтому формулой (II. 61) при заданных углах i, γ и α_1 еще нельзя определить направление $\overrightarrow{e_2}$. Это связано с тем, что неизвестна в явном виде зависимость от α функции замедления среды. Если такая зависимость известна, то из (II. 61) можно получить алгебраическое уравнение относительно $a\cos\alpha_2$. После подстановки в (II. 61) корня этого алгебраического уравнения следует уже окончательная форма закона отражения дуча па границе в оптической среде. Нормали к волновым поверхностям на границе удовлетворяют условию

$$\vec{q}_2 = \frac{n_1}{n_2}\vec{q}_1 + \frac{B}{n_2}\vec{N}$$

Если i' - угол падения нормали к фронту, то $D = -\cos i'$, что следует из (II. 39). Поэтому закон отражения (II. 62) нормалей $\mathbf{k}$ волновой поверхности совпадает по форме с законом преломления лучей Снеллиуса, в котором роль показателей преломления разных сред играет показатель преломления одной среды, но в разных направлениях - в направлении падающего луча n_1 и отраженного n_2.

Поскольку энергия волны переносится вдоль луча (а не нормали), то реальный интерес представляет условие отражения лучей (II. 61), а не простое по видимости выражение для отражения нормалей. Тем не менее, и (II. 62) может быть полезно, так как по нормалям можно восстановить, согласно (II.39), направление лучей.

В слабом метрическом поле разность углов отражения и падения и угол поворота плоскости отражения в оптической среде пропорциональны квадрату модуля метрического вектора.

Преломление на границе вакуум - среда. Подобно отражению можно рассмотреть и преломление лучей на границе. Если нормаль к границе снова направлена от среды в вакуум, то условия, которым удовлетворяют нормали к волновой поверхности, имеют вид

$$\vec{q} = \frac{n_g}{n}\vec{\eta} + G\vec{N},$$

$$G = \frac{n_g}{n}\cos i' - \sqrt{1 - \left(\frac{n_g}{n}\right)^2\sin^2 i'},$$

когда луч проходит в среду, и

$$\vec{\eta} = \frac{n}{n_g}\vec{q} + e\mathscr{N}\vec{N},$$

$$e = -\frac{n}{n_g}\cos i' + 1 - \left(\frac{n}{n_g}\right)^2\sin^2 i',$$

когда луч проходит из среды в вакуум.

Для получения закона преломления лучей необходимо в (II. 63) и (II. 64) подставить вместо $\vec{\eta}$ и $\vec{q}$ их выражения (II. 10) и (II. 39) через единичные векторы, касательные к лучам. Преломление нормалей по форме удовлетворяет закону Снеллиуса. В частности,

$$n \sin r' = n_g \sin \dot{i}',$$

но показатели преломления зависят от направленія падающего и преломленного лучей. Преломление же лучей не подчиняется за- кону Снеллиуса. Можно показать, что в случае слабого метрического поля закон Снеллиуса в линейном приближении выполняется для лучей в том и только том случае, если функции оптической среды представимы в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{c} p\left(x^l, t, v, a, a\cos\alpha\right) = p\left(x^i, t, v\right) + \\ + \left[1 - p\left(x^l, t, v\right)\right] a\cos\alpha + O\left(a^2\cos^2\alpha\right) \\ n\left(x^l, t, v, a, a\cos\alpha\right) = n\left(x^l, t, v\right) + e^p a\cos\alpha + O\left(a^2\cos^2\alpha\right)\cdot \end{array}\right\}$$

В соответствии с этим и теоремой 46 законы преломления в однородной оптической среде, покоящейся на вращающемся теле, отличаются от закона Снеллиуса во втором порядке по малому параметру ωr.

27.2.9 28. Principle of Local Reversibility of Rays

Если в правой части формулы (II. 57), выражающей закон отражения лучей на границе в вакууме, произвести замену

$$\vec{e}_1 \to -\vec{e}_2, \quad i \to r, \quad \alpha_1 \to \pi - \alpha_2$$

а в левой части

$$\vec{e}_2 \to -\vec{e}_1$$

то равенство обеих частей не нарушится. Формула (II. 57) удовлетворяет принципу локальной обратимости лучей (в переменном метрическом поле лучи необратимы в нелокальном смысле). Принцип локальной обратимости применительно к законам преломления на границе вакуум - среда и отражения внутри оптической среды существенно ограничивает допустимую зависимость показателя преломления от аргумента $a\cos\alpha$.

Рассмотрим отражение на границе в оптической среде. Так как лучи обратимы, то вектор $(-\overrightarrow{e_1})$ в формуле (II.61) можно интерпретировать как отраженный $\vec{e}_2', \mathbf{a}\,(-\vec{e}_2)$ - как падающий $\overrightarrow{e_1'}$ лучи. Очевидно,

$$\alpha_1' = \pi - \alpha_2, \quad \alpha_2' = \pi - \alpha_1.$$

Для обращенных лучей в соответствии с (II. 61) следует записать равенство

$$\vec{e}_2' = \frac{1}{m_2'\left(1 - a\cos\alpha_2'\mathscr{E}_2'\right)}\left\{m_1'\left(1 - a\cos\alpha_1'\mathscr{E}_1'\right)\vec{e}_1' + \right.$$
$$\left. + \left(m_1'\mathscr{E}_1' - m_2'\mathscr{E}_2'\right)\vec{a} + B'\vec{N}\right\}.$$

Его можно привести, разрешив относительно $\overrightarrow{e_1'}$ и приравняв $\vec{e}_1' = -\vec{e}_2$ и $\vec{e}_2' = -\vec{e}_1$, к виду

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{m_1'\left(1 + a\cos\alpha_2\mathscr{E}_1'\right)}\left\{m_2'\left(1 + a\cos\alpha_1\mathscr{E}_2'\right)\vec{e}_1 + \right.$$
$$\left. + \left(m_1'\mathscr{E}_1' - m_2'\mathscr{E}_2'\right)\vec{a} + B'\vec{N}\right\}.$$

Функцин m и $\mathscr{E}$ удовлетворяют следующим соотношеиням:

$$m_1'\,(a\cos\alpha_1') = m\,(-a\cos\alpha_2) \equiv \bar{m}_2,$$
$$m_2'\,(a\cos\alpha_2') = m\,(-a\cos\alpha_1) \equiv \bar{m}_1,$$
$$\mathscr{E}_1'\,(a\cos\alpha_1') = \mathscr{E}\,(-a\cos\alpha_2) \equiv \overline{\mathscr{E}}_2,$$
$$\mathscr{E}_2'\,(a\cos\alpha_2') = \mathscr{E}\,(-a\cos\alpha_1) \equiv \overline{\mathscr{E}}_1.$$

Поэтому, полагая $B' = \bar{B}$ и сравнивая (II. 66) с (II. 61), находим

$$X\overrightarrow{e_1} + Y\vec{a} + Z\vec{N} = 0$$

где

$$X = \frac{m_1\,(1 - a\cos\alpha_1\mathscr{E}_1)}{m_2\,(1 - a\cos\alpha_2\mathscr{E}_2)} - \frac{\bar{m}_1\left(1 + a\cos\alpha_1\overline{\mathscr{E}}_1\right)}{\bar{m}_2\left(1 + a\cos\alpha_2\overline{\mathscr{E}}_2\right)},$$
$$Y = \frac{m_1\mathscr{E}_1 - m_2\mathscr{E}_2}{m_2\,(1 - a\cos\alpha_2\mathscr{E}_2)} - \frac{\bar{m}_2\overline{\mathscr{E}}_2 - \bar{m}_1\overline{\mathscr{E}}_1}{\bar{m}_2\left(1 + a\cos\alpha_2\overline{\mathscr{E}}_2\right)},$$
$$Z = \frac{B}{m_2\,(1 - a\cos\alpha_2\mathscr{E}_2)} - \frac{\bar{B}}{\bar{m}_2\left(1 + a\cos a_2\overline{\mathscr{E}}_2\right)}.$$

Умножая (II.68) скалярно на $\overrightarrow{e_1}, \vec{a}$ и $\vec{N}$ последовательно, получаем систему трех однородных алгебраических уравнений относительно искомых X, Y и Z:

$$X + a\cos\alpha_1 Y - \cos iZ = 0,$$
$$a\cos\alpha_1 X + a^2 Y + a\cos\gamma Z = 0,$$
$$-\cos iX + a\cos\gamma Y + Z = 0.$$

Детерминант этой системы отличен от нуля, поэтому

$$X = 0,$$
$$Y = 0,$$
$$Z = 0.$$

Из (II. 69 а) и (II. 70 а) следует равенство

$$m(1 - a\cos\alpha\mathscr{E}) = \bar{m}(1 + a\cos\alpha\overline{\mathscr{E}}),$$

а из (II. 69 б) и (II. 70 б) - соответственно

$$m\mathscr{E} + \bar{m}\overline{\mathscr{E}} = C$$

причем

$$\frac{\partial C}{\partial a\cos\alpha} = 0.$$

Подставляя в (II. 71) и (II. 72) функции m и $\mathscr{E}$, получаем

$$a\cos\alpha(p + \bar{p}) + \sqrt{1 + a^2\cos^2\alpha}(p - \bar{p}) = a\cos\alpha e^{-\varphi}C.$$
$$(p + \bar{p}) + \frac{a\cos\alpha}{\sqrt{1 + a^2\cos^2\alpha}}(p - \bar{p}) + a\cos\alpha\frac{\partial(p + \bar{p})}{\partial a\cos\alpha} +$$
$$+\sqrt{1 + a^2\cos^2\alpha}\frac{\partial(p - \bar{p})}{\partial a\cos\alpha} = e^{-\varphi}C;$$

здесь $\bar{p}$ - показатель замедления, в котором произведена замена аргумента $a\cos\alpha \to -a\cos\alpha$. Сумма $(p + \bar{p})$ является четной, а разность $(p - \bar{p})$ - нечетной функциями $\boldsymbol{a}\cos\alpha$, поэтому

$$(p+\bar{p})_{a\cos\alpha=0}=2p_0,$$
$$(p-\bar{p})_{a\cos\alpha=0}=0,$$
$$\left.\frac{\partial(p-\bar{p})}{\partial a\cos\alpha}\right|_{a\cos\alpha=0}=2\left.\frac{\partial p}{\partial a\cos\alpha}\right|_{a\cos\alpha=0}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (II. 74) для плоскости $a\cos\alpha=0$, получаем значение $e^{-\varphi}C$:

$$e^{-\varphi}C=2\left(p_0+\left.\frac{\partial p}{\partial a\cos\alpha}\right|_{a=0}\right).$$

Производную показателя замедления среды в точке $a\cos\alpha=0$ можно отыскать, если применить принцип локальной обратимости к формулам (II. 63) и (II. 64) преломления лучей на границе вакуум - среда. Уже из линейного приближения следует равенство

$$\left.\frac{\partial p}{\partial a\cos\alpha}\right|_{a=0}=1-p_0.$$

Следовательно,

$$e^{-\varphi}C=2$$

Уравнение (II. 73) теперь позволяет полностью выразить нечетную часть показателя замедления через его четную часть:

$$(p-\bar{p})=\frac{a\cos\alpha}{\sqrt{1+a^2\cos^2\alpha}}[2-(p+\bar{p})]$$

Уравнение (II. 74) удовлетворяется в силу (II. 76) и не содержит дополнительных ограничений на показатель замедления.

Показатель замедления вакуума как оптической среды, равный единице, удовлетворяет равенство (II. 76), именно поэтому формула отражения лучей на границе в вакууме обратима относительно падающего и отраженного лучей.

Теорема 47. Нечетная часть зависимости показателя замедления изотропной оптической среды от направления распространения луча выражается через ее четную часть формулой (II. 76). В этом и только этом случае законы отражения и преломления на границе удовлетворяют принципу локальной обратимости лучей.

Следствие 17. В слабом метрическом поле показатели замедления и преломления изотропной оптической среды выражаются равенствами (II. 65), а скорость света в среде определяется формулой

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Скорость света}\\ \text{в оптической среде}\end{array}\right\}=\frac{n_0\left(e^{-\varphi}\right)_{a=n}-a\cos x}{n_0^2\left(e^{-\varphi}\right)_{a=0}},$$

справедливой в линейном приближении по малому параметру $a\cos\alpha\ll 1$

В частности, во вращающейся системе отсчета в линейном приближении $\varphi\approx 0, a\approx\omega r$, поэтому формулы (II.65) совпадают с (II. 51) и (II. 54). Последние были получены в §26;из анализа опыта Гарреса. Здесь они выведены теоретическим путем. Таким образом, опыт Гарреса находит свое теоретическое объяснение с точки зрения наблюдателя, покоящегося на вращающемся теле (а не в инерциальной системе отсчета). Оно заключается, как и в случае опыта Саньяка, в анизотропности скорости света.

27.2.10 29. Group Velocity

Распространение электромагнитной волны в вакууме характеризуется двумя скоростями - фазовой и лучевой. Фазовая скорость

$$\vec{v}_p=\frac{1}{n_g}\vec{\eta}$$

описывает процесс переноса волной фазы вдоль нормали к фронту, а лучевая скорость

$$v_r = v_c \vec{e}$$

описывает перенос энергии вдоль луча. Направление лучевой скорости совпадает с направлением вектора Пойнтинга. Различие направлений фазовой и лучевой скоростей в заданной системе отсчета объясняется анизотропностью вакуума в присутствии метрического векторного поля $\vec{a}$. Лучевой скорости можно придать и другой смысл, а именно, скорости переноса фазы вдоль луча.

При наличии оптической среды этих двух скоростей недостаточно для описания распространения электромагнитной волны. Дисперсия приводит к тому, что скорости переноса фазы и энергии не совпадают уже и по абсолютному значению. Перенос энергии определяется групповой скоростью $\overrightarrow{v_g}$. Обычно, когда отсутствует явление анизотропности, под групповой скоростью понимяется $\frac{dv}{dk}$ (Борн, Вольф, 1970). Это определение имеет смысл, когда частота волны зависит от абсолютного значения волнового вектора и не зависит от его направления. Согласно же релятивистским уравнениям дисперсии (II. 18) для вакуума и (II. 43) изотропной оптической среды, частота зависит от направления волнового вектора, поэтому обычное определение групповой скорости теряет смысл. Но можно заметить, что первое из уравнений лучей (II.21) или (II.44) является, по существу, строгим определением групповой скорости, пригодным и в том случае, когда частота зависит от направления волнового вектора. Если обозначить компоненты групповой скорости через v_g^l, то

$$v_g^l = \frac{\partial v}{\partial k_i}$$

В случае, когда $v = v(k)$, нмеем

$$\frac{\partial v}{\partial k_i} = \frac{dv}{dk}\frac{k^i}{k}$$

поэтому

$$\left|\vec{\partial}_g\right| = \frac{dv}{dk}$$

соответствии с обычным определением групповой скороста. Для вакуума, согласно уравнению дисперсин (II. 18),

$$\vec{\nabla}_g = v_c \vec{e}$$

Групповая скорость в вакууме совпадает с лучевой, поскольку дисперсия отсутствует. В синхронных системах отсчета совпадают все три скорости.

Для групповой скорости в изотропной оптической среде с днсперсней можно запнсать формулу

$$\vec{v}_g = \frac{\sqrt{1 + a^2 \sin^2 a\mathscr{E}^2}}{n\left(1 + \frac{\partial \ln n}{\partial \ln v}\right)}\vec{e}$$

нли, имея в виду (II. 38),

$$\vec{v}_g = \frac{v_c}{p}\left\{1 + \frac{\partial \ln p}{\partial \ln \nu} + \frac{a^2 \sin^2 \alpha\mathscr{E}^2}{1 + a^2 \sin^2 \alpha\mathscr{E}^2}\frac{\partial^2 \ln p}{\partial \ln \nu \partial a \cos \alpha}\right\}^{-1}\vec{e}.$$

Для фазовой и лучевой скоростей в среде имеем

$$\vec{v}_p = \frac{1}{n}\vec{q}$$

$$\vec{v}_r = \frac{v_c}{p}\vec{e}$$

В общем случае все три скорости в среде различаются. В отсутствие дисперсии совпадают лучевая и групповая скорости, а в отсутствие метрического векторного поля (в синхронных системах отсчета) - лучевая и фазовая, и только в недиспергирующей среде, помещенной в несинхронную систему отсчета, совпадают все три. Лучевая скорость при наличии дисперсии сохраняет смысл только скорости переноса фазы вдоль направления переноса энергии волны.

27.3 Gravitational Field of an Isolated Body

27.3.1 30. General Static Solution of Einstein's Equations

Гравитационное поле изолированного невращающегося тела, в котором отсутствуют внутренние макроскопические движения, является центрально-симметричным и статическим. Точное внешнее решение уравнений Эйнштейна для такого тела было найдено Шварцшильдом (Schwarzschild, 1916 a). Затем было показано (Александров, 1923; Jebsen, 1921; Birhoff, 1923), что внешнее решение, характеризующееся центральной симметрией и удовлетворяющее галилеевой асимптотике, всегда статическое и, главное, единственное. Под единственностью понимается следующее: два решения в заданной области мира считаются тождественными, если одно может быть получено из другого преобразованием координат, устанавливающим однозначное соответствие между ними в.этой области. Шварцшильд же (1916 б) исследовал внутреннее решение для однородной идеальной жидкости. В последующие годы к анализу внутреннего решения обращались многие. Неослабевающий интерес к нему объясняется двумя причинами: математической строгостью и прозрачностью физической интерпретации решения и обширностью поля его применимости. Это единственное точное решение сложной системы дифференциальных уравнений Эйнштейна, которое широко применяется к описанию действительности - полей тяготения Солнца и планет; движения тел, в частности, планет в солнечной системе; равновесных состояний звезд и их эволюции, вообще астрофизических объектов.

Результаты исследования внутреннего решения схематически можно представить следующим образом: 1) анализ структуры внутреннего решения для произвольного уравнения состояния идеальной жидкости, на основе которого получено релятивистское уравнение гидростатического равновесия; 2) серия частных аналитических (иногда приведенных лишь к квадратурам) решений релятивистского уравнения гидростатического равновесия для конкретных уравнений состояния идеальной жидкости (Schwarzschild, 19616; Tolman, 1939; Oppenheimer, Volkoff, 1939; Misner, Z.apolsky, 1964; Krori, 1971; Singh, 1973; Krori, Borgohain, 1974; Станюкович, Иванов, 1977; Коркина, Капитонов, 1980); 3) численное интегрирование для реалистических уравнений состояния*.

Это внутреннее решение в координатах Шварцшильда вместе с соответствующим ему уравнением гидростатического равновесия иногда называют решением Толмена - Оппенгеймера -Волкова. Оно является частным решением, отвечающим конкретным значениям двух постоянных интегрирования уравнений Эйнштейна и сохранившим зависимость лишь от одной постоянной интегрирования. Общее же внутреннее решение зависит от трех существенных постоянных, поэтому представляется необходимым получение общего решения, содержащего все постоянные интегрирования, его детальный анализ и извлечение из него физических следствий, характеризующих гравитационное поле и структуру сферического источника. Эта задача и является предметом данной главы книги.

Пусть изолированное тело представляет собой шар из идеальной жидкости. Его внутреннее состояние характеризуется распределениями давления p и плотностей μ массы-энергии и n числа частиц и описывается тензором энергии-импульса (I. 18 б). Если тело нагрето, то идеальная жидкость является смесью вещества и теплового излучения, поэтому

$$\mu = \mu_{\text{mat}} + \mu_{\text{rad}} \cdot p = p_{\text{mat}} + p_{\text{rad}}$$

Термодинамическое уравнение состояния жидкости предполагается известным в форме зависимости

$$p_{\text{mat}} = p_{\text{mat}}\ (\mu_{\text{mat}})$$

либо

$$\mu_{\text{mat}}\ = \mu_{\text{mat}}\ (n)$$

В последнем случае давление находится из формулы

$$p_{\text{mat}} = n\frac{d\mu_{\text{mat}}}{dn} - \mu_{\text{mat}}$$

Давление же и плотность энергии теплового излучения связаны равенством

$$p_{\text{rad}} = \frac{1}{3}\mu_{\text{rad}}$$

В соответствии с поставленной задачей метрика мира должна удовлетворять условиям статичности, центральной симметрии и галилеевости на пространственной бесконечности. Существует система координат, в которой эти условия выражаются наиболее

Обширную библиографию и подробное изложение этих вопросов можно найти в кн. Зельдович, Новиков, 1967, 1971; Уилер и др., 1967; Мнзнер, Торн. Уилер, 1977. просто. Если источник помещен в начало координат, то квадратичная форма в ней приводится к виду

$$ds^2 = -e^{\lambda}\left(dx^0\right)^2 + e^{\nu}dr^2 + \eta^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

где λ, v и η-функции только радиальной координаты такие, что $\lambda \to 0, \nu \to 0$ и $\eta \to r$, когда $r \to \infty$. Не все функции λ, ν и η являются независимыми искомыми, так как преобразованием радиальной координаты, не нарушающим требуемых условнй, функции $\times$ или η можно привести к наперед заданным. В частности, если произвести замену $r \to \eta(r)$, то форма (III.3) совпадет со стандартной формой Шварцшильда, а можно преобразованием r обратить в нуль v, и тогда искомыми функциями окажутся λ н η (Арнфов, 1969а).

Из отсутствня макроскопического движения внутри источника следует

$$u^l = 0, \quad u^0 = -\frac{1}{u_0} = e^{-\lambda/2}$$

Уравнения Эйнштейна (I. 17) удовлетворяются после подстановки в них метрического тензора из формы (III.3) и тензора энергииимпульса (I.18 б) либо тождественно, либо в силу трех следующих независимых уравнений:

$$e^{-\nu}\left(\frac{v'\eta'}{\eta} - \frac{\eta'^2}{\eta^2} - 2\frac{\eta''}{\eta}\right) + \frac{1}{\eta^2} = x\mu,$$

$$e^{-\nu}\left(\frac{\lambda'\eta'}{\eta} + \frac{\eta'^2}{\eta^2}\right) - \frac{1}{\eta^2} = xp,$$

$$p' = -\frac{1}{2}(\mu + p)\lambda'$$

(штрихом обозначено дифференцирование по r). На самом деле третьим уравнением наряду с двумя (III. 4 а) и (III. 4 б), к которым сводятся уравнения Эйнштейна, является

$$e^{-\nu}\left(\lambda'' + \frac{\lambda'^2}{2} - \frac{\lambda' v'}{2} + 2\frac{\lambda'\eta'}{\eta}\right) = x(\mu + 3p)$$

но легко показать, что системы уравнений (III.4 а), (III.4 б), (III.5) и (III. 4 а), (III. 4 б), (III. 4 в) эквивалентны.

Уравнения поля (III.4 а), (III.4 б) вместе с релятивистским условием (III. 5) гидростатического равновесия и уравнениями состояния (III. 2) определяют все искомые функции. Согласно теории обыкновенных дифференциальных уравнений (Степанов, 1952), общее решение системы (III. 4 а), (III. 4 б), (III. 5) зависит от четырех произвольных постоянных. Одна из них - аддитивная постоянная интегрирования (III. 4

б) относительно искомой функции λ - несущественная, так как ее значение можно привести **k** наперед заданному изменением масштаба временной координа- ты. Поэтому общее решение зависит только от трех существенных произвольных постоянных.

Условия на границах. Для решения дифференциальных уравнений (III. 4) и III. 5) необходимо еще определить класс непрерывности искомых функций и условия сшивания их на множествах точек разрыва непрерывности. Такими множествами здесь являются границы источника и граница)или поверхность) вещества источника, которые в общем случае не совпадают. Всякая граница есть временноподобная гиперповерхность Σ с единичным вектором n^μ внешней нормали ней.

Пусть P_0 - событие на Σ, а функция $f(P)$ имеет своим пределом значение $f^+(P_0)$ (или $f^-(P_0)$) независимо от пути, по которому событие P прриближается к P_0, всегда оставаясь с внешней (или внутренней) стороны от Σ, указанной вектором n^μ. Величина разрыва непрерывности функции на границе определяется разностью

$$[f]_\Sigma \equiv f^+(P_0) - f^-(P_0).$$

Тогда определением границы Σ_{mat} вещества источника является равенство

$$[\mu_{\text{mat}}]_{\Sigma_{\text{mat}}} = -\mu^-_{\text{mat}}(P_0)$$

На свободной поверхности вещества источника

$$[p]_{\Sigma_{\text{mat}}} = [p_{\text{mat}}]_{\Sigma_{\text{mat}}} = 0, \quad p_{\text{mat}}(P_0) = 0$$

Граница или поверхность жидкого шара совпадает с границей источника только в случае нулевой абсолютной температуры жидкости. Если же температура отлична от нуля, то тепловое излучение с поверхности жидкости составляет часть источника, и внешняя граница Σ_s источника становится неопределенной. Но поскольку излучение с внешней поверхности тела не поглощается и не отражается самой внешней поверхностью, а полностью рассеивается в окружающей тело части мира, оно не оказывает воздействия на внешнюю поверхность и не нарушает свободного характера внешней границы вещества, что и оправдывает условия (III. 7). Кроме того, излучение энергии с внешней поверхности нагретого тела непрерывно изменяет не только полную массу тела, но и его конфигурацию, что нарушает наложенное условие статичности решения. Однако во всех практически интересных случаях энергия, излучаемая с внешней поверхности в единицу времени, составляет ничтожную долю полной энергии источника, поэтому представляется разумным отождествлять внешнюю границу источника с внешней границей вещества, т. е. $\Sigma_s = \Sigma_{\text{mat}}$, и считать состояние источника квазистатическим.

Требуемое условие конечности изолированного тела означает заведомо существование внешней границы, отделяющей мировую трубку, в которой заключено тело, от области мира, простирающейся на пространственную бесконечность, но не означает отсутствие границ внутри тела. Из условий задачи не следует, что источник непрерывно заполняет всю мировую трубку вплоть до мировой линии центра. Ими допускаются внутренние границы, отделяющие вещество и излучение тела от пустой области мира, все события которой всегда расположены на конечном пространственном расстоянии от мировой линии центра. Что касается несвободных внутренних границ, то их существование может и должно быть включено в граничные условия рассматриваемой задачи. Существование же или отсутствие свободных внутренних границ тела определяется самими уравнениями Эйнштейна и в общем случае не может быть определено априори, до их решения. Следует, поэтому, различать внешние свободные границы от внутренних свободных границ σ_{mat} вещества и σ_s источника, если таковые предопределены уравнениями Эйнштейна.

Определением внутренних границ, таким образом, являются равенства

$$[\mu_{\text{mat}}]_{\sigma_{\text{mat}}} = -\mu^-_{\text{mat}}(P_0), [\mu]_{\sigma_s} = -\mu - (P_0).$$

На свободной внутренней границе источника давление удовлетворяет условиям

$$[p]_{\sigma_s} = 0, \quad p(P_0) = 0.$$

Часть теплового излучения источника, заключенная между внутренними границами источника и вещества, в результате взаимодействия с внутренней границей вещества находится в локальном термодинамическом равновесии с ней. Абсолютная температура

поэтому непрерывна на внутренней границе вещества, и вследствие закона Стефана - Больцмана, уравнения состояния (III. 2 г). и непрерывности давления на свободной внутренней границе имеют место условия

$$[p_{\rm rad}]_{\sigma_{\rm mat}} = [p_{\rm mat}\,]_{\sigma_{\rm mat}} = 0, \quad p_{\rm mat}\,(P_0) = 0$$

Если абсолютная температура равна нулю, то внутренние границы вещества и источника совпадают.

, наконец,

$$\mu(P) = p(P) = 0, \text{ если } P > \sum_{\rm mat} \text{ и } P > \sigma_s.$$

Последние равенства означают, что источник отсутствует в событиях, находящихся с внешней стороны соответствующих гиперповерхностей.

Поведение метрики на любой из рассмотренных границ следует из требования принадлежности метрического тензора к классу C^2 кусочно-гладких функций: компоненты метрического тензора от- носятся к классу C^2 непрерывных функций вне границ, а на границах

$$[g_{\mu\nu}] = 0, \left[g_{\mu\nu,\alpha}e^{\alpha}_{(l)}\right] = 0,$$
$$[g_{\mu\nu,\alpha}n^{\alpha}] = A_{\mu\nu}\,(P_0)\,,$$
$$\left[g_{\mu\nu,\alpha\beta}n^{\alpha}n^{\beta}\right] = B_{\mu\nu}\,(P_0)\,,$$
$$\left[g_{\mu\nu,\alpha\beta}n^{\alpha}e^{\beta}_{(l)}\right] = A_{\mu\nu,\beta}\,(P_0)\,e^{\beta}_{(l)} + \frac{1}{2}\left[g_{\mu\nu,\rho}A^{\rho}_{\beta}e^{\beta}_{(l)]}\right] -$$
$$-\frac{1}{2}\left[g^{\rho\sigma}g_{\mu\nu,\rho}g_{\alpha\beta,\sigma}n^{\alpha}e^{\beta}_{(l)}\right],$$
$$\left[g_{\mu\nu,\alpha\beta}e^{\alpha}_{(l)}e^{\beta}_{(k)}\right] = -A_{\mu\nu}e^{(\alpha)}_{(l);\beta}e^{\beta}_{(k)}n_{\alpha} - \frac{1}{2}\left[g^{\rho\sigma}g_{\mu\nu,\rho}g_{\alpha\beta,\sigma}e^{\alpha}_{(l)}e^{\beta}_{(k)}\right],$$

где $e^{\alpha}_{(l)}$ - единичные некомпланарные ортогональные n^{α} векторы, принадлежащие границам, один из которых - временноподобный, а величины $A_{\mu\nu}$ и $B_{\mu\nu}$ разрывов непрерывности определяются уравнениями Эйнштейна и условиями на границах, наложенными на вещество и излучение.

Для квадратичной формы (III. 3) условия сшивания метрики на свободных границах принимают, поэтому, вид

$$[\lambda] = [v] = [\eta] = 0,$$
$$\lfloor\lambda'] = [v'] = [\eta'] = 0.$$

Непрерывность η' на гранидах следует из уравнения (III. 4 а) Эйнштейна, а непрерывность λ' - из (III. 4 б) и непрерывности давления на свободных границах.

Необходимо отметить, что сформулированное поведение метрики на границах предполагает правильный выбор системы координат. Поскольку компоненты метрического тензора преобразуются с помощью первых производных функций преобразования координат, а метрический тензор, согласно условиям сшивания, принадлежит к функциям класса C^1 непрерывности, то допустимые преобразования координат должны принадлежать классу по крайней мере C^2. В противном случае условия сшивания на границах для преобразованной метрики будут нарушены, что, конечно, будет свидетельствовать не о каком-либо новом характере физических процессов на поверхности разрыва непрерывности, а о «плохом» выборе новой системы координат. В частности, уже отмечалось, что преобразованием $r \to r = f(r)$ одну из искомых функций в квадратичной форме (III. 3) можно привести к наперед заданной. Примером такого преобразования класса C^2 является

$$\bar{r} = \int e^{v/2}dr + \text{ const},$$

осуществляющее преобразование от формы (III. 3) к форме (Арифов, 1969 а)

$$ds^2 = -e^{\lambda}\left(dx^0\right)^2 + dr^2 + \eta^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

в которой обе оставшиеся функции гладко сшиты на границе. К другому примеру относится преобразование $\bar{r} = \eta(r)$, переводящее форму (III. 3) в стандартную форму Шварцшильда

$$ds^2 = -e^{\lambda}\left(dx^0\right)^2 + e^{\nu}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

в которой уже компонент g_{11} метрики не удовлетворяет условию гладкого сшивания. Разрыв непрерывности первой производной метрики в стандартной форме Шварцшильда происходит из-за разрыва непрерывности второй производной метрики в исходной форме (III. 3). В этом смысле стандартные координаты Шварцшильда представляют определенное неудобство.

Если границы, или какая-нибудь из границ, не свободные, то на них, помимо (III. 6) и (III. 8), выполняются условия

$$[p]_{\Sigma} = -p^{-}(P_0) < 0,$$
$$[\lambda]_{\Sigma} = [\nu]_{\Sigma} = [\eta]_{\Sigma} = 0,$$
$$[\nu']_{\Sigma} = [\eta']_{\Sigma} = 0,$$
$$[\lambda']_{\Sigma} = -xp^{-}(P_0)\frac{\eta(P_0)}{\eta'(P_0)}e^{\nu(P_0)}$$

вместо (III. 7), (III. 9), (III. 10) и (III. 12 а).

Внешнее решение. Обшее решение уравнений (III. 4 а) и (III. 4 б) в области мира, для которой имеет место (III. 11), можно представить формулами

$$\eta'^2 = e^{\nu}\left(1 + \frac{C_1}{\eta}\right), C_1 = \text{ const},$$
$$e^{\lambda} = C_2\left(1 + \frac{C_1}{\eta}\right), C_2 = \text{ const } > 0,$$
$$\int e^{\nu/2}dr + C_3 = \int \frac{d\eta}{\sqrt{1 + \frac{C_1}{\eta}}}, C_3 = \text{ const}.$$

Существенной постоянной в этом решении является C_1. Если $C_1 = 0$, то кривизна мира равна нулю, а гравитационное поле отсутствует. Если $C_1 \neq 0$, го кривизна мира отлична от нуля и сингулярна в центре симметрии $\eta = 0$. Следовательно, область изменения функции $\eta - [0, \infty)$.

Пусть на внешней границе Σ_s источника, совпадающей с внешней границей Σ_{mat} вещества, $r = R$, а все события $P > \Sigma_{\text{mat}}$ т.. $r > R$, принадлежат области D_1 мира. Метрика мира в D_1 должна удовлетворять условию галилеевости на пространственной бесконечности, а на больших расстояниях от источника - закону Ньютона всемирного притяжения, согласно с принципом соответствия 2. Из первого следует $C_2 = 1$, а второе условие означает, что $C_1 = -\alpha \equiv -2\gamma M$ (здесь M - полная масса источника). Впрочем. постоянная C_2-она появляется при интегрировании (III. 4 б) несущественная, и, как уже отмечалось, может быть задана наперед изменением масштаба временной координаты (в том числе и на пространственной бесконечности). Поэтому

$$D_1\,(P > \Sigma_{\rm mat})$$
$$\eta'^2 = e^{\nu}\left(1 - \frac{a}{\eta}\right)$$
$$e^{\lambda} = \left(1 - \frac{\alpha}{\eta}\right)$$
$$\int e^{v/2}dr + C_1 = \eta\sqrt{1 - \frac{a}{\eta}} + \frac{\alpha}{2}\ln\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{a}{\eta}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{a}{\eta}}},$$
$$C_4 = \text{ const.}$$

Формулы (III.16 а) и (III.16 б) выражают в D_1 решение Шварцшильда. Действительно, достаточно и!3 (III.16 а) выразить $e^v dr^2$ и подставить в (III. 3) вместе с (III. 16 б), чтобы получить стандартное решение Шварцшильда. Формула же (III. 16в) выражает в явной форме остающийся произвол в выборе радиальной координаты координатной сетки.

Решение Шварцшильда имеет исключительно важное свойство - его формальное продолжение до центральной сингулярности лишено какого-либо физического смысла. Мироваяя линия сингулярности в решении Шварцшильда имеет пространственноподобный характер, а сама сингулярность окружена горизонтом событий $\eta = \alpha$ (сферой Шварцшильда), в событиях которого отсутствуют временноподобные интервалы. Но в области мира, включающей в себя мировую линию центра симметрии, внешнее решение (III.15) сохраняет физическую значимость, если постоянная C_1 положительная. В этом случае мировая линия центральной сингулярности имеет временноподобный характер, а горизонты событий отсутствуют (голая сингулярность). Пусть эта область мира обозначена через D_3 (в D_3 события $P > \sigma_s$) и пусть в D_3 осуществляется внешнее решение с положительной C_1. Очевидно, что области D_1 и D_3 не могут иметь обшей границы, так как на ней внешнее решение с положительной C_1 не может быть гладко сшито с решением Шварцшильда. А именно, первая производная функции λ не удовлетворяет условию (III. 12), если $C_1 > 0$ и $C_1 < 0$ на разных сторонах границы. Но они имеют общие граниды с областью D_2, в которой заключен источник (в D_2 события $P < \Sigma_{\rm mat}$ и $P < \sigma_s$). Границей между D_1 и D_2 является гиперповерхность $\Sigma_{\rm mat}$ а между D_2 и $D_3 - \sigma_s$.В области D_3 внешнее решение, следовательно, принимает вид

$$D_3\,(P > \sigma_s)\,,$$
$$\gamma'^2 = e^{\nu}\left(1 + \frac{C_5}{\eta}\right), C_5 = \text{ const } > 0,$$
$$e^{\lambda} - C_6\left(1 + \frac{C_5}{r_1}\right), C_6 = \text{ const } > 0,$$
$$\int e^{v/2}dr + C_7 = \eta\sqrt{1 + \frac{C_5}{\eta}} + \frac{C_5}{2}\ln\frac{\sqrt{1 + \frac{C_5}{\eta}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{C_5}{\eta}} + 1}$$
$$C_7 = \text{ const.}$$

Если внутреннее решение уравнений (III. 4 а), (III. 4 б) и (III. 5) в D_2 допускает сшивание его с внешними решениями на границах областей D_1 и D_2 и D_2 и D_3 соответственно, то внешнее решение в D_3 может иметь определенный физический смысл.

Внутреннее решение. В области $D_2 \mu \neq 0$. Общее решение уравнений (III.4 а) и (III.4 б) в D_2 можно записать следующим образом:

$$\eta'^2 = e^{\nu}\left[1+\frac{1}{\eta}\left(C_8 + x\int\limits_{\eta}^{\eta R}\mu\eta^2 d\eta\right)\right],$$

$$e^{\lambda} = C_9\left[1+\frac{1}{\eta}\left(C_8 + x\int\limits_{\eta}^{\eta R}\mu\eta^2 d\eta\right)\right]x$$

(????)

$$\int e^{\nu/2}dr + C_{10} = \int \frac{d\eta}{\sqrt{1+\frac{1}{\eta}\left(C_8 + x\int\limits_{\eta}^{\eta}\mu r_1^2 d\eta\right)}}$$

Здесь C_8, C_9 и C_{10} - произвольные постоянные, а η_R - значение функции η на внутренней стороне внешней границы. Функция $v(r)$ уравнениями Эйнштейна не определяется, поэтому в формулах (III. 15)-(III. 18) v(r)-произвольная функция, принадлежащая классу C^2 непрерывных функций.

Постоянную C_4 можно использовать, чтобы приравнять значения функции, определяемой формулами (III.16в) и (III.18в), с обеих сторон внешней границы, тогда из равенства на Σ_{mat} правых частей (III. 16 а) и (III. 18 а), (III. 16б) и (III. 18 б) соответственно следуют $C_8 = -\alpha, C_9 = 1$, а внутреннее решение принимает вид

$$D_2\left(P < \Sigma_{\text{mat}}\,, P < \sigma_s\right),$$

$$\eta'^2 = e^{\nu}\left[1-\frac{\alpha}{\eta}\left(1-\frac{x}{a}\int\limits_{\eta}^{\eta_R}\mu\eta^2 d\eta\right)\right],$$

$$e^{\lambda} = \left[1-\frac{a}{\eta}\left(1-\frac{x}{a}\int\limits_{\eta}^{\eta R}\mu\eta^2 d\eta\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left\{-x\int\limits_{\eta}^{\eta_R}\frac{(\mu+p)\eta d\eta}{\left[1-\frac{\alpha}{\eta}\left(1-\frac{x}{\alpha}\int\limits_{\eta}^{\eta R}\mu\eta^2 d\eta\right)\right]}\right.,$$

$$\int e^{v/2}dr + C_{10} = \int \frac{d\eta}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{\eta}\left(1-\frac{x}{\alpha}\int\limits_{\eta}^{\eta R}\mu\eta^2 d\eta\right)}}$$

Уравнение (III. 5) Эйнштейна сводится после подстановки в него (III. 19 б) к следующему:

$$p' = -\frac{1}{2}\frac{\mu+p}{\eta^2}\frac{e^{\nu/2}\left(\alpha + xp\eta^3 - x\int\limits_{\eta}^{\eta R}\mu\eta^2 d\eta\right)}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{\eta}\left(1-\frac{x}{\alpha}\int\limits_{\eta}^{\eta R}\mu\eta^2 d\eta\right)}}.$$

Правая часть его отрицательна вблизи внешней границы, поэтому с уменьшением r от R давление возрастает. Знак производной давления определяется знаком выражения

$$\alpha + xp\eta^3 - x\int\limits_{\eta}^{\eta R} \mu\eta^2 d\eta.$$

Значение интеграла в этом выражении монотонно возрастает с уменьшением η от η_R, поэтому в общем случае не исключается существование такой гиперповерхшости $r = r_c$, на которой $\eta = \eta_c$, а производная давления равна нулю. Пусть $p'(r_c) = 0$. тогда $p''(r_c) < 0$, так как

$$p''(r_c) = -\frac{1}{2} \times \{(\mu + p)(\mu + 3p)e^{\nu}\}_{|r=r_c},$$

поэтому давление принимает на этой гиперповерхности максимальное значение (r_c не является точкой перегиба). Если $\eta_c \neq 0$, то давление монотонно падает от максимального значения при уменьшении r от r_c. Следовательно, должна существовать и такая гиперповерхность, на которой $\eta = \eta_0$, а давление снова принимает нулевое значение. Эта гиперповерхность совпадает, согласно (III.9), со свободной внутренней границей σ_s источника, а область мира $\eta\,[0, \eta_0]$ является внешней областью D_3.

Введем обозначение

$$\beta \equiv \frac{x}{\alpha}\int\limits_{\eta_0}^{\eta_R} \mu\eta^2 d\eta$$

тогда

$$\frac{x}{\alpha}\int\limits_{\eta}^{\eta_R} \mu\eta^2 d\eta = \beta - \frac{x}{\alpha}\int\limits_{\eta_0}^{\eta} \mu\eta^2 d\eta \equiv \beta - k(\eta).$$

Легко видеть, что $\beta > 1$, когда существуют обе гиперповерхности η_0 и η_c, на которых давление имеет нулевое и максимальное значения, причем первая из них не совпадает со свободной внешней границей. Если такие гиперповерхности отсутствуют, или хотя бы отсутствует гиперповерхность, на которой давление равно нулю (например, внутренняя граница источника не свободная), то о имеет смысл наименьшего значения функции η в области D_2. Так как областью изменения функции η является полуинтервал $[0, \infty)$, то $\eta_0 = 0$, если источник не имеет внутренней границы*, и о - значение функции η на внутренней стороне внутренней границы σ_s, если таковая имеется. Событиям $P < \sigma_s$ и $P < \Sigma_{\text{mat}}$ источника соответствует область изменения $\eta\,(\eta_0, \eta_R)$, а событиям $P > \sigma_s$ внешней области D_3 соответствует полуинтервал значений $\eta\,[0, \eta_0)$.

Теперь необходимо сшить решения (III. 17) и (III. 19) на внутренней границе σ_s. Для этого постоянную, оставшуюся свобод-

Необходимо оговорить, что обратное неверно. Из равенства η_0 нулю еще не следует отсутствие виутренней границы. ной при сшивании решений (III. 19) и (III. 16) на внешней границе $\Sigma_{\text{mat},}$ можно использовать, чтобы радиальной координате внутренней границы присвоить наперед заданное значение, приравняв значения функции η с внутренней и внешней стороны σ_s значению о. Оно должно удовлетворять единственному требованию быть меньше R. Для определенности выберем C_{10} так, чтобы на внутренней границе $r = 0$ (Арифов, 1969а). Из равенства на $\sigma_\bullet$ правых частей (III. 19 а) и (III. 17 а), (III. 19 6) и (III. 17 6). согласно условиям гладкого сшивания на границах, следуют

$$C_5 = \alpha(\beta - 1), C_6 = A,$$

где

$$A \equiv \exp\left\{-x\int\limits_{\eta_0}^{\eta_R} \frac{(\mu + p)\eta d\eta}{11 - \frac{\alpha}{\eta}(1 - \beta + k)\Big]}\right\}.$$

Оставшуюся в (III. 17 в) неопределенной постоянную C_7 можно использовать, чтобы радиальной координате центра $\eta = 0$ симметрии присвоить наперед заданное, но меньшее

значения координаты внутренней границы, значение r_0. Так как на внутренней границе $r = 0$, то $r_0 < 0$, постоянные C_4, C_7 и C_{10} определяются равенствами

$$C_7 = -\int e^{v/2} dr_{\eta=0}^{r=r_0},$$

$$C_{10} = -\int e^{v/2} dr_{\substack{r=0\\ \eta=\eta_0}} + \int \frac{d\eta}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{\eta}(1-\beta+k)}}\Bigg|_{\substack{r=0\\ \eta=\eta_0}}.$$

$$C_4 = -\int e^{v/2} dr_{|\eta=0} + \int \frac{d\eta}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{\eta}(1-\beta+k)}\Big|_{\substack{r=0\\ \eta=\eta_0}}} - -\int \frac{d\eta}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{\eta}(1-\beta+k)}\Big|_{r-R} + \eta_R}} + \eta_R\sqrt{1-\frac{\alpha}{\eta_R}} +$$

а значения r_0 и о связаны

$$\int e^{v/2} dr_{\substack{r=0\\ \eta=-\eta_0}} - \int e^{v/2} dr_{\substack{r=r_0\\ \eta=0}} = \eta_0\sqrt{1+\frac{\alpha(\beta-1)}{\eta_0}} + \frac{\alpha(\beta-1)}{2}\ln\frac{\sqrt{1+\frac{\alpha(\beta-1)}{\eta_0}}-1}{\sqrt{1+\frac{\alpha(\beta-1)}{\eta_0}}+1}.$$

Полученное общее внутреннее решение уравнений (III. 4 а) и (III. 46) гладко сшито на обеих - внешней и внутренней, если последняя существует,- границах источника с их внешними решениями вне соответствующих границ. Полное общее решение можно записать следующим образом:

$$D_1\left(P \geqslant \Sigma_{\text{mat}}, r \geqslant R, \eta \geqslant \eta_R\right),$$

$$\eta'^2 = e^v\left(1-\frac{\alpha}{\eta}\right), e^\lambda = 1-\frac{\alpha}{\eta};$$

$$D_2\left(P \leqslant \Sigma_{\text{mat}}, P \leqslant \sigma_s, 0 \leqslant r \leqslant R, \eta_0 \leqslant \eta \leqslant \eta_R\right),$$

$$\eta'^2 = e^\nu\left[1-\frac{\alpha}{\eta}(1-\beta+k)\right],$$

$$e^\lambda = \left[1-\frac{\alpha}{\eta}(1-\beta+k)\right]\times$$

$$\times\exp\left\{-x\int_\eta^\eta \frac{(\mu+p)}{\left[1-\frac{\alpha}{\eta}(1-\beta+\eta\right]}\right\}k\Bigg)\Bigg],$$

$$p' = -\frac{1}{2}\frac{\mu+p}{\eta^2} - \frac{e^{v/2}\left[\alpha(1-\beta+k)+xp\eta^3\right]}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{\eta}(1-\beta+k)}};$$

$$D_3\left(P \geqslant \sigma_s, r_0 \leqslant r \leqslant 0, 0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0\right),$$

Сюда включено и уравнение (III.5) в форме (III.26 в), соответствующей внутреннему решению уравнений (III. 4 а) и (III. 4 б).

Эти формулы содержат пять постоянных $\alpha, \beta, \eta_0, \eta_R$ и A, а вместе с определениями границ областей D_1, D_2 и D_3 - семь постоянных (к перечисленным нужно добавить постоянные r_0 и R). Кроме того, общее решение уравнения (III. 26 в) зависит еще от одной постоянной - значения p_0 давления в события $\eta = \eta_0$ (вместо p_0 можно использовать μ_0, так как давление и плотность массы удовлетворяют уравнению состояния). Они не являются независимыми, а связаны тремя равенствами (III. 21), (III. 23) и (III. 24) и двумя условиями (III. 7) и (III. 9), или (III. 12 б) на обеих границах источника, в событиях которых давление задано. Поэтому полное общее решение зависит от трех произвольных независимых постоянных по, $\boldsymbol{\beta}$ и p_0 (или μ_0) интегрирования.

Характер решения существенно зависит от значений этих постоянных. Необходимо различать три типа решения в соответствии с тем - больше, меньше или равна единице постоянная β.

1.а. $\beta = 1, \eta_0 = 0, p_0 \neq 0$. Область D_3 отсутствует вместе с внутренней границей, формулы (III. 26а, б) представляют известное (см. например, Ландау и Лифшиц, 1973) внутреннее решение, а уравнение (III.2.6 в) сводится к уравнению Толмена-Оппенгеймера-Волкова гицростатического равновесия. Следовательно, общее решение содержит решение Толмена - Оппенгеймера - Волкова как частный случай. Оно зависит от одной постоянной p_0 (или μ_0).

1 6. $\beta = 1, \eta_0 > 0, p_0 \neq 0$. Гиперповерхность $\eta = \eta_0$ является несвободной внутренней границей источника, отделяющей его от пустой полости D_3. Геометрия мира в полости евклидова, гравитационное поле отсутствует. Давление и плотность массы имеют наибольшие значения на внутренней границе. Производная компонента g_{00} метрики, как и давление, терпит разрыв непрерывности на поверхности полости. Это объясняется наличием на ней безмассовой твердой оболочки, препятствующей заполнению полости веществом источника и его излучением. Самоподдерживание вещества на внутренней границе невозможно из-за жидкого состояния источника. Поэтому само существование пустой полости здесь обязано существованию «подпорки». Для устранения подпорки из решения необходимо изменить исходное условие задачи и ввести в тензор энергии-импульса источника упругие напряжения.

Решение зависит от двух произвольных постоянных и является релятивистским аналогом решения задачи для сферического распределения массы с пустой полостью в ньютоновой теории тяготения.

Значению $p_0 = 0$, когда $\beta = 1$, соответствует тривиальное решение - тело отсутствует, а геометрия мира всюду евклидова.

2 а. $\beta > 1, \eta_0 \geqslant 0, p_0 = 0$. Имеется свободная внутренняя граница источника, область D_3 - пустая полость, геометрия которой неевклидова. В центре симметрии находится голая сингулярность метрики, мировая линия сингулярности временноподобная. Решение зависит от двух произвольных постоянных и не имеет классического аналога в ньютоновой теории тяготения.

2 б. $\beta > 1, \eta_0 \geqslant 0, p_0 \neq 0$. Внутренняя граница несвободная. Разрывы непрерывности давления и первой производной компонента g_{00} метрики на внутренней границе объясняются, как и в 1 а, наличием на ней безмассовой абсолютно отражающей твердой оболочки. В центре находится голая сингулярность метрики, мировая линия которой временноподобная. Решение зависит от трех пронзвольных постоянных и не имеет классического аналога.

$\beta < 1$. В этом случае имеется гиперповерхность, на которой обращается в нуль величина $1 - \frac{\alpha}{\eta}(1 - \beta + k)$. Она является гори- зонтом событий, аналогичным сфере Шварцшильда. В дентре находится сингулярность метрики, мировая линия которой пространственноподобная. Решение не имеет аналога в ньютоновой теории тяготения.

Решения в случаях б первых двух типов не представляют большого интереса с физической точки зрения, так как они предполагают существование несвобсдных внутренних границ источника (трудно вообразить условия, при которых в теории тяготения, классической, и тем более релятивистской, задача с заданными несвободными границами имела бы реальный смысл). Третий тип решения, по-видимому, вообще лишен какого-либо физического смысла. И только при значениях постоянных, соответствующих случаям 1 а и 2 а, решение находит приемлемую физическую интерпретацию, если и внешняя граница источника свободная. В дальнейшем изложении будут иметься в виду только первые два типа решения, т. е. $\beta \geqslant 1$, а границы источника, внешняя и внутренняя, если она есть, предполагаться только свободными.

Определение 10. Критической называется гиперповерхность внутри источника, на которой уравнение

$$1 - \beta + k + \frac{x}{\alpha} p \eta^3 = 0$$

удовлетворяется.

Значения радиальной координаты и функции η на критической гиперповерхности обозначены через r_c и η_c соответственно.

Теорема 48. Общее решение уравнений Эйнштейна для сферически-симметричного жидкого источника, в котором отсутствует макроскопическое движение и границы

которого свободные, завнсит от трех β, η_0, p_0 существенных произвольных постоянных интегрирования и одной произвольной функции радиальной координаты. Оно представлено формулами (III. 25) - (III. 27) вместе с граничными условиями (III. 6) - (III. 10). Решение ТолменаОппенгеймера - Волкова является частным случаем общего решения, в котором двум из трех постоянных присвоены значения $\beta = 1$ и $\eta_0 = 0$. В этом случае источник представляет собой жидкий шар, имеет одну, только внешнюю, свободную границу; давление и плотности массы и числа частиц источника принимают максимальное значение в центре, критическая гиперповерхность вырождается в мировую линию центра, а решение зависит от одной произвольной постоянной - значения давления или плотности массы в центре. В остальных случаях у источника имеются две и только две, внутренняя и внешняя, свободные границы, на которых давление, в частности p_0, равно нулю; полость, свободная от вещества и теплового излучения источника, с сингулярной временноподобной мировой линией в центре; давление и плотности массы и числа частиц источника принимают максимальное значение на критической гиперповерхности и монотонно падают к обеим границам, а решение зависит от двух $\beta > 1$ и $\eta_0 \geqslant 0$ произвольных постоянных.

Д о к а з а т е л в с т в о. Доказательство теоремы частично вытекает из вывода формул (III. 25) -(III. 27). Докажем остальные утверждения. Пусть $\beta = 1$. Из (III. 26 в) в этом случае следует, что p' - всюду неположительная функция, и поскольку давление, согласно (III. 7), на свободной внешней границе источника равно нулю, то оно монотонно растет с уменьшением r. Внутренняя граница, следовательно, отсутствует. На внутренней границе, которая по условию теоремы может быть только свободной, давление, согласно (III. 9), должно было бы снова обратиться в нуль, что невозможно. Поэтому $\eta_0 = 0$, а область D_2 источника содержит всю область изменения функции $\eta \leqslant \eta_R$, включая и мировую линию $\eta = 0$ центра. В центре $p' = 0$. В противном случае производная компонента g_{00} метрики, согласно (III. 5), имеет разрыв непрерывности, что не согласуется с принадлежностью метрики к классу $C^{\mathbf{2}}$ кусочно-гладких функций и уже доказанным отсутствием границы источника помимо внешней. C другой стороны, $p' = 0$ только в центре. Действительно, вторая производная давления в точке обращения в нуль его первой производной отрицательная, поэтому точки персгиба давления стсутствуют, и в соответствии с монотонным ростом давления с уменьшением r точка $p' = 0$ может находиться только в центре. Таким образом, давление имеет максимальное значение в центре и монотонно падает до нуля на свободной внешней границе. Это же относится и к плотностям массы и числа частиц, если учесть ограничения на физически допустимые уравнения состояния (Зельдович, Новиков, 1967), а именно, давление не может уменьшаться с увеличением плотности массы, а плотность массы только увеличивается с увеличением плотности числа частиц и только уменьшается с ее уменьшением.

Наконец, на мировой линии центра удовлетворяется уравнение (III. 28). Других корней это уравнение при $\beta = 1$ иметь не может. Мировая линия центра, следовательно, является вырожденной критической гиперповерхностью.

Пусть теперь $\beta > 1$. Предположим, что внутренняя граница, как н в случае $\beta = 1$, отсутствует. Тогда давление отлично от нуля во всей области $0 \leqslant \eta < \eta_R$. Но левая часть уравнения (III. 28), согласно (III. 21) и (III. 22), положительна на внешней границе и отрицательна в центре, поэтому уравнение (III. 28) имеет корень в интервале $0 < \eta < \eta_R$. Следовательно, существует невырожденная критическая гиперповерхность, на которой $p' = 0$, а давление имеет максимальное значение ($\dot{p}'' < 0$) и монотонно уменьшается с уменьшением η от η_c вплоть до нулевого значения, так как давление, согласно (III. 26 в), не может иметь минимума (в точках $p' = 0$ всегда $p'' \leqslant 0$). Это противоречит предположению, что и доказывает существование свободной внутренней границы, на которой $p_0 = 0$, когда $\beta > 1$. Наоборот, если существует свободная вну- тренняя граница, то давление принимает максимальное значение на некоторой гиперповерхности между обеими, внутренней и внешней, границами, производная давления на ней обращается в нуль, поэтому она является невырожденной критической гиперповерхностью, а $\beta > 1$.

В остальном доказательство теоремы не представляет трудностей. Геометрический мысл постоянных β и η_0 легко уяснить, если ввести инвариантное определение двумерной поверхности источника.

Определение 11. Поверхностью источника (вещества) называется двумерная поверхность, всюду ортогональная к нормали границы источника (вещества) и к временноподобным мировым линиям, принадлежащим границе, вторая и третья кривизны которых равны нулю, а первая нормаль в каждом событии линии совпадает с

нормалью к границе.

Докажем, что мировые линии, упомянутые в определении 11, существуют и что через каждое событие границы проходит не более одной такой линии. Обозначим через k_1, k_2 и k_3 первую, вторую и третью кривизны мировой линии, соответствующие им единичные векторы нормали к кривой - через n_1^α, n_2^α и n_3^α, а единичный касательный вектор - через u^α. Запишем уравнения Френе - Серре (см. Синг, 1963)

$$\frac{\partial u^\alpha}{\delta\sigma} = k_1 n_1^\alpha,$$
$$\frac{i n_1^\alpha}{\partial\sigma} = k_2 n_2^\alpha + k_1 u^\alpha,$$
$$\frac{\delta n_2^\alpha}{\delta\sigma} = k_3 n_3^\alpha - k_2 n_1^\alpha,$$
$$\frac{\partial n_3^\alpha}{\partial j} = -k_3 n_2^\alpha.$$

Если $k_2 = k_3 = 0$ и n_1^α совпадает с нормалью n^α к границе, то, согласно (III.29б), вектор u^α удовлегворяет алгебраическим уравнениям

$$u^\beta \left(n_{\alpha,3} - k_1 g_{\alpha\beta}\right) = 0$$

причем

$$k_1 = -n_{\alpha;\beta} u^\alpha u^3$$

Из уравнений (III. 30) единичный временноподобный вектор определяется единственным образом, если хотя бы один из корней алгебраического уравнения

$$|n_{\alpha,3} - k_1 g_{\alpha,\beta}| = 0$$

относительно неизвестной k_1 совпадает с правой частью (III. 31). Поэтому через каждое событие граничной гиперповерхности проходит только одна такая мировая линия, если она вообще существует. В существовании их на гиперповерхностях $\eta = \text{const}$ мира (III. 25) - (III. 27) можно убедиться непосредственно. Следовательно, и поверхность источника существует, и каждое событие границы принадлежит только одной поверхности. Внутренняя поверхность источника является одновременно и поверхностью полости, свободной от вещества и излучения источника. Площадь $S^{\text{в}}_{\text{о вну}}$-тренней поверхности равна

$$S_\sigma = 4\pi\eta_0^2$$

а кривизна мира K_σ на внутренней поверхности в касательном к ней направлении -

$$K_\sigma = -\frac{\alpha}{\eta_0^3}(\beta - 1)$$

Таким образом, постоянные β и η_0 определяются инвариантными значениями площади внутренней поверхности источника и кривизны мира в касательном к ней направлении.

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{S_\sigma}{4\pi}}, \beta - 1 = -\frac{K_\sigma}{8\alpha}\left(\frac{S_\sigma}{\pi}\right)^{3/2}.$$

Постоянная о является также радиусом кривизны внутренней поверхности.

В случае, когда $\beta > 1$, а $\eta_0 = 0$, внутренняя граница, стягиваясь к центру, вырождается в мировую линию, площадь поверхности источника и объем пустой полости D_3 равны нулю, но понятие пустой полости D_3 полностью сохраняет свой смысл, так как на сингулярной мировой линии центра нет ни вещества, ни излучения источника. Именно этот случай имеет место, когда вещество источника горячее. Если абсолютная температура свободной внутренней границы вещества отлична от нуля, то плотность энергии и давление излучения на ней также отличны от нуля. Поэтому внутренние границы вещества и источника в этом случае не совпадают - в то время как площадь внутренней поверхности вещества отлична от нуля, граница источника

стягивается k мировой линии центра. В противном случае невозможно удовлетворить условия (4.9) и (4.10).

В малой окрестности мировой линии центра, принадлежащей области мира между обеими границами,

$$\eta \approx \left(\frac{3}{2}\sqrt{\alpha(\beta-1)}r\right)^{2/3}$$

Это следует из (4.34 а). В этой же окрестности (4.34 в) сводится к уравнению

$$\frac{dp_{\text{rad}}}{dr} = \frac{4}{3}\frac{p_{\text{rad}}}{r}$$

решение которого выражается функцией const. $r^{4/3}$.

Теорема 49. Если абсолютная температура внутренней поверхности вещества равна нулю, то свободные внутренние границы вещества и источника совпадают. Если же температура отлична от нуля, то площадь поверхности свободной внутренней границы источника равна нулю, внутренние границы вещества и источника не совпадают, а область мира между ними заполнена тепловым излучением, плотность энергин которого с приближением к внутренней границе источника стремится к нулю пропорционально степени $\frac{4}{3}$ расстояния до центра.

В формулах (III. 25)-(III. 27) сохранена произвольная всюду непрерывная функция v. Она отражает, как уже отмечалось, имеющийся произвол в выборе радиальной координаты. Если положить $v = 0$, что эквивалентно преобразованию, осуществляющему переход от квадратичной формы (III. 3) к форме (III. 13), то полное общее решение принимает вид, в котором оно было получено впервые (Арифов, 1969 а, 1978, 1979 а):

$$D_1\left(P \geqslant \Sigma_{\text{mat}}, r \geqslant R, \eta \geqslant \eta_R\right),$$

$$\eta'^2 = e^{\lambda} = 1 - \frac{\alpha}{\eta}$$

$$D_2\left(P \leqslant \sum_{\text{mat}}, P \leqslant \sigma_s, 0 \leqslant r \leqslant R, \eta_0 \leqslant \eta \leqslant \eta_R\right),$$

$$\eta'^2 = 1 - \frac{\alpha}{\eta}(1-\beta+k)$$

$$e^{\lambda} = \left[1 - \frac{\alpha}{\eta}(1-\beta+k)\right] \exp\left\{-x\int_{\eta}^{\eta R}\frac{(\mu-1-p)\eta d\eta}{\left[1-\frac{\alpha}{\eta}(1-\beta+k)\right]}\right\},$$

$$p' = -\frac{1}{2}\frac{\mu+p}{\eta^2}\frac{\alpha(1-\beta+k)+xp\eta^3}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{\eta}(1-\beta+k)}};$$

$$D_3\left(P \geqslant \sigma_s, r_0 \leqslant r \leqslant 0, 0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0\right),$$

$$\eta'^{2^2} = \frac{1}{A}e^{\lambda} = 1 + \frac{\alpha}{\eta}(\beta-1).$$

$$r_0 = -\tau_{10}/\sqrt{1+\frac{\alpha}{\eta_{10}}(\beta-1)} - \frac{\alpha(\beta-1)}{2}\ln\frac{\sqrt{1+\frac{\alpha}{\eta_{10}}(\beta-1)}-1}{\sqrt{1+\frac{\alpha}{\eta_0}(\beta-1)+1}}.$$

Если же положить

$$e^{\nu} \equiv \left[1 - \frac{\alpha}{\eta}(1-\beta+k)\right]^{-1}, \text{ или } \eta = r - r_0.$$

что эквивалентно преобразованию координаты r, переводящему квадратичную форму (III.3) в стандартную форму (III. 14) Шварцшильда, то полное общее решение принимает другой вид (Арнфов, 1980, 1981)

$$
\begin{aligned}
&D_1\left(P \geqslant \Sigma_{\text{mat}}, r \geqslant R\right),\\
&e^{\lambda} = e^{-v} = 1 - \frac{\alpha}{r};\\
&D_2\left(P \leqslant \Sigma_{\text{mat}}, P \leqslant \sigma_s, r_0 \leqslant r \leqslant R\right),\\
&e^{-\nu} = 1 - \frac{\alpha}{r}(1 - \beta + k),\\
&e^{\lambda} = \left[1 - \frac{\alpha}{r}(1 - \beta + k)\right] \exp\left\{-x \int\limits_r^R \frac{(\mu + p) r dr}{\left[1 - \frac{\alpha}{r}(1 - \beta + k)\right]}\right\},\\
&p' = -\frac{1}{2}\frac{\mu + p}{r'}\frac{\alpha(1 - \beta + k) + xpr^3}{1 - \frac{\alpha}{r}(1 - \beta + k)};\\
&D_3\left(P \geqslant \sigma_s, 0 \leqslant r \leqslant r_0\right).\\
&e^{-v} = \frac{1}{A}e^{\lambda} = 1 + \frac{\alpha}{r}(\beta - 1);\\
&A = \exp\left\{-x \int\limits_{r_0}^R \frac{(\mu + p) r dr}{\left[1 - \frac{\alpha}{r}(1 - \beta + k)\right]}\right\}\\
&k \equiv \frac{x}{\alpha}\int\limits_{r_0}^r \mu r^2 dr, \beta \equiv k(R)
\end{aligned}
$$

В этих координатах первая производная компонента g_{11} метрики имеет разрыв непрерывности на обеих границах Σ_{mat} и σ_{mat} вещества источника, если на них имеет разрыв плотность массыэнергии.

27.3.2 31. Light Rays and World Lines of Free Test Particles

Мировые линии свободных пробных частиц являются временноподобными (следствие 3), а световые линии - изотропными (теорема 6) геодезическими физического мира. Дифференциальные уравнения (I. 16) и (I. 21) геодезических линий в физическом мире, определяемом формулами (III. 33)- (III. 35), полностью интегрируются в замкнутом виде.

Выпишем отличные от нуля символы Кристоффеля второго рода

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^1_{22} = -\eta\sqrt{1 - \frac{\alpha}{\eta}(1 - \beta + k)}, \Gamma^1_{33} = \Gamma^1_{22}\sin^2\theta\\
&\Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \Gamma^3_{23} = \operatorname{ctg}'\big), \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = -\frac{1}{\eta}/\Gamma\overline{1 - \frac{\alpha}{\eta}(1 - \beta + k)}\\
&\Gamma^0_{01} = \frac{1}{2}\frac{\alpha(1 - 3 + k) + xpr_1^3}{\eta^2\sqrt{1 - \frac{\alpha}{\eta}(1 - \beta + k)}},\\
&\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\eta^2}(1 - \beta + k) + xp\eta\right) \times\\
&\times \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\eta}(1 - \beta + k)} \exp\left\{-x \int\limits_r^{c_r} \frac{(\mu + p)\eta dr}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{\eta}(1 - \beta + k)}}\right\}
\end{aligned}
$$

Движение свободных пробных частиц в сферически-симметричном поле является плоским. Это же относится и к световым линиям. И поскольку координатную плоскость $\theta = \frac{\pi}{2}$ всегда можно совместить с плоскостью движения (световой линии), то достаточно исследовать геодезические линии на экваториальной гиперповерхности. Если ввести индикатор q характера геодезической: $q = -1$ на временноподобной, $q = 0$ на изотропной

и $q = +1$ на пространственноподобной геодезической, и единое обозначение σ для канонического параметра геодезической не зависимо от ее характера, то решение уравнений (I. 16) и (I. 21) можно представить следующим образом:

$$x^0 = \pm \int e^{-\lambda/2} \left[1 + \frac{e^\lambda}{E^2}\left(q - \frac{b^2}{\eta^2}\right)\right]^{-1/2} dr + \text{ const}$$

$$\varphi = \pm \int e - \frac{b}{E\eta^2} e^{\lambda/2} \left[1 + \frac{e^\lambda}{E^2}\left(q - \frac{b^2}{\eta^2}\right)\right]^{-1/2} dr + \text{ const},$$

где

$$e^\lambda \frac{dx^0}{d\sigma} = E = \text{ const}, \; \eta^2 \frac{d\varphi}{d\sigma} = b = \text{ const};$$

знаки при интегралах соответствуют противоположным направлениям движения; постоянная интегрирования b связана с угловым моментом частицы; E - полная энергия, приходящаяся на единицу массы частицы. Для изотропных геодезических отношение b/E выражает расстояние до ближайшей к центру точки луча, если луч инфинитный. Для круговых геодезических, на которых значения координаты r и функции λ постоянны, параметры b и E и «радиус» r или η круговой орбиты связаны формулами

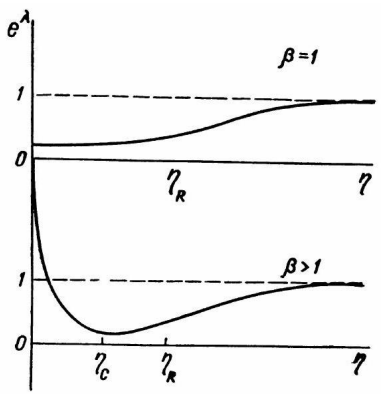
$$-\frac{q}{b^2} = -\frac{2}{\eta^2} \frac{1 - \frac{3}{2}\frac{\alpha}{\eta}(1 - \beta + k) - \frac{1}{2}xp\eta^2}{\frac{\alpha}{\eta}(1 - \beta + k) + xp\eta^2}, \qquad \text{(III.41a)}$$

$$\frac{E^2}{b^2} = \frac{2}{\eta^2} \frac{\left[1 - \frac{a}{\eta}(1 - \beta + k)\right]^2}{\frac{a}{\eta}(1 - \beta + k) + xp\eta^2} \exp\left(-x \int_r^R \frac{(\mu + p)\eta dr}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{\eta}(1 - \beta + k)}}\right).$$

Формулы (III. 40) и (III. 41) справедливы во всей области физического мира как внутри границ (область D_2 решения (III. 33) (III. 35)), так и вне границ (области D_1 и D_3) тела. Дифференциальные уравнения геодезических имеют второй порядок, содержат производные метрического тензора не выше первого порядка и, поскольку метрика (III. 33) - (III. 35) принадлежит по крайней мере классу C^1 непрерывных функций, то координаты текущего события на геодезических линиях (III. 40) являются непрерывнымн функциями всюду, включая и границы, вместе со своими первыми и вторыми производными.

Реальное движение частиц внутри границы тела описывается, конечно, не уравнениями геодезических, так как в этой области мира частицы не являются свободными. В этом смысле формулы (III. 40) и (III. 41) для внутренней области не представляют практической ценности. Но с теоретической точки зрения в них заключен определенный смысл: они могут помочь выясннть характер гравитационного поля по его воздействию на пробные частицы. Чтобы исключить влияние негравитационных сил (трение среды или соударения с частицами вещества тела), можно «вырезать» в теле источника вдоль мировой линии пробной частицы узкую трубку, свободную от вещества источника. Искажающим действием пустой трубки на метрику мира, а следовательно. и на движение частицы можно пренебречь, считая диаметр трубки сколь угодно малым. Теперь движение пробных частиц вне

Рис. 8. Геометрическим местом положения точек поворота свободных пробных частиц, угловые моменты которых равны нулю, а энергия-Е, является кривая на фазовой плоскости (E, r), или (E, η), и поскольку точки поворота на данной траектории определяются из равенства $e^\lambda = E^2$, то она совпадает с графическим изображением функции e^λ. Значениям $0, \eta_c$ и η_R на оси абсцисс соответствуют центр, критическая гиперповерхность и внешняя граница гравитирующего тела.



границ тела и вдоль пустой трубки внутри границ является свободным падением под действием только гравитационных сил (Арифов, 1970).

Локальная скорость пробной частицы изменяется вдоль мнровой линия согласно формуле

$$\boldsymbol{v}^2 = 1 - \frac{e^\lambda}{E^2}$$

а ее радиальная компонента соответственно

$$v_r^2 = 1 - \frac{e^\lambda}{E^2}\left(1 + \frac{b^2}{\eta^2}\right).$$

Область фнзического мира, которой принадлежит мировая янния свободной пробной частицы, определяется из условия, что правая часть (III. 42 б) неотрицательная. Точки, в которых правая часть обращается в нуль, называются точками поворота. Положение точек поворота зависит от полной энергии E и углового момента частицы. Кривая положения точек поворота в случае нулевого углового момента изображена на рис. 8.

Теорема 50. Пусть угловой момент свободной пробной частицы равен нулю. Если пустая полость отсутствует, а критическая гиперповерхность вырождена в мировую линию центра ($\beta = 1$), то любая частица проходит через центр тела. Траектория частнцы финитная, а сама она осциллирует около центра, удаляясь от него на конечное расстояние $r_{\max}$ в обе стороны, если $E < 1$. Если $E \geqslant 1$, то траектория инфинитная, частица падает на тело из Сесконечности, проходит через центр и снова уходит в бесконечность в противоположном направлении. В случае, когда мировая жиния центра сингулярная ($\beta > 1$), никакая частица не достигает центра: она осциллирует около точки на критической гиперповерхности, всегда оставаясь по одну сторону от мировой линии центра, приближаясь к центру до минимального расстояния $(r_{\min} - r_0)$ и удаляясь от него на расстояние $(r_{\max} - r_0)$. если $E < 1$; или частица падает из бесконечности и снова уходит в бесконечность в том же направлении, отражаясь в точке $r_{\min}$, если $E \geqslant 1$.

Доказательство легко усмотреть в формуле (III. 42 б) и рис. 8. К доказательству теоремы можно придти также, анализируя локальное ускорение

$$w = -\frac{\alpha}{2E^2\eta^2}\frac{e^\lambda\left(1 - \beta + k + \frac{x}{\alpha}p\eta^3\right)}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{\eta}(1 - \beta + k)}}$$

частицы с нулевым угловым моментом. В противоположность скорости, которая положительна, если частица удаляется, и отрицательна, если частица приближается к центру, знак локального ускоренння не зависит от направления движения, но зависит от места положения частицы в данный момент. В случае, когда $\boldsymbol{\beta} = 1$, ускорение равно нулю в центре, в остальных же точках траектории отлично от нуля и направлено к центру. Если же $\beta > 1$, то ускорение, согласно определению 10, равно нулю на критической гнперповерхности, отлично от нуля и направлено к центру в точках $r > r_c$. и направлено от центра в точках $r < r_c$.

Локальная скорость частицы с нулевым угловым моментом имеет наибольшее значение на критической гиперповерхности и всегда меньше единицы (т. е. меньше скорости света в этой же точке). Пробная частица, помещенная в точку критической гиперповерхности с начальной нулевой скоростью, остается на критической гиперповерхности. Помещенная

же в точке $r < r_c$ частица выбрасывается за критическую сферу. В дальнейшем она либо осциллирует, либо совсем покидает область гравитационного взаимодействия ее с источником.

Теорема 51. Распространяющийся строго радиально луч света За конечное время достигает сингулярную мировую линию центра, но частота света при этом стремится к нулю по закону $\left[\frac{\eta}{\alpha(3-1)}\right]^{1/2}$.

Д ок а з а те льс т в о. Положим в (III. 40 а) $q = 0$ и $b = 0$. Так как функция e^{λ} конечна и непрерывна в области $\eta(r) > 0$, то кн- теграл в правой части (III. 40 а) также конечен на любом конечном отрезке $[r_1, r_2]$, не содержащем центра. Поэтому достаточно проинтегрировать его на конечном отрезке $[r_0, r]$, где r_0 - радиальная координата центра, а r - координата события, принадлежащего полости:

$$\left|\Delta x^0\right| = \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\gamma_1 - \alpha(\beta-1)\ln\frac{\eta+\alpha(i-1)}{a(\xi-1)}\right).$$

Следовательно, координатное время распространения света от центра до любой конечной точки конечно.

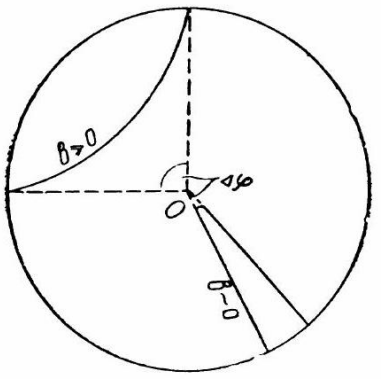
Используя метрику (III. 33) - (III. 35) и теорему 43, легко получить закон изменения

$$\nu = \frac{\nu_{11}}{\sqrt{1+\frac{\alpha}{\eta}(p-1)}}$$

частоты света вдоль луча внутри полости, из которого и следует стремление частоты к нулю с приближением луча к центру, если $\beta > 1$.

Теорема 52. В области мира между мировой линией центра и критической гиперповерхностью лучи света и движение свободных пробных частиц имеют характер рассеяния на сингулярном

Рис. 9. Окружность-линия сечения критической гиперповерхности координатными плоскостями $x^{\circ} = \text{const}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$; событие O - сечение мировой линии центра гравитирующегп тела плоскостью $x^{\circ} = \text{const}$; кривые - траектории свободных пробных частиц, или л!ч! света; b-угловой момент частицы, или прицельный параметр луча; угол $\Delta\varphi$ всегда меньше π и стремится к нулю, когда $b \to 0$.



центре (рис. 9). Ни одна изотропная геодезическая с отличным от нуля прицельным параметром, или временноподобная геодезическая не имеют общих событий с мировой линией центра. На каждой траектории или световом луче имеется точка поворс ia, радиальная координата которой минимальна для данной линии и зависит от энергии и углового момента частицы или прицельного параметра луча. С уменьшением углового момента или прицельного параметра точка поворота перемещается в направлении центра так, что она стремится к точке поворота радиальной траекторин при стремлении уг.тового момента частицы к нулю, а при стремлении прицельного параметра луча к нулю приближа- ется х центру медленнее, чем прицельный параметр к нулю. Каждый луч и каждая траектория после пересечения критической гиперповерхности во внутрь отклоняются от мировой линии центра и снова пересекают критическую гиперповерхность вовне, при этом приращение «следящего» угла всегда меньше π и стремится к нулю, когда стремятся к нулю угловой момент или прицельный параметр.

Д ок а з а т ел в с т в о. Существование точек поворота на траекториях частиц и их поведение с изменением b следует из формулы (III. 42 б). На изотропных геодезических точки поворота находятся из условия обращения в нуль величины $\left(\frac{dr}{dx^0}\right)^2$, получаемой из (III. 40 а). Очевидно, что $\eta_{\min} \to 0$ при $b \to 0$, поэтому существует такое b_0, что точка поворота луча находится в полостп, когда $b < b_0$. Имея в виду (III.35) для $\hat{e}$ в полости, получаем

$$\frac{b^2}{E^2} = \frac{\eta_{\min}^3}{\eta_{\text{mln}} + \alpha(\beta - 1)}$$

откуда следует, что $\eta_{\text{mln}} \to a^{1/3} b^{2/3}$, когда $b \to 0$.

Доказательство остальной части теоремы упрошается, если рассматривать траектории частиц и лучи света (III. 40 б) на евклидовой плоскости (η, φ). В частности, вычислив вектор главной нормали к линиям, можно убедиться, что он всегда направлен от центра (его радиальная компонента положительная), а радиус кривизны линии в точке поворота равен

$$2\frac{b^2}{\alpha(\beta - 1)\left(-q + 3\frac{b^2}{\eta_{\text{mln}}^2}\right)},$$

когда точка поворота находится в полости. При $b \to 0$ радиус кривизны также стремится к нулю как $\alpha^{-1} b^2$ на траектории частицы и как $\alpha^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{4}{3}}$ на световом луче. Радиус кривизны в обоих случаях стремится к нулю быстрее, чем угловой момент или приельный параметр.

Следствие 18. Луч света, распространяющийся строго радиально, отражается от центра с нулевой частотой в точке отражения, но не пересекает мировую линию центра, если мировая линия центра сингулярная ($\beta > 1$).

Теорема 53. Круговые геодезические принадлежат области мира вне критической гиперповерхности.

Д ок аз а т ельс т во. Если $\eta < \eta_c$, то правая часть формулы (III. 41 б) меньше нуля, так как знаменатель в ней отрицательный, что невозможно. На критической же сфере $b = 0$, а $q = -1$, как это следует из формул (III. 41), поэтому круговая геодезическая вырождается в мировую линию свободной частиды, покоящейся на критической гиперповерхности.

Теорема 54. Если $\alpha < \eta_R < \frac{3}{2}\alpha$, то существуют по крайней мере две гиперповерхности, которые содержат изотропные круговые геодезические. Области мира между ними принадлежит множество круговых пространственноподобных геодезических. Одна гиперповерхность лежит вне внешней границы источника, а другая - внутри.

Д окказ а т ельств в. Пусть $\eta_R < \frac{3}{2}\alpha$. Тогда числитель правой части формулы (III. 41 а) имеет не меньше двух корней, один из которых равен $\frac{3}{2}\alpha$. а другой лежит внутри вещества. Последнее следует из того, что на внешней границе

$$\left[1 - \frac{3}{2}\frac{\alpha}{\eta}(1 - \beta + k) - \frac{1}{2}xp\eta^2\right]_{\eta=\eta_R} = 1 - \frac{3}{2}\frac{\alpha}{\eta_R} < 0,$$

а на критической гиперповерхности

$$\left[1 - \frac{3}{2}\frac{\alpha}{\eta}(1 - \beta + k) - \frac{1}{2}xp\eta^2\right]_{\eta=\eta_c} = 1 + xp_c\eta_c^2 > 0.$$

Между этими корнями числитель правой части (III. 41 а) меньше нуля, поэтому $q = 1$, и формулы (III. 41) определяют пространственноподобные геодезические.

Пример. Пусть $\beta = 1, \eta_0 = 0, \mu = \text{const}$ (несжимаемая жидкость). Интегралы в (III. 33) - (III. 35) выражаются через элементарные функции. Решение уравнения (III. 34 в) для этого случая было найдено Шварцшильдом (1916 б). Его можно представить формулами

$$e^{\lambda}=\frac{1}{4}\left(3\sqrt{1-\frac{\alpha}{\eta_R}}-\sqrt{1-\frac{x}{3}\mu\eta^2}\right)^2,$$
$$o=\mu\frac{\sqrt{1-\frac{x}{3}\mu\eta^2}-\sqrt{1-\frac{\alpha}{\eta_R}}}{3\sqrt{1-\frac{a}{\eta_R}}-\sqrt{1-\frac{x}{3}\mu\eta^2}},$$
$$\eta=\sqrt{\frac{3}{x\mu}}\sin\sqrt{\frac{x}{3}\mu r^2},\alpha=\frac{x}{3}\mu\eta_R^3.$$

Здесь $\eta_R > \frac{9}{8}\alpha$, в противном случае давление в центре отрицательное, или его производная неограниченна.

Подставляя эти выражения в (III. 41) и приравнивая нулю числитель правой части (III. 41 а), находим гиперповерхность внутри вещества, которой принадлежат круговые изотропные геодезические

$\eta($ кр. изотроп. геод. $)=u_R\sqrt{\frac{\frac{8}{9}\frac{r}{\alpha}-1}{1-\frac{\alpha}{\eta_R}}}.$

Очевидно, что $0<\gamma_1($ кр. изотроп. геод.$)\leqslant\eta_R$, когда $\frac{9}{8}a<\eta_R\leqslant\leqslant\frac{3}{2}\alpha$. В области $\eta_R\leqslant\eta<\frac{3}{2}$ а круговые пространственноподобные геодезические определяются формулами

η (кр. простр. геод.) $=\frac{\alpha}{E^2+1}\left(1+\frac{3}{4}E^2+\frac{1}{4}E\sqrt{8+9E^2}\right)$,

$\boldsymbol{b}^2($ кр. простр. геод. $)=\frac{a^2}{64(E^2+1)}\left(\sqrt{8+9E^2}+3E\right)^3\left(\sqrt{8+9E^2}-E\right)$.

а параметры их изменяются в пределах

$$2\left(1-\frac{\alpha}{r_{iR}}\right)^2\left(3\frac{\alpha}{\eta_R}-2\right)^{-1}\leqslant E^2<\infty,$$
$$\alpha\gamma_R\left(3\eta_{\eta_R}^a-2\right)^{-1}\leqslant b^2<\infty.$$

В этих же пределах меняются параметры и тех круговых пространственноподобных геодезических, которые принадлежат области η (кр. изотроп. геод.) $<\eta\leqslant\eta_R$.

Полная классификация и анализ траекторий свободных пробных частиц в области D_1 мира, т. е. $\eta>\eta_R$, были даны впервые Хагихарой (Hagihara, 1931). Основные же особенности изотропных геодезических в этой области были получены Богородским (1962), затем Арифовым и Кадыевым (1969) (см. также Зельдович и Новиков, 1967; Atkinson, 1965 и следующую главу этой книги).

27.3.3 32. What Lies on the Singular World Line of the Center?

События мировой линии центра в общем решении (теорема 48) уравнений Эйнштейна в случае, когда $\beta > 1$, являются точками истинной сингулярности метрики. Дифференциальные уравнения Эйнштейна в этих событнях не определены и могут иметь смысл лишь как предельный образ. От характера предельного образа завнсит физическая интерпретация сингулярной мировой линии. Имеются две возможности. Первая связана с тем, что ближайшая окрестность мировой линии центра - полость D_3, или мировая трубка между линией центра и внутренней границей,-свободна от вещества и теплового излучения источника, распределенного в области D_2. Во всех точках областей D_2 и D_3, за нсключением центра, метрика непрерывна и конечна и в D_3 обращает в нуль левую часть уравнений Эйнштейна. В соответствии с этим в D_3 равны нулю все компоненты тензора энергии-импульса. Доопределим уравнения Эйнштейна, приравняв их левые части в сингулярных точках значениям их пределов при стремлении к центру регулярного события из области D_3. Тогда сингулярная мировая линия центра пустая, на ней нет ни вещества, ни излучения. Сингулярный характер метрики на пустой мировой линии центра, как и ее регулярный характер в пустой области D_3, обязан, согласно уравнениям Эйнштейна, распределению вещества и излучения в D_2. Плотность энергии и давление в D_2 неотрицательные.

Другая возможность связана с переопределением тензора энергии-импульса. Если ввести в тензор энергии-импульса добавочный член в виде δ-образного слагаемого, то

значение метрики не изменится в регулярных точках D_3, но изменится значение предела метрики в центре. В этом случае сингулярность метрики на мировой линии центра обязана существованию на ней точечного источника с отрицательной массой.

Для математического анализа этих двух возможностей удобно воспо.тьзоваться теоремой Гаусса - Остроградского на гиперповерхности $x^0 = \text{const}$. Если в статическом мире выбраны координаты, явно выражающие условия статичности метрики, то одно из уравнений Эйнштейна принимает вид (Синг, 1963)

$$\Delta\Phi = -\frac{1}{2} - x\Phi\left(T_0^{(i)} - T_l^i\right)$$

rде Δ - оператор Лапласа на гиперповерхности $x^0 = \text{const}; \Phi^2 = e^\lambda$. Для тензора энергии-импульса (I.18 б) это уравнение можно переписать в виде

$$\Delta\Phi = -\frac{1}{2} - x(\mu + 3p)\Phi$$

Раскрыв оператор Лапласа для квадратичной формы (III. 13), легко убедиться, что последнее уравнение эквивалентно уравненню Эйнштейна (III. 4 в).

Применив теорему Гаусса - Остроградского к произвольной связной области v гиперповерхности $x^0 = \text{const}$ ($aS^!$ − вектор внешней нормали к поверхности области v, абсолютное значение которого равно элементу площади dS поверхности), получим

$$\oint_{(S)} \frac{\partial\Phi}{\partial x^i} dS^i = \frac{x}{2} \int\limits_{(i)} \Phi(\mu + 3p) dv.$$

Теорема Гаусса - Остроградского в форме (III. 44) справедлива, если функция Φ непрерывна в v вместе с частными производными первого и второго порядка и существуют ее первые производные на поверхности S. Рассмотрим область $\vartheta\,(\eta \leqslant \eta_1 \leqslant \eta_0)$ в D_3 (III.35). В ее точках (исключая, может быть, точку $\eta = 0$) функция

$$\Phi = A^{1/2}\left[1 + \frac{\alpha}{\eta}(\beta - 1)\right]^{1/2}$$

является решением уравнения Лапласа

$$\Delta\Phi = 0.$$

В рассматриваемой области

$$dS^l\{dS, 0, 0\}, dS = \eta_1^2 \sin\theta d\theta d\varphi,$$
$$dv = \eta^2\left[1 + \frac{\alpha}{\eta}(\beta - 1)\right]^{-1/2} \sin\theta d\theta d\varphi d\eta,$$

поэтому формальное применение теоремы Гаусса - Остроградского в форме (III. 44) приводит к равенству

$$\alpha(\beta - 1) = -x \int\limits_0^{\eta_1} (\mu + 3p)\eta^2 d\eta.$$

Во всех точках v, кроме, может быть, центра, $\mu = p = 0$ (в этих точках функция непрерывна вместе с производными до второго порядка включительно, и сравнение уравнений (III. 45) и (III. 43) допустимо), поэтому последнее равенство можно было бы интерпретировать в том смысле, что в центре находится отрицательная δ-образная масса.

Но в центральной точке области v ни сама функция Φ, ни ее производные не только не непрерывны, но даже не определены (по крайней мере, в явном виде), не определен и результат действия оператора Лапласа, поэтому применение теоремы Гаусса - Остроградского в форме (III. 44) неправомочно. Но ее можно применить к v в форме

$$\oint_{(S)} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} dS^l - \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{(S(\xi))} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} dS^l = \frac{x}{2} \int\limits_{(v)} \Phi(\mu + 3p) dv,$$

где $v(\varepsilon)$ - область ($S(\varepsilon)$ - ее поверхность), принадлежащая v, включающая в себя центральную точку и сходящаяся к ней при $\varepsilon \to 0$. Равенство (III. 46) имеет смысл при двух условиях: 1) предел интеграла существует; 2) значення функцнн и ее производных, в том числе и результат действия оператора Лапласа, определены в центре.

Определекие 12. Положим

$$\Phi(0) = \lim_{\eta \to 0} \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial x^i|_0} = \lim_{\eta \to 0} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i},$$
$$\left.\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j}\right|_0 = \lim_{\eta \to 0} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Значения функции Ф и ее первых и вторых частных производных в центре определены как пределы их значений при стремлении $\mathbf{x}$ центру произвольной точки из его окрестности.

Указанные пределы существуют (например, $\lim_{\eta \to 0} \Phi = +\infty$, $\lim_{\eta \to 0} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \lim_{\eta \to 0} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0, \lim_{\eta \to 0} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\infty\Big)$ и не зависят от пути, по. которому произвольная точка из окрестности центра стремится к нему. Поэтому определение 12 не лишено смысла.

Следствие 19. Действие оператора Лапласа на функцию Ф в точке сингулярности определено значениями Ф и ее первых и вторых частных производных в центре. Равенство $\Delta \Phi_{|_0} = 0$ имеет место как предельное при стремленин к дентру пронзвольной точки из его окрестности.

Таким образом, функция Ф удовлетворяет теперь уравнению Лапласа в D_3, включая и мировую линню центра, поэтому из сопоставления уравнения (III. 45) вместе с его предельным выражением (III. 47) с одним (III. 43) из уравнений Эйнштейна находим, что $\mu = p = 0$ в D_3, включая н мировую линию центра.

К этому же результату приводит применение теоремы ГауссаОстроградского в форме (III. 46). Но прежде необходнмо доказать лемму.

Лемма 24. Пусть $v(\varepsilon)$ - произвольная область, содержащая сингулярную точку и сходящаяся к ней при $\varepsilon \to 0, v \supset (\varepsilon)$, а -область $\eta \leqslant \eta_1 \leqslant \eta_0$ в D_3. Предел интеграла

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{(S(\varepsilon))} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} dS^l$$

существует и равен $-2\pi\alpha(\beta - 1)A^{1/2}$ независимо от пути, по которому $v(\varepsilon)$ сходится к сингулярной точке.

Доказательство. В области $v - v(\varepsilon)$ функция Ф непрерывна вместе с первыми и вторыми производными и удовлетворяет уравнению Лапласа (III. 45).

Применим теорему Гаусса - Остроградского в форме (III. 44) к v-v (ε). Имеем

$$\int\limits_{(S)} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} dS^l - \oint_{(S(\varepsilon))} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} dS^l = \int\limits_{(v - v(\varepsilon))} \Delta \Phi dv = 0.$$

Поэтому

$$\oint_{(S(\varepsilon))} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} dS^i = -2\pi\alpha(\beta - 1)A^{1/2}$$

Устремляя $\to 0$ и имея в виду определение 12, получаем

$$\lim_{e \to 0} \oint_{(S(\varepsilon))} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial x^i} dS^i = -2\pi\alpha(\beta - 1)A^{1/2}$$

независимо от пути стремления $v(\varepsilon)$ к нулю. Лемма доказана.

Оба условия применимости равенства (III. 46) выполняются согласно определению 12 и лемме 24. Подставляя в (III. 46) найденный предел и вычисляя поверхностный интеграл, приходим к равенству

$$\int_0^{\eta'} (i+3p)\eta^2 d\eta = 0$$

из которого также следует, что $\mu = p = C$ в D_3, включая и мкровую лннию центра, в полном соответствии с теоремой 48.

Если функция Ф удовлетворяет в D_3 не уравнению Лапласа (III. 45), а уравнению с δ-образной правой частью

$$\Delta\Phi = \frac{x}{2}\Phi m\delta(r), m = \text{ const },$$

то предел интеграла, фигурирующий в (III. 46), тоже существует,.но равен нулю. Для доказательства этого рассмотрим неограниченную последовательность вложенных друг в друга областей $\{v_1 \supset v_2 \supset \cdots \supset v_n \supset \cdots\}$, сходящуюся при $n \to \infty$ к сингулярной точке, и непрерывные в них функции μ_n такие, что

$$\frac{1}{m}\int_{(v_n)} \mu_n \Phi dv = A^{1/2}.$$

Последовательность $\left\{\frac{\mu_1}{m}, \frac{\mu^2}{m}, ..., \frac{\mu_n}{m}, ...\right\}$ сходится к (Тихонов, Самарский, 1972) б-функции, поэтому решение уравнения (III.48) является той функцией, κ которой сходится последовательнисть $\{\Phi_n\}$ функций, каждая из которых удовлетворяет соответствую.щему уравнению последовательности

$$\left\{1\Phi_n = \frac{x}{2}\Phi_{\mu_n}\right\}$$

Пусть $v \supset v_1$. Тогда для функций Φ_n справедливо соотношение

$$\int_{(v)} \Delta\Phi_n dv = \oint_{(S)} \frac{\partial\Phi_n}{\partial x^i} dS^t - \lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{(S(s))} \frac{\partial\Phi_n}{\partial x^i} dS^i.$$

Последовательность $\{\Phi_n\}$ порождает неограниченную последоівательность чисел

$$\left\{\lim_{i\to 0}\oint_{(S(s))} \frac{\partial\Phi_n}{\partial x^i} dS^i\right\}$$

предел которой при $n \to \infty$ и необходимо найти. Но при $\varepsilon \to 0$ область v_n содержит в себе $v(\varepsilon)$, а в v_n функции μ_n и Φ_n непрерывны, поэтому, согласно теореме Гаусса - Остроградского в форме (III.44),

$\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{(S(\varepsilon))} \frac{\partial\Phi_n}{\partial x^l} dS^l = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{(v(\varepsilon))} \Delta\Phi_n dv = \frac{x}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{(\sqsubseteq(\varepsilon))} \mu_n\Phi dv = 0.$

Следовательно, последовательность (III. 49) сходится к нулю, и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{(S(\varepsilon))} \frac{\partial\Phi}{\partial x^l} dS^l = 0$$

Различия между решениями уравнений (III. 45) и (III. 48) заключаются в разном пх поведении вблизи сингулярной точки: решение уравнения (III. 48) при $\eta \to 0$ растет медленнее, чем функция, удовлетворяющая (III. 45), с которой оно совпадает в окрестности любой регулярной точки. В соответствии с этим метрика мира в D_3, включая и сингулярную мировую линию центра, удовлетворяет либо уравнению Лапласа (III. 45) (в центре (III. 47)), либо уравнению (III. 48). В первом случае вся область D_3, включая и мировую линию центра, пустая, а метрика в ней полностью определяется распределением неотрицательных плотности энергии и давления вещества и излучения в

D_2. Во втором случае область D_3, за исключением мировой линии центра, пустая, на мировой линии центра находится отрицательная точечная масса, а метрика мира в D_3 определяется этой отрицательной точечной массой и распределением обычного вещества и излучения в D_2. Имеются работы (см., например, Bondi, 1957; Терлецкий, 1966, 1981), в которых высказывается мнение о допустимости в природе отрицательных масс и рассматриваются следствия, вытекающие из такого допущения в общей теории относительности. Здесь и далее излагается точка зрения, придерживающаяся первой интерпретации, оставляя в стороне гипотезу отрицательных масс. Согласно этой интерпретации, на сингулярной мировой линии центра нет ни вещества, ни излучения; область D_3, включая и сингулярную мировую линию, пустая, а сингулярность метрики на временноподобной мировой линии центра обусловлена, как и регулярное поведение ее в остальных событиях D_3, распределением вещества и излучения в D_2.

27.3.4 33. Gravitational Repulsion

Статическое гравитационное поле в релятивистской теории тяготения поддается простой интерпретации на языке ньютоновой механики и ньютоновой теории тяготения. Это связано с тем, что именно в статическом случае одно из уравнений Эйнштейна, представляющих собой релятивистский закон гравитации, при- нимает форму (III. 43), близкую уравнению Пуассона, а при условии слабости поля и пренебрежении малыми поправками и вовсе совпадает с ним (принцип соответствия 2). Роль ньютонова потенциала гравитационного поля играют при этом $\sqrt{-g_{00}}$ или $\ln\sqrt{-g_{00}}$ (с точностью до нормировочной аддитивной постоянной). Не случайно градиент этой величины связан с градиентом давления в уравнении релятивистской гидростатики (III. 5) - поверхностная сила, с которой на выделенный элемент источника действуют его остальные части, компенсирует гравитационную силу.

Локальное ускорение, которое имеет свободная частица с нулевым угловым моментом (см. §31), дает представление о гравитационной силе в статическом поле. Поскольку частица свободная (мировая линия - геодезическая), негравитационное воздействие на нее источника поля исключено с помощью пустой мировой трубки, вырезанной в теле источника вдоль мировой линии, а центробежные снлы, камуфлирующие характер влияния полевых сил, устранены вместе с угловым моментом, то движение частицы происходит под действием только гравитационной силы, пропорциональной локальному ускорению. Направление гравитационной силы, как и направление локального ускорения, зависит от точки пространства: во всех точках вне критической гиперповерхности сила направлена к центру, равна нулю на критической гиперповерхности и направлена от центра, когда точка находится между критической гиперповерхностью и мировой линией центра. Если $\beta = 1$, то критическая гиперповерхность вырождается в мировую линию центра (теорема 48), а область, в которой гравитационная сила направлена от центра, отсутствует. Если же $\boldsymbol{\beta} > 1$, то появляется область мира $r < r_c$, в которой гравитационное поле эффективно действует как поле отталкивания от сингулярной мировой линии центра (Арифов, 1970, 1979 б, 1981). Отталкивательный характер гравитационного поля особенно наглядно проявляется в зависимости потенциальной энергии от расстояния. Действительно, из (III. 42 а) следует выражение для полной энергии свободной частицы с произвольным угловым моментом в гравитационном поле -

$$E = \frac{e^{\lambda/2}}{V1 - \boldsymbol{v}^2}$$

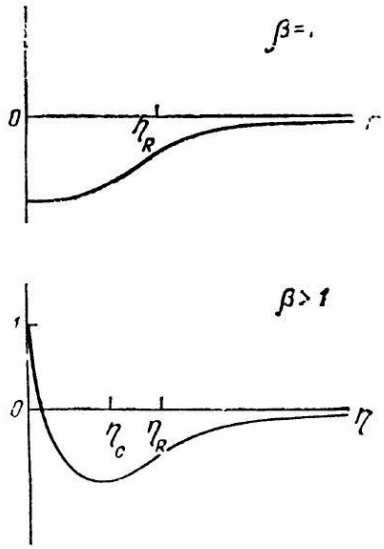
которую можно представить в виде суммы кинетической и потенциальной энергий. Тогда для потенциальной энергии E_g гравитацнонного взаимодействия свободной частицы с полем может быть записана формула

$$E_g = E\left(1 - e^{-\lambda/2}\right)$$

В нерелятивистском пределе (принцип соответствия 2) эта формула переходит в обычное выражение для потенциальной энергии частицы в ньютоновом поле тяготения. В правой части ее релятивизированы оба сомножителя - массу покоя заменяет полная энергия, а потенциал Ньютона представлен разностью $\left(1 - e^{-\lambda/2}\right)$.

Согласно (III. 50), энергия гравитационного взаимодействия исчезает на бесконечности, имеет минимальное значение на критической гиперповерхности и увеличивается, если $\beta > 1$, до значения полной энергии частицы на сингулярной мировой линии центра (рис. 10). Увеличение потенциальной энергии с уменьшением расстояния от критической гиперповерхности до центра и соответствует гравитационному отталкиванию. Равенство потенциальной энергии полной на сингулярной мировой линии центра означает недостижимость центра частицами, когда $\beta = 1$ (теорема 52).

Рис. 10. По оси ординат отложены значения потенциальноиі энергии $\frac{E_g}{E}$ единицы полной энергии E частины в статическо:і гравитанионно: поле Значения.і $\cap, \eta_c$ и η_i на оси абсцисс соответствуют центр, критическая гиперповерхность и внешняя граница гравитирующего тела



Теорема 55. Если метрика, определяемая сферическим изолированным телом, сингулярна на пустой мировой линии центра, то эта мировая линия является центром отталкивания, а гравитационное поле в разных областях мира имеет различный характер - гравитационного притяжения и гравитационного отталкивания. В событиях критической гиперповерхности гравитационное притяжение, действующее во внешней области мира и граничащей с ней внутренней области тела между критической гиперповерхностью и свободной внешней границей, сменяется на гравитационное отталкивание в пустой полости и граничащей с ней внутренней области тела между критической гиперповерхностью и свободной внутренней границей тела.

Обобщение Эйнштейном теории тяготения Ньютона в общей теории относительности привело не только к малым количественным отличиям гравитационных эффектов релятивистской теории от ньютоновой, но и к принципиально новым явлениям и эффектам, присущим релятивистской теории и отсутствующим в ньютоновой. Это отличне столь велико, что гравитационное взаимодействие в теории Эйнштейна изменило даже характер только притяжения, свойственный ему в теории Ньютона, и приобрело характер как притяжения, так и отталкивания*.

Можно отказаться от термина кгравитационное отталкивание» и сохранить только термин кпритяжение». В такой интерпретации кцентром» притяже- Отталкивательным характером гравитацнонного поля под критической гиперповерхностью и видом потенциальной ямы гравитационного взаимодействия (рис. 10) объясняются существование пустой полости, свободной внутренней границы и распределение числа частиц, энергии и давления в источнике (теорема 48).

Необходимо оговорить, что представление о гравитационном отталкнвании уже встречалось в литературе по общей теории относительности в связи с анализом поведения пробных частиц в некоторых полях (см. бнблиографию в кн. Иваницкой, 1979). Например, Мак-Витти (1961) объясняет гравитационным отталкиванием изменение в поле Шварцшильда скорости пробной частицы, измеряемой далеким наблюдателем. Эта скорость равна локальной, умноженной на $e^{\lambda/2}$. Но изменение скорости пробной частицы в значительной степени зависит от определения самой скорости, а не только от характера гравитационного поля. Уменьшение скорости при падении частицы на центральное тело, «провоцирующее» в данном случае

представление о гравитационном отталкивании со стороны центрального тела, исчезает, как только скорость определяется по-другому. А возможности различных определений скорости связаны с существованием различных временных осей - оси местного времени (локальная скорость), координатного времени и т. д. То же относится и к определениям ускорения и силы. Поэтому нельзя не согласиться с Зельдовичем и Новиковым (1967), что интерпретация Мак-Витти является неудачной.

В каждом случае для однозначности интерпретации необходимо иметь инвариантный критерий отталкивательного характера гравитационного поля. Таким критерием может быть наличие области мира, запрещенной для пробных частиц, или, в случае сферического поля, существование точек поворота на мировой линии свободных частиц, угловые моменты которых равны нулю, а начальные скорости направлены к центру. Согласно этим критериям, поле Шварцшильда (область D_1) является полем притяжения во всех событиях мира вплоть до гиперповерхности Шварцшильда и не может быть полем гравитационного отталкивания.

Несколько иначе обстоит дело, если сферическое тело несет электрический заряд. Когда полный заряд Q тела велик, а именно, $Q > 0/2$, в решении Рейснера-Нордстрема вне тела имеется область $r < 2Q^2/\alpha$, в которой гравитационное поле действительно следует интерпретировать как отталкивательное. Но именно эта область мира в решении Рейснера - Нордстрема является нефизической. Во-первых, не существует (Мизнер, Торн, Уилер, 1977)

ния, однако, будет уже не мировая линия центра сферической симметрии, а критическая гиперповерхность. А поведение гравитационного поля в области между этим «центром» и центром симметрии аналогично глюонному - с удалением от «центра» притяжения в направлении центра симметрии его действне возрастает, а не падает, как это происходит при удалении в направлении внешней границы тела. внутреннего решения, которое могло бы быть сшитым на границе тела с решением Рейснера - Нордстрема, если граница находится в области $r < Q^2/\alpha$. Во-вторых, силы гравитационного отталкивания в области $r < 2Q^2/\alpha$ должны действовать не только на свободные пробные частицы, но и на частицы, принадлежащие границе тела, и вместе с давлением вещества и силами электростатического взаимодействия, направленными в ту же сторону, отодвинуть границу тела за $r = 2Q^2/\alpha$. Следовательно, любое внутреннее решение для электрически заряженного вещества изменит внешнее решение Рейснера-Нордстрема в области $r < 2Q^2/\alpha$. В остальной области, приемлемой с физической точки зрения, гравитационное поле имеет характер притяжения.

Если $Q \leqslant \alpha/2$, то область $r < 2Q^2/\alpha$ мира в решении Рейснера Нордстрема находится под горизонтом событий. В физической же области вне горизонта действует также только поле гравитационного притяжения.

27.3.5 34. Extremality of the Mass of the Equilibrium State of an Isolated Body

Вместо постоянной β общего решения (теорема 48) иногда удобнее использовать другую. Предположим, для определенности, что общее решение представлено формулами (III. 33) (III.35), а квадратичная форма (III.3) приведена к виду (III.13). Введем обозначение

$$e \equiv \frac{\alpha}{r_{10}}(\beta - 1)$$

Постоянная e неотрицательная. Она положительная, если мировая линия центра сингулярная, а тело имеет свободную внутреннюю границу. При $\eta_0 = 0$ постоянная e обращается в бесконечность, однако произведение η_0 имеет вполне опрделенное положительное значение. Решению Толмена - Оппенгеймера - Волкова ($\beta = 1, \eta_0 = 0$) соответствует нулевое значение e.

Определение 13. Мгновенно-статической называется такая конфигурация - функции распределения плотности массы, давления, плотности числа частиц, масса, площади поверхностей свободных границ (внешней и внутренней), вместе с функциями λ и η геометрии мира-изолированного тела, которая удовлетворяет двум уравнениям (III. 4) Эйнштейна.

Теорема 56. Если заданы уравнение состояния вещества, распределение плотности числа частиц (в случае, когда внутренние границы вещества и источника не совпадают, то и распределение плотности энергии теплового излучения в области между ними), полное число части и значения η_0 и e (или $e\eta_0$), то мгновенно-статическая конфигурация тела определяется единственнЬім образом. Д оказ а те льст во. Пусть термодинамическое уравнение состояния вещества задано в виде (III.2 б). Тогда из формул (III. 1) и (III. 2 б-г) и заданного условиями теоремы распределения плотности числа частиц сразу же следуют функции $\mu(r)$ и $p(r)$. Поскольку правая часть уравнения (III. 4 а) теперь известна, то оно имеет единственное решение $\eta(r)$ такое, что

$$\eta(0) = \eta_0, \left.\frac{d\eta}{dr}\right|_{r=0} = \sqrt{1+e}$$

Последнее равенство вытекает из определения (III. 51) и формулы (III. 35). Если $\eta_0 = 0$, а $e = \infty$, т. е. задано положительное и конечное значение $e\eta_0$, то в (III. 4 а) достаточно произвести замену, например, $\eta(r) = y^{2/3}(r)$, и искать функцию $y(r)$ в области ее изменения $(0, \infty)$, удовлетворяющую этому уравнению при начальных значения

$$y(0) = 0, \left.\frac{dy}{dr}\right|_{r=0} = \frac{3}{2}\sqrt{er_{in}}$$

Радиус внешней границы тела определяется формулой для заданного условиями теоремы полного числа N частиц

$$N = 4\pi \int_0^R n\eta^2 dr$$

в которой обе функции $n(r)$ и $\eta(r)$ определны.

Из (III. 21) и (III. 51) следуют равенства

$$\alpha = \mathscr{E} - e\eta_0, \beta = \frac{\mathscr{E}}{\mathscr{E} - er_i},$$

где

$$\mathscr{E} \equiv x \int_{\eta_0}^{\eta_R} \mu\eta^2 d\eta_i$$

Подставляя найденные функции $\mu(r)$ и $\eta(r)$ и значения η_0, e и η_R В (III. 54) и (III. 53), находим значения α (массы M) и $\boldsymbol{\beta}$. , наконец, функция $\lambda(r)$, удовлетворяющая уравнению (III.4 б) Эйнштейна, может быть найдена с помощью формул (III. 33), (III. 34 б) и (III. 35), поскольку все необходимые для этого функции и постоянные уже известны.

Произвольная мгновенно-статическая конфигурация не может, конечно, удовлетворять также и третьему уравнению (III.5) Эйнштейна, так как именно распределение плотности числа частиц, а вместе с ним и распределение давления в ней произвольны. С изменением распределения числа частиц, т. е. с переходом от одной мгновенно-статической конфигурации к другой, изменяется масса M конфигурации. Оказывается, конфигурация, удовлетворяющая уравнению (III. 5), отличается от других мгновенно- статических конфигураций тем, что ее масса экстремальна. К наоборот.

Теорема 57. Для того чтобы масса мгновенно-статической конфигурации при заданных уравнении состояния вещества, полном числе частиц и значения хη_0 и e (или $e\eta_0$) была экстремальна, необходимо и достаточно, чтобы функции конфигурации удовлетворяли релятивистскому уравнению гидростатического равновесия (III. 5), а давление на внешней границе обращалось в нуль.

Приведем доказатеjльство для случая холодного тела. Если абсолютная температура равна нулю, то внутренние границы вещества и источника совпадают (теорема 49), поэтому на свободной внутренней границе вещества радиальная координата равна нулю. Введем лагранжев параметр

$$a(r) = 4\pi \int_0^r n\eta^2 dr$$

равный числу частиц, находящихся под сферой r, так что

$$a(0) = 0, a(R) = N$$

Разрешив (III. 55) относительно r, получим ее значения в функции параметра a, причем

$$r(0) = 0, r(N) = R$$

и зависимость плотности числа частиц от a

$$n(a) = \frac{1}{4\pi r^2 \frac{dr}{da}}$$

Последнюю формулу можно переписать, если воспользоваться (III. 34 а), (III. 22) и (III. 51):

$$n(a) = \frac{B}{4\pi\eta^2 \frac{d\eta}{da}},$$

где

$$B \equiv \sqrt{1 - \frac{1}{\eta}(\xi - e\eta_0)},$$
$$\xi \equiv x \int_0^a \mu\eta^2 \frac{d\eta}{da} da.$$

Изменение распределения плотности числа частид, в согласии с (III. 55), означает вариацию

$$\bar{a}(r) = a(r) + \delta a, \delta a(0) = 0$$

лагранжева параметра. Поэтому

$$\bar{r}(a) = r(a) + \delta r, \delta r(0) = 0, \delta r(N) \neq 0.$$

И поскольку функция $\eta(r)$ однозначно определяется как функция r, а следовательно, и параметра a при заданных η_0 и e и распределенин $n(r)$, то с вариацией $n(r)$ изменяется и функция η:

$$\bar{\eta}(a) = \eta(a) + \delta\eta(a), \delta\eta(0) = 0.$$

Равенство нулю вариации $\eta(r)$ в нуле вытекает из условий теоремы.
Из (III. 57) следует

$$\delta\frac{d\xi}{da} = \frac{d}{da}\delta\xi = x\left(\eta^2 \frac{d\eta}{da}\frac{d\mu}{dn}\delta n + 2\mu\eta\frac{d\eta}{da}\delta\eta + \mu\eta^2\frac{d\delta\eta}{da}\right).$$

Подставляя (III. 56) в (III. 2 в), получаем

$$\frac{d\mu}{dn} = 4\pi\frac{\mu + p}{B}\eta^2\frac{d\eta}{da}.$$

Варьируя же его, находим

$$\delta n = -\frac{B}{\left(4\pi\eta^2\frac{d\eta}{da}\right)^2}\left(8\pi\eta\frac{d\eta}{da}\delta\eta + 4\pi\eta^2\frac{do\eta}{da}\right) +$$
$$+\frac{1}{8\pi\eta^2\frac{d\eta}{da}B}\left[\frac{1}{r_1^2}(\xi - e\eta_0)\delta\eta - \frac{1}{\eta}\delta\xi\right].$$

Используя последние два выражения, можно теперь записать уравнение для $\delta\xi$:

$$\frac{d\zeta\xi}{da}+\frac{x}{8\pi}\frac{\mu+p}{n\eta B}\delta^{\kappa}=T(a)$$

где

$$T(a)=x\left\{\left[\frac{(\mu+p)\,(\xi-er_n)}{8\pi n\eta^2 B}-2p\eta\frac{d\eta}{da}\right]\delta\eta-p\eta^2\frac{d\grave{\gamma}\eta_1}{da}\right\}.$$

Так как $\xi(0)$ равно нулю независимо от функции распределения плотности числа частиц, то

$$\delta\xi|_{a=0}=0$$

Уравнение (III. 58) при этом граничном условии имеет единственное решение, которое можно представить равенством

$$\delta\xi=e^{-d}\int\limits_0^a T(a)e^d da$$

где

$$d(a)\equiv\frac{x}{8\pi}\int\limits_0^a\frac{\mu+p}{nri}da,\,D\equiv d(N)$$

Сравнивая (III. 57) с (III. 54), находим, что

$$\delta\xi|_{a=N}=\delta\mathscr{E}$$

и так как e и η_0 заданы по условиям теоремы, то

$$\delta x=\delta\frac{5}{s}\Big|_{a=N}$$

Следовательно,

$$\delta x=e^{-D}\int\limits_0^N T(a)e^d da$$

При подстановке в последнее равенство $T(a)$ из (III.59) появляется интеграл

$$xe^{-D}\int\limits_0^N p\eta^2 e^d\frac{d\delta}{da}da$$

который можно преобразовать к выражению

$$xe^{-D}\left[xp\eta^2e^d\delta\eta\right]_0^N-xe^{-D}\int\limits_0^N\left\{\eta^2\frac{dp}{d\eta}\frac{d\eta}{da}+2p\eta\frac{d\eta}{da}+\frac{x}{8\pi}\frac{\mu+p}{nB}p\eta\right\}e^d\delta\eta da.$$

Подставляя $T(a)$ в (III.60) й используя это преобразование, получаем окончательную формулу для вариации α (а следовательно, и массы) мгновенно-статической конфигурации -

$$\delta x = -xp(R)\tau_1^2(R)\delta\eta_1' + xe^{-D}\int_0^N \left\{\frac{dp}{d\eta}+ \right.$$

$$\left. +\frac{1}{2}\frac{\mu+p}{\eta^2}\frac{\xi - e\eta_0 + xp\eta^3}{1-\frac{1}{\eta}(\xi - e\eta_0)}\right\}\eta^2\frac{d\eta}{da}e^d\delta\eta da.$$

Из нее сразу же следует доказательство теоремы.

Определение 14. Конфигурация изолированного тела называется равновесной, если она удовлетворяет трем уравнениям (III. 4) и (III.5) Эйнштейна вместе с условиями (III. 7), (III. 9), (III. 10) и (III. 12 а) на свободных границах.

Следствие 20. Масса равновесной конфигурации с заданными уравнением состояния, полным числом частиц и значениями постоянных η_0 и e имеет стационарное значение в классе сферических конфигураций.

27.3.6 35. Stable Equilibrium Configurations of an Isolated Body

Для равновесных конфигураций справедлива следующая теорема.

Теорема 58. Для заданного уравнения состояния вещества и любых заданных неотрицательных значений η_0 и e на свободной внутренней границе, или заданного положительного значения плотности массы μ_0 в центре (когда $e = 0, \eta_0 = 0$) существует одна и только одна равновесная конфигурация $\{\alpha, R, N, \beta, \mu(r), p(r), \ n(r), \lambda(r), \eta(r)\}$ тела. Все функции и постоянные конфигурацни являются непрерывными функциями также и параметров γ_{10} и e, или μ_0.

Доказаательство аналогично доказательству теоремы 53. Необходимо только иметь в виду, что к уравнению (III.4 a), определяющему функцию $\eta(r)$, теперь присоединяется еще уравнение (III.5), в правую часть которого подставляется λ', алгебраически разрешенная из уравнения (III. 4 б). Присоединенное уравнение определяет распределение давления и связанные с ним заданным уравнением состояния распределения плотностей массы и числа частиц. Если заданное значение e больше нуля, то на внутренней границе $r = 0$ источника давление, согласно условию (III. 9), равно нулю, поэтому уравнения (III. 4 а) и (III.5) имеют единственное решение $\eta(r)$ и $p(r)$, удовлетворяющее данным Коши

$$\eta(0) = \eta_0, \left.\frac{d\eta}{dr}\right|_{r=0} = \sqrt{1+e}, p(0) = 0.$$

Если же заданное значение e равно нулю, то и $\eta_0 = 0$, а свободная внутренняя граница отсутствует. Заданное значение μ_0 в центре определяет, согласно заданному уравнению состояния, значение давления p_0 в центре. Тогда уравнения (III. 4 а) и (III.5) имеют единственное решение, удовлетворяющее данным Коши

$$\eta(0) = 0, \left.\frac{d\eta}{dr}\right|_{r=0} = 1, p(0) = p_0.$$

Координата R свободной внешней границы источника может быть получена приравниванием нулю найденной функции $p(r)$, чем одновременно удовлетворяется граничное условие (III. 7).

Решения обыкновенных дифференциальных уравнений, а именно таковы уравнения (III.4) и (III.5), являются непрерывными функциями данных Коши (Смирнов, 1965), поэтому все постоянные и функцни равновесной конфигурации можно представить следующим образом:

$$\alpha = \alpha(\eta_0, e, p_0),$$
$$R = R(\eta_0, e, p_0),$$
$$N = N(\eta_0, e, p_0),$$

$$\beta = \beta(\eta_0, e, p_0),$$
$$\mu = \mu(r; \eta_0, e, p_0),$$
$$p = p(r; \eta_0, e, p_0),$$
$$n = n(r; \eta_0, e, p_0),$$
$$\lambda = \lambda(r; \eta_0, e, p_0),$$
$$\eta = \eta(r; \eta_0, e, p_0).$$

Правые части (III. 61) являются непрерывными функциями о и e, когда $p_0 = 0$, и непрерывными функциями p_0 (или μ_0), когда $e = 0, \eta_0 = 0$.

Для каждого фиксированного значения полного числа частиц существует набор изолированных точек и непрерывных кривых в трехмерном фазовом пространстве $\{X, \eta_0, p_0\}$, где $X -$ - бая из величин равновесной конфигурации, за исключеннем полного чис.та частиц. Одно из этих фазовых пространств представляет особый интерес с физической точки зрения. Это - пространство $X = \alpha$. Кривая масс и изолированные точки, представляющие равновесные конфигурации в фазовом пространстве $\{\alpha, \eta_0, p_0\}$, определяются равенствами

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \alpha(\eta_0, e, p_0), \\ N(\eta_0, e, p_0) = \text{const}. \end{array}\right\}$$

Изолированные точки

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \alpha(0, 0, p_0) \\ N(0, 0, p_0) = \text{const}, \end{array}\right\}$$

принадлежащие фазовому пространству массы, соответствуют решению Толмена - Оппенгеймера - Волкова, а непрерывная кривая массы

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \alpha(\eta_0, e, 0), \\ N(\eta_0, e, 0) = \text{ const} \end{array}\right\}$$

представляет равновесные конфигурации тела, имеющего свободную внутреннюю границу и пустую полость с сингулярной мировой линией в центре.

Определение 15. Равновесные конфигурации называются устойчивыми, если при заданных уравнении состояния и полном числе частиц на кривой массы в фазовом пространстве им принадлежат локальные минимумы.

В точках локального минимума кривой (III. 64) постоянные η_0 и e принимают определенные значения, а конфигурация зависит уже только от уравнения состояния и полного числа частиц. Это имеет существенное значение в теории построения сферических астрофизических моделей, основанных на релятивистском уравнении гидростатического равновесия.

Следствие 21. Все функции и параметры $|\alpha, R, \beta, \eta_0, e, \mu(r), \ p(r), n(r), \lambda(r), \eta(r)\}$ устойчивых равновесных конфигураций изолированного тела с пустой полостью определяются только заданными уравнением состояния и полным числом частиц. Масса этих конфигураций минимальна относительно малых изменений параметров η_0 и e и стационарна относительно малых сферически-симметричных изменений распределения плотности числа частиц, давления или плотности массы.

Назовем изолированную точку (III. 63) в фазовом пространстве массы точкой Толмена - Оппенгеймера - Волкова. При заданных уравнении состояния и полном числе частиц точка Толмена-Оппенгеймера-Волкова может отсутствовать в фазовом пространстве. Это означает, что релятивистское уравнение (III. 5) гидростатического равновесия в этом случае не имеет решения, если $e = 0$, но имеет решения, которым соответствуют значения массы, принадлежащие кривой (III. 64) с $e > 0$. Но и в том случае, когда в фазовомі пространстве имеется точка Толмена-Оппенгеймера - Волкова, то ее масса (масса соответствующей ей конфигурации), вообще говоря, не является ни наименьшей, ни наибольшей в фазовом пространстве.

Следствие 22. При заданных полном числе частиц и уравнении состояния точка Толмена - Оппенгеймера - Волкова может принадлежать, но может и не принадлежать фазовому пространству массы. В первом случае масса соответствующей ей конфигурации не имеет, вообще говоря, ни наименьшего, ни наибольшего значения.

27.3.7 36. Stable Equilibrium Configurations for a Supercritical Number of Particles

Чтобы проиллюстрировать выводы, сделанные из аналитического исследования равновесных конфигураций на основе общего решения (теорема 48), приведем результаты численного решения. Для численного решения был выбран объект, полное число частиц в котором равно 10^{58}, а термодинамическое состояние описывается уравнением холодного катализированного вещества Гаррисона - Уилера. Выбор объекта - число частиц и уравнение состояния вещества - не случайны. Многочисленные исследования показали, что на последней стадии эволюции, когда запасы внутренней энергии, способной поддерживать равновесное состояние, исчерпаны, холодное изолированное тело, состоящее из слишком большого числа частиц, не имеет равновесных состояний, если его структура - распределение плотности массы - подчиняется уравнению релятивистского гидростатического равновесия Толмена - Оппенгеймера - Волкова. Число частиц, при котором в конце эволюции исчезают равновесные конфигурации ТолменаОппенгеймера - Волкова, называется критическим. Считается, что тело с числом частиц, большим критического, должно испытать гравитационный коллапс.

Но отсутствие для сверхкритического числа частиц равновесных состояний, подчиняющихся уравнению гидростатического равновесия Толмена - Оппенгеймера - Волкова, еще не означает вообще отсутствия равновесных состояний для данного тела, если учесть, что его внутренняя структура определяется релятивистским уравнением гидростатического равновесия (III. 34 в) (следствие 22). Более того, в принципе существуют такие равновесные конфигурации (следствие 21), в которых распределение плотности массы свидетельствует о гравитационном отталкивании вещества тела от его центра. Это позволяет высказать предположение, что при любом числе частиц существуют равновесные устойчивые конфигурации, способные противостоять гравитационному коллапсу при помощи гравитационных же сил отталкивания. В какой-то степени это предположение можно испытать в задаче нахождения равновесных устойчивых конфигураций для сверхкритического числа частиц.

Поскольку оценка критического числа частиц, хотя и в узких пределах, но все же зависит от уравнения состояния холодного вещества, предпочтителен выбор такого уравнения состояния, детальные результаты расчетов с которым на основе уравнения гидростатического равновесия Толмена - Оппенгеймера - Волкова позволяют уверенно судить о значении критического числа частиц, соответствующего этому уравнению состояния. Результаты таких расчетов (Уилер и др., 1967) с уравнением состояния вещества Гаррисона - Уилера дают возможность оценить критическое число частиц как $1,4 \cdot 10^{57}$. Поэтому для численного исследования равновесных конфигураций выбрано* уравнение состояния Гаррисона - Уилера и число частиц 10^{58}, заведомо превышающее критическое.

Численное интегрирование уравнений проводилось в соответствии со схемой доказательства теоремы 58. Программа для расчетов на ЭВМ БЭСМ-6 составлена В. В. Сидоровым. Уравнение состояния вещества вводилось в виде таблиц вместе с соответствующими правилами интерполяции табличных данных. Расчеты велись на основе метода Рунге - Кутта (Березин, Жидков, 1960).

В фазовом пространстве массы равновесных конфигураций найдены четыре устойчивые равновесные конфигурации (Арифов, Сидоров, 1973, 1974). Сведения об экстремальных точках массовой поверхности! пріведены е табл. 1, а некоторые результаты расчетов для каждой из найденных устойчивых конфигураций изображены на рис. 11.

Физические и геометрические параметры одного из равновесных состояний характерны для типичного белого карлика: максимальная плотность массы $-2 \cdot 10^9$ г/см ^{3}, площадь поверхности -

Можно было бы взять, например, уравнение состояния Саакяна (1972). 10-5 площади поверхности Солнца (площадь поверхности в мире (III. 13) определяется как $4\pi\eta^2(R)$, а не $4\pi R^2$), гравитационный потенциал на поверхности в $1,8 \cdot 10^3$ раз больше гравитационного потенциала на поверхности Солнца. Но масса его в 5,5 раз превосходит массу обычного белого карлика.

Площади поверхности остальных конфигураций составляют приблизительно $10, 10^2$ и 10^3 площадей поверхности Солнца, а гравитационные потенциалы на их поверхности -

соответственно $1,4 \cdot 10^{-1}$ и $1,5 \cdot 10^{-1}$ гравитационного потенциала на поверхности Солнца.

Устойчивые равновесные конфигурации на крнвой массы в фазовом пространстве разделены энергетическим барьером, высота

Та 6 ли ца 1

ηJ, СМ	e	r_C, СМ	$\mu_C r/\mathbf{CM}^3$	p_c, eM^{-2}	R	$r_i(R)$ СМ	$\alpha \cdot 10^{-6}$
$5,48780 \cdot 10^{1:}$	$2,24950 \cdot 10^{-7}$			5*apbep*			1,23256
$1,92144 \cdot 10^{12}$	$6,40915 \cdot 10^{-7}$	$2,19 \cdot 10^{7}$	8,00	$1,1110^{-39}$	$4,49 \cdot 10^{7}$	$11,92\text{i} + 8 \quad 10' =$	1,23149
$1,13771 \cdot 10^{12}$	$1,08872 \cdot 10^{-6}$			$5 \propto pbep$			1,2; 241
$6,72633 \cdot 10^{11}$	$1,82936 \cdot 10^{-6}$	$1,37 \cdot 16^{8}$	11,0	$7,35 \cdot 10^{-38}$ |	$2,8610^{8}$	$6,72918 \cdot 10^{11}$	1,23225
$3,05773 \cdot 10^{11}$	$4,02163 \cdot 10^{-6}$			5*apbep*			1,23398
$2,35210 \cdot 10^{11}$	$5,21998 \cdot 10^{-6}$	$4,81 \cdot 10^{8}$	49,0	$4,81 \cdot 10^{-36}$	$1,04 \cdot 10^{9}$	$2,36248 \cdot 10^{11}$	1,23342
$3,33490 \cdot 16^{8}$	$2,06502 \cdot 10^{-3}$			$5apb \in p$			1,77626
$8,12553 \cdot 10^{7}$	$1,04905 \cdot 10^{-2}$	$5,11 \cdot 10^{7}$	$2 \cdot 10^{9}$	$4,18 \cdot 10 - 23$ |	$1,41 \cdot 10^{8}$	$12,21884 \cdot 10^{8}$	1,61296
$4,65540 \cdot 10^{7}$	$1,75724 \cdot 10^{-2}$			G apbep			$1,6 + 246$

которого колеблется от 0,013 до 10%. Обращает на себя внимание большой дефект массы всех конфигураций - от 35 до 50% суммы масс частиц в свободном состоянии. Благодаря существованию нескольких устойчивых конфигураций при заданном полном числе частиц и большому дефекту массы оказываются энергетически разрешенными процессы перехода между состояниями с выделением большого количества энергии. Разумеется, такие переходы запрещены в пределах одного фазового пространства, так как при неизменном числе частиц в объекте преодоление энергетических барьеров между различными состояниями невозможно без сообщения дополнительной энергии извне. Но оно становится допустимым, если существует какой-либо механизм выброса некоторого числа частиц.

Пусть, например, наряду с объектом, число частиц которого равно 10^{58}, имеется объект с другим числом частиц $N + \Delta N$, где $\Delta N \ll N = 10^{58}$. Можно утверждать, что кривые массы этих объектов в пересчете на одну частицу мало отличаются друг от друга, и, следовательно, второй объект может оказаться в одной из нескольких устойчивых равновесных конфигураций, подобных конфигурациям первого объекта. Если второй объект находится в одном из верхних состояний (рис. 11), то вместе с выбросом ΔN частиц он может перейти из состояния с меньшим дефектом массы и большим числом частиц в состояние с большим дефектом и меньшим числом частиц. В зависимости от состояний, между которыми происходит переход, он сопровождается выделением энергии от нескольких тысячных долей до одной массы Солнца и более и увеличением плошади поверхности, а поэтому и светимости, от 10 до 10^8 раз.

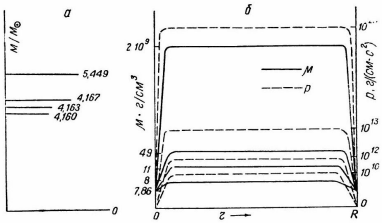


Рис. 11. Схема энергетических уровней (в единишах массы Солнца $M_\odot$) тела, состояшего из 10^{58} частиц (a), и распределение плотности массы μ и давления p вдоль радиvса равновесных устойчивых конфигурации (σ). Термодинамическое состояние вещества описывается уравнением ГаррисонаУилера. Сумма масс свободных частиц равна $8,328 M_\odot^A$. Каждому уровню соответствует локальный минимум на массогой крирой в фазэвом пространстве $\{x_0, \Upsilon_0,\ \text{p}\ _0\}$. Параметры-максимальная плотность массы, площадь поверхнсти и гравитационный потенциал на поверхности верхнего уровня характерны для белого карлика, но масса его более чем в 5 раз превосходит массу тичичного белого карлика.

Поведение кривой массы в фазовом пространстве при $\eta_0 \to 0$ указывает на то, что помимо четырех равновесных устойчивых конфигураций, приведенных в табл. 1, существует еще одна, на которую необходимо особо обратить внимание. Несмотря на ее «экзотичность», трудно удержаться от искушения и не вложить в нее определенный физический смысл. Эта равновесная конфигурация соответствует абсолютному минимуму массы (нижнее состояние на рис. 11). Параметры, характеризующие ее,

получены экстраполяцией численных результатов: $e \to \infty, \mu_0 \to \infty, r_c \to 0$, $\mu_c \to \infty, R \to 0, \eta_R \to 0, \alpha \to 0$, когда $\eta_0 \to 0$, а $N = 10^{58}$. В этом состоянии полная масса объекта равна нулю, дефект массы-100%, сумма масс покоя свободных частиц, составляющих конфигурацию, полностью скомпенсирована отрицательной энергией гравитационного взаимодействия. Вместе с массой исчезают и геометрические характеристики конфигурации - объем и площадь поверхности, причем $\eta(R) \to \alpha$, все время оставаясь больше α.Г равитационное поле конфигурации также исчезает, а пространственно-временной континуум становится миром Минковского, исключая сингулярную центральную точку, в которой кривизна мира бесконечна. Единственной, помимо сингулярности, величиной, характеризующей объект в этой конфигурации, остается полное число частиц N.

Процесс, приводящий к такому состоянию, и само равновесное состояние уместно назвать гравитационной аннигиляцией и гравитационным вакуумом. Состояние гравитационного вакуума не противоречит известным принципам и законам физики, в том числе и закону сохранения числа частиц. Действительно, частицы здесь не исчезают бесследно, а переходят в скрытое состояние, в котором они связаны гравитационным взаимодействием и не наблюдаемы непосредственно. Объект в целом также не наблюдаем в этом состоянии ни в каких процессах, за исключением одного возможного. Если объекту сообщить необходимое количество энергии, то он перейдет в «возбужденное» состояние, в котором уже будет обладать гравитационной массой и всеми другими наблюдаемыми величинами, сопутствующими ей. Наименьшее количество энергии, необходимое для перевода состояния гравитационного вакуума с $N = 10^{58}$ в наблюдаемое, соответствует массе первого «возбужденного» равновесного состояния холодного катализированного вещества с тем же числом частиц, т. е. массе $4,160M_{\cdot}$

Допустим таке и процесс перехода из любого равновесного состояния с $M > 0$ в состояние гравитационного вакуума с меньшим числом частиц. Выбрасываемая часть вещества уносит всю массу. объекта, а оставшаяся часть перестает быть наблюдаемой. Поэтому для внешнего наблюдателя, если он не учитывает состояние гравитационного вакуума, такой процесс выглядит как полное распыление некоторого объекта, состоявшего до этого только из выброшенных объектом частиц и обладавшего до распыления отрицательным дефектом массы. Величина этого дефекта зависит от числа выброшенных частиц и может быть очень большой.

Какой смысл имеет неограниченное увеличение плотности массы объекта в состоянии гравитационного вакуума? Само по себе бесконечное значение плотности массы при том, что полная масса равна нулю, не представляет никакой физической трудности. Но надо принять во внимание, что, по всей вероятности, уравне- ния классической (неквантовой) теории тяготения, каковыми являются уравнения Эйнштейна, справедливы при плотности массы, не превышающей значения $\mu_g \approx 5 \cdot 10^{93}$ г/смм ^{3}, полученной комбинированием мировых постоянных (скорость света, постоянные Планка и Ньютона). Если при $\eta_0 \to 0$ массы равновесных конфигураций в фазовом пространстве становятся значительно меньше масс типичных элементарных частиц (от массы электрона до нескольких масс нейтрона), в то время как растущие плотности массы конфигураций все еще не достигают значения μ_g, то очевидно, что сделанный на основании экстраполяции численных. результатов вывод о существовании состояния гравитационного вакуума объекта как абсолютно устойчивого равновесного состояния - предельной точки $\alpha = 0$, когда $\eta_0 = 0, e = \infty$ - является разумным. Если же плотности массы конфигураций достигают μ_g при конечных значениях их полной массы, то можно (хотя и не обязательно) допустить, что состояние стабилизируется за счет квантовых эффектов. Тогда предельной точкой $\eta_0 = 0, e = \infty$ в действительности является не гравитационный вакуум, а устойчивое равновесное состояние с конечной и отличной от нуля полной массой. Однако конкретные численные значения величин, характеризующих эту предельную конфигурацию, не могут быть получены интегрированием сугубо классических уравнений поля тяготения. В связи с таким возможным устойчивым равновесным состоянием объекта, обладающего $N = 10^{58}$, уместно напомнить рассуждения М. А. Маркова (1966) о гравитационной природе массы элементарных частиц.

Из численного анализа (Арифов, Сидоров, 1973, 1974) поведения кривой массы в фазовом пространстве с достоверностью следует сушествование предельной точки $\eta_0 = 0, e = \infty$, соответствующей устойчивой равновесной конфигурации, однако характер этой

предельной точки - гравитационный вакуум ($\alpha = 0$) или малая, но отличная от нуля масса,-остался невыясненным, поскольку из-за большого объема вычисления пришлось прекратить еще до того, как плотность массы достигла μ_g.

27.3.8 37. Compact Objects with Large Mass Defect

Большая часть дефекта массы каждой из четырех равновесных устойчивых конфигураций, найденных для сверхкритического числа частиц 10^{58} (см. предыдущий параграф), обусловлена именно гравитационным взаимодействием, а не короткодействующими силами, ответственными за термодинамическое состояние вещества. Действительно, гравитационный дефект массы $\Delta_1 M$ конфигурации определяется формулой

$$\Delta_1 M = 4\pi \int_0^R \mu r^2 dr - M,$$

первый член правой части которой представляет собой значение массы вещества, занимающего тот же объем и распределенного с той же плотностью, что и в конфигурации. Его можно переписать так:

$$4\pi \int_0^R (B + \mu_s)\, n\eta^2 dr$$

здесь $m_s = 1,659 \cdot 10^{-24}$Г, что составляет 1/56 массы атома ^{56}Fe; $B = \frac{\mu}{n} - m_s$. Функция B зависит от уравнения состояния вещества, и ее значения для уравнения состояния Гаррисона-Уилера изменяются в пределах $0 \leqslant B < 2 \cdot 10^{-27}$ г, когда μ изменяется от 7,86 до $2 \cdot 10^9$ г/см ^{3}. Поэтому для каждой из конфигураций имеет место равенство

$$4\pi \int_0^R \mu\eta^2 dr = m_s N(1 + \varepsilon).$$

где $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1,2 \cdot 10^{-3}$. Отношение m_s к массе свободного нуклона m_0 из-за ядерного дефекта масс отличается от единицы не оолее чем на 0,01, поэтому

$$4\pi \int_0^R \mu\eta^2 dr = 0,99 m_0 N(1 + \varepsilon).$$

Таким образом, гравитационный дефект отличается от дефекта массы $\Delta_2 M$

$$\Delta_2 M = m_0 N - M$$

конфигураций не более чем на сотую долю суммы масс свободных частиц. Поэтому в процессе конденсации 10^{58} частиц в эти конфигурации выделяется энергия гравитационного взаимодействия в количестве от 0,34 (верхнее состояние на рис. 11) до 0,49 (нижнее состояние) суммы их масс.

Предположим, что частица с массой m_0, покоящаяся на бесконечности, адиабатически переносится на поверхность изолированного тела, находящегося в равновесном устойчивом состоянни. Под адиабатичностью понимается следующее: в процессе переноса частица совершает работу за счет поля тяготения тела, или затрачивается энергия по преодолению только гравитационных сил. Внутреннее состояние частицы не меняется, а какие-либо процессы, связанные с потерей или выделением негравитационной энергии (например, электромагнитное излучение и пр.,), отсутствуют. Найдем количество энергии, освободившееся прн таком переносе.

Рассмотрим две точки $M_1\,(r_1, \theta, \varphi)$ и $M_2\,(r_2, \theta, \varphi)$ мнра (III. 13) и свободную частицу m_0, движущуюся вдоль радиуса, которому принадлежат эти точки. Полная энергия частицы, являющаяся интегралом движения (см. §33), определяется формулой

$$E = \frac{m_0 e^{\lambda/2}}{\sqrt{1-v^2}}$$

Пусть в точке M_1 скорость частицы равна нулю, тогда $E_1 = m_0 e^{\lambda_1/2}$. В точке M_2 частица имеет скорость v_2, а ее полная энергия складывается из кинетйческой, включающей энергию покоя, и потенциальной (гравитационной). Если в точке M_2 частица мгновенно остановится, то ее энергия станет равной $E_2 = m_0 e^{\lambda_2/2}$, а разность 9нергий свободно движущейся и остановленной частицы выделится в виде работы, совершенной ею:

$$W = \frac{m_0 e^{\lambda_2/2}}{\sqrt{1-v_2^2}} - E_2 = m_0 \left(e^{\lambda_1/2} - e^{\lambda_2/2}\right).$$

Нетрудно видеть, что освободившаяся энергия равна разности гравитационной энергии частицы в этих точках:

$$W = E_g(1) - E_g(2)$$

При использовании формулы (III. 50) для гравитационной энергии необходимо учитывать полную энергию рассматриваемого состояния частицы. Например, гравитационные энергии движущейся и остановленной частицы в точке M_2 отличаются. Формула (III. 67) еще раз оправдывает именно такое определение гравитационной энергии*. Если точка M_1 удалена на бесконечность, а M_2 лежит на поверхности тела, то формула (III. 66) принимает вид

$$W = m_0 \left(1 - e^{\lambda(R)/2}\right)$$

Так как движение свободной частицы вдоль радиуса отвечает условию адиабатичности, то последняя формула и выражает искомую энергию, освобождающуюся при адиабатическом переносечастицы из бесконечности на поверхность тела. При этом в полную энергию тела вносится дополнительная порция энергии (энергия внесения), равная

$$m_0 - W = m_0 e^{\lambda(R)/2}$$

Зельдович (1962) показал для решения Толмена - Оппенгеймера - Волкова, что произведение энергии внесения одной частицы в некоторую произвольную точку равновесной конфигурации на химический потенциал в этой точке не зависит от точки внесения. Эта независимость есть следствие экстремальности массы равновесной конфигурации относительно изменення плотности массы, сохраняющего ее центральную симметрию. Поскольку в общем

Вообще, оно справедливо только для статического мнра и не может быть распространено на нестатические случаи. решении масса равновесной конфигурации также экстремальна (следствие 20), то теорема Зельдовича справедлива и в общем случае.

Теорема 59. Произведение энергии внесения одной частицы из бесконечности в некоторую точку равновесной конфигурации на химический потенциал в этой точке, отнесенное к единице массы покоя этой частицы, не зависит от точки внесения.

Следовательно,

$$\frac{d\mu}{dn} e^{\lambda/2} = m_s e^{\lambda(R)/2}$$

поэтому

$$\frac{dM}{dN} = m_s e^{\lambda(R)/2}$$

Поскольку в равновесных устойчивых конфигурациях все функции и постоянные конфигурации при заданном уравнении состояния вещества зависят только от полного числа частиц (следствие 21), то равенство (III. 69) можно проинтегрировать и представить массу тела в виде

$$M = m_s \int_i^N /\bar{\alpha} 1 - \frac{\alpha(N)}{r_{iR}(N)} dN$$

или

$$\frac{M}{m_0 N^\top} = \frac{m_s}{m_0} \frac{1}{N} \int_0^N \sqrt{1 - \frac{\alpha(N)}{r_{iR}(N)}} dN.$$

Отношение $m_{s'} m_0 \approx 1$ независимо от N. При малых N гравитационны.i дефект массы также мал, поэтому $\frac{A}{m_0 N} \to 1$, если $N \to 0$ и. следовательно, $\frac{\alpha}{r_R} \to 0$, когда $N \to 0$. При $N = 10^{5s}$ отношсн:е $\frac{M}{m_0 N}$ имеет значение $\approx 0,5$ для трех нижних равновесных устойчивых конфигураций и 0,65 для верхней, а $\frac{\alpha}{r_R} - c0$ - ответственно $0,64 \cdot 10^{-6}; 0,18 \cdot 10^{-5}; 0,52 \cdot 10^{-5}$ и $0,73 \cdot 10^{-2}$. Следовательно, при $N < 10^{-8}$ существуют равновесные устойчивые конфигурации, для которых имеет место неравенство

$$\frac{\alpha}{r_R} > 0,58 \text{ нли даже } \frac{\alpha}{r_R} > 0,75.$$

К этому же выводу можно прийти и другим путем. Рассмотрим одну из конфигураций тела с $N = 10^{58}$, например, нижнее состояние на рис. 11. Для того чтобы удалить на бесконечность тонкий слой вещества с поверхности конфигурации, толщина которого определяется условием равенства числа частиц в нем числу частиц единичного объема поверхности, необходимо затратить энергию

$$\mu(R) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\eta_R}}\right) \approx 0,32 \cdot 10^{-6} \mu(R).$$

Эта энергия, хотя и уменьшает гравитационный дефект массы, равный 0,49 суммы масс свободных частиц, но весьма незначительно. Поскольку энергия, затрачиваемая на «растаскивание» тела слой за слоем, должна в конечном счете полностью скомпенсировать дефект, то после удаления ряда слоев получим конфигурацию, в которой работа по удалению вещества с поверхности превышает коэффициент гравитационной упаковки.

Назовем тела, для которых $\frac{\alpha}{r_{1R}} \sim 1$, компактными.

Теорема 60. Если термодинамическое состояние вещества изолированного тела описывается уравнением Гаррисона-Уилера, то существуют компактные устойчивые равновесные конфигурации с большим гравитационным дефектом массы, полное число частиц которых меньше 10^{58}, масса не превышает нескольких масс Солнца, а отношение α/η_R больше 0,58 и 0,75.

Для поиска и отождествления этих компактных конфигураций применимы те же астрономические методы исследования процесса аккреции вещества на компактную конфигурацию в тесных двойных системах, которые используются для поиска черных дыр и нейтронных звезд (Сюняев, Шакура, 1974). Если в случае нейтронных звезд аккреция вещества сопровождается освобождением $\leqslant 0,2$ массы покоя, то при аккреции на компактные конфигурации освобождается значительно большая часть массы покоя, превышающая 0,35 и 0,50 соответственно.

Теорему 60 ни в коем случае нельзя понимать в смысле утверждения, что компактные конфигурации холодного вещества отсутствуют, если число частиц превышает 10^{58}. Чтобы судить 0 зависимости отношения α/η_R от числа частиц и об изменении остальных величин, характеризующих равновесные устойчивые конфигурации, в области $N > 10^{58}$, необходим соответствующий численный анализ.

27.3.9 38. Why a Nonrelativistic Analog Does Not Exist?

На больших расстояниях от источника в области D_1 мира общее статическое решение (теорема 48) удовлетворяет принципу соответствия 2. Это, впрочем, и не удивительно, так

как значе- ния постоянных интегрирования уравнений Эйнштейна во внешней области D_1 при получении решения выбирались в согласии с требованиями именно принципа соответствия 2. Несколько иначе обстоит дело во внешней области D_3 и внутренней D_2. Если $\beta = 1$, т. е. область D_3 отсутствует, то решение имеет нерелятивистский аналог. Под этим понимается следующее: в случае слабого гравитационного поля, когда полная масса тела мала $\alpha \ll \eta_R$, и $p \ll \mu$, распределения давления и плотностей массы и числа частиц мало отличаются от соответствующих функций в классическсй теории тяготения Ньютона, а метрика мира мало отличается от метрики мира Минковского, так что в пределе $\alpha \to 0$ это отличие становится сколь угодно малым. В приближении слабого поля уравнение (III. 43), которому удовлетворяет логарифм абсолютного значения временного компонента метрики, сводится к уравнению Пуассона (I. 33), а релятивистское уравнение (III. 5) гидростатического равновесия-к равенству градиента давления гравитационной силе.

Если же $\beta > 1$, то нерелятивистского аналога, как уже отмечалось в \$30, не существует. Причина заключается в том, что гравитационное поле в этом случае «сильное» даже тогда, когда $\alpha \to 0$. Это отличительное свойство решения объясняется, конечно, сингулярностью метрики на мировой линии центра и отталкивательным характером гравитационного поля в области мира, ограниченной критической гиперповерхностью, и проявляется, в частности, в большом значении гравитационного дефекта массы источника. В общем случае гравитационный дефект массы определяется формулой

$$\Delta_1 M = 4\pi \int_0^R \mu\eta^2 \left(1 - \frac{r_1'}{\beta}\right) dr.$$

Из формул (III. 21), (III. 22) и (III. 34 а) следует, что $\eta' \leqslant 1$, причем $\eta'(0) = 1$ и $\eta'(r) < 1$ в области $0 < r \leqslant 1R$, если $\beta = 1$. Поэтому $\Delta_1 M > 0$. Но при стремлении к нулю массы α величина η' стремится единице во всех точках D_2, поэтому $\Delta_1 M \to 0$, когда $\alpha \to 0$. В теории Ньютона понятие гравитационного дефекта массы вообще отсутствует, а полная масса источника равна интегралу по его объему от плотности массы. Иначе, гравитационный дефект массы в классической теории тяготения строго равен нулю. Стремление к нулю гравитационного дефекта массы вместе с самой массой, когда $\beta = 1$, является, таким образом, еще одним выражением совпадения в нерелятивистском пределе релятивистского статического решения с аналогичным решением классической теории.

Пусть теперь $\beta > 1$. Функция η' в об.тасти D_2 изменяется от наибольшего значения на внутренней границе, где $\eta'(0) > 1$, до значения $\eta'(R) < 1$ на внешней границе. Поэтому сомножитель

$$\left(1 - \frac{r_1'}{p}\right)$$

под знаком интеграла в (III. 71) может вообще быть знакопеременной функцией в D_2 при конечных, отличных от нуля, значения α. Поэтому не исключено, что гравитационный дефект массы принимает в некоторых равновесных конфигурациях не положительное, а отрицательное значение. Если же $\alpha \to 0$ при постоянном значении N, то, как это следует из (III. 52)-(III. 54), $\mathscr{E}$ остается конечной и большей нуля величиной, а гравитационный дефект массы растет до наибольшего из возможных значения.

27.3.10 39. Small Rotational Perturbations

Исследование малых возмущений, нарушающих сферическую симметрию, преследует две цели. Первая состоит в решении принципиальной проблемы устойчивости сферически-симметричного решения уравнений тяготения относительно малых отклонений от сферической симметрии. Строгая сферическая симметрия является идеализацией с целью максимального упрощения физической задачи. На самом деле даже в абсолютно изолированном теле имеются флуктуации плотности массы, которые нарушают сферическую симметрию тела. Поэтому точное сферически-симметричное решение уравнений только тогда пригодно к описанию физической реальности в первом

приближении, когда оно способно выдержать испытание на устойчивость относительно малых произвольных отклонений функций от сферической симметрии.

Вторая цель связана с потребностью детально изучить поведение физической системы вблизи ее равновесного состояния. С одной стороны, понятие физической системы вблизи ее равновесного состояния вмещает в себя достаточно широкий класс задач, с другой, математической точки зрения, состояние системы вблизи равновесного может быть изучено сравнительно легко, поскольку его можно представить как возмущенное равновесное состояние, что позволяет линеаризовать уравнения. Это же относится к малым возмущениям, не нарушающим сферической симметрии, но нарушающим статичность решения, - малым радиальным колебаниям тела.

Произвольные малые возмущения изолированного сферически-симметричного тела подразделяются на два типа - вращательные и колебательные. Вращательные возмущения представляют интерес для астрофизики, так как практически любой астрофизический объект обладает отличным от нуля моментом количества движения. Первыми рассмотрели проблему устойчивости сферически-симметричного решения уравнений Эйнштейна Редже и Уилер (Regge, Wheeler, 1957). Они получили уравнения для возмущения метрики обоих типов во внешней области и проанализировали возмущение метрики Шварцшильда (III. 36) без учета возмущения метрики внутри вещества, или хотя бы поведения возмущенной метрики вблизи границы тела. Затем с использованием уравнений Редже и Уилера эта задача была исследована (Vishveshwara, 1970; Edelstein, Vishveshwara, 1970) для внешней области, простирающейся вплоть до гравитационного радиуса. Вишвешвара пришел к выводу об устойчивости гравитационного поля невращающейся черной дыры относительно нерадиальных возмущений, в том числе и вращательных. Помимо асимптотического поведения метрики на бесконечности, Вишвешвара существенно использовал условие регулярности возмущения метрики на гравитационном радиусе в координатах Крускала. К такому же выводу пришел Монкриф (Moncrief, 1974 a), исходя из вариационного принципа для возмущения внешнего поля черной дыры.

Некоторые вопросы устойчивости внутреннего решения исследованы Чаидрасекаром (Chandrasekhar, 1964, 1965) и др. (Misner, Z.apolsky, 1964; Moncrief, 19746; Steven, 1975; Friedman, Schutz, 1975; Taub, 1969: Schutz, 1972; Thorne, Campolattaro, 1967, 1968; Price, Thorne, 1969; Thorne, 1969a, б; Campolattaro, Thorne, 1970). В большинстве работ использовались вариационный принцип в той ил иной формс, или энергетические соображения, и главным образом удслялсь виимание устойчивости равновесных состояний относительно радиальных возмущений. Несферические возмущения во внутрнней области изучались, например, Монкрифом (Moncrief, 19746), установившим, в частности, достаточное условие устойчивости равновесия относительно колебательных возмущений с $L \geqslant 2$.

Устойчивость внешнего решения Шварцшильда освещалась и в других работах (Гурович, 1965; Дорошкевич, Зельдович, Новиков, 1965), посвященных малым отклонениям от сферической симметрии медленно вращающихся тл. В отличие от упомянутых выше, в них рассмотрено внешиее поле протяженного, а не сосредоточенного в центре тела, и решение дифференциального уравнения для функции возмущения сведено к интегралу, но рассмотрение ограничено сугубо частным случаем аксиально-симметричного вращения. В общем же случае дифференциального вращения протяженного тела аксиальная симметрия отсутствует.

Чтобы исследовать равновесное состояние сферического тела, определяемое общим решением (III. 33)-(III. 35), на устойчивость относительно малых возмущений вращательного типа и получить функции, описывающие состояние и метрику мира медленно вращающегося тела (Арифов, Левченко, 1976; Арифов, Залалетдинов, 1981), необходимо рассмотреть вращате.ьное возмущение самого общего вида без специального предположения об аксиальной симметрии, и не только во внешней, но и во внутренней области с учетом сішивания функций возмущения на праніце тела.

Пусть $g_{i\nu\upsilon}$ - метрический тензор мира (III.13), а $\bar{g}_{\mu\nu}$ - возмущенный метрический тензор, так что

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$$

Так как невозмущенная метрика статическая, а вращение тела и соответствующее ему возмущение метрики вращательного типа описываются функциями, явно не зависящими от времени (стационарная метрика), то $\delta g_{\mu\nu}$ являются малыми функциями сферических

координат r, θ и

Изучение произвольного возмущения можно свести к изучению отдельных мод разложения по сферическим функциям Y_L^M:

$$Y_L^M = e_1^{i\cdot\gamma} P_L^M(\cos\theta), 0 \leqslant M \leqslant L$$
$$\mathrm{Re}\left(Y_L^M\right) \equiv Y_L^{-M} = \cos(M\varphi) P_L^M(\cos\theta),$$
$$\mathrm{Im}\left(Y_L^M\right) \equiv Y_L^M = \sin(M\varphi) P_L^M(\cos\theta),$$

где P_L^M - присоединенные функции Лежандра. Это позволяет привести матрицу δg_{μ}, возмущения метрики к удобному для анализа виду (Редже, Уилер, 1957). Действительно, компоненты g_{02} и g_{03} метрики образуют двумерный вектор относительно поворотов сферы (ρ, φ), другой вектор образуіот компоненты g_{12} и g_{13}, три компонента g_{22}, g_{23} и g_{33} группируются в двумерный тензор 2-го ранга, а остальные компоненты g_{00}, g_{01} и g_{11} преобразуются как скаляры. В качестве первого сферического вектора данной моды разложения можно взять вектор

$$h_0(r) g_{ik} e^{nk} \frac{\partial Y_L^M}{\partial \varkappa^n}, i, k, n = 2, 3.$$

Здесь $h_0(r)$ - произвольная малая функция, g_{ik} - етрический тензор, а e^{nk} - тензор Леви-Чивита на сфере.

Однако он содержит только одну произвольную функцию вместо двух функций, через которые выражаются соответствующие моды δg_{02} и δg_{03}. Одна из этих последних функций отражает имеющийся произвол в выборе системы координат. В частности, инфинитезимальное преобразование

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(r, \theta, \varphi)$$

оставляет без изменения метрику мира (III. 13), но трансформирует возмущенную метрику к виду

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu.\nu} + \delta g_{\mu\nu\nu} - \xi_{i\mu;\nu} - \xi_{\nu,\mu}$$

Поэтому специальным выбором $\xi^0(r, \theta, \varphi)$ два компонента $\bar{g}_{02}$ и $\bar{g}_{03}$ можно совместить с вектором на сфере (III. 22). Аналогично приводятся и компоненты $\bar{g}_{12}$ и $\bar{g}_{13}$, для чего используется функция $\xi^1(r, \theta, \varphi)$. А с помощью оставшихся пвух функций $\xi^2(r, \theta, \varphi)$ и $\xi^3(r, \theta, \vartheta)$ полезно удовлетворить равенствам

$$\bar{g}_{22} = 0 \text{ и } \bar{g}_{33} = \sin^2\theta \bar{g}_{22}.$$

Для каждой моды матрица возмущения метрики теперь имеет следующий вид:

$$\delta g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\lambda} H_0, & H_1, & -h_0 \frac{iM}{\sin\theta}, & h_0 \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \\ H_2, & -h_1 \frac{iM}{\sin\theta}, & h_1 \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} & \\ S & \eta^2 K, & 0 & \\ & & & \eta^2 \sin^2\theta K \end{pmatrix} Y_L^M.$$

Амплитуды H_0, H_1, H_2, K, h_0 и h_1 возмущения являются малыми функциями радиальной координаты и чисел L и M, характеризующих данную моду. Они должны удовлетворять условиям (Хлюбая из амплитуд):

а) асимптотическое поведение $-X \to 0$, когда $r \to \infty$;

б) поведение на границах $-[X]_{\Sigma_{\mathrm{mat}}} = [X']_{\Sigma_{\mathrm{mat}}} = 0$,

$$[X]_{J_s} = [X']_{\sigma_s} = 0$$

в) поведение в центре $-X \to 0$, когда $\eta \to 0$.

Второе условие обеспечивает гладкое сшивание метрики на поверхностях возможного разрыва ее непрерывности или непрерывности ее производных, а последнее следует из физического требования отсутствия малого вращательного возмущения в окрестности мировой линии центра.

Подставим в левую часть уравнений (I.17) Эйнштейна $\bar{g}_{\mu\nu}$, а в правую - возмущенный тензор энергии-импульса $\bar{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu}$, который очевидным образомм выражается чере $???_m$ искомые возмущения плотностей массы $\delta\mu$, давления δp и четырехскорости δu_α (вследствие стационарности компоненты δu^1 и δu_1 равны нулю). Получим десять уравнений, связывающих функции возмущения метрики и вещества и их производные. Они линейны по функциям возмущения, поскольку произведениями функций возмущения и их степенями выше первой можно пренебречь из-за малости возмущения:

$$\left\{ H_0'' + \left(\lambda' + 2\frac{\eta_1'}{\eta} \right) H_0' - \frac{L(L+1)}{\eta^2} H_0 + \frac{1}{2}\lambda' H_2' + x(\mu + 3p)H_2 - \right.$$
$$\left. -\lambda' K' \right\} Y_L^M = -x(\partial\mu + 3\dot{\partial}p),$$
$$\left\{ x(\mu + p) - \frac{L(L+1)}{2\eta^2} \right\} H_1 Y_L^M = 0,$$
$$iM \left\{ h_0'' - \frac{1}{2}\lambda' h_0' + \left[2\frac{\lambda'\eta'}{\eta} + x(\mu - p) - \frac{L(L+1)}{\eta^2} \right] h_0 \right\} \frac{Y_L^M}{\sin\theta} +$$

$$
+\left(H_1'+\frac{1}{2}\lambda' H_1\right)\frac{\partial Y_L^M}{\partial\theta}=-2x(\mu+p)e^{\lambda/2}\partial u_2
$$

$$
\left\{h_0''-\frac{1}{2}\lambda' h_0+\left[2\frac{\lambda'\eta'}{\eta}+x(\mu-p)-\frac{L(L+1)}{\eta^2}\right]h_0\right\}\sin\theta\frac{\partial Y_L^M}{\partial\theta}-
$$

$$
-iM\left(H_1'+\frac{1}{2}\lambda' H_1\right)Y_L^M=2x(\mu+p)e^{\lambda/2}\delta u_3,
$$

$$
\left\{K''+2\frac{\eta'}{\eta}K'-\frac{1}{2}\left(H_0''+\lambda' H_0'\right)-\left(\frac{\eta'}{\eta}+\frac{1}{4}\lambda'\right)H_2'+\right.
$$

$$
\left.+\frac{1}{2}\left[x(\mu-p)-\frac{L(L+1)}{\eta^2}\right]H_2\right\}Y_L^M=\frac{1}{2}x(\partial p-\delta\mu),
$$

$$
\left\{H_0'-K'+\left(\frac{1}{2}\lambda'-\frac{\eta'}{\eta}\right)H_0+\left(\frac{1}{2}\lambda'+\frac{\eta'}{\eta}\right)H_2\right\}\frac{\partial Y_L^M}{\partial\theta}-
$$

$$
-iM\frac{(L-1)(L+2)}{\eta_2}h_1\frac{Y_L^M}{\sin\theta}=0
$$

$$
iM\left\{H_0'-K'+\left(\frac{1}{2}\lambda'-\frac{\eta'}{\eta}\right)H_0+\left(\frac{1}{2}\lambda'+\frac{r_1'}{\eta}\right)H_2\right\}Y_L^M+
$$

$$
+\frac{(L-1)(L+2)}{\eta^2}h_1\sin\theta\frac{\partial Y_L^M}{\partial\theta}=0
$$

$$
\left\{K''+\left(\frac{1}{2}\lambda'+4\frac{\eta'}{\eta}\right)K'-\frac{(L-1)(L+2)}{\eta^2}K-\frac{r_1'}{\eta}\left(H_0'+H_2'\right)-\right.
$$

$$
\left.-\left[\frac{2}{\eta^2}-x(\mu-p)\right]H_2\right\}Y_L^M+\frac{1}{r_1^2}\left(H_2-H_0\right)\frac{\partial^2 Y_L^M}{\partial\theta^2}+
$$

$$
+2\frac{iM}{\eta^2\sin\theta}\left(h_1'+\frac{1}{2}\lambda' h_1\right)\left(\frac{\partial Y_L^M}{\partial\theta}-\operatorname{ctg}\theta Y_L^M\right)=x(\partial p-\delta\mu),
$$

$$
iM\left(H_2-H_0\right)\left(\frac{\partial Y_L^M}{\partial\theta}-\operatorname{ctg}\theta Y_L^M\right)+\left(h_1'+\frac{1}{2}\lambda' h_1\right)\times
$$

$$
\times\left(\cos\theta\frac{\partial Y_L^M}{\partial\theta}-\sin\theta\frac{\partial^2 Y_L^M}{\partial\theta^2}-\frac{M^2}{\sin\theta}Y_L^M\right)=0
$$

$$
\left\{K''+\left(\frac{1}{2}\lambda'+4\frac{\eta'}{\eta}\right)K'-\frac{(L-1)(L+2)}{\eta^2}K-\frac{\eta'}{\eta}\left(H_0'+H_2'\right)+\right.
$$

$$
\left.+\left[x(\mu-p)-\frac{2}{\eta^2}\right]H_2\right\}\sin^2\theta Y_L^M+\frac{M^2}{\eta^2}\left(H_0-H_2\right)Y_L^M+
$$

$$
+\frac{\sin\theta\cos\theta}{\eta^2}\left(H_2-H_0\right)\frac{\partial Y_L^M}{\partial\theta}+\frac{2iM}{\eta^2}\left(h_1'+\frac{1}{2}\lambda' h_1\right)\times
$$

$$
\times\left(\cos\theta Y_L^M-\sin\theta\ \frac{\partial Y_L^M}{\partial\theta}\right)=x\sin^2\theta(\partial p-\delta\mu).
$$

Эти уравнения имеют место как во внутренней D_2, так и в обеих внешних областях D_1 и D_3 определения (III. 33) - (III. 35) функций $\lambda(r)$ и $\eta(r)$. Во внутренней области их необходимо дополнить двумя уравнениями

$$
\lambda p=\frac{dp}{d\mu}\delta\mu,
$$

$$
e^{\lambda/2}H_0Y_L^M=2\delta u_0.
$$

Первое уравнение отражает тот факт, что при малых возмущения термодинамическое состояние вещества остается неизменным, по крайней мере, в линейном приближении.

Вторым учтено свойство единичности четырехскорости. При выводе уравнения (III. 73) использовано равенство (III. 84) без изменения области его применимости.

Полученная система девяти обыкновенных дифференциальных и трех алгебраических уравнений представляет собой совместную систему уравнений поля для шести функций возмущения метрики мира и шести функций, характеризующих возмущение веществаего массы-энергии, давления и скорости,-обусловленных медленным вращением источника.

Так как анализ уравнений (III. 73)-(III. 84) отличается некоторыми особенностями для случаев $L = 1$ и $L > 1$, то рассмотрим их порознь. Пусть $L > 1$. Тогда из уравнений (III.78) и (III.79) следует

$$h_1 = 0$$

а из (III. 80) и (III. 82)- $H_2 = H_0 \equiv H$. Теперь (III. 78) и (III. 80) можно переписать в виде

$$H' - K' + \lambda' H = 0$$

$$\left\{ K'' + \left(\frac{1}{2}\lambda' + 4\frac{\eta'}{\eta_1} \right) K' - \frac{(L-1)(L+2)}{r_1^2} K - 2\frac{\eta'}{\eta} H' + \left[x(\mu - p) - \frac{2}{\eta^2} \right] H \right\} Y_L^M = x(\grave{\jmath} p - \grave{\imath}\mu).$$

Вычитая (III. 87) из удвоенного уравнения (III. 77) и используя (III. 86), предварительно продифференцировав его, получаем

$$\lambda' H' + \left[\lambda'^2 + 2\frac{\lambda'\eta'}{\eta} + \frac{(L-1)(L+2)}{\eta^2} - x(\mu + 3p) \right] H - \\ - \frac{(L-1)(L+2)}{\eta^2} K = 0.$$

Аналогитно этому (вычитанием (III.87) из (III.73)) получается и следующее уравнение:

$$\left\{ \lambda' H' + \left[\lambda'^2 + 2\frac{\lambda'\eta'}{\eta} + \frac{(L-1)(L+2)}{r_i^2} + x(\mu - p) H - \right. \\ \left. - \frac{(L-1)(L+2)}{\eta^2} K \right\} Y_L^M = 4xi, p.$$

Уравнения (III. 81) и (III. 82) удовлетворяются в силу (III. 85) и (III. 87).

Уравнение (III.88) определяет значение функции H на внешней границе. В самом деле, вычитая левые части (III. 88) для внутренней и внешней сторон внешней границы Σ_{mat} и учитывая (III.6), (III.7) и условие б) сшивания, получаем

$$H(R) = 0.$$

После исключения функции K из уравнений (III.86) и (III.88) для внешней области D_1 можно записать уравнение для H в D_1:

$$H'' + \frac{2 - \frac{3}{2}\frac{\alpha}{\eta}}{\eta\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r_i}}} H' - \frac{2}{\eta} \left\{ \frac{1 - \frac{\alpha}{\eta} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{\eta^2}}{\eta\sqrt{1 - \frac{\alpha}{\eta}}} - \right. \\ \left. - \frac{(L-1)(L+2)}{\alpha} \left(1 - 2\frac{\alpha}{\eta} - \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\eta}} \right) \right\} H = 0.$$

Независимые решения этого уравнения в асимптотической области $r \to \infty$ имеют вид

$$H \sim \text{const}\, \eta_1 \left(3\sqrt{1 + \frac{4}{3}(L-1)(L+2)} - 1 \right) /2, \quad \eta \to \infty.$$

и

$$H \sim \frac{\text{const}}{\eta^{(3}\sqrt{1 + \frac{4}{3}(L-1)(L+2)} + 1\Big) /2}, \quad \eta \to \infty.$$

Второе решение удовлетворяет требуемому условием а) асимптотическому поведению H. Однако ненулевое решение уравнения (III. 91) не может удовлетворить условиям а) и (III. 90) одновременно. При выполнении обсих этих условий должна существовать точка ξ в интервале $R \leqslant r < \infty$, в которой H имеет экстремально значение типа $H'(\xi) = 0$ и $H''(\xi)/H(\xi) < 0$. Но выражение в фигурных скобках левой части (III. 91) неотрицательное в D_1, поэтому такая точка не существует. Следовательно, $H(r) = 0$ в D_1. Из (III. 88) следует, что в D_1 и $K(r) = 0$. Система обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с нулевьми граничными значениями функций имеет только нулевое решение. Поэтому и в D_2, и в D_3 уравнения (III. 86) и (III. 88) допускают только тривиальное решение. Учитывая также уравнения (III. 87), (III. 89), (III. 74) и (III. 84), приходим к выводу, что $\delta p = \delta\mu = \delta u_0 = 0$ в D_2, а $H = K = H_1 = 0$ всюду.

Оставшиеся неиспользованными два уравнения (III. 75) и) (III. 76) связывают три функции - одну функцию h_0 возмущения метрики с двумя функциями δu_2 и δu_3 скорости движения вещества. Если ввести амплитуду $A(r; L, M)$ моды L, M скорости вещества, то их можно переписать в удобном виде:

$$\delta u_2 = iMA(r; L, M)\frac{Y_L^M}{\sin\theta},$$
$$\delta u_3 = -A(r; L, M)\sin\theta\frac{\partial Y_L^M}{\partial\theta},$$
$$h_0'' - \frac{1}{2}\lambda' h_0' + \left[2\frac{\lambda'\eta'}{\eta} + x(\mu - p) - \frac{L(L+1)}{\eta^2}\right] h_0 =$$
$$= -2x(\mu + p)A(r; L, M)e^{\lambda/2}.$$

Пусть теперь $L = 1$. Уравнения (III.75) и (III.76) по-прежнему могут быть переписаны в виде (III. 92 а, б) и (III. 93). Благодаря свойствам функций Лежандра, функция h_1 в этом случае полностью выпадает из системы уравнений (III. 73) -(III. 82), а уравнения (III. 73), (III. 77)-(III. 82) сводятся к трем независимым уравнениям

$$H_0' + \left[\frac{\lambda'}{2} + 2\frac{\eta'}{\eta} - x\frac{\mu + 3p}{\lambda'}\right] H_0 + \frac{\lambda'}{2}H_2 = 0,$$
$$K' + \left(3\frac{\eta'}{\eta} - x\frac{\mu + 3p}{\lambda'}\right) H_0 - \frac{\eta'}{\eta}H_2 = 0,$$
$$\frac{1}{2}(\mu + p)H_0 Y_1^M = \delta p.$$

Заметим, однако, что последние уравнения, а также (III.84), не являются динамическими связями на возмущения метрики и вещества, а совпадают с трансформационными формулами для метрики и давления, индуцированными инфинитезимальным преобразованием $r \to r + \xi^1$, если

$$\xi_1 = \frac{1}{\lambda'}H_0 Y_1^M$$

Этому преобразованию координат соответствует, например, преобразование

$$\partial p \equiv \bar{p}(x) - p(x) = \frac{1}{2}(\mu + p)\lambda'\xi^1$$

давления, удовлетворяющего невозмущенным уравнениям Эйнштейна (III. 5) или (III. 34 в), которое совпадает с (III. 96). Поэтому функции $\mathrm{H}_0, \mathrm{H}_2, K, \delta p$ и $\delta\mu$ вообще не связаны с вращением тела, а $H_1 = 0$, согласно (III. 74). Это позволяет упростить матрицу возмущения с помощью соответствующих инфинитезимальных преобразований координат. А именно, преобразованием координат

$$\theta \to \theta - \frac{iM}{\sin\theta}Y_1^M \int \frac{h_1}{\eta^2}dr.$$
$$\varphi \to \varphi + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Y_1^M}{\partial\theta}\int \frac{h_1}{\eta^2}dr$$

из матрицы возмущения устраняются компоненты δg_{12} и δg_{13}, в то время как остальные компоненты остаются без изменения. Затем преобразованием

$$r \to r - \frac{H_0}{\lambda'} Y_1^M$$

можно устранить компоненты $\delta g_{00}, \delta g_{11}, \delta g_{22}$ и δg_{33}, оставив без изменения δg_{02} и δg_{03}. При этом матрица возмущения приобретет вид

$$\delta g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & -h_0 \frac{iM}{\sin\theta}, & h_0 \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \\ 0, & \frac{1}{\lambda'} H_0 \frac{\partial}{\partial\theta}, & \frac{1}{\lambda'} H_0 iM & \\ S & 0, & 0 & \\ S & & 0 & \end{pmatrix} Y_1^M.$$

Тогда три уравнения Эйнштейна, соответствующие компонентам $(00), (rr)$ и (r, θ), можно записать следующим образом:

$$\frac{2}{\eta^2} H_0 Y_1^M = x(\delta\mu + 3\delta p),$$
$$\frac{2}{\eta^2} \left(\frac{H_0}{\lambda'} \right)' Y_1^M = \frac{x}{2}(\delta p - \delta\mu),$$
$$\frac{1}{\eta^2 \sin^2\theta} \frac{H_0}{\lambda'} \frac{\partial Y_1^M}{\partial\theta} = 0.$$

Из них сразу же следует, что $H_0 = 0$ и $\delta\mu = \delta p = 0$.

Таким образом, все моды $L \geqslant 1$ возмущений метрики и вещества, связанных с медленным вращением тела, описываются только функциями $h_0, \delta u_2$ и δu_3, удовлетворяющими уравнениям (III. 92) и (III. 93).

Во внешних областя D_1 и D_3 уравнение (III. 93) сводится к гипергеометрическому, общее решение которого, удовлетворяющее условиям а) и в), представляется следующим образом:

$$D_1, \quad h_0 = \frac{C_1(L, M)}{\eta^L} F\left(L - 1, L + 2; 2(L + 1); \frac{\alpha}{\eta} \right)$$
$$D_3, \quad h_0 = C_3(L, M) \eta^2 F\left(1 - L, L + 2; 4; \frac{\eta}{\alpha(\beta - 1)} \right)$$

здесь C_1 и C_3 - постоянные, а F - гипергеометрическая функция Гаусса (Градштейн, Рыжик, 1962). Другое решение, зависящее еще от двух постоянных интегрирования, расходится на бесконечности как r^{L+1} и в центре ($\eta = 0$) - как $1/\eta$, поэтому не удовлетворяет условиям а) и в).

Если амплитуда $A(r; L, M)$ задана, то уравнение (III. 93) D_2 превращается в линейное неоднородное обыкновенное диффе- ренциальное уравнение второго порядка, общее решение которого содержит две постоянные C_2 и $\widetilde{C}_2$ интегрирования и является их непрерывной функцией. Имея в виду эту зависимость h_0 от C_2 и $\tilde{C}_2$ в D_2, запишем решение в виде

$$D_2, \quad h_0 = h_0\left(r; L, M; C_2, \widetilde{C_2} \right)$$

Функция h_c, определенная теперь во всей области мира (III.13), должна удовлетворять равенствам

$$[h_j]_{\Sigma_{\text{mat}}} = [h_0']_{\Sigma_{\text{mat}}} = 0,$$
$$[h_0]_{\sigma_s} = [h_0']_{\sigma_s} = 0, \text{ если } \beta > 1,$$
$$h_0\left(0; L, M; C_2, \widetilde{C}_2 \right) = 0, \text{ если } \beta = 1,$$

требуемым условнями б) и в) поведения возмущения на границах (внешней и внутренней) тела и мировой линии центра. В случае, когда $\beta > 1$, равенства (III. 99) и

(III. 100) представляют собой систему неоднородных алгебраических уравнений, в которых неизвестными язляются постоянные $C_1, C_2, \tilde{C}_2$ и C_3 решения (III. 97 а, 6), (III. 98) уравнения (III. 93). Число уравнений совпадает с числом неизвестных. Если же $\beta = 1$, то область D_3 отсутствует, вся область определения функций мира (III. 13) представлена областями D_1 и D_2, а общее решение уравнения (III. 93) - функциями (III. 97 а) и (III. 98), зависящими от трех постоянных. В этом случае равенства (III. 99) и (III. 101) составляют систему неоднородных алгебраических уравнений, неизвестными которых являются постоянные C_1, C_2 и $\widetilde{C}_2$. Как и в первом случае, число уравнений равно числу неизвестных. В обоих случаях, поэтому, все постоянные определяются однозначно, а уравнение (III.93) имеет единственное решение для заданных амплитуд шаровых мод скорости вращения вещества тела.

Теорема 61. Если заданы распределение -углового компонента скорости вещества медленно вращающегося тела, или амплитуды всех ее шаровых мод, то θ - угловой компонент скорости и отклонение метрики мира от сферически-симметричной метрики изолированного тела полностью определяются во всей - внутренней и внешней - области в линейном приближении. Отклонение метрики во внешней области выражается точными формулами (III. 97).

Рассмотрим частный случай распределения скорости вещества, удовлетворяющего условию Розена (1947) твердотельности вращения тела

$$u_{u_{0,\nu}} + u_{\nu;\mu} + u^{\alpha}\left(u_{\nu}u_{\mu;\alpha} + u_{\mu}u_{\nu;\alpha}\right) = 0.$$

Подставляя сюда (III.92) и решая полученные уравнения, находим $L = 1, M = 0, A(r; L, M) = \omega\eta^2$, где ω - постоянная угловая скорость вращения тела. Так как $F(0, 3; 4; x) = 1$, то во внешней области

$$h_0 = \frac{C_1}{\eta} \text{ в } D_1$$

К

$$\boldsymbol{h}_0 = C_3\eta^2 \text{ в } D_3$$

Для твердотельного вращения тела формула (III. 103 а) известна (см., например, Зельдович, Новиков, 1967). В действительности же она имеет место не только для твердотельного вращения, но и любого, как это следует из (III. 97 а), распределения скорости вещества, ограниченного единственным условием - отсутствием всех мод, кроме $L = 1$.

27.3.11 40. Axial Rotation of an Isolated Body

Вращение тела, даже при наличии только одной оси, в значительной степени усложняет уравнения Эйнштейна, и получение их точных решений наталкивается на большие трудности. К настоящему времени из внешних решений известны только метрики Керра (Kerr, 1963) и Картера (Carter, 1968). Они являются частными решениями и соответствуют источнику специального вида. Их связывают с гравитационным полем вращающейся незаряженной или заряженной черной дыры соответственно (Carter, 1971; Хокинг, Эллис, 1977). Точные же внутренние решения, могущие служить основой сколько-нибудь значимой физической модели вращающегося тела, еще не получены. Поэтому некоторые нетривиальные результаты по поводу внутреннего решения, которые можно установить еще до решения уравнений Эйнштейна на основании только уравнений движения, представляют определенное значение.

Установившийся характер чистого вращения источника с единственной осью означает, что квадратичная форма обладает аксиальной симметрией и не зависит от времени. Поэтому существует система отсчета, в которой могут быть введены координаты x^0, r, θ и φ, отражающие временную и аксиальную симметрию метрики в явном виде. Предполагая именно этот характер координат и системы отсчета, в общем случае как во внутренней, так и во внешней области квадратичную форму можно представить следующим образом:

$$ds^2 = -\left(dx^0\right)^2 + A\left(dx^0 + B\sin^2\theta d\vartheta\right)^2 + Ddr^2 + \mathscr{E}d\theta^2 + F\sin^2\theta d\varphi^2.$$

Неизвестные функции $A, B, D, \mathscr{E}$ и F зависят только от r и θ.

Метрика Керра, в частности, также приводится (Boyer, Lindquist, 1967) к этому виду:

$$ds^2 = -\left(dx^0\right)^2 + \frac{ar}{r^2+a^2\cos^{2\theta}}\left(dx^0 + a\sin^2\theta d\varphi\right)^2 + \\ + \frac{r^2+a^2\cos^2\theta}{r^2-ar+a^2}dr^2 + \left(r^2+a^2\cos^2\theta\right)d\theta^2 + \left(r^2+a^2\right)\sin^2\theta d\varphi^2$$

где α - постоянная, имеющая тот же смысл, что и в метрике Шварцшильда (см. §30), а постоянная a связана с полным моментом вращающегося тела.

Отличные от нуля компоненты метрического тензора, соответствующего форме (III. 104), определяются формулами

$$\left.\begin{array}{c} g_{00} = -(1-A), \quad g_{03} = AB\sin^2\theta, \quad g_{11} = D, \\ g_{22} = \mathscr{E}, \quad g_{33} = \left(AB^2\sin^2\theta + F\right)\sin^2\theta \\ g = -H\mathscr{E}D\sin^2\theta, \quad g^{00} = -\frac{1}{H}\left(AB^2\sin^2\theta + F\right), \\ g^{03} = \frac{1}{H}AB, \quad g^{11} = \frac{1}{D}, \quad g^{22} = \frac{1}{\mathscr{E}}, g^{33} = \frac{1}{H\sin^2\theta}(1-A) \end{array}\right\}$$

здесь

$$H \equiv AB^2\sin^2\theta + F(1-A)$$

Следует отметить, что симметрия формы (III. 104) допускает ее упрощение. Используя две пронзвольные функции преобразования координат

$$\left.\begin{array}{c} r \to r' = r'(r,\theta) \\ \theta \to \theta' = \theta'(r,\theta), \end{array}\right\}$$

одну из искомых $A, B, D, \mathscr{E}$ или F, или какую-либо их комбинацию можно привести к наперед заданной функции, сохраняя при этом ортогональность преобразованных осей r' и θ', т. е. равенство нулю компонента g'^{12}. Дальнейшее упрощение уже невозможно. В общем случае симметрия задачи требует нахождения четырех независимых функций, входящих в форму (III. 104) и зависящих от двух аргументов.

Если ввести обозначения для производных

$$X' \equiv \frac{\partial X}{\partial r}, \quad \dot{X} \equiv \frac{\partial X}{\partial\theta}$$

то отличные от нуля компоненты символов Кристоффеля определяются следующими формулами:

$$\Gamma^0_{01} = \frac{1}{2H}\left(A^2BB'\sin^2\theta - FA'\right), \quad \Gamma^1_{00} = -\frac{A'}{2D},$$
$$\Gamma^0_{02} = \frac{1}{2H}\left[(\dot{B}\sin\theta + 2B\cos\theta)A^2B\sin\theta - F\dot{A}\right],$$
$$\Gamma^2_{00} = -\frac{\dot{A}}{2\varepsilon}, \quad \Gamma^0_{13} = \frac{\sin^2\theta}{2H}\left[A^2B^2B'\sin^2\theta + ABF' - F(AB)'\right],$$

$$\Gamma^0_{23} = \frac{\sin^2\theta}{2H}\left[(\dot{B}\sin\theta + 2B\cos\theta)A^2B^2\sin\theta + AB\dot{F} - F(A\dot{B})\right],$$
$$\Gamma^1_{03} = -\frac{\sin^2\theta}{2D}(AB)', \quad \Gamma^2_{03} = -\frac{\sin\theta}{2\delta}[(AB)\sin\theta + 2AB\cos\theta],$$
$$\Gamma^3_{01} = \frac{1}{2H}\left[(\mathrm{AB})' - A^2B'\right], \quad \Gamma^1_{11} = \frac{D'}{2D}, \quad \Gamma^1_{12} = \frac{\dot{D}}{2D},$$
$$\Gamma^3_{02} = \frac{1}{2H}\left[(\dot{AB}) - A^2\dot{B} + 2(1-A)AB\,\mathrm{ctg}\,\theta\right]$$
$$\Gamma^1_{22} = -\frac{\mathscr{E}'}{2D}, \quad \Gamma^1_{33} = -\frac{\sin^2\theta}{2D}\left[\left(AB^2\right)'\sin^2\theta + F'\right]$$
$$\Gamma^2_{11} = -\frac{\dot{D}}{2\mathscr{E}'}, \quad \Gamma^2_{22} = \frac{\dot{\mathscr{E}}}{2\mathscr{E}'}, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{\mathscr{E}}{2\dot{\mathscr{E}}},$$
$$\Gamma^2_{33} = -\frac{1}{2E}\left[\left(A\dot{B}^2\right)\sin^4\theta + 4AB^2\sin^3\theta\cos\theta + \dot{F}\sin^2\theta + 2F\sin\theta\cos\theta\right],$$
$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{2}\bar{H}\left[\left(A'B^2 + 2ABB' - A^2BB'\right)\sin^2\theta + (1-\mathrm{A})F'\right].$$
$$\Gamma^3_{23} = \frac{1}{2\dot{H}}\left[\left(\dot{A}B^2 + 2AB\dot{B} - A^2B\dot{B}\right)\sin^2\theta + 2AB^2\sin\theta\cos\theta + \right.$$
$$\left. +2(1-A)\left(AB^2\sin^2\theta + F\right)\mathrm{ctg}\,\theta + (1-A)F\right].$$

Система отсчета, в которой квадратичная форма для вращающегося тела приводится к (III. 104), характеризуется сложным движением составляющих ее элементов. Их абсолютное ускорение

$$w_0 = w_3 = 0, \quad w_1 = -\frac{A'}{2(1-A)}, \quad w_2 = -\frac{\dot{A}}{2(1-A)}$$

всюду ортогонально семейству гиперповерхностей

$$A = \text{ const.}$$

Тензор вращения (I. 144) элементов системы отсчета отличен от нуля:

$$\left.\begin{array}{c} \chi_{0i} = \chi_{12} = 0, \\ \chi_{13} = \frac{1}{2}\frac{(AB)'-A^2B'}{(1-A)^{3/2}}\sin^2\theta, \\ \chi_{23} = \frac{1}{2}\frac{(\dot{AB})-A'\dot{B}}{(1-A)^{3/2}}\sin^2\theta + \frac{AB}{V\overline{1-A}}\sin\theta\cos\theta. \end{array}\right\}$$

Семейство гиперповерхностей, всюду ортогональных направлению вращения элементов системы отсчета, удовлетворяет уравнению

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\chi_{13}\mathscr{E}}{\chi_{23}}\bar{D}$$

Для метрикп Керра, в частности, решениями этого уравнения являются семейство

$$r^2 + a\cos\theta(a\cos\theta - \text{ const }) = 0, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2},$$

и экваториальная гиперповерхность $\theta = \pi/2$.

Пусть внутреннее состояние источника описывается тензором энергии-импульса (I.18 б) идеальной жидкости, давление и плотность энергии которой связаны термодинамическими уравнениями типа (III.1) и (III.2). В координатах формы (III.104). компоненты u^1 и u^2 4-скорости источника равны нулю, и если ввести обозначение

$$\frac{d\varphi}{dx^0} \equiv \omega(r,\theta),$$

го

$$u^3 = \frac{d\varphi}{d\sigma} = \omega u^0$$

Следовательно,

$$u^0 = \sqrt{\frac{u^\alpha \{u^0, 0, 0, \omega u^0\}}{1 - A\left(1 + \omega B \sin^2\theta\right)^2 - \omega^2 F \sin^2\theta}}$$

и

$$\left.\begin{array}{c} u_\alpha \{u_0, 0, 0, u_3\}, \\ u_0 = -\frac{1 - A\left(1+\omega B \sin^2\theta\right)}{\sqrt{1 - A\left(1+\omega B \sin^2\theta\right)^2 - \omega^2 F \sin^2\theta}} \\ u_3 = \frac{AB \sin^2\theta\left(1+\omega B \sin^2\theta\right) + \omega F \sin^2\theta}{\sqrt{1 - A(1+\omega B \sin^\circ\theta)^2 - \omega^2 F \sin^2\theta}}. \end{array}\right\}$$

Внутреннее состояние источника определяется тремя функциями μ, p и ω двух аргументов r и θ. Две из них независимыμ (или p) и ω. Из всего класса аксиального вращения тел следует выделить твердотельное вращение, когда $\omega = \text{const}$. В этом случае и в собственной системе отсчета оба условия, налагаемые на квадратичную форму, а именно, стационарность и аксиальная симметрия, могут быть выражены в явном виде. Действительно, переход $\varphi \to \varphi + \omega x^0$ к собственной системе отсчета, в которой уже и $u^3 = 0$, не изменяет вида квадратичной формы (III. 104). Это обусловлено тем, что относительные расстояния между элементами источника, вращающегося как твердое тело, неизменны. Если же вращение тела, оставаясь аксиальным, не подчиняется твердотельному закону, то в собственной системе отсчета метрика сохраняет аксиальную симметрию в явном виде, но теряет явное выражение свойства стационарности. Метрика в собственной системе отсчета уже зависит от времени. Изменение относительных расстояний между элементами источника при постоянных координатах в собственной системе отсчета принимает на себя метрический тензор.

Формулы (III. 110) сохраняют свой вид для твердотельного вращения и в собственной системе отсчета, если в них формально положить $\omega = 0$. Используя их, легко убедиться, что условия (III. 102) Розена для твердотельного вращения удовлетворяются тождественно, независимо от вида функций $A, B, D, \mathscr{E}$ и F, входящих в форму (III. 104).

Выясним, какие ограничения накладывают уравнения движения (I. 19) на внутренние функции μ, p и ω вращающегося тела. Два из четырех уравнений движения, соответствующие координатам x^0 и φ, удовлетворяются тождественно. Остальные два приводятся к следующему виду:

$$p' = \frac{1}{2}(\mu + p)\frac{A' + 2\omega(AB)' \sin^2\theta + \omega^2\left(AB^2 \sin^2\theta + F\right)' \sin^2\theta}{1 - A\left(1 + \omega B \sin^2\theta\right)^2 - \omega^2 F \sin^2\theta},$$

$$\dot{p} = \frac{1}{2}(\mu + p)\frac{\dot{A} + 2\omega\left(AB \sin^2\theta\right) + \omega^2\left[\left(AB^2 \sin^2\dot{\theta} + F\right)\sin^2\theta\right]}{1 - A\left(1 + \omega B \sin^2\theta\right)^2 - \omega^2 F \sin^2\theta}.$$

Эти уравнения можно переписать следующим образом:

$$\frac{dp}{\mu + p} = d \ln\left\{1 - A\left(1 + \omega B \sin^2\theta\right)^2 - \omega^2 F \sin^2\theta\right\}^{-1/2} - \\ - \frac{\mathrm{A}B \sin^2\theta\left(1 + \omega B \sin^2\theta\right) + \omega F \sin^2\theta}{1 - A\left(1 + \omega B \sin^2\theta\right)^2 - \omega = P \sin^2\theta} d\omega.$$

Левая часть является, согласно термодинамическому уравнению состояния, полным дифференциалом функции

$$\int \frac{dp}{\mu + p},$$

и поскольку первый член справа также полный дифференциал, то второе слагаемое справа может быть только полным дифференциалом некоторой функции r и θ, если $\omega(r,\theta) \neq \text{const}$. Это возможно в том и только том случае, когда сомножитель при $d\omega$ зависит от ω и не зависит явно от r и θ, т. е.

$$\frac{AB\left(1+\omega B\sin^2\theta\right)+\omega F}{1-A\left(1+\omega B\sin^2\theta\right)^2-\omega^2 F\sin^2\theta}\sin^2\theta = b(\omega),$$

где $b(\omega)$ - произвольная функция своего аргумента.

Равенство (III.113) устанавливает алгебраическую зависимость между четырьмя функциями координат r и θ : $\omega, (1-A)$, $AB\sin^2\theta$ и $\left(AB^2\sin^2\theta+F\right)\sin^2\theta$. В случае твердотельного вращения такая зависимость отсутствует.

Уравнения движения, таким образом, сводятся к квадратурам

$$\exp\left\{\int\frac{dp}{\mu+p}+\int b(\omega)d\omega\right\}=\frac{\text{const}}{\sqrt{1-A\left(1+\omega B\sin^2\theta\right)^2-\omega^2F\sin^2\theta}},$$

если $\omega(r,\theta)\neq\text{const}$, и

$$\exp\left\{\int\frac{dp}{\mu+p}\right\}=\frac{\text{const}}{\sqrt{1-A\left(1+\omega B\sin^2\theta\right)^2-\omega^2F\sin^2\theta}}$$

если $\omega=\text{const}$.

Для несжимаемой идеальной жидкости ($\mu=\text{const}$), например, уравнения движения полностью интегрируются равенством

$$\mu+p=\frac{\text{const}}{\sqrt{1-A\left(1+\omega B\sin^2\theta\right)^2-\omega^2F\sin^2\theta}}.$$

Определение 16. Гиперповерхность, на которой давление имеет постоянное значение, называется эквипотенциальной.

Сечение эквипотенциальной гиперповерхности координатной гиперплоскостью $x^0=\text{const}$ является, очевидно, замкнутой поверхностью. Эквипотенциальные гиперповерхности образуют, согласно (III. 114), однопараметрическое семейство.

Теорема 62. Граница аксиально вращающегося тела является эквипотенциальной гиперповерхностью, на которой давление равно нулю. Форма границы определяется равенствами

$$\left[1-A\left(1+\omega B\sin^2\theta\right)^2-\omega^2F\sin^2\theta\right]\exp\left\{-2\int b(\omega)d\omega\right\}=\text{const}$$

если $\omega(r,\theta)\neq\text{const}$, и

$$A\left(1+\omega B\sin^2\theta\right)^2+\omega^2F\sin^2\theta=\ \text{const}$$

в случае твердотельного вращения.

Между функциями распределения давления и плотности массы вращающегося и невращающегося тел можно установить определенное соответствие.

Теорема 63. Для каждого заданного уравнения состояния вещества аксиально вращающегося тела и заданного распределения угловой скорости ω в системе отсчета квадратичной формы (III. 104) существует такая координатная сетка, что функции распределения давления, плотности числа частиц и плотности массыэнергии совпадают с соответствующими функциями невращающегося тела в системе отсчета квадратичной формы (III. 3), а границы тела являются координатными гиперповерхностями $r=\text{const}$.

Д о к а з а т е л в с т в о. Предположим, что для заданного уравнения состояния вещества невращающегося тела найдено решение уравнений Эйнштейна (теорема 48). Тогда все функции, описывающие внутреннее состояние тела, в частности, распределение $p(r)$ давления, и функции квадратичной формы (III. 3), в том числе и $\lambda(r)$, известны. Воспользуемся преобразованием (III. 107), чтобы во внутренней области

совместить функцию $p(r,\theta)$ распределения давления во вращающемся теле с известной функцией $p(r)$. При этом, согласно заданному уранению состояния вещества, сов- падут также и распределения плотностей массы-энергии и числа частиц. Подставляя μ и p в левые части (III. 114), находим, что во внутренней области выполняется равенство

$$\left[1 - A\left(1 + \omega B \sin^2\theta\right)^2 - \omega^2 F \sin^2\theta\right] \exp\left\{-2\int b(\omega)d\omega\right\} = e^{\lambda(r)},$$
$$\omega \neq \text{ const},$$

или

$$1 - A\left(1 + \omega B \sin^2\theta\right)^2 - \omega^2 F \sin^2\theta = e^{\lambda(r)}, \omega = \text{ const}.$$

Из сопоставления с (III. 115) следует, что на границах вращающегося тела теперь $r =$ const.

Одна из искомых функций формы (III. 104) во внутренней области уже не является независимой, а алгебраически выражается через остальные. Ею может быть, например, $A(r,\theta)$. Тогда во внутренней области

$$A(r,\theta) = \left[1 - \exp\left\{\lambda(r) + 2\int b(\omega)d\omega\right\} - \right.$$
$$\left. -\omega^2 F \sin^2\theta\right]\left(1 + \omega B \sin^2\theta\right)^{-2},$$

если $\omega \neq$ const, и

$$A(r,\theta) = \frac{1 - e^{\lambda(r)} - \omega^2 F \sin^2\theta}{\left(1 + \omega B \sin^2\theta\right)^2}, \text{ если } \omega = \text{ const}$$

Для завершения доказательства необходимо убедиться, что произведенное преобразование координат сохраняет на границе тела непрерывность $A(r,\theta)$ вместе с ее частными производными первого порядка. Непрерывность же независимых искомых функций (например, B и F) и их первых производных обеспечивается решением уравнений Эйнштейна (I. 17), которым они подчиняются. Пусть на границе тела условия непрерывности A и ее производных первого порядка не выполняются. Преобразованием координат (III. 107) во внешней области функцию $A(r,\theta)$ можно привести к наперед заданной. Если во внешней области $A(r,\theta)$ выбрать так, чтобы ее значения и значения ее частной производной первого порядка по r с внешней стороны границы совпадали со значениями, определяемыми функциями (III. 116) на внутренней стороне границы, то условия непрерывности будут удовлетворены. Для твердотельного вращения, например, достаточно во внешней области определить функцию $A(r,\theta)$ следующим равенством:

$$A(r,\theta) = \frac{1 - e^{\lambda(r)} - \omega^2 F \sin^2\theta}{\left(1 + \omega\Delta \sin^2\theta\right)^2}, \omega = \text{ const}.$$

Известная функция $\lambda(r)$ определена как во внутренней, так и во внешней областях и удовлетворяет условиям непрерывности (см. §30) на границе, а искомые функции B и F непрерывны, по предположению, вместе с производными первого порядка, поэтому $A(r,\theta)$, определенная равенствами (III. 116 б) и (III. 117), принадлежит к функциям класса C^1 непрерывности во всей области. Следствие 23. Общему решению уравнений Эйнштейна для стационарного аксиально-симметричного источника, уравнение состояния и распределение угловой скорости вращения вещества которого заданы, а границы свободны, соответствуют два типа строения источника. Источники одного типа представляют собой жидкое тело, имеют одну, только внешнюю, свободную границу, давление и плотности массы и числа частиц принимают максимальное значение в центре и монотонно падают к границе. Источники другого типа имеют две, внутреннюю и внешнюю, границы, на которых давление равно нулю; полость, свободную от вещества и теплового излучения источника, с сингулярной временноподобной мировой линией в центре; давление и плотности массы и числа частиц принимают максимальное значение на критической гиперповерхности и монотонно падают к обеим границам. Доказательство следствия очевидно, если сопоставить теоремы 48 и 63.

Пусть введена система координат, в которой в соответствии с теоремой 63 любая граница Σ источника есть гиперповерхность $r = \text{const}$. Тогда функция A во внутренней области удовлетворяет равенствам (III. 116), непрерывна вместе с частными производными первого порядка на Σ

$$[A]_\Sigma = [A']_\Sigma = 0$$

и приведена к заданной функции (например, к правой части (III. 117), если $\omega = \text{const}$) во внешней области. Искомыми функциями, удовлетворяющими уравнения Эйнштейна, являются B, D, $\mathscr{E}$ и F. Поведение этих функций на границе следует из требований непрерывности метрики мира и равенства коэффициентов первой и второй квадратичных форм границы как гиперповерхности с обеих сторон. Непрерывность метрики мира выражается равенствами

$$[B]_\Sigma = [D]_\Sigma = [\mathscr{E}]_\Sigma = [F]_\Sigma = 0$$

вместе с (III.118). Коэффициенты $h_{ik} (i, k = 0, 2, 3)$ первой квадратичной формы границы как гиперповерхности определяются формой (III. 104) после подстановки в нее уравнения гиперповерхности $r = \text{const}$:

$$h_{00} = -(1 - A), h_{03} = AB \sin^2 \theta, h_{22} = \mathscr{E},$$
$$h_{33} = \left(AB^2 \sin^2 \theta + F\right) \sin^2 \theta, h_{02} = h_{23} = 0.$$

Равенство их значений на внутренней и внешней сторонах границы следует из (III. 118) и (III. 119). Введем единичный 4-вектор e^α нормали к границе

$$e^\alpha \left\{0, \frac{1}{\sqrt{D}}, 0, 0\right\}, e_\alpha\{0, \sqrt{D}, 0, 0\}$$

и три 4-вектора $\eta^\alpha_{(l)}$, принадлежащих границе:

$$\eta^\alpha_{(0)}\{1, 0, 0, 0\},$$
$$\eta^\alpha_{(2)}\{0, 0, 1, 0\},$$
$$\eta^\alpha_{(3)}\{0, 0, 0, 1\},$$
$$\eta_{(0)\alpha}\left\{-(1 - A), 0, 0, AB \sin^2 \theta\right\},$$
$$\eta_{(2)\alpha}\{0, 0, \mathscr{E}, 0\},$$
$$\eta_{(3)\alpha}\left\{AB \sin^2 \theta, 0, 0, \left(AB^2 \sin^2 \theta + F\right) \sin^2 \theta\right\}.$$

Согласно (I. 176), коэффициенты ω_{ik} второй квадратичной формы границы определяются следующими равенствами:

$$\omega_{00} = \omega_{02} = \omega_{23} = 0,$$
$$\omega_{03} = \frac{(AB)' \sin^2 \theta}{2\sqrt{D}}, \omega_{22} = \frac{\mathscr{E}'}{2\sqrt{D}},$$
$$\omega_{33} = \frac{\sin^2 \theta}{2\sqrt{[}} \left[\left(AB^2\right)' \sin^2 \theta + F'\right].$$

Из требуемого равенства значений коэффициентов второй квадратичной формы на обеих сторонах границы следуют условия на производные функций $B, \mathscr{E}$ и F:

$$[B']_\Sigma = [\mathscr{E}']_\Sigma = [F']_\Sigma = 0.$$

В произвольных координатах уравнение границы имеет, согласно теореме 62, вид (III. 115). Коэффициенты второй квадратичной формы границы как гйерповерхности в этом случае являются довольно громоздкими алгебраическими выражениями функций $A, B, D, \mathscr{E}$ и F и их частных производных первого порядка по r и θ, поэтому условия сшивания этих функций на границе значительно усложняются в сравнении с (III. 120).

28 Frames of reference in the theory of gravity by Vladimirov Yu.S. (1982)

28.1 Overview of Frames of reference in the theory of gravity by Vladimirov Yu.S. (1982)

Reasons, why it is a good book and worth of reading

(Just Vladimirov is an expert in this field. I don't know yet why these topics are really important??? sound very exotic...)

ВВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Общеизвестно значение теории относительности для физики **XX** в. Закономерности физического мира, вскрытые специальной и общей теорией относительности, знаменуют собой этап наиболее глубокого проникновения человека в сущность природы, в частности в сущность пространства и времени. Как это ни парадоксально, но укоренившееся в науке название общяя теория относительности (ОТО) не отражает в полной мере истинной сути этой теории. Название скорее относится к свойству физического мира, сопутствующему вскрытой закономерности, однако и это свойство в течение длительного времени трактовали не вполне четко. Следует согласиться с В. А. Фоком, утверждавшим: «Истинной логической основой теории тяготения Эйнштейна являются не идея общей относительности и не принцип эквивалентности, а другие две идеи, именно: идея объединения пространства и времени в единое четырехмерное хроногеометрическое многообразие с индефинитной метрикой (эта идея была осуществлена Эйнштейном уже в его теории 1905 г. - в «частной» теории относительности) и отказ от «жесткости» метрики, позволивший связать ее с явлением тяготения, а тем самым и с весомой материей (уравнения тяготения Эйнштейна). Идеи же общей ковариантности уравнений (так называемая общая относительность) и кинематического толкования тяготения (так называемая эквивалентность) сыграли лишь эвристическую роль» [13].

Отказ от «жесткости» метрики в теории Эйнштейна или обобщение метрических свойств плоского пространства-времени для описания гравитационного взаимодействия явились логическим завершением развития цепочки гениальных идей выдающихся мыслителей почти целого столетия [14]. В ее начале были идеи Н. И. Лобачевского, а также независимо от него сына и отца Бояи и Гаусса, которые впервые отказались от пятого постулата Евклида и построили первую неевклидову гиперболическую геометрию. Затем существенные шаги последовательно были сделаны Риманом, Клиффордом, Махом, которые, с одной стороны, подготовили почву для описания реального мира посредством неевклидовых геометрий и, с другой стороны, подвели научную мысль к возможности использования в физике многообразий большего, нежели три, числа измерений n. Кроме того, для решающего шага требовалось дальнейшее развитие неевклидовых геометрий. Такие работы были выполнены видными математиками: Бельтрами, Ф. Клейном, Софусом Ли, Риччи, Кристоффелем, Бианки и др. [15, 16]

Но причем здесь общая относительность? Напомним, что в специальной (или частной) теории относительности (СТО), в которой объединены пространство и время в единое 4-мерное многообразие, показано, что значения промежутков времени и пространственных расстояний между двумя точками-событиями (так же как и ком-поненты 4-мерных векторов іи тензоров) относителыы, зависят от выбранной инерциальной системы отсчета, тогда как физические законы в своей простейшей форме одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Характерно, что механика как в пространстве-времени Ньютона, так и в пространстве-времени СТО формулируется в классе выделенных (преимущественных) инерциальных систем отсчета. Все инерциальные системы отсчета абсолютно равноправны. Так вот, переход к искривленным (римановым) пространствам в общем случае лишает смысла понятие инерциальной системы отсчета. Как угодно введенные в ОТО системы отсчета, вообще

говоря, являются неинерциальными, причем в ОТО нет достаточно веского критерия для выделения преимущественного класса систем отсчета, которые могут играть роль инерциальных систем отсчета в СТО. А раз так, то законы природы, выражаемые дифференциальными уравнениями, должны иметь в искривленных пространствах одинаковую форму (записываться одинаково) во всех неинерциальных системах отсчета. Эти соображения, сыгравшие важную эвристическую роль при создании ОТО, и послужили причиной такого ее названия.

Теперь перейдем к обсуждению самого понятия системы отсчета, играющего в ОТО такую важную роль, что определило даже название теории. Сам Эйнштейн фактически смешивал понятия системы координат и системы отсчета [17, 18]. Он писал: «Если координатная система K выбрана так, что физические законы в ней справедливы в своей простейшей форме, то те же самые законы справедливы во всякой другой координатной системе K', которая движется равномерно и прямолинейно относительно K. Мы называем этот постулат «специальным принципом относительности» [17, с. 453]. Далее Эйнштейн писал об общей относительности: «Общце законы природы должны быть выражены через уравнения, справедливые во всех координатных системах, т. . эти уравнения должны быть ковариантными относительно любых подстановок (общеековариантными). Ясно, что физика, удовлетворяющая этому постулату, удовлетворит и общему постулату относительности. Ибо в совокупности всех подстановок во всяком случае есть те подстановки, которые соответствуют всем относительным движениям (трехмерных) координнатных систем» [17, с. 459].

Однако в общем случае понятия системы координат и системы отсчета совершенно различны. Между понятием системы отсчета и той или иной совокупностью систем координат можно установить соответствие, специальным образом оговорив это (см. 3,5 и 3.6), но соответствия априори не существует! Этой же точки зрения придерживался В. А. Фок: «Понятие физической системы отсчета (лаборатории) не равносильно, в общем случае, понятию системы координат, даже если отвлечься от всех свойств лаборатории, кроме ее движения, как целого» [13]. То же утверждает Н. В. Мицкевич: «Часто путают понятие системы отсчета и понятие системы координат. Однако между этими понятиями нет ничего общего...» [19]. Возможность соответствия между этими понятиями изучалась в группах А. Л. Зельманова, О. С. Иваницкой, Мёллера [10], Шмутцера и др.

Что же такое система отсчета? Это необходимое для любого измерения сложное понятие, соответствующее привычному комплексу приспособлений, приборов, составляющему лабораторию или систему лабораторий. Система отсчета - это идеализированная совокупность конечного или бесконечного (континуума) числа пронумерованных пробных тел, снабженных приборами для измерения времени и расстояния. Если пробных тел континуум, то они снабжены как минимум часами для измерения времеии в своей окрестности, а в достаточно общем случае - еще п линейками для измерения длины в трех взаимно перпендикулярных направлениях (в своей окрестности). Если пробных тел конечное число, то измерительная аппаратура должна включать в себя дополнительные приборы, например радиолокационную аппаратуру, компенсирующие сокращение числа приборов. Все эти требования, предъявляемые к сложному понятию системы отсчета, поддаются строгой математической формулировке. Этому вопросу посвящены гл. 2, 3, 7. Оказалось, что строгая формулировка понятия системы отсчета и ее применение для решения конкретных задач потребовали создания специального математического аппарата, составляющего сейчас важный элемент структуры ОТО. Существенно, что математический аппарат описания систем отсчета основан на обратиом 1 + 3-расщеплении 4-мерного пространственно-временного многообразия.

Понятие системы отсчета в ОТО имеет не меньшую важность, чем система понятий в современной квантовой теории, позволяющих описывать наблюдаемые в микромире. Разве можно в квантовой теории проинтерпретировать возможные результаты измерений, если ограничиться только самими уравнениями (например, Шредингера, Дирака) и их точными решениями? Эту аналогию между ОТО и квантовой механикой подчеркивал В. А. Фок: «Понятие относительности к средствам наблюдения (в квантовой механике - Ю. В.) есть в известном смысле обобщение понятия относительности к системе отсчета. Оба понятия играют в соответствующих теориях аналогичную роль. Но в то время как теория относительности, которая опирается на понятие относительности к системе отсчета, учитывает лишь движение средств паблюдения как целого, в квантово механике необходимо учитывать и более глубокие

свойства средств наблюдения» [20, с. 73]. Не случайно математический аппарат различных методов описания систем отсчета и их сопоставление между собой были завершены в 70-х годах. Это диктовалось возросшим числом задач и проблем, решаемых в рамках ОТО. Прежде всего, резко возросло число экспериментальных работ по проверке ОТО. В наши дни ОТО из чисто теоретической науки довольно быстро становится экспериментальным разделом физики. Применение методов задания систем отсчета для интерпретации и предсказания новых экспериментов имеет первостепенное значение. Кроме того, оказалось, что для разработки проблемы квантования гравитации, изучения связи ОТО с физикой микромира также важно понятие системы отсчета. Например, работы Дирака по канонической формулировке ОТО или де Витта по теории суперпространств, нацеленные на решение проблемы квантования в ОТО, оказались тесно связанными с использованием метода задания нормальных систем отсчета. Примечательно, что значительное число последних исследований по проблемам энергии-импульса в ОТО или по описанию гравитационных волн основано на обсуждении указанных проблем с позиций методов задания систем отсчета. Это относится и к работам в других разделах ОТО.

Киига разделена на четыре части и содержит 12 глав. Первая часть вводная. В ней три главы. В гл. 1 нзложены основы современной теории гравитации, обязанные 4-мерной пространственновременной симметрии. В гл. 2 сделан упор иа те факторы ОТО, для которых существенна сигнатура пространства-времени, т. е. обращено внимание на те стороны ОТО, в которых проявляется асимметрия временного и пространственных направлений. В гл. 3 развит математический аппарат монадного метода задания систем отсчета, или формализм 1+3-расщепленя пространственно-временного многообразня. Это ключевая глава книги.

Назначение второй части - продемонстрировать применение монадного метода задания систем отсчета в классических задачах ОТО. Таковыми являются эффекты в трех кассах метрик: сферически-симметричных (Шварцшитьда и др.), аксиально-симметричных (Керра и др.) и однородных изотропных космологических моделях. Это определило разбиение части на три соотьетствующие главы. Автор пе преслсдовал цели всестороние псследовать все решения или изучавшиеся рапее эффекты. Залача состояліа в том, чтобы поназать целесообразпость й даже псобходимость применеиня монадного метода для корректно інтерпретации самих метрик и эксперіменталыны даниых.

Третья часть посвящена обсуждснию трех, уже стазших классігчесимн, проблем ОТО: энергии и импульса, описаиня гравитацнонных волн и квантования гравитаии. Трем соответствующим готавам предшествует глава, в которой подробно развітт более полице, нежели монадный, методы описания систем птсчета: диадный и тетрадный. Их можно также пазвать формализмами 1'+ $+1+2$ - и $1+1+1+1$ - расщеппенй пространствепио-врсменного многообразия Наконец, последняя, четвертая часть посвящена обсуждению вопросов размерности физического пространства-времени. В гл. 11 на основе монадного метода (1+4-расщепления) рассмотрена 5-мерная теория гравитации, электромагнетизма и скалярного поля. Эта глава связана со всеми предыдущими благодаря использованному монадному методу. Монадный метод возник в 30-х годах именно в рамках 5-мерных теорий. Представляется, что возможности 5-мерной теории далеко не исчерпаны. В гл. 11 показано, что дает эта теория при использовании усовершенствованиого в рамках 4-мерия монадного метода и соображений о конформном соответствии метрик, введенных Вейлем.

В последней главе обсуждаются особенности физического мира в 4-мерном (5-мерном) пространстве-времени по сравнению с многообразиями иного числа измерений, имеющих сигнатуру $(+-\ldots-\ldots)$.

Приложение содержит материал, который должен был бы входить составной частью в гл. 11, однако по техническим причинам добавлен в конце книги. В нем показано, каким образом 5-мерную теорию можно привести в соответствие со стандартной квантовой теорией. В частности, показано, что пятнадцатая компонента 5-метрики G_{55} выражается через общепринятую комплексную волновую функцию электрически заряженных скалярных частиц. Здесь же кратко обсуждается вопрос о получении наблюдаемых значений масс элементарных частиц в теориях с размерностью, большей четырех.

Таким образом, основное внимание в книге уделено физическим аспектам размерности пространственно-временного многообразия, вопросам расщепления его на составные части. Центральное место занимает теория систем отсчёта, тесно связанная с

1 -i-3-расщеплением 4-мерного многообразия на пространство и время. Рассмотрены физические следствия перехода от одной системы отсчета к другой. Аналогичные переходы между различными способами 1–4-расщепления 5-мерного многообразия (между «обобщенными системами отсчета») приводят к изменениям (вплоть до генерации или уничтожения) электромагнитного и скалярного полей.

28.2 Metric Relations and Space-Time Symmetry

28.2.1 1. Admissible Coordinate Systems

В теории относительности описываются отношения между физическими событиями. В рассматрнваемом теорней относительности приближении реального мира оказывается справедливой соответствующая математическая модель множества возможных событий. Эту модель имеют в виду всякий раз, когда говорят о классическом пространстве-времени. Каждому физическому событию в модели сопоставляется точка, точнее, арифметическая n-точка $(n = 4)$.

Напомним основные понятия используемой в ОТО математической модели [21, 22]. Арифметической n-точкой называют упорядоченную систему из n действительных чисел $\{x^\alpha\} = (x^{\mathbf{1}}, x^2, ..., x^n)$. Множество всех арифметических точек для данного значения n называют арифметическим пространством n измерений. Множество точек в арифметическом пространстве n измерений, задаваемых неравенствами вида $|x^\alpha - x_0^\alpha| < \delta$, где $\delta > 0$, называют n-кубом с центром в точке x_0. Множество арифметических точек $[x]$ называется n-областью в том и только в том случае, когда каждая точка x является центром некоторого n-куба, содержащегося в $[x]$.

В границах применимости классической физики оправдано введение взаимно-однозначного соответствия подмножества физических событий с арифметической n-областью. Такое соответствие называют системой координат. Особо следует подчеркнуть, что в теории относительности (специальной и особенно в общей) нет необходимости (и оснований) требовать наличия системы координат для всего физического мира, так же как и предполагать физическую значимость всех точек арифметического 4-мерного пространства. Достаточно говорить о соответствии подмножеств.

Как задаются системы координат? Несомненно, это вопрос физический, а не математический. Существует ряд конструктивных способов задания систем координат, некоторые из них будут в дальнейшем рассмотрены. Однако если каким угодно образом задана одна система координат $\{x^\alpha\}$, то, определяя четыре функции $F^\beta(x^\alpha)$, можно перейти к новым нумерациям точек или дру- гим системам координат так, что $x'^\beta = F^\beta(x^\alpha) \equiv x'^\beta(x^\alpha)$. Из бесконечного множества всех возможных систем координат, получаемых таким образом, в ОТО используется лишь подмножество так называемых допустимых систем координат. Чтобы их охарактеризовать, напомним ряд определений.

Функцию $F(x^1, x^2, ..., x^n)$, определенную для всех точек арифметической n-области $[x]$, называют функцией класса и, если она и ее производные порядка, меньшего или равного и, существуют и непрерывны в каждой точке области $[x]$. Здесь u-любое целое положительное число. В ОТО обычно полагают $u \geqslant 2$. Соответствие, при котором арифметической n-области $[x]$ сопоставляется некоторое множество $[x']$ при помощи n функций класса u : $x'^1(x), x'^2(x), ..., x'^n(x)$, - называется преобразованием класса u, переводящим $[x]$ в $[x']$. Преобразование арифметической n-области $[x]$ называют регулярньм класса u тогда и только тогда, когда оно взаимно однозначно и его якобиан не обращается в нуль ни В ОДной точке $[x]$.

Множество допустимых систем координат определяется как совокупность систем координат, получаемых из физически заданной системы координат посредством всевозможных регулярных преобразований $x'^\beta = x'^\beta(x^\alpha)$. Такие преобразования, связывающие допустимые системы координат, обычно также называют допустимыми.

Легко видеть, что два последовательно произведенные допустимые преобразования образуют также допустимое преобразование координат. Каждое допустимое преобразование имеет обратное допустимое преобразование $x^\alpha = x^\alpha\left(x'^\beta\right)$. Следовательно, совокупность всех допустимых преобразований координат образует apynny. Все допустимые системы координат равноправны, и если это особо не оговорено, то несущественно, из какой системы координат этого множества нужно исходить.

В этой главе будем опираться лишь на сам факт наличия системы координат, а следовательно, и целого множества допустимых систем координат. Этого достаточно для изложения геометрии искривленного (риманова) многообразия, введения основных уравнений О'ТО и обсуждения их математических свойств.

28.2.2 2. Covariant and Contravariant Quantities. Fundamentals of Tensor Algebra

Рассмотрим величины, при помощи которых описываются свойства пространства-времени в различных точках и характеристики находящейся в них материи. Не будем пока углубляться в обсуждение вопросов, связанных с наличием двух типов объектов: пространственно-временных и материальных. Отложим на будущее также попытки сведения всех объектов к одному типу, например геометризацию электромагнитного и других полей. В сов- ременной О'ТО имеются объекты двух типов, причем они характеризуются математически одинаковыми величинами /

Пусть для описания свойств каких-либо объектов необходимо сопоставить наборы из m чисел $B(s|x)$ или отдельным точкам пространства-времени, или каждой точке некоторой области. В последнем случае говорят о задании поля величин. Какие же из бесконечного множества возможностей задания наборов чисе. следует предпочесть? Вспомним, что сами точки пространствавремени можно нумеровать посредством бесчисленного множества допустимых систем координат, преобразования между которыми образуют группу. Естественно, что наборы чисел $B(s|x)$ должны зависеть от нумерации точек и изменяться при переходах к новым координатным системам. Отсюда следует преимущественность таких наборов чисел $B(s|x)$, которые при допустимых преобразованиях координат изменяются также по групповому закону. Оказывается, наборы таких величин удовлетворяют следующим условиям.

Число величин m в наборе должно быть целой степенью размерности пространственно-временного многообразия: $m = 4^N$. то принято изображать совокупностью N буквенных индексов (будем использовать греческие буквы, пробегающие значения 0, $1, 2, 3$). Например, $B(\mu|x) \equiv B(\mu)$ состоит из четырех чисел, $B(\mu v|x)$ содержит 16 компонент и Т д. В дальнейшем будем опускать обозначение точки, где определены наборы величин. Число N буквенных индексов называют рангом.

Существует только два закона группового преобразования наборов величин, соответствующих группе допустимых преобразований координат $\{x\} \longrightarrow \{x'\}$:

$$B'^{\mu\nu}{}_{\ldots} = \sum_{\alpha}\sum_{\beta} \cdot\cdot \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \cdot \ldots B^{\alpha\beta\ldots}$$

$$B'_{\mu\nu\ldots} = \sum_{\alpha}\sum_{\beta} \cdot\cdot \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{v}} \cdot . B_{\alpha\beta\ldots}$$

Преобразующиеся таким способом величины называют тензорами. Тензоры, преобразующиеся по первому закону, называют контравариантными (индексы пишут сверху), а по второму закону-ковариантными (индексы пишут снизу). Возможны смешанные тензоры произвольного ранга. Тензор нулевого ранга называют скаяяром (число, которое не изменяется при преобразованиях коор! динат); тензор первого ранга называют вектором. Простейшим примером контравариантных векторов является набор из тифференциалов - самих координат, а примером ковариантных векторов могут служить компоненты градиента скаляра.

Для упрощения записи принято не писать знаки суммы и подразумевать суммирование всякий раз, когда встречаются два одинаковых индекса. Так, закон преобразования произвольного тензора принимает вид:

$$B^{\circ\alpha\beta\ldots}_{\mu\nu\ldots} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \ldots \cdot \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\delta}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{0}} \cdot \ldots B^{\delta\rho\ldots}_{\lambda\sigma\ldots}{}_{\ldots}$$

Всякий дважды встречающийся индекс, часто называемый «немым», можно заменить любым другим. :

В множестве тензорных величин определены три операции.

Операция сложения и вычитания тензоров одинакового ранга и одинаковой ковариантности, т. е. с одинаковыми числами соответственно ко- и контравариантных индексов.

Операция внешнего произведения двух и более тензоров. В результате получается тензор, ранг которого равен сумме рангов слагаемых тензоров.

Операция внутреннего произведения тензоров $A^{\mu\nu\cdots}B_{\mu\alpha}\ldots = C^{\nu\cdots}_{\alpha}$ приводит к тензору, ранг которого равен сумме рангов слагаемых тензоров минус удвоенное число немых индексов.

Для установления трансформационных свойств величин полезна строгая теорема частного: «Величина, при внутреннем умножении которой на произвольный вектор получается тензор, явjяяется тензором».

Тензор $B_{\mu\nu\alpha}$ называют симметричным по индексам μ и υ, если $B_{\mu\nu\alpha} = B_{\upsilon\mu\alpha} \equiv B_{\mu\nu\alpha}$. Тензор $A_{\mu\nu\alpha}$ называется антисимметричным по индексам μ и υ, если $A_{\mu\nu\alpha} = -A_{\upsilon\mu\alpha} \equiv A_{\mu\nu\alpha}$. Любой тензор с двумя индексами одинаковой ковариантности можно представить в.виде суммы симметричного и антисимметричного по этим индексам тензоров. Внутреннее произведение по двум парам индексов симметричного (по этим иидексам) тензора на антисимметричный (по этим же индексам) равно нулю.

Особый интерес представляют антисимметричные по всем индексам тензоры ранга, равного размерности многообразия. Рассмотрим в 4-мерном многообразии такой тензор $B^{\alpha\beta\gamma\delta}$. Очевидно, что все его компоненты с хотя бы двумя совпадающими индексами равны нулю. Осталыные компоненты четной или нечетной перестановкой индексов можно привести к компоненте $B^{0123} \equiv B$. Следовательно, все 256 компонент тензора $B^{\alpha\beta\gamma\delta}$ принимаIот одно из трех значений: $+B, 0, -B$. Представим этот тензор в виде

$$B^{\alpha\beta\gamma\delta} = B\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ - антисимметричный по всем иптексам символ Леви-Чивиты с компонентами

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1, \text{ если компоненты приводятся к комбинации} \\ 0123 \text{ четным числом перестановок;} \\ 0, \text{ если есть совпадающие индексы;} \\ -1, \text{ если компоненты приводятся к комбинации} \\ 0123 \text{ нечетным числом перестановок} \end{cases}$$

Символ Леви-Чивиты (не являющийся тензором) чрезвычайно полезен при построении детерминантов произвольных величин $B_{\mu\nu}$ (не обязательно тензорных). Легко убедиться, что определитель $\|B_{\mu\upsilon}\|$ записывают с его помощью в виде

$$\|B_{\mu\nu}\| = (1/4!)\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}B_{\alpha\mu}B_{\beta\upsilon}B_{\gamma\lambda}B_{\delta\sigma}.$$

В частности, якобиан y преобразования координат представляется следующим образом:

$$y = \frac{1}{4!}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\gamma}}\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\delta}}.$$

Величина B в (1.2) - не скаляр. Она преобразуется по закону $B' = yB$

28.2.3 3. Metric Tensor

Важным элементом пространственно-временных отношений между событиями (точками) является метрика*. Она означает, что в множестве точек-событий определена действительная двухточечная скалярная функция $\mathscr{J}(x, y)$, где x и y-две точки. Эта функция обладает свойствами:

$$\mathcal{I}(x, y) = \mathscr{I}(y, x); \quad \mathcal{J}(x, x) = 0.$$

Можно было бы развить теорию, опираясь на глобальное задание метрических отношений. Элементы этой теории можно найти в книге [5], где метрическая функция $\mathscr{I}(x, y)$ названа мировой функцией. Однако целесообразно исходить из инфинитезимального задания метрики, т. е. ее определения для двух бесконечно близких точек. Тогда эта функция называется квадратом интервала и записывается в виде

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^v$$

где dx^μ - разность координат двух близких точек. Коэффициенты $g_{\mu\nu}$ - функции координат - определяют метрические свойства пространства-времени. С помощью строгой теоремы частного

Еще Риман ставнл вопрос «о внутренней причине возникновения метрических отношений в пространстве». Прн этом он писал: «Этот вопрос, копечно, также относится к области учения о пространстве, и при рассмотрении его следует принять во внимание сделанное выше замечание о том, что в случае дискретного многообразия принцип метрических отношений содержится уже в самом понятии этого многообразия, тогда как в случае непрерывного многообразия его следует искать где-то в другом месте» [14, с. 32]. Скорее всего, классические метрические отношения обязаны принципам квантовой механики. Именно атомно-молекулярная структура твердых тел позволяет говорить об измерении длины и времени. По-вндимому, можно высказать более сильное утверждение, что постулаты квантовой механюки как в теории Бора, так и в современной квантовой теорин следует рассматрнвать как замеяiощие постутаты метрическия ОТНОШеНИ. легко показать, что $g_{\mu\nu}$ является ковариантным тензором второго ранга. Очевидно, что (1.6) представляет собой простейшее выражение для метрической функции между близкими точками, удовлетворяющее (1.5) *.

Представим метрический тензор $g_{\mu\nu}$ в виде суммы симметричной и антисимметричной частей: $g_{\mu\nu} = g_{\underline{\mu\nu}} + g_{\mu\nu}$. Величина $dx^\mu dx^\nu$ в (1.6) - симметричный тензор второго ранга. Следовательно, для определения квадрата интервала (метрики) антисимметричная часть метрического тензора несущественна **, поэтому без ущерба для общности следует считать метрический тензор симметричным. Это значит, что в общем случае $g_{\mu\nu}$ имеет десять различных компонент. [В многообразии n измерений различных компонент может быть $(1/2)n(n+1)$.

Метрическому тензору $g_{\mu\nu}$ сопоставляется контравариантный тензор

$$g^{\mu v} = \Delta_{\mu v}/g$$

где $g \equiv \|g_{\mu\nu}\|$ - определитель матрицы $\{g_{\mu\nu}\}; \Delta_{\mu\nu}$ - алгебраическое дополнение соответствующего элемента матрицы $g_{\mu\nu}$. Внутреннее произведение $g^{\mu v}g_{\mu\sigma} = g^v_\sigma$ определяет смешанный метрический тензор, имеющий одинаковые компоненты во всех системах координат (символ Кронекера):

$$g^v_\sigma = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ если } \sigma = v \\ 0, \text{ если } \sigma \neq v \end{array} \right] \equiv \delta^v_\sigma.$$

При помощи метрического тензора произвольным тензорам однозначно сопоставляются тензоры противоположной ковариантности, например: $B_v \to B^\mu = B_v g^{\mu v}; B^\sigma \to B_v = B^0 g_{\sigma v}$ и т. д.

вадрат интервала (1.6) представляет собой квадратичную форму, а по основной теореме о квадратичных формах в алгебре всякую квадратичную форму с действительными коэффициентами можно привести некоторым невырожденным линейным преобразованием с действительными коэффициентами к диагональному виду. Следовательно, в любой точке допустимыми преобразованиями координат метрический тензор можно привести к виду $g_{\mu\nu} =. = \pm\delta_{\mu v}$. Такие системы координат называют локально-декартовыми. Их бесконечно много.

Математики исследовали геометрии с более общими, нежели (1.6), видами метрикн. Такие геометрии в литературе обычно называют финслеровыми [23]. Пока не ясна целесообразность применения финслеровых геометрий для описajня физического пространства-времени. Заметим, что впервые обратил внимание -а возможность построения таких более общих геометрий Риман [14, с. 18].

**Не будем пока обсуждать попытки Эйнштейна в последние годы жизни использовать антисимметричную часть метрики для построения единой теории гравнтации н электромагнетизма ($g_{\mu\nu} \leftrightarrow F_{\mu\nu}$) [18, с. 615].

$$\Gamma_{\mu\nu,\sigma} \equiv \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{v}} \frac{\partial x'\bar{\gamma}}{\partial x^{\sigma}} \Gamma'_{\alpha\beta,\gamma} + \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{v}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} g'_{\alpha\beta};$$
$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{v}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\sigma}} \Gamma'^{\sigma}_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{v}} \frac{\partial x'}{\partial x'^{\alpha}}.$$

Из этих формул видно, что тензорный закон преобразованя нарушается присутствием справа вторых производных. При линейных преобразованиях координат $x'^{\mu} = \omega^{\mu}_{\cdot v} x^{\nu}$, где $\omega^{\mu}_{\cdot} = \text{const}$, «лишние» члены исчезают и символы Кристоффеля преобразуются, как тензоры.

Для любой точки A многообразия всегда можно выбрать такую систему координат $\{x'\}$, что в ней все компоненты символа Кристоффеля в точке A равны нулю. Легко убедиться с помощью формул (1.15), что подобный переход осуществляется следующим допустимым преобразованием координат:

$$\tilde{x}''^{\mu} = (x^{\mu} - x^{\mu}_{A}) + (1/2) \left(\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\right)_{A} (x^{\alpha} - x^{\alpha}_{A}) \left(x^{\beta} - x^{\beta}_{A}\right),$$

где $\left(\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\right)_{A}$ - постоянные величины, равные значениям символов Кристоффеля в точке A в системе координат $\{x\}$; x^{α}_{A} - координаты точки A. Такую систему координат называют локально-геодезической.

Преобразование (1.16) примечательно еще тем, что значения компонент метрического тензора в точке A в системах координат $\{x\}$ и $\{x'\}$ совпадают. Воспользовавшись этим, можно сначала перейти в данной точке в локально-декартовую систему координат, а затем с помощью (1.16) в локально-геодезическую. В результате получим локально-инерциальную систему координат.

Нетрудно показать, что для любой геодезической в рассматриваемом многообразии можно выбрать такую систему координат, что все компоненты символа Кристоффеля во всех точках геодезической обращаются в нуль. Такая система координат называется геодезической.

28.2.4 5. Operators of Covariant Differentiation. Parallel Transport

Легко показать, что частные производные от тензорных величин не являются тензорами. Однако, учитывая трансформационный закон для символов Кристоффеля (1.15), частной производной можно сопоставить оператор, приводящий к тензорному результату

$$\nabla_{\sigma} B^{\overset{n}{\alpha\beta}\cdots}_{m} \equiv B^{\alpha\beta\ldots}_{\mu\nu\ldots;} = \frac{\partial B^{\alpha\beta\ldots}_{\mu\nu\ldots}}{\partial x^{\sigma}} + \underbrace{\Gamma^{\alpha}_{\sigma\lambda} B^{\lambda\beta\ldots}_{\mu\nu\ldots}}_{n} + \Gamma^{\beta}_{\sigma\lambda} B^{\alpha\lambda}_{\mu\nu\ldots} + \ldots$$
$$\underbrace{-\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} B^{\alpha\beta}_{\lambda v\ldots\ldots} - \Gamma^{\lambda}_{v\sigma} B^{\alpha\beta\ldots}_{\mu\lambda\ldots} - \ldots.}_{m}.$$

и называемый ковариантной производной тензора $B^{\alpha\beta\ldots}_{\mu\nu}$

Операция ковариантного дифференцирования обладает следующими свойствами:

а) ковариантная производная от скаляров совпадает с частной пронзводной, т. е.

$$\nabla_{\sigma} B = \partial B / \partial x^{\sigma}$$

б) $\nabla_{\sigma} \left(A^{\mu\nu\ldots}_{\alpha\beta\ldots} + B^{\mu\nu\ldots}_{\alpha\beta\ldots}\right) = \nabla_{\sigma} A^{\mu\nu\ldots}_{\alpha\beta} + \nabla_{\sigma} B^{\mu\nu\ldots}_{\alpha\beta}$

в) для ковариантного дифференцирования произведения тензоров (внешнего и внутреннего) справедливо правило Лейбница

$$\nabla_{\sigma} \left(A^{\mu\ldots}_{\alpha\ldots} B^{v}_{\beta\ldots}\right) = \left(\nabla_{\sigma} A^{\mu\ldots}_{\alpha\ldots}\right) B^{v\ldots}_{\beta\ldots} + A^{\mu\ldots}_{\alpha\ldots} \left(\nabla_{\sigma} B^{v\ldots}_{\beta}\right)$$

г) ковариантные производные от метрического тензора равны нулю, т. е. при ковариантном дифференцировании метрический тензор следует рассматривать как постоянную, которую можно выносить за знак дифференцирования.

Обсудим геометрический смысл ковариантного дифференцирования. Для этого введем понятие бесконечно малого параллельного переноса малых смещений или тензорных величин, причем это по-

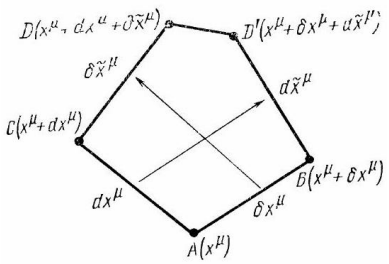


Рис. 1. Параллельный перенос смещений нятие будем рассматривать несколько шире рамок римановой геометрии.

Пусть смещение δx^μ соединяет близкие точки A и B с координатами x^μ и $x^\mu + \delta x^\mu$ соответственно (рис. 1). Возьмем третью точку C с координатами $x^\mu + dx^\mu$ (δx^μ и dx^μ - величины одного порядка). Зададимся целью сопоставить смещению AB смещение CD такое, что $(CD)^\mu = \tilde{\delta x}^\mu$ линейно выражается через смещения dx^μ и δx^μ, т. е.

$$\delta\tilde{x}^\mu = \delta x^\mu - K^\mu_{\alpha\beta} dx^\alpha \delta x^\beta$$

где величины $K^\mu_{\alpha\beta}$, называемые коэффициентами связности (или связностью), являются важными характеристиками дифференциальной геометрин. Такое сопоставление называют параллельным переносом относительно $K^\mu_{\alpha\beta}$. Особо подчеркнем, что $K^\mu_{\alpha\beta}$ в общем случае не обязаны быть симметричными.

Наложим на геометрию дополнительное условие сохранения длины смещения при параллельном переносе:

$$ds^2_{AB} = g_{\mu v}(A)\delta x^\mu \delta x^v = ds^2_{CD} = g_{\mu v}(C)\tilde{\delta x}^\mu \tilde{\delta}^v$$

Тогда, подставляя (1.18) в (1.19) и учитывая, что в первом приближении $g_{\mu\nu}(C) = g_{\mu\nu}(A) + [\partial g_{\mu\nu}(A)/\partial x^\sigma]\, dx^\sigma$, находим:

$$-\partial g_{\mu\nu}/\partial x^\sigma + K_{\sigma\mu,v} + K_{\sigma v,\mu} = 0.$$

Здесь все величины определены в точке A. Складывая три соотношения вида (1.20) с соответствующим образом переставленными индексами и знаками, получаем связь между символами Кристоффеля и коэффициентами связности:

$$\Gamma_{\mu v,\sigma} = (1/2)\left[(K_{v\mu,\sigma} + K_{\mu v,\sigma}) + (K_{v\sigma,\mu} - K_{\sigma v,\mu}) + (K_{\mu\sigma,v} - K_{\sigma\mu,v})\right].$$

Если коэффициенты связности симметричны, то они совпадают с символами Кристоффеля. Именно так обстоит дело в римановой геометрии $\left(\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = K^\sigma_{\mu\nu}\right)$, где согласно (1.20) обращение в нуль ковариантной производной от метрического тензора имеет геометрический смысл сохранения длины интервала при параллельном переносе.

Для параллельного переноса ковариантных векторов естественно положить:

$$B_\mu(x + dx) = B_\mu(x) - \widetilde{K}^\alpha_{\sigma\mu} dx^\sigma B_\alpha(x),$$

где $\hat{K}^\alpha_{\sigma\mu}$ - коэффициенты связности, определяющие перенос ковариантных тензоров. В римановой геометрии требование равенства длин векторов в обеих точках означает, что $\widetilde{K}^\alpha_{\sigma\mu} = -\Gamma^\alpha_{\sigma\mu}$.

Выясним геометрический смысл возможной антисимметричной составляющей коэффициентов связности. Для этого перенесем смещение AC вдоль δx^μ (см. рис. 1). Тогда точке C будет соответ. ствовать точка D' с координатами $x^\mu + \delta x^\mu + \widetilde{x}^\mu$, где $d\tilde{x}^{\mu i}$ выражается формулой вида (1.18). Эта точка в общем случае не совпадает с точкой D. Компоненты отрезка DD'

$$(DD')^{\mu} = \left(x^{\mu} + dx^{\mu} + \widetilde{\delta x^{\mu}}\right) - (x^{\mu} + \delta x^{\mu} + d\widetilde{x}^{\mu}) =$$
$$= \left(K^{\mu}_{\beta\alpha} - K^{\mu}_{\alpha\beta}\right) dx^{\alpha}\delta x^{\beta} \equiv 2S^{\mu}_{\beta\alpha} dx^{\alpha}\delta x^{\beta},$$

где согласно строгой теореме частного

$$S^{\mu}_{\alpha\beta} = (1/2)\left(K^{\mu}_{\alpha\beta} - K^{\mu}_{\beta\alpha}\right)$$

является тензором и называется тензором кручения.

Таким образом, в пространствах с кручением точки D и D' не совпадают во втором порядке малости, т. е. в этом приближении нарушается правило параллелограмма.

Взглянем на изложенное с позиций более общих дифференциальных геометрий Схоутена [24], в которых ковариантный дифференциал есть однородная линейная функция как относительно дифференцируемой величины, так и относительно перемещения, а для операции ковариантного дифференцирования выполняются свойства:а) -в) ковариантных производных.

Дифференциальные геометрии, удовлетворяющие этим требованиям, полностью характеризуются тремя тензорными величинами:

тензором кручения $S^{\mu}_{\alpha\beta}$;

разностью коэффициентов связности, определяющих дифференцирование ко-и контравариантных тензоров,

$$\tilde{K}^{\mu}_{\alpha\beta} - K^{\mu}_{\alpha\beta} = W^{\mu}_{\alpha\beta}$$

ковариантной пронзводной (относительно связности $\widetilde{K}^{\mu}_{\alpha\beta}$) метрического тензора

$$g_{\mu v|\sigma} = Q_{\mu v\sigma}$$

жоторая в общем случае отлична от нуля *

Каждая из этих трех характеристик может быть нормальной, вырождающейся или нулевой. Таким образом, приходим к выводу о возможности $3^3 = 27$ типов дифференциальных геометрий. Риманова геометрия, которая используется для описания теории гравитации, является простейшей из них, когда все три тензорные характеристики (схоутены) обращаются в нуль.

28.2.5 6. Curvature Tensor and Its Properties

Введем важную характеристику римановой геометрии, строящуюся с участием вторых производных от метрического тензора,-тензор кривизны. Это можно сделать несколькими способами. Выберем наиболее непосредственный, формальный. Прокоммутируем операторы ковариантного дифференцирования, действующие на произвольный вектор B_{α}:

$$B_{\alpha:v;\mu} - B_{\alpha;\mu;v} = \left(\frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu}}{\partial x^{v}} - \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\alpha v}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\mu}\Gamma^{\lambda}_{\sigma v} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha v}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu}\right) B_{\lambda} \equiv$$
$$\equiv R^{\lambda}_{\cdot\alpha v\mu} B_{\lambda}$$

где

$$R^{\lambda}_{\cdot\alpha v\mu} = \partial\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu}/\partial x^{\nu} - \partial\Gamma^{\lambda}_{\alpha v}/\partial x^{\mu} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\mu}\Gamma^{\lambda}_{\sigma v} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha v}\Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu}$$

согласно строгой теореме частного является тензором. Он иазывается тензором кривнзны четвертого ранга и.ти тензором Рииана Кристоффеля. Верхний индекс будем считать первым, так что $R_{\alpha\beta\mu\nu} = R^{\lambda}_{\cdot\beta\mu\nu} g_{\lambda\alpha}$

Гсомегрии с $Q_{\mu\sigma} \neq 0$ испольэованы Вейлем [14, с. 513] и Эддин тоном [1, 25] для построснния с.ани теории гравиташии и электромагнетизма. В теори! Вей.ts $Q_{\mu v\sigma} = g_{\mu v} A_{\sigma}$, где A_{σ} с гочностью до множителя представ.iяст собой вскторнй потени!a.i элеитромагнитного по.тя (см. $11.4 !. Тензор Римана - Кристоффеля обладает следующими свойствами:

з формулы (1.27) непосредственно видно, что

$$R^{\lambda}_{\cdot\alpha\nu\mu} = -R^{\lambda}_{\cdot\alpha\mu\nu}; \quad R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\upsilon\mu}$$

Раскрывая в (1.27) символы Кристоффеля через производные от метрического тензора, можно убедиться, что

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}$$

Аналогично можно показать, что

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$$

Используя локально-геодезическую систему координат, легко доказать тождество Риччи

$$R^{\lambda}_{\cdot\alpha\upsilon\mu} + R^{\lambda}_{\cdot\mu\alpha\nu} + R^{\lambda}_{\cdot\upsilon\mu\alpha} = 0$$

Кроме перечисленных алгебраических свойств пмеют место дифференциальные тождества Бианки

$$R^{\lambda}_{\cdot\alpha\upsilon\mu;\sigma} + R^{\lambda}_{\cdot\alpha\sigma\upsilon;\mu} + R^{\lambda}_{\cdot\alpha\mu\sigma;\upsilon} = 0$$

Их также легко доказать с помощью локально-геодезической системы координат.

Используя свойства симметрии (1.28)-(1.31), можно показать, что в многообразии n измерений в общем случае число алгебраически независимых компонент тензора Римана-Кристоффеля $N = (1/12)n^2\,(n^2-1)$

Параллельно перенося тензоры из произвольной точки A в точку D вдоль различных сторон параллелограмма (см. рис. 1), легко убедиться в том, что тензор Римана - Кристоффеля определяет разность компонент тензоров, перенесенных из одной точки в другую (близкую) двумя разными путями:

$$\Delta B^{\overbrace{\alpha\beta\cdots}^{n}}_{\underbrace{\mu\nu\ldots}_{m}}(D) == \underbrace{-(1/2)R^{\alpha}_{\cdot\lambda\sigma\varkappa}B^{\lambda\beta\cdots}_{\mu\nu\ldots}ds^{\sigma\varkappa} - \cdots}_{n} + \underbrace{+(1/2)R^{\lambda}_{\cdot\mu\sigma\varkappa}B^{\alpha\beta}_{\lambda\cdot\nu}\ldots ds^{\sigma\varkappa} + \cdots}_{m}.$$

где $ds^{\sigma\varkappa} = dx^{\sigma}\delta x^{\varkappa} - dx^{\varkappa}\delta x^{\sigma}$ - площадь параллелограмма $ABCD$ ($ABCD'$). Равносильно утверждение, что тензор кривизны определяет разность компонент тензоров: исходного и после переноса по замкнутому контуру *.

Тензору Римана - Кристоффеля можно сопоставить, произведя свертку по двум индексам, тензор кривнзны второго ранга:

Можно развить теорию искривленного миогообразня, выбнрая в качестве первичного понятия перенос по бесконечно малому замкпутому коитуру - перемещение, ассоциированное с ииклоч [26]. Такие формулировки ОТО развивались в работах [27, 28] и др. $R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\cdot\mu\lambda\nu}$, называемый тензором Риччи (свертка с последним индексом приводит к выражению с обратным знаком). С помощью (1.30) легко убедиться, что $R_{\mu\nu} = R_{\upsilon\mu}$. Умножая $R_{\mu\nu}$ внутренним образом на $g^{\mu\nu}$, получаем скалярную кривизну $R = R_{\mu\upsilon}g^{\mu\nu}$.

28.2.6 7. Fundamental Equations of General Relativity

Центральное место в ОТО занимает вопрос о зависимости искривления пространства-времени от распределения и свойств находящейся в нем материи. Этот вопрос был решен в 1915-1916 гг. открытием уравнений Эйнштейна *.

Искомые уравнения должны были связать геометрические пространственно-временные величины и физические характеристики материи. Уже из ньютоновой теории гравитации следует, что в качестве источника гравитации следует выбирать величину, содержащую плотность или массу материи. После создания СТО стало ясно, что искомая характеристика должна содержать скорость. Игнорируя экзотические комбинации, можно ограничиться простымп тензорными выражениями. Простейшим из них является импульс материи. Но эта величина фактически уже занята в электродинамике, где во второй паре уравнений Максвелла справа стоит ток.

Следующим кандидатом на роль источника искривления был тензор энергии-импульса материи $T^{\alpha\beta}$. Это предположение и оказа.тось правильным.

Какую геометрическую величину надо сопоставить $T^{\alpha\beta}$? Вопервых, это также должна быть тензорная величина второго ранга. Во-вторых, она должна обладать таким же важным свойством, что и $T^{\alpha\beta}$:

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$$

являющимся обобщением известного в плоском пространстве-времени (в декартовых координатах) соотношения $\partial T^{\alpha\beta}/\partial x^{\beta} = 0$, приводящего к закону сохраненния энергии-импульса материи. Эту геометрическую величину можно получить сверткой тождеств Бианки (1.32) по индексам λ, v и умножением их на $g^{\alpha\mu}$. В результате находим:

$$R_{;}\sigma - 2R^{\beta}_{\sigma;\beta} = 0 \rightarrow \left[R^{\alpha\beta} - (1/2)g^{\alpha\beta}R\right]; \beta = 0.$$

Для получения уравнений Эйнштейна остается только приравнять с помощью размерного коэффициента две величины:

$$R^{\alpha\beta} - (1/2)g^{\alpha\beta}R \equiv G^{\alpha\beta} = xT^{\alpha\beta},$$

где коэффициент x называется эйнштейновской гравитационной постоянной. Из сопоставления с уравнением Пуассона в ньютоно-

Фундаментальные уравпения физпки по существу не выводят, а открывают. Даже в тех случаях, когда как будто предлагается их вывод (из вариациошного или иного принципа), на самом деле пропзводится замена постулатов. вой теории гравитации следует $x = 8\pi k/c^4$, где k - ньютонова гравитационная постоянная; c - скорость света. Иногда удобно записывать уравнения Эйнштейна в ином виде. Умножив (1.36) на $g_{\alpha\beta}$, получим $R = -xT$. Подставляя зто соотношение в (1.36), находим:

$$R^{\alpha\beta} = x\left[T^{\alpha\beta} - (1/2)g^{\alpha\beta}T\right].$$

Для пустого пространства-времени уравнения Эйнштейна упрощаются:

$$R_{\alpha\beta} = 0$$

Если быть до конца последовательными, то нужно учитывать, что обращается в нуль ковариантная дивергенция еще от одной геометрической величины: $g^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$, поэтому уравнения Эйнштейна можно обобщить:

$$R^{\alpha\beta} - (1/2)g^{\alpha\beta}R + \Lambda g^{\alpha\beta} = xT^{\alpha\beta}$$

Здесь коэффициент Λ обычно называют космолодической постоянной. Чаще всего полагают $\Lambda = 0$, однако вопрос о необходимости космологической постоянной и значении Λ еще дискутируется.

Под компактной записью уравнений (1.36)-(1.38) скрыта сложная система из 10 нелинейных дифференциальных уравнений (в частных производных) второго порядка относительно компонент $g_{\mu v^*}$ Однако вследствие четырех тождеств Бианки (1.35) из: 10 уравнений Эйнштейна независимыми являются только шесть. Поэтому для нахождения 10 компонент метрического тензора $g_{\mu v}$ следует использовать четыре дополнительных необщековариантных (координатных) условия

$$f_{(\alpha)}\left(g_{\mu v}, x^{\lambda}\right) = 0$$

Важнейшие уравнения поля в искривленном пространствэ-времени. Как уже отмечалось, пока лишь гравитационное поле принято описывать с помощью внутренних пространственно-временных характеристик. Остальные поля описываются через внешние к пространственно-временным величины. (Геометризацию электромагнитного и скалярного полей в рамках 5-мерной теории см. в ГЛ. 11.)

Выпишем основные уравнения для таких полей в искривленном пространстве-времени. При этом будем руководствоваться следующим правилом: соответствующие уравнения нужно записать в тензорном лоренц-ковариантном виде, а

затем метрический тензор плоского пространства-времени заменить величиной $g_{\mu v}$, а частные производные- ковариантными.

У р а в н е и я а кс в ел л а. Легко убедиться, что в искривленном пространстве-времени тензор электромагнитного поля можно записывать в обычном виде:

$$F_{\mu\nu} = A_{v;\mu} - A_{\mu;v} = \partial A_v/\partial x^\mu - \partial A_\mu/\partial x^v.$$

Первая пара уравнений Максвелла в ОТО также сохраняет свой обычный вид:

$$F_{\mu v;\lambda} + F_{v\lambda;\mu} + F_{\lambda\mu;v} = \partial F_{\mu v}\partial x^\lambda + \partial F_{v\lambda}/\partial x^\mu + \partial F_{\lambda\mu}/\partial x^v = 0.$$

Вторая пара уравнений Максвелла в плоском пространствевремени записывается следующим образом (в декартовых координатах):

$$\partial F^{\mu v}/\partial x^v = 4\pi j^\mu$$

тде $j^\mu = \varepsilon dx^\mu/ds$ – 4-ток; ε (?) плотность электрического заряда. Произведя необходимые замены, получим в искривленном пространстве-времени

$$F^{\mu v}_{;v} = (1/\sqrt{-g})\,(\partial/\partial x^v)\left(\sqrt{-g}F^{\mu v}\right) = 4\pi j^\mu.$$

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

$$T^{\mu\nu} = -(1/4\pi)\left[F^\mu \cdot {}_\alpha F^{v\alpha} - (1/4)g^{\mu v}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right].$$

У ра в нени и е Клей на-Фока. После необходимых замен это уравнение имеет вид:

$$g^{\mu\nu}\left(\partial^2\Psi/\partial x^\mu\partial x^\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\partial\Psi/\partial x^\alpha\right) + (mc/\hbar)^2\Psi = 0.$$

Однако в него можно добавить еще одно слагаемое

$$\left[g^{\mu v}\nabla_\mu\nabla_v + (mc/\hbar)^2 + aR\right]\Psi = 0,$$

где R-скалярная кривизна: a - некоторая постоянная. Ее значение зависит от способа получения этого уравнения или других соображений: $a = -1/4$ - при получении уравнения Клейна - Фока квадрированием уравнений Дирака в искривленном пространстве-времени; $a = -1/3$ - при выводе уравнения Клейна - Фока на основе фейнмановского суммирования по историям в ОТО; $a = -1/6$ - при требовании конформной инвариантности уравнения для безмассового скалярного поля.

Тензор энергии-импульса скалярного нейтрального поля чаще всего записывают в виде

$$T_{\mu\nu} = \Psi_{,\mu}\Psi_{,v} + (1/2)g_{\mu\nu}\left[(mc/\hbar)^2\Psi^2 - g^{\alpha\beta\Psi_{,\alpha}}\Psi_{,\beta}\right].$$

Следует заметить, что вид тензора энергии-импульса скалярного поля окончательно не ясен [29]. В ряде работ отмечалось, что, во-первых, $T_{\mu\nu}$ скалярного поля должен быть таким, чтобы при $m = 0$ его след обращался в нуль ($T = 0$); во-вторых, $T_{\mu\nu}$ может содержать вторые производные от Ψ. В связи с этим предлагались различные выражения для $T_{\mu\nu}$. Например, в статьях А. А. Гриба, С. Г. Мамаева, В. М. Мостепаненко для заряженного скалярного поля использовалось выражение

$$T'_{\mu\nu} = 2\left\{\Psi^*_{,\mu}\Psi, \nu + (1/2)g_{\mu\nu}\left[(mc/\hbar)^2\Psi * \Psi - (R/6)\Psi^*\Psi -\right.\right.$$
$$\left.\left. -g^{\alpha\beta\Psi^*,\alpha}\Psi_{,\beta}\right]\right\} - (1/3)\left(\nabla_\mu\nabla_v - R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\right)\Psi^*\Psi.$$

Для полноты картины следовало бы здесь же записать уравнения Дирака в пгскривленном пространстве-времени. Однако это будет сделано в гл. 7, где изложен необходимый математический аппарат (тетрадный формализм).

Некоторые важнейшие уравнения мировых линий. Уравнения движения заряженной частицы (с зарядом q) в электромагнитном поле и искривленном пространстве-времени имеют вид:

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} + \frac{q}{mc^2}F^\mu_{\cdot\alpha}\frac{dx^\alpha}{ds}.$$

Уравнения изотропных геодезических (вдоль которых $s = 0$) можно получить из условня параллельного переноса волнового вектора k^α вдоль самого себя:

$$k^\sigma \nabla_\sigma k^\mu = 0 \to k^\sigma \left(\partial k^\mu / \partial x^\sigma + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma} k^\lambda\right) = 0.$$

Волновой вектор k^μ касателен к изотропной геодезической, и его длина равна нулю $k^\mu k^v g_{\mu\nu} = 0$.

28.2.7 8. Mobility of Riemannian Spaces

В общем случае запнсанные уравнения очень сложны. Нет универсального метода нахождения решений уравнений Эйнштейна, тем более совместных систем из уравнений Эйнштейна и других полей. Однако получение решений существенно упрощается, если искомая метрика обладает некоторыми симметриями. В ряде случаев задача вообще сводится к решению системы алгебрапческих уравнений. В этом параграфе сформулированы основы теорин симметрий, или подвижности римановых пространств.

Предварительно введем новую операцию - дифференцирование u. Пусть в римановом многообразии задано векторное поле ξ^μ, тогда можно определить тензорный оператор, называемый производной Ли*, вдоль векторного поля ξ^μ[30]:

$$\mathcal{L}_\xi B^{\overbrace{\nu\cdots}^{n}}_{\underbrace{\beta\cdots}_{m}} = \xi^\sigma \nabla_\sigma B^v_{\beta\ldots} \underbrace{-B^\sigma_{\beta\ldots}\nabla_\sigma \xi^v - \ldots}_{n} \cdot \underbrace{+B^v_{\sigma\ldots}\nabla_\beta \xi^\sigma + \ldots.}_{m}$$

где $B^\vartheta_{\beta\ldots}$ - произвольный тензор; ∇^{--}_σоператор ковариантной производной Лй были введены в 1931 г. В. Шлебодзньсиим [31]. Название «производная Ли» предложн.т Ван Данциг. го дифференцирования. Расписывая явно оператор ∇, легко привести производную Ли к более простому виду

$$\underbrace{+B^{v\cdots}_{\sigma\ldots}\xi^\sigma/\partial x^\beta + \ldots}_{m} + \xi^\sigma \partial B^v_{\beta\ldots}\cdots/\partial x^\sigma \underbrace{-B^\sigma_{\beta\ldots}\cdots\partial\xi^v/\partial x^\sigma - \cdots}_{n} + \underbrace{+B^{v\cdots}_{\sigma\ldots}\xi^\sigma/\partial x^\beta + \ldots}_{m}$$

К производным Ли можно прийти, рассуждая следующим образом. Пусть в окрестности точки с координатами x^σ определен произвольный тензор $B^v_{\beta\ldots}(x^\sigma)$. Произведем бесконечно малое смещение вдоль вектора ξ^σ на величину $d\lambda$:

$$x^\sigma \to x^{\sigma\sigma} = x^\sigma + \xi^\sigma d\lambda$$

и рассмотрим тензор с измененным аргументом

$$B'^{\mu\cdots}_\alpha\left(x^\sigma + \xi^\sigma d\lambda\right) = B^{\mu\cdots}_{\alpha\ldots}\left(x^\sigma\right) + \xi^\sigma\left(\partial B^{\mu\cdots}_{\alpha\ldots}/\partial x^\sigma\right) d\lambda.$$

Понимая эту величину определенной в системе координат $\{x'\}$, преобразуем ее в первоначальную систему координат $\{x\}$

$$'B^{v\cdots}_\beta\ldots = \left(\partial x^v/\partial x'^\mu\right)\ldots\left(\partial x'^\alpha/\partial x^\beta\right)..B'^\mu\ldots$$

где согласно (1.50)

$$\partial x'^\alpha/\partial x^\beta = \delta^\alpha_\beta + \xi^\alpha_{,\beta} d\lambda; \quad \partial x^v/\partial x'^\mu = \delta^v_\mu - \xi^v, \mu d\lambda$$

Разность тензоров

$$'B^v_{\beta\ldots} - B^v_{\beta\ldots} \equiv\equiv \Omega B^v_\beta \cdots d\lambda$$
$$\vdots$$

называется дифференциалом Ли от тензора $B^{v\cdots}_\beta$ относительно векторного поля ξ^μ. Учитывая (1.51) и (1.52), приходим к выражению (1.49) для производной Ли.

Перечислим основные свойства производных Ли.

Производная Ли от суммы величин одинакового сорта равна сумме производных Ли от слагаемых.

Для производной Ли от произведения величин A и B справедливо правило Лейбница $\mathcal{L}_\xi(AB) = (\mathcal{L}_\xi A)B + A(\mathcal{L}_\xi B)$.

Производная Ли от тензорной плотности $\frac{\overline{5}}{B^v_\beta...}$.. произвольного веса w также является тензорной плотностью того же веса. Она записывается в виде

$$\mathcal{L}_\xi \bar{B}\underbrace{\overbrace{\nu\cdots}^{n}}_{\beta\ldots}{}^{\cdots} = \xi^\sigma \frac{\partial \bar{B}^v_{\beta\ldots}{}^{\cdots}}{\partial x^\sigma} \underbrace{-\bar{B}^\sigma_{\beta\ldots}{}^{\cdots}\frac{\partial \xi^v}{\partial x^\sigma} - ....+}_{n} + \underbrace{\bar{B}^v_{\sigma\ldots}\cdots\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta} + ... + w\bar{B}^v_{\beta\ldots}\cdots\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\sigma}}_{m},$$

что эквивалентно

$$\mathcal{L}_\xi \bar{B}\underbrace{\overbrace{\nu\cdots}^{n}}_{\beta\ldots}{}^{\cdots} = \xi^\sigma\nabla_\sigma\bar{B}^v_\beta \underbrace{-\bar{B}_{\beta\ldots}\nabla_\sigma\xi^v - ...}_{m}\underbrace{+\bar{B}^v_{\sigma\cdots\nabla_\beta}\xi^\sigma + ...}_{m} + \omega\bar{B}^\nu_\beta...\nabla_\sigma\xi^\sigma.$$

Производная Ли от символов Кристоффеля определяется указанным выше способом и является тензорной величиной.

Теперь можно перейти к определению подвижности риманова многообразия. Говорят, что риманово многообразие допускает движение (подвижно) вдоль векторного поля ξ^μ, если производная Ли от $g_{\mu v}$ вдоль ξ^μ обращается в нуль:

$$\underset{\xi}{\mathfrak{g}} g_{\mu\nu} = \xi^\sigma \partial g_{\mu\nu}/\partial x^\sigma + g_{\sigma\nu}\partial\xi^\sigma/\partial x^\mu + g_{\mu\sigma}\partial\xi^\sigma/\partial x^\nu = 0$$

Исходя из смысла производной Ли (1.53), можно сказать: подвижность многообразия означает, что измененная при смещении (1.50) метрика $g'_{\mu\nu}(x')$ должна быть точно такой же функцией аргумента x', что и первоначальная функция $g_{\mu v}(x)$ ее начального аргумента x, т. е. $g'_{\mu v}(x') = g_{\mu v}(x)$. Легко убедиться, что (1.55) можно записать иначе:

$$\xi_\xi g_{\mu v} = \xi_{v;\mu} + \xi_{\mu;v} = 0$$

Уравнения (1.55) называют уравнениями Киллинга, а векторное поле ξ^σ, удовлетворяющее уравнению Киллинга, -вектором линга.

Не всякое пространство допускает решение уравнений Киллинга. Конкретное риманово пространство не обязательно обладает вектором Киллинга. Однако может случиться, что риманово многообразие допускает не один, а несколько векторов Киллинга $\xi^{(s)}_v \quad (s = 1, 2, 3, ...)$

Обсудим важнейшие свойства векторов Киллинга.

Прокоммутируем вторые ковариантные производные от ξ_v:

$$\xi_{v;\alpha;\beta} - \xi_{v;\beta;\alpha} = R^\lambda_{\cdot v\alpha\beta}\xi_\lambda.$$

Прибавляя к этому соотношению еще два, отличающиеся циклической перестановкой индексов v, α, β, учитывая тождества Риччи (1.31) и (1.55а), находим:

$$\xi_{v;\alpha;\beta} = R^\lambda_{\beta\alpha v}\xi_\lambda$$

Это означает, что, дифференцируя (1.57) и затем используя его опять, можно выразить ковариантные производные от ξ_v любого порядка через ξ_v и $\xi_{v,\alpha}$ (с коэффициентами, зависящими от выбранной точки). Отсюда следует, что любой вектор Киллинга $\xi^{(s)}_v$ в произвольной точке x можно выразить через вектор Киллинга и его ковариантную производную в другой точке y. Действительно, разлагая $\xi^{(s)}_v(x)$ в ряд Тейлора и используя (1.57), можно записать [32] :

$$\xi^{(s)}_v(x) = A^\lambda_v(x,y)\xi^{(s)}_\lambda(y) + B^{\lambda\sigma}_v(x,y)\xi^{(s)}_{\lambda;\sigma}(y)$$

где $A^\lambda_v(x,y)$ и $B^{\lambda\sigma}_v(x,y)$ - функции, зависящие от метрики и точек x и y. Они не зависят от номера s вектора Киллинга.

Если в римановом многообразии имеется несколько векторов Киллинга $\xi_v^{(s)}$, то их линейная комбинация с произвольными постоянными коэффициентами также является вектором Киллинга. Это следует из линейности уравнений Киллинга (1.55).

Набор векторов Киллинга $\xi_v^{(s)}$ образует линейно-независимую систему в многообразии, если нельзя так подобрать постоянныь коэффициенты $c_{(s)}$, чтобы в любой точке x выполнялось соотношение

$$\sum_{(s)} c_{(s)}\xi_v^{(s)}(x) = 0$$

В общем случае коэффициенты в комбинации (1.59) меняются от точки к точке. Из соотношения (1.58) следует, что максимальное число возможных линейно-независимых векторов Киллинга (не в точке, а в многообразии)

$$N = n(n+1)/2$$

Укажем несколько важных классов многообразий с характерными наборами векторов Киллинга.

Метрическое многообразие называют однородным, если оно обладает подвижностью, позволяющей преобразованием (1.50) перевести его произвольную точку x в любую другую точку окрестности x. Другими словами, в каждой точке многообразия метрика допускает существование векторов Киллинга, принимающих произвольные значения. Многообразие с таким свойством образует grynny .

Очевидно, в каждой точке однородного n-мерного многообразия должно существовать n линейно-независимых векторов Киллинга $\xi_{(\alpha)}^{\nu}$ (индекс α нумерует векторы Киллинга). Операторы дифференцирования Ли вдоль выбранных векторов, действующие на скаляры, обозначим:

$$X_{(\alpha)} = \underset{\xi(\alpha)}{\mathfrak{Q}} = \xi_{(\alpha)}^{v}\partial/\partial x^{v}$$

Говорят, что операторы (1.60) определяют базис группы, если их коммутаторы линейно выражаются через эти же операторы, т. е.

$$+\underbrace{\bar{B}^{v}_{\sigma\ldots\ldots}\frac{\partial\xi^{\sigma}}{\partial x^{\beta}} + \ldots + w\bar{B}^{v}_{\beta\ldots\ldots}\frac{\partial\xi^{\sigma}}{\partial x^{\sigma}}}_{m},$$

«что эквивалентно

$$\{\xi_{\xi}^{\bar{B}_{\beta}^{\tau_m^*}}\underbrace{n}_{m} = \xi^{\sigma}\nabla_{\sigma}\bar{B}^{v}_{\beta}\underbrace{-\bar{B}^{\sigma}_{\beta\ldots}\nabla_{\sigma}\xi^{v} - ..}_{m}\cdot\underbrace{+\bar{B}^{v}_{\sigma\ldots}\nabla_{\beta}\xi^{\sigma} + \ldots}_{m}.+$$
$$+ w\bar{B}^{v}_{\beta\ldots}\nabla_{\sigma}\xi^{\sigma}.$$

Производная Ли от символов Кристоффеля определяется указанным выше способом и является тензорной величиной.

Теперь можно перейти к определению подвижности риманова многообразия. Говорят, что риманово многообразие допускает движение (подвижно) вдоль векторного поля ξ^{μ}, если производная Ли от $g_{\mu v}$ вдоль ξ^{μ} обращается в нуль:

$$\underset{\xi}{\mathfrak{Q}}g_{\mu\nu} = \xi^{\sigma}\partial g_{\mu\nu}/\partial x^{\sigma} + g_{\sigma\nu}\partial\xi^{\sigma}/\partial x^{\mu} + g_{\mu\sigma}\partial\xi^{\sigma}/\partial x^{\nu} = 0.$$

Исходя из смысла производной Ли (1.53), можно сказать: подвижность многообразия означает, что измененная при смещении (1.50) метрика $g'_{\mu\nu}(x')$ должна быть точно такой же функцией аргумента x', что и первоначальная функция $g_{\mu v}(x)$ ее начального аргумента x, т. е. $g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x)$. Легко убедиться, что (1.55) можно записать иначе:

$$\underset{\xi}{\varrho}g_{\mu v} = \xi_{v;\mu} + \xi_{\mu;v} = 0$$

Уравнения (1.55) называют уравнениями Киллинга, а векторное поле ξ^σ, удовлетворяющее уравнению Киллинга,-вектором Киллинга.

Не всякое пространство допускает решение уравнений Киллинга. Конкретное риманово пространство не обязательно обладает вектором Киллинга. Однако может случиться, что риманово многообразие допускает не один, а несколько векторов Киллинга $\xi_v^{(s)} \quad (s = 1, 2, 3, ...)$.

Обсудим важнейшие свойства векторов Киллинга.

Прокоммутируем вторые ковариантные производные от ξ_v:

$$\xi_{v;\alpha;\beta} - \xi_{v;\beta;\alpha} = R^\lambda_{\cdot v\alpha\beta}\xi_\lambda$$

Прибавляя к этому соотношению еще два, отличающиеяя циклической перестановкой индексов v, α, β, учитывая тождества Риччи (1.31) и (1.55a), находим:

$$\xi_{v;\alpha;\beta} = R^\lambda \cdot \beta\alpha v\xi_\lambda.$$

Это означает, что, дифференцируя (1.57) и затем используя его опять, можно выразить ковариантные производные от ξ_v любого порядка через ξ_v и $\xi_{v,\alpha}$ (с коэффициентами, зависящими от выбранной точки). Отсюда следует, что любой вектор Киллинга $\xi_v^{(s)}$ в произвольной точке x можно выразить через вектор Киллинга и его ковариантную производную в другой точке y. Действительно, разлагая $\xi_v^{(s)}(x)$ в ряд Тейлора и используя (1.57), можно записать [32]:

$$\xi_v^{(s)}(x) = A_v^\lambda(x, y)\xi_\lambda^{(s)}(y) + B_v^{\lambda\sigma}(x, y)\xi_{\lambda;\sigma}^{(s)}(y)$$

где $A_v^\lambda(x, y)$ и $B_v^{\lambda\sigma}(x, y)$ - функции, зависящие от метрики и точек x и y. Они не зависят от номера s вектора иллинга.

Если в римановом многообразии имеется несколько векторов Киллинга $\xi_v^{(s)}$, то их линейная комбинация с произвольными постоянными коэффициентами также является вектором Киллинга. Это следует из линейности уравнений Киллинга (1.55).

Набор векторов Киллинга $\xi_v^{(s)}$ образует линейно-независимую систему в многообразии, если нельзя так подобрать постоянные коэффициенты $c_{(s)}$, чтобы в любой точке x выполнялось соотношение

$$\sum_{(s)} c_{(s)}\xi_v^{(s)}(x) = 0$$

В общем случае коэффициенты в комбинации (1.59) меняются от точки к точке. Из соотношения (1.58) следует, что максимальное число возможных линейно-независимых векторов Киллинга (не в точке, а в многообразии)

$$N = n(n + 1)/2$$

Укажем несколько важных классов многообразий с характерными наборами векторов Киллинга.

Метрическое многообразие называют однородным, если оно обладает подвижностью, позволяющей преобразованием (1.50) перевести его произвольную точку x в любую другую точку окрестности x. Другими словами, в каждой точке многообразия метрика допускает существование векторов Киллинга, принимающих произвольные значения. Многообразие с таким свойством образует grynny Лu.

Очевидно, в каждой точке однородного n-мерного многообразия должно существовать n линейно-независимых векторов Киллинга $\xi_{(\alpha)}^\nu$ (индекс α нумерует векторы Киллинга). Операторы дифференцирования Ли вдоль выбранных векторов, действующие на скаляры, обозначим:

$$X_{(\alpha)} \underset{\xi(\alpha)}{\mathfrak{q}} = \xi_{(\alpha)}^v \partial/\partial x^v.$$

Говорят, что операторы (1.60) определяют базис группы, если их коммутаторы линейно выражаются через эти же операторы, т. е.

$$\left[X_{(\alpha)}X_{(\beta)}\right] \equiv X_{(\alpha)}X_{(\beta)} - X_{(\beta)}X_{(\alpha)} = C^{(\gamma)}_{(\alpha\beta)}X_{(\gamma)}$$

где $C^{(\gamma)}_{(\alpha\beta)}$ - постоянные, называемые структурными константами группы. Соотношения (1.61) являются математической формулировкой однородности многообразия. Сопоставляя векторам Киллинга $\xi^{v}_{(\alpha)}$ обратные им векторы $\xi^{(\beta)}_{v}$ согласно $\xi^{v}_{(\alpha)}\xi^{(\beta)}_{v} = \delta^{(\beta)}_{(\alpha)}$; $\xi^{\sigma}_{(\alpha)}\xi^{(\alpha)}_{\lambda} = g^{\sigma}_{\lambda}$, из (1.61) находим:

$$C^{(\gamma)}_{(\alpha\beta)} = \xi^{\lambda}_{(\alpha)}\xi^{\mu}_{(\beta)}\left(\partial\xi^{(\gamma)}_{\lambda}/\partial x^{\mu} - \partial\xi^{(\gamma)}_{\mu}/\partial x^{\lambda}\right)$$

Структурные константы удовлетворяют соотношению

$$C^{(\gamma)}_{(\alpha\beta)}C^{(\mu)}_{(v\gamma)} + C^{(\gamma)}_{(v\alpha)}C^{(\mu)}_{(\beta\gamma)} + C^{(\gamma)}_{(\beta v)}C^{(\mu)}_{(\alpha\gamma)} = 0$$

соответствующему групповому свойству ассоциативности.

В однородных пространствах в качестве n линейно-независиMLIX векторов можно выбрать $\xi^{(\beta)}_{v} = \delta^{\beta}_{v}$.

Метрическое многообразие называют изотропным в данной точке у (относительно y), если оно обладает подвижностью, оставляющей неподвижной эту точку [т. е. $\xi_v(y) = 0$], а первые производные $\xi_{v;\alpha}(y)$ в такой точке принимают все возможные значения, подчиняясь лишь условию антисимметрии (1.55а). В изотропном многообразии n измерений можно выбрать $n(n-1)/2$ векторов Киллинга $\xi^{(\alpha\beta)}_{v}$ [значки $(\alpha\beta)$ нумеруют векторы Киллинга], удовлетворяющих условиям:

$$\left.\begin{array}{l} \xi^{(\alpha\beta)}_{v}(x,y) = -\xi^{(\beta\alpha)}_{v}(x,y); \xi^{(\alpha\beta)}_{v}(y,y) = 0 \\ \xi^{(\alpha\beta)}_{v;\mu}(y,y) = \left[\left(\partial/\partial x^{\mu}\right)\xi^{(\alpha\beta)}_{v}(x,y)\right]_{x=y} = \delta^{\alpha}_{v}\delta^{\beta}_{\mu} - \delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\beta}_{v} \end{array}\right\}$$

Можно сказать, что векторы Киллинга $\xi^{(\alpha\beta)}_{v}$ определяют повороты многообразия вокруг осей, проходящих через точку y.

Однородные изотропные метрические многообразия являются максимально симметричными, так как они обладают $n(n+1)/2$ линейно-независимыми векторами Киллинга. Можно показать, что изотропное в каждой точке многообразие является однородным.

28.2.8 9. Correspondences Between Riemannian Spaces

Несомненный физический интерес представляют некоторые виды соответствий между различными римановымн пространствами, определенными на одном и том же множестве точек с единой системой координат. Рассмотрим несколько важнейших из них.

Двуметрич ч еские т т е ории. В них фигурируют многообразия, снабженные двумя произвольными римановыми метриками $g_{\alpha\beta}(x)$ и $g^{*}_{\alpha\beta}(x)$. Существенная особенность двуметрической теории состоит в том, что разность символов Кристоффеля, образованных из соответствующих метрик, является тензором $*$. В Этом легко убедиться, учитывая трансформационные свойства символов Кристоффеля (1.15) при преобразованиях координат. Двуметрическую теорию широко используют для описания «слабого» гравнтационного поля», когда метрика рассматриваемого риманова пространства мало отличается от метрики плоского пространства-времени. Последнюю выбирают в качестве второй метрики.

Конформное соответствие римановых прос т р а н с т в. Два римановых пространства с метрическими тензорами $g_{\alpha\beta}(x)$ и $g^{*}_{\alpha\beta}(x)$, определепными на одном и том же многообразии точек, называют конформно-соответствуюицими, если

$$g^{*}_{\alpha\beta}(x) = \exp[2\sigma(x)]g_{\alpha\beta}(x)$$

где $\sigma(x)$ - некоторая скалярная функция координат. В таких пространствах длины векторов с компонентами dx^{α} различаются множителем, зависящим только от выбранной точки: $ds = \sqrt{g_{\alpha\beta}(x)dx^{\alpha}dx^{\beta}} = \exp[\sigma(x)]ds$. В конформно-соответствующих пространствах

углы между соответствующими парами векторов равны. Действительно, для углов между векторами dx^α и δx^α имеем:

$$\cos\left(dx^\alpha\hat{,}\,\delta x^\alpha\right)=\frac{g_{\alpha\beta}dx^\alpha\delta x^\beta}{\sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}\sqrt{g_{\lambda\varkappa}\delta x^\lambda\delta x^\varkappa}}=\overset{*}{\cos}\left(dx^\alpha\hat{,}\,\delta x^\alpha\right)$$

Из определения (1.65) следуют соотношения между геометрическими величинами конформно-соответствующих римановых пространств пронзвольной размерности n:

$$\overset{*}{g}{}^{\alpha\beta}=\exp(-2\sigma)g^{\alpha\beta};\qquad \overset{*}{g}{}^{\beta}_{\alpha}=g^{\beta}_{\alpha}\equiv g^{\beta}_{\alpha};\qquad \sqrt{-\overset{*}{g}}=\exp(n\sigma)\sqrt{-g};$$
$$\Gamma^*_{\beta v}=\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}+g^{\alpha}_{\beta}\sigma_\gamma+g^{\alpha}_{\gamma}\sigma_\beta-g_{\beta\gamma}g^{\alpha\tau}\sigma_\tau+(?????)+\left(g^{\alpha}_{\delta}g_{\beta v}-g^{\alpha}_{\gamma}g_{\beta\delta}\right)\Delta_1\sigma$$

$$\overset{*}{R}=\exp(-2\sigma)\left[R-2(n-1)\Delta_2\sigma-(n-1)(n-2)\Delta_1\sigma\right]$$

где использованы обозначения:

$$\sigma_\mu=\partial\sigma/\partial x^\mu;\quad \sigma_{\alpha\beta}=\nabla_\alpha\nabla_\beta\sigma-\left(\partial\sigma/\partial x^\alpha\right)\partial\sigma/\partial x^\beta;$$
$$\Delta_1\sigma=g^{\alpha\beta}\left(\partial\sigma/\partial x^\alpha\right)\partial\sigma/\partial x^\beta;\quad \Delta_2\sigma=g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\sigma.$$

Эта особенность послужила основой для цикла работ по неэйнштейновской, так называемой двуметрической теории гравитации [33]. Слабое место такой теории связано с вопросами о физическом смысле и наблюдаемости второй римановой метрики. Из компонент тензора кривизны можно сконструировать конформно-инвариантный тензор

$$\ddot{C}^{\alpha}_{\cdot\beta\gamma\delta}=C^{\alpha}_{\cdot\beta\gamma\delta}=R^{\alpha}_{\cdot\beta\gamma\delta}+(n-2)^{-1}\left(g^{\alpha}_{\gamma}R_{\beta\delta}-g^{\alpha}_{\delta}R_{\beta\gamma}+R^{\alpha}_{\gamma}g_{\beta\delta}-R^{\alpha}_{\delta}g_{\beta\gamma}\right)+$$
$$+\left[R/(n-1)(n-2)\right]\left(g^{\alpha}_{\delta}g_{\beta\gamma}-g^{\alpha}_{\gamma}g_{\beta\delta}\right),$$

называемый тензором Вейля. Он обладает следующими основными свойствами:

В пустом пространстве-времени, когда $R_{\mu\nu}=0, C^{\alpha}_{\cdot\beta\gamma\delta}=R^{\alpha}_{\cdot\beta\gamma\delta}$.

C^α ио имеет те же самые свойстза симметрии (1.28) - (1.31), что и тензор Римана - Кристоффеля.

В многообразии трех измерений $C^{\alpha}_{\cdot\beta\gamma\delta}=0$. (О конформном соответствии римановых пространств двух и трех измерений - см. §10.5 и 12.2.)

Необходимым и достаточным признаком конформно-п.поских многообразий при $n\geqslant 4$ является обращение в нуль тензора Вейля. Из соотношений (1.69), (1.70) следует, что уравнения Эйнштейна не обладают свойством конформной инеариантности, тогда как уравнения Максвелла в вакууме являются конформно-инвариантными, если положить, что при конформных преобразованиях метрики (1.65) ковариантные компоненты векторного потенциала остаются инвариантными: $\overset{*}{A}_\mu=A_\mu\to\overset{*}{F}_{\mu\nu}=F_{\mu\nu}$.

Для безмассового скалярного поля Ψ уравнение [34]

$$g^{\mu v}\nabla_\mu\nabla_v\Psi-(1/6)R\Psi=0$$

является конформно-инвариантным, если при конформном преобразовании (1.65) Ψ изменяется по закону

$$\overset{*}{\Psi}=\exp(-\sigma)\Psi$$

Именно по этой причине уравнение Клейна - Фока в искривленном пространстве-времени записываоот в виде (1.44а) с коэффициентом $a=-1/6$.

Некоторые типы соответствий римановых пространств (например, проективные, Керра-Щилда) здесь рассматриваться не будут.

28.3 Asymmetry of Space and Time

28.3.1 1. Signature of Space-Time

В предыдущей главе рассмотрены метрические свойства пространства-времени, формулируемые симметрично относительно всех координат риманова многообразия. Открытие 4-мерной симметрии пространства и времени явилось одним из наиболее важных достижений теории относительности. Из-за незнания 4-мер- ной симметрии не смогли создать до Эйнштейна ОТО ни Риман, ни Клиффорд, ни Мах, хотя они были близки к этому. Все развитие теоретической физики с начала нашего века проходило под влиянием открытия 4-мерной симметрии.

Однако полной симметрии нет! Об этом свидетельствует практика, все измерения в конце концов заставляют нас говорить отдельно о пространстве и времени. Такая асимметрия пронизывает всю структуру ОТО, составляет другую сторону диалектического единства 4-мерия.

Математически это выражается в следующем. Как уже отмечалось, с помощью допустимых преобразований координат метрический тензор в произвольной точке всегда можно привести к каноническому виду

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \ldots & 0 & \\ 0 & \pm 1 & \cdots & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & \pm & 1 \end{pmatrix}.$$

Сумму диагональных элементов этой матрицы называют сигнатурой. Значение сигнатуры является инвариантной характеристикой метрики в соответствующей точке (закон инерции квадратичных форм). Часто под сигнатурой понимают эквивалентный данному определению вид строки піз знаков при единицах на диагонали, например (+ -..).

Физическое пространство-время, описываемое ОТО, имеет сигнатуру $s = -2$, т. е. $(+- \longrightarrow -)$. Заметим, что ничего не изменится, еслий выбрать сигнатуру $(- + ++)$. Главное, что одна координата (временно-подобная) выделена по сравнению с тремя остальными (пространственно-подобными).

Сигнатура $(+-2)$ соответствует важному свойству физичекого пространства-времени - отношению частичной упорядоченности между точками-событиями. Напомним, что до создания СТО абсолютное одномерное время и трехмерное пространство были совершенно различными категориями. Абсолютность времени в дорелятивистских представлениях можно понимать как свойство линейной упорядоченности пространственно-временных точек-событий. Оно означает, что для любых двух событий a и b имеет место одно из трех отношений: либо b следует за $a(b > a)$, либо a следует за $b(b < a)$, либо a и b одновременны $(a = b)$. Свойство линейной упорядоченности физически обусловлено допущением о наличии сигналов с бесконечной скоростью распространения.

Принятие постулата СТО о предельной скорости (света) привело к замене свойства линейной упорядоченности свойством частичной упорядоченности. Последнее означает, что для любых двух различных точек a и b имеет место одно из трех отношений: либо b следует за $a(b > a)$, либо a следует за $b(b < a)$, либо a и b не следуют друг за другом, т. е. они не упорядочены. Первые два отношения означают временно-подобность рассматриваемых событий, последнее - пространственно-подобность.

Свойство частичной упорядоченности можно рассматривать. как наиболее глубокую (фундаментальную) составную часть классических пространственно-временных отношений. Именно отношения упорядоченности при соответствующей увязке их с другими свойствами (аксиомами) пространства-времени обусловливают понятие причинности в физике. Отношения частичной упорядоченности подчиняются ряду аксиом [35-38], формпрующих понятие светового конуса.

Можно развить довольно содержательнуюо теорию множества лишь со свойствами частичной упорядоченности (кинематику), затем перейти к структуре с топологней, порождаемой частичной упорядоченностью, потом к заданию допустимых координат (этот вопрос затронут в §2.3) и лишь затем ввести на основе всего предыдущего рассмотрения метрику и ее связь с распределением материи [37, 39, 40]. В результате последовательного развития теории согласно этой схеме можио прийти к содержанию ОТО. При этом наиболее естественно проявляется имеющаяся в ОТО связь между

метрическими свойствами пространства-времени и свойствами частичной упорядоченности: квадрат интерва.ia между близкими точками положителен ($ds^2 > 0$), еслі точки-события упорядочены (временно-подобны), ин отрицателен ($ds^2 < 0$), если точки-события не упорядочены (пространственно-подобны).

28.3.2 2. Petrov Algebraic Classification of Einstein Spaces

Why do we need it?

(never heard answers to it)

Theory

С сигнатурой 4-мерного пространства-времени тесно связана алгебраическая классификация решений уравнений Эйнштейна (точнее, пространств Эйнштейна), предложенная А. 3. Петровым [41].

Эта классификация основана на следующем. Матрице $M_{AB}(R)$ из компонент тензора Римана (или Вейля) сопоставляется характеристическая матрица $M_{AB}(R) - \lambda\widetilde{I}_{AB}$, где λ-собственные зіачения, т. е. корни характеристического уравнения $\left\|M_{AB}(R) - \lambda\widetilde{I}_{AB}\right\| = 0; A, B$-индексы, нумерующие элементы матрицы; $\widetilde{I}_{AB}$ - аналог единичной матрицы, образованный из компонент метрического тензора. Характеристическая матрица (λ-матрица, см. ниже) приводится к канонической (нормальной) форме. Возможные канонические формы определяют алгебраические классы пространств по Петрову.

Выведем классификацию Петрова последовательно, но прежде всего дадим определение. Римановы многообразия, удовлетворяющие соотношспию

$$R_{\mu v} = \sigma g_{\mu v}$$

где σ - некоторая постоянная, при любой размерности и любой сигнатуре метрики называются пространствами Эйнштейна. Соотношение (2.1) в общем случае не совпадает с уравнениями Эйнштейна, однако пространства Эйнштейна охватывают все решения уравнений Эйнштейна. Действительно, все вакуумные решения последних являются пространствами Эйнштейна с $\sigma = 0$. Для невакуумных решений вместо тензора $R^{\alpha}_{.\beta\mu\nu}$ следует взять тензор Вейля $C^{\alpha}_{.\beta\mu\nu}$, который обладает всеми алгебраическими свойствами тензора Римана-Кристоффеля и для которого $C_{\mu\nu} \equiv 0$.

Используя свойства симметрии тензора Римана-Кристоффеля (Вейля) (1.28)-(1.30), введем для каждой пары индексов специальные (бивекторные) обозначения, которых вследствие антисимметрии должно быть шесть: $(10) \to 1$; $(20) \to 2$ $(30) \to 3$; $(23) \to 1$ $(31) \to \dot{2}$ $(12) \to \dot{3}$

В этих обозначениях все компоненты тензора Римана-Кристоффеля (Вейля) можно представить в виде симметричной квадратной матрицы:

$$M_{AB}(R) = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & Y_{1i} & Y_{12} & Y_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & Y_{21} & Y_{22} & Y_{2\dot{3}} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & Y_{31} & Y_{3\dot{2}} & Y_{3\dot{3}} \\ Y_{\dot{1}1} & Y_{\dot{1}2} & Y_{\dot{1}3} & Z_{\dot{1}}\dot{1} & Z_{\dot{1}2} & Z_{\dot{1}\dot{3}} \\ Y_{\dot{2}1} & Y_{\dot{2}2} & Y_{\dot{2}3} & Z_{\dot{2}\ddot{1}} & Z_{\dot{2}\dot{2}} & Z_{\dot{2}\dot{3}} \\ Y_{\dot{3}1} & Y_{\dot{3}2} & Y_{\dot{3}3} & Z_{\dot{3}\ddot{1}} & Z_{\dot{3}\ddot{2}} & Z_{\dot{3}\ddot{3}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} XY \\ YZ \end{pmatrix}$$

где использованы обозначения:

$$X_{ik} = R_{0i0k}; \quad Y_{r\dot{k}} = R_{rosl}(1/2)\varepsilon_{ksl}; \quad Z_{ik} = (1/4)R_{srmn}\varepsilon_{lsr}\varepsilon_{kmn}.$$

Здесь и в дальнейшем латинские индексы пробегают значения: $1, 2, 3$; ε_{ksl} (?) трехмерный символ Леви-Чивиты.

Десять условий (2.1) приводят к дополнительным симметриям в матрице (2.2). В локально-декартовой системе координат эти условия означают, что

$$X_{lk} = -Z_{ik}; \quad Y_{si} = Y_s l^\circ$$

Следовательно, матрица M_A имеет структуру, связанную с выделенностью времени

$$M_{AB} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & -X \end{pmatrix}$$

Подматрица X состоит из величин с двумя временными индексами, а Y-из величин с одним временным индексом.

Для следа подматрицы X находим из (2.1)

$$X_{11} + X_{22} + X_{33} = -\sigma$$

Из тождеств Риччи (1.31) следует, что

$$Y_{1i} + Y_{2\dot{2}} + Y_{3\dot{3}} = 0$$

Таким образом, 10 условий (2.1) уменьшают число алгебраически независимых компонент тензора Римана-Кристоффеля (Вейля) до 10.

Построим характеристическое уравнение для матрицы M_{AB} в виде

$$\|M_{AB} - \lambda \bar{g}_{AB}\| = 0$$

где $\bar{g}_{AB}$ - метрический тензор бивекторного (6-мерного) пространства:

$$\bar{g}_{AB} \to g_{\alpha\beta\mu v} = (g_{\alpha\mu} g_{\beta v} - g_{\alpha v} g_{\beta\mu})$$

обладающий теми же свойствами симметрии, что и $R_{\alpha\beta\mu\nu}$:

$$g_{\alpha\beta\mu v} = -g_{\beta\alpha\mu v} = -g_{\alpha\beta v\mu} = g_{\mu v\alpha\beta}$$

В локально-декартовой системе координат при сигнатуре физического пространства-времени $(+---)$ матрица $\bar{g}_{A\text{ в}}$ имеет вид (при ранее введенных обозначениях для парных индексов):

$$\bar{g}_{AB} = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Таким образом, характеристическое уравнение (2.6) имеет структуру

$$\|X + \lambda I - X = \lambda I\| = 0$$

Прибавляя к столбцам и строкам матрицы (2.10) другие столбцы и строки с соответствующими коэффициентами, (2.10) можно привести к виду

$$\|X + \mathrm{i}Y + \lambda I - (X - \mathrm{i}Y + \lambda I)\| = 0.$$

Следовательно, характеристическое уравнение (2.6) принимает вид:

$$\|X + \mathrm{i}Y + \lambda I\| \|X - \mathrm{i}Y + \lambda I\| = 0.$$

Отсюда следует, что достаточно рассмотреть характеристическое уравнение

$$\|X + \mathrm{i}Y + \lambda I\| = 0$$

а затем учесть комплексно-сопряженное.

Таким образом, классификация 4-мерных физических пространств Эйнштейна сводится к классификации комплесных $3 \times 3 - \lambda$-матриц (2.12). Напомним основные сведения из алгебры λ-матриц [42].

Многочленной матрицей, или λ-матрицей, называют матрицу (прямоугольную или квадратную), элементами которой являются многочлены от одного переменного λ с комплексными коэффициентами. Таковыми, в частности, являются характеристические матрицы. Над λ-матрицами можно производить так называемые элементарные преобразования трех типов: перестановку двух строк (столбцов); умножение строки (или

столбца) на число $c \neq 0$; прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на любой многочлен $f(\lambda)$.

Две λ-матрицы одинаковых размеров называются эквивалентными, если конечным числом элементарных преобразований можно получить из одной матрицы другую. Таким образом, все матрицы одинаковых размеров разбиваются на непересекающиеся классы эквивалентности. В каждом классе эквивалентности можно определить каноническую (или нормальную) λ-матрицу. Для квадратных канонических λ-матриц (размер $n \times n$) отличны от нуля только элементы на главной диагонали, причем они являются многочленами: $E_{11}(\lambda), E_{22}(\lambda), ...E_{nn}(\lambda)$ с равным 1 коэффициентом при высших степенях λ (если многочлен $E_{ii}(\lambda) \neq 0$). Кроме того, эти диагональные элементы таковы, что каждый следующий многочлен делится на предыдущий. Многочлены нулевой степени (единицы) стоят в начале диагонали, а нули - в конце. Канонические λ-матрицы являются единственными в своем классе эквивалентности; они характеризуют весь класс.

Очевидно, определитель любой матрицы из соответствующего класса эквивалентности можно выразить через диагональные элементы (инвариантные множители) канонической матрицы: $\|B(\lambda)\| = c\prod_{j=1}^{n} E_{jj}(\lambda)$, где c-постоянная. Однако определитель $\|B(\lambda)\|$ можно записать в виде $\|B(\lambda)\| = c\prod_{k=1}^{s}(\lambda - \lambda_k)^{m_k}$ где m_k - кратность соответствующего корня $\lambda_k; (\lambda - \lambda_k)$ - так называемые элементарные множители. Из сопоставления этих выражений следует, что инвариантные множители канонической матрицы имеют вид:

$$\left.\begin{array}{l} E_{11} = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_{11}}(\lambda - \lambda_2)^{\alpha_{12}} \cdot \cdots \cdot (\lambda + \lambda_s)^{\alpha_{1s}} \\ E_{22} = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_{21}}(\lambda - \lambda_2)^{\alpha_{22}} \cdot \cdots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{\alpha_{2s}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \lambda_s)^{\alpha_{ns}}, \end{array}\right\}$$

где иратности корней в инвариантных множителях удовлетворяют соотношениям:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant \alpha_{1k} \leqslant \alpha_{2k} \leqslant \cdots\cdots \alpha_{nk} \leqslant m_k \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{jk} = m_k, \quad k = 1, 2, \cdots, s. \end{array}\right\}$$

Каждому классу эквивалентности сопоставляется характеристика $[(\alpha_{11}, \alpha_{21}, ..., \alpha_{n1})\,(\alpha_{12}, \alpha_{22}, ..., \alpha_{n2})\,...\,(\alpha_{1s}, \alpha_{2s}, ..., \alpha_{ns})]$.

Возвращаясь к случаю характеристических 3X3-матриц, где максимальное число корней равно 3, легко видеть, что может существовать три и только три типа таких матриц:

$$T_1' \to [111]; \quad T_2' \to [12]; \quad T_3' \to [3]$$

К ним относятся и классы, соответствующие нескольким инвариантным множителям ненулевой степени. Чтобы различить эти возможности, В характеристике следует расставить скобки:

$T_1' \to [(1)(1)(1)]; [(1,1)(1)]; [(1,1,1)]$
– три подтипа первого типа;
$T_2' \to [(2)(1)]; \quad [(1,2)]$
– два подтипа второго типа;
$T_3' \to [(3)]$
– третий тип.

Учитывая комплексно-сопряженный множитель характеристического уравнения (2.11а), три типа Петрова следует обозначить так:

$T_1 \leftarrow [111, \overline{111}]; \quad T_2 \to [12, \overline{12}]$

$$T_3 \to [3, \overline{3}]$$

где черта сверху означает комплексно-сопряженные элементарные множители (корни).

Пенроуз предложил диаграмму для изображения всех возможных подтипов классификации Петрова (рис. 2). На диаграмме введены обозначения: I, D, O подтипы псрвого типа Петрова [соответствуют первой строке (2.13)]; II, N - - подтипы второго

типа Гетрова [соответствуют второй строке (2.13)]; III - третий тип Петрова. Заметим, что эти шесть возможностей (подтипов) обычно называют типами по Петрову (например, тип D,

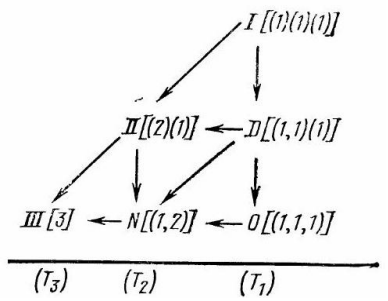


Рис. 2. Диаграмма ПетроваПенроуза для пространств Эйнштейна

28.3.3 3. Chronogeometry

Остановимся на измерении времени. Оказывается, пользуясь часами на произвольной временно-подобной мировой линии и возможностью излучать и принимать отраженные сигналы (например, световые - т. е. возможностью радиолокации), можно развить конструктивный вариант теории искривленного пространства-времени в окрестности этой мировой линии. Этот вариант теории, основан- ный на измерении времени, будем называть хроногеометрией. Такую формулировку ОТО подробно рассматривал, папример, Синг [5]. Так, Синг пишет: «Для нас единственной основной мерой является время. Длина (или расстояние), поскольку возникает необходимость или желательность их введения, будет рассматриваться как строго производное понятие». далее: «Фактически мы имеем дело с римановой хронометрией, а не с геометрией, слово геометрия, внушающее опасение, что нам, чего доброго, придется возиться с измерениями длин с помощью метровой линейки, можно было бы в этой связи полностью исключить из употребления, если бы грубое буквальное значение понятия геометрии не приобрело глубокой связи с абстрактными математическими определениями «пространства», «метрик»и т. д.» [5, с. 101].

Действительно, укажем, как можно развернуть содержание геометрии искривленного пространства-времени, ввести ее основные понятия и соотношения, исходя из показаний часов на временно-подобной мировой линии и фиксации времен испускания и приема световых сигналов.

На мировой линии имеем монотонно изменяющийся параметр τ - собственное время наблюдателя. Квадрат интервала s_1^{22} между двумя событиями на этой мировой линии задается часами: $s_{12}^2 = (\tau_2 - \tau_1)^2$

В окрестности своей мировой линии (не обязательно малой) наблюдатель самым непосредственным образом может ввести две координаты окружающих точек-событий. Поясним это. Пусть наблюдателя интересуют координаты точки-события M (вне его мировой линии), и пусть наблюдатель, испустив сигнал в момент собственного времени τ_1, отсчитываемого от некоторой точки O, получил отраженный от M сигнал в момент τ_2. Значение τ_i положительно, если точка O предшествует τ_i, и отрицательно, если O выбрано после τ_i. Время события M относительно O можно определить величиной

$$\tau_{OM} = (1/2)(\tau_2 + \tau_1)$$

расстояние между события O и M задать формулой (рис. 3)

$$l_{OM} = (1/2)(\tau_2 - \tau_1)$$

а квадрат пространственно-временного интервала между событиями - формулой

$$s_{OM}^2 = \tau_1 \tau_2$$

Легко видеть, что выполняется обычное соотношение *

$$s_{OM}^2 = \tau_{OM}^2 - l_{OM}^2$$

Заметим, что эту схему рассуждений анализировали как философы [43, с 302], так и физики [44, с. 49; 45; 46].

3. Если точка O_1 лежит между близкими моментами испускания сигнала и приема его после отражения (рис. 4), то согласно (2.16) малый отрезок O_1M пространственно-подобен, т. е.

$$ds^2_{O_1M} = (O_1M)^2 = -AO_1O_1B < 0$$

Хроногеометрическим способом можно ввести понятие скалярного произведения малого временно-подобного вектора O_1B и простран,

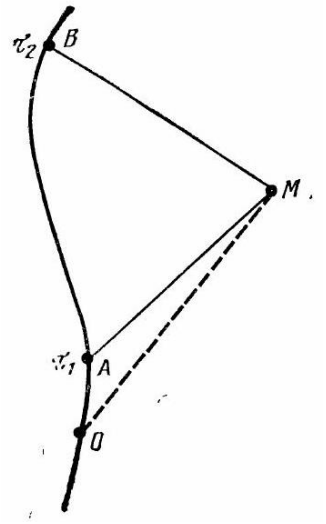


Рис. 3. Определение момента времени и расстояния события M относительно события O в хроногеометрии

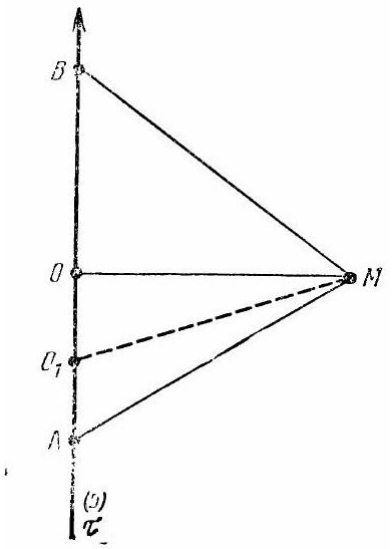


Рис. 4. Определение скалярного произведения в хроногеометрии

ственно-подобного вектора O_1M с началом в одной точке O_1 вы(0)

'бранной мировой линии τ. Для этого рассмотрим треугольник O_1BM. Для составляющих его малых векторов имеем $MB^\mu = O_1B^\mu - O_1M^\mu$. Запишем квадрат этого выражения

$$MB^\mu MB_\mu = O_1B^\mu O_1B_\mu - 2O_1B^\mu O_1M_\mu + O_1M^\mu O_1M_\mu = O_1B^2 + \\ + O_1M^2 - 2O_1B^\mu O_1M_\mu$$

Ввиду того, что MB^μ - изотропный вектор ($MB^\mu MB_\mu = 0$), хроногеометрическое определение скалярного произведения записывается следующим образом:

$$O_1B^\mu O_1M_\mu = (1/2)\left(O_1B^2 + O_1M^2\right)$$

Учитывая (2.18), находим, что векторы OB^μ и OM^μ ортогональ. , если имеет место хроногеометрическое условие $AO = OB$[5]. С помощью хроногеометрической формулы (2.19) можно определять также проекции любых смещений других векторов (в точках данной мировой линии) на направления (временно-подобные) этой мировой линии. Так, если определен 4-импульс p_μ какой-то частицы в точке O_1, то энергия этой частицы $E\left(O_1\right) = \tau^\mu\left(O_1\right) p_\mu\left(O_1\right)$, где $\tau^\mu\left(O_1\right)$ - единичный вектор, направленный вдоль мировой линии τ.

4. В хроногеометрической схеме не содержатся две оставшиеся координаты (например, углы θ и φ). Для их введения необходимо (0) дополнительно определить в окрестности мировой линии τ как (1) (2)
миiимум две другие (опорные) мировые линии τ и τ и допустить возможность сравнения направлений приходящих и испущенных сигналов с направлениями на опорные мировые линии. Это легко понять, вспомнив опорные направления в определениях сферических и цилиндрических координат в плоском пространстве. Для задания координат, аналогичных декартовым, удобнее определить три опорные мировые линии. Тогда в малой окрестности (0)
исходной мировой линии τ можно определить триаду пространственно-подобных векторов OM_k, ортогональных временно-подобНому вектору OB.

5. Покажем, как в рамках хроногеометрии можно определить значения метрического тензора $g_{\mu v}(0)$ в произвольной точке O (0) мировой линии τ [47]. Пусть в малой окрестности точки O каким угодно способом введена система координат. Ею может быть и система с хроногеометрическим заданием координат $x^0 = \tau$, $x^1 = l$ согласно п. 2. Выберем в этой окрестности 10 раличных точек-событий $M_{(r)}(r = 1, 2, ..., 10)$, тогда получим 10 хроногеометрически измеримых интервалов $ds^2_{OM(r)}$ с началом в общей точке О. Координаты выбранных точек $\left\{x_0^\mu + dx^\mu_{(r)}\right\}$. Определим квадратную матрицу, имеющую размер $10 \times 10 : y(rp) \equiv y^{\mu v}_{(r)} = \left\{dx^\mu_{(r)} dx^v_{(r)}\right\}$, где индексом p пронумерованы 10 возможных симметричных комбинаций индексов μ и v в 40-мерном многообразии. Десять точексобытий $M_{(r)}$ будем называть независимыми, если определитель $\left\|y_{(pr)}\right\| \neq 0$. Положим, что выбранные точки-события $M_{(r)}$ независимы. Тогда систему из 10 соотношений

$$ds^2_{OM(r)} = g_{\mu v}(0) dx^\mu_{(r)} dx^v_{(r)}$$

можно рассматривать как систему уравнений относительно 10 неизвестных компонент метрического тензора с матрицей известных коэффициентов $y_{(pr)}$ и хроногеометрически заданных $ds^2_{OM_{(r)}}$. Решая эту систему, находим искомые компоненты метрики $g_{\mu v}(0)$.

6. Анализ процессов трехкратного отражения сигнала между $\tau^{(1)}$ и $\tau^{(1)}$ позволяет двумя временно-подобными геодезическими τ и τ позволяет хроногеометрически ввести величины, соответствующие компонентам символов Кристоффеля.

7. Наконец, анализ процессов пятикратного отражения сигнала между двумя временно-подобными геодезическими приводит к хроногеометрическому определению величин, непосредственно связанных с компонентами тензора кривизны [47, с. 59].

28.3.4 4. Equations of Motion of Test Particles

На явном использовапии физической асимметрии временной и пространственных координат основан вывод уравнений движения пробных частіц. ак уже отмечалось, движснис свободных пробных частиц по времсино-подобным геодезическим сначала постулировалось, а затем было выведено из уравнений Эйнштейна. Кроме того, оказалось, что уравнения движеннѧ, вообще говоря, зависят от внутренней структуры

частиц. Если ее учесть, то уравнения движения следует немного подправить. Покажем это, основываясь на методе Фока и следуя работе [48].

Пусть пробная частица имеет размерь, малые по сравнению с хараитсристическими размерами внешнего поля. Будем счiтать, что ее размеры стремятся к нулю. Эволюцию частицы во времени можно изобразить в виде трубки временно-подобных мировых линий. Тензор энергин-нмпульса частиць $T^{\mu\nu}$ отличен от нуля только внутри трубки. Выделим внутри трубки некоторую линию (0) остальных координаты точек которой будсм сбоз па пространственно-подобных сечениях трубки мало сглщчаются от $x^\alpha_{(0)}$: $x^\alpha - x^\alpha_{(0)} = \xi^\alpha$. Рассмотрим интегралы вида

$$\int \sqrt{-g}T^{\mu v}d\sigma; \quad \int \sqrt{-g}T^{\mu v}\xi^\lambda_1 d\sigma; \quad \int \sqrt{-g}T^{\mu v}\xi^\lambda\xi^\rho d\sigma; ..$$

где интегрирование производится по малой области (внутри трубки) 3-мерной пространственно-подобной гиперповерхности $x^0 = \text{const}$ (рис. 5). Следует заметить, что в общем случае в искривленном пространствевремени не определены интегралы от тензорных величин, однако в малой области они имеют смысл. Эти интегралы характеризуют внутреннюю структуру пробной частицы. Пробную частицу называют монопольной, если отличны от нуля лишь какие-то компоненты и н т е г р а л а $\int \sqrt{-g}T^{\mu v}d\sigma$, тогда как все остальные интегралы обращаются в нуль. Дипольной частицей называется такая, которая имеет отличные от нуля компоненты только первых двух интегралов (2.21), квадрупольной - трех интегралов и т. д.

Выведем уравнения движения для монопольных и дипольных частиц.

Монопольные частицы. Со-

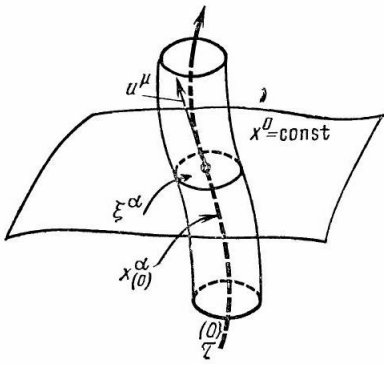


Рис. 5. Трубка временно-подобных мировых линий протяженной частицы гласно уравнениям Эйнштейна

$$T^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0 \to \left(\partial/\partial x^\beta\right)\left(V^{-g}T^{\alpha\beta}\right) + \Gamma^\alpha_{\mu v}\sqrt{-g}T^{\mu v} = 0.$$

Отсюда следуют также соотношения:

$$\left(\partial/\partial x^\gamma\right)\left(x^\alpha\sqrt{-g}T^{\beta\gamma}\right) = \sqrt{-g}T^{\alpha\beta} - x^\alpha\Gamma^\beta_{\mu v}\sqrt{-g}T^{\mu v}.$$

Интегрируя (2.22) и (2.23) по 3-мерной гиперповерхности $x^0 = \text{const}$, имеем соответственно

$$\frac{d}{dx^0}\int \sqrt{-g}T^{\alpha 0}d\alpha = -\int \Gamma^\alpha_{\mu v}T^{\mu v}\sqrt{-g}d\sigma$$

$$\frac{d}{dx^0}\int x^\alpha T^{\beta 0}\sqrt{-g}d\sigma = \int \sqrt{-g}T^{\alpha\beta}d\sigma - \int x^\alpha\Gamma^\beta_{\mu v}\sqrt{-g}T^{\mu v}d\sigma.$$

Внутри трубки разложим символы Кристоффеля в ряд

$$\Gamma^\alpha_{\mu v} = \overset{(0)}{\Gamma}_{\mu v}\mu + \overset{(0)}{\Gamma}\mu v, \sigma\ \xi^\sigma + ...$$

где индекс (0) сверху соответствует значению величин на линии $\tau^{(0)}$. Подставляя это разложение в (2.24), (2.25) и учитывая, что частица монопольная, находим в основном приближении:

$$\frac{d}{dx^0}\int\sqrt{-g}T^{\alpha 0}d\sigma+\overset{(0)}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\mu v}\int\sqrt{-g}T^{\mu v}d\sigma=0;$$
$$\int\sqrt{-g}T^{\alpha\beta}d\sigma=\frac{dx^{\alpha}_{(0)}}{dx^0}\int\sqrt{-g}T^{\beta 0}d\sigma.$$

Введем обозначение

$$M^{\alpha\beta}=u^0\int\sqrt{-g}T^{\alpha\beta}d\sigma$$

где $u^0=dx^0_{(0)}/ds;\quad ds^2=g_{\mu v}dx^{\mu}_{(0)}dx^{\nu}_{(0)}$

Тогда уравнения (2.24), (2.2$\dot{5}$) принимают вид:

$$(d/ds)\left(M^{\alpha 0}/u^0\right)+\overset{(0)}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\mu v}M^{\mu v}=0;$$
$$M^{\alpha\beta}=u^{\alpha}M^{\beta 0}/u^0,$$

где $u^{\alpha}=dx^{\alpha}_{(0)}/ds$. Полагая в (2.25б) $\beta=0$ и подставляя результат опять в (2.25б) справа, можно записать:

$$M^{\alpha\beta}=m_0u^{\alpha}u^{\beta}$$

где $m_0=(u^0)^{-2}M^{00}$ (физический смысл этого и других выражений корректно абосновывается в терминах систем отсчета, см. гл. 3). Используя (2.28) и опуская индекс (0) сверху у $\Gamma^{\alpha}_{\mu v}$, выражение (2.24б) можно представить в виде

$$(d/ds)(m_0u^{\alpha})+\Gamma^{\alpha}_{\mu v}m_0u^{\mu}u^{v}=0$$

Если использовать вполне понятное свойство (сохранения массы частицы)

$$dm_0/ds=0$$

то придем к выводу, что монопольные пробные частицы движутся по временноподобным геодезическим (1.13).

Дилольны е ч астицы. В этом случае к уравнениям (2.22), следует добавить соотношение, также следующее из (2.22):

$$\frac{\partial}{\partial x^{\delta}}\left(x^{\alpha}x^{\beta}\sqrt{-g}T^{\gamma\delta}\right)=x^{\beta}V\overline{-g}T^{\gamma\alpha}+x^{\alpha}V\overline{-g}T^{\gamma\beta}-x^{\alpha}x^{\beta}\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu}V\overline{-g}T^{\mu\nu}.$$

Опять производя интегрирование по 3-мерной пространственно-подобной гиперповерхности $x^0=\text{const}$ и используя разложение (2.26), из этих трех соотношений находим соответственно:

$$\frac{d}{dx^0}\int\sqrt{-g}T^{\alpha 0}d\sigma+\Gamma^{\alpha}_{\mu v}\int\sqrt{-g}T^{\mu v}d\sigma+\Gamma^{\alpha}_{\mu v,\lambda}\int\xi^{\lambda}\sqrt{-g}T^{\mu v}d\sigma=0;$$
$$\int V=\overline{-g}T^{\alpha\beta}d\sigma=\frac{dx^{\alpha}_{(0)}}{dx^0}\int\sqrt{-g}T^{\beta 0}d\sigma+$$
$$+\frac{d}{dx^0}\int\xi^{\alpha}\sqrt{-g}T^{\beta 0}d\sigma+\Gamma^{\beta}_{\mu v}\int\xi^{\alpha}\sqrt{-g}T^{\mu v}d\sigma$$
$$\frac{dx^{\alpha}_{(0)}}{dx^0}\int\xi^{\beta}\sqrt{-g}T^{\psi 0}d\sigma+\frac{dx^{\alpha}_{(0)}}{dx^0}\int\xi^{\alpha}\sqrt{-g}T^{\mu 0}d\sigma=\int\xi^{\alpha}V\overline{-g}T^{\beta\gamma}d\sigma+\int\xi^{\beta}V\overline{-g}T^{\alpha\gamma}d\sigma$$

Введем обозначение, аналогичное (2.27):

$$M^{\lambda\mu v} = -u^0 \int \xi^\lambda \sqrt{-g} T^{\mu v} d\sigma$$

Очевидно, что $M^{0\mu v} = 0$. Определим важную величину-тензор спина частиц

$$S^{\alpha\beta} = -\left(1/u^0\right)\left(M^{\alpha\beta 0} - M^{\beta\alpha 0}\right)$$

Используя (2.27), соотношение (2.34) можно записать в виде

$$u^0\left(M^{\alpha\beta\gamma} + M^{\beta\alpha\gamma}\right) = u^\alpha M^{\beta\gamma 0} + u^\beta M^{\alpha\gamma 0}$$

С помощью простых алгебраических выкладок из (2.34а) и (2.36) выразим $M^{\alpha\beta\gamma}$ через $S^{\alpha\beta}$ и u^α

$$M^{\alpha\beta\gamma} = -\left(S^{\alpha\beta}u^\gamma + S^{\alpha\gamma}u^\beta\right) + \left(u^\alpha/u^0\right)\left(S^{0\beta}u^\gamma + S^{0\gamma}u^\beta\right)$$

Используя обозначения (2.27) и (2.35), соотношения (2.32) и (2.33) запишем следующим образом:

$$(d/ds)\left(M^{\alpha 0}/u^0\right) + \Gamma^\alpha_{\mu v} M^{\mu v} - \Gamma^\alpha_{\mu v,\sigma^\alpha} M^{\sigma\mu v} = 0$$
$$M^{\alpha\beta} = u^\alpha M^{\beta 0}/u^0 - (d/ds)\left(M^{\alpha\beta 0}/u^0\right) - \Gamma^\beta_{\mu v^\beta} M^{\alpha\mu v}$$

Подставляя в последнее уравнение $M^{\alpha\beta\gamma}$, выраженное через тензор спина согласно (2.37), получаем:

$$\frac{dS^{\alpha\beta}}{ds} + \frac{u^\alpha}{u^0}\frac{dS^{\beta 0}}{ds} - \frac{u^\beta}{u^0}\frac{dS^{\alpha 0}}{ds} + \left(\Gamma^\alpha_{\mu v} - \frac{u^\alpha}{u^0}\Gamma^0_{\mu v}\right) M^{\beta\mu v} -$$
$$- \left(\Gamma^\beta_{\mu v} - \frac{u^\beta}{u^0}\Gamma^0_{\mu v}\right) M^{\alpha\mu v} = 0,$$

т. е. производные по ds присутствуют только от тензора спина. Следовательно, уравнения (2.33) можно назвать уравнениями движения спина. Уравнения же (2.32) следует понимать как уравнения движения спиновых (дипольных) частиц.

Ясно, что уравнения (2.32), (2.33) можно записать с помощью величин m_0, $S^{\alpha\beta}, u^\alpha$ и их пронзводных. В работе [48] показано, что $S^{\alpha\beta}$ является тензором, а m_0 - скаляром относительно допустимых преобразований координат. Учитывая это и вводя общековариантный дифференциальный оператор

$$DB^{\mu\cdots}_{v\cdots} Ds = dB^\mu_{v\cdots}\ldots/ds + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma} B^{\lambda\cdots}_{v\cdots} u^\sigma + \cdots . \Gamma^\lambda_{v\sigma} B^\mu_{\lambda\cdots}\ldots u^\sigma \ldots \bullet$$

где $B^{\boldsymbol{\mu}\cdots}_{\boldsymbol{v}}$ произвольный тензор, нетрудно показать, что уравнения (2.32) и (2 33) можно представить в общековариантном виде:

$$(D/Ds)\left(m_0 u^\alpha + u_\beta DS^{\alpha\beta}/Ds\right) = -(1/2) S^{\mu v} u^\sigma R^\alpha_{\cdot\sigma\mu v}$$
$$DS^{\alpha\beta}/Ds + u^\alpha u_\rho DS^{\beta\rho}/Ds - u^\beta u_\rho DS^{\alpha\rho}/Ds = 0$$

Эти уравнения известны под названием уравнений Матиссона-Папапетру. Легко видеть, что при $S^{\alpha\beta} = 0$ (для монопольной частицы) уравнения (2 39) совпадают с (2.29), т. е. (2.39) является обобщением уравнений геодезической на случай вращающихся частиц.

Существенно, что система уравнений Матиссона-Папапетру неполная. Для их решения необходимо использовать три дополнительных условия [49].

28.3.5 5. Reference Frames

В гл. 1 был рассмотрен смысл введения систем координат. Подчеркивалось, что назначение координат-не более, чем обеспечение нумерации различных точек-событий. Выбор той или иной системы координат диктуется соображениями удобства, и если это специально не оговорено, то не имеет физнческого смысла. Все введенные в теорию объекты: векторы и тензоры произвольного ранга - имеют компоненты, зависящие от выбора системы координат (способа нумерации точек). Каким образом можно сопоставнть компоненты таких тензоров величинам, которые может измерять наблюдатель? Какие величины может измерять наблюдатель? Как зависят результаты измерения от состояния движения наблюдателя?

Возникает необходимость дополнения теории аппаратом (методами) математического описания наблюдателей (одиночного или системы наблюдателей) и привязки наблюдателем тензорных величин к возможностям своей измерительной аппаратуры. Такой математический аппарат будем называть методом задания систем отсчета. Одним из примеров такого метода является хроногеоМеТрНя.

Прежде чем охарактеризовать другие методы задания систем отсчета, выделим важнейшую составную часть задач указанных методов - описание зависимости результатов наблюдения от состояния движения наблюдателя. Это опять приводит к выделенности времени. Из СТО хорошо известно, что ход часов и компоненты тензорных величин в сравниваемых системах отсчета существенно зависят от относительной скорости Этих систем отсчета. Будем полагать, что каждый наблюдатель как минимум располагает собственными часами, а также имеет возможность выделять (измеря'т) из определенных в месте его нахожкдения тензорных величин временные составляющие и дополнительные к ним пространственно-подобные. тим условиям удовлетворяет одиночный наблюдатель в хроногеометрни.

Подчеркнем, что наблюдатель обладает перечисленными возможностями именно в месте своего расположения, т. е. на своей временно-подобной мировой линии А как быть с другими точкамисобытиями? В хроногеометрии наблюдатель был снабжен радиоло. кационной аппаратурой. Это позволяло получать информацию об окрестности его мировой линии. Но можно поступить иначе - рассматривать не одного наблюдателя, а их систему. Более того, можно идеализировать эту систему - перейти к континууму наблюдателей, удовлетворяющих сформулированным выше условиям, так что в каждой точке рассматриваемой области пространства определен наблюдатель. Тогда информация о физической ситуации в этой области собирается всей системой наблюдателей.

Каждому наблюдателю соответствует своя временно-подобная мировая линия. В общем случае такие линии могут пересекаться, но тогда в точках пересечения окажутся два или несколько наблюдателей, что может существенно осложнить рассмотрение. Поэтому обычно ограничиваются случаями, когда мировые линии, соответствующие разным наблюдателям, не пересекаются. В результате приходим к важному понятию-конгруэнции временно-подобных мировых линий. (Под конгруэнцией понимают такую совокупность линий, когда через каждую точку проходит одна и только одна линия). Следовательно, указанный метод задания систем отсчета основан на определении в рассматриваемой области конгруэнции временно-подобных мировых линий. Конгруэнции можно однозначно сопоставить поле единичных векторов τ^μ (монад), касательных к линиям конгруэнции. Вот почему этот метод задания систем отсчета принято называть монадным методом *.

Сделаем несколько замечаний:

Монадный метод нацелен на решение наиболее существенной части задач, стоящих перед методами задания систем отсчета, - на описание зависимости результатов наблюдения от состояния движения наблюдателей. Как будет показано, развитый аппарат монадного метода позволяет блестяще справляться с этими задачами. На его основе четко разделяются временные и пространственные составляющие тензоров. Однако с его помощью

Монадный метод возник в 30-х годах в рамках 5-мерной теории гравитации и электромагнетизма как метод выделения из 5-мерного многообразия 4-мериого пространства-времени (см., например, [52]). В рамках 4-мерия для расщепления многообразия на время и 3-мерное пространство этот метод, пожалуй, впервые был применен (в объеме алгебры) Эккартом в 1940 г. [50]. Затем элементы общековариантного монадного метода вводились и использовались в работах Лифа [51],

Ульмана [52], Пирани [53], Денена [54], Мицкевича [55], Шмутцера [56] и др. В 1968 г. В кратких тезисах доклада А. Л. Зельманова [57] сообщалось, что им построено «общековариантное обобщение хронометрических инвариантов». По-видимому, имелся в виду аппарат общековариантного монадіого метода. Сами термины монада и монадный формализм предложил А. Л. Зельманов [58]. Монадный формализм на языке внешних форм Картана излагается в работах [59, 60].

Обратим также внимание на важный вопрос о возможности глобального задания поля монады в n-мерном многообразии. Оказывается, эта возможность тесно связана с сигнатурой многообразия. Показано (см., например, [61]), что в многообразиях с сигнатурой $(+---...-)$ всегда можно глобально задать поле временно-подобной монады. нельзя описать наблюдаемые величины по отдельным пространст. венно-подобным направлениям. Для решения таких задач необходимо наделять наблюдателей большими возможностями, в частности нужно снабдить их совокупностями пространственно-подобных ортов. Это решается в рамках более полных - диадных и тетрадных методов, которые будут рассмотрены в гл. 7.

Использование аппарата, основанного на континууме наблюдателей, может показаться чересчур сильной идеализацией. Однако следует напомнить, что, во-первых, в СТО она уже фактически используется и ее применение в случае искривленного пространства-времени представляет собой естественное обобщение привычных понятий. Во-вторых, переход от дискретного (конечного) множества реально осуществимых приборов наблюдателя к континууму идеализированных приборов-наблюдателей представляет собой процедуру такого же рода, как переход от множества материальных точек (частиц) к континууму точек пространства, когда только в части из них находятся реальные частицы.

Особо подчеркнем, что приборы-наблюдатели предполагаются пробными, т. е. не влияющими на геометрию пространства-времени.

Хроногеометрия и монадный (континуальный) метод не исчерпывают всех возможностей. Можно развить концеепцщию так называемого одиночного наблюдателя [62], когда исходной опять является одна временно-подобная мировая линия наблюдателя и указан способ (путь) переноса тензорных величин из произвольной точки пространства-времени на мировую линию этого наблюдателя. Напомним, что в ОТО результат переноса тензоров существенно зависит от пути переноса. В качестве путей можно использовать, например, изотропные (световые) геодезические от произвольных точек до мировой линии наблюдателя. Заметим, что Землю и людей на ней можно рассматривать как одиночного наблюдателя, получающего информацию об окружающем мире с помощью приходящих световых сигналов.

28.4 Monad Method for Describing the Motion of Reference Frames

ОТО (в собственном смысле этого названия) начинается после введения систем отсчета. Эта глава посвящена систематическому изложению математического аппарата монадного метода задания систем отсчета на основе работ [63-65]. Этот аппарат целесообразно представить в виде четырех составных частей:

алгебры монадного метода;

определения монадных физико-геометрических тензоров, под которыми будем понимать тензорные величины, построенные из составляющих метрического тензора и их первых производных (они частично заменяют символы Кристоффеля); 3) определения монадных операторов дифференцирования (анализ);

записи основных соотношений, уравнений и тождеств ОТО через монадные величины и операторы.

28.4.1 1. Algebra of the General Covariant Monad Method

Как уже отмечалось в §2.5, монадный метод (формализм) основан на задании временно-подобной конгруэнции мировых линий. Очевидно, таких конгруэнций можно задать бесконечно много - разным конгруэнциям будут соответствовать разные движения " систем отсчета.

Пусть выбрана некая временно-подобная конгруэнция, тогда в каждой точке пространства-времени можно определить единичный вектор τ^μ вдоль касательной К мировой линии, проходящей через выбранную точку. Вектор τ^μ имеет вполне определенный физический смысл, его следует понимать как 4-скорость u^μ соответствующего прибора (наблюдателя) системы отсчета:

$$\tau^\mu \equiv u^\mu = dx^\mu/ds$$

где dx^μ и ds взяты вдоль выбранной мировой линии. По определению вектор τ^μ обладает свойством 4-скорости (нормировки)

$$\tau^\mu\tau_\mu = \tau^\mu\tau^v g_{\mu v} = 1$$

Покажем, как в рамках монадного метода математически осуществляется переход от произвольных тензорных величин к наблюдаемым в данной системе отсчета. Эта процедура связана с разделением тензорных компонент на временные и пространственные составляющие. Определим временную компоненту произволь-

' ного тензора $B^v_{\mu\ldots}$ как проекцию этого тензора по всем индексам на векторное поле $\tau^\mu : B = B^\nu_{\mu\ldots\tau_v}. \ldots \tau^\mu. \ldots$

Для определения пространственных (и смешанных) компонент представим метрический тензор в виде

$$g_{\mu v} = \tau_\mu\tau_v - h_{\mu v}$$

где $h_{\mu v}$ - очевидно, тензорная величина. Тогда справедливо соотношение $g^{\mu v} = \tau^\mu\tau^v - h^{\mu v}$, где $h^{\mu v} = h_{\alpha\beta}g^{\alpha\mu}g^{\beta v}$. Отсюда и из (3.2) следует ортогональность τ_v и $h^{\mu v}$:

$$\tau_\mu h^{\mu v} = \tau_\mu\left(\tau^\mu\tau^v - g^{\mu v}\right) = 0$$

Легко видеть, что справедливы также соотношения $\tau^\mu h_{\mu v} = \tau^\mu h^v_\mu = \tau_\mu h^\mu_v = 0$, где $h^v_\mu = h_{\mu\alpha}g^{\alpha v}$.

Назовем пространственно-спроектированным тензором следующую величину, сопоставленную произвольному тензору $B^{v\ldots}_\mu$:

$$\widetilde{B\overbrace{\underbrace{\alpha\ldots}_{m}\alpha}^{\alpha}} = H^{\alpha\ldots\mu}_{v\ldots\beta\ldots}\ldots B^{v\ldots}_\mu.$$

Здесь введен оператор пространственного проектирования

$$H^n_{v\ldots\beta\ldots}\overbrace{\mu\ldots}^{m} = (-1)^{n+m}\overbrace{n}^{h^\alpha_{v\ldots}}\underbrace{h^\mu_{\beta\ldots}}_{m}.$$

Термин пространственно-спроектированный тесно связан с рассматриваемой системой отсчета и обосно-

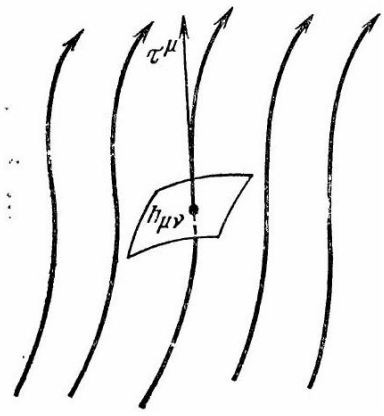


Рис. 6. Локальное 1 + 3-расван тем, что свертка по любому индексу тензора $\widetilde{B}^{\alpha}_{\beta\ldots}$ с вектором τ_μ (временным направлением системы отсчета) по определению равна нулю: $\widetilde{B}^{\alpha\cdots\tau_\alpha}_{\beta} = \bar{B}^{\alpha}_{\beta}\cdots\tau^{\beta} = 0$. Из произвольного тензора $\widetilde{B}^{v\lambda\cdots}_{\mu\sigma}$ можно образовать пространственно-спроектированные тензоры меньшего ранга («смешанные» компоненты), например:

$$\underbrace{\underbrace{n}_{\alpha\ldots}}_{m} = (-1)^{n+m-1} B^{v\lambda\cdots}_{\mu\sigma\ldots}\tau_v h^{\alpha}_{\lambda}.$$

щепление пространства-времени

$$\ldots h^{\mu}_{\beta}h^{\sigma}_{\mu}\cdot\ldots$$

В монадном методе оперируют исключительно со скалярами и пространственно-спроектированными тензорами [типа (3.5) и (3.6)].

Образуем из произвольного смещения dx^μ временную и пространственные составляющие: $d\tau = \tau_\mu dx^\mu; d\tilde{x}^\nu = -h^v_\mu dx^\mu$, тогда квадрат интервала можно представить в виде

$$ds^2 = (\tau_\mu\tau_v - h_{\mu v})\, dx^\mu dx^v = d\tau^2 - h_{\mu v}d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^v \equiv d\tau^2 - dl^2$$

Тензор $h_{\mu\nu}$ следует понимать как метрически тензор локального пространственно-подобного 3-мерного сечения, ортогонального τ^μ (рис. 6). Несмотря на то что $h_{\mu v}$ в общем случае имеет 10 компонент, вследствие условия (3.4) независимыми являются только шесть. Кроме того, поскольку $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4 = \tau_\mu\tau^\mu\tau_\nu\tau^\nu + h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} = 1+ +h_{\mu v}h^{\mu v}$, имеем $h_{\mu v}h^{\mu v} = 3$

Заметим, что поднимать и опускать индексы у пространственноспроектированных тензоров можно как 4-мерным метрическим тензором $g^{\mathrm{t}}_{\mu v}$ так и 3-мерным тензором $h_{\mu v}$ с обратным знаком. Именно этим объясняется выбор коэффициента $(-1)^{n+m}$ в операторе пространственного проектирования (3.5а). Следует иметь в виду, что $h^\mu_\alpha h_{\mu\beta} = -h_{\alpha\beta}; h_{\mu\alpha}h^{\alpha v} = -h^v_\mu$. Введем 3-мерные тензоры Леви-Чивиты:

$$e_{v\lambda\sigma} = \tau^\mu E_{\alpha\nu k\sigma} = \sqrt{-g}\tau^\mu\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}; \quad e^{\nu\lambda\sigma} = \tau_\mu E^{\mu\nu\lambda\sigma} = -\left(\tau_\mu/V = g\right)\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$$

Очевидно, что тензоры $e_{v\lambda\sigma}$ и $e^{v\lambda\sigma}$ являются пространственно-спроектированными. Антисимметричным пространственно-спроектированным тензорам второго ранга можно сопоставить дуальные векторы:

$$\widetilde{F}_{\mu\nu} \to \overset{F^\sigma}{F} = \widetilde{F}_{\mu\nu}e^{\mu v\sigma}; \quad \widetilde{F}^{\mu\nu} \to F^{\sigma *} = \widetilde{F}^{\mu v}e_{\mu v\sigma}$$

28.4.2 2. Monad Physical-Geometric Tensors

Так же как из $g_{\mu v}$ дифференцированием по координатам были получены символы Кристоффеля, из первых іпроизвідных от τ^μ и $h_{\mu v}$ можно получить несколько новых величин. Три из них являются тензорами, они играют важную роль характеристик систем отсчета. В дальнейшем будем называть их физико-геометрическими тензорами.

Введем их формальным образом. Возьмем ковариантную производную от τ_μ и разобьем ее на симметричную и антисимметричную части: $\tau_{\mu;v} = (1/2)\left(\tau_{\mu,v} - \tau_{v,\mu}\right) + (1/2)\left(\tau_{\mu;v} + \tau_{v;\mu}\right)$. Так как нас интересуют лишь пространственно-спроектированные тензоры и скаляры, спроектируем два полученных тензора посредством τ^μ и h^μ_α всеми возможными способами:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\tau_{\mu,v} - \tau_{v,\mu}\right)\tau^\mu\tau^v = 0; \quad \left(\tau_{\mu;v} + \tau_{v;\mu}\right)\tau^\mu\tau^v = 0 \\ \vdots \\ -\left(\tau_{\mu,vin} - \tau_{v,\mu}\right)\tau^v h^\mu_\alpha = -\left(\tau_{\mu;v} + \tau_{v;\mu}\right)\tau^\mu h^v_\alpha = \tau^v\left(\tau_{\alpha,v} - \tau_{v,\alpha}\right) = F_{\alpha;} \end{array}\right\}$$

$$-(1/2)\left(\tau_{\mu;v} + \tau_{v;\mu}\right)h^\mu_\alpha h^v_\beta = (1/2)\left(\tau^\lambda h_{\alpha\beta,\lambda} + h_{\alpha\lambda}\tau^\lambda_{,\beta} + h_{\beta\lambda}\tau^\lambda_{,\alpha}\right) = D_{\alpha\beta}$$

Таким образом, получились три тензорные величины $F_\alpha; A_{\alpha\beta} = -A_{\beta\alpha}; D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}$. Дифференцирование $h_{\mu\nu}$ по координатам к новым величинам не приводит, так как

$$h_{\alpha\mu;\sigma} = \left(g^\lambda_\alpha \tau_\mu + g^\lambda_\mu \tau_\alpha\right)\left(A_{\lambda\sigma} - D_{\lambda\sigma} + F_\lambda \tau_\sigma\right)$$

Выпишем несколько полезных соотношений:

$$\left.\begin{array}{l} \tau_{\mu;v} = A_{\mu v} - D_{\mu\nu} + F_\mu \tau_v; \\ A_{\mu\nu} = (1/2)\left(\tau_{\mu,v} - \tau_{v,\mu}\right) + (1/2)\left(\tau_\mu F_v - \tau_v F_\mu\right); \\ \tau^\mu \tau_{\mu;v} = 0; \quad h_{\alpha\beta;\sigma} h^\alpha_\mu h^\beta_\gamma = 0. \end{array}\right\}$$

Выясним физический смысл введенных тензоров. По определению система отсчета представляет собой некую безмассовую сплошную среду из приборов, а τ_μ является 4-скоростью этих приборов. Тогда антисимметричный тензор $A_{\alpha\beta}$ следует считать тензором угловой скорости вращения, а симметричный тензор $D_{\mu v}$ - тензором скоростей деформацций системы отсчета.

Для определения физического смысла F_α заметим, что, зная конгруэнцию мировых линий, можно определить в каждой точке пространства-времени четверку ортонормированных векторов: τ^μ, $l^\mu, \beta^\mu, \gamma^\mu$, сопровождающую тетраду [7]. Для них имеют место формулы Френе - Серре:

$$\tau^v \tau^\mu_{;v} = R_1 l^\mu;$$
$$\tau^v l^\mu_{;v} = R_2 \beta^\mu + R_1 \tau^\mu; \quad \tau^v \beta^\mu_{;} = R_3 \gamma^\mu - R_2 l^\mu; \quad \tau^v \gamma^\mu_{;v} = -R_3 \beta^\mu,$$

где τ^μ направлено вдоль линии, а l^μ, β^μ и γ^μ - соответственно первая, вторая и третья нормали к линии в рассматриваемой точке. Векторы ортонормированы, т. е.

$$l_\mu l^\mu = \beta_\mu \beta^\mu = \gamma_\mu \gamma^\mu = -1; \quad \tau_\mu l^\mu = \tau_\mu \beta^\mu = ... = l_\mu \beta^\mu = 0$$

Коэффициенты R_1, R_2 и R_3 называют соответственно первой, второй и третьей кривизнами линии в данной точке.

Из уравнения (3.14) находим: $R_1 l^\mu = F^\mu; R_1^2 = -F_\mu F^\mu$, т. е. вектор F^μ определяет первую кривизну линии и является ускоре. нием прибора системы отсчета. Нз (3.14) следует, что для геодезических $F_\mu = 0$. Вторая и третья кривизны определяются через первые и вторые производные от F_μ.

Конгруэнцию временно-подобных мировых линий системы от. счета можно охарактеризовать четырьмя скалярами:

$$\begin{aligned} R_1^2 &= -F_\mu F^\mu; \\ \varepsilon &= (1/2)\tau^\mu_{;\mu} = (1/2) h^{\mu v} D_{\mu v} = -(1/2) D \\ \Omega^2 &= (1/4)\left(\tau_{\mu,v} - \tau_{v,\mu}\right)\tau^{\mu;v} + (1/4) R_1^2 = (1/2) A_{\mu v} A^{\mu v}; \\ \boldsymbol{\sigma}^2 &= (1/4)\left(\tau_{\mu;v} + \tau_{v;\mu}\right)\tau^{\mu;v} - \varepsilon^2 + (1/4) R_1^2 = \\ &= (1/2)\left[D_{\mu v} D^{\mu v} - (1/2) D^2\right] \end{aligned}$$

определяющими соответственно первую кривизну, растяжение, вращение и сдвиг конгруэнции.

Вывод об указанном физическом смысле тензоров $F_\mu, A_{\mu v}, D_{\mu v}$ подкрепляется также интерпретацией отдельных членов в уравнениях геодезической, записанных в монадном виде Для записи уравнений геодезической учтем формулу

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu_{\alpha\beta} = &\left(L^\mu_{\alpha\beta} + h^\mu_{\alpha,\beta}\right) - \tau^\mu\left(A_{\alpha\beta} - D_{\alpha\beta} + F_\alpha \tau_\beta\right) + \\ &+ F^\mu \tau_\alpha \tau_\beta + \left(\tau_\alpha A^\mu_{.\beta} + \tau_\beta A^\mu_{.\alpha}\right) - \tau_\alpha \tau^\mu_{,\beta}, \end{aligned}$$

где $L^\mu_{\alpha\beta} = (1/2) h^{\mu\lambda}\left(h_{\lambda\alpha,\beta} + h_{\lambda\beta,\alpha} - h_{\alpha\beta,\lambda}\right)$ - трехмерные «символы Кристоффеля». Кроме того, введем ряд 3-мерных обозначений:

$v^\mu = \dfrac{-h^\mu_v dx^\nu}{\tau_\alpha dx^\alpha} = -h^\mu_v \dfrac{dx^v}{d\tau}$ – пространственные компоненты скорости частицы;

$ds = d\tau\sqrt{1-v^2}$;

$m = m_0 \dfrac{\tau_\alpha dx^\alpha}{ds} = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-v^2}}$ – динамическая масса частицы (m_0– масса покоя);

$p^\mu = -m_0 h^\mu_\alpha \dfrac{dx^\alpha}{ds} = m^\mu$ - компоненты 3-импульса.

После несложных выкладок легко выразить 4-мерные скорости и ускорения через 3-мерные:

$$\left.\begin{array}{l} u^\mu = dx^\mu/ds = \left(\tau^\mu + v^\mu\right)/V\overline{1-v^2} \\ m\frac{du^\mu}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{dp^\mu}{d\tau} + \tau^\mu \frac{dm}{d\tau} + m\tau^\alpha \tau^\mu_{,\alpha} + p^{\alpha^\mu}{}_{,\alpha}\right). \end{array}\right\}$$

Подставляя формулы (3.17)-(3.19) в уравнение геодезической (1.13) и проектируя его посредством τ^μ и h^ν_μ, окончательно полуаем:

$$dm/d\tau = p^\mu F_\mu - D_{\alpha\beta} p^{\alpha_v \beta};$$
$$-h^v_\mu \left(dp^\mu/d\tau - N^\mu_\beta . p^\beta\right) + L^v_{\alpha\beta} p^{\alpha^\beta v^\beta} = -mF^v - 2p^\beta \left(A^v_{.\beta} - D^v_\beta\right),$$

где $N^\mu_\beta = \tau^\mu_{,\beta} - \tau^\mu F_\beta$ - нетензорная величина.

В следующем параграфе будет показано, что в (3.21) слева стоит тензорная величина, которую следует понимать как монадную временную производную от импульса. Сопоставим (3.21) с уравнением движения точки в неинерциальной системе отсчета в ньютоновой механике.

$$(d/dt)\mathrm{p}_{\text{отн}} = \mathbf{F} - m\mathrm{a}_{\text{пер}} - m\mathrm{a}$$

где $\mathbf{a}_{\text{кор}} = 2\left[\omega \mathbf{v}_{\text{отв}}\right]$, или (в тензорных обозначениях) $a^i_{\text{кор}} = 2\omega^i_{.j} v^i$; $\boldsymbol{\omega}\left(\omega_{ij}\right)$ - угловая скорость вращения системы отсчета; $\mathbf{F}$ - реальная сила, действующая на точку. В (3.21) отсутствует аналог силы $\mathbf{F}$, так как это уравнение геодезической. Из сравнения правых частей находим:- F^v - ускорение; $A^v_\cdot$ - тензор угловой скорости вращения; D^v_β - тензор скоростей деформаций (в механике сплошных сред D^v_β обычно появляется вместе с $A^v_{.\beta}$) системы отсчета относительно локально геодезической системы отсчета с осью времени вдоль τ^μ.

28.4.3 3. Operators of Differentiation in Monad Formalism

В 1.8 были определены производные Ли, сопоставленные произвольному векторному полю ξ^μ. В монадном формализме таким полем служит поле временно-подобного вектора τ^μ. Производные Ли вдоль τ^μ играют существенную роль в этом формализме. Прежде всего, запишем производные Ли от составляющих метрического тензора:

$$\overset{\&}{\tau}\tau_\mu = \tau^\sigma \tau_{\mu,\sigma} + \tau_\sigma \tau^\sigma_{,\mu} = \tau^\sigma\left(\tau_{\mu,\sigma} - \tau_{\sigma,\mu}\right) = F_\mu;$$
$$\overset{\tau}{}h_{\mu v} = \tau^\sigma h_{\mu v,\sigma} + h_{\sigma v}\tau^\sigma{}_{,\mu} + h_{\mu\sigma}\tau^\sigma{}_{,v} = 2D_{\mu v}$$
$$\overbrace{\tau}\, g_{\mu v} = \tau_{v;\mu} + \tau_{\mu;v} = \tau_v F_\mu + \tau_\mu F_v - 2D_{\mu v}.$$

Вспомним, что мы условились работать лишь с пространственно-спроектированными тензорными величинами, поэтому образуем из производной Ли такой оператор, который при действии на пространственно-спроектированный тензор давал бы опять пространственно-спроектированный тензор. Таким оператором является

$$\partial_T \widetilde{B}\underbrace{\overbrace{}^{\beta...}}_{v...}{}^{m}_{n} \equiv H^{v...\alpha}_{\mu...\beta...\Omega} L_\tau \widetilde{B}^{\mu...}_{\alpha...} = \tau^\sigma \frac{\partial \widetilde{B}^v_{\beta...}}{\partial x^\sigma} - \underbrace{-N^\nu_\sigma \tilde{B}^{\sigma...}_{\beta} - \cdots}_{n} + \underbrace{N^\sigma_\beta \tilde{B}^{\nu...}_{\sigma} + \cdots}_{m},$$

где $N^v_\mu = \tau^v_{,\mu} - \tau^v F_\mu$. В дальнейшем будем называть этот оператор монадной временной производной.

Заметим, что из оператора ковариантного дифференцирования ∇_σ, оператора пространственного проектирования $H^{v...\alpha\beta}_{\mu}$.... и вектора τ^σ можно образовать еще несколько тензорных операторов дифференцирования, например:

$$\nabla_T \widetilde{B}^{\mu...}_{\alpha} \equiv \tau^\sigma \nabla_\sigma \widetilde{B}^{\mu...}_{\alpha...}; \quad \tilde{\nabla}_T \hat{B}^{\nu}_{\beta...} \equiv\equiv H^{v.....}_{\mu...\beta} ...\tau^\sigma \nabla_\sigma \widetilde{B}^{\mu...}_{\alpha...}$$

Последний оператор связан с монадной временной производной соотношением

$$\tilde{\nabla}_T \widetilde{B}^{\widetilde{B}^v_\beta....}_m = \partial_T \widetilde{B}^v_{\beta...} = \underbrace{\left(A^v_{.\sigma} - D^v_\sigma\right) \widetilde{B}^\sigma_{\beta...} - ... - ...}_{n} + \underbrace{\left(A^\sigma_{.\beta} - D^\sigma_\beta\right) \widetilde{B}^v_{\sigma...} + ...}_{m}$$

В дальнейшем будем использовать в основном оператор (3.23).

Определим оператор монадного пространственного ковариантного дифференцирования следующим образом:

$$\widetilde{\nabla}_{\tilde{\lambda}} \widetilde{B}^{\widetilde{B}^n_\beta.....}_m = -h^\sigma_\lambda \left(\nabla_\sigma \widetilde{B}^{\mu...}_{\alpha.....}\right) H^{v...\alpha}_{\mu...\beta...} = -h^\sigma_\lambda \left[\frac{\partial \widetilde{B}^{v...}_\beta}{dx^\sigma} + \right.$$
$$\left. \underbrace{+\left(L^v_{\gamma\sigma} + h^v_{\gamma,\sigma}\right) \widetilde{B}^{\gamma...}_\beta + ...}_{n} \underbrace{\pm \left(L^\gamma_{\alpha\sigma} h^\alpha_\beta + h^\gamma_{\beta,\sigma}\right) \widetilde{B}^v_{\gamma...}... + ...}_{m}\right],$$

где $L^v_{\gamma\sigma} = (1/2) h^{\nu\lambda} \left(h_{\lambda\gamma,\sigma} + h_{\lambda\sigma,\gamma} - h_{\gamma\sigma,\lambda}\right)$.

Приведем результат действия введенных операторов на 3-мерный метрический тензор $h_{\mu\nu}$:

$$\partial_T h_{\mu\nu} = 2D_{\mu v}; \quad \partial_T h^{\mu\nu} = -2D^{\mu\nu}; \quad \tilde{\nabla}_{\tilde{\lambda}} h_{\mu\nu} = 0,$$

а также результаты коммутации операторов, действующих на произвольный вектор $\widetilde{B}^\lambda$:

$$\left(\tilde{\nabla}_{\tilde{\alpha}} \partial_T - \partial_T \widetilde{\nabla}_{\tilde{\alpha}}\right) \widetilde{B}^\lambda = F_\alpha \partial_T \widetilde{B}^\lambda + \widetilde{B}^\mu \left[2F_\mu \left(A^\lambda_{\alpha\alpha} - D^\lambda_\alpha\right) - 2F^\lambda \left(A_{\mu\alpha} - D_{\mu\alpha}\right) + \right.$$
$$\left. + \tilde{\nabla}^{\tilde{\alpha}} - F^\lambda\right) D_{\mu\alpha} - \left(\widetilde{\nabla}_{\tilde{\mu}} - F^\lambda_\mu\right) D^\lambda_\alpha - \left(\widetilde{\nabla}_{\tilde{\alpha}} - F_\alpha\right) D^\lambda_\mu \Big];$$
$$\left(\tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_{\tilde{\beta}} - \tilde{\nabla}_{\tilde{\beta}} \tilde{\nabla}_\alpha\right) \widetilde{B}^\lambda = {}^3R^\lambda_{.\rho\alpha\beta} \widetilde{B}^\rho + 2A_{\alpha\beta} \left(\partial_T \widetilde{B}^\lambda_h + D^\lambda_\sigma \widetilde{B}^\sigma\right),$$

где

$${}^3R^\lambda_{.\rho\alpha\beta} = H^{\lambda\mu v\sigma}_{\varepsilon\alpha\beta\rho} \left(\partial \widetilde{L}^\varepsilon_{\sigma v}/\partial x^\mu - \partial \widetilde{L}^\varepsilon_{\sigma\mu}/\partial x^v + \widetilde{L}^\varepsilon_{\lambda\mu} \widetilde{L}^\lambda_{\sigma v} - \widetilde{L}^\varepsilon_{\lambda v} \widetilde{L}^\lambda_{\sigma\mu}\right)$$

-тензор кривизны 3-мерного пространственного сечения, ортогонального τ^μ; $\widetilde{L}^\varepsilon_{\sigma v} = L^\varepsilon_{\sigma v} + h^\varepsilon_{\sigma,v}$ - обобщенные коэффициенты 3-связности.

Используя определения монадных производных (3.23) и (3.26), перепишем в монадном виде левые части уравнений геодезических (3.20) и (3.21):

$$\left.\begin{array}{l} Dm/d\tau \equiv dm/d\tau = \partial_T m + v^v \tilde{\nabla} \tilde{\mu}^m; \\ \widetilde{p}^v/d\tau \equiv -h^v_\mu \left(\partial p^\mu/\partial\tau - N^\mu_\beta . p^\beta\right) + L^v_{\alpha\beta} p^\alpha v^\beta = \partial_T p^v + v^\mu \tilde{\nabla} \widetilde{\mu} p^v. \end{array}\right\}$$

Таким образом, оператор $D/d\tau$ имеет смысл субстанциальной временной производной в механике сплошных сред. Формулы (3.20), (3.21) с учетом (3.31) и все последующие,

записанные в монад; ном виде, как правило, имеют привычный (из физики в плоском пространстве-времени) вид с заменой частной производной по времени оператором ∂_T, а пространственных производных - операторами $\tilde{\nabla}\tilde{\lambda}$.

овариантные производные от произвольных тензоров всегда можно записать в монадном виде, т. е. представить их через спроектированные величины, монадные операторы и физико-геометри- ческие тензоры. Например, для произвольного вектора B_v имеем:

$$\nabla_\mu B_v = \nabla_\mu \left(B\tau_v + \widetilde{B}_v \right) = \widetilde{\nabla}_{\tilde{\mu}} \widetilde{B}_v - B\left(A_{\mu\nu} + D_{\mu v}\right) + \tau_\mu \tau_v \left(\partial_T B - F^\lambda \widetilde{B}_\lambda \right) +$$
$$+ \tau_\mu \left[\partial_T \widetilde{B}_v - \widetilde{B}_\lambda \left(A_v^\lambda - D_v^\lambda \right) + BF_v \right] - \tau_v \left[\widetilde{\nabla}_{\tilde{\mu}} B - \widetilde{B}_\lambda \left(A_{\cdot\mu}^\lambda - D_\mu^\lambda \right) \right]$$

28.4.4 4. Fundamental Equations of General Relativity and Field Theory in Monad Form

Уравнения Эйнштейна и тождества римановой геометрии. Прежде всего запишем проекции компонент тензора Риччи:

$$^4R_{\mu\nu}\tau^\mu\tau^v = \left(\partial_T D - D_{\alpha\beta}D^{\alpha\beta}\right) + A_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta} + \left(\tilde{\nabla}_{\tilde{\lambda}} F^\lambda - F_\lambda F^\lambda\right);$$
$$-^4R_{\mu\nu}h_\alpha^v\tau^\mu = \tilde{\nabla}_\alpha D - \tilde{\nabla}_{\tilde{\lambda}}\left(A_\alpha^\lambda + D_\alpha^\lambda\right) - 2F_\lambda A_{\cdot\alpha}^\lambda;$$
$$^4R_{\mu\nu}h_\alpha^\mu h_\beta^v = \left(\partial_T - D\right)\left(A_{\beta\alpha} - D_{\beta\alpha}\right) + \left(\tilde{\nabla}_{\tilde{\beta}} F_\alpha - F_\alpha F_\beta\right) +$$
$$+2\left(D_\alpha^\lambda D_{\beta\lambda} + A_{\cdot\alpha}^\lambda A_{\beta\lambda} + A_\beta^\lambda \cdot D_{\alpha\lambda}\right) + {}^3R_{\alpha\beta},$$

где $^3R_{\alpha\beta} = {}^3R_{\cdot\alpha\lambda\beta}^\lambda$ – 3-мерный тензор Риччи; $D = -D_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta}$.

Скалярную кривизну запишем следующим образом:

$$^4R = 2\partial_T D - \left(D^2 + D_{\alpha\beta}D^{\alpha\beta}\right) - A_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta} + 2\left(\tilde{\nabla}_{\tilde{\lambda}} F^\lambda - F_\lambda F^\lambda\right) + {}^3R,$$

где $^3R = -h^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$. Напомним, что во всех формулах индексы поднимаются и опускаются посредством $g^{\mu\nu}$ (или, что равносильно, посредством $-h^{\mu\nu}$).

Проекции уравнений Эйнштейна находим в виде

$$\left[^4R_{\mu v} - (1/2)g_{\mu v}{}^4R\right]\tau^\mu\tau^v = (1/2)\left(D^2 - D_{\alpha\beta}D^{\alpha\beta}\right) +$$
$$+ (3/2)A_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta} - (1/2)^3R = xT_{\mu\nu}\tau^\mu\tau^\nu;$$
$$-\left[^4R_{\mu v} - (1/2)g_{\mu\nu}{}^4R\right]\tau^\mu h_\alpha^v = \tilde{\nabla}\tilde{\alpha}D - \tilde{\nabla}\tilde{\lambda}\left(A_\alpha^\lambda{}_\cdot + D_\alpha^\lambda\right) -$$
$$- 2F_\lambda A_{\cdot\alpha}^\lambda = -\varkappa T_{\mu\nu}\tau^\mu h_\alpha^\nu$$
$$\left[^4R_{\mu\nu} - (1/2)g_{\mu\nu}{}^4R\right]h_\alpha^\mu h_\beta^\nu = \left(\partial_T - D\right)\left(A_{\beta\alpha} + D_{\beta\alpha}\right) + h_{\alpha\beta}\partial_T^* D +$$
$$+ \left[^3R_{\alpha\beta} + (1/2)h_{\alpha\beta}{}^3R\right] + 2\left(D_\alpha^\gamma D_{\gamma\beta} + A_{\cdot\alpha}^\gamma A_{\beta\gamma} + A_\beta \cdot D_{\alpha\gamma}\right) + \left(\tilde{\nabla}_{\tilde{\beta}} F_\alpha - F_\alpha F_\beta\right) +$$
$$+ h_{\alpha\beta}\left(\tilde{\nabla}_{\tilde{\lambda}} F^\lambda - F_\lambda F^\lambda\right) - (1/2)h_{\alpha\beta}\left(D^2 + D_{\mu v}D^{\mu\nu} + A_{\mu v}A^{\mu v}\right) =$$
$$= xT_{\mu v}h_\alpha^\mu h_\beta^v.$$

Из тензора Римана - Кристоффеля $^4R_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot}$ в всеми возможными способами проектирования можно получить три пространственноспроектированных тензора:

$$Z_{\cdot\chi\psi\varepsilon}^\lambda \equiv H_{\alpha\chi\psi\varepsilon}^{\lambda\beta\mu\nu} R_{\cdot\beta\mu\nu}^\alpha = {}^3R_{\cdot x\gamma\varepsilon}^\lambda + 2A_{\cdot x}^\lambda A_{\varepsilon\gamma} +$$
$$+ \left(D_\varepsilon^\lambda + A_\varepsilon^\lambda\right)\left(D_{\gamma\chi} + A_{\gamma\alpha}\right) - \left(D_\gamma^\lambda + A_\gamma^\lambda\right)\left(D_{\varepsilon\varkappa} + A_{\varepsilon\chi}\right);$$

$$Y_{\varkappa\psi\varepsilon} \equiv {}^4R^{\alpha}_{\cdot\beta\mu\nu}\tau_\alpha h^\beta_\varkappa h^\mu_\gamma h^\nu_\varepsilon = -2F_\varkappa A_{\gamma\varepsilon} +$$
$$+\widetilde{\nabla}\widetilde{\varepsilon}\left(D_{\gamma\varkappa}+A_{\gamma\varkappa}\right) - \tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}}\left(D_{\varepsilon\varkappa}+A_{\varepsilon\varkappa}\right)$$
$$-X_{\varkappa\psi} \equiv {}^4R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\tau_\alpha\tau^\nu h^\beta_\varkappa h^\mu_\gamma = -\partial_T\left(D_{\gamma\varkappa}+A_{\gamma\varkappa}\right) -$$
$$-\left(D^\sigma_\varkappa + A^\sigma_{\varkappa\cdot}\right)\left(D_{\gamma\sigma}+A_{\gamma\sigma}\right) - \tilde{\nabla}_{\tilde{\gamma}}F_\varkappa + F_\varkappa F_\gamma.$$

Используя предыдущие формулы, запишем тождества Риччи:

$$\partial_T A_{v\mu} = (1/2)\left(\tilde{\nabla}\tilde{\mu}F_v - \tilde{\nabla}\widetilde{v}F_\mu\right);$$
$$\left(\tilde{\nabla}\tilde{v}+F_v\right)A_{\mu\beta} + \left(\tilde{\nabla}\widetilde{\beta}+F_\beta\right)A_{v\mu} + \left(\tilde{\nabla}\tilde{\mu}+F_\mu\right)A_{\beta v} = 0;$$
$$Z_{\mu v\sigma\lambda} + Z_{\mu\lambda v\sigma} + Z_{\mu\sigma\lambda v} = 0$$

Тождества Бианки в монадном виде выглядят громоздко.

Важнейшие уравнения поля в ОТО.
л е т р о а г н и т н ы в еличин ы и ур авнен ия.

Векторный потенциал электромагнитного поля A_μ представляют в виде $A_\mu = \tau_\mu A + \widetilde{A}_\mu$, где

$$A = A_\mu\tau^\mu; \quad \tilde{A}_\mu = -h^v_\mu A_v$$

Тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ записывается с помощью Этих величин следующим образом:

$$F_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial\widetilde{A}_v}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\widetilde{A}_\mu}{\partial x^v}\right) + \left(\tau_v\frac{\partial A}{\partial x^\mu} - \tau_\mu\frac{\partial A}{\partial x^v}\right) +$$
$$+A\left(2A_{v\mu} + F_v\tau_\mu - F_\mu\tau_v\right).$$

Из него можно построить пространственно-спроектированный вектор (напряженность электрического поля) и тензор (напряженность магнитного поля):

$$\left.\begin{aligned} E_v &= -\tau^\alpha h^\beta_v F_{\alpha\beta} = \partial_T\tilde{A}_v - \left(\tilde{\nabla}_v - F_v\right)A \\ H_{\mu v} &= h^\alpha_\mu h^\beta_v F_{\alpha\beta} = \left(\tilde{\nabla}_\mu\tilde{A}_v - \tilde{\nabla}_v\tilde{A}_\mu\right) + 2AA_{v\mu} \end{aligned}\right\}$$

причем имеет место соотношение $F_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} + \tau_\mu E_v - \tau_v E_\mu$.
Первую пару уравнений Максвелла (1.4.1) в монадном виде можно выразить так:

$$\partial_T H_{\alpha\beta} = \left(\tilde{\nabla}_\alpha - F_\alpha\right)E_\beta - \left(\tilde{\nabla}_{\tilde{\beta}} - F_\beta\right)E_\alpha$$
$$\tilde{\nabla}_\alpha H_{\beta\gamma} + \tilde{\nabla}_{\tilde{\beta}}H_{\gamma\alpha} + \tilde{\nabla}_\gamma H_{\alpha\beta} = 2\left(E_\alpha A_{\beta\gamma} + E_\beta A_{\gamma\alpha} + E_\gamma A_{\alpha\beta}\right).$$

Заметим, что эти уравнения очень похожи на монадные тождества (3.42) и (3.43), если сопоставить величины $A_{\alpha\beta} \leftrightarrow -(1/2)H_{\alpha\beta}$; $F_\alpha \leftrightarrow E_\alpha$ Вторую пару уравнений Максвелла (1.42) можно представить в виде $*$:

$$\tilde{\nabla}_\alpha E^\alpha - H^{\mu v}A_{\mu\nu} = 4\pi J$$
$$\left(\partial_T - D\right)E^\alpha + \left(\tilde{\nabla}_{\tilde{\beta}} - F_\beta\right)H^{\alpha\beta} = 4\pi\tilde{J}^\alpha,$$

где использованы обозначения для плотности заряда и вектора тока $J = \tau_{\mu j}j^\mu$; $\tilde{J}^\alpha = -h^\alpha_\mu j^\mu$.

Тензор энергии-импульса электромагiитного псля имеет следующие проекции:

$$T^{\mu\nu}\tau_\mu\tau_v = -(1/8\pi)\left[E_\lambda E^\lambda - (1/2)H_{\lambda\sigma}H_{\lambda\sigma}\right];$$
$$-T^{\mu v}h^\alpha_\mu\tau_v = -(1/4\pi)H^{\alpha\beta}E_\beta;$$
$$T^{\mu v}h^\alpha_\mu h^\beta_\nu = -(1/4\pi)\left[E^\alpha E^\beta + H^\alpha_{\cdot\sigma}H^{\beta\sigma} + (1/4)\hbar^{\alpha\beta}\left(2E_\lambda E^\lambda + H_{\lambda\sigma}H^{\lambda\sigma}\right)\right]$$

У р а в не н и е К е й н а - Ф ок а (1.44a) имеет вид:

$$(\partial_T - D)\,\mathscr{E} + \left(\tilde{\nabla}_{\tilde{\mu}} - F_\mu\right) p^\mu + (mc/\hbar)^2\Psi + a^4 R\Psi = 0,$$

где

$$\mathscr{E} = \tau^v \partial\Psi/\partial x^v; \quad p_\mu = -h^v_\mu \partial\Psi/\partial x^v.$$

Важнейшие уравнения мировых линий в монадном виде. У р а внения неиззот ропных геод езичч

$$\left(\partial_T m + v^\mu \widetilde{\nabla_\mu \tilde{m}}\right) + D_{\mu v} p^{\mu\nu v} - F_\mu p^\mu = 0;$$
$$\left(\partial_T p^v + v^\mu \widetilde{\nabla}_\mu p^v\right) + 2p^\mu \left(A^v_{\cdot\mu} - D^v_\mu\right) + mF^v = 0.$$

Уравнения изоттропных геодези ческиих (1.47):

$$(1/\omega)\partial_T\omega + \left(\widetilde{l}^\mu/\omega\right)\widetilde{\nabla}_{\tilde{\mu}}\omega + D_{\mu\nu}\tilde{l}^\mu\widetilde{l}^\nu - F_\mu\widetilde{l}^\mu = 0;$$
$$\partial_T\widetilde{k}^v + \widetilde{l}^\mu\widetilde{\nabla}_{\tilde{\mu}}\widetilde{k}^v + 2\widetilde{k}^\mu_\lambda\left(A^v_{\cdot\mu} - D^v_\mu\right) + \omega F^v = 0,$$

где $\omega = k^\mu\tau_\mu$ - частота изотропного излучения; $\widetilde{k}^\nu = -k^\mu h^v_\mu = \omega\widetilde{dx}^\nu/d\tau = \omega\tau^\nu$ - пространственная часть волнового вектора; $\tilde{l}^\nu = (1/\omega)\tilde{k}^\nu$ - направление распространения изотропного излучения.

Уравнения Матиссона-Папапетру (2.39), (2.40) в монадном виде в общем случае довольно громоздки, поэтому запишем их [67], сразу воспользовавшись дополнительным условием Кориналдези - Папапетру

Запись уравнений Максвелла через векторы E_μ и $B_\mu = (1/2)e_{\mu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ см. в [66].

$$S^{\mu v}\tau_\mu = 0$$

которое означает, что тензор спина $S^{\mu\nu}$ является пространственно-спроектированным: $S^{\mu v} = \widetilde{S}^{\mu v}$.

Начнем с уравнений спина (2.40), которые можно представить в виде

$$\left(g^\alpha_\mu - u^\alpha u_\mu\right)\left(g^\beta_v - u^\beta u_v\right) DS^{\mu v}/Ds = 0 \quad \text{или} \quad \widetilde{h}^\alpha_\mu\widetilde{h}^\beta_v DS^{\mu v}/Ds = 0,$$

тде $\tau^\alpha_\mu = -\left(g^\alpha_\mu - u^\alpha u_\mu\right)-$ метрический тензор поостранственно(0) го сечения, ортогонального линии τ, представляющей точки (см. рис. 5). Будем использовать произвольную систему отсчета. Смешанная проекция (3.61) означает, что

$$v_\rho\left[v^\sigma\nabla_{\tilde{\sigma}}S^{\rho v} + \partial_T S^{\rho v} + 2S^{\lambda v}A^\rho_{\cdot\lambda} - S^{\rho\lambda}\left(D^v_\lambda - A^v_{\cdot\lambda}\right)\right] -$$
$$- S^{\lambda v}F_\lambda = -\left[v^\sigma\left(A_{\lambda\sigma} - D_{\lambda\sigma}\right) + F_\lambda\right] S^{\lambda\rho}\left(\delta^v_\rho/u^2 - v_\rho v^v\right) u,$$

где $v^\sigma = -(1/u)h^\sigma_\lambda u^\lambda; u = \tau_\alpha u^\alpha$. Пространственно-спроектированные по всем индексам уравнения (3.61) записываются в виде

$$\partial_T S^{\mu\nu} + v^\sigma\nabla_{\tilde{\sigma}}S^{\mu\nu} = -S^{\lambda v}\left(A^\mu_{\cdot\lambda} - D^\mu_\lambda\right) - S^{\mu\lambda}\left(A^\nu_{\cdot\lambda} - D^v_\lambda\right) +$$
$$+ \left[\left(A_{\lambda\sigma} - D_{\lambda\sigma}\right)v^\sigma + F_\lambda\right]\left(S^{\lambda\mu}v_v - S^{\lambda v}v^\mu\right).$$

Уравнения движения спиновых частиц (2.39) можно выразить следующим образом:

$$\left(\partial_T\tilde{m} + v^\sigma\widetilde{\nabla}_\sigma\tilde{m}\right) - \tilde{p}^\lambda\left[v^\sigma\left(A_{\lambda\sigma} - D_{\lambda\sigma}\right) + F_\lambda\right] = -(1/2)v^\sigma S^{\mu v}Y_{\sigma\mu\nu};$$
$$\left(\partial_T\widetilde{P}^\alpha + v^\sigma\widetilde{\nabla}_{\tilde{\sigma}}\widetilde{P}^\alpha\right) + \tilde{m}\left[\left(A^\alpha_{\cdot\sigma} - D^\alpha_\sigma\right)v^\sigma + F^\alpha\right] +$$
$$+\widetilde{P}^\lambda\left(A^\alpha_{\cdot\lambda} - D^\alpha_\lambda\right) = (1/2)S^{\mu\nu}\left(Y^\alpha_{\cdot\mu\nu} - v^\sigma Z^\alpha_{\cdot\sigma\mu\nu}\right),$$

где введены величины:

$$\tilde{m} = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{S^{\lambda\beta_{v_\beta}}}{(1-v^2)}\Bigg] v^\sigma \left(A_{\lambda\sigma} - D_{\lambda\sigma}\right) + F_\lambda\Bigg]$$

$$\widetilde{P}^\alpha = \frac{m_0 v^\alpha}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{S^{\lambda\rho}}{(1-v^2)^{3/2}} \left[v^\sigma \left(A_{\lambda\sigma} - D_{\lambda\sigma}\right) + F_\lambda\right] \left[\delta_\rho^\alpha \left(1-v^2\right) - \right.$$
$$\left. - v_0 v^\alpha\right].$$

28.4.5 5. Monad Method in Chronometric Coordinate Systems

Монадный метод наиболее эффективен в специальных системах координат, выбранных так, что конгруэнция координатных линий $x^0\,(x^i = \text{const})$ совпадает с конгруэнцией временно-подоб- ных мировых линий системы отсчета τ^*. Такие системы координат иногда называют физическими, сопутствующими системе отсчета или хронометрическими. Будем придерживаться последнего названия. В этих системах приборы системы отсчета имеют неизменные пространственные координаты $(x^i = \text{const})$ (рис. 7), т. е. отлична от

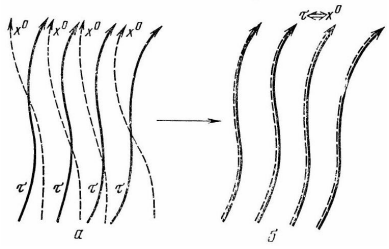


Рис. 7. В общем случае имеются две конгруэнции временно-подобных линий: τ и $x^0\,(x^i = \text{const}\,)(a)$; в хронометрических системах координат конгруэнции τ и x^0 совпадают (б)

нуля только нулевая компонента 4-скорости $(\tau^i = dx^i/ds = 0)$. Учитывая условие нормировки τ^μ : $\tau^\mu \tau^v g_{\mu v} = \tau^0 \tau^0 g_{00} = 1$,- находим контравариантные компоненты τ^μ («калибруем» монаду):

$$\tau^\mu = g_0^\mu / \sqrt{g_{00}}.$$

Из алгебраических соотношений (3.3) легко выразить компоненты τ_μ и $h_{\mu\nu}$ через компоненты метрического тензора $g_{\mu v}$:

$$\left.\begin{array}{l} \tau_\mu = \tau^v g_{\mu\nu} = g_{0\mu}/\sqrt{g_{00}}; \quad h_{ik} = g_{0i}g_{0k}/g_{00} - g_{ik}; \\ k_{0\mu} = 0; \quad h_0^\mu = 0; \quad h_i^0 = g_{0i}/g_{00}; \quad h_i^k = -g_i^k; \\ h^{ik} = -g^{ik}; \quad h^{0i} = -g^{0i}; \quad h^{00} = \left(1 - g_{00}g^{00}\right)/g_{00}. \end{array}\right\}$$

Условие совпадения конгруэнций τ и $x^i = \text{const}$ позволяет выделить не одну, а целый класс хронометрических систем координат, связанных друг с другом специальными «хронометрическими» преобразованиями координат. Эти преобразования находятся из условия $\tau^i = 0$ во всех хронометрических системах координат:

$$\tau' = \tau^\alpha \partial x^i / \partial x^\alpha = \tau^0 \partial x'^i / \partial x^0 = 0 \to \partial x'^i / \partial x^0 = 0$$

Монадный метод в таких системах координат известен как метод хронометрических инвариантов. Его разработал А. Л. Зельманов [68] и несколько позже независимо от него Каттанео [69]. Т. е. Они имеЮт вид:

$$x'^0 = x'^0\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$$
$$x'i = x'^i\left(x^1, x^2, x^3\right)$$

Хронометрические преобразования дополняются до произвольных Преобразованиями

$$x'i = x'i\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$$

которые Приводят к расщеплению единой конгруэнции на две: исходную конгруэнцию τ, совпадающую с $x^i = \text{const}$ и остающуюся неизменной, и новую временно-подобную конгруэнцию $x'i = \text{const}$. Если новую координатную конгруэнцию связать с конгруэнцией второ системы отсчета τ', то можно сказать, что преобразованиями координат (3.71) описывается переход от одной системы отсчета к другой. Однако при этом не следует забывать, что сами по себе преобразования координат не означают перехода к новой системе отсчета, переход производится лиины после отодноствления второй координатной конгруэнции конарунйией новой системbь отсчета. Но последнего можно и не делать.

Таким образом, наряду с хронометрическими системами координат, Привязанными к какой-то исходной конгруэнции системы отсчета, можно говорить и о хронометрической системе отсчета, определяемой конгруэнцией линий времени (xi=const) заданной системы координат. Тогда можно сказать, что преобразования (3.71) описывают переход между хронометрическими системами отсчета, а (3.69) и (3.70) оставляют все в рамках одной и той зке хронометрической системы отсчета.

В хронометрических системах координат проектирования произвольного тензора $B^{\text{l}\cdots}_{v\cdot\cdot}$ на направление τ вследствие калибровки (3.67) состоит в следующем:

$$B = \underbrace{B^n_{\mu\ldots}}_{m}\underbrace{\tau_{\mu\cdot}}_{n}\underbrace{\tau^v\cdot\,.}_{m}, = B\underbrace{\nu\ldots\mu\ldots}_{n+m}\underbrace{\tau^v\cdot.\tau^\mu\cdot\,.}_{n+m} =$$
$$= \underbrace{00\ldots0}_{n+m} / \left(g_{00}\right)^{\frac{n+m}{2}}$$

Все контравариантные «пространственные» компоненты $B^{i..k}\Pi$ - извольного тензора являются пространственно-спроектированными:

$$\widetilde{B}\overbrace{i\ldots k}^{n} = B^{\mu\cdots v}(-1)^n\underbrace{h^i_{\mu\ldots}h^k_v}_{n} = B^{i\cdots k}$$

так как согласно (3.68) $h^i_0 = 0, h^i_\mu = -g^i_\mu$ Все ковариантные компоненты пространственно-спроектированных тензоров имеют только «пространственные» компоненты и образуются опусканием тензора h_{ik}:

$$\widetilde{B}\underbrace{\qquad}_{n\mu}\ldots v = (-1)^n B_{\alpha\beta\ldots\gamma}h^\alpha_0 h^\beta_\mu.h^\nu_\nu = 0 \text{ вследствии } h^\alpha_0 = 0;$$
$$\widetilde{B}_i\underbrace{\ldots k}_{n} = (-1)^n B^{j\cdots s}\underbrace{h_{ji\ldots}\ldots h_{sk}}_{n},$$

так как согласно (3.68) $h_{00} = h_{0i} = 0$.

Аналогично из произвольного тензора $B^{\mu\cdots}_{\alpha}\ldots$ можно построить компоненты пространственно-спроектированных тензоров меньшего ранга, например:

$$\widetilde{B}^{i}\overbrace{\ldots k}^{m} = (-1)^m B\underbrace{\overbrace{\nu\ldots\lambda}^{m}}_{n-m}\underbrace{\tau^\mu\cdots}_{n-m}\underbrace{h^i_v\cdots h^k_\lambda}_{m} = B^{i\ldots k}_{n-m}/\left(g_{00}\right)^{\frac{n-m}{2}}$$

Из рассмотренного следует, что в хронометрических системах координат пространственно-спроектированные тензоры соответствующего ранга определяются величинами только с пространственными компонентами $(i, k, \ldots = 1, 2, 3)$ этого же ранга, найденными по формулам (3.73) − (3.75), а временно-спроектированные компоненты - ковариантiыми временными компонентами согласно (3.72) и (3.75). Выпавшие из рассмотрения контравариантные пространственно-строскtировaiные компоненты с временным индексом (типа $B^{0\cdots\mu}$) линейно выражаются через рассмотренные величины и не представлiяют самостоятельного интереса, напримеp:

$$\bar{B}^0 = -B^{\mu,i^0_\mu} = -B^i h^0_i = -\left(g_{0i}/g_{00}\right)B^i$$

Указанные выіше спроектірованные величины в хронометрических системах координат обладают замечательными свойствами: они инвариантны при произвсльных преобразованиях координаты x^3 (3.69) и ковариантны относительно чисто пространственных преобразований координат x^i (3.70). Первое называют свойством хронометрической инвариантности, а сами величины (3.72) (3.75) - хронометрически-инвариантными (х. и.) 3-тензорами или хронометрическими инвариантами.

Это свойство указанных величин продемонстрируем на примере произвольного вектора B^μ. Рассмотрим преобразование различных его компонент при выполнении (3.69) и (3.70):

$$B'_0 = B_\mu \partial x^\mu/\partial x'^0 = B_0 \partial x^0/\partial x'^0;$$
$$B'_k = B_\mu \partial x^\mu/\partial x'^k = B_0 \partial x^0/\partial x'^k + B_i \partial x^i/\partial x'^k;$$
$$B'^0 = B^\mu \partial x'^0/\partial x^\mu = B^0 \partial x'^0/\partial x^0 + B^i \partial x'^0/\partial x^i;$$
$$B'^k = B^\mu \partial x'^k/\partial x^\mu = B^i \partial x'^k/\partial x^i.$$

Учитывая, что $g'_{00} = g_{\mu\nu}\left(\partial x^\mu/\partial x'^0\right)\partial x^\nu/\partial x'^0 = g_{00}\left(\partial x^0/\partial x'^0\right)^2$, убеждаемся в инвариантности $B_0/\sqrt{g_{00}}$. Очевидно, что B^h коварxантно относительно пространственных преобразований. В хронометрической инвариантности h_{ik} убедиться нетрудно. Легко показать также, что произведение х. и. величин также х. и.

Отметим, что в хронометрических системах координат.

$$\sqrt{-g} = \tau_0\sqrt{h}$$

где h - опрделитель матрицы $\{h_{ik}\}$. С учетом этой формулы имеем выражения для 3-мерных тензоров Леви-Чивиты.

$$e_{ijk} = \sqrt{h}\varepsilon_{0ijk} \equiv V\bar{h}\varepsilon_{ijk}; \quad e^{ijk} = -(1/\sqrt{h})\varepsilon_{ijk}$$

где ε_{ijk} – 3-мерный символ Леви-Чивиты.

Из сказанного выше следует, что монадные физико-геометрические тензоры в хронометрических системах координат хронометрически-инвариантны и имеют вид:

$$\left.\begin{array}{l} {}^*F_i = \tau^0\left(\tau_{i,0} - \tau_{0,i}\right); \\ {}^*A_{ik} = (1/2)\left(\tau_{i,k} - \tau_{k,i}\right) + (1/2)\left(\tau_i^* F_k - \tau_k^* F_i\right); \\ {}^*D_{ik} = (1/2)\tau^0 h_{ik,0}. \end{array}\right\}$$

Здесь и в дальнейшем звездочкой слева вверху будем обозначать монадные величины и операторы в хронометрической системе координат.

В хронометрических системах координат вследствие того, что ${}^*_i{}^k = 0$, существенно упрощается оператор монадного временного дифференцирования (3.23):

$${}^*\partial_T \widehat{B}^{i\ldots}_k = \tau^0 \partial \widetilde{B}^{i\ldots}_{k\ldots}/\partial x^0.$$

Он не зависит от ранга и ковариантности дифференцируемой величины.

Для записи монадного пространственного ковариантного дифференцирования учтем, что в формуле (3.26) теперь $h^i_{k,\sigma} = 0$, а 3-мерные связности можно представить в виде

$$-h^\sigma_i h^\gamma_s L^k_{\gamma\sigma} \equiv \Delta^k_{is} \equiv (1/2)h^{kl}\left({}^*\partial_i h_{ls} + {}^*\partial_s h_{li} - {}^*\partial_l h_{is}\right),$$

где Δ^k_{is}-дополнительная к монадным физико-геометрическим тензорам х. и. величина; значком ${}^*\partial_i$ здесь обозначен новый х. и. оператор пространственного дифференцирования:

$$*\partial_i \equiv \partial/\partial x^i - \left(g_{0i}/g_{00}\right)\partial/\partial x^0,$$

также не зависящий от ранга и ковариантности дифференцируемой величины. В результате для оператора ${}^*\boldsymbol{\nabla}_{\tilde{s}}$ (3.26) получаем выражение

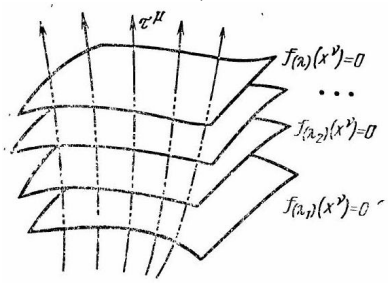
$${}^*\tilde{\nabla}_{\tilde{s}}\underbrace{\tilde{B}\overbrace{l\ldots}^{n}{}^{k\ldots}}_{m} = {}^*\partial_s \widetilde{B}^k_{l\ldots} + \underbrace{\Delta^k_{si}\widetilde{B}^i_{l\ldots}\ldots + \ldots.}_{n}.-$$

$$-\underbrace{\Delta^i_{sl}\bar{B}^k_i ... - .}_{m} \equiv \nabla_s \widetilde{B}^k_l ...$$

Все формулы и уравнения в монадном виде, приведенные в §3.4, сохраняют свой вид в хронометрических координатах. В них нужно произвести незначительные переобозначения: перейти к 3-мерным индексам и учесть появление нового оператора $*\partial_i$ и величины Δ^i_{sl}[согласно (3.82)].

28.4.6 6. Normal Reference Frames. Kinemetric Invariants

Важный класс систем отсчета образуют нормальные системы - отсчета, т. е. системы без вращения ($A_{\mu\nu} = 0$). Для них характерна возможность введения такой однопараметрической совокупности 3-мерных пространственно-подобных гиперповерхностей $f(\lambda)(x^v) = 0$, что монаду τ_μ



можно считать пропорциональной нормалям к этим гиперповерхностям (рис. 8):

$$b\tau_\mu = \partial f_{(\lambda)}(x^v)/\partial x^\mu$$

где b - скалярная функция координат. Для нормальной конгруэнции можно подобрать такую систему координат, что в качестве параметра λ, нумерующего совокупность гиперповерхностей, бу-

Рис. 8. Глобальное 1+3-расщепление пространства-времени в нормальных системах отсчета на линии времени и совокупность 3-мерных пространственно-подобных гиперповерхностей дет выступать временно-подобная координата x^0, а уравнение гиперповерхностей приобретет вид:

$$f_{(\lambda)}(x^v) = 0 \to x^0 = \text{ const}$$

откуда следует, что $\tau_i = 0$. Такие системы координат будем называть кинеметрическими.

Учитывая условие нормировки $\tau_\mu\tau_v g^{\mu\nu} = \tau_0\tau_0 g^{00} = 1$, находим ковариантные компоненты τ_μ («калибруем» монаду):

$$\tau_\mu = g^0_\mu/\sqrt{g^{00}}$$

Монадный метод в таких системах координат известен как метод кинеметрических инвариантов. Сам метод и его название предложены А. Л. Зельмановым [70] (см. также [71, 72]). Тогда из алгебраических соотношений (3.3) однозначно выражаются все компоненты τ^μ и тензора $h_{\mu\nu}$ через компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$:

$$\left.\begin{array}{l} \tau^\mu = g^{0\mu}/\sqrt{g^{00}}; \quad h^{ik} = g^{0i}g^{0k}/g^{00} - g^{ik}; \\ h^{0\mu} = 0; \quad h^0_\mu = 0; \quad h^i_0 = g^{0i}/g^{00}; \quad h^k_i = -g^k_i; \\ h_{ik} = -g_{ik}; \quad h_{0i} = -g_{0i}; \quad h_{00} = (1 - g_{00}g^{00})/g^{00}. \end{array}\right\}$$

Осуществляемое таким образом глобальное расщепление пространственно-временного многообразия на совокупность пространственно-подобных гиперповерхностей и ортогональную им конгруэнцию временно-подобных линий обычно называют $1 + 3$ - расщеплением пространства-времени. На каждой пространственно-подобной гиперповерхности оказывается заданной 3-мерная координатная сетка x^i, а ее геометрия определяется тензором h_{ik}.

В общем случае конгруэнции мировых линий системы отсчета τ и линий времени ($x^i =$ const) не совпадают (рис. 9). Рассмотрим переход из точки M_1 на одной пространственно-подобной гиперповерхности V_3 к точкам M_2 и M_3, лежащим на близкой гиперповерхности V_3' причем точка M_2 лежит на одной линии τ с точкой M_1, а M_3 на одной линии x^0 с точкой M_1. Точки M_2 и M_3 характеризуются одной и той же координатой x'^0, а точки M_1 и M_3 имеют одинаковые пространственные координаты x^i. Найдем разность пространственных координат точек M_2 и M_3. Так как вектор τ^μ, касательный к τ в точке M_1, имеет компоненты малое смещение вдоль него на величину $d\tau = \tau_\mu dx^\mu = dx^0/\sqrt{g^{00}}$ соответствует разности координат $\ddot{x}_2^i$ и x_3^i:

$$dx^i = \tau^i d\tau = \left(g^{0i}/g^{00}\right) dx^0.$$

Угол наклона линии τ к линии x^0 определяется отношением длин смещений $M_1M_2 = d\tau$ и $M_1M_3 = ds = \sqrt{g_{00}}dx^0$:

$$\cos\alpha = M_1M_2/M_1M_3 = 1/\sqrt{g_{00}g^{00}}.$$

Очевидно, если смешанные компоненты метрического тензора g^{0i} равны нулю, конгруэнции τ и x^0 совпадают.

ннеметрическая система координат определена неоднозначно; для одной и той же нормальной конгруэнции τ имеется набор кинеметрических систем координат. Множество преобразований ко- ординат, связывающих эти системы, находим из условия $= \tau_\alpha \partial x^\alpha/\partial x'i = \tau_0 \partial x^0/\partial x'i = 0 \to \partial x^0/\partial x'i = 0$, т. е. такие преобразования имеют вид:

$$x'^0 = x'^0\left(x^0\right)$$
$$x'i = x'^i\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right).$$

Назовем эти преобразования кинеметрическими.

Преобразования (3.90) - дополнительные к хронометрическим; ранее они описывали переходы между хронометрическими системами отсчета. Однако теперь эти преобразования соответствуют одной и той же конгруэнции мировых линий нормальной системы отсчета. Дополнительными к кинеметрическим являются преобразования

$$x'^0 = x'^0\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$$

Такое преобразование исходной кинеметрической системы координат позволяет ввести новую совокупность пространственно-подобных гиперповерхностей $x'^0 =$ const, а следовательно, и новую ортогональную ей конгруэнцию временно-подобных линий τ', где $\tau'_\mu = g'^0_\mu\sqrt{g'^{00}}$. С этой временно-подобной конгруэнцией можно связать вторую нормальную систему отсчета. Значит, с помощью преобразований координат (3.91) можно производить переходы между нормальными системами отсчета, но только в том случае, если с исходной и с результирующей системами координат связаны системы отсчета согласно калибровке (3.85). Систему отсчета, ассоциированную со взятой системой координат, согласно формулам (3.85), (3.86) назовем кинеметрической системой отсчета.

Следовательно, преобразования координат (3.89), (3.30) соответствуют одной кинеметрической системе отсчета, а (3.91) описывает переходы между различными кинеметрическими системами отсчета. Различие между преобразованиями (3.71) и (3.91) еще раз свидетельствует о том, что переходы между системами отсчета связаны с преобразованиями координат только при наличии дополнительных соглашений, причем они могут быть различными. Отметим также, что в общем случае одной и той же системе координат можно сопоставить несколько систем отсчета, в частности хронометрическую и кинеметрическую.

В кинеметрических системах координат проектирование произвольного тензора $B_v^{\mu\ldots}$ на направление τ состоит в определении величины

$$B = B^{\overbrace{\mu\ldots\upsilon\ldots}^{n}}\underbrace{\tau_\mu\ldots\tau_\upsilon}_{n}\ldots = B^{\overbrace{0\ldots0}^{n}}/\left(g^{00}\right)^{n/2}.$$

Все ковариантные «пространственные» компоненты $B_i\cdots_k$ произвольного тензора являются пространственно-спроектированными:

$$\underbrace{\widetilde{B}_{i\ldots k}}_{n}=\underbrace{B_{\mu\ldots v}}_{n}(-1)^n\underbrace{h_i^\mu\ldots h_k^v}_{n}=B_{\mu\ldots\nu}g_i^\mu..g_k^v=B_{i\ldots k}$$

так как согласно (3.86) $h_i^0=0, h_i^\mu=-g_i^\mu$. Все контравариантные компоненты пространственно-спроектированных тензоров имеют только «пространственные» компоненты и образуются поднятием индексов у компонент (3.93) посредством 3-мерного метрического тензора h^{ik}:

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{B}^{0\mu\ldots v}&=(-1)^nB^{\alpha\beta\ldots v}\underbrace{h_\alpha^0h_\beta^\mu\ldots h_\gamma^v}_{n}=0,\quad\text{так как } h_\alpha^0=0\\ \widetilde{B}^{\overset{n}{i\ldots k}}&=(-1)^nB_{\mu\ldots}\underbrace{h^{\mu i}..h^{vk}}_{n}=(-1)^nB_{i\ldots}sh^{ii}\ldots h^{sk}\end{aligned}\right\}$$

поскольку согласно (3.86) $h^{00}=h^{0i}=0$.

Точно так же из произвольного тензора $B^{\mu\ldots v}$ ранга n можно построить компоненты пространственно-спроектированных тензоров меньшего ранга m, например:

$$\bar{B}_{\underbrace{i\ldots k}_{m}}=B^{\overbrace{i\ldots m}^{n-m}}_{i\ldots k}\mid\left(g^{00}\right)^{(n-m)/2}.$$

Так же как в хронометрической калибровке, в кинеметрических системах координат пространственно-спроектированные тензоры определяются лишь компонентами с «пространственными» индексами $(i,j,\ldots=1,2,3)$. Компоненты ковариантных пространственноспроектированных тензоров с индексом 0 линейно выражаются через компоненты с 3-мерными индексами и не представляют интереса.

Рассмотренные спроектированные величины в кинеметрических системах координат обладают свойствами кинеметрической инвариантности: они инвариантны при преобразованиях (3.89) и пространственно-ковариантны относительно преобразований координат (3.90). Эти величины в дальнейшем будем называть кинеметрически-инвариантными (к. и.) 3-тензорами. Кинеметрическую инвариантность величин (3.92) - (3.95) можно показать точно так же, как и хронометрическую инвариантность величин, введенных в §3.5.

В кинеметрических системах координат, как и в хронометрических, $\sqrt{-g}=\tau_0\sqrt{h}$. Сохраняют силу также формулы (3.77) для 3-мерных тензоров Леви-Чивиты.

Монадные физико-теометрические тензоры и операторы в кинеметрических системах координат (кинеметрической калибровке) будем обозначать крестиком слева сверху:

$$\begin{aligned}&{}^+F_i=\tau_0\tau^0_{,i};\quad {}^+A_{ik}\equiv 0\\ &{}^+D_{ik}=(1/2)\left(\tau^\mu\partial h_{ik}/\partial x^\mu+h_{\alpha k}\partial\tau^\alpha/\partial x^i+h_{i\alpha}\partial\tau^\alpha/\partial x^k\right);\end{aligned}$$

$$+\partial_T\underbrace{\overbrace{k\cdots}^{i\ldots}}_{m}{}^{n}=\sqrt{g^{00}}\frac{\widetilde{\partial B^i_{k\ldots i\ldots}}^{\partial x^0}}{\underbrace{g^{0s}}}+\frac{\partial^i\bar{B}^{i\ldots}_{k\ldots}}{\sqrt{g^{00}}}-$$

$$\underbrace{-N_{s\cdot}{}^i\widehat{B}^{s\cdots}_{k\ldots}-\cdot\cdot}_{n}+\underbrace{N_{k\cdot}{}^s\bar{B}^i_{s\ldots\ldots}+\cdot\cdot}_{m}$$

где $N^{ii}_s=-h^i_\sigma\tau^\sigma_{,\varsigma}=\tau^i_{,s}-\tau^{i+}F_\varsigma$

(latex here is shit, but I have no energy to fix it now...)

$$ {}^{+}\tilde{\nabla}_l \underbrace{\widetilde{B}^{n}_{i\ldots}}_{m} = \frac{\partial^{i\ldots}_{kB_1}}{\partial x^l} \underbrace{+L^{i}_{sl}\widetilde{B}^{s\ldots}_{k\ldots} + \ldots}_{n} \cdot \underbrace{-L^{s}_{kl}\widetilde{B}^{i\ldots}_{s} - .}_{m} . $$

Формула (3.98) полностью идентична 3-мерной коварнантной производной от 3-мерного тензора. Эта закономерность распространяется и на все другие 3-мерные величины в кинеметрической калибровке; например, 3-мерный тензор Риччи

$$ {}^{3}\dot{R}_{ik} = \partial L^{l}_{ik}/\partial x^l - \partial L^{l}_{il}/\partial x^k + L^{l}_{ik}L^{s}_{ls} - L^{s}_{il}L^{l}_{ks} $$

Все формулы \$3.4 в кинеметрической калибровке имеют тот же вид, только в них следует положить $A_{\mu\nu} = 0$ и везде писать лишь 3-мерные индексы.

Рассматриваемый формализм можно понимать как способ выделения в 4-мерном римановом пространстве-времени 3-мерных пространственно-подобных гиперповерхностей. С позиций известной в дифференциальной геометрии теории вложения $n-1$-мерных гиперповерхностей в риманово пространство размерности n [7] тензор скоростей деформаций D_{ik} представляет собой второй основной тензор 3-мерной гиперповерхности в 4-мерном многообразии.

Формальные условия интегрируемости в теории вложения так называемых деривационных уравнений приводят к уравнениям Гаусса

$$ {}^{3}R_{iksr} = {}^{4}R_{iksr} + (D_{is}D_{rk} - D_{ir}D_{k,s}) $$

и к уравнениям Петерсона - Кодацци

$$ {}^{4}R_{iks\beta}\tau^{\beta} = {}^{+}\tilde{\nabla}_{\tilde{k}}D_{is} - {}^{+}\tilde{\nabla}_{\tilde{i}}D_{sk}. $$

Видно, что эти уравнения совпадают соответственно с (3.39) и (3.40) в кинеметрической калибровке. Уравнения Гаусса означают, что 3-мерный тензор Римана - Кристоффеля слагается из двух частей: первая часть обусловлена кривизной вмещающего 4-мерного пространства-времени, спроектированного на 3-мерную гиперповерхность, а вторая часть связана с искривленностью самой гиперповерхности в 4-мерном многообразии. Уравнения Петерсона - Кодацци выражают через 4-мерный тензор Римана-Кри- стоффеля отклонение тензора $+\widetilde{\nabla}_{\tilde{k}}D_{is}$ от симметрии по всем трем индексам.

Спроектированную на τ левую часть уравнений Эйнштейна (3.36) в кинеметрической калибровке можно получить из уравнений Гаусса, а смешанные компоненты тензора Эйнштейна (3.37) сверткой уравнений Петерсона - Кодацци.

28.4.7 7. Particular Types of Reference Frames

Об одном частном виде - нормальных системах отсчета ($A_{\mu\nu} = = 0$) - уже говорилось в § 3.6. Рассмотрим другие частные виды систем отсчета, характеризуемые либо обращением в нуль монадных физико-геометрических тензоров (в отдельности или в комбинациях), либо связью этих тензоров с физическими полями. Киллинговы системы отсчета можно ввести в том случае, если в рассматриваемой области пространства-времени существует вре. менно-подобный вектор Киллинга. 4-Скорость киллинговой системы отсчета направлена вдоль этого вектора: $\xi^{\mu} = \varphi\tau^{\mu}$, где φ - скалярная функция координат, характеризующая длину вектора Киллинга. Подставив в уравнения Киллинга (1.55) монадное представление метрического тензора (3.3) и спроектировав соотношение последовательно посредством $h^{\alpha}_{\mu}h^{\beta}_{v}, -\tau^{\alpha}h^{\beta}_{v}, \tau^{\alpha}\tau^{\beta}$, находим, что в киллинговых системах отсчета

$$ D_{\mu\nu} = 0; $$
$$ F_v = h^{\beta}_{\nu}\varphi, \beta/\varphi; \quad \varphi, \beta\tau^{\beta} = 0. $$

Из (3.103) следует, что вектор ускорения имеет дивергентный вид $F_v = -(\partial/\partial x^v)(\ln\varphi)$. Тензор $A_{\mu\nu}$ в общем случае отличен от нуля и обладает свойством $\partial_T A_{\mu\nu} = 0$. Имеется

класс многообразий, допускающих существование конформного вектора Киллинга ξ^α, т. е. вектора, удовлетворяющего конформным уравнениям Киллинга:

$$\underset{\xi}{\xi} g_{\mu v} = \xi_{\mu;v} + \xi_{v;\mu} = (1/2) g_{\mu v} \xi^\lambda; \lambda$$

Если вектор ξ^ν временно-подобен, то в таких многообразиях можно ввести понятие конформно-киллинговых систем отсчета ($\xi^\mu = \varphi \tau^\mu$) В этих системах отсчета

$$D_{\mu v} = h_{\mu\nu} \partial_T (\ln \varphi); \quad F_v = -\left(\partial / \partial x^v\right) (\ln \varphi); \quad \partial_T A_{\mu v} = 0.$$

Геодезические системы отсчета задаются геодезической конгруэнцией временно-подобных мировых линий. В них $F_\mu = 0$. Заметим, что не во всяком пространстве-времени возможно задание геодезической системы отсчета в конечной 4-мерной области. Однако такую систему отсчета всегда можно определить в окрестности 3-мерной пространственно-подобной гиперповерхности. За пределами окрестности в общем случае геодезические пересекаЮтся.

Синхронными системами отсчета называются нормальные геодезические системы отсчета. Они характеризуются условиями $A_{\mu v} = 0; F_\mu = 0$. Для синхронных систем отсчета справедливо сделанное выше замечание о возможности задание геодезических систем отсчета.

Ассоциированные с электромагнитным полем системы отсчета [73], в которых с точностью до постоянного множителя вектор ускорения F^α и тензор угловой скорости вращения $A_{\alpha\beta}$ (этих систем отсчета) равны соответственно напряженности электрического E^α и магнитного $H_{\alpha\beta}$ полей, всегда можно определить при наличии электромагнитного поля. Действительно, введем безразмерный векторный потенциал электромагнитного поля $a_\mu = \left(V\overline{2k}/c^2\right) A_\mu$, Векторный потенциал A_μ, как известно, определен с точностью до калибровочного преобразования $\tilde{a}_\mu = a_\mu + \nabla \mu \varphi$. Из-за произвольности функции φ ее всегда [73] можно выбрать так, чтобы вектор $\tilde{a}_\mu$ был нормирован на \pm 1. Рассмотрим случай временно-подобного вектора $\tilde{a}_\mu$

$$\tilde{a}_\mu \tilde{a}^\mu = a_\mu a^\mu + 2 a^\mu \nabla_\mu \varphi + g^{\mu v} \nabla_\mu \varphi \nabla_v \varphi = 1.$$

Это уравнение аналогично уравнению Гамильтона - Якоби. Тогда можно выбрать систему отсчета так, чтобы

$$\tau^\mu = \tilde{a}^\mu = \left(\sqrt{2k}/c^2\right) A^\mu$$

Условие (3.106) однозначно не фиксирует. . Если задана одна система отсчета, то можно перейти к другой, вектор $\overset{**}{\mu}_\mu$ которой связан с τ^μ соотношением $\overbrace{\mu}^{*} = \tau_\mu + \nabla_\mu \overset{*}{\varphi}$, где $\overset{*}{\varphi}$ согласно (3.106) удовлетворяет условию $2a^\mu \nabla^*_\mu \overset{\varphi}{\varphi} + g^{\mu v} \nabla^*_\mu \varphi^* \nabla^*_v \overset{\varphi}{=} 0$. Таким образом, имеется класс систем отсчета, ассоциированных с электромагнитным полем.

В силу (3.107) тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ можно представить в виде

$$\left(\sqrt{2k}/c^2\right) F_{\mu v} = -2 A_{\mu v} + \tau_\mu F_v - \tau_v F_\mu.$$

Проектируя это соотношение посредством τ^μ и $-h^\mu_\alpha$, находим в таких системах отсчета

$$\left(\sqrt{2k}/c^2\right) E_v = F_v; \quad \left(V\overline{2k}/c^2\right) H_{\mu v} = -2 A_{\mu v}$$

Характерно, что в ассоциированных с электромагнитным полем системах отсчета электровакуумные уравнения Эйнштейна упрощаются (часть членов справа сокращается с членами слева):

$$\partial_T D - D_{\alpha\beta} D^{\alpha\beta} + \tilde{\nabla}_{\tilde{\lambda}} F^\lambda - (1/2) F_\lambda F^\lambda = 0$$
$$\tilde{\nabla}_\alpha D - \tilde{\nabla}_\lambda \left(A_\alpha{}^\lambda + D^\lambda_\alpha\right) = 0$$
$$\left(\partial_T - D\right)\left(A_{\beta\alpha} + D_{\beta\alpha}\right) + 2\left(D^\lambda_\alpha D_{\beta\lambda} - A^\lambda_{.\alpha} A_{\beta\lambda} + A_\beta{}^\lambda D_{\alpha\lambda}\right) +$$
$$+ \hat{\nabla}_{\tilde{\beta}} F_\alpha + {}^3R_{\alpha\beta} = -(1/2) h_{\alpha\beta}\left(F_\lambda F^\lambda + 2 A_{\lambda\sigma} A^{\lambda\sigma}\right).$$

Первая пара уравнений Максвелла (3.47), (3.48) в точности совпадает с тождествами Риччи в монадном виде (3.42), (3.43), а вторая пара уравнений Максвелла (в вакууме) представляет собой дополнительные условия на монадные физико-геометрические тензоры:

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{\alpha}} F^{\alpha} + 2A_{\mu\nu}A^{\mu\nu} = 0$$
$$\left(\partial_T - D\right) F^{\alpha} - 2\left(\tilde{\nabla}_{\tilde{\beta}} - F_{\beta}\right) A^{\alpha\beta} = 0$$

Из (3.112) следует, что в таких системах отсчета обязательно должно присутствовать электромагнитное поле.

Ассоциированные с электромагнитным полем системы отсчета в принципе можно реализовать с помощью идеализированной заряженной пыли (из невзаимодействующих между собой частиц), которая движется в заданном электромагнитном поле.

Можно определить системы отсчета, асссоциированные со скалярным полем. В этом случае $\tau_\mu = (1/B)T_{\mu\nu}\tau^v$, где 1/B - нормирующий множитель; $T_{\mu\nu}$ - тензор энергии-импульса скалярного поля (1.45)

28.4.8 8. Transition from One Reference Frame to Another

Пусть в пространстве-времени с метрическим тензором $g_{\mu v}$ определены две системы отсчета, т. е. заданы два поля монад: τ^μ и τ^μ (рис. 10). Рассмотрим движение одной системы отсчета относительно другой, а также преобразование временно- и пространственно-спро-

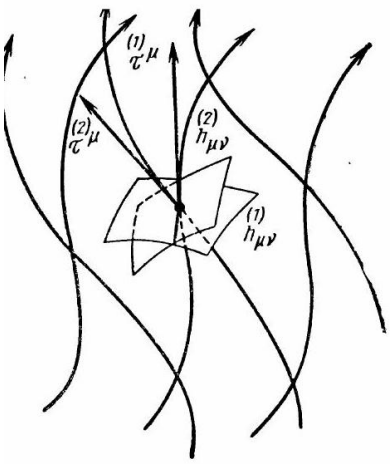


Рис. 10. Сопоставление двух систем отсчета ектированных величин от одной системы отсчета к другой [55]. Для этого представим метрический тензор в двух видах:

$$g^{\mu v} = \tau^\mu \tau^v - h^{(1)(1)}; \quad g^{\mu v} = \tau^{\mu\nu}\tau^v - h^{(2)(2)}$$

Пусть dx^v взято вдоль конгруэнции τ, тогда скорость второй системы отсчета относительно первой

$$v^\mu = dx^{(1)}/d\tau$$

где $dx^{(1)} = -\overset{(1)}{h}{}^{\mu}_{v}\, dx^v$ - пространственное смещение; ${}^\mu d\tau = \tau_v dx^v$ - интервал времени относительно первой системы отсчета. Мспользуя формулу $ds = \sqrt{g_{\mu v}dx^\mu dx^v} = d\tau\sqrt{1-v^2}$, где $v^2 = h^{(1)}_{\mu v} v^\mu v^v$, а также соотношения

$$\tau^{(1)}_\mu \tau^{(2)}_\mu \equiv \tau^{(1)}_\mu dx^\mu/ds = 1/\sqrt{1-v^2};$$

$$-h^{\nu(1)(2)}_{\mu}\mu \equiv -h^{(1)}_\mu v dx^{\mu\prime} ds = v^v/\sqrt{1-v^2},$$

Приходим к релятивистской формуле сложения скоростей

$$\overset{(2)}{\tau^{\mu}} = {}^{(2)}\tau^{v} g^{\mu}_{v} = \tau^{(2)} \begin{pmatrix} \overset{(1)}{\tau_{v}}(1) & \overset{(1)}{\tau^{\mu}} - h^{\mu}_{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{(1)}{\tau^{\mu}} + v^{\mu} \end{pmatrix} / \sqrt{1 - v^{2}}$$

Отсюда получаем формулу, связывающую 3-мерные метрические тензоры двух систем отсчета:

$$h^{\mu v} = \tau^{\mu}\tau^{v} - g^{\mu v} = \left(\overset{(1)}{\tau^{\mu}} + v^{\mu}\right)\left(\overset{(1)}{\tau}{}^{v} + v^{v}\right) / \left(1 - v^{2}\right) - \overset{(1)}{\tau}{}^{\mu}\ \tau^{v} + \overset{(1)}{h}{}^{\mu v} = \overset{(1)}{h^{\mu v}} + \left(\overset{(1)}{\tau}{}^{\mu}\ \tau^{(1)} v^{2} + v^{\mu_{v} v} + \tau^{\mu_{v} v} + \tau^{v}\right.$$

С помощью формул (3.117) и (3.118) легко найти переход между компонентами тензоров, спроектированных на временные и пространственные направления обеих систем отсчета. Так, для произвольного вектора B^{μ} имеют место формулы:

$$\overset{(2)}{B} = \left(\overset{(1)}{B} + B^{\mu} v_{\mu}\right) / \sqrt{1 - v^{2}};$$

$$\overset{(2)}{B^{\mu}} = \overset{(1)}{B}{}^{\mu} - \left[\overset{(1)}{B}\left(\tau^{\mu} v^{2} + v^{\mu}\right) + B^{v} v_{v}\left(v^{\mu} + \overset{(1)}{\tau^{\mu}}\right)\right] / \left(1 - v^{2}\right),$$

где $\overset{(s)}{B} = \overset{(s)}{\widetilde{B}_{\mu}}\ \tau^{\mu}$ - временные проекции; $\overset{(s)}{\tilde{B}^{\mu}} = -\ \overset{(s)}{h^{\mu}_{v}}\ B^{v}$ - пространственные компоненты вектора относительно системы отсчета $s (s = 1, 2)$.

Остановимся на случае, когда B^{μ} является вектором 4-скорости некоторой частицы, рассматриваемой из двух введенных систем отсчета, т. е. $B^{\mu} = dx^{\mu}_{B} / ds_{B}$, где dx^{μ}_{B} - смещение частицы. Тогда

$$\overset{(1)}{\widetilde{B}^{\mu}} = \overset{(1)}{U}{}^{\mu} / \sqrt{1 - \overset{(1)}{U}{}^{2}};\quad \overset{(2)}{\overset{(1)}{B}{}^{\mu}} = \overset{(2)}{U}{}^{\mu} / \sqrt{1 - \overset{(2)}{U}{}^{2}};$$

$$\overset{(1)}{B} = 1 / \sqrt{1 - \overset{(1)}{U}{}^{2}};\quad \overset{(2)}{B} = 1 / \sqrt{1 - \overset{(2)}{U}{}^{2}},$$

где $d\ \overset{(s)}{d\tau_{B}} = dx^{v}_{B}\ \overset{(s)}{\tau_{v}}); \overset{(s)}{U^{\mu}} = -dx^{v}_{B}\ \overset{(s)}{h}\ \underset{v}{\mu} / d\tau^{(s)}_{B}$

компоненты 3-скорости частицы в соответствующей системе отсчета ${}^{(s)2} = \overset{(s)}{h_{\mu\nu}} \overset{(s)}{U^{\mu}} \overset{(s)}{U}$. Используя формулу (3.177), получаем:

$$d^{(2)}\tau_{B} = \frac{1 - (\mathrm{vU})}{\sqrt{1 - v^{2}}} d\tau_{B}$$

где $((\,)\mathbf{1})) = -v_{\mu} U^{\mu}$. Аналогично с помощью формул (3.118) и (3.121) находим соотношение между квадратами 3-скоростей:

$$1 - \overset{(2)}{U}{}^{2} = \left\{\left(1 - v^{2}\right) / \left[1 - \left(\mathbf{v}^{(1)}\right)\right]^{2}\right\}\left(1 - \overset{(1)}{U^{2}}\right).$$

Подставляя эти формулы в (3.120), а последние в (3.119), приходим к обобщению релятивистской теоремы сложения скоростей:

$$\overset{(2)}{U}{}^{\mu} = \frac{\sqrt{1 - v^{2}}}{\left[1 - (\mathbf{vU})\right]}\left[\overset{(1)}{U^{\mu}} + \tau^{\mu} - \frac{\left[\begin{matrix}(1)\\ 1 - \mathbf{vU}\end{matrix}\right]\left(\begin{matrix}(1)\\ \tau^{\mu} + v^{\mu}\end{matrix}\right)}{1 - v^{2}}\right].$$

Внешне эта формула не похожа на соответствующее выражение в СТО [74]. Однако следует учесть, что формула в СТО имеет место для $\overset{(1)}{U}_{\mu} \parallel v_{\mu}$. Такую формулу удобнее получить из (3.122), полагая $(\mathbf{v}U')^2 = \mathbf{v}^2U^2$; в результате имеем:

$$\overset{(2)}{U} = (\overset{(1)}{U} - v)/1 - (\overset{(1)}{\mathbf{v}})$$

Использовав (3.117) и (3.118), запишем общековариантные формулы связи физико-геометрических тензоров в двух системах отсчета:

$$\overset{(2)}{F}_{\alpha} = \frac{1}{1-v^2}\left(\overset{(1)}{F}_{\alpha} - \tau_{\alpha}\overset{(1)}{v}{}^{v}\, F_v + 2v^{\beta}A^{(1)}_{\alpha\beta}\right) + \frac{\left(\overset{(1)}{\tau}{}^{v} + v^{v}\right)}{1-v^2}\left(v_{\alpha,v} - v_{v,\alpha}\right) +$$

$$+\frac{\left\{\left(\overset{(1)}{\tau_{\alpha}+v_{\alpha}}\right)\left(\overset{(1)}{\tau^{v}+v^{v}}\right)\right.}{2\left(1-v^2\right)^2}\frac{\jmath\left(v^2\right)}{\partial x^{v}} - \frac{1}{2\left(1-v^2\right)}\frac{[\partial\left(v^2\right)}{\partial x^{\alpha}};$$

$$\overset{(2)}{A}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\overset{(1)}{A}_{\alpha\beta} - \overset{(1)}{A}_{\alpha v}\, v^{v}\frac{\left(\overset{(1)}{\tau_{\beta}+v_{\beta}}\right)}{1-v^2} + \overset{(1)}{A}_{\beta v}\, v^{v}\frac{\left(\overset{(1)}{\tau}{}_{\alpha} + v_{\alpha}\right)}{1-v^2}\right) +$$

$$+\overset{(1)}{F}_{\mu}\, v^{\mu}\left(\overset{(1)}{v}{}_{\beta}\overset{(1)}{\tau}{}_{\alpha} - \overset{(1)}{\tau}{}_{\beta}\, v_{\alpha}\right)\Bigg] + \frac{\left(v_{\mu,v} - v_{v,\mu}\right)}{2\sqrt{1-v^2}}\left\{\begin{array}{l} \overset{(1)(1)}{h^{\mu}_{\alpha}h^{v}_{\beta}} \end{array}\right. + \frac{\left(\overset{(1)}{v}{}^{v} + \tau^{v}\right)}{1-v^2}\times$$

$$\times\left[\overset{(1)}{h}{}^{\mu}{}_{\alpha}\left(v_{\beta} + \overset{(1)}{\tau}{}_{\beta}\right) - \overset{(1)}{h}{}^{\mu}{}_{\beta}\left(v_{\alpha} + \overset{(1)}{\tau}{}_{\alpha}\right)\right] + \frac{\tau^{v}\overset{(1)}{v}{}^{\mu}}{1-v^2}\left(\overset{(1)}{\tau}{}_{\alpha}\, v_{\beta} - \overset{(1)}{\tau}{}_{\beta}\, v_{\alpha}\right) +$$

$$+\frac{1}{2\left(1-v^2\right)^{3/2}}\left[v^2\left(\overset{(1)}{\tau}{}^{(1)}_{\alpha}\overset{(1)}{F}{}_{\beta} - \overset{(1)}{\tau}{}_{\beta}\overset{(1)}{F}{}_{\alpha}\right) + \left(v_{\alpha}\overset{(1)}{F}{}_{\beta} - \overset{(1)}{v}{}_{\beta}\overset{(1)}{F}{}_{\alpha}\right) +\right.$$

$$\left.+\overset{(1)}{\tau}{}^{v}\left(\overset{(1)(1)}{h^{\mu}_{\beta}}\,\tau_{\alpha} - \overset{(1)(1)}{h^{\mu}_{\alpha}}\,\tau_{\beta}\right)\right\}$$

Рассмотрим переходы между хронометрическими и кинеметрическими системами отсчета в одной и различных системах координат.

Связь между хронометрической τ ин кинемет(2) сиитемами отсчета, определенными рической τ сиист в одной й той же сй оит рость движения кинеметрической системы отсчета относительно хронометрической согласно (3.115) находим в виде

$$v^{k} = \sqrt{g_{00}}g^{0k}; \quad v^{0} = \left(g_{00}g^{00} - 1\right)/\sqrt{g_{00}}; \quad 1 - v^2 = g_{00}g^{00}.$$

Используя (3.119), в качестве примера запишем закон преобразования компонент спроектированного вектора:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{(2)}{B}{=}\overset{(1)}{B}/\sqrt{g_{00}g^{00}}-\left(g_{0i}/\sqrt{g_{00}}\right)\overset{(1)}{B}/i/\sqrt{g_{00}g^{00}}; \\ (2) \\ B^k=\overset{(1)}{B^k}+\overset{(1)}{B}{}^i\ g_{0i}g^{0k}/g_{00}g^{00}-\overset{B}{g^{0k}}/\sqrt{g_{00}}g^{00}. \end{array}\right\}$$

Переход от одной хронометрической сиистемы отсчетак д ругой хронометри ческой [55]. Пусть вторая (2)

система отсчета τ движется относительно первой со скоростью V^k, тогда переход между системами отсчета описывается преобразованием координат

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^0}=-\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{v^k\sqrt{g_{00}}}{1-\left(g_{0j}/\sqrt{g_{00}}\right)v^i}.$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$\frac{\partial x^k}{\partial x'^0}=\frac{v^k\sqrt{g_{00}}}{1-\left(g_{0i}/\sqrt{g_{00}}\right)v^i}\frac{\partial x^0}{\partial x'^0}.$$

Например, для пространственно-спроектированных компонент вектора B^μ закон преобразования (3.119) имеет вид:

$$\overset{(2)}{B}{}'_i=\left[\overset{(1)}{B}{}^k-\frac{\overset{(1)}{B}{}^k-\left(g_{0s}/\sqrt{g_{00}}\right)\overset{(1)}{B}s_v^k}{1-\left(g_{0j}/\sqrt{g_{00}}\right)v^j}\right]\frac{\partial x'^i}{\partial x^k}.$$

Переход от одной киинеметрич еской сиистемы отсчета к другой кинеметрич ческой [75]. Этот переход описывается преобразованием координат

$$\frac{\partial x'^0}{\partial x^k}=\frac{v_k\sqrt{g^{00}}}{1-\left(g^{0j}/\sqrt{g^{00}}\right)v_j}\frac{\partial x'^0}{\partial x^0}.$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$\frac{\partial x^0}{\partial x'^k}=-\frac{v_i\sqrt{g^{00}}}{1-\left(g^{i0}/\sqrt{g^{00}}\right)v_j}\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}.$$

Например, для пространственно-спроектированных компонент вектора имеем закон преобразования

$$\overset{(2)}{B'_k}=\left[\overset{(1)}{B_i}-v_i\frac{\overset{(1)}{B}-\left(g^{0s}/\sqrt{g^{00}}\right)\overset{(1)}{B_s}}{1-\left(g^{0j}/\sqrt{g^{00}}\right)v_j}\right]\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}.$$

Переход от кинеметрическо й системы отсчета к но в о й х рономе т р и ч е ско й [75]. Такой переход описывается преобразованием

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x_0}=-\frac{v^k+g^{0k}/\sqrt{g^{00}}}{\sqrt{g^{00}}}\frac{\partial x'^i}{\partial x^k},$$

где скорость второй системы отсчета относительно первой (кинеметрической) согласно (3.115) $v^k=\sqrt{g^{00}}dx^k/dx^0-g^{0k}/\sqrt{g^{00}}$. Обратное преобразование имеет вид:

$$\frac{\partial x^k}{\partial x'^0}=\frac{v^k+g^{0k}\sqrt{g^{00}}}{\sqrt{g^{00}}}\frac{\partial x^0}{\partial x'^0}.$$

Для спроектированных компонент вектора B^μ закон преобразования запишем следующим образом:

$$\overset{(2)}{B'}=\left(\overset{(1)}{B}+\overset{(1)}{B}\,v_k v^k\right)/V\overline{1-v^2};\overset{(2)}{B'}\,i=\left(\overset{(1)}{B^k}-\overset{(1)}{B}\,v^k\right)\partial x'^i/\partial x^k$$

Переход от хронометрической сиит темы отсчет а к н о в о й к и н е м е т р и ч е с ко й. Этот переход описывается преобразованием координат [75]:

$$\frac{\partial x'^0}{\partial x^k}=\frac{v_k+g_{0k}/\sqrt{g^{00}}}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial x'^0}{\partial x^0},$$

где скорость второй системы отсчета относительно первой $v^i=dx^i/\left[\sqrt{g_{00}}dx^0+\left(g_{0k}/\sqrt{g_{00}}\right)dx^k\right]$. Обратное преобразование имеет вид:

$$\frac{\partial x^0}{\partial x'^k}=-\frac{\left(v_i+g_{0i}/\sqrt{g_{00}}\right)}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}.$$

Для пространственно-спроектированных компонент вектора получаем закон преобразования

$$\overset{(2)}{B_k}=\left(\overset{(1)}{B_i}-\overset{(1)}{B}\,v_i\right)\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}$$

28.4.9 9. Concept of Tetrads. AME Gauge (????)

Как уже подчеркивалось, в монадном формализме произвольным тензорным величинам сопоставляют либо скаляры (полностью спроектированные на τ тензоры), либо пространственно-спроектированные тензоры (того же ранга или меньшего из-за частичного проектирования на τ). Может создаться впечатление, что все Эти величины, а также х. и. или к. и. величины в соответствующих калибровках, непосредственно описывают наблюдаемые в ОТО. Это не так. Наблюдаемые в ОТО могут описываться только скаяярными величинами! Таким образом, полностью спроектированные на τ величины непосредственно описывают наблюдаемые. Например, из тензора энергии-импульса материи $T^{\mu\nu}$ имеем наблюдаемую плотность энергии $\mathscr{E}=T^{\mu\nu}\tau_\mu\tau_{v_\bullet}$ Но как перейти k наблюдаемым от пространственно-спроектированных тензоров? Для этого необходимо расширить измерительные возможности используемых систем отсчета, позволив определять в локальном пространственном сечении длины вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений. Это означает добавление к вектору монады τ^μ еще трех пространственно-спроектированных ортонормированных векторов $g^\mu(i)$, где $i=1,2,3$. Наблюдаемые будут непосредственно описываться скалярами - тензорными величинами, свернутыми по всем индексам с векторами τ^μ и $g^\mu(i)$. Например, из пространственно-спроектированного вектора импульса $\widetilde{P}_\alpha=-T^{\mu\nu}\tau_\mu h_{v\alpha}$ можно образовать три наблюдаемые компоненты импульса $P(i)=\widetilde{P}_\alpha g^\alpha(i)$

Такое расширение теории означает переход к тетрадному формализму (см., например, [76]). Изложим самые необходимые сведения об алгебре тетрадного формализма. Более подробно весь аппарат этого формализма со специфическими тетрадными физико-геометрическими величинами и операторами рассмотрен в гл. 7.

Пусть в некоторой области 4-мерного пространства-времени задана координатная сетка, тогда в каждой точке этой области определена четверка векторов $\mathbf{e}_\mu$ (афинная тетрада), касательных к линиям этой сетки. Они связаны с метрическим тензором соотношениями:

$$g_{\mu v}=\mathbf{e}_\mu\mathbf{e}_v;\quad g^{\mu v}=\mathbf{e}^\mu\mathbf{e}^\vartheta;\quad \mathbf{e}^{\mu l}=g^{\mu v}\mathbf{e}_v$$

Кроме них независимо от координатной сетки в каждо точке рассматриваемой области бесконечным числом способов можно определить другую четверку ортонормированных векторов (реперов) $\mathbf{e}(\alpha)$, где $\alpha=0,1,2,3$. Одним из этих векторов

может быть временно-подобный вектор скорости сістемы отсчета $\boldsymbol{\tau} = \mathrm{e}, 0)$. Орты $\mathbf{e}(\alpha)$ удовлетворяют соотношениям:

$$\mathbf{e}(\alpha)\mathbf{e}(\beta) = \varepsilon(\alpha\beta)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}(\alpha\beta)$ - метрический тензор плоского (касательного) пространства-времени в декартовых координатах. Попарные произведения единичных векторов из разных наборов тетрад образуют матрицу коэффициентов Ламе [компонент векторов $\mathbf{e}(\alpha)$: в используемой координатной сетке]

$$g_\mu(\alpha) = \mathbf{e}_\mu \mathrm{e}(\alpha); \quad g^\mu(\alpha) = \mathrm{e}^\mu \mathbf{e}(\alpha).$$

Учитывая (3.137) и (3.138), метрический тензор $g_{\mu\nu}$ можно записать через коэффициенты Ламе следующим образом:

$$g_{\mu\nu} = g_\mu(\alpha)g_v(\alpha) = g_\mu(0)g_v(0) - g_\mu(1)g_v(1) - \\ -g_\mu(2)g_v(2) - g_\mu(3)g_v(3).$$

Это тетрадное представление метрического тензора соответствует монадному разбиению (3.3). Если положить $g^\mu(0) = \mathbf{e}^\mu\tau = \tau^\mu$, то*

$$h_{\mu\nu} = g_\mu(i)g_v(i) = g_\mu(1)g_v(1) + g_\mu(2)g_v(2) + \\ +g_\mu(3)g_v(3) \equiv h_\mu(i)h_v(i).$$

Для ортогональных систем координат ($h_{ik} = 0$ при $i \equiv\neq k$) коэффициенты Ламе $g_k(k) \equiv h_k(k)$ имеют вид:

$$h_k(k) = \sqrt{h_{kk}}.$$

Теорию Ламе можно рассматривать как триадный метод (в 3-мерном пространстве) в специальной калибровке триад - векторы,e (k) выбраны вдоль координатных линий ортогональных систем координат. В гл. 7 будут рассмотрены более общие способы калибровки тетрад (триад), в частности обобщающие хронометрическую и кинеметрическую калибровки монадного метода. В следующей части достаточно будет ограничиться калибровкой Ламе.

Продемонстрируем калибровки Ламе на примере сферических координат в плоском 3-мерном пространстве. Метрика, как известно, имеет вид $dl^2 = dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$. Сферические координаты являются ортогональными. Компоненты триад Ламе находят в виде $h_1(1) = 1; h_2(2) = r; h_3(3) = r\sin\theta$.

Отметим, что основоположником этого метода следует считать Ламе, который еще в 1859 г. развил метод дополнения 3-мерных криволинейных ортогональных сістем координат полем локальных соприкасающихся систем декартовых квазикоординат, т. е. ввел в 3-мерном пространстве афинную e $_k$ и ортонормированную e (i) соприкасающиеся триады, удовлетворяющие 3-мерным соотношениям типа (3.137) и (3.138).

28.4.10 1. Schwarzschild Metric

Наиболее важным для практики является решение уравнений Эйнштейна, описывающее метрику пространства-времени вокруг сферически-симметричного материального источника (метрика Шварцшильда [14, с. 199]). Именно эта метрика с высокой степенью точности описывает гравитационное поле в Солнечной системе и в окрестности Земли, из нее можно в основном приближении получить закон тяготения Ньютона, а в следующем приближении - объяснить известные эффекты, подтверждающие ОТО.

Для вывода метрики Шварцшильда воспользуемся нормальной системой отсчета, т. е. пусть $A_{\mu\nu} = 0$. Тогда искомое пространственно-временное многообразие глобально расщепляется на пространственные сечения и время. Сформулируем условия сферической симметрии на основе введенных ранее понятий подвижности многообразия. Ясно, что эти условия относятся к пространственным сечениям и означают возможность их поворотов вокруг выделенного центра (изотропность), т. е. искомое многообразие

допускает систему из трех пространственно-подобных векторов Киллинга $\xi^{\mu}_{(s)}$. В кинеметрической калибровке τ^{μ}

$$\xi^{\mu}_{(s)}\tau_{\mu} = 0 \to \xi^{0}_{(s)} = 0$$

Запишем уравнения Киллинга для пространственно-подобных векторов Киллинга в монадном виде. Проектируя уравнения Киллинга (1.55) посредством $h^{\mu}_{i}h^{v}_{k}, h^{\mu}_{k}\tau^{v}$, $\tau^{\mu}\tau^{v}$ и учитывая (4.1), соответственно находим в кинеметрической калибровке

$$\xi^{l}_{(s)}h_{ik,l} + h_{lk}\xi^{l}_{(s),i} + h_{il}\xi^{l}_{(s),k} = 0;$$
$$h_{k\beta}\left(\xi^{\mu}_{(s)}\tau^{\beta}_{,\mu} - \tau^{\mu}\xi^{\beta}_{(s),\mu}\right) = 0;$$
$$F_{i}\xi^{i}_{(s)} = 0.$$

Из соображений соответствия с вращениями плоского пространства запишем векторы Киллинга (в сферических координатах). в виде

$$\left.\begin{array}{l}\xi^{\mu}_{(1)} = \{0;0;\sin\varphi;\operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\}\\ \xi^{\mu}_{(2)} = \{0;0;-\cos\varphi;\operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\};\\ \xi^{\mu}_{(3)} = \{0;0;0;-1\}.\end{array}\right\}$$

Подставляя эти векторы в уравнения (4.2), получаем, что метрика пространственных сечений должна иметь вид:

$$dl^2 = h_{11}\left(x^0, r\right)dr^2 + b^2\left(x^0, r\right)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right),$$

где $b^2\left(x^0, r\right)$ - «постоянная»интегрирования.

Из уравнений (4.4) с векторами Киллинга (4.5) легко находим:

$$F_2 = F_3 = 0 \to \partial\tau^0/\partial\theta = \partial\tau^0/\partial\varphi = 0,$$

т. е. может быть отличной от нуля лишь радиальная компонента ускорения. Уравнения (4.3) приводят к соотношениям:

$$\partial\tau^i/\partial\theta = \partial\tau^i/\partial\varphi = 0; \tau^2 = \tau^3 = 0.$$

Уточним выбор системы отсчета. После проведенных рассуждений остались неизвестными функции $\tau^0, \tau^1, h_{11}, h_{22}$ от координат x^0 и r. Преобразованием этих двух координат всегда можно добиться, чтобы $\tau^1 = 0; h_{22} = r^2$. Это означает выбор из множества радиально движущихся систем отсчета одной, а именно имеющей постоянную площадь поверхности с фиксированным значением параметра r. Такую систему отсчета следует назвать покоящеейя относительно источника. Остаются неизвестными лишь две функции.

Выпишем геометрические характеристики пространственных сечений выбранной системы отсчета. Согласно изложенному имеем компоненты метрического тензора h_{ih}:

$$\left.\begin{array}{l}h_{11} = h_{11}\left(x^0, r\right); \quad h_{22} = r^2; \quad h_{33} = r^2\sin^2\theta;\\ h^{11} = 1/h_{11}; \quad h^{22} = 1/r^2; \quad h^{33} = 1/r^2\sin^2\theta;\\ h_{ik} = 0 \text{ при } i \neq k; \quad h^{ik} = 0 \text{ при } i \neq k.\end{array}\right\}$$

Отличными от нуля являются следующие компоненты 3-мерной связности L^{l}_{ik}:

$$\left.\begin{array}{l}L^1_{11} = \frac{1}{2}h_{11,1}/h_{11}; \quad L^1_{22} = -r/h_{11}; \quad L^1_{33} = -r\sin^2\theta/h_{11};\\ L^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta; \quad L^2_{21} = L^3_{31} = 1/r; \quad L^3_{23} = \operatorname{ctg}\theta,\end{array}\right\}$$

где $h_{11,1} = \partial h_{11}/\partial r$. Используя эти соотношения, по формуле находим отличные от нуля компоненты 3-мерного тензора Риччи и скалярную кривизну:

$${}^3R_{11} = h_{11,1}/rh_{11};$$
$${}^3R_{22} = {}^3R_{33}/\sin^2\theta = 1 - 1/h_{11} + \left(r/2h^2_{11}\right)h_{11,1};$$
$${}^3R = \left(2/r^2h^2_{11}\right)\left(h_{11} - rh_{11,1} - h^2_{11}\right).$$

В выбранной системе отсчета неизвестную компоненту $h_{1:}$ можно получить из уравнения Эйнштейна (3.36) (в вакууме)

$$G_{\mu\nu}\tau^{\mu}\tau^{v} = -(1/2)^3 R = 0 \to rh_{11,1} + h_{11}^2 - h_{11} = 0$$

где учтено, что согласно (4.8) $D_{22} = D_{33} = 0$, а компонента D_{11} не входит в это уравнение. Решение этого обыкновенного дифференциального уравнения с разделяющимися переменными имеет вид:

$$h_{11} = (1 - C_1/r)^{-1}$$

где C_1 - постоянная интегрирования.

Из смешанного уравнения Эйнштейна (3.37) (при $\alpha = 1$), учитывая (4.9), находим, что $D_{11} = 0$, т. е. h_{11} не зависит от x^0. Следовательно, $D_{ik} = 0$. Рассматриваемое многообразие обладает еще одним вектором Киллинга $\xi^{\mu}_{(0)} = \delta^{\mu}_0$, а выбранная система отсчета является киллинговой.

Для нахождения компоненты τ^0 учтем, что согласно (4.7) отлична от нуля лишь одна компонента ускорения F_1. Значит, все величины в уравнениях Эйнштейна, содержащие F_i, можно выразить через F_1:

$$F^{\mathbf{1}} = -\frac{F_1}{h_{11}}; \quad F_l F^l = -\frac{F_1^2}{h_{11}}; \quad \nabla_1 F_1 = F_{1,1} - \frac{1}{2}\frac{h_{11,1}}{h_{11}}F_1;$$
$$\nabla_2 F_2 = \frac{r}{h_{11}}F_1; \quad \nabla_3 F_3 = \frac{r}{h_{11}}F_1 \sin^2\theta$$
$$\nabla_l F^l = -\frac{F_{1,1}}{h_{11}} + \frac{1}{2}\frac{h_{11,1}}{h_{11}^2}F_1 - \frac{2F_1}{h_{11}r}.$$

Подставляя (4.15), (4.10) и (4.12) в уравнения Эйнштейна (3.38), находим:

$$G_{\mu\nu}h_1^{\mu}h_1^{v} = 0 \to F_1 = (1 - h_{11})/2r = -C_1/2r^2\,(1 - C_1/r)$$

Из соответствия с выражением для ускорения свободного падения в центральном ньютоновом гравитационном поле

$$g = -kM/r^2 \leftrightarrow F_1 h^1(1)c^2 \approx -C_1/2r^2 - C_1^2/4r^3,$$

где k - ньютонова гравитационная постоянная; M - масса центрального источника; c - скорость света; $h^{\mathbf{1}}(1) = \sqrt{1 - C_1/r}$ - компонента тетрады в калибровке Ламе, находим, что постоянную интегрирования C_1 следует выбрать равной $2kM/c^2$. Таким образом, в рассматриваемой системе отсчета

$$F_{\mathbf{1}} = -\frac{kM}{c^2r^2\,(1 - 2kM/c^2r)}; \quad c^2F(1) \approx -\frac{kM}{r^2} - \frac{k^2M^2}{c^2r^3}$$

т. е. к ньютоновой силе добавляется эйнштейновская «сила», обратно пропорциональная r^3.

Уравнения йнштейна $G_{\mu\nu}h_2^{\mu}h_2^{v} = \left(1/\sin^2\theta\right)G_{\mu\nu}h_3^{\mu}h_3^{v} = 0$ соглас- но тождествам Бианки являются следствием двух уже рассмотренных. Остальные уравнения Эйнштейна тождественно обращаются в нуль.

В рассматриваемой кинеметрический (хронометрической) калибровке вектор ускорения $F_1 = \tau_0\tau^0{}_{,1} = -\tau_{0,1}/\tau_0$, так как $\tau^0 = 1/\tau_0$. Подставляя это выражение в (4.18), находим простое диффе-ренциальное уравнение для $\tau_0 : \tau_{0,1}/\tau_0 = kM/c^2r^2\,(1 - 2kM/c^2r)$. Решение этого уравнения имеет вид:

$$\tau_0 = (1/C_2)\sqrt{1 - 2kM/c^2r}$$

где C_2 - постоянная интегрирования. Надлежащим выбором координаты x^0 всегда можно добиться равенства $C_2 = 1$. В результате получим метрику Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2kM}{c^2r}\right)dx_0^2 - \frac{dr^2}{1 - 2kM/c^2r} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right),$$

где было использовано, что $h_{ik} = -g_{ik}; g_{00} = \tau_0^2$. Систему координат, в которой записана эта метрика, часто называют координатами кривизн.

В пространственном сечении покоящейся системы отсчета длина окружности с центром в источнике выражается через параметр r обычным образом ($l = 2\pi r$), а расстояние вдоль радиуса до окружности

$$R = \int_{r'}^{r} \frac{dr}{\sqrt{1 - 2kM/c^2 r}} > r.$$

При больших значениях r пространственное сечение становится почти плоским.

Обратим внимание на то, что в координатах кривизн компонента 3-мерной метрики h_{11} и определитель $\sqrt{h}$ имеют особенность при $r = r_g = 2kM/c^2$ (гравитационный радиус). При переходе через гравитационный радиус координата x^0 приобретает пространственно-подобный, а r - временно-подобный характер. На гравитационном радиусе обращается в бесконечность вектор ускорения, так как

$$F_l F^l = k^2 M^2 / c^4 r^4 \left(1 - 2kM/c^2 r\right)$$

Не вдаваясь в подробности, отметив, что с понятием гравитационного радиуса связана гипотеза существования черных дыр объектов с геометрическим радиусом, меньшим гравитационного. (Для Солнца, например, $r_g = 1,47$ км, для Земли $k_g = 0,5$с)

Запишем метрику Шварцшильда в еще одной важной системе координат, по отношению К которой кинеметрическая (хронометрическая) система отсчета является синхронной (свободно падающеей) Для этого сделаем преобразование координат:

$$y_0 = \int_{r_0'}^{} \frac{\sqrt{r_g/r}}{1 - r_g/r} dr + x_0; \quad y_1 = \int_{s_o}^{s} \frac{\sqrt{r/r_g}}{1 - r_g/r} dr + x_0$$

тде $r_0, r_0' > r_g$ (для внешней области решения $r > r_g$). В новой системе координат метрика Шварцшильда имеет вид:

$ds^2 = dy_0^2 - \frac{dy_1^2}{[(3/2r_g)(y_1 - y_0)]^{2/3}} - \left[\frac{3}{2}(y_1 - y_0)\right]^{4/3} r_g^{2/3} \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$.

Такую систему называют координатной системой Леметра. Легко видеть, что в свободно падающей системе отсчета $A_{\mu\nu} = 0; F_\mu = 0; D_{ik} \neq 0$.

28.4.11 2. Motion of Monopole Test Bodies in Schwarzschild Metric

Пусть масса центрального тела, искривляющего пространствовремя, равна M, а масса пробного тела есть m_0. Возьмем метрику Шварцшильда в виде (4.20) и воспользуемся монадными уравнениями геодезической в хронометрической калибровке, т. е. движение пробных тел рассмотрим в покоящейся системе отсчета.

Спроектированное на τ уравнение геодезической (3.20) имеет смысл теоремы изменения кинетической энергии пробного тела и:В данном случае имеет вид:

$$\frac{dm}{d\tau} = F_1 p^1 = -\frac{kMm}{r^2 c^2 \left(1 - 2kM/c^2 r\right)} \frac{dr}{d\tau},$$

где $p^1 = mv_r = mdr/d\tau$. Используя соотношение $F_1 = -\tau_{0,1}/\tau_0, (4.25)$ можно представить в виде $dm/m = -d\tau_0/\tau_0$, откуда получаем общерелятивистский аналог закона сохранения энергии:

$$m = \left(E/c^2\right)/\tau_0$$

где E/c^2 - постоянная интегрирования. При $r \gg r_g$ и скоростях : $v \ll c$, используя соотношения:

$$m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2} = m_0 + m_0 v^2/2c^2 + ...;$$
$$1/\tau_0 = 1/V\overline{1 - 2kM/c^2 r} = 1 + kM/c^2 r + O\left(r_g/r\right)^2;$$
$$E = E_0 + m_0 c^2; \quad E_0 \ll m_0 c^2,$$

:приходим в наинизшем приближении к известному выражению

$$m_0 v^2/2 - kMm_0/r = E_0.$$

Вторая компонента уравнения (3.21) (соответствующая углу θ) в рассматриваемом случае имеет вид:

$$-dp^2/d\tau - (2/r)p^2 v^1 + \sin\theta\cos\theta p^3 v^3 = 0$$

С учетом начальных условий: $\theta_0 = \pi/2, v^2 = d\theta/\left.\, d\tau\right|_0 = 0$ это уравнение означает, что траектория точки плоская

$$\theta = \pi/2 = \text{ const.}$$

Третья компонента уравнения (3.21) (соответствующая углу ч) с учетом (4.9) имеет смысл теоремы изменения момента количества движения

$$dp^3/d\tau + (2/r)p^3 v^1 = 0$$

где $p^3 = md\varphi/d\tau$. Деля (4.28) на $p^3 v^1 = p^3 dr/d\tau$, находим, что $dp^3/p^3 = -(2/r)dr$. Интегрируя это уравнение, находим обобщение закона сохранения момента количества движения:

$$p^3 = \sigma m_0/r^2 \to mr^2 d\varphi/d\tau = m_0\sigma$$

где $m_0\sigma$ - постоянная интегрирования.
Первая компонента уравнения (3.21) довольно сложна:

$$-dp^{\mathbf{1}}/d\tau = L^1_{11}p^{\mathbf{1}}v^{\mathbf{1}} + L^1_{33}p^3 v^3 + mF^{\mathbf{1}}$$

поэтому используем обходной путь. Возьмем квадрат интервала: (4.20) и разделим его на $ds^2/m_0^2 = d\tau^2/m^2$ (при $\theta = \pi/2 = \text{const}$):

$$m_0^2 = m^2 - \left(p^1\right)^2/\left(1 - 2kM/c^2 r\right) - r^2\left(p^3\right)^2$$

Используя формулы (4.26) и (4.29), находим:

$$m_0^2 = \frac{E^2}{c^4\left(1 - 2kM/c^2 r\right)} - \frac{\left(p^1\right)^2}{1 - 2kM/c^2 r} - \frac{\sigma^2 m_0^2}{r^2}$$

Переходя от r к $u = 1/r$ и от дифференцирования по τ к дифференцированию по φ так, что

$$p^1 = mdr/d\tau = m(dr/d\varphi)d\varphi/d\tau = -m_0\sigma du/d\varphi$$

приводим уравнение (4.30) к виду

$$\sigma^2\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right] = \frac{E^2 - m_0^2c^4}{m_0^2c^4} + \frac{2kMu}{c^2} + \frac{2kM\sigma^2u^3}{c^2},$$

что означает общерелятивистский аналог закона сохранения энергии (4.26) в сферических координатах. Дифференцируя (4.31) по φ, находим:

$$d^2u/d\varphi^2 + u = kM/\sigma^2c^2 + 3kMu^2/c^2$$

Умножая это уравнение на $-m_0u^2\sigma^2c^2$, получаем обобщенный второй закон Ньютона (координатный) вдоль радиального направления:

$$m_0 a_r = -kMm_0/r^2 - \left(3kMm_0/r^4\right)\sigma^2 \equiv \mathscr{F}_{\text{H}} + \mathscr{F}^2$$

"Справа кроме ньютоновой силы притяжения стоит эйнштейновская - «сила притяжения»

$$\mathscr{F} \ni = -\left(3kMm_0/r^4\right)\sigma^2 = .\widetilde{H}_{\text{H}} 3\sigma_0^2/r^2c^2$$

где $\sigma = \sigma_0/c$. Для объектов Солнечной системы множитель $3\sigma_0^2/r^2c^2$ мал; действительно, можно положить $\sigma_0 = r^2\varphi \approx vr$, тогда $\mathscr{F} \ni \equiv \mathscr{F}_{\text{H}}(v/c)^2$, т. е. при $v \ll c$ F $\ni$ можно пренебречь.

При рассмотрении радиальных геодезических удобно исходить из формулы (4.30). Полагая $\sigma = 0$, находим:

$$p^{\mathbf{1}} = m\frac{dr}{d\tau} = \pm\sqrt{\frac{E^2 - m_0^2c^4}{c^4} + \frac{2kM}{rc^2}m_0^2}.$$

-Отсюда легко получить в покоящейся системе отсчета время сво. бодного перемещения частицы между двумя точками с разными значениями r. В частности, время свободного падения частицы. от точки с $r = R$ до гравитационного радиуса в этой системе отсчета оказывается конечным. Однако оно соответствует бесконечному интервалу изменения параметра x^0. Учитывая соотношение $d\tau = \sqrt{g_{00}}dx^0$, приходим к выводу, что по часам любого покоящегося по отношению к источнику наблюдателя время свободного падения тела до гравитационного радиуса тоже равно бесконечности. Легко также показать, что в свободно падающей системе отсчета (системе Леметра) время достижения гравитационного радиуса конечно.

28.4.12 3. Effect of Mercury Perihelion Shift

Рассмотрим эффект смещения перигелия планет в пространст-ве-времени, искривленном Солнцем согласно ОТО. Для этого, воспользовавшись малостью последнего слагаемого в (4.32) справа, найдем приближенное решение уравнения. Запишем (4.32) в виде

$$u'' + u = a + \varepsilon u^2$$

где $a = kM/\sigma^2c^2, \varepsilon = 3kM/c^2$. Очевидно, в нулевом приближении, когда пренебрегаем последним членом, для финитного движения получаем замкнутую эллиптическую траекторию

$$u_0 = a + A_0\cos\varphi \to r = p/(1 + e\cos\varphi)$$

где A_0 - постоянная интегрирования: $p = 1/a; e = A_0/a < 1$ - эксцентриситет Вторая постоянная интегрирования, соответствующая выоору начала отсчета угла φ, положена равной нулю.

Произведем в (4.36) замену $u(\varphi) = a + \xi(\varphi)$, тогда принимает вид:

$$\xi'' + \xi = \varepsilon(a + \xi)^2.$$

Решая это уравнение, например, методом Крылова - Боголюбова, в первом приближении находим:

$$u = a + \xi = a + A_0\cos(1 - \varepsilon a)\varphi + \varepsilon\left[a^2 + (1/2)A_0^2\right] - \\ - (1/6)\varepsilon A_0^2\cos 2(1 - \varepsilon a)\varphi + \text{O}\left(\varepsilon^2\right).$$

Смещение перигелия планеты определяется аргументом во втором слагаемом справа. Легко видеть, что, сделав полный оборот ($\varphi = 2\pi$), планета еще не окажется на том же минимальном расстоянии от Солнца, что и при $\varphi = 0$. Она окажется там при

$$(1 - \varepsilon a)\varphi = 2\pi \to \varphi = 2\pi/(1 - \varepsilon a) \approx 2\pi(1 + \varepsilon a).$$

Это означает, что ей необходимо повернуться еще на малый угол $\Delta\varphi = 2\pi\varepsilon a$. Вспоминая введенные в (4.36) обозначения, находим для смещения перигелия планеты за один оборот в покоящейся системе отсчета

$$\Delta\varphi = 2\pi\varepsilon a = 6\pi k^2 M^2/\sigma^2 C^4.$$

Для ближайших к Солнцу планет Солнечной системы (Меркурий, Венера, Земля) эти смещения за 100 лет равны $42,9'', 8,6'', 3,8''$ соответственно. Наблюдаемое смещение перигелия Меркурия хорошо согласуется с теоретически предсказанным. Для других планет Солнечной системы этот эффект лежит за пределами экспериментальных возможностей. Не обнаружимы пока и малые общерелятивистские деформации орбиты, даваемые другими членами в (4.39).

Следует отметить, что в рамках плоского пространства-времени СТО и ньютонова гравитационного потенциала также происходит смещение перигелия, однако оно в шесть раз меньше.

28.4.13 4. Deflection of Light Rays Passing Near the Sun. Gravitational Redshift

Уравнения изотропных геодезических в метр и ке Ш в а р ц шиль д а. Решения этих уравнений, получаемых из формул (3.58) и (3.59), аналогичны рассмотренным в $4.2 для части с массой покоя.

Спроектированное на τ уравнение (3.58) в данном случае имеет вид:

$$(1/\omega)d\omega/d\tau = F_1 l^1.$$

Его решение с учетом ранее использованных формул записывается слелующим образом:

$$\omega = \omega_0/\tau_0 = \varphi_0/\sqrt{1 - 2kMic^2 r},$$

где ω_0 - постоянная интегрирования; (1) - частота электромагнитного излучения.

Из (3.59) для угла θ опять следует, что луч лежит в одной «плоскости». Выберем координаты так, чтобы эта плоскость была экваториальной, т. е. $\theta = \pi/2$.

Уравнение (3.59) для угла φ имеет вид:

$$dk^3/d\tau + (2/r)k^3 l^{\mathbf{1}} = 0$$

где, напомним, $k^3 = \omega d\varphi/d\tau = \omega l^3, l^1 = dr/d\tau$. Решением этого уравнения является

$$l^3 = d\varphi/d\tau = \mu/\omega r^2$$

где μ - постоянная интегрирования.

Радиальное уравнение геодезической опять получим из выражения для квадрата интервала

$$0 = d\tau^2 - dr^2/\left(1 - 2kM/c^2 r\right) - r^2 d\varphi^2$$

Деля это соотношение на $d\tau^2$, используя (4.42) и (4.44) и переходя опять от r к $u = 1/r$ и к дифференцированию по φ, находим:

$$(du/d\varphi)^2 + u^2 = \omega_0^2/\mu^2 + \left(2kM/c^2\right)u^3$$

Дифференцируя (4.45) по φ, получаем:

$$d^2u/d\varphi^2 + u = \left(3kM/c^2\right)u^2$$

Отклонение лучей света, проходящих вблизи Солн ц а. Правую часть уравнения (4.46) следует рассматривать как малую величину. Пренебрегая ею, находим решение в нулевом приближении:

$$u_0 = (1/\rho_0)\cos\varphi \text{ или } r_0 = \rho_0/\cos\varphi.$$

Это решение соответствует распространению света по прямой, отстоящей от искривляющего центра на расстояние ρ_0.

Первое приближение можно найти опять с помощью метода Крылова - Боголюбова. При этом все выкладки будут такие же, как и в предыдущем параграфе, если везде положить $a = 0$. Из (4.39) сразу получаем решение

$$u = u_0 + u_1 = (1/\rho_0)\cos\varphi + \left(\varepsilon/6\rho_0^2\right)(3 - \cos 2\varphi)$$

где ε имеет то же значение, что и в (4.36). В итоге имеем:

$$1/r = (1/\rho_0)\cos\varphi + \left(kM/c^2\rho_0^2\right)\left(2\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right).$$

Введем декартовы координаты: $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$. Умножая (4.48) на $r\rho_0$, находим:

$$x = \rho_0 - \left(kM/c^2\rho_0\right)\left(x^2 + 2y^2\right)/\sqrt{x^2+y^2}.$$

При больших y из этого выражения получаем:

$$x \approx \rho_0 \mp \left(2kM/c^2\rho_0\right) y$$

откуда вычисляем угол $\chi/2$ между асимптотой и осью y:

$$\operatorname{tg}\frac{\chi}{2} = |dx/dy| = 2kM/c^2\rho_0 \approx \chi/2$$

Угол между асимптотами

$$\chi = 4kM/c^2\rho_0$$

Для лучей света, проходящих вблизи Солнца, $\chi = 1,75$, что хорошо согласуется с наблюдениями.

В теории Ньютона угол отклонения луча можно подсчитать, положив, что корпускула света обладает массой $m = hv/c^2$ и притягивается к Солнцу. Тогда стандартными вычислениями легко найти, что в плоском пространстве-времени угол отклонения ровно в два раза меньше значения (4.49).

Гравитационное красное смещение спектрльных линий.

В ОТО этот эффект следует рассматривать на основе решения уравнения изотропной геодезической, спроектированного на τ (4.42). Пусть свет распространяется между двумя точками, находящимися на различных расстояниях от Солнца. Пусть им соответствуют радиальные параметры r_1 и r_2, причем $r_1 < r_2$. Тогда согласно (4.42)

$$\omega_1 = \omega_0/\sqrt{1 - 2kM/c^2r_1} > \omega_2 = \omega_0/\sqrt{1 - 2kM/c^2r_2},$$

т. е. приходящий в более удаленные точки свет будет иметь меньшую частоту. Другими словами, спектр приходящегося излучения будет сдвинут в красную сторону по сравнению со спектром аналогичного излучения, испущенного в точке наблюдения. Разность частот определяется формулой

$$(\omega_2 - \omega_1)/\omega_1 \approx -\left(kM/c^2\right)(r_2 - r_1)/r_1r_2$$

Конечно, здесь допускается, что аналогично излученные кванты в момент рождения всегда имеют одинаковую частоту.

Гравитационное красное смещение будет иметь место и в том случае, когда свет приходит, например, на Землю от звезды, на поверхности которой

$$M_{\text{звезды}}/R_{\text{звезды}} > M_{\text{земли}}/R_{\text{земли}}.$$

В теории тяготения Ньютона красное смещение спектра в рассматриваемом приближении определяется такой же величиной. Этот эффект можно понимать как потерю энергии светом при преодолении ньютонова гравитационного притяжения. Тогда

$$-\Delta E = \omega_2 - \omega_1 = -mg\Delta h \approx -\omega_0 \left(kM/c^2\right)(r_2 - r_1)/r^2,$$

где для не слишком большого перепада высот $r \sim r_1 \sim r_2$.

Таким образом, гравитационное красное смещение (в рассматриваемом приближении) нельзя считать сугубо общерелятивистским эффектом.

28.4.14 5. Small Oscillations of Test Bodies on Circular Orbits (Shirokov Effect)

Эффект Широкова [77] состоит в следующем: если в свободно вращающейся по круговой орбите системе отсчета (например, в спутнике без сноса) пробным массам сообщить малые скорости в. радиальном или перпендикулярном плоскости орбиты направлении, то возникнут их малые колебания, причем периоды малых колебаний во взаимно перпендикулярных направлениях различны. Их разность зависит от радиуса круговой орбиты и гравитационного радиуса центрального источника.

Подсчитаем периоды этих малых колебаний *. Для этого перейдем от покоящейся системы отсчета, в которой рассматривались все предыдущие эффекты, во вращающуюся. Это можно сделать, произведя преобразования исходных координат кривизн $x'^i = x'^i\left(x^0,\ x^k\right)$ и затем перейдя в хронометрическую по отношению к новым координатам систему отсчета. Можно определить бесконечно много разных вращающихся систем отсчета. Они могут различаться, например, зависимостью своих угловых скоростей вращения от радиальной координаты или угла θ. Особо подчеркнем, что монадный метод задания вижения систем отсчета основан на понятиях конгруэнции мировых линиi в пространственно-временной области. (Одной мировой линии недостаточно - нужна, по крайней мере, трубка мировых линий).

Ограничимся простейшим случаем - «твердотельным» вращением, когда хронометрическая система координат новой системы отсчета получается из координат кривизн преобразованием

$$x'^0 = x^0; \quad r' = r; \quad \theta' = \theta; \quad \varphi' = \varphi - \Omega x^0$$

где $\Omega = \text{const}$ определяется из условия свободного движения по круговой орбите (геодезической) центра спутника без сноса. Очевидно, что новая хронометрическая система отсчета не может быть определена сразу во всем пространственно-временном многообразии, так как при достаточно больших r скорость этой системы отсчета будет превышать скорость света. Однако в данной задаче это неважно, поскольку нам нужна конгруэнция мировых линий лишь в окрестности именно опорной круговой орбиты.

Определим Ω. Из радиального уравнения геодезической (3.21) в неподвижной системе этсчета для круговой орбиты $(p^1 = 0)$ $L^1_{33}\left(v^3\right)^2 + F^1 = 0$ находим:

$$v^3 = d\varphi/d\tau = \sqrt{r_g/2r_0^3\,(1 - r_g/r_0)}.$$

где r_0 - радиальный параметр опорной круговой орбиты. Учитывая, что $d\tau = \sqrt{1 - r_g/r_0}dx^0$, имеем $d\varphi/dx^0 = \sqrt{r_g/2r_0^3}$. Используя формулу перехода между двумя хронометрическимi системами отсчета (3.129), которая в рассматриваемом случае записывается в виде $\partial\varphi'/\partial x^0 = -\left(\partial\varphi'/\partial\varphi\right)v^3\sqrt{g_{00}}$, получаем:

Рассмотрение здесь производится на основе монадного мегода. В работе [77] этот эффект вычисленг с помощью уравнений девиаций близких мировых иний.

$$\Omega = \sqrt{r_g/2r_0^3}$$

В новой системе координат метрика

$$ds^2 = \left(1 - r_g/r - r^2\Omega^2\sin^2\theta\right)dx_0^2 - dr^2/\left(1 - r_g/r\right) - \\ - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) - 2r^2\Omega\sin^2\theta d\varphi dx_0.$$

Здесь и в дальнейшем штрихи у новых координат писать не будем. Составляющие метрического тензора (τ^μ и h_{ik}) в хронометрической по отношению k этим координатам системе отсчета находим в следующем виде:

$\tau^\mu = \left\{1l\sqrt{g_{00}}; 0; 0; 0\right\}$; $\quad \tau_\mu = \left\{\sqrt{g_{00}}; 0; 0; -r^2\Omega\sin^2\theta/V\overline{g_{00}}\right\}$

$h_{11} = \frac{1}{(1-r_g/r)}$; $\quad h_{22} = r^2$; $\quad h_{33} = \frac{r^2\sin^2\theta(1-r_g/r)}{g_{00}}$

$h^{11} = 1 - \frac{r_g}{r}$; $\quad h^{22} = \frac{1}{r^2}$; $\quad h^{33} = \frac{g_{\theta 0}}{(1-r_g/r)r^2\sin^2\theta}$

$h_{ik} = h^{ik} = 0$ при $i \neq k$

Монадные физико-геометрические тензоры имеют компоненты:

$$F_1 = -\frac{r_g - 2r^3\Omega^2\sin^2\theta}{2r^2 g_{00}}; \quad F_2 = \frac{r^2\Omega^2\sin 2\theta}{2g_{00}};$$
$$A_{13} = \frac{\Omega r\,(1 - 3r_g/2r)\sin^2\theta}{(g_{00})^{3/2}}; \quad A_{23} = \frac{\Omega r^2\,(1 - r_g/r)\sin 29}{2\,(g_{00})^{3/2}};$$
$$D_{ik} = 0; \quad F_3 = 0; \quad A_{12} = 0.$$

Положим, что в новой системе отсчета компоненты пространственных смещений от опорной линии и 3-скорости пробного тела малы, причем имеют один порядок ($\delta r \sim r_0\delta\theta \sim v^{\mathbf{1}} \sim r_0 v^2 \sim r_0 v^3$). Ограничиваясь величинами первого порядка, т. е. пренебрегая $L^i_{kj}v^k v^i$, выпишем уравнения геодезических (в монадном виде):

$$dm/d\tau = F_1 p^1 + F_2 p^2$$
$$dp^1/d\tau + 2p^3 A^1_{\cdot 3} + mF^{\mathbf{1}} = 0$$
$$dp^2/d\tau + 2p^3 A^2_{\cdot 3} + mF^2 = 0$$
$$dp^3/d\tau + 2p^1 A^3_{\cdot 1} + 2p^2 A^3_{\cdot 2} = 0$$

Отдельно рассмотрим колебания в плоскости круговой орбиты и в перпендикулярной ей плоскости.

Колебания в направл ении, перпендик и ля рном п лоскости орбиты (по углу θ). Пусть $\theta = \pi/2 + \xi$, тогда $A^2_{\cdot 3}$-величина первого порядка по ξ. Следовательно, в уравнении (4.60) второй член имеет второй порядок и может быть опущен. Учитывая, что $dm/d\tau$ согласно (4.58) имеет первый порядок, (4.60) можно представить в виде

$$d^2\theta/d\tau^2 + F^2 = 0$$

Разлагая F^2 в ряд по ξ (первый порядок), приходим к уравнению

$$\ddot{\xi} + \frac{\Omega^2}{1 - r_g/r - r^2\Omega^2}\xi = 0,$$

где точки означают дифференцирование по τ. Отсюда находим частоту колебаний:

$$\omega_1 = \frac{c\Omega}{\sqrt{1 - r_g/r_0 - r_0^2\Omega^2}} \approx c\sqrt{\frac{r_g}{2r_0^3}}\left(1 + \frac{3}{4}\frac{r_g}{r_0}\right)$$

и период

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \approx \frac{2\pi}{c\sqrt{r_g/2r_0^3}}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{r_g}{r_0}\right).$$

Легко показать, что период равен периоду обращения пробного тела по круговой орбите радиуса r_0 в собственной (вращающейся) системе отсчета. Эти колебания пробного тела относительно центра спутника обусловлены малым углом наклона круговых орбит пробного тела и центра спутника.

Колебания в плоскости круговой орбиты. Пусть $\theta = \pi/2 = \text{const}$. Введем обозначения: $r = r_0 + \zeta$, $\quad r_0 d\varphi/d\tau = r_0 d\varphi_0/d\tau + \dot{\eta}$, где ζ и $\dot{\eta}$ одного порядка. Тогда уравнения (4.59) и (4.61) принимают вид:

$$\ddot{\zeta} + 2\dot{\eta}A^1_{.3} + F^{\mathbf{1}} = 0;$$
$$\ddot{\eta} + 2\dot{\zeta}A^3_{.1} = 0.$$

Разложим F^1 в ряд по ζ (до величин первого порядка включительно), а коэффициент разложения при ζ - в ряд по r_g/r_0 до величин второго порядка включительно. В результате получим:

$$F^1 = -\zeta\left(r_g/r_0^3 + \Omega^2 + 3\Omega^4 r_0^2\right)$$

Решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений будем искать в виде $\zeta = B\exp(\mathrm{i}\omega\tau); \eta = C\exp(\mathrm{i}\omega\tau)$, где B и C - постоянные. В результате получаем систему однородных алгебраических уравнений относительно амплитуд B и C:

$$-\left[\omega^2 + \left(\frac{3}{2}\frac{r_g}{r_0^3} + \frac{3}{4}\frac{r_g^2}{r_0^4}\right)\right]B + 2\mathrm{i}\omega C A^1_{.3} = 0;$$
$$2\mathrm{i}\omega A^3_{.1} B - \omega^2 C = 0.$$

Эти уравнения имеют нетривиальные решения, если определитель системы равен нулю. Из этого условия находим частоту колебаний в плоскости круговой орбиты:

$$\omega_2 = c\sqrt{4h^{11}h^{33}\left(A_{13}\right)^2 - \frac{3}{2} - \frac{r_g}{r_0} - \frac{3}{4}\frac{r_g^2}{r_0^4}} \approx c\sqrt{\frac{r_g}{2r_0^3}}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{r_g}{r_0}\right)$$

ч период:

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} \approx \frac{2\pi}{c\sqrt{r_g/2r_0^3}}\left(1 + \frac{3}{4}\frac{r_g}{r_0}\right).$$

Легко показать, что это колебание обязано квазиэллиптическому характеру орбиты пробного тела с общерелятивистским смещением перигелия типа наблюдаемого у Меркурия.

Разность периодов обращения (колебаний)

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{3\pi}{c\sqrt{r_g/2r_0^3}}\frac{r_g}{r_0}$$

зависит от радиуса орбиты и гравитационного радиуса шварцшильдовского источника. Этот эффект в принципе можно было бы наблюдать, сравнивая в спутнике без сноса на круговой орбите периоды малых колебаний двух пробных масс во взаимно перпендикулярных направлениях.

28.4.15 6. General Relativistic Relation of Translational and Rotational Motion of Planets

Рассмотрим общерелятивистское влияние орбитального движечия планет на их вращательное движение, следуя работе [78]. Используем уравнения Матиссона-Папапетру в монадном виде (3.61) - (3.63) с дополнительным условием Кориналдези-Папапетру. Пусть пространство-время описывается метрикой Шварцшильда. Вычисления будем проводить в неподвижной системе отсчета (хронометрической по отношению к координатам кривизн). Легко показать, что влияние вращательного (собственного) движения планет Солнечной системы на орбитальное столь ничтожно, что в рассматриваемом ниже приближении им можно пренебречь. Будем считать, что планеты движутся по геодезическим (см. \$4.2). Обратное влияние орбитального движения на вращательное более существенно, поэтому наша задача будет состоять в решении уравнений спина (3.63) и в сопоставлении решения с данными наблюдений.

Уравнения (3.63), записанные по компонентам, имеют вид:

$$dS^{12}/d\tau + v^j L^1_{jk} S^{k2} + v^i L^2_{jk} S^{1k} = -F_1 S^{12} v^1;$$
$$dS^{13}/d\tau + v^j L^1_{jk} S^{k3} + v^j L^3_{jk} S^{1k} = -F_1 S^{13} v^1$$
$$dS^{23}/d\tau + v^j L^2_{jk} S^{k3} + v^i L^3_{jk} S^{2k} = F_1 S^{12} v^3,$$

где согласно результатам §4.1, 4.2

$$F_1 = -r_g u^2/2\,(1 - r_g u)\,; \quad v^1 = dr/d\tau = -\,(m_0\sigma/m)\,du/d\varphi$$
$$v^2 = d\theta/d\tau = 0; \quad v^3 = (m_0/m)\,\sigma u^2; \quad u = 1/r.$$

Здесь опять координаты выбраны так, что $\theta = \pi/2$, т. е. орбита планеты лежит в экваториальной плоскости. Используя формулы для L^i_{ik} (4.9) и переходя от дифференцирования по τ к дифференцированию по φ согласно (4.29), эти уравнения можно привести к виду:

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{S^{12}}{u\,(1 - r_g u)}\right) + \frac{S^{23}}{u^2} = 0;$$
$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{S^{13}}{u\,(1 - r_g u)}\right) = 0;$$
$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{S^{23}}{u^2}\right) - \left(1 - \frac{3}{2} r_g u\right)\frac{S^{12}}{u\,(1 - r_g u)} = 0.$$

Уравпенпе (4.69а) легко решить точно:

$$S^{13} = C_0 u\,(1 - r_g u)$$

где C_0 - постоянная интегрирования. Из (4.68а) и (4.70а) следует уравнение для одной неизвестной

$$\frac{d^2}{dq^2}\left(\frac{S^{12}}{u\,(1 - r_g u)}\right) + \left(1 - \frac{3}{2} r_g u\right)\frac{S^{12}}{u\,(1 - r_g u)} = 0.$$

Учтем, что в нулевом приближении согласно (4.37)

$$u = 1/r = (1/p)(1 - e\cos\varphi)$$

где p - фокальный параметр; e - эксцентриситет орбиты. Пренебрегая величинами второго порядка по $r_g/2p \equiv \eta$, решим уравнение (4.72) методом последовательных приближений. В первом приближении по η решеиис находим в виде

$$\frac{S^{12}}{u\,(1 - r_g u)} = C_1\left[\sin\left(1 - \frac{3}{2}\eta\right)\varphi + \frac{\eta e}{2}\sin 2\varphi\right] +$$
$$+ C_2\left[\cos\left(1 - \frac{3}{2}\eta\right)\varphi - \frac{3}{2}\eta e + \frac{\eta e}{2}\cos 2\varphi\right],$$

где C_1 и C_2 - постоянные интегрирования. Отсюда и из (4.68а) легко найти S^{12} и S^{23}, однако запишем результат сразу для наблюдаемых величин, вводимых согласно формулам $S(i) = (1/2)\varepsilon_{ijk} S^{sr} h_s(j) h_r(k)$, где $h_s(j)$ - компоненты триады; $\varepsilon_{i.ik}$ - 3-мерные сімволы Леви-Чивиты. Тогда трем компонентам тензора S^{ik} соответствуют компоненты дуального ему наблюдаемого вектора кинетического момента

$$\left.\begin{array}{l} S_r \equiv S(1) = S^{23} r^2; \quad S_0 = S(2) = -S^{13} r/\sqrt{1 - r_g u}; \\ S_q \equiv S(3) = S^{12} r/V\overline{1 - r_g u}. \end{array}\right\}$$

После несложных вычислений находим:

$$S_r = C_r\{\cos[1-(3/2)\eta]\varphi - \eta e\cos\varphi + \eta e\cos 2\varphi\} +$$
$$+C_\varphi\left\{\sin[1-(3/2)\eta]\varphi - \frac{1}{2}\eta\sin\varphi + \eta e\sin 2\varphi\right\}$$
$$S_\varphi = -C_r\left\{\sin[1-(3/2)\eta]\varphi + \frac{\eta}{2}\sin\varphi - e\eta\sin\varphi + \eta e\sin 2\varphi\right\} +$$
$$+C_\varphi\{\cos[1-(3/2)\eta)\varphi - \eta e + \eta e\cos 2\varphi\}$$
$$S_\theta = C_\theta(1-\eta e+\eta e\cos\varphi)$$

где C_r, C_θ, C_φ - постоянные, равные соответствующим значениям величин S_r, S_θ и S_φ при $\varphi = 0$. Они связаны с постоянными C_1, C_2, C_0 следующим образом:

$$C_1 \approx -C_r[1+(3/2)\eta - \eta e]; \quad C_2 \approx C_\varphi(1+\eta)$$
$$C_0 = -C_\theta(1+\eta-\eta e).$$

Из (4.75)-(4.77) определим модуль вектора кинетического. момента

$$S = \boldsymbol{V}'\overline{S_r^2+S_\theta^2+S_\varphi^2} \approx S_0 + \eta\rho\left[\frac{C_rC_\varphi}{S_0}\sin\varphi + \frac{C_r^2+C_\theta^2}{S_0}\cos\varphi\right] -$$
$$-\eta\left[\frac{C_rC_\varphi}{2S_0}\sin 2\varphi + \frac{C_r^2-C_\varphi^2}{4S_0}\cos 2\varphi\right]$$

где:

$$S_\theta = \sqrt{\left(C_r^2+C_\theta^2+C_\varphi^2\right) + (1/2)\eta\left(C_r^2-C_\varphi^2\right) - 2\eta e\left(C_r^2+C_\theta^2\right)}$$

среднее значение $S(\varphi)$ за один оборот. Запишем формулу для разности длительности суток $T(\varphi) \sim 1/S(\varphi)$ и среднего значения $T_0 \sim 1/S_0$ за год

$$\delta T(\varphi) = \frac{1}{S(\varphi)} - \frac{1}{S_0} = \eta T_0\left[-e\left(\frac{C_rC_\varphi}{S_0^2}\sin\varphi + \right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{C_r^2+C_\theta^2}{S_0^2}\cos\varphi\right) + \frac{C_rC_\varphi}{2S_0^2}\sin 2\varphi + \frac{C_r^2-C_\varphi^2}{4S_0^2}\cos 2\varphi\right].$$

Сравним полученные результаты с опытными данными по неравномерности вращения Земли [79]. Конечно, эти данные обусловлены движением Солнца, Луны и планет, атмосферной циркуляцией, сплюснутостью Земли, приливным трением и др. Миогие из этих факторов приводят к эффектам значительно более существенным, чем общерелятивистские, тем не менее, как будет показано, общерелятивистские и наблюдаемые эффекты качественно похожи. Кроме того, количественно проявления эффектов различаются всего лишь на несколько порядков. Обсудим наибопее значительные эффекты.

I р ед в а р ени е р а внод енс т вий.

Этот эффект сводится к прецессии земной оси вокруг нормали к плоскости эклиптики с наблюдаемой скоростью 50,26" в год, обусловленной в основном сплюснутостью Земли [79].

Проделанные вычисления показали, что существует аналогичный общерелятивистский эффект, обусловленный членами sin[1 - $-(3/2)\eta]\varphi$ и cos$[1-3/2)\eta]\varphi$ в (4.75) и (4.76). Эти члены описывают прецессию земной оси со скоростью $3\pi\eta$ в год в направлении движения по орбите (в два раза меньшую смещения перигелия). Учитывая, что для Земли $\eta \sim 10^{-8}$, находим значение скорости общерелятивистской прецессии: $\sim 0,02''$ в год.

Сезонные отклонения длительности суток от "с реднегодового з н а ч ения. По данным наблюдений за 1956-1965 гг. этот эффект характеризуется следующей эмпирической формулой [80] (T измеряется в миллисекундах):

$$\delta T = -0,10\sin\varphi - 0,48\cos\varphi - 0,25\sin 2\varphi - 0,16\cos 2\varphi$$

Первые два члена описывают так называемую годичную волну (максимум длительности суток в январе, минимум - в июле), последние - полугодичную волну (максимум - в апреле и в октябре, минимум - в январе и в июле). Кроме сезонных, наблюдаются неравномерные отклонения длительности суток порядка 1 мс, причины которых неясны [79].

Согласно теоретически полученной общерелятивистской формуле (4.79) также имеются годичные и полугодичные волны созонных отклонений длительности суток от среднегодового значения. Подстановка в (4.79) параметров Земли приводит к формуле (T измеряется в миллисекундах)

$\delta T = +0,000 \sin\varphi - 0,014 \cos\varphi - 0,012 \sin 2\varphi + 0,033 \cos 2\varphi$.

Если ось вращения ортогональна плоскости эклиптики ($C_r = C_\varphi = 0$), то из (4.78) следует, что

$$(S - S_0)/S_0 = \eta e \cos\varphi$$

По этой формуле можно произвести грубую оценку максимального относительного изменения угловой скорости вращения Земли. 'Она составляет примерно $0,17 \cdot 10^{-19}$, тогда как наблюдения дают значение $3,5 \cdot 10^{-19}$.

Нут ация е м н о й о с и. Этот эффект, наблюдаемый крайне нерегулярно, характеризуется амплитудой, не превышающей $9''$. Из формул (4.77) и (4.78) легко найти угол β наклона плоскости экватора к плоскости эклиптики: $\cos\beta = |S_\theta|/S(\varphi)$. Полагая $\beta(\varphi) = \beta_0 + \Delta\beta(\varphi)$, получаем следующее выражение для угла нутации:

$$\Delta\beta(\varphi) = \eta e \operatorname{ctg}\beta_0 \left[\frac{C_r C_\varphi}{S_0^2}\sin\varphi - \frac{C_\varphi^2}{S_0^2}\cos\varphi\right] -$$
$$-\eta \operatorname{ctg}\beta_0 \left[\frac{C_r C_\varphi}{2S_0^2}\sin 2\varphi + \frac{C_r^2 - C_\varphi^2}{4S_0^2}\cos 2\varphi\right]$$

Множитель $\operatorname{ctg}\beta$ приводит к существенному уменьшению ампли-. туды общерелятивистской нутации при стремлении оси вращения к плоскости орбиты (случай планеты Уран). Для Земли $|C_r| \gg \gg |C_\varphi|, \beta_0 = 23°27'09''$, что согласно (4.83) приводит к значениюамплитуды общерелятивистской нутации приблизительно 0,0002".

Сопоставление эмпирических данных и теоретических оценок общерелятивистских эффектов позволяет надеяться, что недалеко то время, когда точность наблюдний позволит выделить общерелятивистские эффекты из суммарного вклада влияний на Землю" всех других факторов [81].

28.4.16 7. Spherically Symmetric Metrics

Метрику Райснера-Нордстрема - электровакуумное статическое сферически-симметричное совместное решение уравнений Эйнштейна и Максвелла можно получить с помощью тех же соображений, что и метрику Шварцшильда (см. §4.1). Она имеет вид:

$ds^2 = (1 - 2kM/c^2 r + kq^2/c^4 r^2)\, dx_0^2 - \frac{dr^2}{1 - 2kM/c^2 r + kq^2/c^4 r^2} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$

где q - электрический заряд.

Для единственной (радиальной) компоненты электромагнитного поля имеем:

$$E^{\mathbf{1}} = q/r^2\sqrt{h_{11}} \to E(1) = E^i h_i(1) = q/r^2.$$

Метрика Фишера [82] - статическое сферически-симметричное совместное решение уравнений Эйнштейна и Клейна-Фока для безмассового скалярного поля*. Решение можно получить примерно таким же образом, как и предыдущие метрики. Выпишем окончательный результат [83]

$$ds^2 = \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{r^2} dx_0^2 - \frac{r^2}{(z - z_1)(z - z_2)} dz^2 - r^2(z)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right),$$

где $r^2(z) = (z - z_1)^{1-\alpha}(z - z_2)^{1+\alpha}; z_{1,2} = \mu \pm \sqrt{\mu^2 + kQ^2}; \alpha = |\ (z_1 + z_2)/(z_1 - z_2)\ |$; μ - постоянная интегрирования (обычно полагают $\mu = -r_g/2$); Q - скалярный заряд источника.

Метрика Коттлера [84] обобщает метрику Шварцшильда на случай отлич-ной от нуля космологической постоянной:
$ds^2 = (1 - 2kM/c^2r + \Lambda r^2/3)\, dx_0^2 - dr^2/\,(1 - 2kM/c^2r + \Lambda r^2/3) - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right).$
Метрика Вайдья [85] представляет собой простейшее обобщение метрики Шварцшильда на случай наличия в пространстве-времени высокочастотного излучения (сферически-симметричного):

$$ds^2 = \left[1 - 2kM(u)/c^2r + \Lambda r^2/3\right] du^2 + 2dudr - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

В работе [83] изучено также статическое сферически-симметричноесовместное решение уравнений Эйнштейна, Максвелла и лейна-Фока для безмассового скалярного поля. тде $u = x^0 - r$ - запаздывающее время; $M(u)$ - масса, зависящая от u. Метрика Вайдья является решением уравнений Эйнштейна

$$R_{\mu v} - (1/2)g_{\mu v}R + \Lambda g_{\mu v} = \left(8\pi k/c^4\right) Pk_\mu k_v$$

где k_μ - изотропный вектор распространепия излучения; P - плотность потока энергии в системе отсчета с 4-скоростью τ^μ такой, что $k^\mu\tau_\mu = 1$. Правая часть представляет собой усредненный тензор энергии-импульса высокочастотного излучения.

28.5 Some Effects of General Relativity in Axially Symmetric Metrics

28.5.1 1. Kerr Metric

Рассмотрим второе по практической важности (после метрики Шварцшильда) точное решение уравнений Эйнштейна - метрику Керра [14, с. 208]. Это решение описывает метрику, создаваемую (в вакууме) вращающимся центральным электрически нейтральным телом. Вывод этого решения довольно громоздок, поэтому запишем его сразу в окончательном виде в наиболее часто используеемы координатах Бойера - Линдквиста

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g r}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right) dx_0^2 - \frac{r^2 + a^2\cos^2\theta}{r^2 + a^2 - r_g r} dr^2 - \left(r^2 + a^2\cos^2\theta\right) d\theta^2 -$$
$$- \left(r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2 \sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right)\sin^2\theta d\varphi^2 + \frac{2r_g r a\sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta} dx_0 d\varphi,$$

где r, θ, φ - сферические координаты. Это пространство-время характеризуется двумя векторами Киллинга: $\xi^\alpha_{(0)} = \delta^\alpha_0; \xi^\alpha_{(3)} = \delta^\alpha_3$, соответствующими стационарности и аксиальной симметрии.

Проанализируем смысл двух входящих в метрику констант: r_g и a. Легко видеть, что при $a = 0$ метрика Керра (5.1) переходит в метрику Шварцшильда (4.20) в координатах кривизн. Отсюда - следует, что $r_g = 2kM/c^2$ определяется массой центрального источника. При $r_g = 0$ метрика (5.1) описывает плоское пространствовремя.

Из сравнения метрики' Керра при малых a с приближенным решснием Лензе-Тирринга [86], характеризующим метрику вокруг медлеино вращающегося тела с моментом количества движения $\mathfrak{M}$

$$ds^2 = \left(1 - 2kM/c^2r\right) dx_0^2 - dr^2/\left(1 - 2kM/c^2r\right) - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) +$$
$$+ \left(4kM/c^3r\right)\sin^2\theta dx_0 d\varphi,$$

следует $a = \mathfrak{M}; cM$.В оси z. Керр полагал $a = (2/5)\omega R^2/c$, где ω - угловая скорость вращения; R - радиус сферического тела.

Легко видеть, что метрика (5.1) инвариантна относительно одновременного отражения времени и изменения знака ω, т. е. $x^0 \to -x^0; a \to -a$. Это также подтверждает справедливость отождествления a с физической величиной, пропорциональной моменту импульса.

Рассмотрим физико-геометрические тензоры в двух системах отсчета.

Хронометрическая систем а отсчета, соответствующая координат ам Бой е р а-Линдквиста. В этой системе отсчета монадные составляющие метрического тензора имеют вид:

$$\tau^\mu = \frac{g_0^\mu}{\sqrt{1 - r_g r/\rho^2}}; \quad \tau_\mu = \left\{ V/\overline{1 - \frac{r_g r}{\rho^2}}; \quad 0; 0; \frac{r_g r a \sin^2\theta}{\rho^2\sqrt{1 - r_g r/\rho^2}} \right\}$$

$$h_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{\rho^2}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho^2\Delta}{\rho^2 - r_g r}\sin^2\theta \end{pmatrix}; \quad h^{ik} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta}{\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho^2 - r_g r}{\rho^2\Delta\sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

где использованы обозначения: $\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta; \Delta = r^2 + a^2 - r_g r$. По формулам §3.5 вектор ускорения находим в виде

$$F_1 = \frac{r_g\left(\rho^2 - 2r^2\right)}{2\rho^2\left(\rho^2 - r_g r\right)}; \quad F_2 = \frac{r_g r a^2 \sin 2\theta}{2\rho^2\left(\rho^2 - r_g r\right)}; \quad F_3 = 0,$$

что соответствует в данной системе отсчета наблюдаемым ускорениям в радиальном и меридиональном направлениях

$$F_{\boldsymbol{r}} = F_1 h^1(1) = \frac{r_g\left(\rho^2 - 2r^2\right)\sqrt{\Delta}}{2\rho^3\left(\rho^2 - r_g r\right)}; \quad F_\theta = F_2 h^2(2) = \frac{r_g r a^2 \sin 2\theta}{2\left(\rho^2 - r_g r\right)\rho^3}.$$

Тензор угловой скорости вращения имеет. компоненты:

$$A_{13} = -\frac{r_g a\left(\rho^2 - 2r^2\right)\sin^2\theta}{2\rho\left(\rho^2 - r_g r\right)^{3/2}}; \quad A_{23} = -\frac{r_g r a\Delta\sin 2\theta}{2\rho\left(\rho^2 - r_g r\right)^{3/2}}.$$

Тензор скоростей деформации $D_{ik} = 0$, так как данная хронометрическая система отсчета является киллинговой.

Кинеметрическая систем а отсчет а, соответств ующая координат ам Бой ера-Линдквиста. В ней составляющие метрического тензора

$$\tau_\mu = \frac{g_\mu^0\sqrt{\rho^2\Delta}}{\sqrt{\Delta_1}}; \quad \tau^\mu = \left\{ \frac{\sqrt{\Delta_1}}{\sqrt{\rho^2\Delta}}; 0; 0; \frac{r_g r a}{\sqrt{\rho^2\Delta\Lambda_1}} \right\}$$

$$h_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{\rho^2}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta_1\sin^2\theta}{\rho^2} \end{pmatrix}; \quad h^{ik} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta}{\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho^2}{\Delta_1\sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

где $\Delta_1 = \rho^2\left(r^2 + a^2\right) + r_g r a^2\sin^2\theta$. Используя формулу (3.127) для скорости движения кинеметрической системы отсчета относительно хронометрической в одной и той же системе координат, находим, что новая система отсчета движется относительно старой (хронометрической) по концентрическим окружностям в широтном направлении со скоростями

$v(3) = v^3 h_3(3) = \sqrt{g_{00}} g^{03} h_3(3) = r_g r a\sin\theta/\rho^2/V\bar{\Delta}; \quad v(1) = v(2) = 0.$

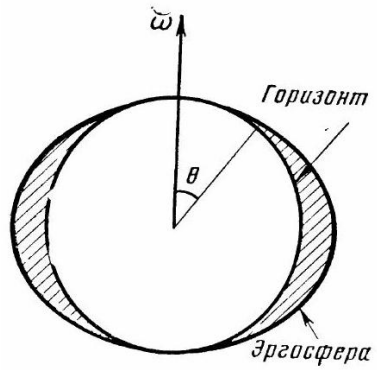
Компоненты вектора ускорения кинеметрической системы отсчета $F_i = \tau_0\tau_{,i}^0$ найдем в виде

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \left(r_g/2\rho^2\Delta\Delta_1\right)\left[\left(r^2 + a^2\right)^2\left(a^2\cos^2\theta - r^2\right) + 2r^3 r_g a^2\sin^2\theta\right]; \\ F_2 &= a^2\sin 2\theta r_g r\left(r^2 + a^2\right)/2\rho^2\Delta_1; \quad F_3 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Тензор угловой скорости вращения по определению системы отсчета равен нулю ($A_{ik} = 0$), однако в отличие от предыдущего случая не равен нулю тензор скоростей деформаций:

$$\left.\begin{aligned} &D_{13} = -r_g a\left[2r^2\left(r^2 + a^2\right) + \rho^2\left(r^2 - a^2\right)\right]\sin^2\theta/2\rho^2\sqrt{\rho^2\Delta\Delta_1} \\ &D_{23} = r_g r a^3\sin^3\theta\cos\theta\sqrt{\Delta}/\rho^2\sqrt{\rho^2\Delta_1}; D_{11} = D_{12} = D_{22} = D_{33} = 0. \end{aligned}\right\}$$

Для метрики Керра (5.1) можно



указать две характерные поверхности, на которых составляющие метрического тензора τ^μ и h_{ik} в хронометрической системе отсчета имеют особенности (рис. 11).

Одна из них - горизонт - определяется условием

$$h_{11} = 0, \quad \text{т. е. } \Delta = 0 \to r_{\text{гор}} = r_g/2 + \sqrt{r_g^2/4 - a^2}.$$

Легко показать, что нормаль n^μ к

Рис. 11. Характерные поверх- этой поверхности изотропна ($n_\mu n^\mu = 0$). ности в метрике Керра Поверхность бесконечного красного смещения - определяется условием

$$\tau^\mu = 0, \quad \text{т. е. } \rho^2 - r_g r = 0 \to r_{\text{g}} = r_g/2 + \sqrt{r_g^2/4 - a^2 \cos^* \theta}.$$

Из формул (5.4), (5.5) следует, что в хронометрической системе отсчета на ней обращаются в бесконечность длины векторов ускорения и угловой скорости вращения системы отсчета.

ти две поверхности соприкасаются в полюсах (при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$). В метрике Шварцшильда они совпадают

28.5.2 2. Equations of Motion of Monopole Test Bodies in Kerr Metric

Рассмотрим уравнения геодезических в метрике Керра (5.1) в монадном виде в хронометрической системе отсчета. Для этого воспользуемся формулами (3.20), (3.21) и выражениями для монадных физико-геометрических тензоров (5.4), (5.5). Кроме того, учтем, что отличные от нуля 3-мерные коэффициенты связности в метрике Керра ${}^*\Delta^k_{is} = L^k_{is}$

$$L^1_{11}=\frac{2r\Delta-\rho^2\left(2r-r_g\right)}{2\rho^2\Delta};\quad L^2_{11}=\frac{a^2}{2\rho^2\Delta}\sin 2\theta;$$
$$L^1_{12}=-\frac{a^2}{2\rho^2}\sin 2\theta;$$
$$L^2_{12}=\frac{r}{\rho^2};$$
$$L^1_{22}=-\frac{r\Delta}{\rho^2};\quad L^2_{22}=-\frac{a^2}{2\rho^2}\sin 2\theta;$$
$$L^1_{33}=-\frac{\Delta\sin^2\theta}{2\rho^2\left(\rho^2-r_gr\right)^2}\left[2r\Delta\left(\rho^2-r_gr\right)-\rho^2\left(2r-r_g\right)a^2\sin^2\theta\right];$$
$$L^2_{33}=-\frac{\Delta\sin 2\theta}{2\rho^2\left(\rho^2-r_gr\right)^2}\left[\rho^2\left(\rho^2-r_gr\right)+r_gra^2\sin^2\theta\right];$$
$$L^3_{13}=\frac{2r\Delta\left(\rho^2-r_gr\right)-\rho^2\left(2r-r_g\right)a^2\sin^2\theta}{2\rho^2\Delta\left(\rho^2-r_gr\right)};$$
$$L^3_{23}=\frac{\rho^2\left(\rho^2-r_gr\right)+r_gra^2\sin^2\theta}{\rho^2\left(\rho^2-r_gr\right)}\operatorname{ctg}\theta,$$

где использованы обозначения предыдущего параграфа.

Тогда временное (скалярное) уравнение геодезической можно записать в виде $dm/d\tau=F_1p^1+F_2p^2$ или

$$dm/d\tau=\left[r_g/2\rho^2\left(\rho^2-r_gr\right)\right]\left[\left(\rho^2-2r^2\right)p^1+ra^2\sin 2\theta p^2\right].$$

Пространственное уравнение, соответствующее углу θ, имеет вид:

$$\frac{dp^2}{d\tau}+\frac{\sin 2\theta}{2\rho^2}\left[\frac{a^2}{\Delta}p^1v^1-a^2p^2v^2-\frac{\left[\rho^2\left(\rho^2-r_gr\right)+r_gra^2\sin^2\theta\right]\Delta}{\left(\rho^2-r_gr\right)^2}p^3v^3\right]+$$
$$+\frac{2r}{\rho^2}p^1v^2+\frac{r_gra\Delta\sin 2\theta}{\rho^3\left(\rho^2-r_gr\right)^{3/2}}p^3-\frac{mr_gra^2\sin 2\theta}{2\rho^4\left(\rho^2-r_gr\right)}=0$$

Пространственное уравнение, соответствующее углу φ, записывается в форме

$$\frac{dp^3}{d\tau}+\frac{\left[2r\Delta\left(\rho^2-r_gr\right)-\rho^2\left(2r-r_g\right)a^2\sin^2\theta\right]}{\rho^2\Delta\left(\rho^2-r_gr\right)}p^1v^3+$$
$$+\frac{2\left[\rho^2\left(\rho^2-r_gr\right)+r_gra^2\sin^2\theta\right]}{\rho^2\left(\rho^2-r_gr\right)}\operatorname{ctg}\theta p^2\psi^3-\frac{ar_g}{\rho^3\sqrt{\rho^2-r_gr}}\times$$
$$\times\left[\frac{\rho^2-2r^2}{\Delta}p^1+2r\operatorname{ctg}\theta p^2\right]=0.$$

Радиальная составляющая пространственно-спроектированного уравнения

$$dp^1/d\tau+L^1_{11}p^1v^1+L^1_{22}p^2v^2+L^1_{33}p^3v^3+2L^1_{12}p^1v^2+2p^3A^1_{.3}+mF^1=0$$

Полученные уравнения сложны; проинтегрировать их в общем случае трудно, однако, это можно сделать для некоторых частных случаев. В качестве примера рассмотрим траектории движения монопольных пробных тел с начальными данными в экваториальной «плоскости» вращающегося источника (в начальный момент $\theta=\pi/2$ и $v^2=d\theta/d\tau=0$). Подставляя эти значения в уравнение (5.12), сразу же находим, что вся траектория тела лежит в экваториальной плоскости (плоскость Лапласа).

Временное уравнение геодезической (5.11) в экваториальной плоскости имеет тот же вид, что и в метрике Шварцшильда. Его решение

$$m = E\sqrt{r}/c^2\sqrt{r-r_g}$$

где E/c^2 - постоянная интегрирования.

Уравнение (5.13) можно представить следующим образом:

$$\frac{dp^3}{d\tau} + \frac{2r\left(r-r_g\right)^2 - r_g a^2}{r\left(r-r_g\right)\left[r\left(r-r_g\right)+a^2\right]}p^3\frac{dr}{d\tau} + \\ + \frac{ar_g}{r\sqrt{r\left(r-r_g\right)}}\frac{m}{\left[r\left(r-r_g\right)+a^2\right]}\frac{dr}{d\tau} = 0.$$

Подставляя сюда m из (5.15) и деля уравнение на $dr/d\tau$, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$\frac{dp^3}{dr} + \frac{2r(r-r_g)^2 - r_g a^2}{r(r-r_g)[r(r-r_g)+a^2]}p^3 + \frac{Ear_g}{c^2 r(r-r_g)[r(r-r_g)+a^2]} = 0.$

Его решение получаем в виде

$$p^3 = \mathrm{E}ar_g\left[1 + C_2\left(r-r_g\right)\right]/c^2 r\left[r\left(r-r_g\right)+a^2\right]$$

где C_2 - постоянная интегрирования. Потребуем, чтобы при $a = 0$ переходило в ранее найденное (4.29) для метрики Шварцшильда. Из этого условия находим:

$$C_2 = \sigma m_0 c^2/Ear_g$$

где σ - постоянная ($\sigma = \sigma_0/c; \sigma_0 -$ удвоенная секторная скорость), использованная в §4.2. В результате получаем в экваториальной плоскости метрики Керра аналог закона сохранения момента количества движения

$$\left[r^2\left(1 - r_g/r\right) + a^2\right]p^3 = \sigma m_0\left(1 - r_g/r\right) + \left(Ea/c^2\right)r_g/r$$

Знак модуля у второго члена справа зависит от соотношения направлений вращения источника и пробного тела (знаки совпадают, если a и σ одинаково направлены).

Вместо непосредственного - решения радиального уравнения геодезической (5.14) проще исходить из выражения для квадрата интервала (5.1). Умножая обе части (5.1) на $m_0^2/ds^2 = m^2/d\tau^2$, при $\theta = \pi/2 = \mathrm{const}$, приходим к соотношению

$$m_0^2 = m^2 - \frac{r^2}{r\left(r-r_g\right)+a^2}\left(p^1\right)^2 - \frac{r\left[r\left(r-r_g\right)+a^2\right]}{r-r_g}\left(p^3\right)^2 = 0.$$

Произведя с помощью (5.18) переход от дифференцирования по τ к дифференцированию по φ, находим:

$$p^1 = m\frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\tau} = -\frac{\left[\sigma m_0\left(1 - r_g u\right) + \left(Ea/c^2\right)r_g u\right]}{1 - r_g u + a^2u^2}\frac{du}{d\varphi},$$

где использовано обозначение $u = 1/r$. Подставляя (5.15), (5.18) и (5.20) в (5.19), приходим к обобщению на метрику Керра шварцшильдовского закона сохранения энергии (4.31) в сферических координатах:

$$\left[\sigma m_0\left(1 - r_g u\right) + \left(Ea/c^2\right)r_g u\right]^2\left[(du/d\varphi)^2 + u^2\left(1 - r_g u + a^2u^2\right)^2/\left(1 - r_g u\right)\right] = \\ = \left[E/c^4\left(1 - r_g u\right) - m_0^2\right]\left(1 - r_g u + a^2u^2\right)^3.$$

Обсудим некоторые физические следствия этого уравнения, разлагая его в ряд по $r_g u$. Ограничимся величинами до второго порядка по $r_g u$ включительно. При этом, имея в виду свойство $a^2 < r_g^2$, будем считать $r_g u$ и au одного порядка. Кроме того, естественно положить $v^2/c^2 \sim r_g u; \left(E^2 - m_0^2c^4\right)/m_0^2c^4 \sim r_g u$. Тогда из (5.21) находим:

$$\sigma^2\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2\right]\approx\frac{E^2-m_{0^2}c^4}{m_0^2c^4}+r_gu\left[1-\frac{2Ea\left(E^2-m_0^2c^4\right)}{m_0^3c^6\sigma}\right]-$$
$$-r_g^2u^2\frac{2E^3a}{m_0^3c^6\sigma}+u^3\sigma^2\left(r_g-2a^2u\right)$$

Продиффренцировав (5.22) по u, запишем обобщение на случай метрики Керра ньютонова- (координатного) закона гравитационного взаимодействия в сферических координатах:

$$\sigma^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u\right)\approx\frac{r_g}{2}\left[1-\frac{2Ea\left(E^2-m_0^2c^4\right)}{m_0^3c^6\sigma}\right]-$$
$$-\frac{2E^3a}{m_0^3c^6\sigma}r_g^2u+\frac{3}{2}r_gu^2\sigma^2-4a^2u^3\sigma^2.$$

Имея в виду, что первый справа член $r_g/2$ соответствует ньютоновой силе гравитационного притяжения; а предпоследний член - Эйнштейновской «силе притяжения» [см. (4.32)], можно в силовой (координатной) интерпретации записать:

$$\tilde{F}_{\text{гр}}=-k\frac{Mm}{r^2}\left(1-\frac{2aE}{\sigma m_0c^2}\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{8k^2M^2m}{r^3c^2}\frac{a}{\sigma}-$$
$$-\frac{3kMm}{r^4}\sigma^2+\frac{4a^2}{r^5}m\sigma^2c^2$$

т. е. появляются две керровские «силы», обратно пропорциональные r^3 и r^5. Кроме того, в ньютонову силу притяжения входит дополнительный множитель, зависящий от вращения центрального тела и параметров движения пробного тела.

28.5.3 3. Drift of the Meeting Point of Two Monopole Test Particles Moving in Opposite Directions on Circular Orbits (Mitskevich Effect)

Эффект Мицкевича [87, 88] в хронометрической по отношению к координатам (5.1) системе отсчета.

Будем исходить из радиального уравнения геодезической (5.14), которое для круговых экваториальных орбит ($v^1=v^2=0$; $\theta=\pi/2$) с учетом (5.15) можно представить в виде

$$\left[2r\left(r-r_g\right)^2-r_ga^2\right]\left(p^3\right)^2+2r_gaEp^3-E^2r_g=0.$$

Решая это квадратное уравнение относительно импульса p^3, имеем:

$$p_\pm^3=\pm\left(E_\pm/c^2\right)\sqrt{r_g/2r}/\left[\left(r-r_g\right)\pm a\sqrt{r_g/2r}\right]$$

Здесь учтено, что интеграл энергии $E_\pm$различен для частиц, движущихся по орбитам с одним и тем же значением r, но в противоположных направлениях. Подставляя в $p_\pm^3=m_\pm d\varphi_\pm/d\tau$ еще раз (5.15), находим:

$$d\varphi_\pm/d\tau=\pm\sqrt{\left(r_g/2\right)\left(r-r_g\right)}/r\left[\left(r-r_g\right)\pm a\sqrt{r_g/2r}\right]$$

Интегрируя, получаем точные выражения для периодов обращения частиц вокруг источника:

$$T_\pm=\left(2\pi r/c\sqrt{\left(r_g/2\right)\left(r-r_g\right)}\right)\left[\left(r-r_g\right)\pm a\sqrt{r_g/2r}\right]$$

Таким образом, в рассматриваемой системе отсчета период обрашения частицы, движущейся в направлении вращения источника (T_+), больше, чем период обращения частицы, движуиейся в противоположном направлении (T_-). Разность периодов

$$T_+ - T_- = 4\pi a/c\sqrt{1 - r_g/r}$$

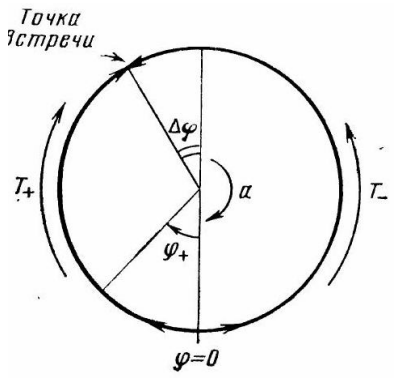
определяется характеристикой a центрального источника. Следует особо подчеркнуть, что эта величина в основном приближении не зависит ни от радиуса круговой орбиты, ни от массы источника, ни от гравитационной постоянной. Это существенно новое качество гравитационного эффекта, присущее метрике Керра.

Подсчитаем угол $\Delta\varphi$ смещения (дрейфа) точки встречи пробных частиц (рис. 12). Частица, движущаяся в направлении вращения источника, будет отставать. Очевидно, что встреча частиц произойдет через время

$t = 1/\left(v_+ + v_-\right) = T_+T_-/c\left(T_+ + T_-\right)$

Угол смещения точки встречи от угла $\varphi = \pi$ равен:

$$\Delta\varphi = \omega_+\left(\frac{T_+}{2c} - t\right) = \frac{\pi\left(T_+ - T_-\right)}{T_+ + T_-} = \frac{a\pi}{r}\frac{\sqrt{r_g/2r}}{(1 - r_g/r)}.$$



Легко убедиться, что при $a = 0$ периоды обращения двух частиц (5.28) одинаковы и совпадают со

Рис. 12. Эффект Мицкевича. Дрейф точки встречи пробных частиц на круговых орбитах значением T в метрике Шварцшильда, а в основном приближении по r_g/r представляют собой период обращения в теории Ньютона $T_0 = 2\pi r/c\sqrt{r_g/2r} = 2\pi r/v_0$, где $v_0 = \sqrt{kM/r}$ - линейная скорость движения точки по круговой орбите в ньютоновом гравитационном поле.

Как уже отмечалось, в метрике Керра интегралы энергии $E_\pm$ и момента $\sigma_\pm$для частиц, вращающихся в разные стороны по круговым орбитам с одним и тем же r, различны. Подсчитаем эти величины. Чтобы найти $E_\pm$, воспользуемся соотношением (5.19), следующим из выражения для квадрата интервала. Для круговых орбит при учете (5.15) оно имеет вид:

$$\left[r\left(r - r_g\right) + a^2\right]\left(p^3\right)^2 - \left[E_\pm^2/c^4 - m_0^2\left(1 - r_g/r\right)\right] = 0$$

Отсюда вытекает, что

$$p_\pm^3 = \pm\sqrt{\frac{E_\pm^2/c^4 - m_0^2\left(1 - r_g/r\right)}{r\left(r - r_g\right) + a^2}}.$$

Приравнивая друг другу выражения (5.26) и (5.31), находим:

$$E_\pm^2 = m_0^2c^4\frac{\left[1 - r_g/r \pm (a/r)\sqrt{r_g/2r}\right]^2}{1 - (3/2)r_g/r \pm (a/r)\sqrt{2r_g/r}}.$$

Как легко убедиться, при $a = 0$ отсюда следует, что $E^2 \approx \approx m_0^2 c^4 \left[1 - (1/2) r_g/r\right]$, а это соответствует известному выражению для интеграла энергии, если учесть, что в ньютоновой теории квадрат линейной скорости на круговой орбите $v_0^2 = kM/r$. Для нахождения константы $\sigma_\pm$ следует сопоставить (5.26), откуда получаем:

$$\sigma_\pm = \pm \frac{E_\pm}{m_0 c^2} \sqrt{\frac{r_g}{2r} \frac{\left[(r^2 + a^2) \mp ar\sqrt{2r_g/r}\right]}{\left[(r - r_g) \pm a\sqrt{r_g/2r}\right]}},$$

где $E_\pm$определяется формулой (5.32).

Эффект Мицкевича в кинеметрической по отнош ению к ко координатам (5.1) системе отсчета.

В этом случае также различны периоды обращения частиц, вращающихся по одинаковым круговым орбитам в противоположные стороны. Учитывая формулы (5.6) - (5.9), как в предыдущем случае, находим:

$$T_\pm = \frac{2\pi}{c} \frac{\sqrt{r^2 + a^2 - r_g r}}{\sqrt{(r_g/2)\left[r + (a^2/r^2)(r + r_g)\right]}} \left(r \pm a/\frac{\overline{r_g}}{2r}\right).$$

Таким образом, в кинеметрической системе отсчета частица, движущаяся в направлении вращения центрального источника, опять имеет больший период, т. е. отстает. Разность периодов

$$T_+ - T_- = 4\pi a \sqrt{r\left(r^2 + a^2 - r_g r\right)}/c\sqrt{r\left(r^2 + a^2\right) + r_g a^2}$$

в основном приближении, как и в хронометрической системе отсчета, не зависит ни от радиуса орбиты, ни от массы центрального источника, ни от гравитационной постоянной. Различия в эффектах дрейфа точки встречи частиц в рассматриваемых двух системах отсчета проявляются в более высоких порядках по r_g/r.

28.5.4 4. Schiff Effect

Рассмотрим эффект, предсказанный Шиффом [89]. Суть его состоит в том, что ось гироскопа, выведенного спутником на круговую орбиту вокруг вращающегося источника гравитационного поля (например, вокруг Земли), в системе отсчета спутника будет прецессировать с некоторой угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$, зависящей от радиуса R круговой орбиты гироскопа, его орбитальной скорости $\mathbf{v}$ и параметров центрального источника (массы M, угловой скорости вращения ω и момента инерции I). Заметим, что в теории гравитации Ньютона сферический гироскоп прецессировать не должен.

Угловую скорость прецессии оси гироскопа найдем, опираясь на уравнения Матиссона - Папапетру в монадном виде (3.61) (3.63) (с дополнительным условием Кориналдези) [67]. Более того, будем считать, что орбита движения центра спутника (представляющей точки) задана, так что используем лишь уравнение (3.63). Задачу будем решать в четыре этапа.

Проанализируем и решим уравнение Матиссона-Папапетру (3.63) в самом общем виде в системе отсчета, сопутствующей представляющей точке гироскопа. Заметим, что таких систем отсчета бесконечно много. Общим свойством этих систем является лишь то, что их конгруэнциям принадлежит мировая линия представляющей точки.

Выразим угловую скорость прецессии оси гироскопа в сопутствующей системе отсчета через параметры произвольной второй системы отсчета (угловую скорость вращения, ускорение и относительную скорость).

Конкретизируем вид сопутствующей гироскопу системы отсчета. Выберем жестко вращающуюся систему.

Конкретизируем вторую систему в используемой метрике Керра (выберем хронометрическую систему отсчета в координатах Бойера - Линдквиста). Тем самым угловая скорость прецессии оси гироскопа в сопутствующей жестко вращающейся

системе отсчета окажется выраженной через скорость этой системы относительно одной из наиболее употребительных систем отсчета в метрике Керра и параметры центрального источника.

В сопутствующей системе отсчета $v^\sigma = 0$, следовательно, уравнение Матиссона - Папапетру (3.63) существенно упрощается:

$$dS_0^{\mu v}/d\tau \equiv \partial_T S_0^{\mu v} = -S_0^{\lambda v}\begin{pmatrix} A^\mu_{\cdot\lambda} - D^\mu_0 \\ 0 \end{pmatrix} - S_0^{\mu\lambda}\begin{pmatrix} A^v_{\cdot\lambda} - D^v_\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Здесь индекс нуль снизу означает, что величины взяты в сопутствующей системе отсчета. Введем длину вектора кинетического момента (тензора спина) $\underset{0}{S} = \sqrt{h_0 h_0 h_{v\beta} S^{\mu v} S^{\alpha\beta}}$, так что

$$(1/2)(d/d\tau)S_0^2 = S_{\mu\nu}\partial_T S_0^{\mu\nu} - D_{\mu\alpha}S_{0\,\beta}^{\mu}S_0^{\alpha\beta} - D_{v\beta}S_0^v \cdot S_0^{\alpha\beta}$$

Умножая (5.36) внутренним образом на $S_{\mu v}$ и учитывая (5.37), получаем, что в сопутствующей системе отсчета длина тензора кинетического момента не меняется. Переходя к сопряженному вектору кинетического момента $\underset{0}{\overset{\mu}{\int}} = (1/2)e^{\mu\alpha\beta}S_{\alpha\beta}$, находим, что все изменение S_0^μ сводится к его прецессии с угловой скоростbЮ

$$\Omega_0^\mu = -(1/2)e_0^{\mu\alpha\beta}\underset{0}{A}_{\alpha\beta}$$

Следовательно, угловая скорость прецеессии оси гироскопа в сопутствующей системе отсчета равна по значению и противоположна по знаку угловой скорости вращния сопутствующей системы отсчета.

Соотношение между тензорами угловых скоростей вращения двух систем отсчета описывается формулой (3.126). Перейдем от тензора угловой скорости к сопряженному вектору $A^\mu = (1/2)e^{\mu\alpha\beta}A_{\alpha\beta}$. Умножая соотношение (3.126) на

$$-\left(\varepsilon^{\lambda\mu\alpha\beta/2}\sqrt{-g}\right)^{(2)}\tau_\lambda = -\left(\varepsilon^{\lambda\mu\alpha\beta/2}\sqrt{-g}\right)\begin{pmatrix}(1)\\ \tau_\lambda + v_\lambda\end{pmatrix}/\sqrt{1-v^2}$$

и учитывая (5.38), находим:

$$\begin{aligned}\Omega^\mu = \left(1/\gamma^2\right)\left[-A^\mu + \tau^\mu A^\lambda v_\lambda + (\tau^\mu/2)\, e^{\lambda\alpha\beta}v_\lambda v_{\alpha,\beta} - \right.\\ \left. -(1/2)e^{\mu\alpha\beta v_{\alpha,\beta}} - (1/2)e^{\mu\alpha\beta}v_\lambda\left(F_\beta - \partial_T v_\beta\right)\right],\end{aligned}$$

где $\gamma = \sqrt{1-v^2} = \sqrt{1 - h_{\mu\nu}v^\mu v^v}$. Еще раз подчеркнем, что в формуле (5.39) пока не конкретизированы ни метрика, ни две сопоставляемые системы отсчета.

Из сопутствующих систем отсчета для круговой орбиты выберем такую, которая в метрике Керра имеет компоненты скорости $\boldsymbol{v}^\mu = -h_3^\mu\omega_0$ относительно хронометрической системы отсчета, соответствующей координатам Бойера - Линдквиста. Здесь ω_0 - постоянная угловая скорость кругового орбитального движения спутника с гироскопом. Используя формулы для составляющих метрического тензора в метрике Керра (5.3), находим компоненты скорости

$$\left.\begin{aligned} &v^1 = v^2 = 0; \quad v^3 = \omega_0; \quad v^0 = -\omega_0 r_g r a \sin^2\theta/\left(\rho^2 - r_g r\right); \\ &v_1 = v_2 = 0; \quad v_3 = -\omega_0\rho^2\sin^2\theta\cdot\Delta/\left(\rho^2 - r_g r\right). \end{aligned}\right\}$$

Выбранную таким образом систему отсчета можно назвать жестко вращающейся, так как она удовлетворяет следующим условиям:

направления 3-мерных скоростей точек поперечного сечения параллельны в исходной системе отсчета. Это означает, что

$$\gamma^{\mu v}\widetilde{\nabla}_{\tilde{v}}\left(v_\lambda/v\right) = 0$$

где $\gamma^{\mu v} = h^{\mu\nu} - v^{\mu\nu v}v/v^2 \equiv h^{\mu\nu} - l^\mu l^\nu$ - метрический тензор 2-мерного поперечного сечения; $v^2 = h_{\mu v^\mu v^\mu;}; l^\mu = v^\mu/v;$

мгновенные угловые скорости всех точек поперечного сечения одинаковы, т. е. $\gamma^{\mu\nu}\widetilde{\nabla}\widetilde{v}v = -v\rho^{\mu}$, где $\rho^{\mu} = l^{\alpha}\widetilde{\nabla_{\alpha}}l^{\mu}$ – 3-вектор первой кривизны представляющей точки во второй системе отсчета (исходной).

Системы отсчета уже конкретизированы в предыдущем пункте. Остается только подставить компоненты A_{μ}, F_{μ}, скорости (5.40) и производные от них в формулу (5.39). С помощью формул (5.3) - (5.5) находим точное выражение для угловой скорости прецессии:

$$\Omega_0^1 = \frac{\Delta\cos\theta}{\gamma^2\rho^2}\left[\frac{r_g r a}{\rho^2\left(\rho^2 - r_g r\right)} - m_0\left(\frac{\rho^2}{\rho^2 - r_g r}\right)^{3/2}\times\right.$$
$$\left.\times\left(1 - \frac{5}{2}\frac{r_g r}{\rho^2} + \frac{3}{2}\frac{r_g r\Delta}{\rho^4} + \frac{3}{2}\frac{r_g^2 r^2}{\rho^4}\right)\right]$$
$$\Omega_0^2 = \frac{r\sin\theta}{\gamma^2\rho^2}\left\{\frac{a}{\rho^2 - r_g r} - \omega_0\left(\frac{\rho^2}{\rho^2 - r_g r}\right)^{3/2}\times\right.$$
$$\left.\times\left[1 - \frac{3}{2}\frac{r_g r\Delta}{\rho^4} - \frac{r_g}{4r\rho^2}\left(r^2 + r_g r - 3a^2\right)\right]\right\}$$
$$\Omega^3 = 0.$$
$$0$$

Разложим эти компоненты в ряд, ограничиваясь членами порядка $a/r, r_g/r$ и $r_g a/\omega_0 r^3$. Введя момент инерции I и угловую скорость собственного вращения ω центрального тела согласно равенству $Ma = I\omega$, получим наблюдаемые значения угловой скорости прецессии гироскопа:

$$\left.\begin{array}{l}\Omega(1) \approx \left(\cos\theta/\gamma^2\right)\left(-\omega_0 + 2k\omega I/c^2 r^3\right)\\ \Omega(2) \approx \frac{\sin\theta}{\gamma^2}\left(\omega_0 - \frac{3}{2}\frac{kM}{c^2 r}\omega_0 + \frac{k\omega I}{c^2 r^3}\right).\end{array}\right\}$$

Эта формула хорошо согласуется с приближенной формулой, полученной Шиффом [89]:

$$\Omega \approx \frac{3}{2}\frac{kM}{c^2 r^3}[\mathbf{rv}] + \frac{1}{2c^2}[\mathbf{av}] + \frac{kI}{c^2 r^3}\left(\frac{3r(\omega r)}{r^2} - \boldsymbol{\omega}\right),$$

где $\mathbf{a}$ - внешнее негравитационное ускорение.

Последний член в (5.44) соответствует последним членам в (5.43). Вклад этого слагаемого обычно называют прецессией Лензе - Тирринга или прецессией Щиффа. Он обусловлен угловой скоростью вращения A^{μ} хронометрической системы отсчета, соответствующей системе координат Бойера - Линдквиста.

Первый член в (5.44) соответствует второму члену в выражении для $\Omega(2)$ [см. (5.43)]. Это слагаемое обычно называют геодезической прецессией или прецессией де Ситтера. Оно определяется распределением скоростей сопутствующей системы отсчета относительно второй и ускорением последней [четвертый и пятый члены справа в формуле (5.39)].

Второй член в (5.44), описывающий прецессию Томаса, возникает при несвободном движении гироскопа уже в СТО.

Основное различие формул (5.43) и (5.44) состоит в наличии первых слагаемых (нулевого порядка) справа в (5.43). Эти слагаемые соответствуют кажущейся прецессии, обусловленной поворотом корпуса спутника при орбитальном движении, и возникают вследствие нашего выбора сопутствующей системы отсчета.

Другое различие состоит в множителе $1/\gamma^2 = 1/\left(1 - v^2\right)$, возни- кающем из-за того, что у Шиффа дифференцирование производилось по координатному времени x^0, а не по локальному времени неподвижной (второй) системы отсчета.

Наконец, запишем выражение для угла прецессии оси гироскопа $\Delta\alpha$ за один оборот при его движении в экваторнальной плоскости:

$$\Delta\alpha = \frac{1}{c}\int_0^{\Omega d\tau} \approx 2\pi - \frac{2\pi kM}{c^2 r} + \frac{2\pi kI}{c^2 r^3}\frac{\omega}{\omega_0}$$

где $\Omega = \sqrt{\Omega_0 \Omega_0^{\mu}}$.

Из этой формулы очевиден смысл членов нулевого порядка в (5.43).

28.5.5 5. Small Oscillations of Test Bodies on Circular Orbits in Kerr Metric

Эффект, основанный на разности частот малых колебаний пробных тел в двух взаимно перпендикулярных направлениях на экваториальной круговой орбите (эффект Широкова), в метрике Керра подсчитывается совершенно аналогично случаю метрики Шварцшильда (см. 4.5). Основное различие состоит в появлении двух возможностей: а) вращение по круговой орбите происходит в направлении вращения источника и б) вращение в противоположном направлении. Опять будем различать эти возможности соответственно знаками плюс и минус. Опуская все промежуточные выкладки, приведем результат во вращающейся по круговой орбите системе отсчета [Rodichev S. V. Abstracts of Contributed Papers for the Discussion Groups. Proc. Intern. Conf. on General Relativity and Gravitation. Jena, Univ., 1980, p. 365]:

$$\omega_{1\pm} = \pm c\Omega\,(1 + 3r_g/4r_0 \mp 3a\Omega)$$

частота колебаний в направлении, перпендикулярном плоскости орбиты, где $\Omega = \sqrt{r_g/2r_0^3}$;

$$\omega_{2\pm} = \pm c\Omega\,(1 - 3r_g/4r_0 \pm 3a\Omega)$$

частота колебаний в плоскости орбиты;

$$\Delta T_{\pm} = (2\pi/c\Omega)\,(3r_g/2r_0 \mp 6a\Omega)$$

разность периодов. Очевидно, при $a = 0$ эти формулы совпадают соответственно с (4.62), (4.65) и (4.67).

Рассмотрим эффект крутильных колебаний маятника относительно платформы, вращающейся по «круговой» неэкваториальной орбите вокруг источника метрики Керра (Лензе - Тирринга) [Карпов О. Б., Родичев С. В. - Известия вузов. Сер. физ., 1982, № 1, с. 47]. Этот эффект обязан появлению в снстеме отсчета платформы периодических сил инерции, действующих на концы маятника. Уравнение траектории (геодезической) центра масс платформы, вращающейся по орбите радиуса $r_0 = \text{const}$ и составляющей угол θ_0 с направлением момента источника, приближенно находится решением уравнений геодезической (или уравнений Гамильтона Якоби, как в [9, с. 417]):

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = \arcsin\left(\operatorname{ctg}\theta/\operatorname{ctg}\theta_0\right) + 2a\Omega^2 x^0 \\ \cos\theta = \cos\theta_0 \cos\omega x^0 \end{array}\right\}$$

где $\omega = \pm\Omega\,(1 \mp 3a\Omega\sin\theta_0)$. Эти формулы описывают круговую орбиту, прецессирующую с угловой скоростью $2a\Omega^2 c$. Здесь мы пренебрегли членами, пропорциональными $a\Omega r_g/r_0$, и членами более высокого порядка.

Для перехода в систему отсчета вращающейся платформы произведем последовательно три преобразования координат, а именно:

а) переход к «следящей» за прецессией Лензе-Тирринга системе координат:

$$x'^0 = x^0; \quad r' = r; \quad \theta' = \theta; \quad \varphi' = \varphi - 2x^0 a\Omega^2;$$

б) поворот системы координат на угол $\pi/2 - \theta_0$:

$$\left.\begin{array}{l} x''^0 = x'^0; \quad r'' = r'; \\ \theta'' = \arccos\left(\cos\theta'\sin\theta_0 - \sin\theta'\sin\varphi'\cos\theta_0\right); \\ \varphi'' = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\varphi'\sin\theta_0 + \operatorname{ctg}\theta'\cos\theta_0/\cos\varphi'\right) \end{array}\right\}$$

(в этой системе координат платформа движется по экваториальной окружности с угловой скоростью $d\varphi''/dx^0 = \omega$);

в) переход к вращающейся системе координат с угловой скоростью ω:

$$x''' = x''^0; \quad r''' = r''; \quad \theta''' = \theta''; \quad \varphi''' = \varphi'' - \omega x''^0.$$

В дальнейшем штрихи писать не будем.

Система отсчета вращающейся платформы является хронометрической по отношению к полученной таким образом системе координат. Вычислив монадные физико-геометрические тензоры, подставим их в уравнения (3.21) с вкладом негравитационных сил справа. С помощью этих уравнений рассмотрим крутильные колебания маятника, представляющего собой невесомый стержень с расположенными на концах одинаковыми массами. Представляет интерес поведение маятника при двух ориентациях, когда возникают его вынужденные колебания, причем будем полагать, что его отклонения от положения равновесия малы.

Пусть в положении равновесия маятник ориентирован вдоль радиуса и пусть его ось закреплена так, что он имеет возможность отклоняться только в плоскости, перпендикулярной плоскости движения платформы (колебания по углу θ). Пренебрегая в соответствующем уравнении мировой линии членами второго по- рядка малости, имеем для угла отклонения от положения равновесия:

$$d^2\xi/d\tau^2 + 2\lambda d\xi/d\tau + \left(K + \tilde{\omega^2}\right)\xi = \pm 12c^2 a\Omega^3 \cos\theta_0 \sin\tilde{\omega}\tau$$

где

$$\tilde{\omega} = \omega x^0/\tau = \pm\Omega\left(1 + 3r_g/4r_0 \mp 3a\Omega\sin\theta_0\right)$$

угловая скорость вращения платформы в собственной системе отсчета платформы, совпадающая при $\theta_0 = \pi/2$ с (5.46); K и λ соответственно коэффициенты упругости и трения.

Пусть маятник ориентирован в перпендикулярном плоскости вращения платформы направлении и имеет возможность отклоняться только в радиальном направлении. Тогда для угла отклонения имеем уравнение

$$d^2\zeta/d\tau^2 + 2\lambda d\zeta/d\tau + \left[K - 3c^2\Omega\left(1 + r_g/r_0 \mp 2a\Omega\sin\theta_0\right)\right]\zeta = \\ = \pm 6c^2 a\Omega^3 \cos\theta_0 \sin\tilde{\omega}\tau$$

В иных ортогональных указанным ориентациях маятника вынужденные колебания отсутствуют. По-видимому, описанные общерелятивистские эффекты можно обнаружить современной экспериментальной аппаратурой.

28.5.6 6. Axially Symmetric Particle-like Solutions of Einstein–Maxwell Equations of Type D

Для полноты картины в этой главе следует упомянуть о более общих, нежели метрика Керра, аксиально-симметричных стационарных решениях типа D' по Петрову. Оказывается, наиболее общее «частицеподобное» (создаваемое частицей-центром) решение уравнений Эйнштейна-Максвелла (с космологическим членом) типа D содержит семь произвольных параметров [90]: $m; n, a, b,\ q, g, \Lambda$. Эти параметры обычно интерпретируют следующим образом: m - масса; n - параметр НУТ (Ньюмена, Унти, Тамбурино) (мнимая масса?); a - параметр, характеризующий вращение; b - ускорение; q - электрический заряд. источника; g - магнитный заряд; Λ - космологическая постоянная. Часто говорят о зависимости метрик от четырех величин: $m + \mathrm{i}n, a + \mathrm{i}b, q + \mathrm{i}g, \Lambda$. К данному множеству метрик относятся решение Шварцшильда, метрики, рассмотрениые' в §4.7, и др. (см. в [91]).

Выпишем несколько более общих решений.

Обобщением метрики Керра на случай электрически заряженного источника является метрика Керра-Ньюмена [92], зависящая от трех констант

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g r - e_g^2}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right) dx_0^2 - \frac{r^2 + a^2\cos^2\theta}{r^2 + a^2 - r_g r + e_g^2} dr^2 - \left(r^2 + a^2\cos^2\theta\right) d\theta^2 - \\ - \left(r^2 + a^2 + \frac{\left(r_g r - e_g^2\right) a^2 \sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right) \sin^2\theta d\varphi 2 + \frac{2\left(r_g r - e_g^2\right) a \sin^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta} dx_0 d\varphi$$

где $r_g = 2km/c^2; e_g = \sqrt{k}q/c^2$.

При обобщении метрики Шварцшильда на случай $n \neq 0$ получается решение НУТ [93]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g r + 2n^2}{r^2 + n^2}\right)\left(dx_0 + 4n\sin^2\frac{\theta}{2} d\varphi\right)^2 - \\ - \frac{dr^2}{1 - \left(r_g r + 2n^2\right)/\left(r^2 + n^2\right)} - \left(r^2 + n^2\right)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right).$$

Обобщением решения НУТ, зависящим от пяти констант, является метрика [94] (записана не в координатах Бойера-Линдквиста):

$$ds^2 = \Phi(r)\left(dx_0 + 4n\sin^2\frac{\theta}{2} d\varphi\right)^2 - \frac{dr^2}{\Phi(r)} - \left(r^2 + n^2\right)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

где $\Phi(r) = 1 - \frac{r_g r + 2n^2 + (8/3)\Lambda n^4}{r^2 + n^2} + \frac{q^2 + g^2}{r^2 + n^2} + \frac{\Lambda}{3}\left(r^2 + 5n^2\right)$.

4 Выпишем в координатах Бойера-Линдквиста метрику, которая так же обобщает решение НУТ, как метрика Керра обобщает метрику Шварцшильда:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g r + 2n^2 - 2an\cos\theta}{r^2 + n^2 - 2an\cos\theta + a^2\cos^2\theta}\right) dx_0^2 - \\ - \frac{r^2 + a^2\cos^2\theta + n^2 - 2an\cos\theta}{r^2 + a^2 - r_g r - n^2} dr^2 - \\ - \frac{\sin^2\theta\left(r^2 + a^2 + n^2\right)^2 - \left(r^2 + a^2 - r_g r - n^2\right)\left(a\sin^2\theta + 2n\cos\theta\right)^2}{r^2 + a^2\cos^2\theta + n^2 - 2an\cos\theta} d\varphi^2 + \\ + \frac{2\left\{2a\sin^2\theta\left(r_g r/2 + n^2\right) - 2n\left(r^2 + a^2 - r_g r - n^2\right)\cos\theta\right]}{r^2 + a^2\cos^2\theta + n^2 - 2an\cos\theta} dx_0 d\varphi - \\ - \left[r^2 + (n - a\cos\theta)^2\right] d\theta^2.$$

28.6 Spatial Sections and Time in Cosmological Models

28.6.1 1. Homogeneous Isotropic Cosmological Models. Problem Statement

ОТО в принципе позволяет ставить и решать задачу описания всего физического мира - Вселенной как целого. При решении этой задачи, конечно, допускается экстраполяция наших представлений о природе пространства и времени далеко за пределы изученной области Вселенной. Однако изучение подобных задач необходимо, поскольку только это позволит ответить на вопрос, в какой степени такая экстраполяция правомерна, когда и каким образом следует изменить наши представления о природе мироздания.

Основу современной космологии составляют однородные изотропные космологические модели Фридмана [14, с. 320]. Сформулируем математически используемые предположения и общие свойства этих моделей. Допустим, что материю Вселенной можно представить в виде сплошной среды наподобие пыли, когда в качестве отдельных пылинок рассматриваются галактики или даже скопления галактик. Кроме

того, положим, что можно пренебречь рядом индивидуальных (пикулярных) движений пылинок и выбрать сопутствующщю материи систему отсчета, т. е. такую, в которой приборы системы отсчета в целом можно считать движущимися одинаково с материальной средой (пылинками). В этом случае движение среды описывается характеристиками 3-мерных пространственных сечений сопутствующей системы отсчета. Допустим также, что сопутствующая система отсчета нормальная (среда не вращается), т. е. $A_{\mu\nu} = 0$. Тогда пространственно-временное многообразие допускает глобальное расщепление на совокупность пространственных сечений и время.

Условие изотропности пространственных сечений уже обсуждалось при выводе метрики Шварцшильда (см. 4.1). Оно означает наличие трех пространственно-подобных векторов Киллинга, соответствующих симметрии пространственных сечений относительно поворотов вокруг избранной точки. При этом можно выбрать такую хронометрическую (кинеметрическую) систему координат, что см. (4.6)]

$$ds^2 = \tau_{.0}^{2\cdot} dx_0^2 - \left[h_{11}\left(x^0, x^1\right) dx_1^2 + b^2\left(x^0, x^1\right)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

Условие однородности означает существование еще трех линейно-независимых векторов Киллинга, соответствующих симметрии пространственных сечений относительно сдвигов из одной точки в любую другую. Таким образом, все точки каждого пространственного сечения сопутствующей системы отсчета равноправны, т. е. метрику можно записать в виде (6.1) с центром в любой точке.

Из уравнений Киллинга (4.4), используя линейную независимость трех векторов Киллинга $\xi_{(s)}^i$, находим, что $F_i \equiv \tau_0 \tau_{,i}^0 = 0$, т. е. система отсчета синхронная. Следовательно, τ_0 зависит лишь от координаты x^0. Из проекций уравнений Киллинга (4.2) следует, что в однородных пространственных сечениях компоненты 3-мерного метрического тензора одинаково зависят от x^0, т. е. $h_{ik} = a\left(x^0\right) b_{ik}\left(x^s\right)$. Преобразованиями координат $x'^0 = x'^0\left(x^0\right); x'^1 = x'^1\left(x^1\right)$, не меняющими в использованной калибровке систему отсчета, метрику (6.1) можно привести к виду

$$ds^2 = a^2\left(x^0\right)\left\{dx_0^2 - \left[dx_1^2 + b^2\left(x^1\right)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]\right\}$$

т. е. компоненты составляющих метрического тензора:

$$\left.\begin{array}{l} \tau_0 = 1/\tau^0 = a\left(x^0\right); \quad h_{11} = 1/h^{11} = a^2\left(x^0\right); \\ h_{22} = 1/h^{22} = a^2\left(x^0\right) b^2\left(x^1\right); \quad h_{33} = 1/h^{33} = \\ = a^2\left(x^0\right) b^2\left(x^1\right) \sin^2\theta \end{array}\right\}$$

Отсюда следует, что компоненты тензора скоростей деформаций: представляются следующим образом:

$$D_{ik} = (1/2)\tau^0 h_{ik,0} = \left(\dot{a}/a^2\right) h_{ik}; \quad D = -D_{ik}h^{ik} = -3\dot{a}/a^2$$

где $\dot{a} = da/dx^0$

Возьмем уравнения Эйнштейна в виде

$$R_{\mu v} = \varkappa\left[T_{\mu v} - (1/2) g_{\mu v} T\right] - \Lambda g_{\mu v}$$

где в общем случае

$$T_{\mu v} = \left(p + \rho c^2\right) u_\mu u_v - p g_{\mu v}$$

p - давление среды; ρ - плотность материи в сопутствующей системе отсчета. Поскольку мы уже выбрали сопутствующую систему отсчета, $u^i = \tau^i = 0$ (материя неподвижна, «вморожена»в. пространство). Используя (6.3), получаем необходимые проекции. тензора энергии-импульса материи:

$$\left.\begin{array}{l} T_{\mu\nu}\tau^\mu\tau^v = \rho c^2; \quad T_{\mu\nu} h_i^\mu h_k^v = p h_{ik} \\ T = T_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \rho c^2 - 3p; \quad T_{ik} + (1/2) h_{ik} T = (1/2)\left(\rho c^2 - p\right) h_{ik}; \\ \tau^\mu\tau^v\left[T_{\mu\nu} - (1/2) g_{\mu v} T\right] = (1/2)\left(\rho c^2 + 3p\right) \end{array}\right\}$$

Чтобы записать уравнения Эйнштейна в монадном виде, вы-числим производные от тензора скоростей деформаций:

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{\nabla}_k D_{il} = (\dot{a}/a^2)\,\tilde{\nabla}_k h_{il} = 0; \quad \nabla_k D = 0 \\ \partial_T D_{tk} = (\ddot{a}/a^3)\,h_{ik}; \quad \partial_T D = -\,(3/a^4)\,(\ddot{a}a - 2\dot{a}^2)\end{array}\right\}$$

Используя формулы (6.4), (6.6), (6.7), находим уравнения Эйнштейна (проекции, образованные посредством $\tau^\mu\tau^v$ и $h_i^\mu h_k^v$ соответственно) в виде

$$-\left(3/a^4\right)\left(\ddot{a}a - \dot{a}^2\right) = (x/2)\left(\rho c^2 + 3p\right) - \Lambda$$
$$\left(1/a^4\right)\left(\ddot{a}a + \dot{a}^2\right)h_{ik} + {}^3R_{ik} = (x/2)\left(\rho c^2 - p\right)h_{ik} + \Lambda h_{ik}.$$

Остальные проекции уравнений Эйнштейна тождественно равны нулю.

Из уравнений (6.9) следует важное свойство однородных изотропных космологических моделей: тензор Риччи ${}^3R_{ik}$3-мерных: пространственных сечений сопутствующей системы отсчета пропорционален метрическому тензору h_{ik} ∋ тих сечений.

28.6.2 2. Spatial Sections of Constant Positive, Negative and Zero Curvature

Прежде чем решать уравнения Эйнштейна (6.8), (6.9), проанализируем однородные изотропные пространственные сечения, опираясь на их установленное свойство

$${}^3R_{ik} = Bh_{ik}$$

где $B\,(x^0)$ - функция, не зависящая от пространственных координат. Учитывая, что в пространствах трех измерений тензор Римана - Кристоффеля выражается через тензор Риччи и скалярную кривизну

$${}^3R^i_{.jkl} = h_l^{i\,3}R_{jk} - h_k^{i\,3}R_{jl} + h_{jk}{}^3R^i_l - h_{jl}{}^3R^i_k - \\ -\,(1/2)\left(h^i_l h_{jk} - h^i_k h_{jl}\right){}^3R,$$

находим, что все компоненты тензора Римана-Кристоффеля алгебраически определяются функцией $B\,(x^0)$ и компонентами метрического тензора h_{ik}:

$$\left.\begin{array}{l}{}^3R^i_{.jkl} = (1/2)B\,(h^i_l h_{jh} - h^i_k h_{jl})\,; \\ {}^3R_{ik} = Bh_{ik}; \quad {}^3R = -3B.\end{array}\right\}$$

В зависимости от знака B будем различать пространственные сечения (пространства) трех типов:

а) постоянной (в смысле пространственных координат) положительной кривизны, если $B > 0$;

б) постоянной (в том же смысле) отрицательной кривизны, если $B < 0$;

в) нулевой кривизны, если $B = 0$.

Очевидно, что пространства разных типов могут различаться лишь видом функции $b\,(x^1)$ в сферически-симметричной метрике [согласно (6.2)]

$$dl^2 = a^2\left[dx_1^2 - b^2\left(x^1\right)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right].$$

Выясним, каковы эти функции. Учтем, что отличны от нуля только следующие компоненты коэффициентов связности:

$$\left.\begin{array}{l}L^2_{12} = L^3_{13} = b'/b; \quad L^3_{23} = \operatorname{ctg}\theta; \quad L^1_{22} = -bb'; \\ L^1_{33} = -bb'\sin^2\theta; \quad L^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta,\end{array}\right\}$$

где штрих означает дифференцирование по x^1. Подставляя (6.14) в (6.10), получаем:

$$\left.\begin{array}{l}-(2/b)b'' = Ba^2 \\ 1 - b'^2 - bb'' = a^2b^2B\end{array}\right\}$$

откуда следует уравнение для $b\,(x^1)$:

$$b''b - b'^2 + 1 = 0.$$

Возможны решения этого уравнения трех видов:

$$\left.\begin{array}{l} b_1 = (1/C_1)\sin(C_1x^1 + C_2); \\ b_2 = (1/C_1)\,\mathrm{sh}\,(C_1x^1 + C_2); \quad b_3 = \pm x^1 + C_2, \end{array}\right\}$$

где C_1, C_2 - постоянные интегрирования. С помощью, например, первого уравнения из (6.15) находим, что первое решение соответствует пространствам положительной кривизны:

$$B = 2/a^2 > 0 \leftrightarrow b_1 = (1/C_1)\sin\left(C_1x^1 + C_2\right);$$

второе решение соответствует пространствам отрицательной кривизны

$$B = -\left(2/a^2\right) < 0 \leftrightarrow b_2 = 1/C_1\,\mathrm{sh}\left(C_1x^1 + C_2\right);$$

третье решение - пространствам нулевой кривизны:

$$B = 0 \leftrightarrow b_3 = \pm x^1 + C_2.$$

Исследуем геометрические свойства этих пространств.

a. Пространств в постоянной положительной. крив ви 3 н ы описываются метрикой

$$dl^2 = a^2\left[dx_1^2 + \sin^2 x_1\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right],$$

где без ущерба общности принято $C_1 = 1, C_2 = 0$. Параметр $x^{1\cdot}$ может изменяться в пределах $0 \leqslant x^1 \leqslant \pi$.

Длина окружности и площадь сферы с центром в начале координат, характеризуемые параметрами x^1 и $\theta = \pi/2$, соответственноравны $l = 2\pi a\sin x^1, S = 4\pi a^2\sin x^1$. При увеличении x^1 они сначала' растут, достигают максимальных значений ($l_{\text{макс}} = 2\pi a, S_{\text{макс}} = 4\pi a^2$), затем уменьшаются до нуля. Радиус $r\,(x^1)$ окружности или сферы, соответствующий параметру x^1, равен ax^1. Его максимальное значение $r_{\text{макс}} = \pi a$. Отношение длины окружности к радиусу $l/r = 2\pi\sin x^1/x^1 < 2\pi$.

Таким образом, в данном случае мы имеем дело с геометрией на 3-мерной сфере с радиусом a в 4-мерном евклидовом пространстве. Объем всего 3-мерного пространства конечен:

$$V = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} a^3\sin^2 x^1\sin\theta dx^1 d\theta d\varphi = 2\pi^2 a^3.$$

По этой причине такие пространства обычно называют замкнутыми или конечными *.

b. Пространства постоянной отрицательной к р и в и з н ы описываются метрикой

$$dl^2 = a^2\left[dx_1^2 + \mathrm{sh}^2 x_1\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right],$$

где опять принято $C_1 = 1, C_2 = 0$. Параметр x^1 теперь может изменяться в пределах $0 \leqslant x_1 < \infty$.

Длина окружности и площадь сферы с центром в начале координат и с параметрами $x^1, \theta = \pi/2$ равны: $l = 2\pi a\ \mathrm{sh}\ x^1, \quad S =$

Геометрию таких замкнутых пространств развил Риман. Она явилась вторым (после геометрии Лобачевского) примером неевклидовых геометрий. Геометрию 3-мерных пространств постоянной положительной кривизны часто. называют римановой геометрией (в узком смысле). Возможность описания реального пространства такой сферической римановой геометрией подробно обсуждал лиффорд [14, с. 38], а затем Мах [14, с. 73] задолго до создания ОТО. $= 4\pi a^2\,\mathrm{sh}^2 x^1$. При увеличении x^1 они изменяются от нуля до бесконечности. По-прежнему $r = ax^1$ и может иметь сколь угодно большое значение; $l/r = 2\pi\ \mathrm{sh}\ x^1/x^1 > 2\pi$. Объем пространства бесконечен. По этой причине пространства постоянной отрицательной:кривизны называют открытыми. Они описываются геометрией.Лобачевского *, которую можно рассматривать как геометрию

на гиперболоиде в 4-мерном евклидовом пространстве, отчего ее часто называют гиперболической.

в. Прост р ан с т в а нулево й к кии и з ны описываются метрикой

$$dl^2 = a^2\left[dx_1^2 + x_1^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

'Т. е. являются плоскими или евклидовыми пространствами с хорошо известными свойствами. Напомним, что в евклидовом пространстве $l/r = 2\pi$.

28.6.3 3. Homogeneous Isotropic Models of the Universe

Вернемся к 4-мерному пространству-времени, описываемому уравнениями (6.8), (6.9), где космологическая постоянная Λ моЖет быть положительной, отрицательной и нулевой. Кроме того, возможны пространственные сечения трех типов. Итого, мы имеем девять возможных вариантов моделей однородной изотропной Вселенной. Сюда следует добавить различные виды уравнений состояния материи (соотношений между p и ρ). Рассмотрим подробнее несколько из этих вариантов:

а. З а крыт а я мод ел в р и д м ан а [14, с. 320] соответ«ствует условиям $B = 2/a^2 > 0; \Lambda = 0; p = 0$. В этом случае уравнения (6.8), (6.9) принимают вид:

$$-\left(3/a^4\right)\left(\ddot{a}a - \dot{a}^2\right) = x\rho c^2/2$$
$$\left(1/a^4\right)\left(\ddot{a}a + \dot{a}^2\right) + 2/a^2 = x\rho c^2/2.$$

Вычитая одно уравнение из другого, находим:

$$2\ddot{a}a - \dot{a}^2 + a^2 = 0$$

Произведя замену $\dot{a}^2 = z(a)$, получаем решение

$$z(a) = (C_1 - a)\,a; \quad a = (C_1/2)\left[1 - \sin\left(C_2 + x^0\right)\right]$$

гге C_1 и C_2 - постоянные интегрирования. Выбирая C_2 так, чтобы при $x^0 = 0$ было $a = 0$, т. е. $C_2 = \pi/2$, и обозначая $C_1/2 = a_0$, имеем:

Геометрия 3-мерных пространств постоянной отрицательной кривизны была развита Н. М. Лобачевским (и независимо чуть позже Я. Бойаи и Гауссом):и явилась первым примером неевклидовых геометрий. Она возникла в результате отказа от пятого постулата Евклида.

$$a = a_0\left(1 - \cos x^0\right).$$

Интервал времени $d\tau$ определяется параметром x^0 : $d\tau = adx^0$. Отсюда находим изменение времени через параметр x^0:

$$\tau = a_0\left(x^0 - \sin x^0\right)$$

Уравнения (6.22а) и (6.23а) определяют в плоскости (a, τ) циклоиду в параметрическом виде. Таким образом, полученное решение описывает модель с закрытыми пространственными сечениями, радиус кривизны которых «пульсирует» во времени.

Плотность материи получаем, например, из (6.19а):

$$\rho = 6/xa_0^2c^2\left(1 - \cos x^0\right)^3$$

При $x^0 = 0, 2\pi...$ (моменты времени $\tau = 0, 2\pi a_0...$) плотность материи становится бесконечной, т. е. имеют место особенности. Это говорит о том, что правомерно рассматривать только один цикл циклоиды. Около особых точек, по-видимому, выводы ОТО теряют силу. Следует ожидать, что вблизи них при сверхплотных состояниях материи доминируют закономерности квантовой теории и физики элементарных частиц.

б Открытая модель Фридмана [14, с. 330] соответствует условиям $B = -2/a^2 < 0; \Lambda = 0; p = 0$. Учитывая их, уравнения (6.8), (6.9) можно записать в виде

$$-\left(3/a^4\right)\left(\ddot{a}a-\dot{a}^2\right)=x\rho c^2/2;$$
$$\left(1/a^4\right)\left(\ddot{a}a+\dot{a}^2\right)-2/a^2=x\rho c^2/2.$$

Из них получаем уравнение для $a\left(x^0\right)$

$$2\ddot{a}a-\dot{a}^2-a^2=0$$

Решение имеет вид:

$$a=(C_1/2)\left\{(1/2)\left[C_2\exp x_0+(1/C_2)\exp\left(-x_0\right)\right]-1\right\}$$

где C_1 и C_2 - постоянные интегрирования. Выбирая $C_2=1$ и обозначая $C_1/2=a_0$, находим зависимость $a(\tau)$ в параметрическом виде

$$a=a_0\left(\operatorname{ch}x^0-1\right)$$
$$\tau=a_0\left(\operatorname{sh}x^0-x^0\right)$$

Выбирая область изменения $x^0:-\infty<x^0\leqslant 0$, приходим к сжимающейся открытой модели Фридмана. При $0\leqslant x^0<\infty$ получаем расширяющуюся открытую модель Фридмана. Из уравнения (6.19б) находим закон изменения плотности материи:

$$\rho=6/xa_0^2c^2\left(\operatorname{ch}x^0-1\right)^3$$

При $\tau\to 0\left(x^0\to 0\right)$ плотность материи, как и в закрытой модели, стремится к бесконечности. По-видимому, опять в рамках клас- сингулярности.

В. С т а ти ч е с ки й ци линд ри ч е ский ми р Э йнштейн а [14, с. 287] явился первой космологической моделью Вселенной, построенной на основе ОТО. Этой модели соответствуют условия $\dot{a}=0$ (статичность) ; $\Lambda\neq 0; p=0$. Подставляя эти условия в (6.8) и (6.9), находим:

$$0=x\rho c^2/2-\Lambda$$
$$B=x\rho c^2/2+\Lambda$$

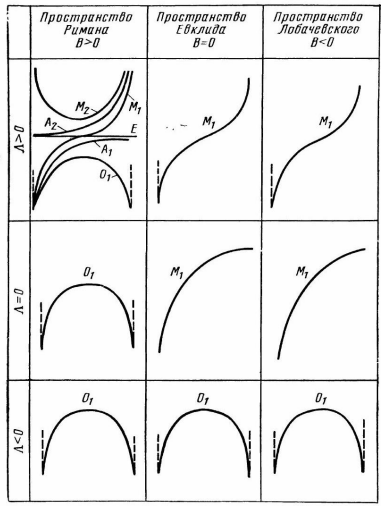


Рис. 13. Однородные изотропные космологические решения

Из (6.19 в), (6.20 в) получаем, что пространственное сечение в этой модели имеет положительную постоянную кривизну (закрытая модель):

$$B=2/a^2=\varkappa\rho c^2>0;\quad \Lambda>0;\quad a=\text{ const};$$

кроме того,

$$\rho=2/xc^2a^2=2\Lambda/xc^2;\quad \Lambda=1/a^2$$

Учитывая, что объем мира конечен, легко подсчитать массу всей материи в модели мира Эйнштейна:

$$M = \rho V = 4\pi^2 a/xc^2$$

г. М е т рик а де Сит т е р а [14, с. 299]

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dx_0^2 - \frac{dr^2}{1 + \Lambda r^2/3} - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

описывает пустой мир (без материи). Эту метрику можно рассматривать как частный случай решения Коттлера (4.87).

д. Прочи е однородны е изотропны е модели Вселенной. Не приводя подробных выкладок, изобразим (рис. 13) эволюцию во времени всех девяти возможных вариантов однородных изотропных моделей, причем с учетом обсуждаемых далее данных наблюдений укажем лишь те модели, которые хотя бы на отдельных этапах описывают расширение Вселенной. На всех графиках по оси ординат отложены значения a, а по оси абсцисс значения τ.

Сделаем несколько замечаний.

Статическое состояние однородной изотропной Вселенной невозможно (при $\Lambda \leqslant 0$) или оказывается неустойчивым (при $\Lambda > 0$ - в модели Эйнштейна).

Отрицательная космологическая постоянная соответствует, если можно так выразиться, усилению космического притяжения, «то приводит к неизбежности замены расширения сжатием.

Положительная космологическая постоянная соответствует некоему космическому отталкиванию.

При $\Lambda > 0, B > 0$, как видно из рис. 13, имеется несколько возможностей: неустойчивое статическое состояние, описываемое моделью Эйнштейна; ускоренное расширение от неустойчивого статического состояния; замена сжатия расширением; замедленное расширение; замена расширения сжатием (аналог закрытой модели Фридмана); извечное расширение от сингулярного состояния сначала с замедлением, а затем с ускорением.

28.6.4 4. Dependence of the Character of Spatial Sections in Cosmological Models on the Choice of Reference Frame

В ОТО характер пространственных сечений в космологических моделях - их конечность или бесконечность - существенно зависит от используемой системы отсчета. В предыдущих параграфах этой главы речь шла о характере пространственных сечений в сопутствуюних системах отсчета. Оказывается, переход к иным системам отсчета в рамках одной космологической модели может означать переход от конечных пространственных сечений к бесконечным и наоборот, т. е. свойство конечности или бесконечности 3-мерного пространства в ОТО не является инвариантным понятием, а всегда должно рассматриваться в связи с используемой системой отсчета [95-97].

На первый взгляд это может показаться парадоксальным, особенно если иметь в виду привычное нам бесконечное плоское пространство Галилея - Ньютона или пространство СТО. Однако в этих теориях пространственно-временное многообразие достаточно простое и, кроме того, в них использовался класс равноправных во всех отношениях инерциальных систем отсчета. В ОТО ситуация значительно сложнее из-за возможности существования множества пространственно-временных многообразий и широкого класса возможных систем отсчета. Уже сравнительно узкое множество однородных изотропных космологических моделей вполне позволяет убедиться в зависимости характера пространственных сечений от используемых систем отсчета.

Под объемом пространства следует понимать сумму объемов локальных пространственных сечений, ортогональных конгруэнции мировых линий системы отсчета. Определение объема особенно просто в случае нормальных конгруэнций. Очевидно, что при переходе к иным конгруэнциям вследствие отличных от нуля относительных скоростей систем отсчета происходит лоренцово сокращение длин, а это приводит, вообще говоря, к изменению объема пространственного сечения. Оказывается,

изменение может быть настолько существенным, что изменится сам характер конечности или бесконечности исходного пространственного сечения.

Рассмотрим кратко, какие возможности изменения характера пространственных сечений предоставляет нам множество однородных изотропных космологических моделей. Прежде всего, следует различать два класса моделей.

I. 4 - Мерный объ ем модели к коне чен. К этому классу относятся модели с пространствами положительной кривизны (конечные) в сопутствующей системе отсчета и имеющие конечное время эволюции - модели типа O_1 на рис. 13 при любых значениях космологической постоянной. Можно показать [95, 97], что в любой системе отсчета пространственные сечения таких моделей имеют конечные объемы, т. е. являются абсолютно' замкнутbми.

II. 4 - Ме рный объ ем модели б ескон ечен. К этому классу относятся все остальные модели, изображенные на рис. 13. В сопутствующих системах отсчета в них бесконечны либо время эволюции, либо объем пространственного сечения, либо и то и другое. Здесь следует различать четыре частных случая.

В сопутствующих системах отсчета пространственные сечения конечны, время существования моделей бесконечно и в процессе эволюции их пространственные объемы не могут стать как угодно большими. К этому случаю относятся модели A_1 и E (эйнштейновский статический мир) при $B > 0$ и $\Lambda > 0$. Показано [97], что в этих моделях пространственные сечения также абсоЛютно замкнутb. В остальных трех случаях характер пространственных сечений зависит от выбора системы отсчета.

В сопутствующих системах отсчета пространственные сечения конечны, время существования моделей бесконечно и в процессе эволюции их пространственные объемы становятся как угсдно большими (модели A_2 и M_2 пи $B > 0$ и $\Lambda > 0$). Проиллюстрируем зависимость замкнутости пространственного сечения от системы отсчета на конкретной модели [95]. Возьмем модель типа A_2 мира, заполненного излучением, давление которого $p = (1/3)\rho c^2$, где ρc^2 - плотность энергии излучения. Метрика этой модели в хронометрических координатах сопутствующей системы отсчета имеет вид:

$$ds^2 = \frac{3}{2\Lambda}\left[\frac{1+\exp\left(\sqrt{2}x^0\right)}{1-\exp\left(\sqrt{2}x^0\right)}\right]^2\left[dx_0^2 - dx_1^2 - \sin^2 x^1\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

Очевидно, пространственные сечения в этой системе отсчета конечны. Перейдем к новой системе отсчета. Для этого сделаем преобразование координат: $\operatorname{tg} x^0 = \operatorname{sh} y_0' \operatorname{ch} y_1; \operatorname{tg} x^1 = \operatorname{sh} \mathrm{y}_1/\mathrm{ch}_0$. В новой системе координат метрика принимает вид:

$$ds^2 = \frac{3}{2\Lambda}\left\{\frac{1+\exp\left[\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{sh} y_0/\operatorname{ch} y_1\right)\right]}{1-\exp\left(\sqrt{2}\operatorname{arctg}\operatorname{sh} y_0/\operatorname{ch} y_1\right)}\right\}^2 \times$$

$$\times\frac{1}{\operatorname{ch}^2 y_1 + \operatorname{sh}^2 y_0}\left[dy_0^2 - dy_1^2 - \operatorname{sh}^2 y_1\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right].$$

Рассмотрим пространственные сечения хронометрической по отношению к новым координатам системы отсчета (уже не сопутствующей). Конгруэнция мировых линий новой системы отсчета является нормальной, т. е. имеет место глобальное $1+3$-расщепление. Легко показать, что плотность импульса направлена к началу координат несопутствующей системы отсчета, т. е. пространство новой системы отсчета расширяется быстрее среды. Объем пространственного сечения

$$V = 4\pi\left(\frac{3}{2\Lambda}\right)^{3/2}\int\limits_0^\infty\left\{\frac{1+\exp\left[\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{sh} y_0/\operatorname{ch} y_1\right)\right]}{1-\exp\left(\sqrt{2}\operatorname{arctg}\operatorname{sh} y_0/\operatorname{ch} y_1\right)}\right\}^3\frac{\operatorname{sh}^2 y_1 dy_1}{\left(\operatorname{ch}^2 y_1 + \operatorname{sh}^2 y_0\right)^{3/2}}$$

бесконечен. Модель эволюционирует от $y_0 = -\infty$ до $y_0 = 0$. Время расширения модели

$$\tau = \left(\frac{3}{2\Lambda}\right)^{1/2}\int\limits_{-\infty}^0\frac{1+\exp\left[\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{sh} y_0/\operatorname{ch} y_1\right)\right]}{1-\exp\left[\sqrt{2}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{sh} y_0/\operatorname{ch}_1\right)\right]}\frac{dy_0}{\left(\operatorname{ch}^2 y_1 + \operatorname{sh}^2 y_0\right)^{1/2}}$$

также бесконечно.

В сопутствующих системах отсчета пространственные сечения имеют бесконечный объем, а время эволюции модели конечно (модели типа O_1 при $B \leqslant 0$ и $\Lambda < 0$). Проиллюстрируем зависи- мость замкнутости пространственного сечения от системы отсчета опять на примере модели мира, заполненного излучением с $p = (1/3)\rho c^2$[95]. В хронометрических координатах сопутствующей системы отсчета метрика такой модели при $B < 0$ имеет вид:

$$ds^2 = a^2 \frac{\mathrm{sn}^2\, bx^0}{\mathrm{dn}^2 bx_0} \left[dx_0^2 - dx_1^2 - \mathrm{sh}^2\, x_1 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

где $0 < b = \mathrm{const}$; $\mathrm{sn}\ bx^0$ и $\mathrm{dn} bx^0$ - Эллиптические функции Якоби, причем $0 \leqslant x^0 \leqslant 2K$; $K - \Pi^{\cdot\cdot}$ эллиптическй интеграл:.

$$K = |_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \lceil |R_1^2| \,/\, (|R_1^2| - R_2^2)] \sin^2\varphi}}$$

Объем пространственных сечений в этой системе отсчета бесконечен. Произведем преобразование координат: $x^0 = \ln\sqrt{y_0^2 - y_1^2}$; $x^1 = \mathrm{Arth}\,(y_1/y_0)$. В новой системе координат метрика принимает ВИД:

$$ds^2 = a^2 \frac{\mathrm{sn}^2\left(b \ln\sqrt{y_0^2 - y_1^2}\right)}{\mathrm{dn}^2\left(b \ln\sqrt{y_0^2 - y_1^2}\right)} \frac{dy_0^2 - dy_1^2 - y_1^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)}{y_0^2 - y_1^2}.$$

Модель эволюционирует в пределах - 1 $< y_0 < \infty$. Область изменения y_1 определяется соотношением $\sqrt{y_0^2 - \exp(4K/b)} \leqslant y_1 \leqslant \leqslant \sqrt{y_0^2 - 1}$. Пространственные сечения хронометрической по отношению к новым координатам системы отсчета имеют конечНы Й объем.

Аналогичный пример можно привести для $B = 0$ и $\Lambda < 0$.

В сопутствующих системах отсчета пространственные сечения имеют бесконечный объем и время эволюции модели бесконечно. К этому случаю относятся модели типа M_1 с пространственными сечениями нулевой и отрицательной кривизны ($B \leqslant 0$) и с $\Lambda \geqslant 0$. Приведем два примера, иллюстрирующих зависимость конечности объема пространственных сечений от системы отсчета.

а. Модель мира с $B = 0$ и $\Lambda = 0$, заполненного пылевидной средой. В хронометрических координатах сопутствующей системы отсчета метрика задается формулой

$$ds^2 = a_0^2 x_0^4 \left[dx_0^2 - dx_1^2 - x_1^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

Объем пространственных сечений бесконечен. Преобразованием КООрдинат

$$x^0 = \frac{1 + y_1^2 - y_0^2}{(y_0 - 1)^2 - y_1^2}; \quad x^{\mathbf{1}} = \frac{2y_1}{(y_0 - 1)^2 - y_1^2}$$

метрика (6.31) приводится к виду

$$ds^2 = 4a_0^2 \frac{(1 + y_1^2 - y_0^2)^4}{\left[(y_0 - 1)^2 - y_1^2\right]^6} \left[dy_0^2 - dy_1^2 - y_1^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta^2 d\varphi^2\right)\right].$$

Выражение для плотности материи в хронометрической по отношению к новым координатам системе отсчета имеет физический смысл, если $(y_0 - 1)^2 - y_1^2 > 0$. Можно рассмотреть отдельно несколько стадий эволюции модели. На стадии сжатия как сопутствующей, так и несопутствующей системы отсчета, когда $y_1^2 \leqslant y_0^2 - 1$, объем пространственного сечения сопутствующей системы отсчета конечен.

б. Модель мира с $B < 0$ и $\Lambda = 0$, заполненного излучением ($p = \rho c^2/3$). Сопутствующей (хронометрической) системе отсчета соответствует метрика

$$ds^2 = a_0^2 \mathrm{sh}^2\, x^0 \left[dx_0^2 - dx_1^2 - \mathrm{sh}^2\, x_1\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

Преобразованием координат $x^0 = \ln\sqrt{y_0^2 - y_1^2}; x^1 = \operatorname{arth}(y_1/y_0)$. метрика приводится к виду

$$ds^2 = \frac{a_0^2}{4}\left(1 - \frac{1}{y_0^2 - y_1^2}\right)^2 \left[dy_0^2 - dy_1^2 - y_1^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

Легко проверить, что объем пространственных сечений в несопутствующей системе отсчета (хронометрической по отношению к новым координатам) конечен. Время эволюции модели в новой системе отсчета бесконечно.

Таким образом, зависимость конечности пространственных сечений от системы отсчета имеет место для широкого класса однородных изотропных моделей Бсселенной, заполненных как излучением, так и пылевидной средой. Можно показать, что аналогичная зависимость имеет место и для модели пустого мира де Ситтера. В последнем случае ситуация осложняется отсутствием физически выделенной (сопутствующей материи) системы отсчета.

28.6.5 5. Observables in Friedmann Models

Расширение Вселенной или эффект разбегания галактик обнаружен по красному смещению линий спектра света, приходящего от далеких галактик. Вычислим смещение частоты на основе моделей Фридмана. Для этого рассмотрим уравнения изотропных геодезических (3.58), (3.59). В моделях Фридмана в сопутствующей системе отсчета эти уравнения принимают вид:

$$(1/\omega)\partial_T\omega + \left(\widetilde{k}^i/\omega^2\right)\widetilde{\nabla}_i\omega + \left(1/\omega^2\right)D_{ik}\widetilde{k}^i\widetilde{k}^k = 0;$$
$$\partial_T\widetilde{k}^i + \left(\widetilde{k}^k/\omega\right)\widetilde{\nabla}_k\widetilde{k}^i - 2\widetilde{k}^k D_k^i = 0,$$

где $\omega = k^\mu\tau_\mu; \widetilde{k}^k = -h_\mu^k k^\mu$. Предположим, что нас интересует свет, пришедий от некоторой звезды. Выберем сферические координаты с началом в точке наблюдения так, чтобы звезда лежала в экваториальной «плоскости» $\theta = \pi/2$, причем $\varphi = 0$ и пусть ее радиальная координата $x^1 = r$. Так как система отсчета сопутствующая, в процессе эволюции Вселенной координаты звезды меняться не будут. Используя значения компонент D_{ik} и L_{sr}^i согласно формулам (6.4) и (6.14), из уравнений (6.36) легко найти, что если в начальный момент $k^2|_0 = 0$ и $\bar{k}^3\big|_0 = 0$, то они останутся равными нулю и в дальнейшем, т. е. вектор k^i направлен вдоль радиальной Линии. Учитывая пзотропность k^μ, находим:

$$k^\mu k^v g_{\mu\nu} = 0 \to \omega^2 - -\left(k^1\right)^2 a^2 = 0; \quad k^1 = \omega/a$$

Подставляя (6.37) и (6.14) в (6.35), приходим к уравнению

$$\left(\partial/\partial x^0 - \partial/\partial x^1\right)\omega a = 0$$

Решение этого уравнения

$$\omega = f\left(x^0 + x^1\right)/a\left(x^0\right)$$

где $f(x^0 + x^1)$ - функция, определяюцая форму светового сигнала. Переходя от энергии $\omega = hv$ к частотам v и сопоставляя частоты светового сигнала в момент его испускания $\left(x^0 = x_{(1)}^0\right)$ и в момент наблюдения $\left(x^0 = x_{(2)}^0\right)$, из (6.39) получаем:

$$v_2 a\left(x_{(2)}^0\right) = v_1 a\left(x_{(1)}^0\right) \text{ иЛи } v_2/v_1 = a\left(x_{(1)}^0\right)/a\left(x_{(2)}^0\right).$$

Поскольку изменение параметра x^0 за время распространения сигнала от звезды до наблюдателя мало по сравнению с его значением, т. е. $\Delta x^0 = x_{(2)}^0 - x_{(1)}^0 \ll x_{(2)}^0$, представим $a\left(x_{(1)}^0\right)$ в виде $a\left(x_{(1)}^0\right) \approx a\left(x_{(2)}^0\right) - \dot{a}\Delta x^0$. Подставляем это выражение в (6.40) :

$$(v_2 - v_1)/v_1 = \Delta v/v = -(\dot{a}/a)\Delta x^0.$$

Величине Δx^0 соответствует разность координат $x^1 = r$ или расстояние $l \approx V\overline{h_{11}r^2} = ar$. В результате получаем окончательную формулу для относительной разности частот:

$$\Delta v/v = -\left(\dot{a}/a^2\right) l \equiv -Hl$$

При расширении Вселенной ($\dot{a} > 0$) изменение частоты отрицательное (красное смещение), а при сжатии-положительное (фиолетовое смещение).

Эффект космологического красного смещения обнаружил экспериментально Хаббл в конце 20-х годов. Коэффициент пропорциональности H в (6.41) назван его именем. По современным данным постоянная Хаббла равна $H = \dot{a}/a^2 \approx 3 \cdot 10^{-18}\text{с}^{-1}$. Таким образом, данные наблюдений выделяют из всех возможных космологических моделей лишь те, которые хотя бы на отдельных этапах эволюции соответствуют расширению.

Каково пространство в сопутствующей системе отсчета: от- крытое или замкнутое? Чтобы ответить на этот вопрос, вернемся к уравнениям йнштейна для однородных изотропных моделей (6.8), (6.9) при $\Lambda = 0, p = 0$. Умножим (6.9) на ік и сложии с (6.8). В результате получим:

$$B = 2\left(x\rho c^2/3 - H^2\right)$$

Отсюда находим, что пространство замкнуто ($B > 0$), если

$$\rho > 3H^2/xc^2 \equiv \rho_\text{р} \approx 2 \cdot 10^{-29}$$

и пространство открыто ($B < 0$), если

$$\rho < 3H^2/xc^2 \approx 2 \cdot 10^{-29}$$

(в граммах на кубический сантиметр).

В настоящий момент плотность ρ наблюдаемой части Вселен-ной оценивается значением [98] $\rho \approx 5 \cdot 10^{-31}\text{г/см}^3$. Экстраполируя эти данные на всю Вселенную, приходим к выводу о соответствии данным наблюдений открытой модели Фридмана. Таким образом, пространственные сечения в сопутствующей материи системе отсчета, скорее всего, описываются геометрией Лобачевского. Однако. может оказаться, что при оценке ρ учитывается не вся материя. По мере открытия новых объектов и новых видов материи оценка средней плотности постепенно будет приближаться к критической: плотности $\rho_\text{кр.}$ Если еще учесть возможность $\Lambda > 0$, то оказывается, что на данном этапе трудно с уверенностью произвести окончательный выбор реализуемой в природе модели Вселенной.

Каков «возраст» Вселенной? Если бы Вселенная всегда: расширялась в наблюдаемом темпе (при $\Lambda = 0$), то для расшире-ния до современного состояния в сопутствующей системе отсчета понадобилось бы $T_1 \approx 1/H \approx 3 \cdot 10^{17}c \approx 10^{10}$ лет. На самом деле, как это видно из графиков эволюции моделей Вселенной (см. рис. 13), в ранние этапы расширение должно было быть более быстрым (в «начальный» момент - взрыв). Поэтому следует брать значение $T_2 \approx (2/3)T_1$. Тогда возраст Вселенной $T_2 \approx 7 \cdot 10^9$ лет. Это. небольшой возраст. Он одного порядка с оцениваемым геологами возрастом земной коры и даже в два-три раза меньше приводимого. астрономами возраста старых звезд. Выход из этого противоречия может состоять в рассмотрении более сложных моделей: анизотропных, неоднородных или одновременно и анизотропных и не-однородных.

28.6.6 6. Homogeneous Anisotropic Models of the Universe

Рассмотрим кратко некоторые модели Вселенной, обладающие более. общими - однородными пространственными сечениями. Для этого прежде всего изложим классификацию 3-мерных однородных пространств * (возможных одно-

Эта классификация дана Бианки [99]. Аналогичная классификация одно-родных 4-мерных пространств произведена Г. И. Кручковичем: [100], Она изложена в [41, с. 72]. родных пространственных сечений в нормалыных системах отсчета). В 1.8 уже было сформулировано условие однородности многообразий произвольной размерности. Здесь понадобятся формулы (1.61) - (1.63) для 3-мерных пространств (все греческие индексы в пих должны быть заменепы латинскими). Сопоставим кструктурным константам

величину c двумя индексами: $C^{(j)}_{(sr)} = \varepsilon_{(sri)}C^{(ij)}$, где $\varepsilon_{(sri)}$ - символ Леви-Чивиты. Тогда (1.63) можно записать в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(ijk)}C^{(jk)}C^{(is)} = 0$$

Представим $C^{(ij)}$, как сумму симметричной и аитисимметричной частей

$$C^{(ij)} = n^{(ij)} + a^{(ij)} = n^{(ij)} + \varepsilon_{(ijk)}a_{(k)}$$

где $n^{(ij)} = n^{(ji)}; a^{(ij)} = -a^{(ji)}$

Поскольку линейная комбинация векторов Киллинга также является вектором Киллинга, в пространстве этих векторов можно определить линейные преобразования. При этом все величины с индексами в скобках будут изменяться по тензорному закону. С помощью таких преобразований симметричный тензор n^{ij} приводится к диагональному виду. Пусть n_1, n_2, n_3 - его главные значелия. Пользуясь произволом в выборе постоянных множителей при операторах (1.60), можно обратить отличные от нуля главные значения n_i в ± 1. Используя (6.44)„ соотношения (6.43) запишем в виде

$$a_{(i)}n^{(is)} = 0$$

.то означает, что отличными от нуля (в главных осях) могут быть лишь такие компоненты вектора $a_{(i)}$, которые соответствуют нулевым главыым значениям n_i. Если имеются два или три нулевых главных значения n_i, то подходящие преобразования обращают в нуль соответственно одну или две из оставшихся компонент $a_{(i)}$. Таким образом, не теряя общности, можно считать, что вектор $a_{(i)}$, если он отличен от нуля, имеет лишь одну ненулевую компоненту. Положим, что такой компонентой является $a_{(1)} \equiv a$. С учетом изложенного коммутаторы (1.61) выразим следующим образом:

$$\begin{aligned}
\left[X_{(1)}X_{(2)}\right] &= -aX_{(2)} + n_3X_{(3)};\\
\left[X_{(3)}X_{(1)}\right] &= n_2X_{(2)} + aX_{(3)};\\
\left[X_{(2)}X_{(3)}\right] &= n_1X_{(1)}.
\end{aligned}$$

Тип	I	II	VII	VI	IX	VIII	**V**	IV	VII	III (= 1)|VI($a \neq -1$)
a	0	0	0	0	0	0	1	1	a	a
n_1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
n_2	0	0	1	-1	1	1	0	0	1	1
n_3	0	0	0	0	1	-1	0	1	1	-1

Перебирая все указанные для n_i и a значения, получаем одиородиые пространства девяти типов Бианки. Выпишем соответствующие этим типам значения in и $_ia$[9, с. 487]: Заметим, что спроектированные па направления базисных векторов $\xi^i_{(s)}$ компоненты 3-мерного тензора Риччи алгебраически выражаются через структурныеконстанты группы *. Используя это и вид тензора Эйнштейна (3.36)-(3.38) в синхронной системе отсчета, легко записать уравнения Эйнштейна для метрик с пространственными сечениями всех типов Бианки.

Выпишем несколько пространственно-временных метрик, имеющих пространственные сечения различных типов Бианки.

Тип I - абелева группа Ли - соответствует евклидовому пространственному сечению. Кроме метрики Минковского к этому случаю относится плоская анизотропная модель мира Казнера [9, с. 491] (вакуумное решение):

$$ds^2 = dx_0^2 - x_0^{2\beta_1}dx_1^2 - x_0^{2\beta_2}dx_2^2 - x_0^{2\boldsymbol{\beta}_3}dx_3^2,$$

где $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ - константы, удовлетворяющие условиям:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1; \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1$$

Если их расположить в порядке возрастания $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$, то они лежат в интервалах:

$$-1/3 \leqslant \beta_1 \leqslant 0; 0 \leqslant \beta_2 \leqslant 2/3; 2/3 \leqslant \beta_3 \leqslant 1.$$

С увеличением x^0 в хронометрической (кинеметрической) системе отсчета в пространственных сечениях линейные расстояния вдоль осей x^2 и x^3 увеличиваются, а вдоль оси x^1 уменьшаются.

Т и п IX. К этому типу относится модель с замкнутыми пространственными сечениями, в некотором смысле обобщающая модель Казнера [101]:

$ds^2 = dx_0^2 - \exp(2\alpha)\left[\exp(2\beta_{11})\, dl_{(1)}^2 + \exp(2\beta_{22})\, dl_{(2)}^2 + \exp(2\beta_{33})\, dl_{(3)}^2\right]$,

где $\alpha, \beta_{11}, \beta_{22}, \beta_{33}$ - функции координаты x^θ, удовлетворяющие условию

$$\beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33} = 0.$$

а $dl_{(i)} = l_{(i)}^\mu dx^\mu$-три ортогональных смещения вдоль векторов с компонентами:

$$\left.\begin{array}{l} l_{(1)\mu} = \{0; \sin x^3; -\cos x^3 \sin x^1; 0\}; \\ l_{(2)\mu} = \{0; \cos x^3; \sin x^3 \sin x^1; 0\}; \\ l_{(3)\mu} = \{0; 0; \cos x^1; 1\} \end{array}\right\}$$

в системе координат, где $0 \leqslant x^1 \leqslant \pi; 0 \leqslant x^2 \leqslant 2\pi; 0 \leqslant x^3 \leqslant 4\pi$. Ввиду условия (6.50) независимы лишь две функции β_{ii}. Можно перейти к новым независимым величинам $\boldsymbol{\beta}_+$и β_-, так что

$$\beta_{11} = \beta_+ + \sqrt{3}\beta_-; \beta_{22} = \beta_+ - \sqrt{3}\beta_-; \beta_{33} = -2\beta_+.$$

Величина $\beta = \sqrt{\boldsymbol{\beta}_+^2 + \beta_-^2}$ характеризует суммарную анизотропию мира,.

Это легко понять на языке тетрадного (см. 7.7) или в данном случае триадного формализма. Структурные константы фактически являются объектами: неголономности, из которых алгебраически строятся коэффишиенты вращения Риччи, образующие тензор кривизны подобно символам Кристоффеля. Производные от них из-за постоянства $C_{(ab)}^{(i)}$ равны нулю. Остаются лишь квадратичные комбинации коэффициентов вращения Риччи или структурных констант. :а $\sigma = \arccos\left(\beta_+/\sqrt{\beta_+^2 + \beta_-^2}\right)$ определяет отклонение мира от аксиальной сим.метрии.

При $\beta_{11} = \beta_{22} = \beta_{33}$, т. е. $\beta_+ = \beta_- = 0$, пространственные сечения имеют постоян.ную положительную кривизну. Таким образом, закрытая модель Фридмана является частным случаем моделей мира с однородными пространственными сечениями типа IX Бианки. Эволюция модели мира с метрикой (6.49) соответствует смене казнеровских эпох попеременно вдоль трех осей. При $x^0 \to 0$ число.осцилляций стремится к бесконечности [102].

Описанная модель однородной анизотропной Всленной использована Мизнером [179] для построения квантовой космологической модели. Этот вопрос кратко изложен в 10.8. Там же рассмотрена эта метрика с позиции теории суперпространств. Подробное обсуждение этой и других анизотропных космологических моделей (как классических, так и квантовых аспектов) можно найти в книге Райана (Ryan M. Hamiltonian Cosmology: Lect. Not. Phys. Berlin:Heidelberg - New York, Springer - Verlag, 1972).

Пространства постоянной отрицательной кривизны являются частным случаем пространств типа V Бианки.

Общие виды метрик 3-мерных пространств всех девяти типов Бианки можно:найти в монографии [41, с. 156-157].

28.7 Complete and Incomplete Methods of Describing Observers in General Relativity

При детальном рассмотрении некоторых проблем и конкретных задач теории гравитации часто приходится отказываться от полной симметрии даже среди пространственных координат (направлений). В таких случаях может оказаться целесообразным использование методов $1-1-1+2$ - или $2+2$-расщеплений пространственно-временного многообразия по образцу уже рассмотренных в гі. 3

1-1-3-расщеплений, что осуществляется соответственно диадным и диарным формализмами. Кроме практической важности эти формализмы позволяют более глубоко осмыслить математическую структуру монадного метода. Наконец, для полного описания наблюдателей в ОТО необходим формализм 1+1-1-1+1-расщепления пространственно-временного многообразия - тетрадный формализм. Все упомянутые формализмы систематически изложены в этой главе.

28.7.1 1. Mathematical Apparatus of the General Covariant Dyad Formalism

Диадный формализм (метод) [103], так же как и монадный, слагается из четырех частей. Кратко изложим их последовательно.

А л г е р а.

В диадном формализме метрический тензор представляется в виде

$$g_{\mu\nu} = \tau_\mu \tau_v - l_\mu l_v - \gamma_{\mu\nu},$$

где составляющие удовлетворяют соотношениям:

$$\left.\begin{array}{l} \tau_\mu \tau^\mu = 1; \quad l_\mu l^\mu = -1; \quad \gamma_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu} = 2 \\ \tau_\mu l^\mu = \tau_\mu \gamma^{\mu\nu} = l_\mu \gamma^{\mu\nu} = 0 \end{array}\right\}$$

($\gamma_{\mu\nu}$– метрический тензор 2-мсрного пространственно-подобного локалыноге сечення, ортогонального τ^μ и l^μ). В диадном формализме используются лііbo скаляры-тензорные величины, свернутые по всем индексам с векторами τ^μ и l^μ (например, $B = B_{\mu\nu}\tau^\mu\tau^\nu, \widehat{B} = B_{\mu\nu}l^{\mu\nu}, B' = B_{\mu\nu}\tau^\mu l^\nu\Big)$, либо 2-мерные тензоры- тензорные величины, спроектированные на направления 2-мерной поверхности посредством $\gamma^\mu_v : B_v = -B_\mu \gamma^\mu_v; \ldots \bar{B}^{\alpha\cdots}_\beta = \Gamma^{\alpha\ldots}_{\mu\ldots\beta\ldots} B^\mu_v \ldots$, где

$$\Gamma^{\overbrace{\alpha\ldots}^{n}\ \overbrace{\nu\ldots}^{m}}_{\mu\ldots\ \ \beta\ldots} = (-1)^{n+m} \underbrace{\gamma^\alpha_\mu \ldots}_{n} \cdot \underbrace{\gamma^v{}_{\beta\ldots}}_{n}$$

оператор проектирования на 2-мерные направления.

Д иадные физико-геометрически е тенз оры. Из диадных составляющих метрического тензора и их первых производных можно построить 11 независимых диадных физико-геометрических тензоров.

Семь тензоров получаются всевозможными проектированиями монадных физико-геометрических тензоров на направления γ и l:

$$\begin{gathered} \bar{D}_{\alpha\beta} \equiv \gamma^\mu_\alpha \gamma^v_\beta D_{\mu v} = -\gamma^\mu_\alpha \gamma^v_\beta E_{\mu v,\sigma}\tau^\sigma; \\ (q_\alpha + \Lambda_\alpha) \equiv -\gamma^\mu_\alpha l^v D_{\mu v} [\text{cM.}(7.13), (7.14)]; \\ \bar{D} \equiv l^\mu l^v D_{\mu v} = \tau^\mu l^v \left(l_{\mu,v} - l_{v,\mu}\right); \\ \bar{A}_{\alpha\beta} \equiv \gamma^v_\alpha \gamma^\mu_\beta A_{v\mu} = (1/2)\gamma^\mu_\alpha \gamma^v_\beta \left(\tau_{\mu,v} - \tau_{v,\mu}\right); \\ Q_\alpha \equiv \gamma^\mu_\alpha l^v A_{\mu v} = (1/2)\gamma^\mu_\alpha l^v \left(\tau_{\mu,v} - \tau_{v,\mu}\right); \\ \bar{F}_\alpha \equiv -\gamma^\mu_\alpha F_\mu = -\gamma^\mu_\alpha \tau^v \left(\tau_{\mu,v} - \tau_{v,\mu}\right) = \tau^v \left(\tau_{\alpha,v} - \tau_{v,\alpha}\right) + l_\alpha \widehat{F}; \\ \widehat{F} \equiv l^\mu F_\mu = l^\mu \tau^v \left(\tau_{\mu,v} - \tau_{v,\mu}\right). \end{gathered}$$

Здесь $E_{\mu\nu,\sigma} = (1/2)\left(\partial\gamma_{\mu\sigma}/\partial x^v + \partial\gamma_{v\sigma}/\partial x^\mu - \partial\gamma_{\mu\nu}/\partial x^\sigma\right)$

Три диадных физико-геометрических тензора получаются аналогично монадным заменой τ^μ и $h_{\mu v}$ соответственно величинами l^μ и $\gamma_{\mu v}$:

$$\begin{gathered} d_{\alpha\beta} \equiv -(1/2)\gamma^\mu_\alpha \gamma^v_\beta \left(l_{\mu;v} + l_{v;\mu}\right) = -\gamma^\mu_\alpha \gamma^v_\beta E_{\mu v,\sigma} l^\sigma \\ a_{\alpha\beta} \equiv (1/2)\gamma^\mu_\alpha \gamma^v_\beta \left(l_{\mu,v} - l_{v,\mu}\right) \\ f_\alpha \equiv -\gamma^\mu_\alpha l^v \left(l_{\mu,v} - l_{v,\mu}\right) = l^v \left(l_{\alpha,v} - l_{v,\alpha}\right) - \tau_\alpha \widehat{D}. \end{gathered}$$

Наконец, одна векторная величина появляется из совместного рассмотрения двух векторных полей:

$$q_\alpha \equiv (1/2)\gamma_\alpha^\mu \tau^v \left(l_{\mu,v} - l_{v,\mu}\right) = -(1/2)\tau^v \left(l_{\alpha,v} - l_{v,\alpha}\right) + (1/2) l_\alpha \widehat{D}$$

Комбинируя формулу для $-\gamma_\alpha^\mu l^v D_{\mu v}$ и (7.13), находим:

$$\Lambda_\alpha = (1/2)\gamma_{\alpha\beta}\left(l^\sigma \tau^\beta, -\tau^\sigma l^\beta\right)$$

Итого, имеем: четыре тензора второго ранга; пять векторов и два скаляра.

3 адание диадных опе раторов диф ф е ренциров а ния. В качестве основных диадных операторов дифференциро- вания выберем следующие три, которые при действии н γ-спроектированные тензоры дают опять v-спроектированные тензоры: диадный оператор временного дифференцирования

$$\bar{\partial}_T \bar{B}^{\overbrace{\mu}^{m}}_{\underbrace{\mu\ldots}_{n}} = \Gamma^{\mu\ldots\beta}_{\alpha\ldots v}\varepsilon \bar{B}^{\alpha\ldots}_{\beta} = \tau^\sigma \partial \bar{B}^{\mu\ldots}_{v}\ldots/\partial x^\sigma -$$

$$\underbrace{-\bar{N}^\mu_\sigma \cdot \bar{B}^{\sigma\ldots}_{v} - ..}_{m}\underbrace{+ + \bar{N}_v{}^\sigma \bar{B}^\mu_{\sigma\ldots} + \ldots}_{n}$$

тде $\bar{N}^\sigma_{\lambda\cdot} = \tau^\sigma_{,\lambda} - \tau^\sigma F_\lambda - 2l^\sigma q_\lambda - 2l_\lambda \Lambda^\sigma$;

диадный оператор дифференцирования вдоль l

$$\overbrace{\partial_L}\, B^{\overbrace{\mu\ldots}^{m}}_{\underbrace{v\ldots}_{n}} = \Gamma^{\mu\ldots\beta}_{\alpha\ldots\beta}\mathfrak{L}_l \bar{B}^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots} = l^\sigma \partial \bar{B}^{\mu\ldots}_{v\ldots}/\partial x^\sigma -$$

$$\underbrace{-\bar{L}_\sigma{}^\mu \cdot \bar{B}^\sigma_{v}\ldots - ..}_{m}\cdot\underbrace{+\widetilde{L}_v{}^\sigma \bar{B}^\mu_{\sigma}\ldots + +..}_{n}$$

тде $\widetilde{L}^\sigma_\lambda = {}^{\sigma}_{,} l^\sigma_{,\lambda} - l^\sigma f_\lambda + 2\tau^\sigma Q_\lambda - 2\tau_\lambda \Lambda^\sigma$;

диадную ковариантную производную вдоль направлений γ

$$\bar{\nabla}_{\bar{\sigma}} \bar{B}^{\mu\ldots}_{v\ldots} = -\Gamma^{\mu\ldots\gamma'_\sigma\gamma_\lambda \bar{B}^{\alpha\ldots}_{\beta}\ldots}_{\alpha\ldots v\ldots}$$

Запишем результат коммутации операторов $\bar{\nabla}_{\bar{\alpha}}$ и $\bar{\nabla}_{\bar{\beta}}$, действующих на произвольный вектор $\bar{B}^\mu$:

$$\left(\bar{\nabla}_{\bar{\alpha}}\bar{\nabla}_{\bar{\beta}} - \bar{\nabla}_{\bar{\beta}}\bar{\nabla}_{\bar{\alpha}}\right)\bar{B}^\mu = {}^2R^\mu_{\cdot\lambda\alpha\beta}\bar{B}^\lambda + 2\bar{A}_{\alpha\beta}\left(\bar{\partial}_T \bar{B}^\mu - \bar{D}^\mu_\lambda \bar{B}^\lambda\right) -$$
$$-2a_{\alpha\beta}\left(\bar{\partial}_L \bar{B}^\mu - d^\mu_\lambda \bar{B}^\lambda\right),$$

где ${}^2R^\mu_{\cdot\lambda\alpha\beta}-$ тензор кривизны 2 -мерной γ-поверхности:

$${}^2R^\mu_{\cdot\lambda\alpha\beta} = \Gamma^{\mu\gamma\alpha v}_{\varepsilon\lambda\alpha\beta}\left(\partial \bar{E}^\varepsilon_{\gamma v}/\partial x^\varkappa - \partial \bar{E}^\varepsilon_{\gamma\kappa/}/\partial x^v + \bar{E}^\varepsilon_{\sigma\varkappa}\bar{E}^\sigma_{\gamma v} - \bar{E}^\varepsilon_{\sigma v}\bar{E}^\sigma_{\gamma\alpha}\right)$$

$\left(\bar{E}^\varepsilon_{\alpha,\beta} = E^\varepsilon_{\alpha\beta} + \gamma^\varepsilon_{\alpha,\beta}-\right.$ обобщенная 2-связность).

3 апись основных соотношений ОТОв диадном в и де. Все общековариантные соотношения и величины можно представить в диадном виде, т. е. записать только через скаляры, γ-спроектированные тензоры, диадные физико-геометрические тензоры пI диадные операторы дифференцирования. Уравнения и тождества ОТО в диадном виде имеют довольно громоздкий вид. В дальнейшем будем приводить некоторые соотношения по мере надобности.

28.7.2 2. Group Gauges of the Dyad Formalism

Введем групповые калибровки диадного формализма, аналогичные изложенным в гл. 3 калибровкам монадного метода. Теперь их будет значительно больше. Ограничимся лишь случаями первичного выделения временно-подобного вектора τ^μ, тогда имеем четыре калибровки диадного формализма. Подробно изложим одну из них и кратко охарактеризуем остальные три.

Кинеорометрическая калибровка*. Алг (?) р а. Откалибруем диаду $\{\tau^\mu, l^\mu\}$ в два этапа способом, аналогичным кинеметрической калибровке монады:

$$\tau_\mu = g^0_\mu/\sqrt{g^{00}} \to \tau^\mu = g^{0\mu}/\sqrt{g^{00}};$$
$$l_\mu = \frac{+h^1_\mu}{\sqrt{+h^{11}}} = \left\{ \frac{g^{01}}{\sqrt{g^{00}\left(g^{01}g^{01} - g^{00}g^{11}\right)}}; -\frac{\sqrt{g^{00}}}{\sqrt{g^{01}g^{01} - g^{00}g^{11}}}; 0; 0 \right\} \to$$
$$\to l^\mu = \frac{+h^{\mu 1}}{\sqrt{+h^{11}}} = \left\{ 0; \frac{\sqrt{g^{01}g^{00} - g^{00}g^{11}}}{\sqrt{g^{00}}}; \right.$$
$$\left. \frac{g^{01}g^{02} - g^{12}g^{00}}{\sqrt{g^{00}\left(g^{01}g^{01} - g^{00}g^{11}\right)}}; \quad \frac{g^{01}g^{03} - g^{13}g^{00}}{\sqrt{g^{00}\left(g^{01}g^{01} - g^{00}g^{11}\right)}} \right\},$$

где ${}^t h^{\mu 1}$ - компоненты метрического тензора 3-мерного пространственного сечения в кинеметрической калибровке монады. Компоненты 2-мерного метрического тензора $\gamma_{\mu v}$ тогда найдем в виде

$$\gamma^{\xi\eta} = \frac{g^{0\xi}g^{0\eta} - g^{\xi\eta}g^{00}}{g^{00}} - \frac{\left(g^{01}g^{\xi 0} - g^{1\xi}g^{00}\right)\left(g^{10}g^{\eta 0} - g^{1\eta}g^{00}\right)}{g^{00}(g^{01}g^{01} - g^{00}g^{11})}$$
$$\gamma^{0\mu} = \gamma^{1\mu} = 0; \quad \gamma_{\xi\eta} = -g_{\xi\eta}; \quad \gamma_{00} = -g_{00} - -\frac{g^{11}}{g^{01}g^{01} - g^{00}g^{11}};$$
$$\gamma_{11} = -g_{11} - \frac{g^{00}}{g^{01}g^{01} - g^{00}g^{11}}; \quad \gamma_{01} = -g_{01} + \frac{g^{01}}{g^{01}g^{01} - g^{00}g^{11}}; \quad \gamma^\xi_\eta = -g^\xi_\eta$$
$$\gamma^\xi_0 = \frac{g^{01}g^{1\xi} - g^{0\xi}g^{11}}{g^{01}g^{01} - g^{00}g^{11}}; \quad \gamma^\kappa_1 = \frac{g^{01}g^{0\xi} - g^{00}g^{\xi 1}}{g^{01}g^{01} - g^{00}g^{11}}; \quad \gamma^0_\mu = \gamma^1_\mu = 0$$

Здесь и в дальнейшем индексы $\xi, \zeta, \eta, \varphi, \chi, \psi$ пробегают значения 2,3

Ранее в работах [103-105] и др. эту калибровку называли дважды кинеметрической. Автору представляется, что термин «орометрическое» (по-гречески о' $0'\alpha\omega$ - «вижу») для 1 + 2-расщепления 3-мерного пространства соответствует термину «кинеметрическое» для аналогичного 1+3-расщепления 4-мерного, пространства-времени. Такое название, во-первых, сохраняет преемственность с ранее введенной терминологией монадного формализма и, во-вторых, отражает основное приложение данной калибровки для описания волновых процессов. Системы координат, в которых $\tau_i = \tau'_i = 0, l_\xi = l'_\xi = 0$, связаны такими преобразованиями координат, что $\partial x^0/\partial x'^i = 0; \partial x^1/\partial x'^\xi = 0$. Это приводит к выделению класса преобразований координат:

$$x'^0 = x'^0\left(x^0\right); \quad x'^1 = x'^1\left(x^0, x^1\right);$$
$$x'^\xi = x'^\xi\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right).$$

Назовеж кинеорометрически-инвариантными (к. о. и.) 2-тензорами такие величины, которые инвариантны при преобразованиях (7.22) и ковариантны относительно преобразований (7.23). Таким свойством обладают следующие комплексы, сопоставленные произвольному тензору $B^{\mu\cdots}_\alpha$:

$$\underbrace{B^\alpha_{\mu\cdots\cdots}}_{m}\underbrace{v_{\cdots}}_{n}\underbrace{\beta_{\cdots}}_{p}\underbrace{\tau^\mu}_{m}\cdot\underbrace{v}_{n}\cdots(-1)^{p+k}\underbrace{\gamma^\sigma_\alpha}_{k}\cdots\underbrace{\gamma\gamma^\beta_\xi}_{p}\cdot\cdot\to$$
$$\to \underbrace{B^{00\cdots}_{ij\cdots s\cdots}}_{n}\frac{\overbrace{n}^{m}}{(g^{00})^{m/2}}\frac{1}{(h^{11})^{n/2}}\underbrace{h^{i1}h^{j1}}_{n}:\cdot\quad .h^{s1}.$$

Таким образом, к. о. и. являются все τ - и l-спроектированные тензоры (скаляры), а также все контравариантные и только с ковариантными индексами 2 и 3 -спроектированные тензоры. В такой калибровке достаточно использовать лишь к. о. и. величины. Будем их обозначать двумя крестиками сверху.

Диидные физико-геоме т рич ески е тензоры. Три из 11 таких тензоров в дапной калибровке тождественно обращаются в нуль:

$$\begin{array}{ll} \overset{++}{Q}_\beta \equiv 0; & +++ \\ \overset{}{A}_{\alpha\beta} \equiv 0; & a_{\alpha\beta} \equiv 0. \end{array}$$

Остальные диадные к. о. и. физико-геометрические тензоры записываются в виде

$$\overset{++}{D}_{\xi\eta} = -\tau^\nu E_{\xi\eta,v} = (1/2)\,\overset{++}{\partial_T}\gamma_{\xi\eta}; \quad \overset{++}{d}_{\xi\eta} = -l^\nu E_{\xi\eta,v} = (1/2)\,\overset{++}{\partial_L}\gamma_{\xi\eta};$$

$$\widehat{D} = \tau_0 l^v l_{0,v} - l_{1,v}\left(\tau^v l^1 - \tau^1 l^v\right); \quad \overset{++}{F} = \tau_0 l^v \tau^0_{,v}.$$

$$\bar{F}_\xi = -\tau^0 \tau_{0,\xi}; \quad \overset{+}{+} \quad f_\xi = -lll_{1,\xi}; \quad + \quad q_\xi = (1/2)\tau^\sigma l_{\sigma,\xi}$$

$${}^{+}\Lambda^{+}_{\xi} = (1/2)\gamma_{\xi\sigma,\mu}\left(\tau^\mu l^\sigma + \tau^\sigma l^\mu\right) = -(1/2)\gamma_{\xi i}{}^{+}\partial_T l^i$$

Здесь в нескольких формулах использованы диадные к. о. и. операторы, определенные ниже.

Основные опе раторы ди ффференциров ания к. о.и. В е ли чи н: к. о. и. оператор временного дифференцирования $\overset{++}{\partial_T}\bar{B}^\xi_\eta... = \tau^\lambda \partial \bar{B}^\xi_\eta .../\partial x^\lambda - \bar{N}^{\dagger+}_\varphi \cdot \bar{B}^\varphi_\eta ... - .. + + \bar{N}^\varphi_\eta \cdot \bar{B}^\xi_\varphi ... + ... +$, тде $\bar{N}^\xi_\varphi = \tau^\sigma \gamma^\xi_{\sigma,\varphi}$

к. о. и. оператор дифференцирования вдоль l

$$\overset{++}{\partial_L}\,\bar{B}^\xi_\eta \cdots = l^i \partial \bar{B}^{\mathrm{E}}_\eta \cdots /\partial x^i - \overset{++}{L^{\mathrm{g}}_\varphi}\,\bar{B}^\varphi_\eta \cdots - ... + \overset{\varphi}{L^{\mathrm{q}}_\eta}\bar{B}^{\mathrm{E}\cdots}_{\bar{\varphi}\cdots+...} + ...$$

где $\bar{L}^\xi_\varphi = l^\sigma \gamma^\xi_{\sigma,\varphi}$

к. о.и. диадная ковариантная γ-производная ${}^{++}\bar{B}^\xi_\zeta ... = \partial \bar{B}^\xi_\eta .../\partial x^\zeta + E^\xi_{\varphi\zeta}\bar{B}^\varphi_\eta ... + ... - E^\varphi_{\eta_\zeta}\bar{B}^\epsilon_\varphi ... - . \; .$

тде $E^\xi_{\varphi\zeta} = \frac{1}{2}\gamma^{\xi\psi}\left(\frac{\partial \gamma_{\varphi\psi}}{\partial x^\zeta} + \frac{\partial \gamma_{\zeta\psi}}{\partial x^\varphi} - \frac{\partial \gamma_{\varphi\zeta}}{\partial x^\psi}\right)$.

С помощью коммутации операторов $\nabla\xi$ и $\nabla\eta$ можно прийти к 2-мерному тензору кривизны. Запишем к. о. и. 2-мерный тензор Риччи:

$${}^2R_{\xi\eta} = \frac{\partial E^\varphi_{\xi\eta}}{\partial x^\varphi} - \frac{\partial E^\varphi_{\xi\varphi}}{\partial x^\eta} + E^\varphi_{\chi\varphi}E^\chi_{\xi\eta} - E^\varphi_{\chi\xi}E^\chi_{\eta\varphi}$$

Хронохориометрическая калибровка * означает пооледовательное задание векторов τ^μ и l^μ способом, аналогичным хронометрической калибровке монады:

$$\tau^\mu = g^\mu_0/\sqrt{g_{00}} \to \tau_\mu = g_{0\mu}/\sqrt{g_{00}};$$

$$l^\mu = \frac{{}^*h^\mu_1}{V^* h_{11}} = \left\{ \frac{g_{01}}{\sqrt{g_{00}\left(g^2_{01} - g_{00}g_{11}\right)}}; -\frac{\sqrt{g_{00}}}{\sqrt{g^2_{01} - g_{00}g_{11}}}; 0 \right\} 0 \Bigg\}$$

где $*h_{\mu v}-$ компоненты 3-мерного метрического тензора в хронометрической калибровке.

В этой калибровке из множества всевозможных допустимых преобразований координат выделяется класс

$$x'^0 = x'^0\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right); \quad x'^1 = x'^1\left(x^1, x^2, x^3\right);$$
$$x'^\xi = x'^\xi\left(x^2, x^3\right),$$

Ранее эта калибровка называлась хронорадиальной [106] или дважды хронометрической [103].

(???????????)

В хронохориометрической калибровке отличны от нуля 10 диадных физико-геометрических тензоров ($\Lambda_\beta \equiv 0$), а диадные операторы дифференцирования аналогичны монадным операторам в хронометрической калибровке.

Кинехориометрическая калибровка диады * означает калибровку τ^μ кинеметрическим способом, а затем l^μ - хориометрическим образом (смешанная калибровка):

$$\tau_\mu = g^0_\mu/\sqrt{g^{00}}; \quad l^\mu = {}^+h^\mu_1/V^{+h_{11}} = \left\{0; -1/\sqrt{-g_{11}}; 0; 0\right\}$$

где ${}^th_{\mu v}$ - компоненты 3-мерного метрического тензора в кинеметрической калибровке. В таком формализме из множества допустимых преобразований координат выделяется класс

$$x'^0 = x'^0\left(x^0\right); \quad x'^1 = x'^1\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right);$$
$$x'^\xi = x'^\xi\left(x^0, x^2, x^3\right),$$

а используемые величины и операторы инвариантны при преобразованиях (7.35) и ковариантны относительно (7.36) (метод кинехориометрических инвариантов).

В данной калибровке физико-геометрические тензоры $A_{\mu v}$ и Q_μ тождественно равны нулю. Диадные операторы $\overset{+}{L}{}^*_*$ ∇^{+*} обладают свойствами монадных операторов в хронометрической калибровке, а оператор ∂^*_T аналогичен оператору монадного временного дифференцирования в кинеметрической калибровке.

Хроноорометрическая калибровка диады ** (также смешанная) задается соотношениями:

$$\tau^\mu = g^\mu_0/\sqrt{g_{00}}; \quad l_\mu = \frac{{}^*h^1_\mu}{\sqrt{{}^*h^{11}}} = \left\{0; -\frac{1}{\sqrt{-g^{11}}}; 0; 0\right\},$$

где ${}^*h_{\mu\nu}$ – 3-мерный метрический тензор в хронометрической калибровке. В данном варианте диадного формализма выделяется класс преобразований координат

$$x'^0 = x'^0\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right); \quad x'^1 = x'^1\left(x^1\right);$$
$$x'^\xi = x'^\xi\left(x^1, x^2, x^3\right),$$

а используемые величины инвариантны при преобразованиях (7.38) и ковариантны относительно преобразований (7.39) (формализм хроноорометрических инвариантов).

В первых работах [103, 107] эта калибровка называлась кинехронометрической.

** Ранее [103, 108] эту калибровку называли хронокинеметрической. В этом формализме физико-геометрические тензоры $a_{\mu v}$ и q_μ тождественно равны нулю. Диадные операторы ${}^*\partial^+_T$и $\nabla^*\nabla^+$ обладают свойствами монадных операторов в хронометрической калибровке, а ${}^{*+}\partial_L$ определяется аналогично оператору монадного временного дифференцирования в кинеметрической калибровке.

28.7.3 3. Physical Applications of the Dyad Formalism

Если монадный метод нужен для описания систем отсчета в ОТО, то диадный метод наиболее естествен для описания монохроматического электромагнитного или иного излучения относительно выделенной системы отсчета. Действительно, электромагнитное и любое другое изотропное излучение характеризуются волновым вектором k^μ, удовлетворяющим условию изотропности

$$k_\mu k^\mu = 0$$

Временно-подобная часть этого вектора определяется 4-скоростью $u^\mu = \tau^\mu$ используемой системы отсчета. Пространственно-подобную часть $-h^\mu_v k^v$ используем для определения второго единич. ного вектора диады l^μ, ортогонального τ^μ так, что

$$k^\mu = \left(\tau^\mu \pm l^\mu\right)\omega(x)$$

где $(0)(x)$ - частота излучения (скалярная функция). Соотношение (7.40) тогда выполняется автоматически.

Характер конгруэнции изотропных линий можно описать с помощью трех оптических инвариантов [109] [ср. с (3.16)]:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon = (1/2)k^{\mu}_{;\mu}; \quad \Omega^2 = (1/4)\left(k_{\mu,v} - k_{v,\mu}\right)k^{\mu;v} \\ \sigma^2 = (1/4)\left(k_{\mu;v} + k_{v;\mu}\right)k^{\mu;v} - \varepsilon^2 \end{array}\right\}$$

которые позволяют сопоставить контуры непрозрачного предмета и его тень на экране, расположенном на расстоянии dr за предметом. Величина εdr характеризует растяжение или сжатие тени (рис. 14, a); Ωdr - поворот (рис. 14, б), а $|\sigma|dr$ - сдвиг (сплюснутость) тени (рис. 14, в). Эти инварианты легко записать через диадные физико-геометрические тензоры. Однако учтем, что изотропные линии, к которым касателен волновой вектор k^{μ} электромагнитного или иного излучения, являются геодезическими, т. е. k^{μ} удовлетворяет условию [здесь и в дальнейшем верхний зна соответствует выбору $k^{\mu} = (\tau^{\mu} + l^{\mu})\,\omega$, а нижний знак-выбору $k^{\mu} = (\tau^{\mu} - l^{\mu})\,\omega$] :

$$k^{\mu}_{;v}k^{v} = 0 \to (\tau^{v} \pm l^{v})\left[\omega, v\,(\tau^{\mu} \pm l^{\mu}) + \omega\,(\tau^{\mu} \pm l^{\mu})_{;v}\right] = 0.$$

Проектируя это соотношение на направления τ, l, γ, получаем:

$$\widehat{D} \mp \hat{F} + \left(1/\omega^2\right)\omega, vk^{v} = 0$$
$$\bar{F}_{v} + f_{v} \mp 2\left(Q_{v} + q_{v}\right) = 0.$$

Используя (7.44), (7.45), оптические скаляры можно записать в виде

$$\varepsilon = -(\omega/2)(\bar{D} \pm d);$$
$$\Omega^2 = \left(\omega^2/2\right)\left(\bar{A}_{\mu v} \pm a_{\mu\nu}\right)\left(\bar{A}^{\mu v} \pm a^{\mu v}\right);$$
$$\sigma^2 = \left(\omega^2/2\right)\left(\bar{D}_{\mu v} \pm d_{\mu\nu}\right)\left(\bar{D}^{\mu\nu} \pm d^{\mu v}\right) - \left(\omega^2/4\right)(\bar{D} \pm d)^2.$$

Эти формулы позволяют наделить физическим смыслом диадные физико-геометрические тензоры $a_{\mu\nu}, d_{\mu\nu}$ и d, которые не определяются из монадных.

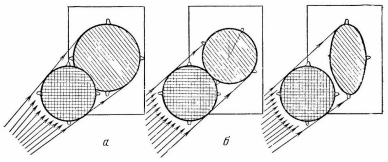


Рис. 14. Геометрический смысл трех оптических инвариантов

Покажем, что ранее описанный метод хроногеометрии (см. §2.3), соответствующий радиолокационному способу задания координат $T = \tau$ и $R = l$ одиночным наблюдателем, естественно связан с диадным формализмом [110]. Пусть

$$f_1\left(R, T, y^{\alpha}\right) = f\left(x^{\alpha}(T + R); \quad y^{\alpha}\right) = 0;$$
$$f_2\left(R, T, y^{\alpha}\right) = f\left(x^{\alpha}(T - R); \quad y^{\alpha}\right) = 0$$

уравнения двух изотропных конусов с вершинами соответственно в точках $x^{\alpha}(T + R)$ и $x^{\alpha}(T - R)$ на мировой линии одиночного наблюдателя; y^{α} - координата наблюдаемой точки, лежащей на пересечении этих конусов. Нормали к копусам $f_{1\alpha} \equiv \partial f_1/\partial y^{\alpha}$; $f_{2\alpha} \equiv \equiv \partial f_2/\partial y^{\alpha}$ также яв.тяются изотропінымн. Вводя обозначения $f_{1R} = \partial F_1/\partial R$; $/_{2R} = \partial F_2/\partial R$, находим два вектора днады:

$$\tau_{\alpha} = \frac{f_{1R}f_{2\alpha} - f_{1\alpha}f_{2R}}{\sqrt{2f_{1R}f_{2R}f_{1\beta}f_2^{\beta}}}; \quad l_{\alpha} = -\frac{f_{2\alpha}f_{1R} + f_{1\alpha}f_{2R}}{\sqrt{2f_{1R}f_{2R}f_{1\beta}f_2^{\beta}}},$$

соответственно ортогональные поверхности $T = \text{const}$ и $R = \text{const}$. Применяя формулы монадного и диадного формализмов, легко показать, что $A_{\alpha\beta} = 0$; $a_{\alpha\beta} = 0$. Таким образом, для описания данной ситуации целесообразно использовать диадный формализм в кинеорометрической калибровке.

Безотносительно к радиолокационному способу задания двух жоординат при выделении из конгруэнции системы отсчета одной из мировых линий (выделенного или

одиночного наблюдателя) второй вектор диады может означать пространственно-подобное направление на положение (или от него) выделенной мировой линии (радиальное направление).

Пока, не вдаваясь в подробности, кратко укажем другие возможные приложения диадного формализма.

Одним из них является использование его при описании областей пространства-времени, в которых имеется физически выделенное одно пространственно-подобное направление, например существует вектор напряженности электрического или магнитного поля. В этом случае направление напряженности можно связать с вектором l^μ, который вместе с вектором 4-скорости системы отсчета τ^μ образует диаду.

Как будет показано в гл. 10, монадный формализм оказался эффективным методом при построении гамильтоновой формулировки ОТО. Последняя важна для осуществления программы выделения двух пар динамических гравитационных переменных, подлежащих квантованию в квантовой теории гравитации. Работы Дирака и других авторов (фактически на основе монадного метода) позволили «исключить» четыре переменные τ^μ из 10 составляющих метрического тензора $g^{\mu\nu}$. Использование диадного формализма целесообразно для дальнейшего исключения «лишних» перемснных. В гл. 10 на основе диадного формализма в кинеорометрической калибровке будет обсуждена задача «исключения» еще трех переменных l^i.

Как уже отмечалось, монадный формализм свой истоком имеет метод выделения пятой координаты в 5-мерной римановой геометрии. В гл. 11 5-мерная теория рассмотрена на основе усовершенствования монадного метода, осуществляющего такое $1+4$ расщепление. Одиако в получившемся 4-мерном пространствснноврменном сечепии для описания системы отсчета и паблюдаемых необходимо произвссти еще одно расщепление $(1+3)$. Таким образом, в совокупности опять іриходим к двойному расщеплению $(1+1+3)$, т. е. діадному формализму.

Наконец, могут возникиуть задачи, в которых необходимо выделить два пространственно-подобных направления (а не одно временно-подобное и одно пространственно-подобное, как в предыдущих задачах): когда требуется задать два угла (сферические ксординаты) или гогда трсбустся описание ориентации относительно двух выделснных объектов.

28.7.4 4. General Covariant Diar Formalism

Диарный формализм основан на расщеплении 4-мерного пространственновременного многообразия в каждой точке на два 2-мерных сечения (2+2-расщепление) без выделения отдельных направлений внутри них. Математический аппарат диарного формализма, так же как и монадного или диарного, целесообразно представить в виде четырех составных частей.

А лг е бра. Метрический тензор $g_{\mu v}$ представляется в виде

$$g_{\mu v} = b_{\mu v} - \gamma_{\mu v}; g^{\mu v} = b^{\mu v} - \gamma^{\mu v}$$

где $b_{\mu v}$ - метрический тензор 2-мерногс сечения, содержащего временно-подобные направления, а $\gamma_{\mu v}$ - метрический тензор 2-мерного пространственно-подобного сечения. Метрические тензоры $b_{\mu\nu}$ и $\gamma_{\mu\nu}$ ортогональны:

$$b_{\mu v}\gamma^{\mu\alpha} = 0$$

Кроме того, имеют место соотношения:

$$b^v_\mu = b_{\mu\alpha}g^{\alpha v} = b_{\mu\alpha}b^{\alpha v}; \gamma^v_\mu = \gamma_{\mu\alpha}g^{\alpha v} = -\gamma_{\mu\alpha}\gamma^{\alpha v}.$$

Введем операторы проектирования на 2-мерные b-сечения:

$$B^{\alpha\mu\ldots\lambda}_{\beta v\ldots\sigma} \equiv b^\alpha_\beta b^\mu_v \ldots b^\lambda_\sigma$$

так что для произвольного тензора $A^{v\cdots}_\beta$ имеем:

$$A^{\mu\cdots}_\alpha \equiv B^{\mu\ldots\beta\ldots}_{v\ldots\alpha\ldots} A^v_{\beta\ldots}$$

Получившиеся тензоры $\hat{A}^{\mu}_{\alpha}...$ будем называть b-спроектированными.

Аналогично введем операторы проектирования на 2-мерные пространственноподобные γ-сечения:

$$\Gamma^{\overbrace{\alpha\mu...\lambda}^{p}}_{\underbrace{\beta\nu...\sigma}_{p}} \equiv (-1)^{p}\gamma^{\alpha}_{\beta}\gamma^{\mu}_{v}\cdot\ldots\cdot\gamma^{\lambda}_{\sigma}$$

так что для произвольного тензора $A^{v...}_{\beta}$

$$\bar{A}^{\mu...}_{\alpha...\equiv}...\Gamma^{\mu...}_{v...\alpha...A^{\nu}_{\beta}...}$$

Результирующие тензоры $\bar{A}^{\mu...}_{\alpha}$ газ.)зчм γ-спроктироваиыми. Например, квадрат пространственно-временного I! г!із діа : ожно заінсать следующим образом: $ds^2 = b_{\mu v}d\widehat{x}^{\mu}d\widehat{x}^{v} - \gamma_{\mu v}d\bar{x}\mu d\bar{x}v$.

Очевидно, возможны смешанные проьтини, тогда значок просктирования "ˆ» или «(?)» следует ставить над соответствующим индексом.

Диарные физико-г еом е три ч ескин е тензоры. Из первых производных от диарных составляющих метрнческого тензора можно построить четыре и только четыре независимых диарных физіко-геометрических тензора:

$$Q_{\widehat{\alpha}\widehat{\gamma},\bar{\beta}} = (1/2)\left(b^{\mu}_{\alpha}b^{\sigma}_{\gamma} + b^{\mu}_{\gamma}b^{\sigma}_{\alpha}\right)\gamma^{\nu}_{\beta}b_{\mu\nu;\sigma} = b^{\sigma}_{\gamma}b^{\mu}_{\alpha}B_{\mu\sigma,\varepsilon}\gamma^{\varepsilon}_{\beta};$$
$$S_{\bar{\alpha}\bar{\gamma},\bar{\beta}} = (1/2)\left(\gamma^{\mu}_{\alpha}\gamma^{\sigma}_{\gamma} + \gamma^{\mu}_{\gamma}\gamma^{\sigma}_{\alpha}\right)b^{v}_{\beta}b_{\mu\nu;\sigma} = \gamma^{\mu}_{\alpha}\gamma^{\sigma}_{\gamma}E_{\mu\sigma,c}b^{\varepsilon}_{\beta};$$

Общековарпантиый диарный форма.пззм под иазванцсм диадиого развіт в работах [111-113].

$$\Lambda_{\alpha\widehat{\gamma},\bar{\beta}} = (1/2)\left(b^{\mu}_{\alpha}b^{\sigma}_{\gamma} - b^{\mu}_{\gamma}b^{\sigma}_{\alpha}\right)\gamma^{v}_{\beta}b_{\mu v;\sigma} = b^{\mu}_{\alpha}b^{\sigma}_{\gamma}E_{\varepsilon\sigma,\mu}\gamma^{\varepsilon}_{\beta};$$
$$W_{\bar{\alpha}\bar{\gamma},\widehat{\beta}} = (1/2)\left(\gamma^{\mu}_{\alpha}\gamma^{\sigma}_{\gamma} - \gamma^{\mu}_{\gamma}\gamma^{\sigma}_{\alpha}\right)b^{v}_{\beta}b_{\mu v;\sigma} = \gamma^{\mu}_{\alpha}\gamma^{\sigma}_{\gamma}B_{\varepsilon\sigma,\mu}b^{\varepsilon}_{\beta}.$$

Здесь и в дальнейшем приняты обозначения:

$$B_{\mu\sigma,\varepsilon} = (1/2)\left(b_{\mu\varepsilon,\sigma} + b_{\sigma\varepsilon,\mu} - b_{\mu\sigma,\varepsilon}\right); B^{\lambda}_{\mu\sigma} = b^{\lambda\varepsilon}B_{\mu\sigma,\varepsilon};$$
$$E_{\mu\sigma,\varepsilon} = (1/2)\left(\gamma_{\mu\varepsilon,\sigma} + \gamma_{\sigma\varepsilon,\mu} - \gamma_{\mu\sigma,\varepsilon}\right); E^{\lambda}_{\mu\sigma} = \gamma^{\lambda\varepsilon}E_{\mu\sigma,\varepsilon}.$$

Д иа рные операторы дифф еренцировани я. Введем следующие четыре оператора дифференцирования b - и ?-спросктированных тензоров: диарную b-производную от γ-спроектированных тензоров

$$\bar{\partial}\widehat{\lambda}_{\bar{\lambda}}\bar{B}^{v}_{\beta...} \equiv \Gamma^{v\cdots\alpha\cdots}_{\mu\cdots\beta...}b^{\sigma}_{\lambda}\nabla_{\sigma}\bar{B}^{\mu...}_{\alpha\cdots},$$

ковариантную γ-производную от γ-спроектированных тензоров

$$\bar{\nabla}\bar{\lambda} - \bar{B}^{v...\equiv}_{\beta} \equiv -\Gamma^{v...\alpha\cdots}_{\mu}...\gamma^{\sigma}_{\lambda}\nabla_{\sigma}\bar{B}^{\mu...}_{\alpha...}$$

диарную γ-производную от b-спроектированных тензоров

$$\partial_{\lambda} - \widehat{B}^{v}_{\beta}... \equiv\equiv -B^{v}_{\mu}...\alpha...\gamma^{\sigma}_{\lambda}\nabla_{\sigma}\hat{B}^{\mu}_{\alpha}...$$

ковариаптную b-производную от b-спроектированных тензоров

$$\widehat{\nabla_{\lambda}}\widehat{B_{\beta}}\widehat{\beta^{v}}... \equiv B^{v...}_{\mu...\beta}...b^{\sigma}_{\lambda}\nabla_{\sigma}\widehat{B}^{\mu}_{\alpha}...$$

Здесь ∇_{σ} - оператор обычного ковариантного дифференцирования относительно символов Кристоффеля $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$, которые выражаются через введенные величины следующим образом:

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = B^{\mu}_{\alpha\beta} + E^{\mu}_{\alpha\beta} - \gamma^{\mu\varepsilon}B_{\alpha\beta,\varepsilon} - b^{\mu\varepsilon}E_{\alpha\beta,\varepsilon}.$$

Запись общековариантных уравнений и соотношений в д иа арном виде. Это можно сделать, используя введенные диарные физико-геометрические тензоры и операторы проектирования и дифференцирования.

28.7.5 5. Group Gauges of the Diar Formalism

В диарном формализме, так же как в монадном и диадном, существуют групповые калибровки, связанные с выделением характерных классов преобразований координат [114, 115]. Прямыми аналогами раnlее рассмотренных калибровок являются четыре, которые, как будет показано, встречаются парами. Будем обозначать эти калибровки парами прописных букв: В (временно-подобное направление) и П (пространственно-подобное направление); причем, когда калибровки являются аналогами хронометрической (хориометрической) калибровки будем писать при этих буквах индекс выделяемой координаты вверху, а когда они являются аналогами кинеметрической (орометрической) ка.тибровки, будем писать индекс выделясмой координаты внизу.

$\mathbf{B^2\Pi^1}$ и $\Pi_2\Pi_3$-калибровки. А лгебр а. Рассмотрим класс таких систем, в которых контравариантный метрический тензор $b^{\mu\nu}$ имеет вид (В $^0\Pi^1 - \kappa a\Omega u$ - бровка):

$$b^{\mu v} = \begin{pmatrix} b^{00} & b^{01} & 0 & 0 \\ b^{10} & b^{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } b^{ab} \neq 0; b^{\mu\xi} = 0.$$

Здесь и в дальнейшем индексы $a, b, c...$ принимают значения 0 и 1, а индексы $\xi, \eta, \varphi, \psi, \zeta - 3$ - ачения 2 и 3. Все подобные системы координат связаны такими преобразованиями, что

$$b'^{\xi\sigma} = \frac{\partial x'^{\xi}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{v}} b^{\mu v} = 0 \to \frac{\partial x'^{\xi}}{\partial x^0} = \frac{\partial x'^{\xi}}{\partial x^1} = 0$$

Это значит, что выделяются преобразования координат

$$x'^0 = x'^0\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right); x'^1 = x'^1\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$$
$$x'^2 = x'^2\left(x^2, x^3\right); x'' = x'^3\left(x^2, x^3\right).$$

В монадном формализме использовалось условие нормировки $\tau^v \tau_v = 1$. В диарном формализме потребуем выполнения соотношения

$$b^{av} b_{cv} = g^a_c$$

Тогда, вводя обозначения

$$b \equiv g_{00} g_{11} - g_{01}^2; \gamma \equiv g^{23} g^{23} - g^{22} g^{33}$$

однозначно находим все компоненты тензоров $b_{\mu v}$ и $\gamma_{\mu v}$:

$$\begin{matrix} b^{00} = g_{11}/b; \\ b^{01} = -g_{01}/b; \\ b^{11} = g_{00}/b; \end{matrix} \quad b_{\mu\beta} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & b_{\xi\eta} & \\ g_{30} & g_{31} & b_{\xi} & \end{pmatrix};$$

$$\gamma_{22} = g^{33}/\gamma; \gamma_{23} = -g^{23}/\gamma; \gamma_{33} = g^{22}/\gamma; \gamma_{a\mu} = 0$$

$$+\partial_T \widetilde{B} \underbrace{\overbrace{i...}^{n}}_{m} {}^{i...}_{k...} = \sqrt{g^{00}} \frac{\partial^{i...}_{k...}}{\partial x^0} + \frac{g^{0s}}{\sqrt{g^{00}}} \frac{\partial B^{i...}_{k...}}{\partial x^s} \underbrace{-N_{s\cdot}{}^{i} \bar{B}^{s}_{k...}{}_{...} \cdots}_{n} + \underbrace{N_{k\cdot}{}^{s} \bar{B}^{i...}_{s...} + \cdots}_{m}$$

тде

$$b_{\xi\eta} = (1/b)\left[g_{11} g_{0\xi} g_{0\eta} + g_{00} g_{1\xi} g_{1\eta} - g_{01}\left(g_{0\xi} g_{1\eta} + g_{1\xi} g_{0\eta}\right)\right]$$
$$\gamma^{ab} = (1/\gamma)\left[g^{33} g^{2a} g^{2b} + g^{22} g^{3a} g^{3} b - g^{23}\left(g^{2a} g^{3} b + g^{3} g^{2b}\right)\right]$$

Легко видеть, что формулы (7.70) и (7.71) можно было получить, исходя из $\Pi_2\Pi_3$-калибровки, т. е. рассматривая такие системы координат, в которых Коварнантный метрический тензор $\gamma_{\mu v}$ имеет вид

$$\gamma_{\mu v}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&\gamma_{22}&\gamma_{23}\\0&0&\gamma_{3}&\gamma_{33}\end{pmatrix},\ \text{т. е. } \gamma_{\xi\eta}\neq 0;\gamma_{a\mu}=0$$

При этом опять приходим к выделению преобразований координат (7.67), (7.68). Устовие (7.69) ссответствует равенству

$$\gamma^{\xi v}\gamma_{\eta v}=g^{\xi}_{\eta}$$

Іазовем $B^0\Pi^1$ - ивариантныии (В ^{0} - и.) 2-тензорами величины, которые остаются инвариантными прн преобразованиях координат (7.67) и являются 2-мерно ковариантными при преобразованиях (7.68). Аналогично, пазовем $\Pi_2\Pi_3$-инвариантными ($\Pi_2\Pi_{3-}$ и.) 2-тензорами величины, которые, наоборот, инвариантны при преобразованиях (7.68) іл 2-мерно ковариантіы при преобразованнях (7.67). Свойством В $^0\Pi^1$ - и. об.тадают иомпонеиты с піндексами $\xi,\eta...=2,3$ -спроектироваиных тензоров, т. е.

$$A^{\xi}_{\eta...}=\Gamma^{\xi...}_{\mu...\eta...}A^{\mu...}_{v...}$$

Свойством $\Pi_2\Pi_3$-и. обладают компоненты с индексами $a,b,c...=0,1b$-спроектированных тензоров, т. е.

$$\hat{A}^{a}_{b...}{}_{...}=B^{a...v}_{\mu...b...}A^{\mu}_{v...}{}_{...}$$

Существенным свойством рассматриваемой калибровки диарного формализма является одновременное наличие величин двух типов: В0 Π^1-и. и $\Pi_2\Pi_3$-и. В хронометрической и кинеметрической калибровках монадного метода фактически имела место аналогичная ситуация, однако там из величин одного типа (пользуясь их одномерностью) можно было образовать инварианты относительно выделенного класса преобразований координат (делением на $\sqrt{g_{00}}$ или $\sqrt{g^{00}}$). Аналогичные инварианты можно построить и в этой калибровке диарного формализма, однако только из тензоров четного ранга. Так, для симметричных тензоров второго ранга $B_{\mu\nu}=B_{v\mu}$ имеем инварианты:

$$\left.\begin{aligned}B_{\mu\nu}b^{\mu\nu}\equiv\widehat{B}=\tfrac{B_{00}g_{11}-2B_{01}g_{01}+B_{11}g_{00}}{g_{00}g_{11}-g^2_{01}}\\ B^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu}\equiv\bar{B}=\tfrac{B^{22}g^{33}-2B^{23}g^{23}+B^{33}g^{22}}{g^{23}g^{23}-g^{22}g^{33}}\end{aligned}\right\}$$

Для антисимметричных тензоров второго ранга $A_{\mu v}=-A_{v\mu}$, воспользовавшись соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}(g_{00}g_{11}-g_{01}g_{01})'=\left(\tfrac{\partial x^0}{\partial x'^0}\tfrac{\partial x^1}{\partial x'^1}-\tfrac{\partial x^0}{\partial x'^1}\tfrac{\partial x^1}{\partial x'^0}\right)(g_{00}g_{11}-g_{01}g_{01})\\ (g^{23}g^{23}-g^{22}g^{33})'=\left(\tfrac{\partial x'^2}{\partial x^2}\tfrac{\partial x'^3}{\partial x^3}-\tfrac{\partial x'^2}{\partial x^3}\tfrac{\partial x'^3}{\partial x^2}\right)(g^{23}g^{23}-g^{22}g^{33})\end{aligned}\right\}$$

получаем инварианты:

$$A_{01}/\sqrt{g_{01}g_{01}-g_{00}g_{11}};A^{23}/\sqrt{g^{22}g^{33}-g^{23}g^{23}}.$$

Ф изиик о-геометри ч ески е тензоры. В данной калибровке один из физико-геометрических тензоров тождественно обращается в нуль: Λ_{ab}, $\equiv$; из оставшихся трех величин можно образовать смешанные тензоры: $Q_{ab,\xi}$; $S_{\xi\eta,a}$; $W_{\xi\eta,a}$

Д иа анные о ператоры дифференци рования. Перечислим их. 1. Диарная b-производная по индексам 0,1 от γ-спроектированных $B^0\Pi^1$-и. величин записывается в виде

$$\bar{\partial}_a-\bar{B}^{\bar{\xi}...}_{\eta...}=\overline{\partial B^{\xi}_{\eta...}/\partial x^a}$$

Действие оператора (7.79) не зависит от ранга и ковариантности дифференцируемой величины. Этот оператор является прямым аналогом х. ін. оператора веменного дифференцирования в хронометрической калибровке монадного формализма.

Ковариантная γ-производная по индексам 2 и 3 от В $0\Pi^1$-и. тензоров $\bar{\nabla}_\varphi \bar{B}^\xi_\eta ... = -\gamma^\sigma_\varphi \partial \bar{B}^\xi_\eta .../\partial x^\sigma + \bar{\Delta}^\xi_{\gamma\varphi} \bar{B}^\psi_\eta ... + ... - \bar{\Delta}^\psi_{\eta\varphi} \bar{B}^\xi_\psi ..... \cdots$

приводит к В0Π ^{1}-и. выражениям. Здесь использовано обозначение $B^0\Pi^1$-и. величины

$$\bar{\Delta}^\sigma_{\dot{\psi}\varphi} = \frac{1}{2}\gamma^\xi \left(-\gamma^\sigma_\varphi \frac{\partial \gamma_\zeta \psi}{\partial x^\sigma} - \gamma^\sigma_\psi \frac{\partial \gamma_{\xi\varphi}}{\partial x^\sigma} + \gamma^\sigma_\zeta \frac{\partial \gamma_{\psi\varphi}}{\partial x^\sigma} \right).$$

Оператор (7.81) - прямой аналог х. и. оператора коварнантного дифференцирования (3.82). Заметим, что оператор дифференцирования $B^0\Pi^1$-и. тензоров

$$\bar{\partial}/\partial x^\varphi \equiv -\gamma^\sigma_\varphi \partial/\partial x^\sigma$$

также является $B^0\Pi^1$-и. и не зависит от ранга дифференцируемой величины. О: является аналогом х. и. оператора пространственного дифференцироважия (3.81).

Диарная γ-производная по индексам 2 и 3 от $\Pi_2\Pi_3$-и. величин

$$\hat{\partial}_\xi - \widehat{B}^a_b ... = -\gamma^\sigma_\xi \partial \widehat{B}^a_b .../\partial x^\sigma - \gamma^\sigma_\xi b^a_{\sigma,c} \widehat{B}^c_b ..... + \gamma^\sigma_\xi b^c_{\sigma,b} \widehat{B}^a_c ... + ...$$

по форме соответствует монадной временной производной (3.97) в кинеметрической калибровке.

Ковариантная b-производная по индексам 0 и 1 от $\Pi_2\Pi_3$-и. величин

$$\widehat{\nabla_c \widehat{A^a_b}} ... = \partial \hat{A}^a_b .../\partial x^c + B^a_{cd} \widehat{A}^d_b ... + ... - B^d_{cb} \widehat{A}^a_d ... - .$$

представляет собой 2 -мерную ковариантную производную и по форме является прямым аналогом пространственной производной в кинеметрической калибровке монадного метода (или кинеорометрической калибровке диадного формализма).

3 апись основных соотношений й ОТО. Зная выражение символов Кристоффеля через диарные величины

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = B^\mu_{\alpha\beta} + E^\mu_{\alpha\beta} - Q_{\bar{\alpha}\widehat{\beta}\mu} \bar{\beta}^\mu - S_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\mu}} \bar{\mu}^\mu + W^{\widehat{\mu}}_{\cdot,\bar{\beta},\widehat{\alpha}} + \bar{W}^\mu_{\cdot\bar{\alpha},\widehat{\beta}} + \Lambda^{\widehat{\mu}}_{\cdot\alpha,\bar{\beta}} + \widehat{\Lambda}_{\cdot\widehat{\beta},\bar{\alpha}},$$

не трудно записать соотношения ОТО и теории поля через введенные $B^0\Pi^1$-и. и $\Pi_2\Pi_3$-іг. величины и операторы.

Совокупность $(\mathbf{B}_0\Pi_1)$ - и $(\Pi^2\Pi^3)$-калибровок диарного метода. Эта совокупность представляет собой формализм, в некотором смысле обратный изложенному. Их соотношение такое же, как соотношение хронометрической и кинеметрпческой калибровок монадного формализма.

Данный вариант диарного формализма определяется условием, что ковариантный метрический тензор $b_{\mu v}$ имеет вид:

$$b_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & 0 & 0 \\ b_{10} & b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ т. е. } b_{ab} \neq 0; b_{\mu\xi} = 0.$$

В результате выделяются преобразования координат:

$$x'^0 = x'^0\left(x^0, x^1\right); x'^1 = x'^1\left(x^0, x^1\right);$$
$$x'^2 = x'^2\left(\lambda^0, x^1, x^2, x^3\right); x'^3 = x'^3\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right).$$

Все остальные элементы этого формализма строятся аналогично изложенному выше (см. [115])

28.7.6 6. Possible Physical Interpretations of the Diar Formalism

Хроногеометрия ил дигарйый формализ м. Из определения диарного формализма следует, что он может оказаться полезным в тех задачах, где две координаты необходпмо рассматривать симметрично друг другу. Именно такая сііуация пмест место в хроногсометр!н (введение координат $T = \tau$ и $R = l$ методом посылки и приема

световых сигналов). ак указывалось в 2.3, там июординаты врсмени iI расстояния вводятся симметричным образом, причем пмеющнйся в хроногеометри! произвол в задании координат T, R, x^2, x^3, обус- ловлен тремя факторами [116]: ходом часов одиночного наблюдателя (параметризацией мировой линии); выбором закона $T(s_1, s_2)$ и $R(s_1, s_2)$, где s_1 и s_2 - моменты собственного времени наблюдателя, соответствующие испусканию и приему сигнала Цразумеется, чисто формально можно определить T и R иначе, чем это сделано в формулах (2.14) и (2.15)]; выбором косрдинат на поверхностях $T = \text{const}$, $R = \text{const}$. Этот произвол соответствует преобразованиям координат: $T' = T'(T, R)$; $R' = R'(T, R)$; $x'^2 = x'^2(T, R, x^2, x^3)$; $x'^3 = x'^3(T, R, x^2, x^3)$. Видно, что эти преобразования совпадают с дкарными преобразованиями (7.87) и (7.88) в В В $_1$-калибровке.

Диарный форм ализм ко ка метод рассмотрения совокупности систем отсчета. Выясним возможный физический смысл $B_0\Pi_1$-калибровки диарного формализма с позиций диадного метода в кинеорометрической калибровке. Пусть нормальной системе отсчета с 4-скоростью (1) ? сопоставлена кинеметрическая система координат ($-\mu$ откалибрована кине- метрическим способом) и пусть в данной системе отсчета выделено кннеорометрическим образом пространственно-подобное направ.енние l^μ. Выберем вторую нормальную систему отсчета (с $\overset{(2)}{c\tau^\mu}$) так, чтобы ее 3-скорость v^μ относительной первой системы отсчета была направлена вдоль вектора (1) μ, т. е. $v^\mu = v\overset{(1)}{l^\mu}$, где v - модуль 3-скорости (рис. 15). 3-Скорость системы $\overset{(2)}{\tau}$ относительно τ находится согласно соотношению (3.116). Переход от одной кине- метрической системы отсчета к другой,

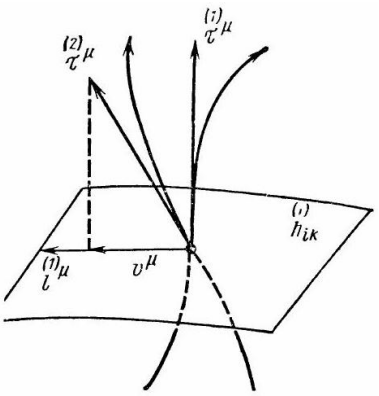


Рис. 15. Движение одной системы отсчета $\begin{pmatrix} (2) \\ \tau \end{pmatrix}$ относительно другой $\begin{pmatrix} (1) \\ \tau \end{pmatrix}$ вдоль вектора $\begin{pmatrix} (1) \\ l \end{pmatrix}$ кинеметрически откалиброванной в новой системе координат, можно описать преобразованием координат (3.131). Подставляя в (3.131) выражение $v^\mu = vl^\mu$ и учитывая, что в кинеорометрической калибровке ${}^{(1)}l_k = -g_k^1/\sqrt{+h^{\mathbf{11}}}$, находим:

$$\frac{\partial x'^0}{\partial x^k} = -\frac{\partial x'^0}{\partial x^0}\frac{vg^{00}g_k^1}{g^{01}v + V\overline{g^{00}h^{11}}}$$

т. е. $\partial x'^0/\partial x^1 \neq 0, \partial x'^0/\partial x^\xi = 0$ или $x'^0 = x'^0(x^0, x^1)$.

Таким образом, с помощью $B_0\prod_1$-калибровки диарного формализма можно еднообразно рассматривать γ-спроектированные величины, определенные в множестве кинеметрических снстем отсчета, движущихся относительно друг друга вдоль выделенного кинеорометрической калибровкой пространственно-подобного направления.

Аналогичный физический смысл может иметь диарный формализм в $B^\circ\Pi^1$-калибровке с позиций диадного метода в хронохориометрической калибровие. В этом случае следует рассмотреть две системы отсчета с соответствующими координатиьми сетками, где их векторы ${}^{(1)}\tau^\mu$ и $\overset{(2)}{\tau}{}^\mu$ откалиброваны хронометричсским способом, а направление движения второй системы отсчета относиттельно первой l^μ откалибровано хронохориометрическим способом.

Чспользуя формулы предыдущих параграфов этой главы, легко сопоставить диарные и диадные физико-геометрические тензоры:

$$\left.\begin{array}{ll} \bar{D}_{\alpha\beta} = -\tau^{\lambda} S_{\alpha\beta\lambda}; & d_{\alpha\beta} = -l^{\lambda} S_{\alpha\beta\lambda}; \\ \bar{A}_{\alpha\beta} = \tau^{\lambda} W_{\alpha\beta\lambda}; & a_{\alpha\beta} = l^{\lambda} W_{\alpha\beta\lambda}; \\ \bar{F}_{\beta} = -\tau^{\alpha}\tau^{\lambda} Q_{\alpha\lambda\beta}; & f_{\beta} = -l^{\alpha} l^{\lambda} Q_{\alpha\lambda\beta}; \\ Q_{\beta} + q_{\beta} = \tau^{\alpha} l^{\lambda} Q_{\alpha\lambda\beta}; & \Lambda_{\beta} = \tau^{\alpha} l^{\gamma} \Lambda_{\alpha\gamma\beta}. \end{array}\right\}$$

Отсюда следует возможная физическая интерпретация диарных физико-геометрических тензоров через диадные и монадные.

28.7.7 7. Tetrad Formalism

Легко видеть, что в 4-мерном многообразии задание в каждой точке трех ортогональных векторов равносильно определению всех четырех ортов. В таких случаях целесообразно использовать тетрадный формализм (метод) [117-122], который уже полностью характеризует наблюдателей в каждой точке, определяет весь ортонормированный набор пространственно-временных направлений. Основы математического аппарата тетрадного формализма, так же как математический аппарат монадного, диадного и диарного формализмов, изложим в виде четырех составных частей.

А лге бр а. Как уже отмечалось, метрический тензор представляется в виде

$$g_{\mu v} = g_{\mu}(\alpha) g_{v}(\alpha) = g_{\mu}(0) g_{v}(0) - g_{\mu}(1) g_{v}(1) - g_{\mu}(2) g_{v}(2) - \\ - g_{\mu}(3) g_{v}(3)$$

где четыре вектора тетрады $g_{\mu}(\alpha)$ ортонормированы:

$$g_{\mu}(0) g^{\mu}(\beta) = \varepsilon(\alpha\beta) = \begin{cases} +1 \text{ при } \alpha = \beta = 0; \\ -1 \text{ при } \alpha = \beta = 1,2,3; \\ 0 \text{ при } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Напомним, что монадные и диадные составляюие метрического тензора следующим образом связаны с компонентами тетрады:

$$g_{\mu}(0) = \tau_{\mu}; \quad g_{\mu}(1) = l_{\mu}; \quad h_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{3} g_{\mu}(i) g_{v}(i);$$

$$\gamma_{\mu\nu} = \sum_{\xi=2}^{3} g_{\mu}(\xi) g_{v}(\xi).$$

Очевидно, что все четыре вектора тетрады в этом формализме, равноправны. Тепері нецслесообразно вводить спсциальные обозиачения операторов проектирования на отдельные направгения, доостаточно заменять универсальные индексы номером соотьетсгвующего просктирующего вектора в скобках, напримеп; $B^{\mu} g_{\mu}(\alpha) \equiv B(\alpha)$; $B_{v}^{\mu\cdots g_{\mu}(\alpha)\ \cdots} g^{v}(\sigma). \ . \ . = B(\alpha. \ . \ . \ \sigma. \ . \ . \ )$. В наиболее распространенном варианте тетрадного формализма используются смешанные величины, т. е. тензоры, лишь частично спроектированные, например $B_{v}^{\mu\cdot\cdot}(\alpha..)$., - сматриваемом формализме величины имеют индексы двух типов: универсалыные (ковариантные и контравариантные) и локальные (в скобках). В этом состоит суиественное отличие излагаемого тетрадного формализма от уже обсуждавшихся монадного, диадНого и диарного, где используются пиь полностью спроектированные (на τ и h или на τ, l, и т. д.) тензоры. Можно сказать, что этот формализм имеет промежуточный (или смешанный) характер. В последовательном тетрадном формализме должны были присутствовать лишь проекции тензориых величин по всем индексам, т. е. скаляры. Примером такого пос.тедовательного тетрадного формализма является кратко нзложенный в $7.10 формализм изо. тропных тетрад Ньюмена - Пенроуза. Отметим, что сами компоненты тетрады можно понимать как метрическй тензор с универсальным и локальным индексамы:

$$g_\mu(\alpha) = g_{\mu v} g^v(\alpha); g^\mu(\alpha) = g^{\mu v} g_v(\alpha)$$

В каждой точке пространства-времени с помощью соответствуюнего поворота можно перейти к новой тетраде:

$$g_\mu(\alpha)' = \omega(\alpha\beta) g_\mu(\beta)$$

-где () $(\alpha\beta)$ - коэффициенты инейиы преобразованй Компонент тетрады. Очевидно, что при таком преобразовании изменятся значения проекций тензоров на компоненты тетрад, т. е. величины с.покапьными индексами преобразуются по занону

$$B^{\mu\cdots}_{v\ldots(\alpha,\beta\ldots}\Big)' = \omega(\alpha\gamma)\omega(\beta\lambda)\cdot .B^{\mu\cdots(\gamma\lambda}_{v}\ldots\Big)$$

Таким образом, в тетрадном форма.тзме определены две группы преобразований [119]: группа универсальньх допустимьх преобразований координат ОТО $x'^\mu = x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$ (относительне Этих преобразований скалярамй являются веЛичины только с локальными индексами); группа локальных ортогональных преобразований - поворотов тетрады (7.33) (отиосительно этих преобразованй инвариантны тензоры тольи эйверсальными индексами.

Тетрадные физино-геометрические тензоры.

Тетрады в двух близких точках могут быт сриентированы относительно друг іруга Произвольно. Ограпитимся случаями, когда 3 близких точках орнентаии вепторов б.Тизй, т. е. $g_\mu(\alpha)$ являются пифференцируемымн ункциями. Тогда пі3 первых производных $g_\mu(\alpha)$ можно образовать четыре тензора

$$C_{v\mu}(\alpha) == -C_{\mu v}(\alpha) = (1/2)\left(\partial g_\mu(\alpha)/\partial x^v - \partial g_v(\alpha)/\partial x^\mu\right)$$

обычно назызаемых объектали него.ионолности. Всевэзможным образом проектіруя их на векторы тетрады, можно образовать 24 величины (скаляра относительно группы универсальных допустимых координатных преобразований):

$$C(\lambda\sigma, \alpha) = C_{v\mu}(\alpha) g^v(\lambda) g^\mu(\sigma)$$

соответствующие ранее вводимым физико-геометрическим тензорам.

Термин «объект неголономности» связан со следующим обстоятельством. Дифференциалам координат dx^μ можно сопоставить смещения $dx(\alpha)$ в касательном в данной точке плоском пространстве $dx(\alpha) = g_\mu(\alpha) dx^\mu$. В случае отличных от нуля объектов неголономности компоненты тетрады не являются компонентами градиента $(g_\mu(\alpha) \neq \partial X(\alpha)/\partial x^\mu)$, а следовательно, величины $dx(\alpha)$ не являются полными дифференциалами в отличие от выражения $dx'^\mu = (\partial x'^\mu/\partial x^v)\, dx^v$, которое можно проинтегрировать. В последнем случае преобразование $x'^\mu = x'^\mu(x^v)$ называют голономным.

Некоторые компоненты объектов неголономности ранее уже, использовались при получении монадных и диадных физико-геометрических тензоров: $C_{v\mu}(0) \to \{F_\mu; A_{\mu\nu}\}$; $C_{v\mu}(1) \to \{f_\mu, a_{\mu\nu}\}$.

Ди ифф е ренци альный апп ар ат. В связи с «промежуточным» характером рассматриваемого формализма в нем можно ввести следующие типы операторов дифференцирования.

а. Производные Ли от тензорных величин вдоль векторов тетрады

$$\partial(\alpha) B^{\mu\cdots}_{v\ldots}(\beta\ldots) \equiv \underset{g_\sigma(\alpha)}{\Re} B^{\mu\cdots}_{v}(\beta, .) = .g^\sigma(\alpha)\partial B^{\mu\cdots}_{v}{}_\ldots(\beta\ldots)/\partial x^\sigma -$$
$$-B^{\sigma\cdots}_{v\ldots(}.\quad ..\big)\,\partial g^\mu(\alpha)/\partial x^\sigma - ..+$$
$$+ B^{\mu}_{\sigma\ldots}\ldots(\beta\ldots)\partial g^\sigma(\alpha)/\partial x^v + ..$$

В последовательном тетрадном формализме эти операторы существенно упрощаются: $\partial(\alpha) = g^\sigma(\alpha)\partial/\partial x^\sigma$.

б. Ковариантные производные от тензоров с локальными индексами. Сначала определим операцию параллельного переноса вектора $B(\alpha)$. Как обычно, полагая, что в близких точках разность компонент линейно выражается через компоненты переносимой величины и разность координат, имеем:

$$B(\alpha|x+dx) = [\delta(\alpha\beta) + \Delta_\sigma(\alpha\beta)dx^\sigma]\, B(\beta|x)$$

где $\Delta_\sigma(\alpha\beta)$-коэффициенть вращения Риии, которье игра:от роль символов Кристоффеля.

Чтобы вытснить свойства $\Delta_\sigma(\alpha\beta)$, учтем, что в римановой геометрии при параллельном переносе длина вектора $B_\mu B^\mu = B(\alpha)B(\alpha)$ остается неизменной, т. е.

$$B(\alpha|x+dx)B(\alpha|x+dx) = B(\alpha|x)B(\alpha|x) \approx B(\alpha|x)B(\alpha|x)+$$
$$+B(\beta|x)B(\gamma|x)\,[\Delta_\sigma(\gamma\beta) + \Delta_\sigma(\beta\gamma)]\,dx^\sigma.$$

'Отсю.та следует антисимметрия коэффициентов вращения Риччи: $\therefore\ \Delta_\sigma(\gamma\beta) = -\Delta_\sigma(\beta\gamma)$. Ковариантная пронзводная от вектора с локальным индексом определяется как разность частной производной и изменения вектора, вызванного различием векторов тетрады в соседних точках, т. е.

$$\nabla_\sigma B(\alpha) = \partial B(\alpha)/\partial x^\sigma - \Delta_\sigma(\alpha\beta)B(\beta)$$

Для произвольного тензора с универсальными и локальными индексами оператор ковариантного дифференцирования имеет вид:

$$\nabla_\sigma B^{\mu\cdots}_{v\ldots(\alpha\ldots)}\Big) = \partial B^{\mu\cdots}_{v\ldots}(\alpha\ldots)/\partial x^\sigma +$$
$$+\Gamma^v_{\lambda\sigma}B^{\lambda\cdots}_{v\ldots(\alpha}..\Big) + \ldots - \Gamma^\lambda_{\sigma v}B^{\mu\cdots}_{\lambda\ldots}\ldots(\alpha..).\Big) -$$
$$-\ldots - \Delta_\sigma(\alpha\beta)B^{\mu\cdots}_{v\ldots}\ldots(\beta..) - .)\,..$$

Установим связь между символами Кристоффеля и коэффици-ентами вращения Риччи. Положив $\nabla_\sigma g_\mu(\alpha) = 0$, найдем:

$$\partial g_\mu(\alpha)/\partial x^v - \Gamma^\lambda_{\mu v}g_\lambda(\alpha) - \Delta_v(\alpha\beta)g_\mu(\beta) = 0$$

' Отсюда имеем искомые формулы:

$$\left.\begin{array}{l}\Gamma^\lambda_{\mu v} = g^\lambda(\alpha)\partial g_\mu(\alpha)/\partial x^v - \Delta_v(\alpha\beta)g_\mu(\beta)g^\lambda(\alpha);\\ \Delta_v(\alpha\beta) = g^\mu(\beta)\partial g_\mu(\alpha)/\partial x^v - \Gamma^\lambda_{\mu v}g_{\lambda_\nu}(\alpha)g^\mu(\beta).\end{array}\right\}$$

Введем обозначения:

$$\Delta_{\alpha,\beta\gamma} \equiv \Delta_\alpha(\mu v)g_\beta(\mu)g_\gamma(v); \quad \Delta(\lambda,\mu v) \equiv \Delta_\alpha(\mu v)g^\alpha(\lambda)$$

Из формул (7.100) можно выразіть обтскты неголономности через $\Delta_\lambda(\mu v)$ и обратно:

$$C_{v\mu}(\alpha) = (1/2)g^\sigma(\alpha)\,(\Delta_{v,\sigma\mu} - \Delta_{\mu,\sigma v})$$
$$\Delta_{\mu,\alpha v} = g_v(\beta)C_{\alpha\mu}(\beta) + g_\alpha(\beta)C_{\mu v}(\beta) - g_\mu(\beta)C_{v\alpha}(\beta).$$

Из (7.102) и (7.95) следует явное выражение $\Delta_{\mu,\alpha v}$ чсрез производные от компонент тетрады:

$$\Delta_{\mu,\alpha v} = \frac{1}{2}\left[g_v(\beta)\left(\frac{\partial g_\mu(\beta)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_\alpha(\beta)}{\partial x^\mu}\right) + g_\alpha(\beta)\left(\frac{\partial g_v(\beta)}{\partial x^\mu} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\partial g_\mu(\beta)}{\partial x^v}\right) + g_\mu(\beta)\left(\frac{\partial g_v(\beta)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_\alpha(\beta)}{\partial x^v}\right)\right].$$

3 апись основн х соотно снй ОТО. Тензор Римана-Кристоффеля легко выразастся через коэффициенты вращения Риччи или непосредственно с іомонью формул (7.100), или независімо посредством паралпсльного переноса веитора $B(\alpha)$ по замкнутому контуру. В последнем случае

$$\Delta B(\alpha) = (1/2)R_{\sigma\nu}(\alpha\beta)B(\beta)ds^{\sigma,},$$

тде тензор Рмала - Кристоффеля имеет вид:

$$R_{ov}(\alpha\beta) = \partial\Delta_v(\alpha\beta)/\partial x^\sigma - \partial\Delta_\sigma(\alpha\beta)/\partial x^v + \\ + \Delta_v(\alpha\gamma)\Delta_\sigma(\gamma\beta) - \Delta_\sigma(\alpha\gamma)\Delta_v(\gamma\beta).$$

Отсюда, например, для скалярной кривизны находим:

$$R = R_{\sigma v}(\alpha\beta)g^\sigma(\alpha)g^v(\beta) = 2g^v(\beta)g^\sigma(\alpha)\partial\Delta_v(\alpha\beta)/\partial x^\sigma + \\ +\Delta(\beta\alpha\gamma)\Delta(\alpha\gamma\beta) + \Delta(\beta\gamma\beta)\Delta(\beta\gamma\beta).$$

Уравнения Эйнштейна в тетрадной форме записываются следующим образом:
$R_v(\alpha) - (1/2)g_v(\alpha)R = xT_v(\alpha)$ или $R(\alpha\beta) - (1/2)\varepsilon(\alpha\beta)R = xT(\alpha\beta)$.

Другие соотношения и тождества также легко переписать в тетрадной форме. Это относится и к уравнениям для тензорных полей. Особое значение тетрадная формулировка ОТО имеет для записи уравнений Дирака в искривленном пространстве-времени (см. §7.9)

28.7.8 8. Gauges of the Tetrad Formalism

Исходя из известных значений метрического тензора, можно распространить групповые калибровки монадного и диадного методов на тетрадный формализм. Однако предварительно подсчитаем, сколько должно быть при этом независимых калибровочных условий, т. е. соотношений, связывающих компоненты $g_\mu(\alpha)$ с $g_{\mu v}$ [120, 121]: компонент $g_{\mu v}10$, а компонент $g_\mu(\alpha)16$. Поэтому в общем случае необходимо шесть независимых калибровочных условйй. Аналогично было в монадном, диадном и диарном формализмах. Действительно, в монадном формализме 14 переменных: четыре компоненты τ_μ и 10 компонент $h_{\mu\nu}$; но компоненты τ_μ связаны одним условием нормировки $\tau_\mu\tau_v g^{\mu v} = 1$. Итого, на 13 величин налагалось три калибровочных условия: $\tau^\mu = g_0^\mu/\sqrt{g_{00}}$, или $\tau_\mu = g_\mu^0/\sqrt{g^{00}}$. В диадном формализме 18 переменных: четыре компоненты τ_μ, четыре компоненты l_μ и 10 компонент $\gamma_{\mu v}$. Однако на эти величины наложено два условия нормировки $(\tau_\mu\tau_v g^{\mu\nu} = 1, \quad l_\mu l_v g^{\mu v} = -1)$ и одно условие ортогональности $\tau_\mu l_\nu g^{\mu\nu} = 0$. Итого остается 15 величин, на которые налагается пять независимых калибровочных условий: $\tau_\mu = \tau_\mu(g_{\mu\nu}); l_\mu = l_\mu(g_{\mu\nu})$. В тетрадном формализме к этим условиям добавится еще одно.

Аналогично хронометрической калибровке монады или хронохориометрической калибровке диады можно ввести полную хронохориопетрическую калибровку тетрадь:

$$\left.\begin{array}{c} g^\mu(0) = \tau^\mu = g_0^\mu/\sqrt{g_{00}}; g^\mu(1) = l^\mu = *h_1^\mu/V^{*h_{11}}; \\ g^\mu(2) = \xi^\mu = \gamma_2^{**}/\sqrt{*_{22}^*} \end{array}\right\}$$

нат:

$$x'^0 = x'^0\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right); \quad x'^1 = x'^1\left(x^1, x^2, x^3\right); \\ x'^2 = x'^2\left(x^2, x^3\right); \quad x'^3 = x'^3\left(x^3\right).$$

Величины, спроектированные по всем индексам на векторы откалиброванной таким образом тетрады, инвариантны относительно этих преобразований координат. С помощью преобразований координат, выходящих за пределы указанного класса, можно описывать переход к иной ориентации тетрады при сохранении для нее полной хронохориометрической калибровки.

Подобным образом вводится полная кинеорометрическая калибровка тетрады:

$$g_\mu(0) = \tau_\mu = g_\mu^0/\sqrt{g^{00}}; \quad g_\mu(1) = l_\mu = {}^+h_\mu^1/\sqrt{h^{+11}}; \\ g_\mu(2) = {}^{++}\gamma_\mu^2/\sqrt{\gamma^{22}}.$$

Эта калибровка выделяет класс преобразований координат

$$x'^0 = x'^0\left(x^0\right); \quad x'^1 = x'^1\left(x^0, x^1\right); \\ x'^2 = x'^2\left(x^0, x^1, x^2\right); \quad x'^3 = x'^3\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right).$$

В таком формализме инвариантами относительно этих преобразований являются проекции тензорных величин по всем индексам на направления откалиброванной указанным способом тетрады.

Рассмотренные здесь калибровки естественно назвать однородными. Заметим, что до сих пор всегда на первом этапе выделяли временную координату x^0. Однако, как это уже отмечалось, можно построить откалиброванные формализмы с выделением на первом этапе пространственной координаты. Для таких калибровок (формализмов) можно использовать унифицированные обозначения. Буква T перед скобкой указывает упорядочение калибровок; в скобках обозначено B^0 - хронометрическая калибровка, B_0 - кинеметрическая калибровка, Π^i - хориометрическая калибровка, соответствуюшая координате x^i, Π_i - орометрическая калибровка, соответствующая координате x^i. Тогда, например, полная хронохориометрическая калибровка тетрады (7.106) будет обозначаться $\mathrm{T}\left(\mathrm{B}^0, \Pi^1, \Pi^2, \Pi^3\right)$, а полная кинеорометрическая калибровка тетрады (7.108) – $\mathrm{T}\left(\mathrm{B}_0, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3\right)$.

Если не различать упорядоченностей среди пространственных направлений, то легко показать, что имеются четыре различныеоднородные тетрадные калибровки, так как из восьми тождественны следующие калибровки: $T\left(\Pi^1, \Pi^2, \Pi^3,\ \mathrm{B}^0\right) = T\left(\ \mathrm{B}_0, \Pi_3, \Pi_2, \Pi_1\right)$; $\mathrm{T}\left(\Pi^1, \Pi^2,\ \mathrm{B}^0, \Pi^3\right) = \mathrm{T}\left(\Pi_3,\ \mathrm{B}_0, \Pi_2, \Pi_1\right)$; $\mathrm{T}\left(\Pi^1,\ \mathrm{B}^0, \Pi^2, \Pi^3\right) = \mathrm{T}\left(\Pi_3, \Pi_2,\right.$ $\left.\mathrm{B}_0, I_1\right)$; $\mathrm{T}\left(\mathrm{B}^0, \Pi^1, \Pi^2, \Pi^3\right) = \mathrm{T}\left(\Pi_3, \Pi_2, \Pi_1,\ \mathrm{B}_0\right)$. Аналогично можно рассмотреть смещанные калибровки тетрад, т. е. такие, когда одновременно присутствуют и хроно- (хорио-) и кине- (оро-) метрические калибровки [103]. Различных тетрадных калибровок значительно меньше, чем этого можно было ожидать при формальном построении комбинаций из введенных символов. Это можно усмотреть уже на уровне диадных калибровок, где. имеем три пары тождественных формализмов: $\mathrm{T}\left(\mathrm{B}^0, \Pi_1\right) = \mathrm{T}\left(\Pi_1,\right.$ $\left.\mathrm{B}^0\right)$; $\mathrm{T}\left(\Pi^1,\ \mathrm{B}_0\right) = \mathrm{T}\left(\mathrm{B}_0, \Pi^1\right)$; $\mathrm{T}\left(\Pi^1, \Pi_2\right) = \mathrm{T}\left(\Pi_2, \Pi^1\right)$.

Заметим, что рассмотренные в 3.9 калибровки Ламе компонент 3-мерного метрического тензора h_{ik} относятся к рассматриваемым здесь полным хорио- и орометрическим калибровкам. Для диагональных метрик (как в гл. 3) эти калибровки совпадают. Кроме рассмотренных здесь алгебраических калибровок, в ряде работ применялись другие алгебраические калибровки [117, 121] и калибровки в виде дифференциальных соотношений. Например, в [119, 122] широко использована калибровка

$$\nabla'_\sigma g^\sigma(\alpha) \equiv \partial g^\sigma(\alpha)/\partial x^\sigma + \Gamma^\sigma_{\sigma\lambda} g^\lambda(\alpha) = 0$$

напоминающая условия Лоренца в электродинамике. Условия (7.110) можно записать в виде $C^\sigma_{\sigma\mu} = C_{\sigma\mu}(\alpha) g^\sigma(\alpha) = 0$. В этой калибровке формально упрощаются некоторые соотношения в тетрадной формулировке ОТО.

28.7.9 9. Dirac Equations in Curved Spacetime

Важным приложением тетрадного формализма является его использование для описания спинорных частиц в искривленном пространстве-времени. Известно, что понятие спинора имеет смысл только в плоском пространстве-времени, где определена группа преобразований Лоренца. Однако, как уже отмечалось, в тетрадной формулировке ОТО в каждой точке пространства-времени определено касательное плоское пространство-время с группой вращений. т. е. локально понятие спинора имеет смысл. При переходе от одной точки к другой меняется ориентация векторов тетрады, поэтому следует ожидать изменения компонент спиноров.

Рассмотрим соотношение компонент спиноров в близких точках, следуя работам [14, с. 415; 123]. Из общих соображений следует ожидать, что

$$\left.\begin{aligned} \Psi(x+dx) &= \Psi(x) + \Gamma_\lambda \Psi(x) dx^\lambda; \\ \bar\Psi(x+dx) &= \bar\Psi(x) + \bar\Psi(x) \widetilde\Gamma_\lambda dx^\lambda \end{aligned}\right\}$$

тде Γ_λ и $\widetilde\Gamma_\lambda$ - квадратные 4-рядные матрицы. Установім связь между ними. Мспользуя соотношения: $\bar\Psi = \Psi^+\gamma(0)$; $\gamma(0)1(0) = I$. находим:

$$\bar\Psi(x)\widetilde{\Gamma_\lambda} = \left(\Gamma_\lambda \Psi(x)\right)^+ \gamma(0) = \Psi^+(x)\Gamma^+_\lambda \gamma(0) = \bar\Psi(x)\gamma(0)\Gamma^+_\lambda\gamma(0)$$

Т. е.

$$\widetilde{\Gamma}_\lambda = \gamma(0)\Gamma_\lambda^+\gamma(0)$$

Чтобы найти явный вид матриц Γ_λ, воспользуемся тем, что из величин Ψ и $\bar{\Psi}$ можно построить вектор

$$B(\alpha) = \bar{\Psi}\gamma(\alpha)\Psi$$

а для произвольного вектора с локальным индексом известен закон параллельного переноса (7.98). Подставляя (7.113) в (7.98) и учитывая (7.111), получаем в первом приближении

$$\begin{gathered}(\bar{\Psi}\gamma(\alpha)\Psi)_{x+dx} = (\bar{\Psi}\gamma(\alpha)\Psi)_x + \Delta_\sigma(\alpha\beta)dx^\sigma(\bar{\Psi}\gamma(\beta)\Psi)_x = \\ = \bar{\Psi}(x+dx)\gamma(\alpha)\Psi(x+dx) = \bar{\Psi}(x)\gamma(\alpha)\Psi(x) + \\ +\bar{\Psi}(x)\gamma(\alpha)\Gamma_\mu\Psi(x)dx^\mu + \bar{\Psi}(x)\gamma(0)\Gamma_\lambda^+\gamma(0)\gamma(\alpha)\Psi(x)dx^\lambda.\end{gathered}$$

Отсюда находим уравнение для матриц Γ_λ:

$$\Delta_\sigma(\alpha\beta)\gamma(\beta) = \gamma(\alpha)\Gamma_\sigma + \gamma(0)\Gamma_\sigma + \gamma(0)\Gamma_\sigma^+\gamma(0)\gamma(\alpha).$$

Естественно решать это уравнение в виде выражений, составленных из $\Delta_\sigma(\alpha\beta)$ и матриц $\gamma(\mu)$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что простейшее решение имеет вид:

$$\left.\begin{array}{l}\Gamma_\sigma = \mathrm{i}A_\sigma + (1/4)\Delta_\sigma(\mu v)\gamma(\mu)\gamma(v); \\ \Gamma_\sigma^+ = -\mathrm{i}A_\sigma + (1/4)\Delta_\sigma(\mu v)\gamma^+(v)\gamma^+(\mu),\end{array}\right\}$$

где A_σ - произвольный вектор.
Из (7.111) и (7.115) получаем выражение для ковариантной производной от спинора

$$\left.\begin{array}{l}\nabla_\mu\Psi = \partial\Psi/\partial x^\mu - (1/4)\Delta_\mu(\alpha\beta)\gamma(\alpha)\gamma(\beta)\Psi - \mathrm{i}A_\mu\Psi; \\ \nabla_\mu\bar{\Psi} = \partial\bar{\Psi}/\partial x^\mu - (1/4)\Delta_\mu(\alpha\beta)\bar{\Psi}\gamma(\beta)\gamma(\alpha) + \mathrm{i}A_\mu\bar{\Psi}.\end{array}\right\}$$

Вводя обозначение $\partial/\partial x(\lambda) \equiv g^\mu(\lambda)\partial/\partial x^\mu$ и вспоминая, что переход к искривленному пространству-времени осуществляется заменой частных производных ковариантными, находим уравнения Дирака в искривленном пространстве-времени:

$$\begin{gathered}[-\mathrm{i}\gamma(\lambda)\partial/\partial x(\lambda) - A(\lambda)\gamma(\lambda) + \\ +(i/4)\Delta(\lambda\alpha\beta)\gamma(\lambda)\gamma(\alpha)\gamma(\beta) + mc/\hbar]\Psi = 0.\end{gathered}$$

Любопытно, что в выражениях (7.115) – (7.117) можно ввести в ковариантную производную вектор A_μ, который входит точно так же, как векторный электромагнитный потенциал при учете взаимодействия спинорного и электромагнитного полей.

Уравнения (7.117) можно переписать с криволинейными универсальными индексами, вводя обозначение $\gamma^\mu = \gamma(\lambda)g^\mu(\lambda)$, где $g^\mu(\lambda)$ теперь определяют переход от криволинейной системы 152 жоординат к такой локальной декартовой, в которой матрицы $\gamma(\lambda)$ имеют обычный вид. В результате получаем *:

$$[-\mathrm{i}\gamma^\mu\partial/\partial x^\mu - A_\mu\gamma^\mu + (\mathrm{i}/4)\Delta_{\mu\nu\sigma}\gamma^\mu\gamma^v\gamma^\sigma + mc/\hbar]\,\Psi = 0. \quad (7.117\mathrm{a})$$

Этот вид уравнений Дирака в искривленном пространстве-времени можно получить и при подходе Зоммерфельда-Мицкевича, когда Ψ рассматривается как набор из четырех скаляров. Тогда следует перейти к так называемой γ-матричной формулировке ОТО [124-126]. В качестве основных переменных в такой формулировке выбирают элементы γ-матриц, связанные с метрическим тензором соотношением

$$\gamma_\mu(x)\gamma_v(x) + \gamma_v(x)\gamma_\mu(x) = 2g_{\mu v}(x)I$$

Величины $\gamma_\mu(x)$ являются векторами, зависящими от координат. Ковариантную производную от них находим обычным образом:

$$\nabla_v \gamma_\mu = \partial\gamma_\mu/\partial x^v - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\gamma_\lambda$$

Н. В. Мицкевич показал [8, 126], что в этом подходе уравнения Дирака в плоском пространстве-времени следует записывать в виде

$$\left\{-\mathrm{i}\gamma(\mu)\frac{\partial}{\partial x(\mu)} + \frac{\mathrm{i}}{8}[\ \gamma(\lambda)\frac{\partial\gamma(x)}{\partial x(\lambda)}\gamma(x) - \gamma(x)\frac{\partial\gamma(x)}{\partial x(\lambda)}\gamma(\lambda)\right] + \\ + \frac{mc}{\hbar}\Big\}\,\Psi = 0.$$

Так как в декартовых координатах матрицы $\gamma(\hat{\lambda})$ не зависят от координат, дополнительный член в квадратных скобках в плоском пространстве-времени пропадает. В искривленном. многообразии, как уже отмечалось, следует заменить частные производные ковариантными. В результате получим уравнения (7.117а).

28.7.10 10. Newman–Penrose Isotropic Tetrad Formalism and its Relation to the Dyad Method

В большой серии работ по анализу алгебраической классификации Петрова пространств Эйнштейна и нахождению новых точных решений уравнений Эйнштейна оказался чрезвычайно зффективным формализм (метод) изотропных тетрад Ньюмена-Пенроуза [91, 127]. В отличие от всех ранее изложенных формализмов этот метод пацелен пе на описание наблюдаемых и свойств систем.отсчета, а на анализ именно алгебраической структуры пространственно-временных многообразий и получение точных решений уравнений Эйнштейна. Эффективность мстода объясняется тем, что тензор Римана-Кристоффеля (Вейля) обладает изотропными собственными векторами, в качестве которых можно выбрать векторы тетрады Ньюмена-Пенроуза. Таким образом, этот формализм можно органически связать со структурой пространства-времени.

Важно отметить, что в формализме Ньюмена-Пенроуза используются комплексные величины. Из четырех векторов тетрады Ньюмена-Пенроуза два являются действительными; им можно сопоставить временно-подобный вектор τ^μ и пространственно-подобный вектор l^μ, которые выделяют привилегирован- ную систему отсчета и пространственное направление диады. Именно по этой причнне в данном параграфе метод Ньюмена - Пенроуза сопоставлен диадному методу. Представим рассматриваемый формализм, как и предыдущие, в виде четырех составных частей.

Алгебра. Изотропная тетрада $\{b_\mu, n_\mu, m_\mu, \bar{m}_\mu\}$ состоит из двух дйствительных векторов b_μ и n_μ и двух комплексно-сопряженных, которые можно построить из двух единичных пространственно-подобных векторов a_μ и γ_μ:

$$m_\mu = (1/\sqrt{2})\,(a_\mu - \mathrm{i}\gamma_\mu)\,;\bar{m}_\mu = (1/\sqrt{2})\,(a_\mu + \mathrm{i}\gamma_\mu)$$

Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ можно записать через тетраду Ньюмена-Фенроуза

$$g_{\mu v} = b_\mu n_v + n_\mu b_v - m_\mu\bar{m}_v - m_v\bar{m}_\mu$$

Векторы тетрады удовлетворяют следующим условиям квазиортогональнати:

$$\left.\begin{array}{l} b_\mu b^\mu = n_\mu n^\mu = m_\mu m^\mu = \bar{m}_\mu\bar{m}^\mu = 0; b_\mu n^\mu = -m_\mu\bar{m}^\mu = 1 \\ b_\mu m^\mu = b_\mu\bar{m}^\mu = n_\mu m^\mu = n_\mu m^\mu = 0 \end{array}\right\}$$

Легко видеть, что диадные составляющие метрического тензора можно связать с тетрадой Ньюмена-Пенроуза

$$\left.\begin{array}{l} \tau_\mu = (1/\sqrt{2})\,(b_\mu + n_\mu)\,; l_\mu = (1/\sqrt{2})\,(b_\mu - n_\mu) \\ \gamma_{\mu v} = m_\mu\bar{m}_v + \bar{m}_\mu m_v \end{array}\right\}$$

В формализме Ньюмена-Пенроуза, как последовательном тетрадном формализме, оперируют со скалярами, полученными из тензоров проектированием на направления изотропных тетрад. Такие проекции тензора Римана-Кристоффеля и тензора Максвелла образуют набор скаляров Ньюмена-Пенроуза. Выпишем их.

Тензор Максвелла можно представить в виде трех независимых комплексных скаляров:

$$\left.\begin{array}{l}\phi_0 = F_{\mu v} b^{\mu} m^{v}; \phi_2 = -F_{\mu v} n^{\mu} \bar{m}^{v} \\ \phi_1 = (1/2) F_{\mu v} \left(b^{\mu} n^{v} - m^{\mu} \bar{m}^{v}\right)\end{array}\right\}$$

При помони формулы

$$R_{\mu v \alpha \beta} = C_{\mu v \alpha \beta} + \Phi_{\mu \alpha} g_{v \beta} - \Phi_{\mu \beta} g_{v \alpha} + \Phi_{v \beta} g_{\alpha \mu} - \Phi_{v \alpha} g_{\mu \beta} + \\ + 2\Lambda \left(g_{\mu \beta} g_{v \alpha} - g_{\mu \alpha} g_{v \beta}\right)$$

тензор Римана-Кристоффеля можно выразить через скалярную кривизну $R \equiv -24\Lambda$, тензор Вейля $C_{\mu v \alpha}$ и девиатор тензора Риччи $2\Phi_{\mu \nu} = R_{\mu v} - (1/4) g_{\mu v} R$. Последним тензором сопоставлеиы пять комплексных скарОВ:

$$\left.\begin{array}{l}\Psi_0 = -C_{\mu v \alpha \beta} b^{\mu} {}_{m}{}^{v} b^{\alpha} m^{\beta}; \Psi_1 = -C_{\mu v \alpha \beta} b^{\mu} n^{v} b^{\alpha} m^{\beta}; \\ \Psi_2 = -(1/2) C_{\mu v \alpha \beta} \left(b^{\mu} n^{v} b^{\alpha} n^{\beta} - b^{\mu} n^{v} m^{\alpha} \bar{m}^{\beta}\right); \\ \Psi_3 = -C_{\mu v \alpha \beta} n^{\mu} b^{v} n^{\alpha} \bar{m}^{\beta}; \Psi_4 = -C_{\mu v \alpha \beta} n^{\mu} \bar{m} n^{\alpha} m^{\beta},\end{array}\right\}$$

три действительных и три комплексных скаляра:

$$\left.\begin{array}{l}\Phi_{00} = \Phi_{\mu v} b^{\mu} b^{v}; \Phi_{01} = \Phi_{\mu v} b^{\mu}{}_{m}; \Phi_{02} = \Phi_{\mu v} m^{\mu} m^{v} \\ \Phi_{10} = \Phi_{\mu v} b^{\mu -} \bar{m}^{v}; \Phi_{11} = \Phi_{\mu v} b^{\mu} n^{v}; \Phi_{12} = \Phi_{\mu v} n^{\mu} m^{v} \\ \Phi_{20} = \Phi_{\mu v} \bar{m} \bar{m}^{v}; \Phi_{21} = \Phi_{\mu v} n^{\mu} \bar{m}; \Phi_{22} = \Phi_{\mu v} n^{\mu} n^{v}\end{array}\right\}$$

Спиновы е ко оффици ен ты Ньюм е н а-П е н р о у з а (физико-геометрические скаляры). Они соответствуют основным физико-геометрическим тензорам в предыдущих формализмах и определяются как независимые проек- ции ковариантных производных векторов тетрады (коэффициентов вращения Риччи) на направления изотропных тетрад:

$$\begin{array}{ll}x = b_{\mu;v} m^{\mu} b^{v;} & \pi = -n_{\mu;v} \bar{m}^{\mu} b^{v}; \\ \tau = b_{\mu;v} m^{\mu} n^{v;} & v = -n_{\mu;v} \bar{m}^{\mu} n^{v} \\ \sigma = b_{\mu;v} m^{\mu} m^{v}; & \mu = -n_{\mu;v} \bar{m}^{\mu v}; \\ \rho = b_{\mu:v} m^{\mu} \bar{m}^{v}; & \lambda = -n_{\mu;v} \bar{m}_{m}; \\ \varepsilon = (1/2) \left(b_{\mu;v} n^{\mu} b^{v} - m_{\mu;v^{m}} b^{v}\right) & \\ \gamma = (1/2) \left(b_{\mu;v} n^{\mu} n^{v} - m_{\mu;v} \bar{m}^{\mu} n^{v}\right) & \\ \beta = (1/2) \left(b_{\mu;v} n^{\mu} m^{v} - m_{\mu;v} \bar{m} m^{v}\right) & \\ \alpha = (1/2) \left(b_{\mu;v} n^{\mu} \bar{m}^{v} - m_{\mu;v} \bar{m}^{\mu} \bar{m}^{v}\right) &\end{array}$$

Всего существует 12 комплексных спиновых коэффициентов Ньюмена-Пенроуза.

Диадные физико-геометрические тензоры легко записать через спиновые коэффициенты Ньюмена-Пенроуза, например:

$$\left.\begin{array}{l}\bar{F}_{\beta} = -(1/2) \left[(x + \tau - \bar{\pi} - \bar{v}) \bar{m}_{\beta} + (\bar{x} + \bar{\tau} - \pi - v) m_{\beta}\right] \\ f_{\beta} = -(1/2) \left[(x - \tau + \bar{\pi} - \bar{v}) \bar{m}_{\beta} + (\bar{x} - \bar{\tau} + \pi - v) m_{\beta}\right]\end{array}\right\}$$

Операторoы диф фе ренци дов ания. В формализме НьюменаПенроуза введены специальные обозначения для операторов ковариантного дифференцирования вдоль направлений изотропной тетрады:

$$D = b^{\mu} \nabla_{\mu}; \Delta = n^{\mu} \nabla_{\mu}; \delta = m^{\mu} \nabla_{\mu}; \bar{\delta} = \bar{m}^{\mu} \nabla_{\mu}$$

Так как в основном рассматривается действие этих операторов на скаляры, указанные операторы совпадают с производными Ли вдоль соответствующих направленпй. Для записи диадных операторов дифференцирования через операторы (7.127) следует воспользоваться соотношением

$$\bar{B}_{\mu} = -B_{v} \gamma^{v}_{\mu} = -B_{v} \left(m_{\mu} \bar{m}^{v} + \bar{m}_{\mu} m^{v}\right) = -m_{\mu} \left(B_{v} \bar{m}^{v}\right) - \bar{m}_{\mu} \left(B_{v} m^{v}\right)$$

3 апи сь основных соотнош ений ОТО. В формализме НьюменаПенроуза в качестве основных величин гравитационного поля рассматриваются: компоненты тетрад, спиновые коэффициенты (7.125) и полный набор независимых скалярных проекций

тензора Римана-Кристоффеля (7.123), (7.124). В качестве уравнений для этих переменных рассматриваются: независимые проекции тождеств Бианки на направления изотропных тетрад, проекции тождеств Риччи, координатные уравнения для компонент тетрад. Все эти довольно громоздкие уравнения можно найти в работах и обзорах по формализму НьюменаПенроуза (см., например, [91, 128]). Кроме того, конечно, используются уравнения йнштейна как выражения девиатора тезора Риччи Φ_{ab} и Λ через тензор энергии-импульса материи.

28.8 The Problem of Energy-Momentum of the Gravitational Field

28.8.1 1. Essence of the Energy-Momentum Problem in General Relativity

Проблема энергии-импульса гравитационного поля возникла сразу же после создания ОТО; с тех пор было затрачено много усилий для ее разрешения, однако полное единодущие по этому вопросу не достигнуто до сих пор.

Как известно, законы сохранения энергии и импульса материи в плоском пространстве-времени выводятся из соотношения

$$\partial T^{\mu v}/\partial x^{v} = 0$$

где $T^{\mu v}$ тензор энсргии-импульса материи. Записав интеграл от (8.1) по 4-объему, с помощью теоремы Остроградского-Гаусса можно перейти к интегрированию $T^{\mu v}$ по 3-мерной гиперповерхности, ограничивающей выбранный 4-объем. Беря в качестве 4-объема область пространства-времени, заключеиную между двумя пространственно-подобными гиперповерхностями $x^{0}_{(1)} = \text{const}$ и $x^{0}_{(2)} = \text{const}$, и полагая, что на пространственной бесконечности $T^{\mu v} = 0$, получаем законы сохранения:

$$\int T^{\mu v} d\sigma_{v} = \int T^{\mu 0} d^{3}x = P^{\mu} = (\ \text{const}\ )^{\mu}$$

В искривленном пространстве-времени тензор энергии-мпульса материи обладает свойством $\nabla v T^{\mu v} = 0$, что в обем случае не соответствует сохранению какой-либо величины, так как для перехода к интегрированию по гіперповерхности необходимо иметь обычную, а не ковариантную дивергенцию. Это же выражение можно представить в виде

$$\nabla v T^{\mu v} = (1/\sqrt{-g})\,(\partial/\partial x^{v})\left(\sqrt{-g}T^{\mu v}\right) + \Gamma^{\mu}_{\alpha v} T^{\alpha v} = 0$$

«Лишним» оказывается последнй член справа. Таким образом, искривленном пространстве-времени ОтО, вообице аоворя, не виьполняются законь сохранения энераии и импульса материи.

Однако в ОТО, как и в плоском пространстве-времени, имеет место закон сохранения заряда. Последний следует из соотношения $\nabla_{\mu} j^{\mu} = 0$, которое можно записать в виде

$$\nabla \mu j^{\mu} = \frac{\partial j^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^{\alpha}} j^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\sqrt{-g j^{\mu}}\right) = 0$$

Отсюда легко получить закон сохранения заряда

$$\int\limits_{V} \sqrt{-g}\,(\nabla \mu j^{\mu})\, d^{4}x = \oint \sqrt{-g} j^{\mu} d\sigma_{\mu} = 0 \rightarrow \int\limits_{i} \sqrt{-g} j^{\mu} d\sigma_{\mu} = \ \text{const}.$$

На отсутствие законов сохранения энергии и импульса материи в ОТО можно взглянуть иначе. Обычно в плоском пространстве-времени эти законы связываются соответственно с однородностью времени и пространства. Для существования закона сохранения момента количества движения необходимо свойство пзотропности пространства. В общем случае эти свойства пространственно-временного многообразия следует трактовать на языке векторов Киллинга, но, как уже отмечалось, в искривленном пространстве-времени они могут отсутствовать. В частных метриках,

обладающих векторами Киллинга, можно ввести соответствующие им законы сохранения. Действительно, пусть в многообразии имеется вектор Киллинга ξ_β. Построим вектор $P^\alpha = T^{\alpha\beta}\xi_\beta$. Согласно (8.3) и уравнениям Киллинга (1.55) он удовлетворяет соотношению

$$\nabla\alpha P^\alpha = T^{\alpha\beta}\nabla\alpha\xi_\beta = (1/2)T^{\alpha\beta}\left(\nabla\alpha\xi_\beta + \nabla\beta\xi_\alpha\right) = 0,$$

т. е. имеем свойство P^α, аналогичное (8.4) для вектора тока. Отсюда следует закон сохранения. Если вектор Киллинга ξ_β временно-подобен, то можно говорить о законе сохранения энергии, если пространственно-подобен - о законе сохранения импульса.

При обсуждении вопроса о сохранении тензорных величин следует иметь в виду, что в искривленном пространстве-времени определено интегрирование лишь скалярных величин. Для интегрирования тензорных величин их следовало бы перенести в одну точку, однако результат переноса зависит от пути.

Для определения операции интегрирования вектора энергииимпульса естественным подходом является задание конкретных путей переноса, например по геодезическим. Именно так можно задать эти величины для одиночного наблюдателя. Однако при подобном определении возникают трудности, если между двумя точками можно провести несколько геодезических.

Заметим, что сказанное не относится к закону сохранения заряда или P^α, удовлетворяющему (8.6), так как в этих случаях интегрируется плотность скалярной величины. Например, в (8.5) интегрируется $j^\mu\tau_\mu$, где τ_μ - временно-подобный вектор, перпендикулярный элементу пространственно-подобной гиперповерхности.

Понятия энергии и импульса являются важнейшими понятиями физики и привлекательны вследствие существования законов их сохранения. Отсутствие законов сохранения энергии и импульса представляется многим физикам неудовлетворительным свойством ОТО. Однако не следует преувеличивать значимость этого факта. Чаще всего при решении конкретных задач и проблем речь идет лишь о желании следовать традиционным понятиям и способам рассуждений. ОТО основана на уравнениях Эйнштейна, с помощью которых и заданной системы отсчета в принципе можно найти. решение любой корректно поставленной в рамках ОТО задачи, не обращаясь к законам сохранения.

Из всего сказанного следует, что к проблеме энергии-импульса допустимо относиться по-разному [129].

Можно игнорировать вопросы сохранения энергии и импульса, решать уравнения Эйнштейна и движения для конкретных классических задач. Окончательные результаты всегда можно проинтерпретировать в нужной системе отсчета, однозначно введя при этом энергию и импульс материп относительно используемой системы отсчета. 2. Разумно анализировать такие случаи, когда в рамках ОТО можно говорить о законах сохранения энергии или импульса, например когда пространство-время обладает соответствующими векторами Киллинга.

Можно попытаться с помощью уравнений поля и каких-либо дополнительных соображений вводить в теорию законы сохранения.неких величин - типа энергии или импульса (одной или множества), анализировать эти величины и решать, насколько их использование целесообразно и насколько они соответствуют привычным в плоском мире понятиям энергии и импульса. Однако не следует забывать, что все введенные таким образом понятия являются инородными конструкциями в ОТО. К этому подходу относятся попытки определения псевдотензора, вектора или иных комплексов энергии-импульса гравитационного поля. Как будет показано в следующих параграфах, здесь существенны вопросы единственности и физической значимости вводимых величин.

28.8.2 2. Pseudotensors of Energy-Momentum of the Gravitational Field

Если придерживаться взгляда, что необходимо ввести в ОТО аналог закона сохранения энергии-импульса, то можно воспользоваться следующим соображением [8, 130]. Вспомним, что в ньютоновой механике в общем случае не сохраняется кинетическая энергия T механической системы. Однако закон сохранения удается «спасти», введя потенциальную энергию U силового поля так, что

$$(d/dt)(T+U)=0$$

Эйнштейн и другие предложили аналогичный метод в искривленном пространстве-времени: следует требовать сохранения энергии и импульса P^{μ} материи вместе с дополнительным членом p^{μ}, понимаемым как энергия-импульс гравитационного поля. Тогда вместо (8.3) следует писать:

$$\partial T'^{\mu v}/\partial x^{v}=\left(\partial/\partial x^{v}\right)\left(T^{\mu v}+t^{\mu v}\right)=0$$

где нетензорный добавок $t^{\mu v}$ называют псевдотензором энергииимпульса гравитационного поля. Очевидно, чтс $t^{\mu v}$ не может быть тензором, так как действие петензорного оператора $\partial/\partial x^{v}$ на тензорную величину не дает тензора.

Разберемся, что означает величина $t^{\mu\nu}$ Для этого запишем уравнения Эйнштейна в виде

$$\left[(-g)^{N}/x\right]\left[R^{\mu v}-(1/2)g^{\mu v}R\right]=(-g)^{N}T^{\mu v}$$

где N - целое или полуцелое число, и разобьем левую часть на два слагаемых:

$$\left[(-g)^{N}/x\right]\left[R^{\mu v}-(1/2)g^{\mu v}R\right]=\Theta^{\mu v}-(-g)^{N}t^{\mu v}$$

Соотношение вида (8.8) выполняется, если $\Theta^{\mu\nu}$ имеет вид:

$$\Theta^{\mu\nu}=\left(\partial/\partial x^{\lambda}\right)h^{\mu\nu\lambda}$$

где $h^{\mu v\lambda}=-h^{\mu\lambda v}$ - так называемый суперпотенциал гравитационного поля. Тогда очевидно, что

$$\left(\partial/\partial x^{v}\right)\left(\partial h^{\mu v\lambda}/\partial x^{\lambda}\right)=\left(\partial/\partial x^{v}\right)\left[(-g)^{N}\left(T^{\mu v}+t^{\mu v}\right)\right]=0,$$

т. е. формально получена нужная форма закона сохранения энергии-импульса.

Все было бы хорошо, если бы разбиение (8.9) было однозначным при условии (8.10). Но, оказывается, его можно произвести многими способами. Различные авторы, предлагавшие разные псевдотензоры $t^{\mu\nu}$, использовали разные разбиения, основанные на соответствующих дополнительных соображениях. В качестве примеров укажем несколько наиболее распространенных видов $t^{\mu v}$.

Псевдотензор Эйнштейна [17, с. 488] выводится на основе указанной Эйнштейном возможности сведения «лишнего» члена в соотношении $V\overline{-g}T^{\sigma}_{\mu;}\sigma=0$ к обычной дивергенции. Он имеет вид:

$$t^{\nu}_{\mu}=\frac{1}{2\varkappa\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left\{\frac{g_{\mu\sigma}}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left[(-g)\left(g^{\alpha\lambda}g^{v\sigma}-g^{\lambda\sigma}g^{v\alpha}\right)\right]\right\}.$$

Этому псевдотензору соответствует суперпотенциал

$$h_{\mu}\overset{\nu\lambda}{\cdots}=\frac{g_{\mu\sigma}}{2\varkappa\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left[(-g)\left(g^{\sigma\nu}g^{\lambda\alpha}-g^{\Lambda\sigma}g^{v\alpha}\right)\right],$$

а закон сохранения записывается следующим образом ($N=1/2$):

$$\left(\partial/\partial x^{v}\right)\left(\sqrt{-g}T^{v}_{\mu}+\sqrt{-g}t^{v}_{\mu}\right)=0.$$

Iсевдотензор Ландау и Лифиица [9, с. 358] получаем так. В произвольной точке в локально-геодезической системе координат левую часть уравнений Эйнштейна можно представить в виде

$$\frac{1}{x}\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu v}R\right)=\frac{1}{(-g)}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\left\{\frac{1}{2\varkappa}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left[\right)-g\right)\left(g^{\mu v}g^{\lambda\alpha}-\right.$$
$$\left.-g^{\mu\lambda}g^{v\alpha}\right)\left]\right\}\equiv\frac{1}{(-g)}\Theta^{\mu v}=\frac{1}{(-g)}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}h^{\mu v\lambda}.$$

Видно, что $h^{\mu\nu\lambda}$ антисимметрично по индексам v и λ. Авторы данного подхода считают локально-геодезическую систему координат привилегированной в том смысле, что в ней псевдотензор $t^{\mu\nu} = 0$. В другой системе координат соотношение (8.15) в общем случае не выполняется, к нему справа следует добавить некоторое выражение, зависящее от первых производных от $g_{\mu v}$. Это выра- жение считают псевдотензором $t^{\mu v}$. Следовательно, суперпотенциал Ландау - Лифшица

$$h^{\mu v\lambda} = (1/2x)\left(\partial/\partial x^{\alpha}\right)\left[(-g)\left(g^{\mu v}g^{\lambda\alpha} - g^{\mu\lambda}g^{v\alpha}\right)\right]$$

отличается от суперпотенциала Эйнштейна. Ему соответствует симметричный псевдотензор энергии-импульса

$$t^{\mu v} = [1/2x(-g)]\left(\partial^2/\partial x^{\lambda}\partial x^{\alpha}\right)\left[(-g)\left(g^{\mu v}g^{\lambda\alpha} - g^{\mu\lambda}g^{v\alpha}\right)\right]$$

Закон сохранения имеет вид ($N = 1$):

$$\left(\partial/\partial x^{v}\right)\left[(-g)\left(T^{\mu v} + t^{\mu v}\right)\right] = 0$$

Псевдотензор Меллера-Мицкевича- Шредингера [131] выводят с помощью теоремы Нётер при определенном выборе плотности лагранжиана гравитационного поля. Он несимметричен:

$$t^{v}_{\mu.} = \frac{1}{2x\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} - \left[V - g\left(g_{\mu\beta,\alpha} - g_{\mu\alpha,\beta}\right)g^{\nu\beta}g^{\lambda\alpha}\right]$$

Псевдотензору соответствует суперпотенциал

$$h^{v\lambda}_{\mu} = \left(\sqrt{-g}/2x\right)\left(\partial g_{\mu\beta}/\partial x^{\alpha}\right)\left(g^{v\beta}g^{\lambda\alpha} - g^{v\alpha}g^{\lambda\beta}\right).$$

Закон сохранения записывается так же, как и в подходе Эйнштейна (8.14).
Псевдотензор Папапетру [132]

$$t^{\mu v} = \frac{1}{2xV/-g}\left[\left(\sqrt{-g}g^{\mu v}\right)_{,\alpha,\lambda}\varepsilon^{\alpha\lambda} + \left(\sqrt{-g}g^{\alpha\lambda}\right)_{,\alpha,\lambda}\varepsilon^{\mu\nu} - \right.$$
$$\left. - \left(\sqrt{-g}g^{\mu\alpha}\right)_{,\alpha,,}\varepsilon^{v\lambda} - \left(\sqrt{-g}g^{v\alpha}\right)_{,\alpha,\lambda}\varepsilon^{\lambda\mu}\right]$$

где $\varepsilon^{\alpha\lambda}$ - метрический тензор пространства-времени Минковского. Суперпотенциал можно найти из (8.10) и (8.21).

Перечисление различных псевдотензоров энергий-импульса гравитационного поля можно было бы продолжить. В частности, можно получить счетное множество симдетричных псевдотензоров эйнштейновского типа, используя в качестве суперпотенциилов Выражения вида [133]:

$$h^{v\lambda}_{\mu} = (1/2x)\left(\partial/\partial x^{\alpha}\right)\left[(-g)^{N}\left(g^{v}_{\mu}g^{\lambda\alpha} - g^{\lambda}_{\mu}g^{v\alpha}\right)\right]$$

где N - любое целое или полуцелое число.

Факт суіцестования множества различных псевдотензоров энергигі-импульса гравитационного поля представияется крайие неудовлетворительным. Огромыые усилия многочисленных иссйедователей были затрачены на выделение единственного преимущественного псевдотензора. Однако все предложеннны до сіх пор варианты неприемлемы в каких-либо отношениях. Это не удивительно, так как псевдотензоры не являются тензорными величинами: соответствующим выбором системы координат можно получать на основе псевдотензоров самые нелепые результаты [134, 135]. В [136] были сформулированы пять критериев Мёллера, которым должен удовлетворять искомый псевдотензор. Там же было показано, что из компонент метрического тензора и их производных невозможно построить искомую величину.

Автору представляется разумным вывод: следует отказаться от допущения, что в ОТО существует единственное выражение дяя энергии-импульса гравитационного поля. Такое понятие не заложено в принципах, на которых основана ОТО! Нужно смириться с возможностью определения множества комплексов, которые лишь в каком-то смысле соответствуют в ОТО привычным понятиям энергии и импульса. Можно ставить вопросы о целесообразности использования тех или иных из них в конкретных ситуациях и задачах.

Псевдотензорный подход обладает еще тем недостатком, что в его рамках затруднена физическая интерпретация получаемых величин. Последнее можно сделать лишь при использовании понятий систем отсчета. Этот вопрос рассмотрен в следующих параграфах.

28.8.3 3. Monad Vectors of Energy of the Gravi-Inertial Field

Монадный метод задания движения системы отсчета позволяет в каждой точке сопоставлять плотности тензора энергии-импульса материи плотность энергии и плотность модуля полного импульса материи. Без использования монадного (тетрадного или иного) метода решение этой задачи затруднительно. Действительно, пусть известны компонентъ тензора энергии-импульса материи $T^{\mu v}$. Чему равны плотногти энергии и импульса? Если действовать, как в СТО, то в каждой системе координат на значение плотности энергии будут претендовать величины T^{00}, T_{00} и T_0^0, а на значение плотности импульса - компоненты $T^{0i}, T_{0i}, T_0^i, T_i^0$. Какую взять систему координат и какие выбрать в ней компоненты?

В монадном методе зта задача в произвольной системе координат решается следующим образом: плотность энергии материи в системе отсчета с 4-вектором скорости τ^μ равна $\rho = T^{\mu\nu}\tau_\mu\tau_v$. Это скаляр. Плотность импульса определяется в виде $P^\alpha = -h_\mu^\alpha \tau_v T^{\mu\nu}$.Модуль импульса равен $P = \sqrt{-h_{\alpha\beta}P^\alpha P^\beta}$.

Монадный метод позволяет также определить для каждого пространственно-подобного сечения суммарное значение энергии материи, так как определенная выше плотность энергии является скаляром, а перенос скаляра не зависит от пути. Если система, отсчета нормальная, то имеется семейство пространственно-подобных гиперповерхностей, ортогональных ее конгруэнции ч. Для любой такой гиперповерхности

$$E = \int \sqrt{-g} T^{\mu v} \tau_v d\sigma_\mu \equiv \int \sqrt{-g} P^\mu d\sigma_\mu$$

В общем случае полная энергия материи, опредленная согласно (8.23), не сохраняется. Попробуем «спасти» закон сохранения так же, как в псевдотензорном подходе, добавив к энергии материи некоторое выражение. Теперь следует использовать четыре (а не 10, как в 8.2). уравнения Эйнштейна

$$(\tau_v/\varkappa)\left[R^{\mu v} - (1/2)g^{\mu v}R\right] = T^{\mu v}\tau_v \equiv P^\mu,$$

где P^μ – 4-вектор энергии-импульса материи. Разобьем левую часть этих уравнений на два векторных слагаемых

$$(\tau_v/\varkappa)\left[R^{\mu v} - (1/2)g^{\mu v}R\right] = \theta^\mu - p^\mu$$

где

$$\theta^\mu = \mathscr{F}^{\mu v}_{;v}$$

Здесь тензор $\mathscr{F}^{\mu v}$ играет роль суперпотенциала в псевдотензорном подходе; он антисимметричен: $\mathscr{F}^{\mu v} = -\mathscr{F}^{v\mu}$. Вследствие соотношения $\nabla\mu\nabla v\mathscr{F}^{\mu\nu} = 0$ имеем закон сохранения

$$\nabla_\mu\theta^\mu = \nabla_\mu\left(P^\mu + p^\mu\right) = (1/\sqrt{-g})\left(\partial/\partial x^\mu\right)\left[\sqrt{-g}\left(P^\mu + p^\mu\right)\right] = 0, \quad (8.27)$$

где вектор p^μ - аналог псевдотензора гравитационного поля. Сохраняющейся величиной является

$$E' = \int \sqrt{-g}\left(P^\mu + p^\mu\right) d\sigma_\mu$$

Рассмотрим одну из конкретных реализаций этой процедуры. Используем дененовское определение величины p^μ [54]. В этом варианте

$$\mathscr{F}_{\mu\nu} = (1/x)\left(\tau_{v,\mu} - \tau_{\mu,v}\right) = (1/x)\left(-2A_{\mu\nu} - F_\mu\tau_v + F_v\tau_\mu\right).$$

Ковариантная дивергенция этой величины в монадном виде равна:

$$\mathscr{F}_{\mu}{}^{v};v=(1/x)\left(-2\widetilde{\nabla}\widetilde{v}A_{\mu}{}^{v}+2A_{\mu}{}^{v}F_{v}+2\tau_{\mu}A_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta}-\partial_{T}F_{\mu}+DF_{\mu}-\right.$$
$$\left.-2F^{v}D_{\mu\nu}+\tau_{\mu}\widetilde{\nabla}\widetilde{v}F^{v}\right).$$

Учитывая монадный вид проекций уравнений Эйнштейна (3.37), из (8.25) находим проекции вектора p^{μ} в вакууме:

$$\tilde{p}_{\sigma}=-h_{\sigma\mu}p^{\mu}=(1/x)\left[\widetilde{\nabla}\tilde{v}\left(D_{\sigma}^{v}+A_{\cdot\sigma}^{v}+h_{\sigma}^{v}D\right)+h_{v\sigma}\left(\partial_{T}-D\right)F^{v}\right]$$

Отсюда видно, как добавок p в сохраняющемся обобщенном выражении для энергии (8.28) строится из физико-геометрических тензоров, характеризующих движение системы отсчета. В частности, в него входят квадратично тензоры угловой скорости вращения и ускорения системы отсчета. Переходя от одной системы отсчета к другой, можно в широких пределах изменять величины (8.28) и (8.30). Таким образом, величину p^{μ} естественно назвать (дененовским) вектором энергии гравиинерциального поля.

Особенно рельефно проявляется суть вектора p^{μ} в вакууме в киллинговых системах отсчета:

$$p=(1/x)\left(A_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta}+F_{\alpha}F^{\alpha}\right),$$
$$\tilde{p}_{\sigma}=(1/x)\left(\tilde{\nabla}\widetilde{v}A_{\cdot\sigma}^{v}-\partial_{T}F_{\sigma}\right).$$

Отсюда видно, что дененовское выражение для плотности энергии гравиинерциального поля в киллинговых системах отсчета очень напоминает плотность энергии электромагнитного поля (3.51), записанную через компоненты электрической и магнитной напряженностей. Заметим, что p может быть отлично от нуля даже в плоском пространстве-времени в неинерциальной системе отсчета.

В метрике Шварцшильда в покоящейся системе отсчета плотность дененовской энергии гравиинерциального поля имеет вид:

$$p=(1/x)F_{\alpha}F^{\alpha}=-\left(M^{2}k/8\pi r^{4}\right)\left(1-2kM/c^{2}r\right)^{-1}\approx-(1/8\pi k)g^{2},$$

где g - ускорение силы тяжести.

Из формул (8.24) - (8.26) видно, что описанным методом можно получить счетное число законов сохранения. Для этого следует использовать различные виды антисимметричных тензоров $\mathscr{F}\mu v$, построенных из физико-геометрических тензоров и их производных. В общем случае в качестве $\mathscr{F}\mu\nu$ можно выбрать величиНу [129]

$$\widetilde{F}_{\mu\nu}=(1/x)\left\{a_{01}A_{\mu\nu}+a_{02}\left(\tau_{\mu}F_{v}-\tau_{v}F_{\mu}\right)+a_{03}\left(\tau_{\mu}\tilde{\nabla}\tilde{\lambda}D_{v}^{\lambda}-\tau_{v}\tilde{\nabla}\tilde{\lambda}D_{\mu}^{\lambda}\right)+\right.$$
$$+a_{04}\left(\tau_{\mu}\widetilde{\nabla}\tilde{\lambda}A_{\cdot v}^{\lambda}-\tau_{v}\tilde{\nabla}\tilde{\lambda}A_{\cdot\mu}^{\lambda}\right)+a_{05}\left(\tau_{\mu}\partial_{T}F_{v}-\tau_{v}\partial_{T}F_{\mu}\right)+$$
$$\left.+\dot{a}_{05}\left(\tau_{\mu}\tilde{\nabla}\tilde{v}D-\tau_{v}\tilde{\nabla}\tilde{\mu}D\right)+...+\right.$$

$+($ те же выражения с коэффициентами a_{1i}, умноженными на $D)+$ $+($ те же выражения с коэффициентами a_{2i}, умноженными на

$$\left.F_{\alpha}F^{\alpha})+...\right\}$$

где a_{ik} - постоянные. Итого, в общем случае имеем бесконечно много возможностей *. Дененовское определение представляет собой частный случай, когда $a_{01}=-2,a_{02}=1$, а остальные коэффициенты равны нулю.

Несмотря на неоднозначность, монадный подход обладает рядом преимуществ по сравнению с псевдотензорным:

удается ввести истинные скаляры для выражения плотности энергии (точнее, квазиэнергии) гравиинерциального поля, для которых корректно определена операция интегрирования;

скалярные плотности энергии сконструированы из монадных физико-геометрических тензоров, т. е. получающиеся величины

С других позиций множество возможностей определения энергии гравиинерциального поля в рамках метода хронометрических инвариантов рассматривалось в [137, 138]. допускают однозначную физическую интерпретацию;

вид тензора $\mathscr{F}_{\mu v}$, вообще говоря, приводит к сравнительно «обозримому» числу физически приемлемых вариантов выбора выражений для квазиэнергии гравиинерциального поля.

28.8.4 4. Definitions of Superenergy of the Gravi-Inertial Field

Многие монадные векторы энергии гравиинерциального поля из (8.35), в частности денеровский, обладают тем недостатком, что они могут быть отличными от нуля даже в плоском пространстве-времени, когда о гравитационном поле нет смысла говорить. В последнем случае плотности квазиэнергии целиком определяются характеристиками неинерциальных систем отсчета. Поэтому особо рассмотрим такие монадные векторы энергии гравиинерциального поля, входящие в множество, определенное (8.35), которые в плоском пространстве-времени обращаются в нуль.

Пусть

$$\mathscr{F}^{\mu v} = (1/x) R^{\mu v}_{..\alpha\beta} f^{\alpha\beta}$$

где в качестве антисимметричного тензора $f^{\alpha\beta} = -f^{\alpha\beta}$ можно использовать любой тензор $\mathscr{F}^{\alpha\beta}$ из (8.35). Тогда монадный вектор энергии определяется выражением

$$p^{\mu} = (1/x) \nabla_v \left(R^{\mu v}_{.\alpha\alpha\beta} f^{\alpha\beta} \right)$$

Используя тождества Бианки, p^{μ} можно представить в виде

$$p^{\mu} = (1/\varkappa) \left\{ R^{\mu\nu}_{...\alpha\beta} f^{\alpha\beta}_{;\nu} + f^{\alpha\beta} \left(R^{\mu}_{\alpha;\beta} - R^{\mu}_{\beta;\alpha} \right) \right\}.$$

С помощью уравнений Эйнштейна, тензор Риччи справа можно выразить через тензор энергии-импульса материи. Тогда плотность сохраняющейся величины будет описываться выражением

$$\sqrt{-g}\mathscr{E} = \sqrt{-g} \left\{ T^{\mu v} \tau_{\mu} \tau_{v} + f^{\alpha\beta} \left[T^{\mu}_{\alpha;\beta} - T^{\mu}_{\beta;\alpha} + (1/2) \left(g^{\mu}_{\beta} g^{\sigma}_{\alpha} - g^{\mu}_{\alpha} g^{\sigma}_{\beta} \right) \times \right. \right.$$
$$\left. \left. \times T_{,\sigma} \right] \tau_{\mu} + (\tau_{\mu}/\alpha) R^{\mu v}_{...\alpha\beta} f^{\alpha\beta}_{;v} \right\}.$$

Если здесь совокупность всех членов, содержащих тензор энергии-импульса материи, назвать плотностью суперэнергии материи, то последний член

$$\sqrt{-g} p = (\sqrt{-g}/x) \tau_{\mu} R^{\mu\nu}_{...\alpha\beta} f^{\alpha\beta}_{;\nu}$$

следует назвать плотностью суперэнергии гравиинерциального поля.

В качестве примера выберем

$$f^{\alpha\beta} = a \left(F^{\alpha} \tau^{\beta} - F^{\beta} \tau^{\alpha} \right)$$

где a - постоянная. Тогда

$$V\overline{-g} p = (2a\sqrt{-g}/x) \left[-X^{\alpha\beta\sim} \nabla_{\beta} F_{\alpha} + Y^{\gamma\alpha\beta} F_{\beta} \left(D_{\alpha\gamma} + A_{\gamma\alpha} \right) \right]$$

где $X^{\alpha\beta}$ и $Y^{\gamma\alpha\beta}$ - проекции тензора Римана-Кристоффеля, определенные в (3.40), (3.41).

В [5, с. 205] тензор $\mathscr{F}^{\mu v}$ был выбран в виде

$$\mathscr{F}^{\mu v} = (1/x) \overset{*}{R}{}^{\mu v}_{\alpha\beta..} f^{\alpha\beta}$$

где

$$R^{*}\alpha\beta\mu v = (1/2) R^{\alpha\beta} E^{\mu v\lambda\sigma} = (1/2) R^{\mu v}_{..\lambda\sigma} E^{\alpha\beta\lambda\sigma}$$

$E^{\mu v\lambda\sigma}$ - тензор Леви-Чивиты (1.12); $f^{\alpha\beta}$ - антисимметричный тензор. Используя тождества Бианки в виде $R_{\alpha\beta\lambda\sigma:v} \varepsilon^{\mu v\lambda\sigma} = 0$, находим для плотности суперэнергии гравиинерциального поля выражение

$$\sqrt{-g}p = (V - g/2\varkappa)\tau_\mu R_{\alpha\beta\lambda\sigma}E^{\lambda\sigma\mu\nu}f^{\alpha\beta}_{;\nu}$$

Если опять в качестве $f^{\alpha\beta}$ выбрать (8.40), то получим:

$$\sqrt{-g}p = -(a\ {}^{-g/x}\sqrt{}e^{\lambda\sigma v}\left[Y^{\alpha}_{.\lambda\sigma}\tilde{\nabla}\tilde{v}F_\alpha - Z_{\alpha\beta\lambda\sigma}\left(D^{\beta}_{v} + A^{\beta}_{v.}\right)F^\alpha\right]$$

где проекция тензора Римана-Кристоффеля $Z_{\alpha\beta\lambda\sigma}$ определяется формулой (3.39)

Заметим, что в литературе довольно широко обсуждается под названием суперэнергии гравитационного поля (или тензора суперэнергии Беля-Робинсона [139]) принципиально иная величина, построенная исключительно из компонент тензора Римана-Кристоффеля:

$$T^{\alpha\beta\mu\nu} = (1/2)\left[R^{\alpha\tau\mu\sigma}R^{\beta\cdot\nu}_{.\tau\cdot\sigma} + R^{\beta\tau\mu\sigma}R^{\alpha\cdot\nu}_{.\tau\cdot\sigma} - (1/8)g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}R_{\tau\sigma\lambda\rho}R^{\tau\sigma\lambda\rho}\right] =$$
$$= (1/2)\left(R^{\alpha\tau\mu\sigma}R^{\beta\cdot\nu}_{.\tau\cdot\sigma} + R^{*}\alpha\tau\mu\sigma R^{*}_{.\tau\cdot\sigma}\beta\right)$$

где использовано обозначение (8.43). Это выражение примечательно в двух соотношениях.

Тензор суперэнергии в последней форме имеет такой же вид, как и тензор энергии-импульса электромагнитного поля, записанный через тензор напряженности $F_{\mu\nu}$:

$$T^{\mu\nu} = (1/4\pi)\left[F^{\mu\sigma}F^{\nu}_{.\sigma} - (1/4)g^{\mu\nu}F_{\lambda\sigma}F^{\lambda\sigma}\right] = (1/4\pi)\left(F^{\mu\sigma}F^{\nu}_{.\sigma} + \overset{F}{F}{}^{\mu\sigma}\ F^{\nu}_{.\sigma}\right),$$

где использовано обозначение, аналогичное (8.43) :$\overset{*}{F}_{\alpha\beta} = (1/2)E_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

Для тензора суперэнергии имеет место дифференциальный «закон сохранения». Чтобы его получить свернем тождества Бианки (1.32) с тензором Римана-Кристоффеля $R^{\tau\alpha\sigma\mu}$. В результате, имея в виду (8.46), получаем «закон сохранения» [8]

$$\nabla_\mu T^{\alpha\beta\mu\nu} = 0$$

Конечно, (8.48), как и $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, не означает сохранения какой бы то ни было величины. Трудно также сказать, как связан тензор суперэнергии с обычной энергией.

28.8.5 5. Dyad and Tetrad Complexes of Energy-Momentum of the Gravi-Inertial Field

Когда возникает необходимость одновременно рассматривать опрос о сохранении энергии и импульса вдоль выделенного направления, целесообразно использовать диадный метод. Диада: τ^μ, l^μ позволяет производить интегрирование во всем пространственно-подобном 3-мерном сечении системы отсчета двух скалярных величин: $T^{\mu\nu}\tau_\mu\tau_\nu = P(0)$-плотности энергии материи; $T^{\mu\nu}l_\mu\tau_\nu = P(1)$-плотности импульса материи вдоль направления. Если нужно рассмотреть вопрос об определении или о сохранении энергии и проекций импульса по всем трем ортогональным, пространственным направлениям, то следует использовать полный тетрадный формализм. Плотности энергии и импульса материи тогда определяются выражением:

$$P(\alpha) = T^{\mu\nu}g_\mu(\alpha)g_\nu(0) \equiv T^{\mu\nu}g_\mu(\alpha)\tau_\nu$$

Для получения аналогов законов сохранения энергии и проекций импульса в симметричном виде опять следует воспользоваться методикой, характерной для псевдотензорного подхода. Уравнения Эйнштейна записываются следующим образом:

$$[g_\nu(\alpha)/x]\left[R^{\mu\nu} - (1/2)g^{\mu\nu}R\right] = \theta^\mu(\alpha) - t^\mu(\alpha) = T^\mu(\alpha)$$

где $T^\mu(\alpha) = T^{\mu\nu}g_\nu(\alpha); t^\mu(\alpha)$. - четыре вектора, называемых комплексом энергии-импульса гравиинерциального поля; $\theta^\mu(\alpha)$ - совокупность векторов, представимых в виде:

$$\theta^\mu(\alpha) = \mathscr{F}^{\mu\nu}(\alpha)_{i\nu}$$

где $\mathscr{F}^{\mu\nu}(\alpha) = -\mathscr{F}^{\nu\mu}(\alpha)$. Законы сохранения следуют из соотношения

$$\nabla_\mu \theta^\mu(\alpha) = \nabla_\mu \cdot [T^\mu(\alpha) + t^\mu(\alpha)] = (1/\sqrt{-g})\,(\partial/\partial x^\mu)\,\{\sqrt{-g}\times \\ \times [T^\mu(\alpha) + t^\mu(\alpha)]\}$$

и записываются одинаково для всех индексов:

$$p'(\alpha) = \int \sqrt{-g}\,[P^\mu(\alpha) + t^\mu(\alpha)]\,d\sigma_\mu$$

Конечно, опять существует бесконечно много тетрадных комплексов энергии-импульса гравиинерциального поля. Они определяются видом антисимметричного тензора $\mathscr{F}^{\mu v}(\alpha)$. Рассмотрим некоторые из них.

Тетрадный комплекс Фролова [140] наиболее непосредственно обобщает дененовское определение энергии гравиинерциального поля: В качестве $\mathscr{F}_{\mu\nu}(\alpha)$ следует выбрать

$$\mathscr{F}_{\mu v}(\alpha) = (1/x)\,[g_v(\alpha)_{,\mu} - g_\mu(\alpha)_{,v}] = (2/x)C_{\mu v}(\alpha)$$

где $C_{\mu v}(\alpha)$ - введенные ранее объекты неголономности. Очевидно, что при $\alpha = 0$ получаем $g_v(0) = \tau_v$ и (8.53) совпадает с (8.29). Соответствующий тетрадный комплекс энергии-импульса имеет вид:

$$t^\mu(\alpha) = (2/x)\nabla v C^{\mu v}(\alpha) = (1/x)\nabla v\,(\Delta^\mu_{\cdot}(\alpha)^v - \Delta^v_{\cdot}(\alpha)^\mu_{\cdot})$$

где $\Delta^\mu_{\cdot(\alpha)^\nu\cdot}$ - коэффициенты вращения Риччи.

$$\mathscr{F}_{\mu v}(\alpha) = (2/x)\Delta(\alpha)_{\mu v}$$

Напомним, что коэффициенты вращения Риччи антисимметричны по последним двум индексам. Комплекс энергии-импульса

$$t^\mu(\alpha) = (2/x)\nabla\Delta(\alpha)^{\mu v}$$

Иногда используют тетрадный комплекс [140, 142]

$$t^\mu(\alpha) = (1/x)\nabla_v \left[\Delta(\alpha)^{\mu v}_{\cdot\cdot} + g^\mu(\alpha)\Delta^{\beta v}_{\cdot\cdot\beta} - g^v(\alpha)\Delta^{\beta\mu}_{\cdot\cdot\cdot\beta}\right]$$

Соответствующий тензор $\mathscr{F}_{\mu v}(\alpha)$ очевиден.

Не вдаваясь в подробности, укажем еще тетрадное обобщение векторов суперэнераии-импульса. По аналогии с (8.36) определим; например,

$$\mathscr{F}^{\mu v}(\alpha) = (1/x)R^{\mu v}_{\cdot\sigma\sigma\beta} f^{\sigma\beta}(\alpha)$$

где в качестве $f^{\sigma\beta}(\alpha)$ можно взять, в частности, выражения (8.53) или (8.55). В результате получим плотности четырех сохраняющихся величин:

$$\sqrt{-g}p(\alpha) = (\sqrt{-g}/x)R_{\mu\nu}{}_{-\gamma\beta} f^{\nu\beta}(\alpha)_{;v} g_\mu(0)$$

Перечисление тетрадных комплексов энергии-импульса гравиинерциального поля можно было бы продолжить *. Все они зависят от выбора системы отсчета. Нет ничего удивительного, что при переходе от одной системы отсчета к другой изменяются сохраняющиеся величины.

28.9 Gravi-Inertial Waves

28.9.1 1. The Problem of Describing Gravitational Waves

Вопросы описания гравитационных волн, их взаимодействия с прибором привлекают пристальное внимание физиков-гравитационистов, что обусловлено не только принципиальной важностью Этих вопросов, но и интенсивно ведущимися экспериментальными работами по поиску гравитационного излучения внеземного происхождения [143].

Отметим, что в рамках тетрадного подхода неоднократно предпринимались попытки выделить один преимущественный комплекс энергии-импульса. Для этого были сформулированы условия (аналогичные условиям Мёллера в метрической формулировке псевдотензоров), которым должна удовлетворять искомая величина. Была также доказана теорема, аналогичная теореме Мёллера, о невозможности определения такой величины [142]. В чем состоит трудность описания гравитационных волн?

Многие вопросы теории гравитации рассматриваются по аналогии с теорией электромагнитного поля. Это относится и к гравитационному излучению. Однако оказывается, что гравитационное излучение обладает рядом качественно иных свойств. В частности, гравитационные волны иначе воздействуют на приборы. Действительно, когда рассматривается взаимодействие электромагнитных волн с заряженным телом, поведение тела можно сравнивать с поведением нейтрального объекта, который, можно, считать, не реагирует на электромагнитные волны При воздействии гравитационной волны на тело такого сравнения быть не может. Возникает искривление самого пространства-времени, что означает одинаковые возмущения (смещения) в данном месте всех объектов. Необходимо использовать специальные приемы для описания проявления таких универсальных воздействий.

В ОТО реализовано глубокое единство гравитации и инерции. По сути дела мы изучаем не поля гравитации, аналогичные другим физическим полям, а гравиинерциальные процессы, описываемые кинематическими характеристиками системы отсчета. Своеобразие ситуации состоит в том, что в искривленном пространстве-времени принципиально нельзя различить, что описывает инерцию, а что чистую гравитацию. Поэтому в дальнейшем чаще будем употреблять термин гравиинерциальные волны.

ак известно, электромагнитные волны в вакууме описываются линейными уравнениями Максвелла, а гравитационные волны - существенно нелинейными уравнениями Эйнштейна. Это также создает много трудностей при определении понятия волны. В частности, ясно, что в ОТО должно нарушаться свойство суперпозиции как угодно определенных гравитационных волн. Существенное упрощение достигается для слабого гравитационного поля, когда можно оставлять лишь линейные члены.

ак показывают оценки, в реальных ситуациях гравитационные волны настолько слабы, что пока не могут быть обнаружены современными приборами. Ведущиеся экспериментальные поиски рассчитаны на сверхмощные источники, в основном гипотетической природы. Это привело к тому, что в теории рассматриваются свойства пока не наблюдавшихся явлений. Впрочем, указанная особенность характерна для большинства общерелятивистских эффектов.

В настоящее время сложилось несколько направлений теоретического исследования гравитационных волн. Наиболее важными являются следующие три.

Алгебраический подход (см. 9.2), который оперирует с произвольно искривленным пространством-временем. Он основан на алгебраической классификации Петрова пространств Эйнштейна. Это направление дало много сведений о структуре гравиинерциальных полей. Здесь главная задача состояла в установлении критерия волновых метрик. 2. Референционный подход тесно связан с методами задания систем отсчета. Определение гравиинерциального излучения здесь принципиально связано с кинематическими свойствами систем отсчета - монадными и диадными физико-геометрическими тензорами.

Изучение слабых гравитацциоыьх волн. В этом направлении трудности, связанные с нелинейностью, отпадают. По существу, теория сводится к описанию слабых линейных волн тензорного поля второго ранга на фоне плоского пространства-времени. К такому полю применимы методы описания других полей. Для решения задач, которые в данный момент могут представлять практический интерес, этот подход достаточен. В частности, именно при таком подходе производятся оценки характеристик гравитационного излучения от различных источников, оценки параметров ожидаемых волн в окрестности Земли. Однако и в рамках этого подхода для описания воздействия излучения на приборы необходимо использовать понятия и методы задания систем отсчета.

Указанные направления не охватывают весь поток теоретических исследований по проблеме гравитационных волн. Например, имеется серия работ по выделению динамических гравитационных переменных. Это направление основано на дираковском каноническом формализме ОТО и в основном нацелено на решение проблемы квантования гравитации; однако значительная часть работ здесь ведется на

классическом (не квантовом) уровне, т. е. рассматриваются классические гравиинерциальные волны. Учитывая характер этого направления, рассмотрим его в гл. 10, посвященной подходам к решению проблемы квантования гравитации.

28.9.2 2. Algebraic Criteria for Gravitational Waves

Естествен вопрос: можно ли в самом общем виде сформулировать признак или критерий, который позволял бы выделять из решений уравнений Эйнштейна волновые метрики? Широко распространено мнение, что такой критерий должен существовать [144]. В литературе отражены довольно многочисленные попытки найти этот критерий с помощью алгебраической классификации етрова пространств Эйнштейна (см. §2.2). В свое время это было очень заманчиво, так как с открытием алгебраической классификации сразу же встал вопрос о физичсском смысле пространств различных типов и подтипов.

Сопоставление алгебраической классификации пространств Эйнштейна с аналогичной классификацией Электромагнитных полей в какой-то степени обосновывает это направление поиска. Действительно, характеристическое уравнение для тензора электромагнитного поля $F_{\mu v}$ (в плоском пространстве-времени) име. ет вид:

$$\mathrm{i}|\ F_{\mu v} - \lambda g_{\mu v}\| = 0$$

Непосредственное вычисление определителя приводит к уравнению

$$\lambda^4 + \left(H^2 - E^2\right)\lambda^2 - \left(E_k H^k\right)^2 = 0,$$

где коэффициентами являются инварианты электромагнитного поля $F_{\mu\nu}F^{\mu v} = 2\left(H^2 - E^2\right) = 2\dagger_1; F_{\mu v}F^{*}\mu v = E_k H^k \equiv y_2$. С помощью элементарных преобразований (см. §2.2) характеристическую $4\times$ $\times 4$-матрицу для (9.1) можно привести к двум возможным каноническим матрицам [145]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4 + y_1\lambda^2 - y_2^2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda\left(\lambda^2 + y_1\right) \end{pmatrix},$$

соответствующим $y_2 \neq 0$ и $y_2 = 0$. Первая из этих матриц соответствует наличию четырех различных корней, определяемых лишь из одного инвариантного множителя канонической матрицы, т. е. имеет характеристику [(1) (1) (1) (1)]. Назовем электромагнитные поля с характеристиками [1 1 1 1] полями первого типа T_1, а их частный случай [(1) (1) (1) (1)] - подтипом I типа T_1 (по аналогии с названиями типов и подтипов пространств Эйнштейна в §2.2).

Вторая из канонических матриц (9.2) соответствует корням: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0; \lambda_3 = +\sqrt{y_1}; \lambda_4 = -\sqrt{y_1}$ при $y_1 \neq 0$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ при $y_1 = 0$. Эти две возможности описываются характеристиками: [(1, 1) (1) (1)] и [(1, 3)] соответственно. Первую из них, принадлежащую к типу T_1, назовем подтипом D (к нему принадлежит закон Кулона), а вторую назовем типом T_2 (или N). Таким образом, электромагнитные

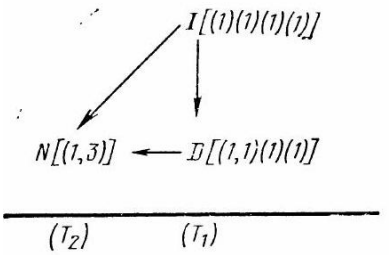


Рис. 16. Алгебраическая классификация электромагнитных полей поля могут быть только двух типов (T_1 и T_2), причем первый из них разбивается на два подтипа: I и D. Изобразим эту ситуацию с помощью диаграммы, аналогичной диаграмме Пенроуза (рис. 16). Подтипы электромагнитных полей D и N естественно назвать алгебраически

специальными. Известно, что для чистого электромагнитного излучения $y_1 = \mathcal{F}_2 = 0$, т. е. электромагнитные волны принадлежат к алгебраически специальному типу $N\,(T_2)$.

Алгебраическая классификация пространств Эйнштейна значительно сложнее. Тем не менее заманчиво связать метрики алгебраически специальных подтипов с гравитационными волнами. Подтип D сразу же отпадает - к нему принадлежит, в частности, статическая метрика Шварцшильда. Остаются метрики типов T_2 и T_3 по Петрову. Чтобы остановиться на каком-то варианте, необходимы дополнительные соображения. Разные авторы, сопостав- ляя различные стороны электродинамики и ОТО, предлагали ряд критериев гравитационных волн. В настоящее время их более 10. Некоторые из них эквивалентны, отличаются лишь терминологией. Интересно отметить, что подавляюшая часть критериев имеет общую область пересечения. Следуя работе [144], перечислим наиболее распространенные критерии в порядке сужения множества пространств, удовлетворяющих им.

1а. Согласно критерию Пирани [146] в вакууме волновыми являются все метрики, принадлежащие подтипам II, N или III.

Критерию Пирани эквивалентен первьий критерий Беля, который связан с монадным методом. В окрестности произвольной точки пустого пространства-времени существуют гравитационные волны, если для любого единичного временно-подобного вектора τ^μ в Этой точке вектор потока суперэнергии отличен от нуля:

$$P^\alpha = -h^\alpha_\sigma \tau_\beta \tau_\lambda \tau_\mu T^{\sigma\beta\lambda\mu} \neq 0$$

где $T^{\sigma\beta\lambda\mu}$ - тензор суперэнергин Беля, определенный формулой (8.46). Если $P^\alpha = 0$, то гравитационные вопны в окрестности данной точки отсутствуют.

2а. Все пространства, принадлежащие гравитационным полям Подтипов N и III, и только они, удовлетворяют второму критерию Беля. Его можно сформулировать следующим образом. Пустое пространство-время с тензором Римана - Кристоффеля, отличным от нуля, описывает свободные гравитационные волны, если обращаются в нуль все четыре фундаментальных скаляра:

$$R^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\lambda\mu} R^{\dot{\lambda}\mu}_{\cdot\alpha\beta} = 0;\; R^{\alpha\beta}_{\cdot\lambda\mu} \overset{*}{R}{}^{\dot{\lambda}\mu}_{\cdot\cdot\alpha\beta} = 0;$$

$$R^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\lambda\mu} R^{\lambda\mu}_{\cdot\rho\sigma} R^{\rho\sigma}_{\cdot\alpha\beta} = 0;\; R^{\alpha\beta}_{\cdot\lambda\mu} R^{\lambda\mu}_{\cdot\rho\sigma} \overset{*}{R}{}^{\rho\sigma}_{\cdot\cdot\alpha\beta} = 0.$$

В противном случае свободные гравитационные волны отсутствуЮТ [144, с. 75])

2б. Дебеве показал, что второй критерий Беля можно сформулировать иначе. Соотношения (9.4) эквивалентны существованию изотропного вектора k^μ, удовлетворяющего уравнениям:

$$R_{\alpha\beta\mu v} k^\alpha k^\mu = 0;\; R^*_{\alpha\beta\mu v} k^\alpha k^\mu = 0$$

2в. Второму критерию Беля эквивалентен также критерий Мизрьи и Cuнаха. Пустое пространство-время с отличным от нуля тензором Римана - Кристоффеля описывает гравитационные волны в том и только в том случае, когда тензоры $E_{\alpha\lambda} = R_{\alpha\beta\lambda\mu}\tau^\beta\tau^\mu \equiv X_{\alpha\lambda}$; $H_{\alpha\lambda} = -R^*_{\alpha\beta\lambda\mu}\tau^\beta\tau^\mu$, где τ^β - единичный временно-подобный вектор, удовлетворяют соотношениям:

$$\left.\begin{array}{l} E_{\alpha\lambda}E^{\alpha\lambda} - H_{\alpha\lambda}H^{\alpha\lambda} = 0 \\ E_{\alpha\lambda}E^\lambda_\beta E^{\beta\gamma} = 0;\; H_{\alpha\lambda}H^\lambda_\beta H^{\beta\gamma} = 0 \end{array}\right\}$$

3а. Согласно критерию Лихнеровича волновыми следует считать лишь пространства, принадлежащие подтипу N. 3б. Критерию Лихнеровича эквивалентен критерий Малдыбаевой [147], формулируемый в виде общековариантных уравнений для тензора Римана - Кристоффеля:

$$g^{\sigma\lambda}\nabla\sigma\nabla\lambda_\alpha R_{\alpha\beta\mu\nu} - 2R_{\rho\mu\nu\lambda}R_{\alpha\beta}{}^{\rho\lambda}.. = 0.$$

Следующие три критерия гравитационных волн выделяют подмножества пространств подтипа N.

Критерий Зельманова исключает из подтипа N два вида симметрических пространств [144, с. 84]. Пространство-время описывает гравитационные волны в том и только в том случае, когда его тензор Римана - Кристоффеля $R_{\alpha\beta v}$ не является ковариантно постоянным, т. е. $\nabla_\lambda R_{\alpha\beta\mu\nu} \neq 0$, и удовлетворяет общековариантному волновому уравнению

$$g^{\sigma\lambda}\nabla\sigma\nabla_\lambda R_{\alpha\beta\mu\nu} = 0.$$

Критерий Хэли из пространств подтипа N выделяет случаи (так называемые волны интегрируемого типа), когда для волнового вектора k_α выполняется условие $k_\alpha = \partial k/\partial x^\alpha$, где k - скалярная функция координат.

Критерий Зунда - Левина к критерию Хэли добавляет требование, чтобы волновые пространства были конформно-плоскими.

Есть и другие алгебраические критерии гравитационных волн. Для алгебраического подхода к поиску критериев гравитационных волн характерны следующие недостатки.

ак уже отмечалось, сформулировано множество критериев и нет достаточно веских оснований остановиться на одном из них.

Если алгебраический подход опирается на аналогию с электромагнитным полем, то следует иметь в виду, что условие равенства нулю двух инвариантов электромагнитного поля еще не означает наличия именно электромагнитного излучения. Действительно, пусть имеются взаимно перпендикулярные постоянные электрическое и магнитное поля ($\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$) и пусть их напряженности равны ($|\mathbf{E}| = |\mathbf{H}|$), тогда оба инварианта обратятся в нуль, но никакого излучения нет. По-видимому, аналогичная ситуация может иметь место и в случае гравитации. Заметим, что даже для электромагнитного поля нет удовлетворительного критерия излучения.

Как будет показано, есть метрики, которые по ряду веских соображений следует понимать как волновые, но они не удовлетворяют ни одному из перечисленных выше критериев. Примером могут служить цилиндрические волны Эйнштейна-Розена (см. §9.4)

Рассмотренные критерии относятся к идсализированным метрикам, далеким от соответствия физической реальности. Внесение сколь угодно малой массы в пространства, ранес удовлетворявшие какому-либо волновому критерию, сушественно изменяет их алгебраический тип. Все это заставляет при поиске критерия излучения использовать и другие соображсния.

28.9.3 3. Referential Definition of Gravi-Inertial Waves

В этом подходе (такой подход к определению гравиинерциальных волн был предложен в работах [144, 148] в рамках метода хронометрических инвариантов) гравиинерциальные волны определяются и описываются сугубо в терминах и операторах методов задания систем отсчета. В общековариантном монадном виде референционный критерий существования гравиинерциальных волн означает [149], что

всевозможными способами спроектированные посредством τ^μ и h^μ_v исследуемой системы отсчета компоненты тензора Римана - Кристоффеля R_N : $X_{\mu v}, Y_{\mu v\lambda}$ и $Z_{\mu v\alpha\beta}$ - удовлетворяют вол. новым уравнениям вида

$$\left(\partial_T^2 - h^{\mu v}\tilde{\nabla}\tilde{\mu}\tilde{\nabla}\tilde{v}\right) R_N = \Phi_N$$

где Φ_N - произвольная тензорная функция координат, не содержащая производных выше первого порядка от R_N; R_N - собирательное обозначение компонент всех проекций тензора Римана Кристоффеля;

левая часть уравнений (9.9) должна быть нетривиальной хотя бы для одной компоненты R_N, т. е. соответствующий (ие) тензор R_N должен быть нестационарным и пространственно-неоднородным:

$$\partial_T R_N \neq 0; \tilde{\nabla}\tilde{v} R_N \neq 0$$

В этом критерии существенно требование нетривиальности левой части (9.9), так как само уравнение выполняется всегда, хотя бы вследствие тождества, справедливого для пространств Эйнштейна:

$$g^{\lambda\sigma}\nabla\lambda\nabla\sigma R_{\mu\alpha\beta v} + R^{\lambda}_{\sigma\alpha\beta}.R^{\sigma}_{\lambda\mu\nu}. + 2\left(R_{\sigma\alpha\nu\lambda}R^{\lambda.\sigma}_{\mu\cdot\beta.} + R^{\lambda}_{\alpha\mu\sigma}\cdot R^{\sigma}_{v\lambda\beta}.^{\sigma}\right) = 0.$$

Проектируя эти тождества посредством τ^{μ} и h^{μ}_{v} и переходя к монадным величинам и операторам, получаем соотношения:

$$\left(\partial^2_T - h^{\mu v}\tilde{\nabla}\mu\tilde{\nabla}v\right)X_{\alpha\beta} = \Phi_{(1)};$$

$$\left(\partial^2_T - h^{\mu v}\tilde{\nabla}_{\mu}\tilde{\nabla}_{v}\right)Y_{\alpha\beta\sigma} = \Phi_{\alpha\beta\sigma};$$

$$\left(\partial^2_T - h^{\mu v}\bar{\nabla}_{\mu}\bar{\nabla}_{v}\right)Z_{\alpha\beta\sigma\lambda} = \overline{(3)}_{\alpha\beta\sigma\lambda};$$

тде $\Phi^{\alpha\beta}_{(1)}, \Phi_{(2)}\alpha\beta\sigma, \Phi_{(3)}\alpha\beta\lambda$ - ковариантные тензорные функции, не содержащие производных выше первого порядка $X_{\alpha\beta}, Y_{\alpha\beta\sigma}, Z_{\alpha\beta\lambda\sigma}$. Важно, что референционный критерий формулируется для компонент тензора Римана - Кристоффеля. Этот подход, можно сказать, обобщает и в некоторых отношениях конкретизнрует алгебраический подход. В частности, ряд алгебраических критериев гравитационных волн (Малдыбаевой, Зельманова и др.) фактиче- (9.11)

Если референционный критерий выполняется не для всех трех тензоров X, Y, Z, а только для одного или двух из них, то следует говорить о гравиинерциальных $X-, Y-Z$-волнах или о смеси их. Однако в вакууме, вследствие соотношения $R_{\mu v} = 0$, величины $X_{\mu v}$ и $Z_{\alpha\mu\beta v}$ оказываются связанными друг с другом $X_{\mu v} + Z^{\alpha}_{.\mu\alpha v} = 0$, так что достаточно говорить лишь о волнах двух типов: X и Y.

Важной задачей референционного подхода является выяснение условий существования гравиинерциальных волн в зависимости от значений и свойств физико-геометрических тензоров. В частности, можно сделать некоторые выводы об отсутствии волнового характера метрики в зависимости от обращения в нуль этих тенЗоров в отдельности или совместно в различных комбинациях. Возможны восемь таких случаев:

$F_{\mu} = 0; D_{\mu v} = 0; A_{\mu\nu} = 0$; 5. $F_{\mu} = 0; D_{\mu\nu} = 0; A_{\mu v} \neq 0$
$F_{\mu} \neq 0; D_{\mu\nu} = 0; A_{\mu\nu} = 0$; 6.$F_{\mu} \neq 0; D_{\mu\nu} = 0; A_{\mu\nu} \neq 0$;
$F_{\mu} \neq 0; D_{\mu\nu} \neq 0; A_{\mu\nu} = 0$; 7. $F_{\mu} \neq 0; D_{\mu\nu} \neq 0; A_{\mu\nu} \neq 0$;
$F_{\mu} = 0; D_{\mu\nu} \neq 0; A_{\mu\nu} = 0$; 8.$F_{\mu} = 0; D_{\mu\nu} \neq 0; A_{\mu\nu} \neq 0$.

Учитывая формулы (3.40), (3.41), выражающие $X_{\mu v}$ и $Y_{\alpha v\sigma}$ через монадные физико-геометрические тензоры, приходим к выводу, что случай 1 тривиален. Случай 2 соответствует обращению в нуль $Y_{\mu v\sigma}$ и стационарности $X_{\mu\nu}$ в вакууме. В последнем легко убедиться на основе вида $Z_{\mu v\sigma\lambda}$ согласно (3.39) и соотношения $R_{\mu\nu} = 0$. Таким образом, в случае 2 волны отсутствуют. В случае 5 анализ в хронометрических системах координат (что не нарушает общности рассмотрения) показывает, что метрика стационарна, а значит, X и Y также стационарны, т. е. волны существовать не могут. Во всех остальных случаях гравиинерциальные волны обоих типов возможны. Отметим, что имеются более тонкие условия [144, 148] отсутствия гравиинерциальных волн в зависимости от обращения в нуль производных от физико-геометрических тензоров (в зависимости от их стационарности или однородности).

Число возможностей существенно сокращается, если ограничиться рассмотрением нормальных систем отсчета ($A_{\mu v} = 0$). Как уже отмечалось, они наиболее адекватно описываются с помощью кинеметрической калибровки монадного метода. В таких системах отсчета гравиинерциальным волнам могут соответствовать лишь случаи 3 и 4. Видно, что в них необходимым условием является отличие от нуля тензора скоростей деформаций. Тогда напрашивается простая классификация гравиинерциальных волновых процессов в нормальных системах отсчета в зависимости от вектора F_{μ}: 1) будем говорить о несвободном гравиинерциальном волновом процессе, когда выполнен референционный волновой критерий и $F_{\mu} \neq 0$;

свободный гравиинерциальный волновой процесс соответствует случаю, коогда выполнен референционный волновой критерий и $F_{\mu} = 0$.

28.9.4 4. Dyad Description of Gravi-Inertial Waves

О бщи е з а меч ания. В гл. 7 было показано, что для описания волновых процессов целесообразно использовать диадный метод. Это в полной мере относится и к обсуждаемым здесь гравиинерциальным волнам. Действительно, как угодно определенный гравиинерциальный волновой процесс должен характеризоваться изотропным волновым вектором k^μ, который можно представить в виде $k^\mu = \omega\,(\tau^\mu \pm l^\mu)$, где τ^μ – 4-скорость используемой системы отсчета; $\pm l^\mu$ - пространственно-подобное направление распространения процесса.

Диадный метод позволяет более детально описывать гравиинерциальные волны, нежели монадный, в частности с его помощью можно выделить продольные, продольно-поперечные и поперечно-поперечные составляющие тензора Римана - Кристоффеля и физико-геометрических тензоров. Так, используя диадное расщепление метрического тензора (7.1), разделим 20 компонент тензора Римана - Кристоффеля на

а) продольные составляющие:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{X} = X_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta; \\ \widehat{Y}_{\alpha\beta} = -Y_{\lambda\mu\nu} l^\lambda \gamma^\mu_\alpha \gamma^v_\beta;\; Z_{\alpha\beta\gamma\sigma} = Z_{\mu\nu\lambda\alpha} \gamma^\mu_\alpha \gamma^v_\beta \gamma^\lambda_\gamma \gamma^\alpha_\sigma; \end{array}\right\}$$

б) продольно-поперечные составляющие:

$$\left.\begin{array}{l} X_\mu = X_{\alpha\beta} l^\alpha \gamma^\beta_{\underset{\mu_1}{\beta}};\; \hat{Y}_\beta = -Y \gamma_{\lambda\mu\nu} l^\lambda l^\mu \gamma^v_\beta; \\ Z_{\sigma\alpha\beta} = Z_{\mu\nu\lambda\alpha} l^\mu \gamma^v_\sigma \gamma^\lambda_\alpha \gamma^\chi_\beta;\; Y_{\gamma\alpha\beta} = -Y_{\lambda\mu\nu} \gamma^\lambda_\gamma \gamma^\mu_\alpha \gamma^v_\beta; \end{array}\right\}$$

в) поперечно-поперечные составляющие:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{X}_{\mu v} = X_{\alpha\beta} \gamma^\alpha_\mu \gamma^\beta_v;\; \bar{Y}_{\mu v} = -Y_{\lambda\alpha\beta} \gamma^\lambda_\mu \gamma^\alpha_v l^\beta; \\ \bar{Z}_{\mu\nu} = Z^\alpha_{\alpha\beta\lambda\sigma} l^\alpha \gamma^\beta_\mu l^\lambda \gamma^\sigma_v. \end{array}\right\}$$

Компоненты выписанных тензоров связаны 10 уравнениями Эйнштейна. В вакууме ($R_{\mu v} = 0$) они записываются в виде

$$\left.\begin{array}{ll} \hat{X} + \gamma^{\alpha\beta} \bar{Z}_{\alpha\beta} = 0; & \hat{X} + \gamma^{\alpha\beta} \bar{X}_{\alpha\beta} = 0; \\ X_\sigma - \gamma^{\alpha\beta} Z_{\alpha\beta\sigma} = 0; & \gamma^{\alpha\beta} \bar{Y}_{\alpha\beta} = 0; \\ \bar{X}_{\sigma\lambda} + \bar{L}_{\sigma\lambda} + \gamma^{\alpha\beta} Z_{\alpha\sigma\beta\lambda} = 0; & \widehat{Y}_\sigma + \gamma^{\alpha\beta} Y_{\alpha\beta\sigma} = 0. \end{array}\right\}$$

Эти соотношения фактически уже записывались в §2.2 при рассмотрении алгебраической классификации Петрова пространств Эйнштейна. Они выражают матрицу Z через компоненты матрицы X, характеризуют свойства симметрии матрицы Y и следы матриц X и Y.

Алгебраический подход и диадный метод. Вдиадном расщеплении (7.41) вектор τ^μ определяется используемой системой отсчета, а вектор l^μ должен задаваться с помощью некоторой геометрической характеристики пространства-времени, соответствующей волне. Наиболее подходит для этой цели изотропный вектор Дебеве, являющийся собственным вектором матрицы тензора Римана-Кристоффеля (тензора Вейля). Если волновой вектор (7.41) направить вдоль вектора Дебеве, то из уравнений, установленных Дебеве [147] для различных алгебраических подтипов пространств, можно получить интересные соотношения между продольными, продольно-поперечными и поперечно-поперечными компонентами тензора кривизны. Эти соотношения аналогичны свойства компонент векторов электрической **E** и магнитной H напряженностей в электромагнитной волне. При этом тензор X является аналогом электрической напряженности, а тензор Y - аналогом магнитной напряженности. Запишем через компоненты (9.13) - (9.15) уравнения Дебеве в порядке сужения удовлетворяющих им множеств пространственно-временных многообразий:

Уравнения Дебеве дяя подтипа I Петрова имеют вид:

$$k^\beta k^\mu k_{[\rho} R_{\alpha]\beta\mu[v} k_{\lambda]} = 0,$$

где k^6 - изотропный вектор Дебеве; [...] - символ антисимметризации. Используя диадные проекции этих уравнений, находим соотношение, связывающее поперечно-поперечные компоненты матриц X и Y:

$$-\bar{X}_{\sigma\lambda} + \bar{Z}_{\sigma\lambda} \pm \left(\bar{Y}_{\sigma\lambda} + \bar{Y}_{\lambda\sigma}\right) = 0$$

Уравнения Дебеве для подтипов II и D.

$$k^{\beta}k^{\mu}\left(R_{\alpha\beta\mu\nu}k_{\lambda} - R_{\alpha\beta\mu\lambda}k_{v}\right) = 0$$

приводят к соотношениям:

$$-\bar{X}_{\sigma\lambda} + \bar{Z}_{\sigma\lambda} \pm \left(\bar{Y}_{\sigma\lambda} + \bar{Y}_{\lambda\sigma}\right) = 0; \widehat{Y}_{\sigma} \pm X_{\sigma} = 0$$

Отсюда следует, что продольно-поперечные компоненты X_{σ} и $\widehat{Y}_{\sigma}$ матриц X и Y по модулю равны друг другу, а поперечно-іоперечные компоненты связаны, как и в (9.17а).

Уравнения Дебеве для подтипа III

$$k^{\mu}\left(R_{\alpha\beta\mu v}k_{\lambda} - R_{\alpha\beta\mu\lambda}k_{v}\right) = 0$$

означают, что

$$X_{\sigma} \pm \widehat{Y}_{\sigma} = 0; Y_{\rho\sigma\lambda} \mp Z_{\rho\sigma\lambda} = 0$$
$$\bar{X}_{\lambda\sigma} \pm \bar{Y}_{\lambda\sigma} = 0; \bar{Y}_{\sigma\lambda} \pm \bar{Z}_{\sigma\lambda} = 0$$

Соотношения (9.19а) означают равенство друг другу продольнопоперечных компонент матриц X, Y и Z, а (9.19б) означают равенство поперечно-поперечных компонент матриц X и Y (Y и Z). Учитывая соотношения (9.16), в частности равенство нулю следа Y, находим, что продольная компонентя $\hat{X} = 0$ и $Z_{\alpha\beta\mu\nu} = 0$.

Уравнения Дебеве для подтипа N

$$k^{\alpha}R_{\alpha\beta\mu} = 0$$

означают, что все продольные и продольно-поперечные компоненты тензора Римана - Кристоффеля равны нулю, а поперечно-поперечные компоненты матриц X и Y одинаковы. Это полностью соответствует свойствам электромагнитной волны. Можно сказать, что гравиинерциальный процесс определяется одним тензором $\bar{X}_{\sigma\lambda}$, причем его след $\bar{X}_{\lambda\sigma}\gamma^{\sigma\lambda} = 0$.

Классификация гравиинерциальных волновых процессов по диадным физико-геометри ческим тензорам и оптическим иннариантам. В общем случае имеется 11 диадных физико-геометрических тензоров (7.4) - (7.14), однако для ряда конкретных процессов число таких независимых величин существенно уменьшается. Рассмотрим некоторые из них в порядке сужения множеств метрик.

Для волнового гравиинерциального процесса естественно ожидать, что вектор k^{μ} удовлетворяет условию геодезичности (7.43). Оно соответствует соотношениям (7.44) и (7.45) между диадными физико-геометрическими тензорами. Как уже отмечалось, волновой процесс можно охарактеризовать тремя оптическими скалярами, которые при учете (7.43) принимают вид (7.46) (7.48).

Пусть волновой процесс рассматривается в нормальной системе отсчета и оптический инвариант поворота равен нулю ($\Omega^2 = = 0$); тогда такую ситуацию удобно описывать кинеорометрческой калибговкой диады. В этой калибровке $\bar{A}_{\mu\nu} \equiv 0; a_{\mu\nu} \equiv 0 \rightarrow$ $\rightarrow \Omega^2 \equiv 0; Q_{\mu} \equiv 0$. В рассматриваемом случае в пространственном сечении нормальной системы отсчета определен 2-мерный волновой фронт, ортогональный k^{μ} и характеризуемый метрическим тензором $\gamma_{\xi\eta}$. Все величины можно обозначить индексами ξ, η, $\varphi... = 2, 3$. Условия (7.44), (7.45), наложенные на восемь диадных физико-геометрических тензоров, упрощаются из-за того, что $Q_{\mu} \equiv 0$

Монадную классификацию гравиинерциальных волновых процессов, описанных в \$9.3, теперь можно детализировать. Будем называть волновой гравиинерциальный процесс [150]: продольнонесвободным, если $\bar{F}_{\xi} = 0; \widehat{F} \neq 0$; поперечно-несвободным, если $\bar{F}_{\xi} \neq 0; \widehat{F} = 0$; общим несвободным, если $\bar{F}_{\xi} \neq 0; \widehat{F} \neq 0$; свободным, если $\bar{F}_{\xi} = 0; \widehat{F} = 0$.

Сферическими гравиинерциальными волнами согласно опре- делению Робинсона и Траутмана [151] называют волны, удовлетворяющие условиям:

$$\left.\begin{array}{c}\varepsilon=(1/2)k^{\mu}_{;\mu}\neq 0\\ \sigma^2=0; k_{\alpha,\beta}-k_{\beta,\alpha}=0\rightarrow\Omega^2=0\end{array}\right\}$$

В диадном виде эти условия означают:

$$\left.\begin{array}{c}\vec{D}\pm d\neq 0\\ \widehat{D}\mp\hat{F}+(1/\omega^2)(\omega,vk^v)=0; \bar{F}_{\mu}+f_{\mu}\mp 2(Q_{\mu}+q_{\mu})=0\\ \bar{A}_{\mu v}\pm a_{\mu v}=0; F_{\mu}-f_{\mu}\mp 2(q_{\mu}-Q_{\mu})+(2/\omega)\omega,v\gamma^v_{\alpha}=0;\\ \left(\bar{D}_{\mu v}\pm d_{\mu v}\right)\left(\bar{D}^{\mu v}\pm d^{\mu v}\right)=(1/2)(\bar{D}\pm d)^2.\end{array}\right\}$$

ферические гравиинерциальные волны допускаются пространствами только подтипов II и D по классификации Петрова.

Плоские гравиинерциальные волны согласно определению Кундта [152] соответствуют обращению в нуль всех трех оптических скаляров:

$$\varepsilon=0;\Omega^2=0;\sigma^2=0$$

:Это означает, что выполняются условия (9.22б), а вместо (9.22а) должно быть

$$\bar{D}\pm d=0$$

Из теоремы Шевретона следует, что плоские волны допускаются только пространствами подтипов III и N.

Гравиинерциальные волны подтипа N имеют ковариантнопостоянный волновой вектор

$$k_{\mu;v}=0$$

Справедливо и обратное утверждение, т. е. если пространство-время допускает векторное поле со свойством (9.25), то оно принадлежит подтипу N по Петрову, причем k_{μ} изотропно и етинственно. Соответствующие этому подтипу уравнения Дебеве (9.20) являются условиями интегрируемости (9.25). В диадном виде (9.25).означает, что

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{F}\mp\omega,v\tau^v/\omega=0; q_{\alpha}+\Lambda_{\alpha}-Q_{\alpha}\mp(\omega_{,v}/\omega)v^v_{\alpha}=0\\ \widehat{D}^v\pm\omega,v\\ \bar{D}_{\alpha\beta}\pm\omega=0; d_{\alpha\beta}+\bar{A}_{\alpha\beta}\pm a_{\alpha\beta}=0; f_{\alpha}\mp 2(q_{\alpha}+Q_{\alpha})=0\\ \bar{F}_{\alpha}\pm 2f_{\alpha}=0\end{array}\right\}$$

28.9.5 5. Examples of Exact Wave Solutions of Einstein's Equations

Рассмотрим несколько точных решений уравнений Эйнштейна, которые удовлетворяют тем или иным критериям гравитационных волн. Волновы е мет риии подтип а N. Метрика Такено чаще всего приводится в виде

$$ds^2=(P+S)d\dot{x}_0^2-2Sdx_0dx_1-(P-S)dx_1^2-$$
$$-Bdx_2^2-Adx_3^2-2Ddx_2dx_3,$$

где A,B,D,P и S-функции аргумента x^0-x^1. Уравнения Эйнштейна соответствуют условию, налагаемому на функции

$$M_{,1,1}-(M_{,1})^2/M-A_{,1}B,1/(D,1)^2=0,\text{ где } M\equiv AB-D^2;$$

единица после запятой означает дифференцирование по x^1.

Определим систему отсчета кинеорометрической калибровкой диады в использованной здесь системе координат. Тогда составляющие метрического тензора имеют вид:

$$\left.\begin{array}{rl}\tau^{\mu} & =\left\{\frac{\sqrt{P-S}}{P};-\frac{S}{P\sqrt{P-S}};0;0\right\}\\ l^{\mu} & =\left\{0;\frac{1}{\sqrt{P-S}};0;0\right\};\gamma_{\xi\eta}=\begin{pmatrix}BD\\DA\end{pmatrix}.\end{array}\right\}$$

Легко тапже вычйслить диадные физико-геометрические тензоры:

$$\widehat{F} = \widehat{D} = \frac{2SP_{,1} - PP_{,1} - PS_{,1}}{2P(P-S)^{3/2}}; \bar{F}_\xi = f_\xi = q_\xi = \Lambda_\xi = 0;$$

$$\bar{D}_{\xi\eta} = -d_{\xi\eta} = -\gamma_{\xi\eta,1}/2\sqrt{P-S}.$$

Оказывается, вектор Дебеве непосредственно определяется диадой (9.28) : $k^\mu = \tau^\mu + l^\mu$. Видно, что k^μ удовлетворяет уравнению (9.26). Нетрудно убедиться, что отличны от нуля лишь поперечно-поперечные компоненты тензора Римана - Кристоффеля $\left(\bar{X}_{\xi\eta} = -\bar{Y}_{\xi\eta}\right)$, которые в общем случае нестационарны и пространственно-неоднородны. Таким образом, данная метрика удовлетворяет как алгебраическому критерию (Лихнеровича), так и референционному. На основе диадного подхода в рассматриваемой системе отсчета метрику Такено можно интерпретировать как описывающую продольно-несвободный гравиинерцциальний волновой процесс (когда прохождение волны сопровождается ускорением системы отсчета в направлении распространения волны).

Метрику Розена [144, с. 137] можно записать в виде

$$ds^2 = \exp(2\mu)\left(dx_0^2 - dx_1^2\right) - u^2\left(\exp(2v)dx_2^2 - \exp(-2v)dx_3^2\right),$$

где $\mu(u)$ и $v(u)$ - функции от $u = x^0 - x^1$, удовлетворяющие уравнению $2\mu, u = u(v,u)^2$.

Определим опять диаду $\{\tau, l\}$ кинеорометрическим способом в системе координат, в которой записана метрика (9.30). Тогда

$$\left.\begin{array}{ll} \tau^\mu & = \{\exp(-\mu); 0; 0; 0\}; \\ l^\mu & = \{0; \exp(-\mu); 0; 0\}; \end{array} \quad \gamma^{\xi\eta} = \left(\begin{array}{cc} \frac{\exp(-2v)}{u^2} & 0 \\ 0 & \frac{\exp(2v)}{u^2} \end{array}\right).\right\}$$

Для диадных физико-геометрических тензоров имеем:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{F} = \widehat{D} = \exp(-\mu)\mu'; \bar{F}_\xi = f_\xi = q_\xi = \Lambda_\xi = 0; \\ \check{D}_{\xi\eta} = -d_{\xi\eta} = (1/2)\exp(-\mu)\gamma_{\xi\eta}, \end{array}\right\}$$

где штрих означает дифференцирование по u. Легко убедиться, что опять вектором Дебеве является $k^\mu = \tau^\mu + l^\mu$ и выполняются условия (9.26).

Таким образом, опять данная метрика в системе отсиета (9.31) описывает продольно-несвободный гравиинерциальный волновой проиесс.

Объемные волны Бонди-Пирани - Робинсона [154] описываются метрикой

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 + \alpha dx_2^2 + 2\beta dx_2 dx_3 + \gamma dx_3^2,$$

где α, β, γ - функции от $u = x^0 + x^1$, удовлетворяющие уравнению

$$\lambda'' - (1/2)\lambda'(\ln\lambda)' - \alpha'\gamma' - \beta'^2 = 0; \lambda = \alpha\gamma - \beta^2 > 0.$$

Здесь штрих означает дифференцирование по u.

В кинеорометрической калибровке

$$\left.\begin{array}{ll} \tau^\mu = \{1; 0; 0; 0\}; & \gamma_{\xi\eta} = (-\alpha - \beta); \\ l^\mu = \{0; 1; 0; 0\}; & -\beta - \gamma \end{array}\right.$$

$$\widehat{F} = \widehat{D} = 0; \bar{F}^\xi = f^\xi = q^\xi = \Lambda^\xi = 0;$$

$$\bar{D}_{\xi\eta} = (1/2)\partial\gamma_{\xi\eta}/\partial x^0; d_{\xi\eta} = (1/2)\partial\gamma_{\xi\eta}/\partial x^1.$$

Вектор Дебеве равен $k^\mu = \tau^\mu - l^\mu$. В данной системе отсчета вектор ускорения равен нулю, т. е. этой метрикой описывается свободный гравиинерциальный волновой процесс (конгруэнция мировых линий системы отсчета является геодезической).

Интересным примером волновой метрики подтипа N является решение Переса [155]:

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - 2\varphi\left(dx_0 + dx_1\right)^2 - dx_2^2 - dx_3^2,$$

где функция $\varphi(x^0, x^1, x^2, x^3)$ удовлетворяет соотношению $\varphi,2,2+ +\varphi,3,3 = 0$. Для этой метрики в кинеорометрической системе отсчета имеем:

$$\tau^\mu = \left\{ V\overline{1+2\varphi}; -\frac{2\varphi}{\sqrt{1+2\varphi}}; 0; 0 \right\};$$
$$l^\mu = \left\{ 0; \frac{1}{\sqrt{1+2\varphi}}; 0; 0 \right\}; \gamma_{\xi\eta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$
$$\widehat{F} = \frac{\varphi_{,1}}{(1+2\varphi)^{3/2}}; \widehat{D} = \frac{1}{(1+2\varphi)^{3/2}} \left[\varphi_{,0}(1+2\varphi) - 2\varphi_{,1}(1+\varphi)\right];$$
$$\bar{F}_{\bar{5}} = f_{\bar{5}} = -q_{\bar{5}} = \frac{\varphi_{,\bar{5}}}{1+2,}; \Lambda_{\bar{5}} = 0; \bar{D}_{\xi\eta} = d_{\xi\eta} = 0.$$

Вектором Дебеве служит $k^\mu = \sqrt{1+2\varphi}\,(\tau^\mu - l^\mu)$.

Условия (9.26), налагаемые на волновой вектор, выполняются. Поперечно-поперечные компоненты тензора Римана - Кристоффеля $X_{\xi\eta} = \varphi, \xi, \eta/(1+2\varphi)$ могут удовлетворять референционному волновому критерию. Это определяется зависимостью φ от x^0 и x^1.

Если тензор $\bar{X}_{\xi\eta}$ не является ни стационарным, ни пространственно-однородным, то эта метрика в данной системе отсчета описывает общий несвободный гравиинерциальный волновой процесс. Распространение волны продольной деформации $\widehat{D}$ связано с продольным $(\widehat{F})$ и поперечным $\bar{F}_{\text{E}}$ ускорениями выбранной системы отсчета. Своеобразие этого случая заключается в постоянстве поперечно-поперечных компонент метрики, т. е. $\gamma_{\xi\eta} = \text{const}$.

Функция φ может оказаться такой, что тензор $\bar{X}_{\text{Б}}$ не удовлетворяет референционному волновому критерию (например, когда φ не зависит от x^0). Тогда метрику Переса следует рассматривать как пример метрики подтипа N, не являющейся волновой. Это аналогично ситуации в электродинамике, когда скрещенные статические однородные электрическое и магнитное поля характеризуются равными нулю инвариантами. Интересная интерпретация частного случая именно такого решения Переса предложена в работе [156]. Она состоит в том, что метрику можно понимать как описывающую искривление пространства-времени, вызванное световой нитью (лучом лазера) вдоль оси x^1.

Волновая метрика, не удовлетворяющая ни одному алгебраическому критерию. Примером такой метрики являются цилиндрические волны Эйнштейна-Розена [157], принадлежащие подтипу I по классификации Петрова. Эту метрику можно записать в виде

$$ds^2 = \exp(2\gamma - 2\psi)\left(dx_0^2 - d\rho^2\right) - \exp(2\psi)dz^2 - \rho^2\exp(-2\psi)d\varphi^2$$

где ψ и ψ-функции x^0 и ρ, удовлетворяющне следукщим уравнениям:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_0^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} - \frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} = 0$$
$$\frac{\partial\gamma}{\partial\rho} = \rho\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_0}\right)^2\right]; \frac{\partial\gamma}{\partial x_0} = 2\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\frac{\partial\psi}{\partial x_0}.$$

Видно, что уравнение для ψ (9.38) является хорошо известным линейным волновым, когда ρ, φ и z имеют смысл обычных цилиндрических координат. Его решение легко можно найти через цилиндрические функции; подставляя решение в (9.39), нетрудно отыскать соответствующую функцию γ.

Рассмотрим откалиброванную кинеорометрическим образом диаду. Тогда

$$\tau^\mu = \{\exp(\psi - \gamma); 0; 0; 0\}; \quad \gamma_{\xi\eta} = \begin{pmatrix} \rho^2\exp(-2\psi) & 0 \\ 0 & \exp(2\psi) \end{pmatrix};$$
$$l^\mu = \{0; \exp(\psi - \gamma); 0; 0\};$$

$$\bar{F}_{\rm s} = f_\xi = q_\xi = \Lambda_5 = 0; \widehat{F} = \exp(\psi-\gamma)\,(\psi'-\gamma')\,;$$
$$\widehat{D} = \exp(\psi-\gamma)(\gamma-\dot{\gamma});$$
$$\bar{D}_{\xi\eta} = \begin{pmatrix} -\rho^2\dot{\psi}\exp(-\psi-\gamma) & 0 \\ 0 & \dot{\psi}\exp(3\psi-\gamma) \end{pmatrix};$$

$d_{\xi\eta} = (\rho\exp(-\gamma-\psi)\,(1-\rho\psi') \quad 0 \quad \psi'\exp(3\psi-\gamma)\,,$
(here, there was a matrix, but latex is bad)

где точка означает дифференцирование по x^0, а штрих - дифференцирование по ρ. Отсюда ясно, что условия, налагаемые (7.43) на волновой вектор, выполняются, если $k^\mu = \exp(\psi-\gamma)\,(\tau^\mu \pm l^\mu)$ в выбранной калибровке. Вследствие линейности (9.38) здесь можно одновременно рассматривать расходящуюся и сходящуюся волны. Нетрудно показать, что данная метрика удовлетворяет референционному критерию. Таким образом, метрикой Эйнштейна - Розена описывается продольно-несвободный гравиинерциальный волновой процесс.

28.9.6 6. Weak Plane Gravi-Inertial Waves

ак уже указывалось, именно случай слабых плоских гравиинерциальных волн представляет наибольший практический интерес для земного наблюдателя, находящегося в слабом гравитационном поле далеко от возможных космических источников гравитационного излучения.

Начнем с изложения теории слабого гравиинерциального поля (не обязательно волнового) в диадной формулировке [158], причем, имея в виду дальнейшее ее применение к волновым процессам, воспользуемся кинеорометрической калибровкой. В качестве исходных выберем следующие представления контравариантных диадных составляющих метрического тензора:

$$\left.\begin{array}{c} \tau^0 = 1 + a^{00}/2; \tau^i = a^{0i}; l^{\mathbf{1}} = 1 - a^{11}/2; l^0 \equiv 0; \\ l^\xi = -a^{15}; \gamma^{\xi\eta} = -\varepsilon^{\xi\eta} - a^{\xi\eta}; \gamma^{0\mu} = \gamma^{1\mu} = 0 \end{array}\right\}$$

где все $a^{\mu v} \ll 1$. Приведенные величины в дальнейшем будем рассматривать как основные переменные. Заметим, что в кинеорометрической калибровке эти 10 величин - все отличные от нуля в ней контравариантные компоненты τ^μ, l^μ и $\gamma^{\mu v}$.

Для ковариантных компонент τ_μ, l_μ и $\gamma_{\mu\nu}$ имеем разложения в бесконечные ряды. В первом приближении находим:

$$\left.\begin{array}{l} \tau_0 \approx 1 - a^{00}2; l_0 \approx a^{01}; l_1 \approx -\,(1 + a^{11}/2)\,; \tau_i \equiv 0; \\ \gamma_{0\xi} \approx -a^{0\xi_\xi}; \gamma_{1\xi} \approx a^{1\xi}; \gamma_{\xi\eta} = -\varepsilon_{\xi\eta} + a^{\xi\eta}; l_\xi \equiv 0. \end{array}\right\}$$

Диадные физико-геометрические тензоры в общем случае также представляются в виде рядов. Запишем их в первом приближении:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{F} \approx \frac{1}{2}a^{00}_{,1}; \bar{F}_\xi \approx \frac{1}{2}a^{00}_{,\xi}; f_\xi \approx \frac{1}{2}a^{11}_{,\xi}; q_\xi = \frac{1}{2}a^{01}_{,\xi}, \\ \widehat{D} \approx (1/2)a^{11}_{,0} + a^{01}_{,1}; \Lambda_\xi \approx (1/2)\left(a^{1\xi}_{,\mathrm{u}} + a^{0\xi}_{,1}\right) \\ \widehat{D}_{\xi\eta} \approx (1/2)\left(a^{\xi\eta}_{,0} - a^{0\xi}_{,\eta} - a^{0\eta}_{,\xi}\right); d_{\xi\eta} \approx (1/2)\left(a^{\xi\eta}_{,1} - a^{1\xi}_{,\eta} - a^{1\eta}_{,\xi}\right). \end{array}\right\}$$

В этом приближении диадные производные от физико-геометрических тензоров следует рассматривать как частные производные, поэтому выпишем уравнения Эйнштейна в диадном виде (в вакууме) с точностью до величин первого порядка по $a^{\mu v}$:

$$G_{\mu\nu}\tau^\mu\tau^v \approx \partial_L d + \tilde{\nabla}_\varphi f^\varphi - (1/2)^2 R = 0$$
$$G_{\mu\nu}\tau^\mu l^v \approx \partial_L \bar{D} - \tilde{\nabla}_\varphi\,(\Lambda^\varphi + q^\varphi) = 0$$
$$G_{\mu\nu}\tau^\mu\gamma^v_\xi \approx -\tilde{\nabla}_\eta\left[\bar{D}^\eta_\xi + \gamma^\eta_\xi(\bar{D} - \tilde{D})\right] + \partial_L\,(\Lambda_\xi - q_\xi) = 0;$$
$$G_{\mu\nu}l^\mu l^v \approx \partial_T\bar{D} + \tilde{\nabla}_\varphi\bar{F}^\varphi + (1/2)^2 R = 0$$
$$G_{\mu\nu}l^\mu\gamma^v_\xi \approx -\tilde{\nabla}_\eta\left(d^\eta_\xi + \gamma^\eta_\xi d\right) + \partial_T\,(\Lambda_\xi + q_\xi) + \tilde{\nabla}\xi\widehat{F} = 0;$$

$$R_{\mu\nu}\gamma^{\mu}_{\xi}\gamma^{\nu}_{\eta} = \partial_T \bar{D}_{\xi\eta} - \partial_L d_{\xi\eta} + {}^2R_{\xi\eta} + (1/2)\left[\tilde{\nabla}_{\xi}\left(\bar{F}_{\eta} - f_{\eta}\right) + \tilde{\nabla}_{\eta}\left(\bar{F}_{\xi} - f_{\xi}\right)\right] = 0$$

где

$${}^2R_{\xi\eta} \approx (1/2)\left(a^{\eta\varphi}_{,\xi,\varphi} + a^{\xi\varphi}_{,\eta,\varphi} - a^{\xi\eta}_{,\varphi,\varphi} - a^{\varphi\varphi}_{\substack{\xi \\ ,,\eta}}\right)$$

Пусть имеет место слабый гравиинерциальный волновой процесс с волновым вектором $k^{\mu} = \tau^{\mu} \pm l^{\mu}$ и пусть этот процесс яв-ляется плоским по Кундту, т. е. выполняются условия (9.22б) и (9.24). Такие процессы могут описывать широкий класс как свободных, так и продольно- и поперечно-несвободных гравиинерциальных волновых явлений. В частности, могут быть и процессы, соответствующие метрике Переса.

Ограничимся рассмотрением свободных гравиинерциальных волновых процессов, соответствующих объемным волнам Бонди Пирани - Робинсона (9.33). Тогда

$$\left.\begin{array}{l} \tau^{\mu} = \{1;0;0;0\} \to a^{00} = 0; a^{0i} = 0 \\ l^{\mu} = \{0;1;0;0\} \to a^{11} = 0; a^{1\xi} = 0 \end{array}\right\}$$

Остаются неизвестными три величины $a^{\xi\eta}$ зависящие от координат x^0 и x^1. Для диадных физико-геометрических тензоров имеем:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{F} = \widehat{D} = 0; \bar{F}_{\xi} = f_{\xi} = q_{\xi} = \Lambda_{\xi} = 0; {}^2R_{\xi\eta} = 0; \\ \bar{D}_{\xi\eta} = (1/2)a^{\xi\eta}_{,0}; d_{\xi\eta} = (1/2)a^{\xi\eta}_{,1} \end{array}\right\}$$

Из уравнений Эйнштейна (9.44-9.49) нетривиальными являются:

$$\partial_L d = 0 \to \left(\partial^2/\partial x_1^2\right)\left(a^{22} + a^{33}\right) = 0;$$
$$\partial_L \bar{D} = 0 \to \left(\partial^2/\partial x_0 \partial x_1\right)\left(a^{22} + a^{33}\right) = 0;$$
$$\partial_T \bar{D} = 0 \to \left(\partial^2/\partial x_0^2\right)\left(a^{22} + a^{33}\right) = 0;$$
$$\partial_T \bar{D}_{\xi\eta} - \partial_L d_{\xi\eta} = 0 \to \left(\partial^2/\partial x_0^2 - \partial^2/\partial x_1^2\right) a^{\xi\eta} = 0.$$

Преобразованиями координат на 2-мерной поверхности фронта (разрешенными в пределах кинеорометрической калибровки) всегда можно добиться, чтобы $a^{22} + a^{33} = 0$. Тогда остаются лишь уравнения (9.49а), являющиеся волновыми для двух независимых комбинаций: $a^{22} - a^{33}$ и a^{23}.

Таким образом, в слабом гравиинерциальном поле может реализовываться свободный аравиинерциальный волновой процесс, описываемый двумя независимыми поперечно-поперечными компонентами (2-мерной метрики): $\alpha = (1/2)\left(a^{22} - a^{33}\right); \beta = a^{23}$.

В рассмотренном приближении плоскому свободному гравиинерциальному волновому процессу соответствует метрика

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - (1+\alpha)dx_2^2 - (1-\alpha)dx_3^2 - 2\beta dx_2 dx_3.$$

Легко показать, что волновой вектор $k^{\mu} = \tau^{\mu} \pm l^{\mu}$ в данной калибровке и рассматриваемом приближении удовлетворяет условиям (9.26) (является ковариантно-постоянным), т. е. можно сказать, что метрика (9.52) принадлежит подтипу N по классификации Петрова и, следовательно, удовлетворяет алгебраическому критерию гравитационных волн Лихнеровича [159].

Отличные от нуля компоненты тензора Римана - Кристоффеля $X_{\xi\eta} = -Y_{\xi\eta} = \partial_T \bar{D}_{\xi\eta} = (1/2)\partial^2\gamma_{\xi\eta}/\partial x_0^2$ удовлетворяют референционному волновому критерию гравиинерциальных волн, если функции α и β нетривиально удовлетворяют волновым уравнениям (9.49a).

Особо следует подчеркнуть, что рассмотренный свободный волновой процесс не исчерпывает все возможности. Слабым плоским гравиинерциальным волнам соответствует еще множество несвободных волновых процессов.

28.9.7 7. Behavior of Instruments in a Weak Plane Gravi-Inertial Wave

Поведение систем из свободных пробных масс. Пусть прабные массы таковы, что можно выбрать сопутствующую им синхронную систему отсчета, и, кроме того, пусть τ^μ и направление распространения волны l^μ находятся кинеорометрической (хроноорометрической) калибровкой из метрики (9.52), в которой

$$\alpha = A\sin\left[(\omega/c)\left(x^0 - x^1\right)\right]; \beta = B\sin\left[(\omega/c)\left(x^0 - x^1\right) + \varphi\right]$$

$A \ll 1; B \ll 1$. Тогда τ^μ и l^μ имеют вид (9.50), т. е. волна распространяется вдоль оси x^1.

Возьмем точки-приборы, которые до прихода волны (при $A = 0, B = 0$) находились на одном расстоянии $\delta\sigma_0$ от какой-то выделенной точки O. Эти точки лежат на сфере радиуса $\delta\sigma_0$:

$$\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \delta x_3^2 = \delta\sigma_0^2$$

Когда волновой процесс достигает системы, расстояние от точки до другой близкой точки определяется по формуле

$$\delta\sigma = \sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \delta x_3^2 + \alpha\left(\delta x_2^2 - \delta x_3^2\right) + 2\beta\delta x_2\delta x_3}.$$

Характерно, что по определению данной калибровки пространственные координаты каждой точки-прибора неизменны, приборы «вморожены» в координатную сетку.

Рассмотрим отдельно поведение свободных пробных масс для процессов двух типов [160].

а) Пусть $\alpha \neq 0, \beta = 0$. Тогда

$$\delta\sigma = \sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \delta x_3^2 + \alpha\left(\delta x_2^2 - \delta x_3^2\right)}.$$

В координатном пространстве поверхность $\delta\sigma = \delta\sigma_0 = \text{const}$ является эллипсоидом:

$$\delta x_1^2/\delta\sigma_0^2 + \delta x_2^2(1+\alpha)/\delta\sigma_0^2 + \delta x_3^2(1-\alpha)/\delta\sigma_0^2 = 1$$

с полуосями $\delta\sigma_0, \delta\sigma_0/\sqrt{1+\alpha}, \delta\sigma_0/\sqrt{1-\alpha}$. В сечении $\delta x_1 = 0$ получим эллипс. В координатах плоской 2 -мерной поверхности (x^2, x^3) на рис. 17 изображены точки, попадающие на эллипс:

$$\delta x_2^2(1+\alpha)/\delta\sigma_3^2 + \delta x_3^2(1-\alpha)/\delta\sigma_0^2 = 1$$

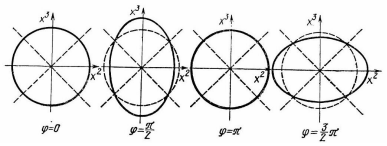


Рис. 17. Поведение свободных пробных частиц в метрике слабой плоской гравитационной волны ($\alpha \neq 0; \beta = 0$)

в течение периода волны. Примечательно, что есть два направления $\delta x_2 = \pm\delta x_3$, вдоль которых расстояния не меняются.

б) Пусть $\alpha = 0, \beta \neq 0$. Тогда

$$\delta\sigma = \sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \delta x_3^2 + 2\beta\delta x_2\delta x_3}.$$

Опять поверхность $\delta\sigma = \delta\sigma_0 = \text{const}$ образует эллипсоид. Сечение эллипсоида $\delta x_1 = 0$ представляет собой эллипс

$$\delta x_2^2/\delta\sigma_0^2 + \delta x_3^2/\delta\sigma_0^2 + 2\beta\delta x_2\delta x_3/\delta\sigma_0^2 = 1$$

который поворотом координат на угол $\alpha = 45^\circ$ можно привести к канонической форме

$$\delta y_2^2(1+\beta)/\delta\sigma_0^2 + \delta y_3^2(1-\beta)/\delta\sigma_0^2 = 1.$$

За период волны на этот эллипс попадают точки, изображенные на рис. 18. Опять имеются два направления $\delta y_2 = \pm\delta y_3$ (по старым осям x^2 и x^3), вдоль которых расстояния не меняются.

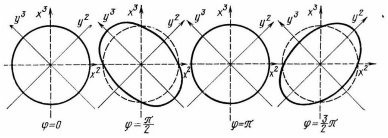


Рис. 18. Поведение свободных пробных частиц в метрике слабой плоской гравитационной волны ($\alpha = 0; \beta \neq 0$)

Таким образом, две поляризации плоской свободной гравиинерциальной волны соответствуют периодическим растяжениям u сжатиям 2-мерной поверхности одинаковой фазы вдоль пар взаимно перпендикулярных направлений, повернутых относительно друг друга на 45°. Направле-

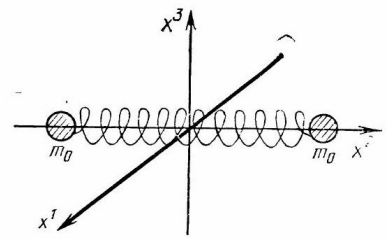


Рис. 19. Осциллятор из двух связанных пружиной масс ния максимальных удлинений (сокращений) для одной поляризации соответствуют несмещающимся точкам в другой поляризации и наоборот. Это отмечено на рисунках.

Поведение осциллятора в слабой плоской гравиинерциальной волне [161]. Рассмотрим несвободные пробные частицы, моделирующие в упрощенном виде детекторы гравитационного излучения.

Пост ановка з а д ачи. Пусть на линейный осциллятор, который состоит из двух одинаковых частиц массой m_0, соединенных пружиной жесткости k и длиной $2r_0$ в ненапряженном состоянии и ориентированных вдоль направления x^2 (рис. 19), падает вдоль x^1 плоско поляризованная во:на, описываемая метрикой

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - (1+\alpha)dx_2^2 - (1-\alpha)dx_3^2$$

тде $\alpha = A\sin\left[(\omega/c)\,(x^0 - x^1)\right]; A \ll 1$. Здесь одна поляризация оставлена для простоты. Систему отсчета будем задавать хронометрическим способом. Пространственные уравнения мировых линий масс записываются в данной калибровке следующим образом:

$$'p^i/d\tau = L^i_{sk}p^s v^k + mF^i + 2p^k\left(A^i_{.k} - D^i_k\right) + \widetilde{\Phi}^i$$

где $\widetilde{\Phi}^i$ - компоненты негравитационных сил, т. е. силы напряжения пружины Φ^i и диссипативной силы. Нам понадобится только компонента уравнения вдоль x^2.

Сила напряжения пружины (вдоль x^2) Φ_2 пропорциональна ее жесткости и абсолютному удлинению (индексы будем писать внизу)

$$\Phi_2 = -k\left(\sqrt{8\ell^2} - 2r_0\right)$$

где $\delta l^2 = -h_{ik}\delta x^i \delta x^k$ - квадрат длины пружины (δx^i - разность координат ее концов).

ачественный анализ процесса. Для данного процесса можно указать три пары характерных мировых линий (рис. 20). Тонкие непрерывные, линии соответствуют мировым линиям масс в отсутствие пружины (геодезические). Пунктирные линии изображают негеодезические. мировые линии равновесия пружины. Расстояние между ними всегда равно $2r_0$. Жирными линиями показаны истинные мировые линии масс,

связанных пружжиной. В данной задаче имеются два положения равновесия: ненапряженное положение пружины и геодезические. Отклонения масс от них характеризуются соответственно величинами ξ и ζ.

Рассмотрим поведение масс относительно трех систем отсчета, конгруэнциям которых принадлежит три пары указанных мировых линий. При этом ограничимся рассмотрением одной лишь правой частицы. Кроме того, предположим, что до прихода гравитационной волны частицы покоились и пружина была в ненапряженном состоянии. Тогда скорости, приобретаемые массами, и смещения будут иметь порядок амплитуды падаю-

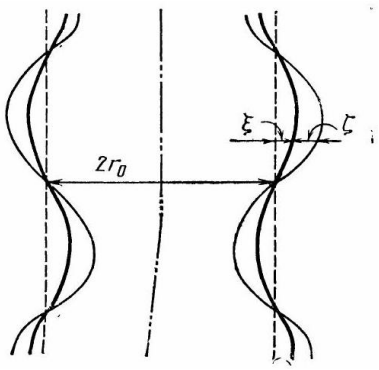


Рис. 20. Поведение осциллятора из двух связанных пружиной масс в метрике слабой плоской гравитационной волны щей волны.

а) Синхронная система отсиета ($A_{ik}=0, F_i=0$). Конгруэнции этой системы отсчета принадлежат тонкие и центральная штрихн пунктирная линии. Очевидно, что система координат, в которой записана метрика (9.56), является хронометрической для синхронной системы отсчета. Координата правой массы равна $\delta x^2 = r_0+\zeta$. Пренебрежем величинами $L^i_{sk}p^s v^k$ и $2p^k D^i_k$ (третьего порядков). Уравнение (9.57) тогда приобретет вид:

$$m_0 d^2\zeta/dt^2 = \widetilde{\Phi}_2$$

Из-за малости скоростей здесь и в дальнейшем пренебрегаем членами порядка $(v/c)^2$. Компонента Φ_2 силы напряжения пружины запишется следующим образом:

$$\Phi_2 = -2k\left(\sqrt{h_{22}\delta x_2^2} - r_0\right) = -2k\left(\sqrt{(1+\alpha)\left(r_0+\zeta\right)^2 - r_0}\right) \approx$$
$$\approx -2k\left[(\alpha/2)r_0 + \zeta\right].$$

Подставляя Φ_2 в (9.57а) и вводя диссипативную силу, получаем:

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{2k}{m_0}\zeta + \frac{\lambda}{m_0}\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{k}{m_0}\alpha r_0.$$

Это уравнение отличается от веберовского [157] [см. также (9.59в) ниже] тем, что справа в качестве коэффициента стоит k/m_0, а не половина квадрата частоты падающего излучения.

Если возле массы осциллятора (или торца цилиндра Вебера) повесить покоящуюся до прихода волны пробную массу на длинной нити (или поместить рядом на борту спутника), то ζ будет определять относительное смещение пробной и связанной масс (или массы и торца цилиндра Вебера).

б) Сопутствующая массам система отсцета. Координаты рассматриваемых масс в этой системе отсчета неизменны. Тогда $v^i = p^i = 0$, а уравнения (9.57) существенно упрощаются:

$$-mF_2 = \widetilde{\Phi}_2$$

и имеют смысл равенства силы инерции силе напряжения пружины. Рассматриваемому случаю соответствует хронометрическая система координат, получающаяся из исходной (9.56) преобразованиями $x'^0 = x^0; x'^1 = x^1; x'^2 = x^2\left[1+\eta\left(x^0\right)\right]; x'^3 = x^3$, где $\eta\left(x^0\right) \ll 1$ и имеет порядок амплитуды

падающей волны. В этой системе координат с точностью до величин первого порядка имеем: $g'_{00} = 1$; $g'_{02} \approx x_2\eta; g'_{22} \approx -(1+\alpha-2\eta) = -h'_{22}$. Здесь и далее точка означает дифференцирование по времени выбранной системы отсчета. Подставляя последние соотношения в выражение для ускорения системы отсчета (3.78), получаем в точке нахождения массы $F_2 = g_{02,0} = r_0\eta$. Силу напряжения пружины находим в виде

$$\Phi_2 = -2k\left(\sqrt{h'_{22}\delta x'^2_2} - r_0\right) = -2kr_0(\sqrt{1+\alpha-2\eta}-1) \approx$$
$$\approx -2kr_0(\alpha/2-\eta).$$

Подставляя два последних выражения в (9.57б), записываем уравнение колебаний:

$$\frac{d^2}{dt^2}(r_0\eta) + \frac{2k}{m_0}(r_0\eta) + \frac{\lambda'}{m_0}\frac{d}{dt}(r_0\eta) = \frac{k}{m_0}r_0\alpha.$$

Здесь опять введена диссипативная сила. Это уравнение совпадает с (9.59а), если $\zeta = -r_0\eta$.

В эксперименте Вебера [162], где сигнал снимали с пьезодатчиков, жестко связанных. цилиндром, наблюдаемой, по-видимому, является величина $F_2 = r_0\eta$. Однако тогда вынуждающая сила отличается от теоретически полученной Вебером.

в) Система отсчета ненапряженной пружины. Пусть ее конгруэнции принадлежат пунктирные линии и средняя мировая линия (на рисунке штрихпунктирная). Остальные линии определяются из условия $h'_{ik}x'x'^k = \text{const}$. В хронометрической системе координат этой системы отсчета пространственные координаты x'^i мировых линий постоянны. Учитывая указанные условия, находим преобразования исходной системы координат, в которой записана метрика (9.56), в хронометрическую систему координат данной системы отсчета: $x'^0 = x^0; x'^1 = x^1;\quad x'^2 = x^2(1-\alpha/2); x'\mathbf{y} = x^3$. Искомая метрика имеет вид:

$ds^2 = dx_0^2 - x_2\dot{\alpha}dx_0dx_2 - dx_1^2 - dx_2^2 - x_2(\partial\alpha/\partial x_1)dx_1dx_2 - (1+\alpha)dx_3^2.$

(9.56 В)

Координаты массы $\delta x_2 = r_0 + \xi$, где ξ - малая величина порядка α. Сила напряжения пружины равна:

$$\Phi_2 = -2k\left(\sqrt{-g_{22}(r_0+\xi)^2} - r_0\right) \approx -2k\xi.$$

Оставляя в (9.57) только величины первого порядка, получаем:

$$m_0\dot{\xi} = m_0F_2 - 2k\xi$$

Учитывая, что в данной системе отсчета $\tau_2 = g_{02}/\sqrt{g_{00}} = -x_2\dot{\alpha}/2$; $F_2 \approx -(x_2/2)\ddot{\alpha}$, и вводя диссипативную силу, находим уравнение колебаний

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{2k}{m_0}\xi + \frac{\lambda''}{m_0}\frac{d\xi}{dt} = \frac{\omega^2}{2}\alpha r_0$$

совпадающее с веберовским [157].

По-видимому, в эксперименте Брагинского [163], где сигнал снимали с емкостного датчика, непосредственно регистрировалась величина ξ, определяющая удлинение прибора.

О бсужждени и р ез ул ь т а тов. В использованном приближении упругие силы пружины (9.58) во всех трех системах отсчета одинаковы, откуда следует, что

$$\xi = r_0(\alpha/2-\eta) = (\alpha/2)r_0 + \zeta$$

Подставив в уравнение (9.59в) вместо ξ величину $r_0(\alpha/2-\eta)$, получаем уравнение (9.59б). Таким образом, уравнения (9.59в) и (9 59а) [или (9.59б)] описывают колебания одной и той же миро- вой линии несвободной массы относительно двух положений равновесия: дяя пружины и геодезических. При резонансе $\left(\omega = \sqrt{2k/m_0}\right)$ эти уравнения совпадают. При отсутствии гравитационной волны положения равновесия

тождественны и уравнения совпадают В отсутствие пружины уравнения (9.59а) и (9.59б) тривиальны, а уравнение (9.59в) описывает колебания свободных масс.

Сделаем несколько замечаний:

Приведенные рассуждения касаются поправки к оценке воз-буждения, оказываемого волной на детектор. Обычно ожидается, что сигнал короткий, так что экспериментаторы измеряют колебания возбужденного детектора в отсутствие гравитационных волн (в плоском пространстве-времени).

Аналогичные рассуждения можно было бы провести для одной большой массы M (движущейся практически по геодезической) и малой массы $m_0 \ll M$ на пружинке жесткости k и длиной r_0 в ненапряженном состоянии. Результат будет отличаться заменой собственной частоты $\sqrt{2k/m_0}$ величиной $\sqrt{k/m_0}$.

28.10 Towards Quantization of Gravity

28.10.1 1. Necessity of Constructing a Quantum Theory of Gravity

Под квантовой теорией гравитации будем понимать теорию, совмещающую принципы ОТО и квантовой теории. Пока такая теория не создана, однако есть немало весомых доводов, свидетельствующих о необходимости ее построения. Кратко перечислим важнейшие из них [164].

Стало ясно, что общее космологическое решение или, по крайней мере, решения, рассматриваемые сейчас как возможные приближения реального мира, имеют особенности. Другими словами, метрика пространственно-временного многообразия регулярналишь в течение ограниченного с той или иной стороны (или с обеих сторон) промежутка времени. Наличие особенностей-свиде-тельство того, что ОТО вблизи них теряет силу. Здесь появляются -огромные плотности материи - такие ситуации должны описываться новой теорией, охватывающей закономерности микромира, в частности включающей в себя квантовую теорию.

2.Параллельное существование квантовой теории и ОТО ставит вопросы о сути основных понятий классического пространствавремени в микромире. В частности, возникает необходимость ограничения области применимости таких понятий, как расстояние и время [14, с. 460; 165]. Сопоставляя квантовомеханическое соотношение неопределенностей и условие $g_{00} > 0$ в окрестности произвольной массы, можно получить ограничение (в сантиметрах)

$$\Delta x > \sqrt{\hbar k/c^3} \equiv l_0 \approx 1,6 \cdot 10^{-33}$$

где l_0 - так называемая планковская длина.

Уже более 100 лет перед физиками стоит вопрос, поставленный еще Риманом. «Вопрос о том, справедливы ли допущения геометрии в бесконечно малом, тесно связан с вопросом о внутренней причине возникновения метрических отношений в пространстве... Отсюда следует, что или то реальное, что создает идею пространства, образует дискретное многообразие, или же нужно пытаться объяснить возникновение метрических отношений чем-то внешним-силами связи, действующими на это реальное». Далее Риман добавлял: «Здесь мы стоим на пороге области, принадлежащей другой науке - физике, и переступать его не дает нам повода сегодняшний день» [14, с. 32].

Неужели нет такого повода и спустя 100 с лишним лет, когда наука шагнула далеко в микромир, когда создана блестяще подтвержденная опытом квантовая теория?! Как уже отмечалось в §1.3, представляется несомненным тот факт, что то дискретное реальное, которое, как ожидал Риман, ответственно за метрические свойства пространства, является квантовомеханическими закономерностями атома и молекулы.

Неуклонно крепнет убеждение физиков-теоретиков, что построение квантовой теории гравитации прольет свет на основныетрудности современной квантовой электродинамики и мезодинамики, в частности позволит корректно избавиться от ультрафиолетовых расходимостей. Об этом же свидетельствует наличие в теории гравитации длин - гравитационных радиусов частиц, а также появление планковской длины l_0.

Очень привлекательна идея с помощью квантовой гравитации построить теорию элементарных частиц. В одном из направлений таких исследований делаются попытки построения геометрических моделей элементарных частиц, а также идут поиски частицеподобных решений уравнений Эйнштейна и Максвелла.

Другое направление состоит в попытках включения гравитации в единую схему с другими физическими полями с помощью введения новых симметрий (например, использование суперсимметрий приводит к теории супергравитации).

Неоднократно высказывалось соображение, что при предположении лишь классическото характера гравитационного поля существовала бы принципиальная возможность определения координат и импульсов частиц при помощи гравитационных взаимодействий более точно, чем допускается соотношением неопределенностей. А это ведет к несостоятельности всей квантовой теории.

Следует учитывать также неутолимую жажду познания, поиска все более общих и глубоких принципов, охватывающих ужеизвестные. Сюда относится и желание объединить две важнейшие теории современной теоретической физики (квантовую теорию и ОТО), пока еще существующие независимо друг от друга. Такие исследования не могут быть бесплодными, рано или поздно они приведут к открытию новых важных закономерностей окружающего нас мира.

Ко всему сказанному следует добавить широко распространенную уверенность в тесной связи проблемы построения квантовой теории гравитации с проблемами гравитационных волн и энергии в ОТО.

28.10.2 2. Problem Statement and Difficulties of Gravity Quantization

Известно, что возникновению почти всех физических теорий предшествовало накопление экспериментального материала. Исключение составляла, пожалуй, лишь ОТО, появление которой больше было обязано накоплению значительного материала логического и философского характера. По-видимому, в этом отношении история появления квантовой теории гравитации может повториться. Построению искомой теории способствовало бы обнаружение и изучение гравитационных волн. В последнее время в связи с резким расширением экспериментальных гравитационных исследований появилась надежда на их обнаружение.

В этих условиях теоретику пока не остается ничего другого, как придерживаться тех или иных соображений логического или философского характера. Прежде всего следует различать три направления, связанных с разным пониманием природы гравитации. В рамках каждого из этих направлений по-разному ставится задача квантования гравитации и используются различные методы решения.

Согласно реляционной концепции пространстза-времени [166] гравитация описывается свойствами классических пространственно-временных отношений, в которые вступают друг с другом макрообъекты. При таком понимании гравитации наиболее существенны следующие вопросы. Как трансформируются закономерности ОТО при описании поведения микрообъектов? Приводит ли совмещение принципов ОТО и квантовой теории к более глубокому пониманию основных понятий пространства и времени? Можно ли сформулировать квантовую теорию на основе более глубоких понятий, а если можно, то каких? Как сосуществуют и переходят друг в друга различные отношения между частями материи в разных масштабах. Связана ли проблема квантования гравитации с проблемой квантования пространства-времени? И так далее.

Согласно субстанциальной концепции пространства-времени гравитация материальна. Это можно понимать так, что существует фон из единой материи, описываемой пространственно-временными характеристиками. Все другие виды материи, известные и неизвестные, есть проявление этой «первичной» материи в виде различных геометрических особенностей метрического, топологического или какого-либо иного характера.

При таком понимании сущности ОТО проблема квантования травитации прежде всего сводится к получению из геометрических 192 характеристик таких объектов, которые можно было бы отождествить с наблюдаемыми видами материи. Сюда относятся попытки получения частицеподобных решений уравнений Эйнштейна, введение «фридмонов», геонов и тому подобных образований [167]. Наиболее ярко представляет это направление Уилер, провозгласивший программу построения «массы без массы», «заряда без заряда», «поля без поля» [168].

В рамках данного подхода разумно ставить вопрос о получении не только известных видов материи, но и еще не открытых, которые могли бы описываться пространственно-

временными характеристиками более непосредственным образом. Таким видом материи могут быть и пока гипотетические гравитоны.

Этот подход обычно связывают с именем Клиффорда, тогда как первый стоит ближе к точке зрения Маха.

Возможна промежуточная концепция пространства-времени. Согласно последней гравитацию можно рассматривать отчасти как материю, а отчасти как характеристику свойств пространстваремени. Эта точка зрения в значительной степени навеяна часто проводимой аналогией между гравитацией и теорией электромагнитного поля, где, как известно, электромагнитный потенциал можно разделить на продольную и поперечные составляющие. Продольная составляющая описывает кулоновское поле, а поперечная - электромагнитные волны (фотоны). Тогда в теории гравитации наиболее существенна задача выделения так называемых динамических переменных гравитационного поля. На классическом уровне они описывают гравитационные волны, а при переходе к квантовой теории подлежат квантованию. По аналогии с электромагнитным полем в качестве гравитационных динамических переменных можно попытаться выбрать волновую часть поперечнопоперечных составляющих метрического тензора (метрику э $^{\text{по}}$ 2-мерной поверхности, ортогональной направлению распространения волн). Остальные составляющие можно понимать как величины, описывающие систему отсчета и другие референционные понятия.

Большая часть современных физиков придерживается данного (третьего) направления. Представляется, что наиболее глубокими и фундаментальными являются задачи первого направления. Именно их решение позволило бы совместить принципы квантовой теории и ОТО. Однако значительная часть этих задач не исключается в рамках второго и третьего направлений. Кроме того, к их решению можно идти различными путями. В этой главе постараемся проанализировать точку зрения большинства (третье направление).

На пути выделения динамических гравитационных переменных встречается несколько существенных трудностей. Важнейшими из них являются ковариантность и нелинейность ОТО.

Ковариантность теории приводит к использованию значительно большего числа переменных, нежели ожидаемое число динамических степеней свободы. Кроме того, имеется широкий класс (коор- динатных) преобразований, при которых применяемые переменные изменяются в довольно широких пределах. Необходимо разобраться в геометрическом и физическом смысле «лишних» переменных и уметь использовать произвол в выборе координат для описания динамических переменных. Эта задача будет решаться с помощью монадного и диадного методов в соответствующих калибровках. Заметим, что аналогичная трудность имеет место и в электродинамике.

Нелинейность ОТО приводит к чрезвычайно сложным соотношениям. между составляющими метрического тензора, рассматриваемыми как обобщенные координаты системы, и их обобщенными скоростями и импульсами. В результате затрудняется решение получающихся из уравнений Эйнштейна уравнений (вторичных) связей относительно тех или иных величин. Кроме того, нелинейность означает отсутствие суперпозиции отдельных частных решений. Это существенно новая ситуация по сравнению с электродинамикой, где свободное электромагнитное поле описывается линейными уравнениями.

28.10.3 3. Hamiltonian Formalism in Curved Spacetime

В реализации программы выделения динамических гравитационных переменных удается продвинуться наиболее далеко с помощью гамильтоновой формулировки ОТО. Рассмотрим ее с учетом двух существенных факторов: способа введения времени и вопроса о соотношении обобщенных скоростей и импульсов.

Введение времени. Есть два способа построения гамильтонова формализма. Один основан на формальном использовании в качестве времени координаты x^0, когда за обобщенные скорости выбраны частные производные от компонент поля по x^0. Этот способ назовем координатным каноническим формализмом. Другой способ основан на использовании времени относительно системы отсчета без вращения, когда возможно глобальное расщепление многообразия на совокупность 3-мерных пространственных сечений и время. Как уже подчеркивалось, такие системы отсчета наиболее адекватно описываются монадным методом в кинеметрической калибровке. 3 этом способе,

который назовем референционным каноническим формализмом, в качестве обобщенных скоростей следует использовать монадные к. и. временные производные.

Продемонстрируем эти два канонических формализма на примере скалярного поля, для которого второй указанный выше фактор не имеет места.

Плотность лагранжиана скалярного поля

$$\overline{\mathscr{L}} = \frac{V\overline{-g}}{2}\left(g^{\mu\nu}\frac{\partial\Psi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\Psi}{\partial x^\nu} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Psi^2\right)$$

запишем через монадные величины в кинеметрической калибровке:

$$\overline{\mathscr{L}} = (1/2)\tau_0 V\bar{h}\left[\mathscr{E}^2 + p_i p^i - \left(m^2c^2/\hbar^2\right)\Psi^2\right]$$

где учтены формулы (3.55) и $\sqrt{-g} = \tau_0\sqrt{h}$

а) Координатный канонический формализм.

В качестве обобщенной скорости берем $\partial\Psi/\partial x^0$, тогда обобщенный импульс равен:

$$P = \overline{\partial L}/\partial(\Psi, 0) = \sqrt{h}\mathscr{E} \to \mathscr{E} = (1/\sqrt{h})P$$

Плотность координатного гамильтониана скалярного поля определяется стандартным образом:

$$\overline{\mathcal{H}}_k = \frac{\partial\Psi}{\partial x^0}P - \overline{\mathscr{L}} = \frac{\tau_0}{2\sqrt{h}}P^2 -$$
$$-\frac{\tau^0\sqrt{h}}{2}\left(p_i p^i - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Psi^2\right) - \tau_0\tau^i\frac{\partial\Psi}{\partial x^i}P.$$

Существенно, что эта величина целиком не представляется через монадные к. и. величины и их плотности.

Канонические уравнения имеют обычный вид. Так,

$$\partial P/\partial x^0 = -\delta\overline{\mathcal{H}}_k/\delta\Psi;$$
$$\partial\Psi/\partial x^0 = \delta\overline{\mathscr{H}}_k/\delta P.$$

Здесь и в дальнейшем используется обозначение

$$\delta A/\delta B = \partial A/\partial B - \left(\partial/\partial x^i\right)\left(\partial A/\partial B_{,i}\right)$$

Видно, что (10.5а) с точностью до множителя совпадает с уравнением Клейна-Фока (3.54) (при $\alpha = 0$), а (10.6а) – с(10.3а).

б) Референционный канонически й форм ализм. В качестве обобщенной скорости выберем $+\partial_T\Psi = \mathcal{E}$, тогда обобщенный импульс

$$P = \partial\overline{\mathscr{L}}\partial\left({}^+\partial_T\Psi\right) = \tau_0\sqrt{h}\mathscr{E} \to \mathscr{E} = \left(1/\tau_0 V\bar{h}\right)P$$

Плотность референционного гамильтониана определится в монадном виде:

$$\overline{\mathscr{H}}_p = \left({}^+\partial_T\Psi\right)P - \overline{\mathscr{L}} = \frac{P^2}{2\tau_0\sqrt{h}} -$$
$$-\frac{\tau_0\sqrt{h}}{2}\left(p_i p^i - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Psi^2\right).$$

Непосредственным вычислением получаем референционные канонические уравнения:

$$+\partial_T P = -\delta\overline{\mathscr{H}\mathscr{H}}_p/\delta\Psi$$
$$+{}^+\Psi = \delta\overline{\mathcal{H}}_p/\delta P.$$

Опять (10.5б) совпадает с ранее записанным уравнением Клей- на-Фока, а (10.6б) совпадает с определением импульса (10.3б).

Здесь мы впервые столкнулись с монадной производной (в кинеметрической калибровке) от плотности. Ее легко найти из определения производной Ли от плотности (1.54):

$$+\partial_T(\sqrt{-g}\mathscr{E}) = \tau_0 V\bar{h}\left({}^{+}\partial_T\mathscr{E} - \mathscr{E}D\right).$$

Соотношение обобщенных скоростей и импульсов. Этот фактор обусловлен сингулярностью лагранжанов электромагнитного и гравитационного полей. На примере механических систем сказанное означает, что обобщенные скорости $\dot{q}_i$ некоторых обобщенных координат q_i входят в лагранжиан $\mathscr{L}(q,\dot{q})$ таким образом, что уравнения $p_i = \partial\mathscr{L}/\dot{q}_i$ нельзя решить относительно $\dot{q}_i(q,p)$. Это имеет место, когда часть указанных уравнений представляет собой соотношения только между q и p:

$$\varphi_m(q,p) = 0$$

называемые первичными связями. Для таких систем (как механических, так и теории поля) Дирак развил специальный канонический формализм [169], позволяющий уменьшать число независимых канонических переменных. Это осуществляется с помощью первичных уравнений связи (10.8) и соответствующих им вторичных уравнений связи, получающихся из классических скобок Пуассона для φ_m и функции Гамильтона $H(q,p)$:

$$\chi_m(q,p) = \{\varphi_m, H\} = 0$$

Для нашей цели особо интересен случай первичных связей $p_i - f_i(q) = 0$. Обычно добавлением к лагранжиану соответствующим образом подобранного дивергентного члена такие первичные связи можно привести к виду

$$p_i = 0.$$

В электродинамике и ОТО первичные связи имеют вид (10.10). В таких случаях устраняется часть импульсов. Сопряженные им обобщенные координаты соответствуют произвольным функциям в общем решении.

Продемонстрируем дираковский канонический формализм на примере свободного электромагнитного поля [64, 65].

Плотность лагранжиана электромагнитного поля $\bar{L} = -(\sqrt{-g}/4)F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ запишем через монадные величины в кинеметрической калибровке:

$$\begin{aligned}\overline{\mathscr{L}}_{\text{g.M}} = &-\left(\tau_0\sqrt{h}/2\right)\Big[-h^{ik} + \partial_T\widetilde{A}_i{}^{+}\partial_T\widetilde{A}_k + 2h^{ik+}\partial_T A_i\left(\widetilde{\nabla}_k - F_k\right)A - \\ &-h^{ik}\left(\tilde{\nabla}_i - F_i\right)A\left(\tilde{\nabla}_k - F_k\right)A + (1/2)H_{ik}H^{ik}\Big],\end{aligned}$$

где использованы проекции электромагнитных величин, введенные в (3.45), (3.46).

а) Координатный канонический формализм э ле к т р о м а гн и тн о го пол я.

В качестве обобщенных коорди- чат электромагнитного поля выберем A и $\tilde{A}_k$, а в качестве обобщенных скоростей используем $\partial A/\partial x^0$ и $\partial\mathscr{A}_k/\partial x^0$. Тогда три импульса имеют вид:

$$p^k = \partial\overline{\mathscr{L}}_{\text{э.}}/\partial\left(\widetilde{A}_{k,0}\right) = -\sqrt{h}E^k$$

где E^k - напряженность электромагнитного поля. Отсюда выражаем скорости через импульсы:

$$A_{i,0} = -\tau_0 p_i/V\bar{h} + \tau_0\left(\tilde{\nabla}_i - F_i\right)A - \tau_0\tau^k\widetilde{A}_{i,k} - h^k_{0,i}\tilde{A}_k. \quad (10.13\text{a})$$

Скорости, соответствующие компоненте A, в (10.11) отсутствуют, поэтому имеем одно первичное уравнение связи типа (10.10)

$$p^0 = \partial\overline{\mathscr{L}}_{.\text{м}}/\partial(A,0) = 0.$$

Плотность координатного гамильтониана электромагнитного поля введем обычно (она имеет не к. и. вид):

$$\overline{\mathscr{H}}_1 = p^0 A, 0 + p^{\widetilde{A}}\widetilde{A}_{k,0} - \overline{\mathscr{L}}_{.} = p^0 A, 0 - \left(\tau_0/2V\bar{h}\right) p_k p^k +$$

$$+ \left(\tau_0 V\bar{h}/4\right) H_{ik}H^{ik} + \tau_0 p^k \left(\tilde{\nabla}_k - F_k\right) A - p^k \left(\tau_0 \tau^l \widetilde{A}_{k,l} - h^l_{0,k}\tilde{A}_l\right). \quad (10.15\text{a})$$

Непосредственным вычислением находим, что половина канонических уравнений

$$p^k, 0 = -\delta\overline{\mathscr{H}}_1/\delta\widetilde{A}_k \to \left({}^+\partial_T - D\right) E^k = \left(\tilde{\nabla}_i - F_i\right) H^{ki}$$

совпадает с уравнениями (3.50) из второй пары уравнений Максвелла без источников в кинеметрической калибровке. Другая половина канонических уравнений

$$\partial A_k/\partial x^0 = \delta\overline{\mathscr{H}}_1/\delta p^k$$

совпадает с соотношениями (10.13а).

В теории поля обобщением скобок Пуассона, как известно, является выражение

$$\frac{dB\left(q^i, p^i\right)}{dx^0} = \{B, \overline{\mathscr{H}}\} = \frac{\delta B}{\delta q_i}\frac{\delta\overline{\mathscr{H}}}{\delta p^i} - \frac{\delta B}{\delta p^i}\frac{\delta\overline{\mathscr{H}}}{\delta q_i},$$

где q_i и p^i - канонически-сопряженные переменные поля. Согласно Дираку, подставляя сюда вместо $B\left(q_i, p^i\right)$ первичное уравнение связи (10.14), получаем вторичное уравнение связи

$$\left\{p^0, \overline{\mathscr{H}}_1\right\} = -\delta\overline{\mathscr{H}}_1/\delta A = \tau_0 V\bar{h}\widetilde{\nabla}_k E^k = 0.$$

Это уравнение вторичной связи совпадает с оставшимся уравнением (3.49) из второй пары уравнений Максвелла (без источников) *.

В работе [170] развит координатный канонический формализм электромагнитного поля в плоском пространстве-времени для обобщенных координат A_μ. Уравнения, которые можно представить в каноническом виде, в дальнейшем будем называть динамическими [например, к ним относятся уравнения Максвелла (10.16а)]. Первая пара уравнений Максвелла не является динамической, а, как известно, выполняется тождественно при постулировании соотношения между $F_{\mu\nu}$ и A_μ.

б) Референционный канонич е ский форм ализм э ле к т р о м а г н и т н о го п о л я. Выберем в качестве обобщенных скоростей монадные временные производные от спроектированных потенциалов: $+\partial_T A_i$ и $+\partial_T A$. Сопряженные им три импульса тогда имеют вид:

$$p^k = \partial\overline{\mathscr{L}}_{\text{э.М}}/\partial\left({}^+\partial_T\widetilde{A}_k\right) = -\tau_0\sqrt{h}E^k$$

Обратные соотношения находим в виде

$${}^+\partial_T\widetilde{A}_i = -p_i/\tau_0 V\bar{h} + \left(\tilde{\nabla}_i - F_i\right) A.$$

Скорость, соответствующая A, по-прежнему отсутствует в (10.11), поэтому уравнение первичной связи (10.14) остается в силе.

Плотность референционного гамильтониана электромагнитного поля определим обычно

$$\overline{\mathscr{H}}_2 = p^0 + \partial_T A + p^k\partial_T\widetilde{A}_k - \overline{\mathscr{L}}_{\text{э.м}} = p^{0+}\partial_T A - p_k p^k/\tau_0 V\bar{h} +$$
$$+p^k\left(\widetilde{\nabla}_k - F_k\right) A + \left(\tau_0 V\bar{h}/4\right) H_{ik}H^{ik}.$$

Уравнения (3.50) (без источников) из второй пары уравнений Максвелла опять можно представить как половину референционных канонических уравнений:

$$^{+}\partial_T p^k = -\delta\bar{H}_2/\delta A_k^- \to \left(^{+}\partial_T - D\right) E^k = \left(\tilde{\nabla}_i - E_i\right) H^{ki}.$$

Вторая половина референционных канонических уравнений

$$^{+}\partial_T \widetilde{A}_k = \delta\overline{\mathcal{H}}_2/\delta p^k$$

опять совпадает с соотношениями между импульсами и обобщенными скоростями (10.13б).

Оставшееся уравнение (3.49) из второй пары уравнений Максвелла вновь имеет смысл вторичного уравнения связи и может быть представлено как

$$\left\{p^0, \overline{\mathcal{H}}_2\right\} = \tau_0 V\bar{h}\widetilde{\nabla}_k E^k = 0$$

28.10.4 4. Hamiltonian Formulation of General Relativity and Kinemetric Invariants

Перейдем непосредственно к ОТО. В качестве исходной плотности гравитационного лагранжиана возьмем плотность скалярной кривизны $\mathscr{L}_0 = \sqrt{-g}^4 R$, где ^4R в монадном виде записано в (3.35). Будем использовать кинеметрическую калибровку. Добавим к $\overline{\mathscr{L}}_0$ дивергентные члены

$$\left.\begin{array}{l} 2\sqrt{-g}\left(F_i F^i - \widetilde{\nabla}_i F^i\right) = -2\left(\sqrt{-g}F^\lambda\right)_{,\lambda}; \\ 2\sqrt{-g}\left(D^2 - \partial_T D\right) = -2\left(\tau^\lambda\sqrt{-g}D\right)_{,\lambda} \end{array}\right\}$$

В результате получим плотность гравитационного лагранжиана:

$$\overline{\mathscr{L}}_{\text{гр}} = \tau_0 V\bar{h}\left(D^2 - D_{ik}D^{ik} + {}^3R\right).$$

а) Координатный канонический формализм О Т О.

Подчеркнем тесную связь канонического формализма с монадным методом задания систем отсчета в кинеметрической калибровке, для этого в качестве 10 обобщенных координат гравиинерциальной системы будем использовать четыре компоненты $|\tau^\mu$ (компоненты 4-скорости системы отсчета) и шесть компонент h^{ik} в кинеметрической калибровке [64, 72]*.

Обобщенными скоростями являются $\tau^\mu_{,0}$ и $h^{ik}_{,0}$ Обобщенные импульсы, соответствующие h^{ik}, находятся в виде

$$p_{ik} = \partial\overline{\mathscr{L}}_{\text{гр}}\partial\left(h^{ik}_{,0}\right) = \sqrt{h}\left(D_{ik} + h_{ik}D\right).$$

Они совпадают с импульсами в теории Дирака. Скорости через импульсы выражаются следующим образом:

$$h^{ik}_{,0} = -\left(2\tau_0/V\widetilde{h}\right)\left[p^{ik} + (1/2)h^{ik}p\right] - \\ - \tau^\alpha_{,l}\tau_0\left(h^{il}h^k_\alpha + h^{lk}h^i_\alpha\right) - \tau_0\tau^s h^{ik}_{,,s,},$$

где $p = -h^{ik}p_{ik} = -2\sqrt{h}D$. Видно, что в гравитационном лагранжиане (10.21) отсутствуют скорости $\tau^\mu_{,0}$. Эти скорости линейно входили в $\bar{L}_0 = \sqrt{-g}^4 R$, однако в результате добавления дивергентных членов (10.20) они были исключены, поэтому уравнения первичных связей опять имеют простой вид (10.10):

$$p_\mu = \bar{\partial}\mathscr{L}_{\text{гр}}/\partial\left(\tau^\mu_{,0}\right) = 0$$

Плотность координатного гравитационного гамильтониана построим обычно:

$$\overline{\mathscr{H}}_1 = p_\mu \tau^\mu_{,0} + p_{ik} h^{ik}_{,0} - \overline{\mathscr{L}}_{\text{гр}} + \text{ дивергентный член } =$$
$$= p_\mu \tau^\mu{}_{,0} - \frac{1}{\tau^0 \sqrt{h}} \left(p_{ik} p^{ik} - \frac{1}{2} p^2 \right) +$$
$$+ \frac{\sqrt{h}}{\tau^0} {}^3R + \frac{\tau^s}{\tau^0} \left(2 p^k_{s,k} - p_{ik} h^{ik}_{,s} \right)$$

оординатный канонический формализм ОТО был развит в работах Дирака [169, 171], который в качестве основных обобщенных координат гравнтационного поля нспользовал величины $g_{\mu v}$ (шесть компонент $g_{ih} = -h_{is}$ и четыре компоненты $g_{0\mu}$). Затем канонический формализм исследовали Арновит, Дезер, Мизнер [172], Уилер II др. [11] (за основные величины выбирали $g_{ik}, N = 1/\sqrt{g_{00}}$ и $N_i = g_{0i}$). Л. Д. Фаддеев [173] в качестве основных переменных брал $q^{ik} = (-g)\left(g^{0i} g^{0k} - g^{00} g^{ik}\right)$; $\lambda_0 = 1/g^{00} V - g \quad \lambda^k = g^{0k}/g^{00}$. где дивергентный член равен $-2\left(p^l_k h^k_0\right)_{,l}$. Эта плотность гамильтониана не является к. и. плотностью. В результате стандартных вычислений получаем, что шесть канонических уравнений

$$\partial p_{ik}/\partial x^0 = -\delta \overline{\mathscr{H}}_1 / \delta h^{ik} \to {}^4R_{ik} - (1/2) g_{ik} {}^4R = 0$$

совпадают с шестью монадными уравнениями Эйнштейна (3.38) в кинеметрической калибровке (в вакууме). Другие канонические уравнения

$$\partial h^{ik}/\partial x^0 = \delta \overline{\mathscr{H}}_{\mathbf{1}} / \delta p_{ik}$$

приводят к соотношениям между обобщенными скоростями и импульсами (10.23а).

Вторичные уравнения связей находят из классических скобок Пуассона для первичных связей и плотности координатного гамильтониана $\{p_\mu, \mathscr{H}_1\} = 0$. Они приводят к оставшимся четырем уравнениям Эйнштейна (3.36), (3.37) без правой части. Через канонические переменные вторичные уравнения связи записываются следующим образом:

$$\left\{p_0, \overline{\mathscr{H}}_1\right\} = -\delta \overline{\mathscr{H}}_1 / \delta \tau^0 = 0 \to \overline{\mathscr{H}}_H = 2V\bar{h} G^{00}/g^{00} =$$
$$= (1/V\bar{h}) \left(\frac{p^2}{2} - p_{ik} p^{ik} \right) - V\bar{h}^3 R = 0$$

-гамильтонова вторичная связь;

$$\left\{p_s, \overline{\mathscr{H}}_1\right\} = -\delta \overline{\mathcal{H}}_1 / \delta \tau^s = 0 \to \overline{H_{ss}} = 2\sqrt{h} G^0_s / \sqrt{g^{00}} =$$
$$= 2 p^k_{s,k} - p_{ik} h^{ik}_{,s} = 2V + \nabla_k \left(p^k_s / \sqrt{h} \right) = 0$$

продольные вторичные связи. Плотность координатного гравитационного гамильтониана можно представить в виде

$$\overline{\mathscr{H}}_1 = p_\mu \tau^\mu_{,0} + \left(1/\tau^0\right) \overline{\mathscr{H}}_H + \left(\tau^s/\tau^0\right) \overline{\mathscr{H}}_s,$$

где $\overline{\mathscr{H}}_H$ и $\overline{\mathscr{H}}_s$ не содержат переменных τ^μ.

б) Ре фере нционный канонии ч еский й формализ зм ОТО [63-65]. Читатель, наверное, уже обратил внимание на некоторую непоследовательность координатного канонического формализма ОТО, в котором компоненты τ^μ являются обобщенными координатами, тогда как с позиций монадного описания систем отсчета их следует считать компонентами 4-скорости системы отсчета. Будем рассматривать τ^μ как обобщенные скорости. В качестве обобщенных координат тогда должны выступать пространственно-временные координаты x^μ. Действительно, координаты можно понимать как набор из четырех скаляров. (При изменении системы координат они просто заменяются новыми.) Тогда τ^μ представляют собой производные Ли от координат

$$\mathring{\mathrm{A}}^{\&}_\tau x^\mu = \tau^v x^\mu_{,v} = \tau^v \delta^\mu_v = \tau^\mu$$

а параметром эволюции является интервал $S \equiv \tau$ вдоль мировых линий системы отсчета. Обобщенные импульсы, сопряженные x^μ, находятся обычным образом:

$$P_\mu = \delta\overline{\mathscr{L}}_{\mathbf{гр}}/\delta\tau^\mu = 2\tau_0 V\bar{h}G_{\mu\nu}\tau^\nu$$

где $G_{\mu v} = R_{\mu v} - (1/2)g_{\mu v}R$ - тензор Эйнштейна. Заметим, что

$$\frac{\delta\overline{\mathscr{L}}_{\text{гр}}}{\delta\tau^\mu} = \frac{\partial\bar{L}_{\text{гр}}}{\partial\tau^\mu} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial\overline{\mathscr{L}}_{\text{гр}}}{\partial\tau^\mu_{,i}} = \frac{\partial\overline{\mathscr{L}}_{\text{гр}}}{\partial\tau^\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\overline{\mathscr{L}}_{\text{гр}}}{\partial\tau^\mu_{,\alpha}} = 0,$$

так как в $\overline{\mathscr{L}}_{\text{гр}}$ отсутствуют $\tau^\mu_{,0}$, т. е. $\delta\overline{\mathscr{L}}_{\text{гр}}/\delta\tau^\mu$ представляет собой действие оператора Эйлера - Лагранжа на $\mathscr{L}_{\text{гр}}$, что в лагранжевой формулировке теории приводит к четырем уравнениям йнштейна (в вакууме) $G_{\mu\nu}\tau^v = 0$. Таким образом, в теории гравитации реализуется случай, когда (для вакуума) справедливы четыре первичные уравнения связи

$$P_\mu = 0$$

В качестве оставшихся обобщенных координат, как и в п. а), возьмем величины h^{ik}. Их обобщенные скорости следует определить через монадные временные производные ${}^+\partial_T h^{ik} = -2D^{ik}$. Обобщенные импульсы, соответствующие h^{ik}, получаем в виде

$$p_{ik} = \partial\overline{\mathscr{L}}_{\text{гр}}/\partial\left({}^+\partial_T h^{ik}\right) = \tau_0 V\bar{h}\left(D_{ik} + h_{ik}D\right).$$

Обратные соотношения имеют более элегантный вид, нежели (10.236):

$${}^+\partial_T h^{ik} = -\left(2/\tau_0 V\bar{h}\right)\left[p^{ik} + (1/2)h^{ik}p\right]$$

где $p = -h^{ik}p_{ik} = -2\tau_0\sqrt{h}D$.

Плотность референционного гамильтониана определим, как обычно:

$\overline{\mathscr{H}}_2 = P_\mu\tau^\mu + p_{ik} + \partial_T h^{ik} - \overrightarrow{\mathscr{L}}_{\text{гр}} = P_\mu\tau^\mu + \left(1/\tau_0 V\bar{h}\right)\left[(1/2)p^2 - p_{ik}p^{ik}\right]$ - $-\tau_0\sqrt{h^3}R$ (10.256)

Плотность референционного гамильтониана отличается от плотности координатного гамильтониана (10.30а), в частности, отсутствием члена, пропорционального вторичной продольной связи. Это получилось вследствие замены частной временной производной $h^{ik}_{,0}$ монадной производной $+\partial_T h^{ik}$.

Канонические уравнения для переменных x^μ, P_μ тривиальны:

$${}^+\partial_T P_\mu = -\delta\overline{\mathscr{H}}_2/\delta x^\mu = 0; \quad \partial_T x^\mu = \delta\overline{\mathscr{H}}_2/\delta P_\mu = \tau^\mu$$

Половина из оставшихся шести пар канонических уравнений эквивалентна шести уравнениям Эйнштейна

$$+\partial_T p_{ik} = -\delta\overline{\mathcal{H}}_2/\delta h^{ik} \to G_{ik} = 0$$

а другая половина

$$+\partial_T h^{ik} = \delta\overline{\mathcal{H}\mathcal{H}}_2/\delta p_{ik}$$

совпадает с соотношениями (10.23б).

Сформулируем выводы.

Как референционный, так и координатный канонические формализмы ОТО приводят к записи шести пространственно-спроектированных уравнений Эйнштейна в виде половины канонических уравнений. Вот почему эти уравнения Эйнштейна часто называют динамическими.

Оставшиеся четыре уравнения Эйнштейна в рассмотренных формализмах имеют различный характер. В координатном каноническом формализме они являются дираковскими вторичными уравнениями связи для оставшихся шести пар переменных, тогда как в референционном формализме они представляют собой первичные связи для четырех импульсов. Возможность выражения этих импульсов через оставшиеся шесть пар динамических переменных следует из вида плотности гравитационного лагранжиана и того, что вариационная производная по τ^μ в принципе не может привести к дифференцированию по времени.

В гамильтоновой формулировке ОТО четыре составляющие метрического тензора τ^{μ} оказались выделенными. С помощью монадного формализма можно четко физически интерпретировать их как 4-скорости системы отсчета. Эти величины, как уже отмечалось, позволяют относить физические и геометрические величины к используемой системе отсчета - описывают отношения физических сущностей в пространстве-времени - и, следовательно, не могут служить динамическими гравитационными переменными, т. е. в ожидаемом квантовом варианте теории гравитации (в третьем подходе) не должны квантоваться.

28.10.5 5. Separation of Two Pairs of Dynamical Variables Using the Dyad Method

Из оставшихся шести компонент 3-мерного метрического тензора h^{ik} и сопряженных им импульсов следует устранить еще четыре «лишние» пары сопряженных величин так, чтобы остались лишь две пары сопряженных динамических гравитационных переменных. К выводу, что должно остаться именно две пары динамических переменных, можно прийти различными путями, например исходить из соображений жесткости уравнений Эйнштейна и задачи Коши (см. гл. 12) или руководствоваться следующими соображениями '[174]: для 12 величин h^{ik} и p_{ik} имеют место четыре вторичные уравнения связи (10.28), (10.29); кроме того, можно использовать четыре координатных условия. В итоге получим: $12-4-4=4=2\times 2$, т. е. две степени свободы. Однако непосредственное формальное решение вторичных уравнений связи (четыре уравне- ния Эйнштейна в референционном подходе) представляет собой сложную, не решенную в общем случае задачу.

В этих условиях следует опираться на дополнительные соображения, позволяющие прояснить сложившуюся ситуацию. Такую возможность предоставляет использование диадного метода.

Диадный метод и динамическкие переменные. Учтем, что на классическом уровне динамическими переменными описываются волновые гравиинерциальные процессы, которым можно сопоставить изотропный волновой вектор $k^{\mu}=\omega\left(\tau^{\mu}\pm l^{\mu}\right)$. Таким образом, в любой системе отсчета волновой процесс характеризуется пространственным направлением распространения l^{μ}. Воспользуемся этим и в нормальных системах отсчета перейдем от шести компонент h^{ik} к набору диадных составляющих l^{i} и $\gamma^{\ni}$ в кинеорометрической калибровке. Это позволит интерпретировать возникающие в рассматриваемом формализме величины.

Построим референционный канонический формализм ОТО в диадном виде. Выразим плотность гравитационного лагранжиана (10.21) через диадные физико-геометрические величины и операторы. В кинеорометрической калибровке

$$\mathscr{L}_{\mathrm{rp}}=\tau_0 l_1\sqrt{\gamma}\left[\bar{D}^2-\bar{D}_{\xi\eta}D^{5\eta}-2\bar{D}\widehat{D}-2\partial_L d+2\left(\Lambda_{\xi}+q_{\xi}\right)\left(\Lambda^{\xi}+q^{\xi}\right)+\right.$$
$$\left.+d^2-d_{\xi\eta}d^{\bar{\xi}\eta}-2\left(\overline{\nabla\xi}+f_{\xi}\right)f^{\xi}+{}^2R\right].$$

Все, что касается четырех величин τ^{μ}, оставим без изменений, как в §10.4. Сосредоточим внимание на других шести составляющих метрического тензора. Выберем в качестве обобщенных координат величины $\widetilde{k}^{i}_{\pm}=\tau^{i}\pm l^{i}$ и γ. Тогда обобщенными скоростями будут:

$${}^{+}\partial_T\widetilde{k}^{i}_{\pm}=\pm\left(2\Lambda^{i}-l^{i}\widehat{D}\right);\quad {}_{+}{}^{+}\partial_T\gamma^{\xi\eta}=-2\bar{D}^{\xi\eta}$$

Так как $\pounds\tau^{\mu}=0$, определенные таким образом скорости для $\widetilde{k}^{i}_{\pm}$ совпадают со скоростями, сопряженными второму вектору диады l^{i}. Обобщенные импульсы находим обычным образом:

$$\left.\begin{array}{l}\pi_{\pm}=l^{i}\partial\overline{\mathscr{L}}_{\mathrm{rp}}/\partial\left(\partial_T k^{i}_{\pm}\right)=\pm 2\sqrt{-g}\bar{D}\\ \pi_{\xi\pm}=\partial\overline{\mathscr{L}}_{\mathrm{rp}}/\partial\left(\mp\gamma^{\bar{\epsilon}}_{\alpha}+\partial_T l^{\alpha}\right)=\pm 2\sqrt{-g}\left(\Lambda_{\xi}+q_{\xi}\right);\\ p_{\bar{\xi}}=\partial\overline{\mathscr{L}}_{\mathbf{rp}}/\partial\left({}^{++}\partial_T\gamma^{\bar{5}\eta}\right)=V-g\left(\bar{D}_{\xi\eta\eta}+\gamma_{\xi\eta}\bar{D}-\gamma_{\xi\eta}\widehat{D}\right).\end{array}\right\}$$

Определяя для этих переменных плотность референционного гамильтониана, запишем три пары продольно-поперечных и продольных канонических уравнений*:

Три пары канонических уравнений (10.37), (10.38) соответствуют канонической системе д.тя изотропного излучения в приближении геометрической пПТики [14+] : $\partial k^i/\partial\tau = -\partial H/\partial x^i; \partial x^i/\partial\tau = \partial H/\partial k^i$

$$+\,\partial_T \widetilde{k}^i_{\pm} = \delta\overline{\mathcal{H}}_{\text{rp}}/\delta\pi_{i\pm};$$
$$+\,\partial_T\pi_{\pm} = \delta\overline{\mathscr{H}}_{\text{rp}}/\delta\widetilde{k}^1_{\pm}; \quad ++\,\partial_T\pi_{\xi\pm} = -\delta\overline{\mathscr{H}}_{\text{rp}}/\delta\widetilde{k}^{\xi}_{\pm},$$

которые эквивалентны уравнениям Эйнштейна (в вакууме): $G_{\mu v}l^{\mu}\gamma^{v}_{\xi} = 0; G_{\mu\nu}l^{\mu}l^{\nu} = 0.$

Легко также записать в стандартном виде три пары поперечнопоперечных канонических уравнений, одна половина которых эквивалентна трем (поперечно-поперечным) уравнениям Эйнштейна $G_{\xi\eta} = 0$, а другая совпадает с соотношениями между обобщенными скоростями и импульсами.

Таким образом, использование диадного метода позволяет наглядно интерпретировать еще три пары сопряженных переменных и соответствующие им канонические уравнения. Разумно предположить, что эти переменные не могут претендовать на роль динамических гравитационных переменных.

Конформная инвариантность и динамически и пе ременные [175]. Для устранения из трех компонент $\gamma^{\text{Б}}$ еще одной «лишней» переменной воспользуемся соображениями конформной инвариантности на 2-мерных поверхностях фронта волны. Из величин γ^{E} можно образовать две алгебраически независимые конформно-инвариантные величины: $\tilde{\gamma}^{\xi\eta} = \gamma^{\xi\eta}/\sqrt{\|\gamma\gamma^{\xi\eta}\|} = V\bar{\gamma}\gamma^{\xi\eta}$ (или $\widetilde{\gamma}_{\text{э}} = \gamma_{\xi\eta}/\sqrt{\gamma}$) и одну конформно-неинвариантную $\sqrt{\gamma} \equiv \sqrt{\|\gamma_{\xi\eta}\|}$. Известно, что любые два 2-мерные римановы пространства конформны друг другу, т. е. их метрики в соответствующих системах координат различаются только значением конформного фактора: $\gamma^{\xi\eta} = \exp(-2\sigma)\gamma^{\xi\eta}; \gamma^{*}_{\xi\eta} = \exp(2\sigma)\gamma_{\xi\eta}\cdot$ Можно высказать гипотезу, что в подходяще выбранных системах отсчета динамическими гравитационными переменными являются две компоненты $\tilde{\gamma}^{\xi}$ и сопряженные им импульсы.

Введем бесследные плотности тензоров $\bar{D}_{\text{Б}}$ и $d^{\xi\eta}$:

$$\widetilde{D}_{\xi\eta} = (1/\sqrt{\gamma})\left[\bar{D}_{\xi\eta} + (1/2)^{*}\gamma_{\xi\eta}\bar{D}\right]; \quad \widetilde{d}_{\xi\eta} = (1/\sqrt{\gamma})\left[d_{\xi\eta} + (1/2)\gamma_{\xi\eta}d\right].$$

Вместо $\gamma^{5\eta}$ в качестве обобщенных координат будем рассматривать величины γ и $\ln\sqrt{\gamma}$, а в качестве их скоростей выражения:

$$\widetilde{v} = \widetilde{\partial}_T \ln\sqrt{\gamma} = -\widetilde{D}; \quad \tilde{v}^{\xi\eta} = \widetilde{\partial}_T\tilde{\gamma}^{\xi\eta} = -2\widetilde{D}^{\xi\eta}.$$

Остальные переменные оставим без изменения. Новые импульсы тогда находим в виде

$$\left.\begin{aligned}\tilde{p} &= \partial\widetilde{\mathscr{L}}_{\text{rp}}/\partial\tilde{v} = \tau_0\sqrt{h}(2\widehat{D} - \bar{D});\\ \widetilde{p}_{\xi\eta} &= \partial\widetilde{\mathscr{L}}_{\text{rp}}/\partial v^{\xi\eta\eta} = \tau_0\sqrt{\sqrt{h}}\widetilde{D}_{\text{s}\eta}.\end{aligned}\right\}$$

Плотность гамильтониана, соответствующая новому набору переменных,

$$\overline{\mathcal{H}}_{\mathbf{rp}} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left[\left(\frac{1}{2}\tilde{p}^2 - \tilde{p}_{\xi\eta}\tilde{p}^{\xi\eta}\right) + \frac{1}{2}\pi_{\xi}\pi^{\xi} + \frac{\pi^2}{8} + \right.$$
$$\left. + \frac{\pi\tilde{p}}{2} - 2\pi_{\xi}q^{\xi}\right] - V - g^3R.$$

Новые канонические уравнения можно записать следующим обра30М:

$$\widetilde{\partial}_T\widetilde{p}_{\xi\eta} = -\partial\overline{\mathscr{H}}_{\text{rp}}/\delta\tilde{\gamma}^{\xi\eta\eta}; \quad \widetilde{\partial}_T\tilde{p} = -\delta\overline{\mathscr{H}}_{\text{rp}}/\delta(\ln V\bar{\gamma});$$
$$\widetilde{\partial}_T\tilde{\gamma}^{\xi\eta} = \delta\overline{\mathscr{H}}_{\text{rp}}/\delta\widetilde{p}_{\xi\eta}; \quad \widetilde{\partial}_T(\ln\sqrt{\gamma}) = \delta\overline{\mathscr{H}}_{\text{rp}}/\delta\tilde{p}.$$

Канонические уравнения (10.42) приводят к трем уравнениям Эйнштейна соответственно в виде

$$\widetilde{G}_{\bar{\xi}\eta} = (1/\sqrt{\gamma})\left[\widetilde{G}_{\xi\eta} + (1/2)\gamma_{\xi\eta}\bar{G}\right] = 0; \quad G \equiv -\gamma^{5\eta}G_{\xi\eta} = 0.$$

Уравнения (10.43) эквивалентны соотношениям между импульсами и скоростями (10.40).

28.10.6 6. Examples of Separation of Gravitational Dynamical Variables

Как уже отмечалось, еще не построена квантовая теория гравитации ни в одном из подходов к природе гравитации, сформулированных в §10.2. В рамках третьего (промежуточного) подхода удалось развить квантование слабых плоских гравитационных волн и разработать квантовые модели для нескольких точных волновых решений уравнений Эйнштейна. Покажем, что во всех этих случаях подтверждается сформулированная в предыдущем параграфе типотеза: динамическими гравитационными переменными являются две конформно-поперечные компоненты $\tilde{\gamma}^{\text{Б}}$ и сопряженные им импульсы $p_{\xi\eta}$.

Теория слабых плоских гравиинe ерциальных в ол н. Классическая (неквантовая) часть этой теории подробно рассмотрена в §9.6, где были выделены динамические переменные q_1 и q_2, подвергающиеся квантованию в квантовом варианте теории. Остается показать, что эти переменные конформно-поперечны. Используя соотношения (9.42), имеем в первом приближении

$$\sqrt{\|\gamma_{5\eta}\|} = \frac{1}{\sqrt{\|\gamma^{5\eta}\|}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^{22} - a^{33} + 0\overline{(a^2)}}} \approx 1 - (1/2)\left(a^{22} + a^{33}\right).$$

Отсюда легко находим конформно-поперечные компоненты (в первом приближении):

$$\tilde{\gamma}^{\xi\eta} = \sqrt{\gamma}\gamma^{\xi\eta} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}\left(a^{22} - a^{33}\right) & a^{23} \\ a^{23} & 1 - \frac{1}{2}\left(a^{22} - a^{33}\right) \end{pmatrix},$$

что и требовалось показать. Канонически-сопряженные им импульсы (10.40) получаем в виде $p_1 = (1/2)q_{1,0}; p_2 = (1/2)q_{2,0}$.

Квантовая теория слабых плоских гравиинерциальных волн фактически представляет собой квантовую теорию линейного тензорного поля второго ранга на фоне плоского пространства-времени (см. [164, 176]). Вторичное квантование компонент q_1 и q_2 можно осуществить аналогично квантованию электромагнитного поля в плоском пространстве-времени. При этом следует позаботиться о правильной размерности плотностей гравитационного лагранжиана, гамильтониана и импульсов, т. е. осуществить переход

$$\overline{\mathscr{L}}_{\text{гр}} \to (1/2x)\overline{\mathscr{L}}_{\text{гр}}; \quad \overline{\mathcal{H}}_{\Gamma p} \to (1/2x)\overline{\mathcal{H}}_{\Gamma p}; \quad \tilde{p}_{\xi\eta} \to (1/2x)\tilde{p}_{\xi\eta}$$

где $x = 8\pi k/c^4$. Перестановочные соотношения, как ii в электродинамике, задаются в виде

$$[q_s(\mathbf{x}), \quad p_r(\mathbf{x}')] = \mathrm{i}\hbar\delta_{sr}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

где $s, r = 1, 2$. Так как теория слабого поля является линейной, можно использовать разложения компонент q_s и p_r в интеграл Фурье:

$$\left.\begin{aligned} q_s^{\pm}(\mathbf{x}) &= \tfrac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \tfrac{\exp(\pm\mathrm{i}kx)'}{\sqrt{2k_0}} a_s^{\pm}(\mathbf{k})d^3k \\ p_r^{\pm}(\mathbf{x}') &= \tfrac{1}{14x(2\pi)^{3/2}}\int \tfrac{\left(\pm k_0'\right)\exp(\pm\mathrm{i}k'x')}{\sqrt{2k_0'}} a_r^{\pm}(\mathbf{k}')\,d^3k' \end{aligned}\right\}$$

где $a_s^{\pm}(\mathbf{k})$ следует понимать как операторы рождения и уничтожения гравитонов двух типов. Подставляя (10.48) в (10.47), легко найти перестановочные соотношения между операторами:

$$\left.\begin{array}{l} a_s^+(\mathbf{k})a_r^+(\mathbf{k}') - a_r^+(\mathbf{k}')\,a_s^+(\mathbf{k}) = \\ = aa_s^-(\mathbf{k})a_r^-(\mathbf{k}') = a_r^-(\mathbf{k}')\,a_s^-(\mathbf{k}) = 0 \\ a_s^-(\mathbf{k})a_r^+(\mathbf{k}') - a_r^+(\mathbf{k}')\,a_s^-(\mathbf{k}') = \\ = \delta_{sr}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\,4x\hbar = 16l_0^2\delta_{sr}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\,. \end{array}\right\}$$

Существенно, что эти коммутационные соотношения содержат справа квадрат планковской длины $l_0^2 = hk/c^3$. На основе такой теории можно вычислять эффекты рождения, взаимного превращения и поглощения гравитонов и квантов обычной материи. (Обзор процессов, изучавшихся на базе квантовой теории слабого гравитационного поля, можно найти в работе [164].)

Цилиндрически е волны Э й нш т ей н а - Розен а (9.37). Достоинством этой метрики, позволившим построить модельную квантовую теорию, является тот факт, что функция ψ удовлетворяет линейному волновому уравнению (9.38). Покажем, что подвергающаяся квантованию величина ψ характеризует конформно-поперечные компоненты поля. Как уже отмечалось, эта метрика описывает цилиндрический волновой процесс. Выбирая на 2 -мерной цилиндрической поверхности фронта волны координаты $x_2 = \rho\varphi\,(0 \leqslant x_2 \leqslant 2\pi\rho)$ и $x_3 = z$, получаем компоненты 2 -мерной метрики

$$\gamma^{\xi\eta\eta} = \tilde{\gamma}^{\xi\eta} = \begin{pmatrix} \exp(2\psi) & 0 \\ 0 & \exp(-2\psi) \end{pmatrix}; \tilde{\gamma}_{\xi\eta} = \begin{pmatrix} \exp(-2\psi) & 0 \\ 0 & \exp(2\psi) \end{pmatrix}.$$

В этой метрике $\sqrt{\gamma} = 1$, т. е. в теории используются конформно-поперечные компоненты. При $\psi \ll 1$ эта 2 -мерная метрика соответствует одной поляризации слабых плоских волн (10.45).

Построение квантовой модели для данной метрики не представляет особого труда ввиду линейности уравнения (9.38). Его решение

$$\psi = A(\omega)J_0\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)\cos\frac{\omega x^0}{c} + B(\omega)N_0\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)\sin\frac{\omega x^0}{c},$$

где $J_0(\omega\rho/c)$ и $N_0(\omega\rho/c)$ - цилиндрические функции Бесселя и Неймана. Обычно полагают $B(\omega) = 0$, исключая тем самым функции $N_0(\omega\rho/c)$, имеющие особенность в нуле. Оставшаяся часть ψ представляется в виде интеграла Фурье. Операторы можно ввести через коэффициенты разложения Фурье [177].

М е т р и ки оуди. Они имеют вид [178]:

$$ds^2 = \exp(2a)\left(dx_0^2 - dx_1^2\right) - \Phi\left[\exp(-2\psi)dx_2^2 + \exp(2\psi)dx_3^2\right]$$

где a, Φ и ψ-функции только координат x^0 и x^1; dx_2 и dx_3 - смещения на 2-мерной поверхности. Можно показать, что эти метрики допускают 2 -параметрическую группу движения G_2 с 2 -мерными поверхностями транзитивности, описываемыми уравнениями $x^0 = \text{const}$, $x^1 = \text{const}$. Очевидно, цилиндрические волны ЭйнштейнаРозена (9.37) являются частным случаем метрики Гоуди при $\Phi = 1$.

Кинеорометрическим образом откалиброванная диада (τ^μ, l^μ) имеет компоненты:

$$\left.\begin{array}{l} \tau^\mu\{\exp(-a); 0; 0; 0;\}; \quad \tau_\mu = \{\exp a; 0; 0; 0\}; \\ l^\mu = \{0; \exp(-a); 0; 0\}; l_\mu = \{0; -\exp a; 0; 0\}. \end{array}\right\}$$

Видно, что в общем случае метрика Гоуди описывает несвободный продольный гравиинерциальный волновой процесс, характеризуемый волновым вектором $k^\mu = \exp(-a)\,(\tau^\mu \pm l^\mu)$. Для конформнонеинвариантной части метрики $V\overline{\|\gamma\|} = 1/\Phi$. Конформно-инвариантные компоненты 2-мерной метрики характеризуются одной величиной ψ, так как $\tilde{\gamma}$ опять представллеется в виде (10.50). $_3$ динамических уравнений Эйнштейна $\widetilde{G}_{\xi\eta} = 0$ находим, что функция ψ удовлетворяет линейному уравнению

$$\left(\partial/\partial x^0\right)\left(\Phi\partial\psi/\partial x^0\right) - \left(\partial/\partial x^1\right)\left(\Phi\partial\psi/\partial x_1\right) = 0.$$

Линейность этого уравнения обеспечивает возможность построения квантового варианта теории [178, 179].

28.10.7 7.Towards the Theory of Superspace

Предыдущие два параграфа в основном посвящены квантованию гравитационных волн (или волновых моделей), распространяющихся в рассматриваемой области пространства-времени. При этом либо глобальная структура Вселенной была несущественной, либо модель Вселенной предполагалась открытой. Однако существует еще одно направление исследований, нацеленное на квантование Вселенной, точнее, космологических моделей. Для этой цели оказалась полезной теория суперпространства, предложенная Уилером [180] и де Виттом [181] *. В этом параграфе изложены основы теории суперпространства в рамках монадного метода в кинеметрической калибровке [182]. Заметим, что эта теория интересна и сама по себе. Она позволяет взглянуть еще с иной стороны на структуру уравнений Эйнштейна, на физический и геометрический смысл составляющих метрического тензора.

Будем исходить из 3-мерных римановых пространств, понимаемых как пространственно-подобные сечения 4-мерного пространства-времени, ортогональные конгруэнциям соответствующих нормальных систем отсчета. Как известно, метрики римановых пространств задаются на компактном хаусдорфовом многообразии, которое будем обозначать ${}^3M$. Рассмотрим множество Riem $({}^3M)$, каждой точкой которого является возможная риманова метрика в ${}^3M$

Очевидно, одну и ту же риманову метрику можно записать в разных системах координат. Это значит, что в Riem $({}^3M)$ многим точкам соответствует одно и то же риманово пространство. Обозначим допустимые преобразования координат [соответствующие кинеметрическим преобразованиям (3.90)] символом Diff $({}^3M)$. Отождествим все точки в Riem $({}^3M)$, связанные преобразованием Diff $({}^3M)$. В результате получим первичное суперпространство $S({}^3M) = \text{Riem}({}^3M) / \text{Diff}({}^3M)$. Все точки в Riem $({}^3M)$, полученные из одной (μ) преобразованиями Diff $({}^3M)$, называются орбитой этой точки.

В множестве (пространстве) Riem $({}^3M)$ можно задать метрику инфинитезимальным образом («расстояние» между двумя близкими 3-мерными римановыми пространствами):

По мнению Уилера [180], сейчас ситуация в ОТО напоминает положение, сложившееся в классической электродинамике в начале века, когда было установлено, что атом состоит из ядра и вращающихся электронов, но с позиций классической электродинамики неизбежно падение электронов на ядро-коллапс. Выход из противоречия состоял в квантовании атома в плоском пространстве. Сейчас представляется, что решение проблемы коллапса Вселенной состоит в квантовании ОТО, причем оно будет осуществляться в суперпространстве.

$$d\sigma^2 = \iint \widetilde{G}^{ijk'l'} \delta h_{ij} \delta h_{k'l'} d^3x d^3x'$$

где δh_{ik} - бесконечно малые различия метрик двух близких по значениям h_{ik}3-мерных пространств; $\widetilde{G}^{ijk'l'}$ - суперметрический тензор. В этой формуле δh_{ik} выступает в роли, аналогичной роли dx^μ при определении интервала в римановом пространстве $ds^2 = g_{\mu v} dx^\mu dx^v$

Из общих соображений следует, что $\widetilde{G}^{ijk'l'}$ должен удовлетворять следующим требованиям:

содержать $\delta^3(x - x')$, т. е. связывать сопоставленные точки в двух римановых пространствах;

быть пропорциональным тензору четвертого ранга (чтобы $d\sigma^2$ было скаляром);

быть тензорной плотностью по $\sqrt{h}$ веса 1 (для обеспечения интегрирования по d^3x);

быть симметричным относительно перестановки первой и второй пары индексов;

строиться из компонент 3-метрики h_{ik}. Всем этим требованиям удовлетворяет выражение

$\widetilde{G}^{ijk'l'} = (\sqrt{h}/2\omega)\delta^3(x - x')\left(h^{ik}h^{il} + h^{il}h^{kj} - 2h^{ij}h^{kl}\right) \equiv G^{ijkl}\delta^3(x - x')$,

где - произвольная скалярная функция. Будем полагать $= 1/\tau_0$.

Ковариантные ккомпоненты суперметрического тензора определяются из естественного условия

$$\int \widetilde{G}_{ijm''n^n} \widetilde{G}^{m''n''k'l'} d^3x'' = \frac{1}{2}\left(\delta_i^k \delta_j^l + \delta_j^k \delta_i^l\right) \delta^3(x - x')$$

Используя (10.56), отсюда находим:
$\tilde{G}_{ijk'l'} = (w/2\sqrt{h})\delta^3(x-x')(h_{ik}h_{jl}+h_{il}h_{kj}-h_{ij}h_{kl}) \equiv G_{ijkl}\delta^4(x-x')$
Легко видеть, что след суперметрического тензора равен:

$$\int \widetilde{G}_{ijm''n''}\widetilde{G}^{m''n''ij}d^3x = 6\delta^3(x-x').$$

Эволюцию пространственных сечений нормальных систем отсчета при смещении вдоль соответствующих конгруэнций можно. представить в виде линий в суперпространстве. Каждой линии соответствует решение шести пространственно-спроектированных уравнений Эйнштейна (3.38). Оказывается, эти уравнения можно записать в виде геодезической с правой частью в пространстве Riem $({}^3M)$ с суперметрикой G_{ijkl} (в дальнейшем будем ее использовать без δ-функции).

Аналогично символам Кристоффеля в обычном римановом пространстве определим коэффициенты связности в Riem $({}^3M)$ по формуле

$$\Gamma_{ik}^{jlmn} = \frac{1}{2}G_{ikrs}\left(\frac{\delta G^{mnrs}}{\delta h_{jl}} + \frac{\delta G^{ilrs}}{\delta h_{mn}} - \frac{\delta G^{jlmn}}{\delta h_{rs}}\right).$$

Тогда можно показать, что уравнения Эйнштейна (3.38) без источников представимы в виде

$$\begin{gathered}{}^+\partial_T\left({}^+\partial_T h_{ik}\right) + \Gamma_{ik}^{ilmn}\left({}^+\partial_T h_{jl}\right)\left({}^+\partial_T h_{mn}\right) = \\ = -\tau^0 G_{ikmn}\delta\left(2\tau_0\sqrt{h}^3 R\right)/\delta h_{mn}.\end{gathered}$$

Эти уравнения напоминают уравнения движения

$$d^2x^\mu/ds^2 + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu\left(dx^\alpha/ds\right)\left(dx^\beta/ds\right) = \mathscr{F}^\mu.$$

Правую часть (10.61) можно понимать как некую суперсилу, получаемую из плотности суперпотенциала $2\tau_0\sqrt{h^3}R$ способом, похожим на обычный:

$$\mathscr{F}_{ik} = -G_{ikmn}\delta\left(2\tau_0\sqrt{h}^3 R\right)/\delta h_{mn}.$$

Обобщенные импульсы (10.22б) и плотность референционного гравитационного гамильтониана (10.26б) можно более компактно записать через суперметрический тензор:

$$\begin{gathered}p^{ik} = G^{ikmn}D_{mn};\\ \overline{\mathscr{H}'}_2 = G_{ikmn}p^{ik}p^{mn} + \tau_0\sqrt{h^3}R.\end{gathered}$$

В работах Дирака и других авторов было предложено представить уравнения вторичной гамильтоновой связи в виде уравнений Гамильтона - Якоби. Введя для этого функционал S, такой, что $p^{ik} = \partial S/\partial h_{ik}$, получим гравитационное уравнение Гамильтона Якоби в виде

$$G_{ikmn}\left(\partial S/\partial h_{ik}\right)\partial S/\partial h_{mn} + \tau_0\sqrt{h}^3 R = 0.$$

28.10.8 8. Examples of Superspaces

Рассмотрим несколько конкретных примеров 3-геометрий с симметриями, приводящими к конечной размерности суперпространств.

Суперпространство 3-мерных геометрий с метрик а м и [183]

$$dl^2 = a_1(1 + a_2\sin\theta + a_3\cos\theta)\left(d\theta^2 + d\varphi^2 + d\psi^2\right).$$

Здесь координаты θ, φ и ψ изменяются от 0 до 2π, а a_1, a_2, a_3 - произвольные функции от x^0, удовлетворяющие условиям $a_1(x^0) > 0$; $a_2^2(x^0) + a_3^2(x^0) < 1$. Метрики (10.66) имеют топологию 3-тора.

Очевидно, что каждая из 3-геометрий рассматриваемого множества полностью характеризуется значениями трех параметров a_i. Следовательно, множество Riem $({}^3M)$ таких геометрий изображается совокупностью внутренних точек неограниченного с одной стороны цилиндра в пространстве $\{a_1, a_2, a_3\}$ (рис. 21).

Видно, что не все точки внутри цилиндра соответствуют различным геометриям. Метрики (10.66) сохраняют свой вид при преобразованиях координат Diff $({}^3M)$:

$$\theta' = \theta + \theta_0; \varphi' = \varphi + \varphi_0; \psi' = \psi + \psi_0$$

Первое из этих преобразований соответствует преобразованиям параметров a_2 и a_3 [поворотам в плоскости (a_2, a_3)). Это означает, что все точки пга концентрических окружностях с центром на оси a_1 описывают одну и ту же 3-геометрию, τ.е. представляют собой орбиты одной геометрии. Все орбиты один раз пересекают полуплоскость (a_1, a_3), т. е. заштрихованная полуограниченная лента $(0 \leqslant a_3 < 1; a_1 > 0)$ изображает 2 -мерное суперпространство рассматриваемых 3-геометрий.

Суперпрост ранство о днородных из отропных миров Ф р и д м а н а. Оно олтомерно. Все пространственные сечения в сопутствующей системе отсчета характеризуются значением параметра $a\,(x^0)$. Ограничимся случаем закрытых моделей Фридмана, когда метрика 3-мерных сечений имеет вид (6.13а).

Кратко изложим гамильтонов формализм для закрытых моделей Фридмана в терминах параметра $a\,(x^0)$ [184].

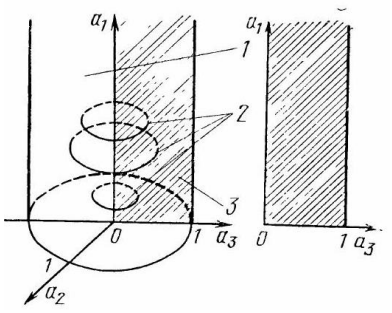


Рис. 21. Суперпространство геометрий с топологией 3-тора: 1 - внутренность цилиндра - многообразие Riem $({}^3M)$; 2 - орбиты отдельных 3-геометрий; 3 - суперпространство S $({}^3M)$ Поскольку для метрики $(6.13a)\sqrt{h} = a^3\left(\sin^2 x^1\right)\sin\theta$, 3-мерная плотность ла.. гранжиана имеет вид:

$$\overline{\mathscr{L}} = \sqrt{h}\left(D^2 - D_{ik}D^{ik} + {}^3R\right) = (6/a)\left(\dot{a}^2 - a^2\right)\sin^2 x^1 \sin\theta$$

Произведя интегрирование по всему пространству, находим:

$$L = \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{6}{a}\left(a^2 - a^2\right)\sin^2 x^1 \sin\theta dx' d\theta d\varphi = \frac{12\pi^2\|}{a}\left(a^2 - a^2\right).$$

Отсюда получаем референционный импульс

$$p = \partial L/\partial_T a = 24\pi^2\dot{a}, \text{ где } \partial_T a = \dot{a}/a$$

и референционный гамильтониан

$$H = (\dot{a}/a)p - L = \left(1/48\pi^2\right)p^2/a + 12\pi^2 a$$

В квантовой модельной теории де Витта [184] вводится функционал состояния мира в a-представлении $\Psi(a)$; импульс p, как обычно, заменяется оператором: $p \to \mathrm{i}\,/\partial a$. После этого дираковскую гамильтонову связь можно представить следующим образом:

$$\left(\frac{1}{48\pi^2 a^{1/4}}\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{a^{1/4}} - 12\pi^2 a\right)\Psi = -\varkappa N m \Psi$$

где выбран специальный вид упорядочения операторов a и $\partial/\partial a$ и введено обозначение $Nm = T_{\mu\nu}\tau^\mu\tau^\nu$. Произведя замену $x = a^3/2$ и $\Phi = \Psi\sqrt{da/dx} = \sqrt{2/3}\Psi/a^{1/4}$, приводим (10.71) к виду уравнения Клейна-Фока со специальным потенциалом

$$\left(3/64\pi^2\right)\partial^2\Phi/\partial x^2 - 12\pi^2 x^{2/3}\Phi = -\varkappa Nm\Phi$$

Суперпространство о бобщенных моделей Казнера, опи сы в а емых м е т рик и й (6.49). Оно 3-мерно, так как на четыре параметра: $\alpha, \beta_{11}, \beta_{22}, \beta_{33}$ наложено одно условие (6.50). Будем использовать независимые параметры α, β_+, β_-. Учитывая вид смещений $dl^\mu_{(i)}$ согласно (6.51), можно показать, что (первичное) суперпространство S состоит из точек, обра. зующих заштрихованный на рис. 22 цилиндрический сектор.

Гамильтонов формализм для данных моделей удобно строить на основе метрики при смещениях $dl^\mu_{(i)}$. Тогда метрический тензор имеет компоненты:

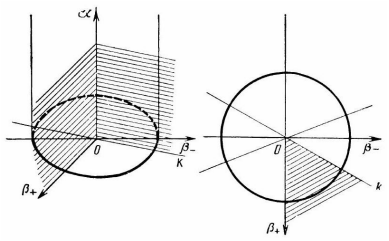


Рис. 22. Суперпространство обобщенных моделей Казнера

$$h_{11} = \exp\left(2\alpha + 2\beta_{11}\right); h_{22} = \exp\left(2\alpha + 2\beta_{22}\right); h_{33} = \exp\left(2\alpha + 2\beta_{33}\right);$$
$$V\bar{h} = \exp(3\alpha).$$

лотность лагранжиана

$$\overline{\mathscr{L}} = \exp(3\alpha)\left[6\left(\dot\alpha^2 - \dot\beta_+^2 - \dot\beta_-^2\right) + V\right]$$

где V соответствует скалярной 3-мерной кривизне. Отсюда находим три импульса [согласно (6.49) $\tau_0 = 1$]:

$$p_\pm = \partial\overline{\mathscr{L}}/\partial\dot\beta_\pm = 12\exp(3\alpha)\dot\beta_\pm; p_\alpha = 12\exp(3\alpha)\dot\alpha$$

В этих переменных плотность гамильтониана выглядит просто:

$$\overline{\mathscr{H}} = \exp(3\alpha)\left[(\exp(-6\alpha)/24)\left(p_\alpha^2 - p_+^2 - p_-^2\right) - V\right]$$

и напоминает гамильтониан частицы с временно-подобной координатой $\boldsymbol{\alpha}$ и двумя пространственно-подобными координатами: β_+и β_-.

В квантовой модельной теории Мизнера [101] вводится функционал состояния Вселенной $\Psi(\alpha, \beta_+, \beta_-)$, а импульсы заменяются операторами: $p_\alpha = \mathrm{i}\partial/\partial\alpha$, $p_\pm = \mathrm{i}\partial/\partial\beta_\pm$. Тогда вторичная гамильтонова связь приводит к волновым уравнениям Мизнера

$$\left(\partial^2/\partial\alpha^2 - \partial^2/\partial\beta_+^2 - \partial^2/\partial\beta_-^2 + \widetilde{V}\right)\Psi = 0$$

Параметр α здесь рассматривается как время.

При построении квантовых модельных теорий возникает множество вопросов. Так, модели де Витта и Мизнера можно понимать как первые два звена в цепочке квантовых моделей миров со все меньшей и меньшей симметрией. Однако эти теории пока не дают конструктивного способа дальнейших обобщений, необходимых для перехода к другим звеньям. Не ясен смысл функционала состояния. Он должен описывать мир как единое целое. Каков его смысл, если не существуют внешние классические измерительные приборы? Можно было бы поставить и другие вопросы (с.. [101, 183, 184]), но подробное обсуждение их выходит за рамки этой книги.

28.11 Gauge-Invariant 5-Dimensional Theory of Spacetime

28.11.1 1. Five-Dimensionality and the Monad Method

Неоднократно подчеркивались многочисленные аналогии между теориями электромагнетизма и гравитации. По-видимому, существует глубокая связь между электромагнетизмом и гравитацией, основанная на фундаментальных понятиях и свойствах прообраза классического пространства-времени, ответственных за классические понятия, такие как метрика, свойство частичной упорядоченности, размерность и др. Замеченные аналогии, скорее всего, следует воспринимать как проявление этих глубинных закономерностей, пока еще в достаточной мере не разгаданных.

Признание тесной связи между гравитацией и электромагнетизмом вызвало в 20-40-х годах настойчивые попытки объединить эти две теории в единое целое. Поиски единой теории гравитации и электромагнетизма осуществлялись широким фронтом. Наибольшее внимание привлекли три направления: 1) единые теории на основе 4-мерных дифференциальных геометрий, более общих, нежели риманова: теории Вейля [14, с. 513], Эддингтона [25] и другие, где использовались многообразия с сегментарной кривизной и с кручением; 2) единые 4-мерные теории с несимметричной метрикой (теории Эйнштейна [18]), которые, по-видимому, сводятся к геометриям с кручением; 3) теории на основе римановых 5-мерных пространств*. На наш взгляд, последнее направление исследований привело к созданию наиболее красивой и содержательной схемы, объединяющей две теории.

Было предложено несколько вариантов 5-мерных теорий. К классическим результатам этого направления следует отнести естественное введение напряженности электромагнитного поля, а также получение известных уравнений Эйнштейна с правой частью в виде тензора энергии-импульса электромагнитного поля, уравнений Максвелла и уравнений движения заряженных частиц в искривленном пространстве-времени. Был достигнут несомненный

Это направление исследований начали алуца [14, с. 529] и, по-видимому, независимо Мандель [185], развивали его де Бройль [186], Клейн [187], Эйнштейн [18], Бергман [2], В. А. Фок [188]; Ю. Б. Румер [189]; Шмутцер [190] и многие другие [191-198]. успех в формальном совмещении известных теорий в рамках одной схемы, однако теория не вскрыла глубоких корней этих результатов, не привела к открытию новых закономерностей и предсказанию новых эффектов, которые можно было бы обнаружить с помощью современных экспериментальных средств. Попутно были получены другие интересные результаты, например с ее помощью впервые было введено уравнение Клейна - Фока, сформулирована скалярно-тензорная теория гравитации и т. д.

Другим важным следствием этого направления является развитие в его рамках элементов монадного метода. Впервые его применяли для выделения пятой координаты. Однако в работах $20-40-$ годов не были окончательно определены операторы дифференцирования спроектированных тензоров, не были достаточно проанализированы уравнения геодезических в монадном методе. Опираясь на завершенный монадный метод в 4-мерном пространстве-времени, не сложно восполнить эти пробелы. Все получающиеся формулы, кроме уравнений геодезических, аналогичны формулам гл. 3. Наибольший интерес представляет калибровка 5-мерной монады, аналогичная хронометрической (когда поле монады выбрано вдоль конгруэнции линий пятой координаты). Эта калибровка использовалась в старых работах по 5-мерию и создала.предпосылки для возникновения метода хронометрических. инвариантов. В данной главе систематически развит вариант 5-мерной теории без использования общековариантного монадного метода, на основе именно указанной калибровки монады. Назовем эту теорию калибровочно-инвариантной (кл. и.) [193, 194].

Независимо от попыток построения единой теории гравитации и электромагнетизма излагаемая здесь теория представляет интерес и по следующим соображениям. Известно, что наличие электромагнитного поля ($F_{\mu\nu} \neq 0$) можно понимать, как неголономность 4-мерного пространства-времени для электрически заряженных частиц*. Однако неголономность 4-мерного пространствавремени можно понимать и описывать различным образом, в том числе и с помощью формального введения пятой координаты. Тогда неголономность 4-мерного пространственно-временного сечения имеет тот же смысл, что и неголономность 3-мерного пространственного сечения в хронометрической

калибровке монадного формализма, характеризуемая тензором угловой скорости вращения $A_{ik} \neq 0$. Теперь вместо A_{ik} выступает тензор напряженности электромагнитного поля $F_{\mu v}$.

Приступая к изложению математического аппарата кл. и. 5-мерной теории, заметим, что на первый взгляд возможны две сигнатуры 5-мерного риманова пространства $(x^0, x^1, x^2, x^3, x^5)$: $(+----+)$ и $(+---)$. В \$11.2 будем строить теорию сразу для обеих сигнатур. Во всех формулах верхний знак будет соответствовать первой сигнатуре, а нижний - второй. В \$11.3,

Это отмечал, пгапример, Мандельстам [28], развивший для реа.тизации этой идеи путезависпммую формулировку электродинамики. сопоставляя полученную теорию с ОТО и электродинамикой, убедимся, что следует остановиться на сигнатуре (+- - -). Это показал еще Эйнштейн [18, с. 197].

28.11.2 2. Mathematical Apparatus of Gauge-Invariant 5-Dimensional Theory

Целесообразно опять представить теорию в виде четырех составных частей.

Алгебра. Запишем 5 -мерный метрический тензор G_{AB} в виде

$$G_{AB} = \pm\lambda_A\lambda_B + \tilde{g}_{AB}$$

где λ_A - монада (5-вектор); $\tilde{g}_{AB}$ - метрический тензор пространственно-временного сечения, ортогонального линиям λ. Здесь и в дальнейшем заглавные латинские индексы пробегают значения: $0, 1, 2, 3, 5$. Для составляющих метрического тензора справедливы соотношения:

$$\lambda_A\lambda_B G^{AB} = \pm 1; \quad \lambda_A\tilde{g}^{AB} = 0; \quad \tilde{g}_{AB}\tilde{g}^{AB} = 4.$$

Произвольному 5-тензору $B^{C\cdots}_{D}$ можно сопоставить скаляр и совокупность пространственно-временных 4-тензоров равного и меньших рангов проектированием его посредством λ_B и $\tilde{g}^A_B$:

$$B = B^C_D{}_{\ldots}\lambda_C{}_{\ldots}\lambda^D{}_{\ldots}; \bar{B}^A_B{}_{\ldots} = B^{C\cdots}_{D}{}_{\ldots}\tilde{g}^A_C{}_{\ldots}\tilde{g}^D_B{}_{\ldots}$$

Откалибруем монаду λ_A следующим образом:

$$\lambda^B = G^B_5/\sqrt{\pm G_{55}} \to \lambda_B = G_{B5}/V\overline{\pm G_{55}}$$

и введем обозначения: $\pm G_{55} \equiv \varphi^2; G_{5\mu} = \varphi\lambda_\mu$. Тогда составляющие метрического тензора будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
&\lambda^5 = 1/\varphi; \quad \lambda^\mu = 0; \quad \lambda_5 = \pm\varphi; \quad \lambda_\mu = G_{5\mu}/\varphi;\\
&\widehat{g}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} \mp \lambda_\mu\lambda_v; \quad \tilde{g}_{5B} = 0;\\
&\widetilde{g}^{\mu\nu} = G^{\mu v}; \quad \tilde{g}^{55} = \pm\left(\varphi^4 - 1\right)/\varphi^2; \quad \tilde{g}^{5\mu} = G^{5\mu}\\
&\tilde{g}^v_\mu = G^v_\mu; \quad \tilde{g}^5_\mu = \mp\lambda_\mu/\varphi; \quad \tilde{g}^B_5 = 0.
\end{aligned}$$

В данной калибровке выделяется множество систем координат, связанных преобразованиями

$$\begin{aligned}
x'^5 &= x'^5\left(x^0, x^1, x^2, x^3, x^5\right);\\
x'^\mu &= x'^\mu\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right).
\end{aligned}$$

Наззовем кл. и. 4-тензорами величины, инвариантные при преобразованиях (11.5) и 4-мерно-ковариантные относительно преобразований (11.6). Преобразования (11.5), как будет показано в §11.3, обобщают калибровочные электромагнитные преобразова- ния. Физически значимыми в дальнейшем будем считать только кл. и. (в указанном общем или частных смыслах) 4-тензоры. Таковыми будут спроектированные на пространство-время тензорные величины с индексами $0, 1, 2, 3$, т. е. выражения:

$$\widetilde{B}^{\mu v} = B^{\mu 5\cdots}_{n}/\left(\pm G_{55}\right)^{n/2} = B^{\mu v}_{55}{}_{\ldots}5/\varphi^n$$

и полученные из них опусканием индексов с помощью 4-мерного тензора $\widetilde{g}_{\mu v}$.

Видно, что компоненты $\tilde{g}_{\mu\nu}$ и $\tilde{g}^{\mu v}$ 4-мерного пространственно-временного тензора образуют кл. и. 4-тензоры. Квадрат интервала 5-мерного риманова пространства представляется в виде

$$(dI)^2 = G_{AB}dx^A dx^B = \pm(d\lambda)^2 + ds^2$$

где $d\lambda = \lambda_B dx^B = G_{5B}dx^B/\varphi - ...$ интервал вдоль пятой координаты (кл. и. скаляр); $ds^2 = \tilde{g}_{\mu v}dx^\mu dx^v$ - интервал 4-мерного пространственно-временного сечения (в общем случае неголономного), ортогонального линиям λ.

Ф и ико-геоме т риче скии е 4 - т ен зо ры. Как и в: 4-мерном случае (см. §3.5), из компонент метрического тензора и их производных первого порядка можно построить следующие кл. и. тензоры:

$$\Phi_A = \mp\lambda^B\left(\lambda_{A,B} - \lambda_{B,A}\right) \to \Phi_\mu = (1/\varphi)\left(\partial\varphi/\partial x^\mu \mp \partial\lambda_\mu/\partial x^5\right)$$

аналог вектора ускорения F_μ в 4-мерном случае;

$$\widetilde{F}_{AB} = \pm(1/2)\tilde{g}^C_A\widetilde{g}^D_B\left(\lambda_{C,D} - \lambda_{D,c}\right) \to \widetilde{F}_{\mu v} = \\ = \pm(1/2)\left(\partial\lambda_\mu/\partial x^v - \partial\lambda_v/\partial x^\mu + \Phi_\mu\lambda_v - \Phi_v\lambda_\mu\right)$$

аналог тензора угловой скорости вращения A_{ik};

$$\not{A}_{AB} = (1/2)\left(\tilde{g}_{AB,}\lambda^C + \tilde{g}_{AC}\lambda^C_{,B} + \tilde{g}_{BC}\lambda^C_{,A}\right) \to \not{\alpha}_{\beta} = (1/2\varphi)\partial\tilde{g}_{\alpha\beta}/\partial x^5$$
$$\not{Z}^{\alpha\beta} = -(1/2\varphi)\partial\tilde{g}^{\alpha\beta}/\partial x^5$$

аналог тензора скоростей деформаций D_{ik}.

Опер аторы дияфференциров ания. Будем пользоваться следующими двумя операторами, действующими на кл. и. 4-тензоры и сохраняющими их свойство калибровочной инвариантности. нате

а) Монадный оператор дифференцирования по пятой коорди-

$$\partial^+_5\widetilde{B}^{\mu\cdots}_v = \lambda^B\partial\widetilde{B}^{\mu\cdots}_v .../\partial x^B = (1/\varphi)\partial\widetilde{B}^{\mu\cdots}_v .../\partial x^5$$

Этот оператор не зависит от ранга и ковариантности дифференцируемой величины. Он соответствует оператору * ∂_T в §3.5. б) Оператор ковариантного пространственно-временного дифференцирования

$$\widetilde{\nabla}^+_{\tilde{\sigma}}\widetilde{B}\underbrace{\overbrace{\upsilon...}^{n}}_{m}_{\nu...} = \partial^+_\sigma\widetilde{B}^{\mu\cdots}_v \underbrace{+\widetilde{\Gamma}^\mu_{\sigma\gamma}\widetilde{B}^\gamma_{v...} ... + ...}_{n}\underbrace{-\widetilde{\Gamma}^\gamma_{\sigma v}\widetilde{B}^{\mu\cdots}_{\gamma\cdots} - ...}_{m}$$

где использованы обозначения

$$\partial^+_\sigma = \frac{\partial}{\partial x^\sigma} - \frac{G_{\sigma 5}}{G_{55}}\frac{\partial}{\partial x^5} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \mp \frac{\lambda_\sigma}{\varphi}\frac{\partial}{\partial x^5}$$

кл. и. оператор пространственно-временного дифференцирования;

$$\widetilde{\Gamma}^\mu_{\sigma\lambda} = (1/2)\tilde{\partial}^{\mu v}\left(\partial^+_\lambda\tilde{g}_{\sigma v} + \partial^+_\sigma\tilde{g}_{v\lambda} - \partial^+_v\tilde{g}_{\sigma\lambda}\right)$$

кл. и. 4-связность.

Основные соотношения и уравнения 5 -мерно й т еории. Запишем их через монадные величины и операторы в данной калибровке.

а) Уравнения геодезических в 5-мерной теории имеют вид:

$$d^2x^A/dI^2 = -P^A_{BC}\left(dx^B/dI\right)dx^C/dI$$

где 5-мерные символы Кристоффеля

$$P^A_{BC} = (1/2)G^{AD}\left(\partial G_{DB}/\partial x^C + \partial G_{DC}/\partial x^B - \partial G_{BC}/\partial x^D\right)$$

Введем кл.и. компоненты 5-скорости:

$$u^\mu = dx^\mu/ds; \quad d\lambda/ds = \pm\varphi dx^5/ds + \lambda_\mu u^\mu$$

и используем соотношения:

$$\frac{dx^\mu}{dI} = \frac{u^\mu}{\sqrt{1 \pm (d\lambda/ds)^2}}; \quad \frac{dx^5}{dI} = \frac{\pm 1}{\varphi\sqrt{1 \pm (d\lambda/ds)^2}} \left(\frac{d\lambda}{ds} - \lambda_\mu u^\mu\right);$$
$$\frac{d^2x^\mu}{dI^2} = \frac{1}{1 \pm (d\lambda/ds)^2}\frac{d^2x^\mu}{ds^2} \mp \frac{u^\mu}{[1 \pm (d\lambda/ds)^2]^2}\frac{\Gamma d\lambda}{ds}\frac{d^2\lambda}{ds^2}.$$

Тогда уравнения геодезических можно представить в кл. и. виде:

$$\frac{d^2\lambda}{ds^2} = \left[1 \pm \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2\right]\left(\not{\mu\nu}\ u^\mu u^v - \frac{cd\lambda}{ds}\Phi_\mu u^\mu\right)$$
$$\frac{dp^\mu}{ds} = -\widetilde{\Gamma}^\mu_{\alpha\beta}u^\alpha p^\beta - 2\frac{d\lambda}{ds}p^v\left(\widetilde{F}^\mu_{\cdot v} \pm \not{\mu v}\right) \pm m\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2\Phi^\mu$$

где уравнения, спроектированные на пространство-время, умножены на массу «покоя» m_0 и при их записи использованы обозначения: $m = m_0/\sqrt{1 \pm (d\lambda/ds)^2}; p^\mu = mu^\mu$.

б) Скалярная кривизна и компоненты жл. и. форме запишем следующим образом:

$$^5R = {}^5R_{AB}G^{AB} = {}^4\widetilde{R} \mp {}^2 \mp {}_{\mu\nu}{}^{\mu\nu} \mp \widetilde{F}_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu} -$$
$$- 2\left(\pm\partial_5^+ \not{+}\Phi_\alpha\Phi^\alpha + \widetilde{\nabla}^+_{\tilde{\alpha}}\Phi^\alpha\right)$$
$$^5R^{\mu\nu} = {}^4\widetilde{R}^{\mu\nu} - \widetilde{\Phi}^\mu\Phi^v \mp (?)^{\mu\nu} - (?)\widetilde{F}^{\mu v} \pm 2\not{\mu\sigma v} \mp 2\widetilde{F}^{\mu\sigma}\widetilde{F}^v\cdot$$
$$- \tilde{g}^{\mu\alpha\nu\beta}_{g}\left[(1/2)\left(\tilde{\nabla}^\pm_\alpha\Phi_\beta + \tilde{\nabla}^+_{\tilde{\beta}}\Phi_{\alpha\alpha}\right) \pm \partial_5^\dagger\not{\alpha\beta}\right];$$
$$^5R^\mu_B\lambda^B = \tilde{\nabla}^+_{\tilde{v}}\left(\not{v\mu} \pm\widetilde{F}^{v\mu} - (?)\tilde{g}^{v\mu}\right) \pm 2\Phi_\alpha\widetilde{F}^{\alpha\mu};$$
$$^5R_{AB}\lambda^A\lambda^B = \mp\left(\mp\tilde{\nabla}^+_\alpha\Phi^\alpha - \partial_5^+(?) \mp \Phi_\alpha\Phi^\alpha - {}_{\alpha\beta}\not{}^{\alpha\beta} + \widetilde{F}_{\alpha\beta}\widetilde{F}^{\alpha\beta}\right),$$

где

$$^4\tilde{R}^\sigma_{\cdot\mu v\rho} = \partial^+_v\widetilde{\Gamma}^\sigma_{\mu\rho} - \partial^+_\rho\widetilde{\Gamma}^\sigma_{\mu v} + \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\mu\rho}\widetilde{\Gamma}^\sigma_{\alpha v} - \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\mu v}\widetilde{\Gamma}^\sigma_{\rho\alpha};$$
$$^4\widetilde{R}^{\mu v} = {}^4\widetilde{R}^{\rho\mu.v}_{\cdot\cdot\rho}; \quad {}^4\widetilde{R} = {}^4R^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\alpha\beta}.$$

в) 5-Мерные «уравнения Эйнштейна» постулируем в виде

$$^5R_{AB} - (1/2)G_{AB}{}^5R + \Lambda G_{AB} = \varkappa Q_{AB}$$

где Λ - космологическая постоянная; $x = 8\pi k/c^4; Q_{AB}$ – 5-мерный тензор энергии-импульса источника. Используя кл. и. тензоры и операторы, эти уравнения можно записать следующим образом:

$$^4\widetilde{R}_{\mu\nu} - (1/2)\widetilde{g}_{\mu\nu}{}^4\widetilde{R} + \Lambda\widetilde{g}_{\mu v} = \pm\left[2\widetilde{F}_{\mu\alpha}\widetilde{F}^\alpha_v - (1/2)\widetilde{g}_{\mu v}\widetilde{F}_{\alpha\beta}\widetilde{F}^{\alpha\beta}\right] +$$
$$+ \Phi_\mu\Phi_v + (1/2)\left(\tilde{\nabla}^+_\mu\Phi_v + \tilde{\nabla}^+_v\Phi_\mu\right) - \tilde{g}_{\mu v}\left(\Phi_\alpha\Phi^\alpha + \tilde{\nabla}^+_\alpha\Phi^\alpha\right) +$$
$$+ \left(\tilde{F}_{\mu\nu} \pm \not{\mu v}\right) \mp 2\not{}_{\mu\alpha}{}^\alpha \pm\partial_5^+\ \not{\mu\nu} \mp(1/2)\tilde{g}_{\mu\nu}\left({}^2 +\right.$$
$$\left. + \not{\alpha\beta}\ \Pi^{\alpha\beta} + 2\partial_5^+\ \right)\not{} + 2F^\alpha_v\ \not{\mu\alpha} + xQ_{\mu v}$$
$$\tilde{\nabla}^+_{\tilde{v}}\left(\not{\mu v} \pm\widetilde{F}^{v\mu} - (?)\widetilde{g}^{\mu v}\right) \pm 2\Phi_\alpha\widetilde{F}^{\alpha\mu} = xQ^\mu_B\lambda^B$$

Эти формулы соответствуют (3.36), (3.37) и (3.38) - 4-мерным уравнениям Эйнштейна в монадном виде.

28.11.3 3. Physical Reality and Cylindrically Symmetric 5D Riemannian Geometry in the Fifth Coordinate

Даже беглое сопоставление 5-мерных уравнений (11.26), (11.27) и геодезических (11.19) со стандартными уравнениями Эйнштейна (1.36) и второй парой уравнений Максвелла (1.42) и (1.44) заставляет серьезно отнестись к 5-мерному обобщению ОТО. Основным препятствием для признания взаимного соответствия этих уравнений является отсутствие зависимости всех ве- личин от пятой координаты в стандартных уравнениях Его можно преодолеть постулированием независимости геометрических величин от пятой координаты (условие цилиндричности теории по пятой координате). Это означает использование лишь таких 5-мерных римановых пространств, которые допускают существование пространственно-подобного поля вектора Киллинга, причем в используемой калибровке векторы λ^A выбраны вдоль векторов Киллинга [см. 5-мерный аналог уравнений Киллинга (3.102), (3.103)]

При условии цилиндричности по пятой координате $_{\mu v} = 0$ и остаются.иишь два физико-геометрических тензора: $\widetilde{F}_{\mu v} == -\widetilde{F}_{v\mu}$, претендующий на роль тензора электромагнитного поля, и $\Phi_\mu = (1/\varphi)\partial\varphi/\partial x^\mu$, который можно считать напряженностью скалярного поля φ. В работах Калуцы [14, с. 529] и других авторов поле φ исключалось дополнительным условием $G_{55} = -1$, но мы этого делать не будем. Операторы дифференцирования также упрощаются. 4-Связности $\widetilde{\Gamma}^\mu_{\sigma\lambda}$ совпадают с символами Кристоффеля, а ∂^+_σ, действующее на геометрические величины, является оператором частного дифференцирования. Тензор кривизны (11.24) совпадает с обычным тензором Римана-Кристоффеля.

Выделенный класс преобразований пятой координаты (11.5) при условин цилиндричности сужается до преобразований

$$x'^5 = x^5 + f\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$$

Это сужение класса преобразований вызывает расширение множества инвариантных при таких преобразованиях величин. Назовем величины, инвариантные при преобразованиях (11.29) и ковариантные относительно (11.6), специально калибровочно-инвариантными (с.кл.и.). В частности, с.кл.и. становятся компоненты G_{55}, а следовательно, и потенциал скалярного поля φ. Если теперь считать физически значимыми с.кл.и. величины, то таковых становится много. В частности, ими являются все величины, получаемые из кл.и. умножением на произвольную функцию $\mathscr{F}(\varphi)$. В связи с этим возникает вопрос: какие конструкции из геометрических характеристик должны быть сопоставлены физическим величинам, главным образом тензору электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ и 4-мерному метрическому тензору $g_{\mu\nu}$?

Элект р ом агни т н ы е величины. Определим их из двух условий: 1) чтобы преобразования векторного потенциала A_μ при (11.29) совпадали с обычными калибровочными преобразованиями в электродинамике и 2) чтобы в уравнениях (11.26)

В теории алуцы 14 неизвестыых компонент G_{AB}. Для них вариационным методом из плотности лагранжиана $\sqrt{G^5}R$ выводятся 14 уравнений, тождественно совпадающих (в отсутствие внешней материи) с 10 стандартными уравненнями Эйнштейна (с тензором энергин-импульса электромагнитного поля справа) и четырьмя уравнениями второй пары Максвелла (без источников сграва). Пятнадцатое уравнение типа (11.28) в теории Калуцы отсутствует. перед тензором энергии-импульса электромагнитного поля стоял стандартный размерный коэффициент. Эти условия приводят к отождествлению:

$$\lambda_\mu = \left(2V\bar{k}/c^2\right)\varphi A_\mu; \quad \widetilde{F}_{\mu v} = \left(\sqrt{k}/c^2\right)\varphi F_{\mu v}$$

где $F_{\mu v} = \partial A_v/\partial x^\mu - \partial A_\mu/\partial x^\nu$. Видно, что при преобразованиях (11.29)

$$\lambda'_\mu = \lambda_\mu + \varphi\partial f/\partial x^\mu; \quad A'_\mu = A_\mu + \partial\tilde{f}/\partial x^\mu; \quad \tilde{f} = \left(c^2/2V\bar{k}\right) f$$

М е т рич е ский те нзор. Совокупность с.кл.и. 4-метрик образует множество конформно-соответствующих (посредством конформного фактора $\mathscr{F}(\varphi)$) метрик:

$$\tilde{g}_{\mu v} = \mathscr{F}(\varphi) g_{\mu v}; \quad \tilde{g}^{\mu v} = g^{\mu v}/\mathscr{F}(\varphi)$$

Какая из конформно-соответствующих метрик описывает физическое пространство-время? Рассмотрим несколько вариантов.

а) Пусть $\mathscr{F}(\varphi) = 1$ (непосредственное отождествление с физической метрикой метрики, получающейся при 1+4-расщеплении 5-мерной геометрии). В этом случае уравнения (11.26)(11.28) принимают вид:

$$
\begin{gathered}
{}^4R_{\mu v} - (1/2)\tilde{g}_{\mu v}{}^4R + \Lambda\tilde{g}_{\mu v} = -\left(2k/c^4\right)\varphi^2\left[F_{\mu\alpha}F^{\alpha}_{v.} - (1/4)\tilde{g}_{\mu v}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right] + \\
+(1/\varphi)\left(\nabla\mu\nabla v\varphi - \tilde{g}_{\mu v}\tilde{g}^{\alpha\beta}\nabla\alpha\nabla\beta\varphi\right) + xT_{\mu v}; \\
-\nabla v F^{v\tilde{\mu}} - 2\Phi_\alpha F^{\alpha\mu} = \left(c^2/V\bar{k}\right)xQ^\mu_A\lambda^A; \\
(1/2)^4R + (3/2)\left(k/c^4\right)\varphi^2F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \Lambda = xQ_{AB}\lambda^A\lambda^B.
\end{gathered}
$$

Недостатком этого варианта можно считать переменность гравитационной постоянной из-за множителя φ^2 в (11.33а) справа перед тензором энергии-импульса электромагнитного поля.

б) Пусть $\mathscr{F}(\varphi) = 1/\varphi$, т. е. произведем конформное преобразование исходной метрики $\tilde{g}_{\mu v} : \tilde{g}_{\mu v} = (1/\varphi)g_{\mu v}; \tilde{g}^{\mu v} = \varphi g^{\mu v}$. Тогда уравнения (11.26)-(11.28) запишем следующим образом:

$$
\begin{gathered}
{}^4R_{\mu v} - (1/2)g_{\mu v}{}^4R + \Lambda(1/\varphi)g_{\mu v} = -\left(2k/c^4\right)\varphi^3\left[F_{\mu v}F^{\alpha}_{v.} - \right. \\
\left. -(1/4)g_{\mu v}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right] + \left(3/2\varphi^2\right)\left[\varphi_{,\mu}\varphi_{,v} - (1/2)g_{\mu v}g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta}\right] + xT_{\mu v} \\
-\nabla v\left(\varphi^3F^{v\mu}\right) = \left(c^2/V\bar{k}\right)x\varphi Q^\mu_A\lambda^A \\
g^{\alpha\beta}\nabla\alpha\nabla\bar{\beta}\varphi - (2/3)\Lambda - (3/2\varphi)g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} + \\
+(1/3)^4R\varphi + \left(k/c^4\right)\varphi^4F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = (2/3)xQ_{AB}\lambda^A\lambda^B
\end{gathered}
$$

Характерной особенностью уравнений (11.33б) - (11.35б) является отсутствие гравитационной постоянной x перед вкладом скалярного поля. Однако x можно ввести, произведя преобразование

$$\varphi = \Psi\exp\sqrt{2x/3}$$

Тогда уравнения (11.33б) и (11.35б) принимают вид в вакууме при учете свертки уравнений (11.33б):

$$
\begin{gathered}
{}^4R_{\mu\nu} - (1/2)g_{\mu\nu}{}^4R + \Lambda(1/\varphi)g_{\mu v} = -\left(2k/c^4\right)\varphi^3\left[F_{\mu\alpha}F_v{}^{\alpha} - \right. \\
\left. -(1/4)g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right] + x\left[\Psi_{,\mu}\Psi_{,v} - (1/2)g_{\mu v}g^{\alpha\beta}\Psi_{,\alpha}\Psi_{,\beta}\right] \\
g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\Psi + (1/\sqrt{6x})\Lambda/\varphi + \left(k/c^4\right)\sqrt{3/2\varkappa}\varphi^3F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 0.
\end{gathered}
$$

Легко видеть, что (11.38) в отсутствие электромагнитного поля и при $\Lambda = 0$ представляет собой уравнение Клейна-Фока для безмассового скалярного поля, а (11.37) - уравнения Эйнштейна с наиболее распространенным видом тензора энергии-импульса скалярного поля (1.47).

в) Произведем конформное преобразование исходной метрики $\tilde{g}_{\mu v}$ ($\mathscr{F} = \varphi^2$):

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \varphi^2 g_{\mu\chi}; \quad \tilde{g}^{\mu\nu} = \left(1/\varphi^2\right)g^{\mu\nu}.$$

Тогда 5-мерные «уравнения Эйнштейна» принимают вид:

$$
\begin{gathered}
{}^4R_{\mu\nu} - (1/2)g_{\mu\nu}{}^4R + \Lambda\varphi^2g_{\mu\nu} = -(2k/c^4)\left[F_{\mu\alpha}F_v{}^{\alpha} - (1/4)g_{\mu v}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right] + \\
+(3/\varphi)\left(\nabla_\mu\nabla_v\varphi - g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\varphi\right) - 6\varphi,{}_{,\mu}\varphi,{}_{,\nu}/\varphi^2 + xT_{\mu\nu}; \\
-\nabla_vF^{v\mu} - 3F^{v\mu}\varphi_{,v}/\varphi = \left(c^2x/\sqrt{k}\right)\varphi^3Q^\mu_B\lambda^B; \quad \text{(11.34 В)} \\
g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\varphi - (1/6)^4R\varphi + (1/3)\Lambda\varphi^3 - (k\varphi/2c^4)F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = -(x/3)\varphi^3Q_{AB}\lambda^A\lambda^B.
\end{gathered}
$$

Уравнение (11.35в) в вакууме (при $\Lambda = 0, F_{\alpha\beta} = 0$) представляет собой уравнение Клейна-Фока с дополнительным членом $-(1/6)^4R\varphi$, вводимым обычно из соображений конформной инвариантности уравнения безмассового скалярного поля [см. (1.72)].

Интересно, что наличие космологического члена Λ соответствует появлению в уравнении нелинейного члена, пропорционального $\sim \varphi^3$ и вводимого в нелинейной теории поля из других соображений. Еще одним преимуществом данного варианта является постоянство гравитационной постоянной перед тензором энергииимпульса электромагнитного поля в (11.33в). Вследствие указанных и ряда других свойств наиболее предпочтителен именно вариант отождествления в).

Заметим, что конформные преобразования (11.32) произведены на 4-мерном уровне, т. е. использовалась схема: сначала 1+4-расщепление 5-мерного многообразия, затем конформное преобразование в 4-мерном пространственно-временном сечении. К тем же результатам можно было прийти, используя обратный порядок процедур: сначала конформное преобразование в рамках 5-мерия, потом 1+4-расщепление в конформно-соответствующем исходному 5-мерном многообразии. Например, вариант в) соответствует 5 -мерному конформному ппреобразованию псходной метрики G_{AB}:

$$G_{AB} = \varphi^2 \overset{*}{G}_{AB}; \qquad G^{AB} = \left(1/\varphi^2\right) \overset{*}{G}{}^{AB},$$

так что в новой метрике G^*_{AB} имеем $G^*_{55} = -1$. Последующее $1+4$ - расщепление многообразия с метрикой G_{AB} и скалярным полем φ как источником приводит к уравнениям (11.33в) - (11.35в).

Появление в 5-мерной теории скалярного поля φ позволяет выдвинуть гипотезу, что нет необходимости волевым образом вводить в правую часть уравнений Эйнштейна тензор энергииимпульса внешней материи. Ей может соответствовать геометрическое скалярное поле φ, автоматически возникающее при $1+4$ расщеплении 5-мерного риманова многообразия. С учетом этой гипотезы следует выделить две крайние ветви исследований 5 -мерной теории.

Исследование 5 -мерной теории с дополнительными источниками в виде Q_A справа. Тогда 5-мерие можно использовать для описания в единых рамках теории гравитации, электромагнетизма и дополнительного безмассового скалярного поля φ, пока еще экспериментально не обнаруженного. Такая 5-мерная геория смыкается с вариантом скалярно-тензорной теории граюитации.

Исследования 5-мерной «вакуумной» теории, из которой предполагается получить единую теорию гравитации $(g_{\mu\nu})$, электромагнетизма (A_μ) и известной остальной материи (φ). Возможны промежуточные варианты.

28.11.4 4. Electrically Charged Field in the 5D Theory

Рассмотрим вопрос о геометрическом смысле электрических зарядов в 5-мерной теории. Для этого сопоставим пространственно-временные уравнения 5-геодезической (11.19) в варианте метрики в)

$$\frac{du^\mu}{ds} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta - \frac{2\sqrt{k}}{c^2}\frac{d\lambda}{ds} F^\mu{}_\alpha u^\alpha + \\ + \left[1 - \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2\right](\Phi^\mu - u^\mu \Phi_\alpha u^\alpha)$$

со стандартными уравнениями движения электрических зарядов в искривленном пространстве-времени (1.46). Отсюда следует отождествление

$$d\lambda/ds = -q/2m\sqrt{k}$$

т. е. отношение электрического заряда q. к массе m пробного тела с точностью до константы является кл. и. компонентой 5-скорости тела вдоль пятой координаты Это отношение в общем случае - переменная величина, определяемая с.кл.и. и конформно-инвариантным пятым уравнением геодезической (11.18) (при $\mu_{\mu\nu} = 0$) . При условии цилиндричности его можно записать следующим образом:

$$\frac{d}{ds} \ln \left| \frac{: (d\lambda/ds)^2}{1 - (d\lambda/ds)^2} \right| = -2 \frac{d}{ds} \ln \varphi$$

Интегрируя его, находим:

$$(d\lambda/ds)^2 = W_0/\left[\varphi^2 + W_0\left(1-\varphi^2\right)\right] = q^2/4km^2$$

где W_0 - постоянная интегрирования. Таким образом, отношение q/m определяется скалярным полем φ. В отсутствие скалярного поля $q^2/4km^2 = W_0 = \text{const}$.

В ветви 5-мерной теории 1 с внешним источником в виде пылевидной материи $\left[Q^{AB} = \rho\left(dx^A/dI\right)dx^B/dI\right]$ уравнение (11.34) при данной интерпретации $d\lambda/ds$ имеет смысл второй пары уравнений Максвелла с обычным источником в виде тока. В ветви 5-мерной теории 2 (без внешних источников) условие цилиндричности геометрических величин по пятой координате исключает возможность введения в уравнения типа второй пары уравнений Максвелла электрических зарядов [18, с. 387⌋. можно ввести, используя более общие 5-мерные римановы геометрии без условия цилиндричности, когда присутствует третии 5-мерный физико-геометрический тензор Д A_{AB}.

Переходя к обсуждению теории поля в 5-мерном многообразии (в ветви 1), прежде всего следует указать на поразительное сходство операторов дифференцирования в стандартнои Электродинамике

$$^{+}\partial_\mu\Psi \equiv \left[\partial/\partial x^\mu - (\mathrm{i}e/c\hbar)A_\mu\right]\Psi$$

инвариантных при калибровочных преобразованиях

$$\Psi \to \Psi\exp[(\mathrm{i}e/c\hbar)\tilde{f}]; \quad A_\mu \to A_\mu + \partial\tilde{f}/\partial x^\mu$$

где $\tilde{f}\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$ - произвольная функция, и операторов пространственно-временного дифференцирования в 5-мерии

$$\partial^\dagger_\mu\Psi = \left[\partial/\partial x^\mu - \left(G_{\mu 5}/G_{55}\right)\partial/\partial x^5\right]\Psi$$

инвариантных при калибровочных (11.5) и специально калибровочных (11.29) преобразованиях. Сходство проявляется также при рассмотрении коммутаторов этих операторов:

$$\left[^{+}\partial_\mu\,{}^{+}\partial_{v-}\right]_{-}\Psi = \mathrm{i}\frac{e}{c\hbar}F_{v\mu}\Psi; \quad \left[\partial^+_\mu, \partial^+_v\right]\Psi = 2\widetilde{F}_{\mu\nu}\partial^+_5\Psi$$

Операторы (11.44) и (11.46) и соотношения (11.47) будут совпадать, если при условии цилиндричности геометрических величин по пятой координате произвести отождествление (11.30) и предположить зависимость негеометрической величины Ψ от x^3 вида

$$\Psi = \psi\left(x^\mu\right)\exp\left[-(\mathrm{i}ec/2V\bar{k}\hbar)x^5\right]$$

Тогда при преобразованиях (11.36) будем иметь аналог каллибровочных преобразований Ψ в электродинамике:

$$\Psi \to \Psi\exp[-(\mathrm{i}ec/2V\bar{k}\hbar)f(x)].$$

Для скалярного поля (в ветви теории 1) следует постулировать 5-мерное уравнение типа Клейна-Фока

$$G^{AB}\nabla_A\nabla_B\Psi \pm \left(\mu^2c^2/\hbar^2\right)\Psi + a^5R\Psi = 0,$$

где a - постоянная; μ - фиктивная масса. Возможны различные варианты теории при разных значениях a и μ, в том числе равных нулю. Используя формулы (11.9)-(11.14), это уравнение в варианте 4-метрики а) можно представить в следующем кл.и. виде:

$$\tilde{g}^{\mu\nu}\nabla^+_\mu\nabla^+_\nu\Psi - \partial^+_5\partial^+_5\Psi + \Phi^\mu\nabla^+_\mu\Psi \pm \frac{\mu^2c^2}{\hbar^2}\Psi + a^5R\Psi = 0$$

или, используя (11.48):

: $\tilde{g}^{\mu v}\nabla^+_\mu\nabla^+_\nu\Psi + \Phi^\mu\nabla^+_\mu\Psi + \left(e^2c^2/4k\hbar^2\varphi^2 \pm \mu^2c^2/\hbar^2\right)\Psi + a^5R\Psi = 0$, (11.51a) iгде $\sqrt{e^2/4k\varphi^2 \pm \mu^2}$ играет роль наблюдаемой массы m и согласно (11.20)

$$^5R = {}^4R + \widetilde{F}_{\mu v}\widetilde{F}^{\mu v} - 2\frac{\widetilde{g}^{\alpha\beta}}{\varphi}\nabla_\alpha\nabla_\beta\varphi$$

Не будем подробно обсуждать возможные физические следствия уравнения (11.51)*, обратим лишь внимание на то, что согласно (11.52) скалярное поле φ в уравнении (11.51) в значительной степени «дублирует» поле Ψ, т. е. опять приходим к доводу в пользу ветви 5 -мерной теории 2.

В полностью геометризованной 5-мерной теории (ветвь 2) с скалярное поле φ входит, во-первых, через физико-геометриче-ский вектор Φ_μ, который при допущении, что A_μ не зависит от x^5, записывается в виде

$$\Phi_\mu = \frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} + \frac{2\sqrt{k}}{c^2}A_\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x^5}\right) = \frac{1}{\varphi}\nabla^+_\mu\varphi$$

и, во-вторых, как конформный фактор. В последнем случае также все производные от φ являются кл.и., т. е. взаимодействие скалярного и электромагнитного полей вводится автоматически при допущении, что из всех геометрических величин от x^5 зависит только φ. то означает отказ от условия цилиндричности по

Впервые 4-м'ерное уравнение Клейна-Фока было получено из уравнения (11.51) при $a = 0, \quad \mu = 0, G_{55} = -1$ и следующей зависимости Ψ от x^5:

$$\Psi = \psi\left(x^\mu\right)\exp\left[(\mathrm{i}c/\hbar)mx^5\right].$$

пятой координате, причем в теории должны использоваться не произвольные 5-мерные римановы пространства, а лишь такие, в которых зависимость от пятой координаты входит в метрику G_{AB} в виде конформного фактора. Последнее реализуется в варианте в) выбора 4-метрики:

$$\overset{*}{G}_{AB} = -\frac{G_{AB}}{G_{55}} = \frac{G_{AB}}{\varphi^2}; \quad A_\mu = -\frac{c^2}{2\sqrt{/\bar{k}}}\frac{G_{5\mu}}{G_{55}} = \frac{c^2}{2\sqrt{/\bar{k}}}\overset{*}{G}_{5\mu}$$

$$g_{\mu\nu} = \overset{*}{G}_{\mu\nu} - \overset{*}{G}_{\mu 5}\overset{*}{G}_{v5} \;/\; \overset{*}{G}_{55} = \varphi^{-2}\left(G_{\mu\nu} - G_{\mu 5}G_{v5}/G_{55}\right)$$

где компоненты $\overset{*}{G}_{AB}$ не зависят от $x^5; G^*_{55} = -1$.

Такое обобщение условия цилиндричности по пятой координате назовем условием квазицилиндричности (по пятой координате). Можно показать, что оно соответствует использованию 5-мерных конформно-киллинговых римановых многообразий \см. (3.104)], когда имеется пространственно-подобный конформный вектор Киллинга ξ_A, удовлетворяющий уравнению

$$\underset{\xi}{\xi G_{AB}} = \xi_{A;B} + \xi_{B;A} = (2/5)G_{AB}\xi_{;C}$$

причем λ_A выбрано вдоль ξ_A.

Возможность рассмотрения нескольких конформно-соответст(вующих метрик позволяет ввести операторы ковариантного дифференцирования относительно символов Кристоффеля, образованных из разных метрик. В частности, запишем ковариантную производную от метрики варианта в) относительно исходных символов Кристоффеля $\widetilde{\Gamma}^\alpha_{\mu v}$:

$$g_{\mu v|\sigma} = \tilde{\nabla}^+_\sigma\left(\tilde{g}_{\mu v}/\varphi^2\right) = -\left(g_{\mu v}/\varphi\right)\left[\varphi, \sigma + \left(2\sqrt{k}/c^2\right)A_\sigma\varphi, 5\right]$$

Тогда получим объединение 5-мерия с единой теорией гравитации и электромагнетизма Вейля [14, с. 513] (см. примечание в \$1.5). В (11.55) справа, как и у Вейля, стоит член, пропорциональный векторному потенциалу электромагнитного поля.

В рассматриваемом варианте 5-мерной теории 15 компонент «уравнений Эйнштейна»имеют вид:

$$
\begin{gathered}
{}^4R_{\mu v} - (1/2)g_{\mu v}{}^4R + \Lambda\varphi^2 g_{\mu v} = -\left(2k/c^4\right)\left[F_{\mu\alpha}F_v^{\alpha} - \right. \\
\left. -(1/4)g_{\mu v}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right] + (3/\varphi)\left(\nabla^+\left(\mu\nabla^+_{v)}\varphi - g_{\mu v}g^{\alpha\beta}\nabla^+_\alpha\nabla^+\varphi\right) - \right. \\
\left. - \left(6/\varphi^2\right)\nabla^+_\mu\varphi\cdot\nabla^+_v\varphi + 3g_{\mu v}\varphi, 5, 5\right. \\
-\nabla_v F^{v\mu} - 3F^{v\mu}\frac{\nabla^+_v\varphi}{\varphi} = \frac{3c^2}{V_{\bar{k}}}g^{\mu v}\left(\frac{\nabla^+_v\varphi, 5}{\varphi} - 2\frac{\varphi, 5\nabla^+_v\varphi}{\varphi^2}\right); \qquad (11.56) \\
g^{\alpha\beta}\nabla^+_\alpha\nabla^+_\beta\varphi - (1/6)^4R\varphi - \left[\left(k/2c^4\right)F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + 2\varphi^2, 5/\varphi^2\right]\varphi + (1/3)\Lambda\varphi^3 = 0.
\end{gathered}
$$

Сделаем несколько замечаний о виде и смысле этих уравнений:

В уравнениях (11.56) структура членов, содержащих φ и производные от φ, такая же, как в варианте теории прямого межчастичного гравитационного взаимодействия Хойла и Нарликара [199] (если в [199] положить $\psi = \varphi^3/2$ и заменить $(1/6)\ R$ величиной $(3/16)R$). К аналогичным уравнениям в скалярно-тензорной теории гравитации пришел Шерер [200] (если в [200 положить $\psi = \varphi^3/2$ и $\omega = 4/3$), также опиравшийся на реляционную концепцию пространства-времени.

В уравнениях (11.57), соответствующих второй паре уравнений Максвелла, справа возникает источник типа плотности тока, так как производные по x^5 согласно (11.53) определяют заряд.

Кроме уже отмеченных в §11.3 характерных черт уравнения (11.58) [уравнения (11.35в)] типа Клейна-Фока, укажем:

а) обобщенный даламбертиан от φ включает в себя стандартное взаимодействие φ с электромагнитным полем, если φ зависит от x^5 следующим образом:

$$\varphi = \tilde{\varphi}\left(x^\mu\right)\exp\left(\mathrm{i}ecx^5/2\sqrt{k}\hbar\right)$$

б) роль квадрата наблюдаемой массы в (11.58), если пренебречь космологическим членом, играет величина

$$m^2c^2/\hbar^2 \to -\left[\left(k/2c^4\right)F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + 2\varphi^2, 5/\varphi^2 + {}^4R/6\right]$$

в) интересно, что согласно (11.60) зависимость от x^5 вида (11.59) при e, равном заряду электрона, приводит к вкладу в: массу величины $m_1 \sim e/2\sqrt{k} \sim 10^{-6}$ г (см. приложение).

С помощью 5-мерия в ветви 2 можно произвести как бы овеществление понятий (сугубо реляционных), вводимых в стандартной ОТО на базе монадного, диадного и тетрадного формализмов: идеализированных безмассовых приборов систем отсчета (им можно сопоставить скалярное поле), направлений распространения и векторов поляризаций, например, электромагнитных волн (им можно сопоставить электромагнитное поле, возникающее из компонент $G_{5\mu}$).

Конкретное сопоставление φ волновым функциям заряженного скалярного поля Ψ изложено в приложении.

28.11.5 5. Spherically Symmetric Solutions of 5D "Einstein Equations"

Рассмотрим цилиндрические по пятой координате статические сферически-симметричные решения 5-мерных «уравнений Эйнштейна». Простейшее из них получается из 4-мерной метрики Шварцшильда добавлением компонент $G_{55} = -1, G_{5\mu} = 0$:

$$dI^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)dx_0^2 - \frac{dr}{(1 - r_g/r)} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) - dx_5^2.$$

К более общим решениям можно прийти, либо непосредственно решая уравнения (11.33)-(11.35) в любом варианте выбора 4-метрики, как это делалось независимо в работах [195, 196⌋, либо воспользовавшись тем, что в отсутствие электромагнитного поля в варианте выбора 4-метрики б) 5-мерные уравнения (11.33б)-(11.35б) совпадают с

4-мерными стандартными уравнениями, из которых было получено решение Фишера (4.86), либо используя найденные сферически-симметричные решения в скалярно-тензорных теориях гравитации при соответствующем 5-мерию выборе произвольных констант. Любым из этих путей приходим к точному решению

$$dI^2 = \left(1-\frac{\tilde r_g}{r_1}\right)^{A-B} dx_0^2 - \left(1-\frac{\tilde r_g}{r_1}\right)^{-A-B} dr_1^2 -$$
$$r_1^2\left(1-\frac{\tilde r_g}{r_1}\right)^{1-A-B}\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right) - \left(1-\frac{\tilde r_g}{r_1}\right)^{2B} dx_5^2,$$

где $\tilde r_g, A$ и B - константы, связанные соотношением $A^2+3B^2=1$. Ясно, что (11.62) переходит в метрику Шварцшильда при $B=0$, $A=+1$. Видно также, что в варианте б)

$$dI^2 = \left(1-\frac{\tilde r_g}{r_1}\right)^{-B}\left\{\left[\left(1-\frac{\tilde r_g}{r_1}\right)^{A} dx_0^2 - \left(1-\frac{\tilde r_g}{r_1}\right)^{-A} dr_1^2 -\right.\right.$$
$$\left.\left. -r_1^2\left(1-\frac{\tilde r_g}{r_1}\right)^{1-A}\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right)\right] - \left(1-\frac{\tilde r_g}{r_1}\right)^{3B} dx_5^2\right\}(1$$

4-метрика (в квадратных скобках) совпадает с решением Фишера. Опираясь на соображения предыдущих параграфов, будем использовать вариант 4-метрики в)

$$dI^2 = \left(1-\frac{\tilde r_g}{r_1}\right)^{2B}\left\{\left[\left(1-\frac{\tilde r_g}{r_1}\right)^{A-3B} dx_0^2 - \left(1-\frac{\tilde r_g}{r_1}\right)^{-A-3B} dr_1^2 -\right.\right.$$
$$\left.\left. -r_1^2\left(1-\frac{\tilde r_g}{r_1}\right)^{1-A-3B}\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right)\right] - dx_5^2\right\}.$$

Для удобства сопоставления 5-мерной теории с ОТО желательно записать 4-метрику варианта в) в координатах кривизн.

Однако точно это можно сделать лишь в неявном виде |195|, поэтому запишем ее в координатах кривизн приближенно. Переобозначим константы: $\alpha = 2B/(A-B) \to \tilde r_g = r_g\sqrt{\alpha^2+\alpha+1}; A = (\alpha+2)/2\sqrt{\alpha^2+\alpha+1}; B = \alpha/2\sqrt{\alpha^2+\alpha+1}$ и преобразуем r_1: $r^2 = r_1^2\left(1-\tilde r_g/r_1\right)^{1-A-3B}$. Легко видеть, что при $\alpha=0$ метрика (11.62) переходит в (11.61). Представим компоненты метрики в виде рядов по r_g/r. После несложных вычислений находим:

$$\left.\begin{array}{l} ds^2 \approx \left[1-(1-\alpha)r_g/r\right]dx_0^2 - \left[1+(1+2\alpha)r_g/r\right]dr^2 - \\ -r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right); \\ \varphi^2 \approx 1-\alpha r_g/r - \left[\alpha(\alpha+1)/2\right](r_g/r)^2. \end{array}\right\}$$

В любой интерпретации 5-мерной теории φ описывает распределение вокруг источника безмассового скалярного поля. Константа α определяет плотность скалярного поля и одновременно его влияние на 4-метрику.

Кратко рассмотрим поведение пробных тел в сферически-симметричной 5-метрике. Для пятого уравнения геодезической ранее был получен первый интеграл в самом общем виде (11.43). Подставляя в него приближенное решение для φ^2, получаем:

$$(d\lambda/ds)^2 \approx W_0\left[1+(\alpha r_g/r)(1-W_0)\right].$$

Из пространственно-временного уравнения геодезической (11.40) для угла θ находим, как и в метрике Шварцшильда, что если в начальный момент пробная частица двигалась в экваториальной «плоскости» ($\varphi_0=\pi/2, d\theta/\,ds|_0=0$), то и вся траектория находится в этой «плоскости».

Из уравнения для угла φ вычисляем интеграл:

$$r^2 d\varphi/ds \approx \sigma\left[1+(\alpha/2)(1-W_0)\,r_g/r\right],$$

где σ - постоянная интегрирования (удвоенная секторная ско-рость). Аналогично, из уравнения (11.40) для $\mu = 0$ находим:

$$dx^0/ds \approx V_0 \left[1 + r_g/r - (\alpha/2)\,(1 + W_0)\, r_g/r\right],$$

где V_θ - постоянная интегрирования.

Вместо оставшейся компоненты уравнения геодезической удобно использовать выражение для квадрата 4-интервала. Учитывая первые интегралы (11.64) - (11.66) и переходя от r к $u = 1/r$, получаем:

$$\sigma^2 \left[(du/d\varphi)^2 + u^2\right] = V_0^2 - \mathrm{I} + r_g u \left[1 + \alpha\left(3 - 3V_0^2 - W_0\right)\right] + \\ + r_g u^3 b^2 (1 + 2\alpha).$$

Сравнивая (11.67) с соответствующим соотношением в стандартной ОТО, получаем выражение для эффективной массы центрального источника:

$$M_{\ni\Phi} = \left(r_g c^2/2k\right)\left[(1 + 3\alpha) - \alpha\left(3V_0^2 + W_0\right)\right] = M_0 + M_1,$$

где M_1-часть M, зависящая от параметров пробной частицы. Это существенно новое свойство 5-мерной теории.

Вычисления, аналогичные проделанным в гл. 4, дают для смещения перигелия (Меркурия) значение (за один оборот)

$$\delta\varphi = (3/2)\pi r_g \left(\mathrm{I}/r_{\text{мин}} + 1/r_{\text{макс}}\right)(1 + 2\alpha).$$

Для отклонения лучей света, проходящих на расстоянии ρ_0 от источника, находим:

$$\delta\beta = (2r/\rho_0)\,(1 - \alpha/2)$$

Из формул (11.68) - (11.70) следует, что при достаточно малых α различия между классическими эффектами в ОТО и в 5-мерии могут быть неощутимыми.

Кратко обсудим частный случай метрики, создаваемой центральным электрически заряженным источником. Такую метрику можно было бы найти, решая непосредственно уравнения (11.33) - (11.35) [197], однако мы поступим иначе. Будем исходить из известной метрики (11.61). Произведем линейное преобразование координат:

$$\left.\begin{array}{l} x^0 = \alpha_{00} x'^0 + \alpha_{05} x^{55}; \quad x^5 = \alpha_{50} x'^0 + \alpha_{55} x'^5; \quad x^i = x'^i; \\ x'^0 = (\alpha_{55}/\Delta)\, x^0 - (\alpha_{05}/\Delta)\, x^5; \quad x'^5 = -(\alpha_{50}/\Delta)\, x^0 + (\alpha_{00}/\Delta)\, x^5, \end{array}\right\}$$

где $\Delta = \alpha_{00}\alpha_{55} - \alpha_{05}\alpha_{50}$. Очевидно, что в новых координатах метрика по-прежнему будет решением 5-мерных «уравнений Эйнштейна»: однако преобразование (11.71) выводит нас за пределы «обобщенной системы отсчета» в данной калибровке [см. (11.5), (11.29)]; переход κ новой «обобщенной системе отсчета» иноуцирует иную физическую ситуацию - приводит к появлению электрического и скалярного полей. Действительно, в новой системе координат

$$G'_{05} = \alpha_{00}\alpha_{05} - \alpha_{50}\alpha_{55} - (r_g/r)\,\alpha_{00}\alpha_{05}; \quad G'_{55} = \alpha_{05}^2 - \alpha_{55}^2 - (r_g/r)\,\alpha_{05}^2.$$

Наложим на коэффициенты линейного преобразования (11.71) два естественных условия: $\lim_{r\to\infty} \tilde{g}'_{00} = 1, \lim_{r\to\infty} G'_{55} = -1$, которые соответствуют следующим:

$$\alpha_{00}\alpha_{55} - \alpha_{05}\alpha_{50} = \pm 1; \quad \alpha_{55}^2 - \alpha_{05}^2 = 1$$

Тогда

$$\left.\begin{array}{l} \varphi^2 = 1 + \alpha_{05}^2 \frac{r_g}{r}; \quad \Phi_1 = -\frac{\alpha_{05}^2}{2\left(1+(r_g/r)\alpha_{05}^2\right)} \frac{r_g}{r^2}; \\ F_{01} = -\frac{r_g c^2}{2\sqrt{k}} \frac{\alpha_{05}\alpha_{55}}{r^2} \frac{1}{\left[1+(r_g/r)\alpha_{05}^2\right]^2}. \end{array}\right\}$$

Отсюда следует, что значение возникшего электрического заряда. q связано с коэффициентами линейного преобразования:

$$q = -\left(r_g c^2/2\sqrt{k}\right)\alpha_{05}\alpha_{55}, \quad \text{т. е. } \alpha_{05}\alpha_{55} = -q/M\sqrt{k}.$$

Из (11.73) и (11.75) находим значения двух коэффициентов:
$\alpha_{05}^2 = (1/2)\left(\sqrt{1+4q^2/kM^2}-1\right)$; $\alpha_{55}^2 = (1/2)\left(\sqrt{1+4q^2/kM^2}+1\right)$.

$$ds^2 = \frac{(1-r_g/r)}{\left[1+(r_g/r)\,\alpha_{05}^2\right]^2}dx_0^2 - \frac{dr^2}{(1-r_g/r)\left[1+(r_g/r)\,\alpha_{05}^2\right]} - \frac{r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right)}{1+(r_g/r)\,\alpha_{05}^2}.$$

Сделаем некоторые выводы и замечания:

Линейное преобразование (11.71) вместе с переходом в новую «обобщенную систему отсчета» физически означает введение в центральный источник электрического заряда q, пропорционального массе источника M, причем коэффициент пропорциональности определяется коэффициентом линейного преобразования $\alpha_{05.}$. При $\alpha_{05}=0$ преобразование (11.71) не выводит нас за пределы «обобщенной системы отсчета» и электрическое поле не появляется.

Используя тетрадный (пентадный) метод в калибровке Ламе, находим, что наблюдаемая напряженность кулоновского поля имеет вид $E_r \approx (q/r^2)\left[1-(r_g/2r)\,\alpha_{05}^2\right]$, причем здесь использованы не координаты кривизн.

Возникшее электрическое поле порождает напряженность скалярного поля Φ_1, которое также определяется электрическим зарядом центрального источника.

Более общее решение, зависящее от трех констант, можно получить аналогично из метрики (11.62).

Можно показать [201], что точные решения 15 уравнений поля с зависимостью φ от пятой координаты получаются из известных решений стандартных уравнений Эйнштейна с космологическим членом. Действительно, из структуры уравнений (11.56) – (11.58) следует, что зависимость φ от пятой координаты должна иметь вид: $\varphi = \tilde{\varphi}\left(x^0,x^1,x^2,x^3\right)\exp\left(\alpha x^5\right)$, где α - постоянная. Рассмотрим случай, когда электромагнитное поле отсутствует, $\Lambda=0$ и $\varphi=\exp\left(\alpha x^5\right)$. Тогда (11.57) выполняется тождественно, уравнения (11.56) принимают вид стандартных уравнений Эйнштейна с космологическим членом

$$^4R_{\mu v} - (1/2)g_{\mu v}\,^4R - 3\alpha^2 g_{\mu v} = 0$$

а (11.58) следует из (11.56). Известно много решений этих уравнений [91]. От них можно перейти к решениям системы уравнений (11.56) – (11.58) с отличным от нуля электромагнитным полем и φ, зависящим от пятой и пространственно-временных координат, например, с помощью преобразований (11.71).

28.11.6 6. Homogeneous Isotropic Cosmological Models in 5D Theory

Рассмотрим однородные изотропные космологические модели в двух ветвях 5-мерной теории: 1) с внешним тензором энергииимпульса материи Q_{AB} и 2) в сугубо геометрической теории $23C$ Предположим в обеих ветвях, что в целом материя, заполняющая пространство, электрически нейтральна, т. е. $Q_5^\mu = Q_{55} = 0$, 5-метрика цилиндрична по пятой координате, $F_{\mu\nu}=0$. Кроме того, положим $\Lambda=0$. Согласно соображениям, изложенным в предыдущих параграфах, выберем вариант в) метрики 4-мерных пространственно-временных сечений. Тогда метрику следует искать в виде

$$dI^2 = \varphi^{2*}G_{AB}dx^Adx^B = \varphi^2\left\{a^2\left[dx_0^2 - dx_1^2 - \begin{pmatrix}\sin^2 x_1\\ \mathrm{sh}^2\, x_1\end{pmatrix}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right] - dx_5^2\right\},$$

где a и φ - функции от x^0. Представим φ в виде $\varphi=\exp(\Phi)$; $\Phi=\Phi\left(x^0\right)$. Уравнения (11.33в) - (11.35в) записываются следующим образом:

$$
{}^4R_{\mu\nu} - (1/2)g_{\mu v}{}^4R = 3\left(\nabla_\mu\nabla_v\Phi - g_{\mu v}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi\right) - 3\left(\nabla_\mu\Phi\nabla_v\Phi + \right.
$$
$$
\left. + g_{\mu v}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha{}^\Phi\nabla_\beta\Phi\right) + xT_{\mu v};
$$
$$
g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi + g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\Phi - (1/6)^4R = 0.
$$

В ветви 1 выберем тензор энергии-импульса пылевидной материи, который в сопутствующей системе отсчета имеет компоненты:

$$
T_{\mu\nu}\tau^\mu\tau^\nu = \rho c^2; \quad T_{\mu\nu}\tau^\mu h_k^v = 0; \quad T_{\mu\nu}h_i^\mu h_k^v = 0,
$$

где $\rho\,(x^0)$ - плотность материи.

а) 3 акрытые однородные изотропные модели. Используя формулы 6.1-6.3 для монадных 4-мерных величин, находим обладающие нетривиальным содержанием компоненты уравнений (11.80), (11.81) [соответственно проекции (11.80) на $\tau^\mu\tau^v, h_i^\mu h_k^v$ и (11.81)] :

$$
1 + \dot{a}^2/a^2 = -3\dot{\Phi}a/a - 2\dot{\Phi}\dot{\Phi}^2 + x\rho c^2a^2/3
$$
$$
-1 + \dot{a}^2/a^2 - 2\ddot{a}/a = 3\ddot{\Phi} + 3\dot{\Phi}a/a + 3\dot{\Phi}^2
$$
$$
1 + \ddot{a}/a = -\ddot{\Phi} - 2\dot{\Phi}\dot{a}/a - \dot{\Phi}^2.
$$

Начнем с решения уравнений, общих для обеих ветвей.

Произведя замену $a\exp\Phi = \exp\mu$, уравнение (11.85а) приводим к виду

$$
\ddot{\mu} + \dot{\mu}^2 + 1 = 0
$$

Его решение есть

$$
\exp\mu = A\sin\left(x^0 + C_1\right)
$$

где A и C_1 - постоянные интегрирования. В дальнейшем будем считать, что начальная фаза $C_1 = 0$. Умножим (11.85а) на 3 и сложим с уравнением

(11.84а) Тогда, вводя обозначение $\dot{a}/a = z$ и используя (11.87), находим:

$$
z - z^2 + 2 = -3z\operatorname{ctg}x^0
$$

Из множества решений этого уравнения выделим два, представляющих наибольший интерес:

$$
z_1 = \operatorname{ctg}\frac{x^0}{2} \to a = a_0\left(1 - \cos x^0\right); \quad \varphi = \frac{A}{a_0}\operatorname{ctg}\frac{x^0}{2};
$$
$$
z_2 = \frac{1 + \cos^2 x^0}{\sin x^0\cos x^0} \to a = a_1\frac{\sin^2 x^0}{\cos x^0}; \quad \varphi = \frac{A}{a_1}\operatorname{ctg}x^0.
$$

Теперь отдельно рассмотрим обе ветви 5-мерной теории.

Подставляя решения в уравнение (11.83а), легко убедиться, что наличию внешнего материального источника соответствует лишь решение (11.89а). Для плотности ρ имеем:

$$
\rho = 3/xa_0^2c^2\sin^2 x^0\left(1 - \cos x^0\right)
$$

Эволюция этой закрытой модели описывается точно такими же уравнениями, что и эволюция закрытой модели Фридмана [см. (6.22а), (6.23а)]

$$
a = a_0\left(1 - \cos x^0\right); \quad \tau = a_0\left(x^0 - \sin x^0\right).
$$

Полная масса внешней материи

$$
M = 2\pi^2a^3\rho = \left(6\pi^2a_0/xc^2\right)\left[1 - \left(2\cos x^0/\sin^2 x^0\right)\left(1 - \cos x^0\right)\right]
$$

изменяется от нуля до бесконечности при $x^0 = \pi$, а затем опять уменьшается до нуля при $x^0 = 2\pi$. С вкладом скалярного поля φ суммарная масса Вселенной остается постоянной.

Особо следует отметить, что при $x^0 \to 0(\pi)$ скалярное поле φ стремится к бесконечности: $\varphi \approx 2\left(A/a_0\right)/x^0$. Как отмечалось в §11.4, φ определяет зависимость от координат отношения электрического заряда к массе согласно (11.43). Условие вещественности значений характеристик заряженных частиц накладывает ограничения на интервал времени τ, в пределах которого сохраняется смысл вводимых понятий и уравнений [198]. Из (11.43) следует, что при $W_0 > 1$ (это имеет место для реальных частиц) стандартные понятия теряют смысл раньше, чем возникают сингулярности.

Полностью геометризованной теории соответствует решение (11.90), при котором $\rho = 0$, и уравнение (11.83) выполняется тождественно. Эволюция такой закрытой. модели определяется следующими уравнениями в параметрическом виде:

$$a = a_1 \sin^2 x^0/\cos x^0; \quad \tau = a_1\left[\ln \operatorname{tg}\left(x^0/2 + \pi/4\right) - \sin x^0\right].$$

Отсюда следует, что при $x^0 = \pi/2$ радиус мира становится бесконечным, однако это достигается за бесконечный интервал времени τ. Таким образом, в полностью геометризованной теории характер эволюции закрытой модели Вселенной качественно иной, чем в модели Фридмана: модель бесконечно долго расширяется от сингулярного состояния.

Формально полагая правую часть (11.80) равной $xc^2\tilde{\rho}$, в данной модели получаем для эффективной плотности геометрической материи

$$\tilde{\rho} = 3\left(1 + 3\cos^2 x^0\right)/xa_1^2c^2 \sin^6 x^0$$

$\tilde{\rho}$ изменяется от бесконечности при $x^0 = 0$ до предельного значения $\tilde{\rho} = 3/xa_1^2c^2$ при $x^0 = \pi/2$

б) Открытые однородные изотропные модели. Они находятся из уравнений:

$$-1 + \dot{a}^2/a^2 = -3\dot{\Phi}\dot{a}/a - 2\dot{\Phi}\dot{\Phi}^2 + x\rho c^2a^2/3;$$
$$1 + \dot{a}^2/a^2 - 2\ddot{a}/a = 3\ddot{\Phi} + 3\dot{\Phi}\dot{a}/a + 3\dot{\Phi}^2;$$
$$-1 + \ddot{a}/a = -\ddot{\Phi} - 2\dot{\Phi}a/a - \dot{\Phi}^2.$$

Аналогичная замена $a\exp\Phi = \exp\mu$ приводит уравнение (11.85б) к виду $\ddot{\mu} + \dot{\mu}^2 - 1 = 0$, откуда' находим:

$$\exp\mu = A \operatorname{sh} x^0; \quad \dot{\Phi} = cthx^0 - \dot{a}/a$$

Из уравнения $\dot{z} - z^2 - 2 = -3z \operatorname{cth} x^0$, соответствующего получаем:

$$z_1 = \operatorname{cth}\left(x^0/2\right) \to a = a_0\left(\operatorname{ch} x^0 - 1\right); \quad \varphi = \left(A/a_0\right)\operatorname{cth}\left(x^0/2\right);$$
$$z_2 = \frac{1 + \operatorname{ch}^2 x^0}{\operatorname{sh} x^0 \operatorname{ch} x^0} \to a = a_1\frac{\operatorname{sh}^2 x^0}{\operatorname{ch} x^0}; \quad \varphi = \frac{A}{a_1}\operatorname{cth} x^0.$$

Опять отдельно рассмотрим обе ветви 5-мерной теории.

Первое решение соответствует ветви теории с внешним материальным источником. Подставляя (11.89б) в (11.83б), находим:

$$\rho = -3/xa_0^2c^2 \operatorname{sh}^2 x^0\left(\operatorname{ch} x^0 - 1\right)$$

что физически неприемлемо. Эволюция этой модели описывается точно такими же уравнениями, что и эволюция открытой модели Фридмана (6.22) – (6.23):

$$a = a_0\left(\operatorname{ch} x^0 - 1\right); \quad \tau = a_0\left(\operatorname{sh} x^0 - x^0\right).$$

Опять отметим, что вследствие (11.43) сингулярность плотности (11.96) лежит за пределами области вещественности отношения электрического заряда к массе пробных частиц.

Полностью геометризованной теории соответствует решение (11.90), из которого находим закон эволюции открытой модели:

$$a = a_1 \operatorname{sh}^2 x^0/\operatorname{ch} x^0; \quad \tau = a_1\left(\operatorname{sh} x^0 - 2\operatorname{arctg}\exp x^0 + \pi/2\right),$$

т. е., как и в открытой модели Фридмана, происходит бесконеч- но долгое расширение от сингулярного состояния. Опять вводя эффективную плотность скалярной материи, получаем:

$$\tilde{\rho} = 3\left(1 + 3\,\mathrm{ch}^2\, x^0\right)/xa_1^2c^2\,\mathrm{sh}^6\, x^0$$

т. е. $\tilde{\rho}$ изменяется от бесконечности при $x^0 = 0$ до как угодно малых значений при достаточно больших x^0.

В заключение этой главы приведем высказывание основоположника 5-мерной теории Калуцы, к которому, вероятно, присоединятся все серьезно познакомившиеся с 5-мерием: «Полностью учитывая все физические и теоретико-познавательные трудности, громоздящиеся на нашем пути при изложенном подходе, все же нелегко примириться с мыслью, что все эти соотношения, которые вряд ли можно превзойти по достигнутой в них степени формального единства, - всего лишь капризная игра обманчивой случайности» [14, с. 534]. Невольно возникает мысль, что достигнутое единство представляет собой внешнее проявление неких глубоких закономерностей, лежащих в самой основе физического мироздания и пока еще как следует не познанных.

28.12 Features of 4-Dimensional Spacetime

28.12.1 1. The Problem of Justifying the 4-Dimensionality of Space-time

Монадный и диадный методы, лежащие в основе рассмотрения всех затронутых выше проблем, позволяли выделять из многообразий высшего числа измерений многообразия меньшей размерности, что дало возможность упрощать или интерпретировать сложные понятия и соотношения с помощью более элементарных. Как уже отмечалось, возникновение этих методов обязано задаче выделения 4-мерного пространства-времени из 5-мерного многообразия. Таким образом, по существу мы рассматриваем физические аспекты размерности классического пространства-времени. Лишь незначительный шаг отделяет нас от более широкого подхода - от постановки задачи физического обоснования 4-мерности пространства-времени *.

Появление представлений о многомерных пространствах (при $n > 3$) следует рассматривать как важную веху в развитии учения о структуре физического пространства. Пожалуй, рождение этой идеи можно поставить в один ряд с открытием неевклидовых геометрий. Трудно сказать, кому здесь принадлежит приоритет. Вполне отчетливо идеи многомерности были сформулированы в прошлом веке в работах Грассмана и Кэли. Довольно глубокие соображения о размерности физического пространства можно найти в работах Римана [14, с. 18] и Маха [202]. Между тем задолго до них Лагранж рассматривал в механике 4-мерные конфигурационные пространства. Этот ход мысли сыграл большую роль в формировании идеи о 4-мерном пространственно-временном многообразии теории относительности. Взглянем на размерность с позиций реляционного подхода К пространству-времени, понимаемому как совокупность отношений, в которые вступают друг с другом материальные образования, в частности частицы (в классическом смысле). В общем случае существования в мире N частиц между ними можно было бы ожидать N ! независимых (симметричных) отношений. Іри возможности погружения частиц в n-мерное многообразие (пространство) независимых отношений становится только nN. В физическом пространстве реализуется случай $n = 3$. Это одно из наиболее удивительных и загадочных свойств нашего мироздания! Можно ли его объяснить, исходя из каких-то более элементарных физических понятий и закономерностей?

В современной теории факт 3-мерности пространства (или 4-мерности пространства-времени) обычно постулируется. Однако в настоящее время уже очевидно, что пространство не является априори вместилищем материи, а в своих существенных чертах определяется физическими свойствами материи (или обязано им). Это достаточно ярко продемонстрировали революции в физике, происшедшие за последние восемь десятилетий. Перед современной теоретической физикой поставлен вопрос о создании такой физической картины мира, в основу которой были бы положены закономерности и понятия, берущие начало из физики микромира. В такой теории

классические пространственно-временные представления, справедливые для макроскопических явлений, не должны быть заложены с самого начала, а должны возникать со всеми вытекающими из них свойствами на определенном этапе развития теории как нечто вторичное. Это относится и к появлению понятия размерности. Представляется, что построение такой теории (или достаточно оформленных ее фрагментов) явилось бы физическим обоснованием постулата пространственного 3-мерия, а также вскрыло бы корни 5-мерия и природу ограничений, налагаемых на пятое измерение.

Для реализации такой программы чрезвычайно важно суметь выявить те основные закономерности, которые следует заложить в фундамент новой теории, в частности усмотреть истоки понятия пространственной размерности. Конструктивным путем поиска является анализ действия физических понятий и законов в пространствах различного числа измерений. Те из них, которые справедливы лишь в 4-мерном (5-мерном) пространстве-времени и не допускают обобщения на случай других размерностей, можно считать наиболее тесно связанными с искомыми более глубокими понятиями и закономерностями, ответственными за макроскопическую размерность. Во всяком случае, такая методика может помочь выявить главное и отсеять второстепенное.

В этой главе кратко рассмотрен указанный путь исследований. Здесь использован довольно обширный накопившийся к сегодняшнему дню материал [203-222], можно сказать, своеобразная коллекция особенностей физического мира в пространстве-времени четырех измерений по сравнению с аналогичными теориями в многообразиях иного числа измерений. Несмотря на то что пока трудно окончательно ответить на поставленный выше вопрос, из совместного рассмотрения этих особенностей вырисовывается любопытная картина уникальности нашего мира и представляется возможность выдвижения новых гипотез.

Далее везде $n+1$ означает размерность пространственновременных многообразий с сигнатурой $(+--\ldots)$, причем пространственные координаты полагаем равноправными.

28.12.2 2. General Covariant Features of 4-Dimensional Manifolds

4-Мерные многообразия имеют наинизшую размерность, начиная с которой теория Эйнштейна в вакууме содержательна [8, с. 108]. Действительно, многообразие искривлено, если тензор Римана - Кристоффеля отличен от нуля. В многообразиях трех измерений $R^{\mu}_{.\upsilon\alpha\beta}$ однозначно выражается через тензор Риччи согласно (6.11), а в многообразиях двух измерений через скалярную кривизну:

$$R^{\mu}_{.\upsilon\alpha\beta} = -(1/2)R\left(g^{\mu}_{\beta}g_{\alpha\upsilon} - g^{\mu}_{\alpha}g_{\upsilon\beta}\right)$$

Следовательно, многообразия с тремя измерениями в вакууме согласно уравнениям йнштейна $R_{\mu\nu} = 0$ могут быть только плоскими.

Четыре - минимальная размерность, при которой конформно-инвариантный тензор Вейля $C^{\mu}_{.\upsilon\alpha\beta}$ нетривиален. В многообразиях трех измерений вследствие (6.11) тензор Вейля тождественно равен нулю, его роль выполняет конформно-инвариантный тензор [41, с. 254]

$$C_{ijk} = \nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik} + (1/4)\left(g_{ik}\nabla_j R - g_{ij}\nabla_k R\right).$$

4-Мерные многообразия являются единственными, в которых вторая пара уравнений Максвелла в вакууме конформноинварианта [206]. Действительно, учитывая содержание 1.9, вторую пару уравнений Максвелла можно записать в виде

$$\overset{*}{*}{}^{\mu\upsilon}_{;\upsilon} = \exp(-4\sigma)\left[F^{\mu\upsilon}_{;\upsilon} - 4\sigma,_{\upsilon}F^{\mu\upsilon} + (n+1)\sigma,_{\alpha}F^{\mu\alpha}\right] = 0$$

Справа члены с σ,υ сокращаются только при $n+1=4$.

Учитывая, что в 5-мерной теории $F_{\mu\upsilon}$ возникает как монадный физико-геометрический, тензор при 1 + 4-расщеплении многообразия, данную особенность следует отнести к выделенности 5-мерия. Дополнительный член в 5-мерных уравнениях (11.57) не нарушает данного утверждения.

К особенности 4-мерного пространства-времени можно отнести наличие простой алгебраической классификации Петрова пространств Эйнштейна. Большие размерности

уже не допускают в общем случае расщепление характеристической матрицы на аналогичные блоки.

К формальным особенностям 4-мерия допустимо отнести возможность сопоставления антисимметричным тензорам четного ранга сопряженных им тензоров того же ранга [207]:

$$\overset{*}{F}{}^{\mu v} = (1/2)E^{\mu v\alpha\beta}F_{\alpha\beta}; \quad \overset{*}{R}_{\alpha\beta\mu v} = (1/2)E_{\alpha\beta\rho\sigma}R^{\rho\sigma}...$$

Ни одна из указанных особенностей не отвергает 5-мерие:

28.12.3 3. Physical Features of 4D in Static Spacetime Manifolds

По-видимому, впервые Кантом [208] было отмечено, что зажоны обратных квадратов для гравитационной и электростатической сил связаны с 3-мерностью нашего пространства. Это легко выводится из 3-мерных уравнений Лапласа для потенциалов соответствующих полей. В гипотетической теории, описывающей явления в плоском пространстве иной размерности, естественно также ожидать наличия сил, потенциалы которых V удовлетворяют многомерному (по числу имерений) уравнению Лапласа. Его решение и центральную силу находят в виде

$$V = \alpha/r^{n-2}; \quad \sigma = -\partial V/\partial r \sim 1/r^{n-1}$$

где α - постоянная; $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + .. + x_n^2}$.

Заметим, что аналогичное свойство изменения гипотетических гравитационных взаимодействий $\sim r^{-(n-1)}$ имеет место в «ОТО» в многообразии $n+1$ измерений. Так, понимая в $n+1$-мерном многообразии под сферически-симметричными метрики (в коор.динатах кривизн)

$$ds^2 = \exp v dx_0^2 - \exp\lambda dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

тде $r = x^1$

$$d\Omega^2 = dx_2^2 + \sin^2 x_2 dx_3^2 + \sin^2 x_2 \sin^2 x_3 dx_4^2 + ... + \prod_{l=2}^{n-1} \sin^2 x_l dx_n^2$$

можно показать [209], что статическое решение вакуумных «уравнений Эйнштейна»имеет вид:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r^{n-2}}\right) dx_0^2 - \frac{dr^2}{(1 - r_g/r^{n-2})} - r^2 d\Omega^2$$

В частности, анализ 5-мерных уравнений геодезических в такой метрике показывает наличие «силы притяжения», изменяющейся обратно пропорционально кубу расстояния от источника и более высоким степеням r. Это свидетельствует о необходимости выделения пятой координаты с помощью условия цилиндрично- сти или условий, указанных в §11.4, которые сохраняют закон убывания сил $\sim 1/r^2$.

С законом убывания потенциалов (12.5) связан ряд особенностей 4-мерного пространства-времени.

Только в пространстве-времени четырех и менее измерений возможны устойчивые атомы. Этот вывод можно сделать, анализируя уравнение Шредингера в плоском пространстве-времени $n+1$ измерений [210] *. Строгий анализ основан на теоремах 0 спектральных свойствах дифференциальных операторов и приводит к следующим результатам:

а) при $n \geqslant 5$ отрицательная часть спектра энергии простирается до - - что означает падение электрона на ядро;

б) при $n = 4$ возможны различные случаи в зависимости от константы $\gamma = (\mu/\hbar^2)\, Ze^2 - 3/4 + l(l+1)$, где Ze - заряд ядра; l - орбитальное квантовое число. Если $\gamma > 1/4$, то отрицательная часть спектра простирается до $-\infty$; при $\gamma \leqslant -3/4$ отрицательные уровни энергии отсутствуют; при $-3/4 < \gamma \leqslant 1/4$ задача не имеет решения, т. е. или не существуют отрицательные уровни энергии, или имеется один такой уровень, который может принимать все возможные значения от 0 до $-\infty$.

2а. Круговые орбиты пробных тел в «ньютоновом» гравитационном поле в плоском пространстве-времени $n+1$ измерений устойчивы при $n \leqslant 3$ и неустойчивы при $n \geqslant 4$ [212]. Это следует из анализа эффективной потенциальной энергии $V(u)$ в законе сохранения энергии, записанном с помощью первой формулы Бине:

$$\frac{m}{2}\sigma_0^2\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2\right]-kMmu^{n-2}\equiv$$
$$\equiv\frac{m\sigma_0^2}{2}\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+V(u)=E_0.$$

2б. Вывод об устойчивости круговых орбит пробных тел только при $n \leqslant 3$ можно получить также, рассматривая уравнения геодезических в метриках (12.7) [213], где аналогичная (12.8) формула имеет вид [ср. с (4.31), (11.67)]:

$$\frac{m}{2}\sigma_0^2\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2+u^2\right]=\frac{mc^2}{2}\left(V_0^2-1\right)+$$
$$+kMmu^{n-2}+\frac{kM}{c^2}mu^n\sigma_0^2.$$

Указанные особенности не противоречат 5-мерной теории лишь при дополнительных условиях, выделяющих пятую координату.

Впервые такую задачу на основе теории квантования Бора решал Эренфест [211], который пришел к выводу о невозможности сушествования атомной. материи в многомерном пространстве с $n > 4$.

28.12.4 4. Properties of Solutions of Wave Equations in Spacetime Manifolds of $n+1$ Dimensions

Условие справедливости принцип а Г юйген«с а выделяет пространств а не че т ной р азм е рн о с т и ($n = 3, 5, 7...$) [214]. Принцип Гюйгенса, первоначально сформулированный для построения фронта световой волны, в настоящее время имеет несколько формулировок. Одна из наиболее широко распространенных и довольно общих приведена в книге [215, с. 686]: «Принцип Гюйгенса есть утверждение о том, что значение решения задачи Коши для волнового уравнения зависит только от границы области зависимости на плоскости $x^0 = 0$, т. е. что оно зависит только от начальных значений решения φ и его производных на границе основания $r = x^0$ характерисстического конуса, но не от начальных значений внутри этого основания».

Для волнового уравнения в плоском пространстве-времени

$$\partial^2\varphi/\partial x_0^2-\nabla^2(n)\varphi=0$$

в [215] показано:

а) в случае нечетного n решение можно представить в виде

$$\varphi\left(x^0,\mathbf{x}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(n/2)}\left(\frac{\partial}{\partial x_0^2}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left[x_0^{n-2}Q\left(x^0,\mathbf{x}\right)\right]$$

(?)де $\frac{\partial}{\partial x_0^2}\equiv\frac{1}{2x^0}\frac{\partial}{\partial x^0}$; $Q(r,\mathbf{x})=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{i^2=1}\int\limits_{1}\Psi(\mathbf{x}-1r)d^nl$ - некоторая функция; 1 - единичный n-вектор. Отсюда следует, что $\varphi\left(x^0,\mathbf{x}\right)$ зависит от интеграла по поверхности $n-1$ измерений, т. е. в пространствах нечетного числа измерений выполняется сформуированный принцип Гюйгенса;

б) в случае четного n функция $\varphi\left(x^0,\mathbf{x}\right)$ записывается в виде

$$\varphi\left(x^0,\mathbf{x}\right)=\frac{x^0}{\Gamma(n/2)}\left(\frac{\partial}{\partial x_0^2}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(x_0^{n-3}H\right)$$

где функция $H = \int\limits_0^{x^0} \frac{rQ(r,\mathrm{x})}{\sqrt{x_0^2-r^2}} dr$ содержит интегрирование по n-мерной области, т. е. принцип Гюйгенса не имеет места.

Трехмерные пространств а выделяются из множеств а нечетномерных пространств дополни тельным требов анием сферической симметрии решения волнового уравнения, т. е. условием [203]

$$\varphi\left(x^0, \mathbf{x}\right) = A(r) f\left(r \pm x^0\right)$$

где $f\left(r \pm x^0\right)$ - произвольная функция. Действительно, подстав. ляя (12.13) в уравнение (12.10), находим:

$$Af'' = A''f + 2A'f' + Af'' + \frac{n-1}{r}\left(A'f + Af'\right)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по r. Вследствие произвольности функции f можно приравнять слева и справа коэф: фициенты при f, f', f''. В результате получим уравнения для функции $A(r)$:

$$[(n-1)/r]A' + A'' = 0$$
$$[(n-1)/r]A + 2A' = 0$$

Из (12.16) находим $A = A_0 r^{-\frac{n-1}{2}}$, где A_0 - постоянная интегрирования. Подставляя это решение в (12.15), получаем условие на размерность: $n+1 = 2(n-1)$, т. е. $n = 3$. Сферическую симметрию решения (12.13) можно понимать как условие неискажаемости переносимых волной сигналов.

Квантовая электродинамик пе пеенормируема в пространствах с размерностью $n \leqslant 3$: Сходимость или расходимость матричного элемента произвольного процесса квантовой электродинамики зависит, грубо говоря, от числа N импульсов, входящих в подынтегральное выражение. В общем случае диаграмма Фейнмана соответствующего процесса имеет F_l внешних фермионных линий, F_i внутренних фермионных линий, B_l внешних фотонных линий, B_i внутренних фотонных линий, C вершин. Вид лагранжиана взаимодействия электромагнитного и спинорного полей $\bar{\Psi}_{\gamma_\mu}\Psi A^\mu$ налагает два условия на числа F, B и C:

$$2F_i + F_l = 2C; \quad 2B_i + B_l = C$$

Используя правила Фейнмана и (12.17), легко подсчитать число импульсов в подынтегральном выражении произвольного матричного элемента в пространстве n измерений:

$$N = \frac{n-3}{2}C - \frac{n}{2}F_l - \frac{n-1}{2}B_l + n + 1$$

Если $N < 0$, то следует ожидать сходимости матричного элемента, если $N \geqslant 0$, то матричный элемент процесса расходится.

Для $n > 3$ величина N зависит от числа вершин C, причем число вершин дает положительный вклад в N. Это значит, что. для любого процесса можно подобрать матричный элемент с таким числом C, что получится расходящееся значение. Для устранения всех расходимостей требуется сколь угодно большое число бесконечных констант, т. е. теория с $n > 3$ неперенормируема. Для $n = 3$ сходимость или расходимость матричного элемента не зависит от числа вершин C, а определяется только числом внешних линий. В этом случае имеется лишь конечное число: (10) типов диаграмм с расходящимися матричными элементами... Из них физически значимы только четыре. Выбором конечного числа бесконечных констант, как известно, теорию можно перенормировать (избавиться от расходимостей).

Для $n < 3$ величина N зависит от числа вершин C, причем: число вершин дает отрицательный вклад в N. Это значит, что; для любого процесса выбором матричного элемента с соответ-ствующим числом C всегда можно получить сходящееся значе-ние.

Указанные факторы также не противоречат 5-мерной теории. с дополнительными условиями на пятую координату. В пункте 3 : следует иметь в виду, что векторный потенциал A_μ можно, понимать как проявление компоненты 5-метрики $G_{5\mu}$.

28.12.5 5. Rigidity of Field Equations. Number of Dynamical Variables

Понятие жесткости системы дифференциальных уравнений было введено Эйнштейном [18, с. 77.8] в связи с проблемой по-. строения единой теории поля. Поясним это понятие.

Пусть задана система дифференциальных уравнений для N полевых функций φ_A. Число независимых аргументов функций φ_A равно размерности многообразия $n+1$. Рассмотрим класс решений этой системы, допускающих разложения в ряд Тейлора' в некоторой точке $\{x_0^\alpha\}$. Подставляя эти разложения в уравнения поля, получаем тождества, которые можно понимать как некоторую совокупность соотношений, связывающих коэффициенты разложения Тейлора для φ_A. Часть коэффициентов разложения можно считать произвольными, тогда как остальные находятся из полученніы соотношений. Пусть $Z(m)$ - число произвольных коэффициентов в m-м порядке разложения всех полевых функций (имеются в виду коэффициенты разложения, стоящие перед произведениями из m сомножителей типа $x^\alpha - x_0^\alpha$) ' Тогда при достаточно больших m число $Z(m)$ можно представить в виде

$$Z(m) = [(n+m)!/n!m!]\left(Z^{(0)} + Z^{(1)}/m + Z^{(2)}/m^2 + ...\right),$$

где в скобках записан ряд по степеням $1/m$, а коэффициенты. $Z^{(0)}, Z^{(1)}, Z^{(2)}...$ не зависят от m. Для полевых функций реальных физических полей (при $n=3$) $Z^{(0)}=0$, а. $Z^{(1)}$ называют коэффициентом жесткости соответствующей системы дифференциальных уравнений.

Укажем коэффициенты $Z^{(0)}, Z^{(1)}$ уравнений основных физических полей. Скалярно е безм ассовое поле:

$$Z_\varphi^{(0)} \equiv 0; \quad Z_\varphi^{(1)} = 2n$$

. лект ро ом агни т но е поле

$$Z_F^{(0)} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

$$Z_F^{(1)} = \frac{n(n-1)}{12}[12 - n(n+1)(n-4)].$$

Метрика многооб разия $n+1$ и м е рени й, под«иняющаяся соответствующим «уравнениям Эйнштейна»:

$$Z_g^{(0)} \equiv 0; \quad Z_g^{(1)} = n(n+1)(n-2)$$

Эйнштейн полагал, что для объединения теорий электромагнетизма и гравитационного поля необходимо равенство коэффициентов жесткости уравнений этих полей, т. е. должно выполняться соотношение

$$[n(n-1)/12][12 - n(n+1)(n-4)] = n(n+1)(n-2), \quad (12.23)$$

ччто возможно лишь при $n=0$ и $n=3$. При $n=3$

$$Z_F^{(0)} = Z_g^{(0)} = 0; \quad Z_F^{(1)} = Z_g^{(1)} = 12.$$

Любопытно отметить, что коэффициент жесткости ур ав ней В ейля для ней тринного поля в 4-мерном пространстве-времени принимает то же значение [216] : $Z_N^{(1)} = 12$.

Оказывается [217], значения коэффициентов жесткости $Z^{(1)}$ тесно связаны со свойствами решения задачи Коши для соответствующего поля. Действительно, характеризуя число произвольных коэффициентов в разложении общего решения, $Z^{(1)}$ указывает, насколько сильно система дифференциальных уравнений югранічивает класс допустимых решений. Начальные данные Коши, задаваемые на некоторой гиперповерхности, также характеризуют произвол общего решения. Пусть K_n - число начальных данных Коши, зависящих от n аргументов (в общем случае, в частности, для гравитационного поля начальные данные Коши включают в себя также функции меньшего числа аргументов [4.1]), тогда имеет место соотношение [217] : $Z^{(1)} = nK_n$.

Неоднократно отмечалась связь между числом начальных данных Коши и числом S динамических степеней свободы соответствующей физической системы; $S = K_n/2$. Тем самым коэффитиент жесткости определяет и число динамических переменных:

$$S = K_n/2 = Z^{(1)}/2n$$

'Вспоминая, что в пространстве-времени четырех измерений гравитационное, электромагнитное и нейтринное поля имеют одинаковые коэффициенты жесткости $Z^{(1)} = 12$, опять приходим к вы′242 воду, что все эти поля обладают двумя динамическимиі степенями свободы ($S = 2$).

В 5-мерном римановом многообразии согласно (12.22) $Z^{(1)} = 40$, следовательно, из (12.25) находим, что $S = 5$. Это соответствует двум гравитационным, двум электромагнитным степеням свободы и одной степени свободы скалярного поля φ.

28.12.6 6. Algebraic Features and Discrete Transformations in Manifolds with Signature $(+---\ldots)$

До сих пор вопрос о размерности математической модели физического пространства-времени можно было понимать так: берем поле действительных чисел R^1 и на его основе строим простую «надконструкцию» - $n+1$-мерное векторное пространство R^{n+1}. Далее ставится вопрос: чем обусловлен выбор $n = 3$? Но можно подходить к данной проблеме иначе. Можно считать, что. сути пространственно-временных отношений в большей степени отвечает иная надконструкция над полем действительных чисел - некоторая алгебра также с двумя бинарными операциями, как и поле действительных чисел*. Если наложить на алгебру условия существования и однозначности операции, обратной произведению, и конечномерности, то выделенными оказываются четыре алгебры с размерностями $n + 1 = 1, 2, 4, 8$. Первые три: размерности имеют по одному «представителю», что составляет содержание теоремы Фробениуса. Это коммутативные алгебры действительных ($n + 1 = 1$), комплексных ($n + 1 = 2$) чисел и некоммутативная алгебра кватернионов ($n + 1 = 4$). Добавление. к ним одного из представителей размерности восемь - единственной альтернативной ассоциативной алгебры (октав) - составляет содержание обобщенной теоремы Фробениуса. Перечисленные алгебры являются гиперкомплексными системами, органически содержащими в себе сигнатуру $(+--\ldots)$.

С помощью алгебры кватернионов удается построить хорошую модель 4-мерных пространственно-временных отношений (см., например [219]). Чисто мнимые кватернионы дают модель 3-мерного классического пространства R^3; алгебраическое произведение двух мнимых кватернионов дает в качестве действительной части скалярное, а в качестве мнимой - векторное произведение соответствующих векторов в R^3.

Различие в свойствах пространственно-временных многообразий различной размерности проявляется также при исследовании в них дискретных преобразований: пространственного отра-

Эддингтон [218] на основе алгебраических соображений разрабатывал «фундаментальную теорию», претендовавшую на объяснение 3-мерности физического пространства. Однако эта теория, опиравшаяся на алгебраические E-структуры Эддингтона, осталась недоработанной и не завоевала всеобщего признания. жения (P-преобразование), отражения времени (T-преобразование) и зарядового сопряжения (С-преобразование). Рассматривая эти преобразования на примере уравнений Дирака для сво.бодного спинорного поля, можно прийти к выводу, что операцию отражения времени, оставляющую инвариантными уравнения.Дирака, можно определить лишь в многообразиях с размерностями, отличающимися от $n + 1 = 4k - 1$. Аналогично операцию.зарядового сопряжения, относительно которой инвариантны уравнения Дирака, можно определить лишь для пространственно-временных многообразий размерностей, отличных от $n + 1 = 4k + 1$.

Таким образом, в пространственно-временных многообразиях нечетной размерности по указанным двум причинам теряет 'смысл полная совокупность преобразований P, T, C. Следова'тельно, о справедливости CPT-теоремы можно говорить лишь в многообразиях четной размерности [220-222].

Однако эти соображения относятся к принятым в современной теории поля определениям дискретных операций. Как было показано в §11.4, в 5-мерной теории пятая компонента импульса связана с электрическим зарядом. Это позволяет определить операцию зарядового сопряжения более естественно, как отражение пятой координаты. Тогда 5-мерное уравнение Дирака инвариантно относительно всех трех дискретных преобразований в отдельности, и справедливость CPT-теоремы остается в силе.[223]

Заметим, что для записи уравнений Дирака в 5-мерном мнотообразии достаточно набора известных матриц Дирака γ_μ. В качестве пятой компоненты будет выступать матрица $\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$. Можно сказать, что в 4-мерном пространстве-времени одна из матриц полного набора антикоммутирующих матриц остается гнеиспользованной. Подводя итог изложенному, можно с полной определенностью утверждать, что к настоящему времени вопрос о системах отсчета, о сути методов их задания и их роли в современной теории гравитации в принципе решен. Несмотря на то, что тетрадный метод (формализм) уже использовался в 20-30-х годах, необходим был важный период развития монадного формализма в 60-70-х годах. Дело в том, что в тетрадном формализме из-за существенной 4-мерной симметрии затушевывался, оставался в тени важный комплекс понятий, определяющих характер движения системы отсчета. Кроме того, в монадном формализме важную роль играют монадные операторы дифференцирования, позволяющие особенно компактно записывать и интерпретировать дифференциальные законы. В тетрадном формализме такие операторы практически не использовались.

Осталась позади дискуссия первой половины 70-х годов: какой формализм важнее и первичнее: тетрадный, являющийся 4-кратным повторением монадного, или монадный, представляющий собой усеченный тетрадный. Время показало надуманность (искусственность) такой постановки вопроса. Необходимы и важны оба формализма. Вопрос о важности и целесообразности применения того или иного формализма всегда следует рассматривать с позиций конкретно поставленной задачи или проблемы. Ответ диктуется тем, что в задаче доминирует: выделенность одного направления движения системы отсчета или 4-мерная пространственно-временная симметрия. В процессе сопоставления этих двух формализмов были выявлены и детально развиты еще два промежуточных: диадный и диарный. Целесообразность их применения также должна определяться симметрией поставленной задачи.

Как уже отмечалось в гл. 2, кроме континуальных (монадных, тетрадных и др.) систем отсчета имеются методы, основанные на задании систем отсчета с помощью отдельной временноподобной мировой линии или трубки таких линий: хроногеометрия и система отсчета одиночного наблюдателя. В последнее время был проведен цикл исследований [110, 116], позволивших достаточно хорошо выявить соответствие между этими методами, с одной стороны, и монадным и тетрадным, с другой стороны.

Осталось широкое поле деятельности для применения методов задания систем отсчета при решении конкретных задач (см. ч. II). онечно, описанными в ч. II и гл. 9 эффектами далеко не исчерпываются следствия ОТО. Так, в книге [79] сделан обзор изучавшихся в литературе эффектов (как реальных, так и представляющих пока лишь академический ннтерес). Их уже насчи- тывается более сотни. Наверняка будут выявлены и многие другие. Рассмотрение таких эффектов нуждается в грамотном использовании понятий систем отсчета. Особенно это важно при разработке гравитационных экспериментов. Здесь существуют немалые трудности описания конкретно используемой системы отсчета, однако они имеют лишь технический характер.

Не менее широка область применения методов описания систем отсчета при исследовании классических проблем ОТО. Еще раз обратим внимание на вопрос о физической значимости монадных комплексов энергии, их областей применимости, на важную роль выбора системы отсчета при решении задач об излучении гравитационных (гравиинерциальных) волн и их воздействии на прибор.

Следует особо подчеркнуть, что применение методов задания системы отсчета для разработки проблемы совмещения принципов квантовой теории и ОТО имеет ограниченные рамки. Как было показано в гл. 10, эти методы приложимы для выделения динамических степеней свободы, подлежащих дальнейшему квантованию. В применении к моделям квантования Вселенной монадный метод с нормальной конгруэнцией эффективен именно как метод принципиального расщепления 4-мерного многообразия на совокупность пространственных сечений и ортогональное им время. При рассмотрении закономерностей ОТО в микромире, конечно, понятия классических

систем отсчета теряют силу. .Здесь возникают интересные вопросы о соответствии понятий микромира и классических систем отсчета. Если окажется возможным сформулировать теорию на основе микропонятий, из которых посредством неких предельных переходов формулируются классические понятия, то не исключено, что в ее рамках будет использовано понятие «квантовые системы отношений», в какомто смысле аналогичное понятию классических систем отсчета.

Наконец, перед исследователями лежит целина непознанного о природе размерности нашего физического многообразия. В книге речь шла о выделении из 4-мерных (5-мерных) многообразий сечений меньшей размерности. Но что определяет 4-мерие классического пространства-времени? Почему так привлекательна 5-мерная теория поля? Обсужденные в гл. 12 особенности нашего физического мира могут служить лишь предпосылками к выбору отправной точки для глубокого исследования в этой сулящей необъятные перспективы области науки. П р и л о ж е н и е. Единая 5-мерная теория гравитации, электромагнетизма и электрически заряженной материи

В 11.4 показана принципиальная возможность описания электрически заряженной материи посредством компоненты 5 -метрики $G_{55} = -\varphi^2$ при условии.зависимости φ от пятой координаты. Сделаем следующий шаг в развитии этой теории - конкретно покажем, как от φ перейти к стандартным волновым функциям заряженного скалярного поля Ψ.

В излагаемом варианте 5-мерной теории используется условие своеобразной цикличности (замкнутости) 5-мерного многообразия по пятой координате с очень малым периодом. Компонента метрики G_{55} дояжна быть связана с Ψ следующим образом:

$$V\overline{-G_{55}} = \varphi = \left[1 + \phi + b\Psi \exp\left(-\mathrm{i}\alpha x^5\right) - b\overset{*}{\Psi} \exp\left(\mathrm{i}\alpha x^5\right)\right]^{2/3}$$

тде α и b - некоторые постоянные, которые будут определены позже; $\overset{*}{\Psi}$ - функция, комплексно-сопряженная Ψ, причем, конечно, Ψ зависит лишь от четырех пространственно-временных координат; ϕ - некая действительная скалярная функция, соответствующая возможности ввода фундаментального скалярного поля. Таким образом, поле обычной заряженной материи вводится через чисто мнимую добавку к единице в φ, а фундаментальное скалярное поле через действительную добавку.

Дальнейшая задача состоит вв получении уравнений поля типа общепринятых на основе формулы (П.1). Это можно сделать двумя способами: либо подставляя (П.1) в 15 5-мерных уравнений (11.56)-(11.58) (с последующим усреднением по периоду пятой координаты), либо выводя уравнения вариационным методом из плотности функции Лагранжа. Пойдем по второму пути, так как он позволяет получить вместо одного пятнадцатого три новых уравнения: для волновых функций Ψ, Ψ^* и фундаментального скалярного поля ф. В качестве плотности функции Лагранжа выберем плотность 5-мерной скалярной кривизны $\sqrt{G^5}R$. Произведя процедуры конформного преобразования (11.39) и $1+4$-расщепления, из (11.20) найдем:

$$\begin{aligned}\sqrt{G^5}R = &-\varphi^3\sqrt{-g}\left[{}^4R + \left(k/c^4\right)F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - 8g^{\alpha\beta}\nabla^+_\alpha\nabla^+_\beta\varphi/\varphi -\right.\\ &\left.-4g^{\alpha\beta}\nabla^+_\alpha\varphi\nabla^+_\beta\varphi/\varphi^2 + 8\varphi,_5/\varphi + 4\varphi^2_{,5}/\varphi^2\right],\end{aligned}$$

тде использованы те же обозначения, что и в \$11.4. Переобозначим $\varphi^{3/2} = x$. тогда действие S геометрической системы будет иметь вид

$$S = \iint \sqrt{G^5}Rdx^5d^4x \equiv \int \sqrt{g}\mathscr{L}d^4x$$

тде

$\mathscr{L} = -\int\left[\chi^2\left({}^4R + (k/c^4)\,F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) - (16/3)g^{\alpha\beta}\chi\nabla^+_\alpha\nabla^+\chi + (16/3)\chi\chi,5,5\right]dx^5$.

Существенным моментом излагаемой теории является допущение, что пятая координата не наблюдается вследствие того, что константа α очень велика, т. е. период зависимости величин от x^5 чрезвычайно мал по сравнению с теми расстояниями, для которых имеют место стандартные уравнения поля. Тогда естественно предположить, что обычно мы имеем дело с уравнениями, усредненными по x^5. Исходя из этого проинтегрируем (П.4) по периоду пятой координаты $T = 2\pi/\alpha$. Учитывая, что

$\int_0^T \exp\left(\mathrm{i}n\alpha x^5\right) dx^5 = 0$ при $n = -2, -1, 1, 2$, находим, что лены, однородные по $\overset{*}{\Psi}$ и Ψ, исчезают. В итоге имеем:

$$\sqrt{-g}\mathscr{L} = -(2\pi/\alpha)\sqrt{-g}\left\{\left[(1+\phi)^2 - 2b^2\Psi^*\Psi\right]\left[{}^4R + \left(k/c^4\right)F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right] - \right.$$
$$\left. -(32/3)b^2\left(g^{\alpha\beta}\partial_\alpha^+ \overset{*}{\Psi}\,\partial_\beta^+\Psi - \alpha^2\Psi\Psi\right) + (16/3)g^{\alpha\beta\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}!\right.$$

где

$$\partial_\beta^+ \overset{*}{\Psi} = \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} + \mathrm{i}\frac{2\sqrt{k}\alpha}{c^2}A_\beta\right)\overset{*}{\Psi}; \quad \partial_\beta^+\Psi = \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} - \mathrm{i}\frac{2\sqrt{\bar{k}}\alpha}{c^2}A_\beta\right)\Psi$$

Выражение (П.5) во многих отношениях соответствует стандартной плотности лагранжиана взаимодействующих гравитационного, электромагнитного и электрически заряженного скалярного полей.

Вторая пара уравнений Максвелла получается варьированием (П.5) по A_μ. Сравнивая его со стандартными уравнениями Максвелла, находим значения констант:

$$b^2 = 3x\hbar^2/32m; \quad \alpha = ec/2\sqrt{k}\hbar,$$

где $\hbar$-постоянная Планка; k (?) ньютонова и x - эйнштейновская гравитационные постоянные; e-заряд электрона; m-масса заряженного скалярного поля. Окончательно вторая пара уравнений Максвелла в 5-мерной теории записывается в виде

$$\nabla_v\left\{\left[(1+\phi)^2 - \left(3\varkappa\hbar^2/16m\right)\overset{*}{\Psi}\,\Psi\right]F^{\mu v}\right\} =$$
$$= (4\pi i/c)(e\hbar/2m)g^{\mu v}\left(\overset{*}{\Psi}\,\partial_v^+\Psi - \Psi\partial_v^+\,\overset{*}{\Psi}\right).$$

Легко видеть, что в классическом пределе (когда полагаем $\Psi = \sqrt{\rho}\exp\left(\mathrm{i}S/\right)$, где S - классическое действие; ρ-плотность вероятности нахождения частицы, и устремлкем $\hbar$ к нулю) эти уравнения совпадают с общепринятыми уравнениями (1.42). Таким образом, из этой 5-мерной теории получаются уравнения Максвелла с электрическим током геометрического происхождения, чего не было в теории алуцы и во всех предыдущих вариантах 5-мерных теорий.

уравнения Эйнштейна получаются варьированием (П.5) по $g^{\mu\nu}$. После стандартных вычислений, учитывая (П.7), находим их в виде

$${}^4R_{\mu\nu} - (1/2)g_{\mu\nu}{}^4R = -\left(2k/c^4\right)\left[F_{\mu\alpha}F_v{}^\alpha - (1/4)g_{\mu v}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right] +$$
$$+\left[(1+\phi)^2 - \left(3x\hbar^2/16m\right)\overset{*}{\Psi}\,\Psi\right]^{-1}\left\{\right)x\hbar^2/2m)\left[\partial_\mu^+\,\overset{*}{\Psi}\,\partial_v^+\Psi + \partial_v^+\,\overset{*}{\Psi}\,\partial_\mu^+\Psi -\right.$$
$$\left. -g_{\mu\nu}\left(g^{\alpha\beta}\partial_\alpha^+\,\overset{*}{\Psi}\,\partial_\beta^+\Psi - (cm/\hbar)^2\,\overset{*}{\Psi}\,\Psi\right)\right] - \left(3x\hbar^2/16m\right)\left[\nabla_\mu\nabla_v(\overset{*}{\Psi}\,\Psi) -\right.$$
$$\left. -g_{\mu v}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\left(\Psi^\Psi\Psi\right)\right] - (16/3)\left[\phi_{,\mu}\phi_{,v} - (1/2)g_{\mu v}g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}\right] +$$
$$+\nabla_\mu\nabla_v(1+\phi)^2 - g_{\mu v}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta(1+\phi)^2\right\}$$

В классическом пределе эти уравнения переходят в стандартные уравнения Эйнштейна с обычными тензорами энергии-импульса электромагнитного поля и пылевидной материи, а также с тензором энергии-импульса фундаментального поля справа (последнее можно и не вводить). Напомним, что Эйнштейн неоднократно высказывал неудовлетворенность феноменологическим характером правой части своих уравнений. Он стремился получить ее из геометрических соображений. Таким образом, полученный здесь результат можно рассматривать как реализацию этих намерений.

Уравнение дяя заряженного скалярного поля Ψ получается варьированием (П.5) по Ψ (и сопряженное - варьированием по Ψ):

$$g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha^+\nabla_\beta^+\Psi - (3/16)\left[{}^4R + \left(k/c^4\right)F_{\alpha\alpha}F^{\alpha\beta}\right]\Psi + (mc/\hbar)^2\Psi = 0.$$

Это уравнение типа Клейна-Фока для комплексного скалярного поля (с отличной от нуля массой покоя), взаимодействующего с электромагнитным полем. Его особенностями являются наличие коэффициента 3/16 перед ${}^4R$ и инварианта $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$

Наконец, уравнение для фундаментального безмассового скалярного поля ф можно получить, варьируя (П.5) по Ф:

$$g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta(1+\phi) - (3/16)\left[{}^4R + \left(k/c^4\right)F_{\alpha\beta}F\alpha\beta\right](1+\phi\vdots = 0$$

Существенным следствием уравнений (П.8) - (П.10) является жесткая связь между электрическим зарядом e, гравитационной постоянной k и массой покоя заряженной скалярной частицы

$$m = e/2\sqrt{k}$$

При e, равном заряду электрона, имеем $m \sim 10^{-6}\Gamma$ - это очень большая масса по сравнению с массами реальных элементарных частиц. Но получения реальных масс (или их спектра) трудно было ожидать от подобной теории. Для этого нужно учитывать весь комплекс взаимодействий и симметрий микромира. Напомним, что в стандартной теории массы обычно вводятся феноменологически или при гипотезе об их полевом происхождении для них получаются бесконечно большие значения. В квантовом варианте обычной теории необходима перенормировка - вычитание из одного бесконечного значения другого. В 5-мерной теории вопрос стоит о вычитании одной большой, но конечной, массы из другой, также конечной. Таким образом, чтобы получить наблюдаемые массы, необходимо ввести в теорию некие дополнительные факторы, которые бы соответствовали перенормировке затравочной массы (П.12).

В частности, можно допустить, что физическая реальность диктует использовать для ее описания некие дополнительные факторы, которые эффективно можно учесть путем увеличения размерности, как минимум, еще на одно измерение. При этом, конечно, следует наложить специальные условия на вид самой 6-метрики ${}^6G_{MN}$ и на характер ее зависимости от координат. Например, это можно сделать, выбрав ${}^6G_{MN}$ в форме следующих матриц:

$${}^6G_{MN} = \begin{pmatrix} {}^5G_{AB} & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad {}^6G_{MN} = \begin{pmatrix} {}^5G_{AB} & 0 \\ 0 & \varphi^2 \end{pmatrix}$$

где ${}^5G_{A\,\mathrm{B}}$ - ранее использованная 5-метрика; от координат x^5 и x^6 зависит только φ, причем при $\beta = \mathrm{const}$

$$\varphi = \left[1 + \phi + b\Psi\exp\left(-\mathrm{i}\alpha x^5 - \mathrm{i}\beta x^6\right) - b\overset{\Psi}{\Psi}{}^5\exp\left(\mathrm{i}\alpha x^5 + \mathrm{i}\beta x^6\right)\right]^{2/3}$$

Н

$$\varphi = \left[1 + \phi + \tilde{b}\Psi\exp\left(-\mathrm{i}\alpha x^5 - \mathrm{i}\beta x^6\right) - \tilde{b}\Psi^*\exp\left(\mathrm{i}\alpha x^5 + \mathrm{i}\beta x^6\right)\right]^{1/2}$$

соответственно. Заметим, что шестая координата временно-подобна. Непосредственные вычисления, аналогичные изложенным, приводят к значению массы

$$m = (\hbar/c)\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{(e^2/4k) - (\hbar\beta/c)^2}$$

При этом вид уравнений (П.8) - (П.11) остается без изменения, нужно лишь везде подставить перенормированное значение массы (П.14) и во втором варианте (П.13) выбора 6-метрики ${}^6G_{MN}$ везде заменить 3/16 коэффициентами 1/5, так как в этом варианте $\widetilde{b^2} = 4\pi k\hbar^2/5mc^4$. Таким образом, подбирая значение β, можно получить массу покоя любой реальной частицы.

В настоящий момент все более популярной становится программа «большого объединения» всех известных полей и взаимодействий. В ряде работ этого направления обращается внимание на теорию Калуцы; по ее «образу и подобию» разрабатываются варианты многомерных теорий вплоть до 11 измерений [224]. В связи с этим данную 5-мерную теорию, объединяющую гравитационное, Электромагнитное и скалярное взаимодействия, следует рассматривать как существенный фрагмент будущей единой теории поля.

29 Philosophical Questions about Gravity

(a special sections about them is here)

29.1 Theories of Gravitation of Ancient Philosophers

(будет полезно - увеличу раздел.)

Суть теорий (??)

Почему мы считаем их неверными (???)

30 Hypothetical Ideas

30.1 Hypothetical Wormholes

30.1.1 Einstein-Rosen Bridge (???)

(interesting, but useless topic)

суть моста

Непроходимая червоточина Лоренца, также известная как червоточина Шварцшильда или мост Эйнштейна — Розена,
представляет собой соединение между областями пространства, которое может быть смоделировано как вакуумное решение уравнений Эйнштейна.
(?????)

30.2 Parallel Worlds

30.2.1 How Can We See that There Could Be Parallel Worlds?

(??????????)

30.2.2 Life Beyond the Black Hole

после смерти в черную дыру?

30.3 Probably Incorrect Theories of Gravitation

30.3.1 Relativistic Theory of Gravitation (??)

(????? that one by Metropolsky (?? check his name.
))

Суть теорий (??)

Почему мы считаем их неверными (???)

30.4 Other Hypothetical Models

30.4.1 Zero-energy Universe (???)

(даже на вики есть про это, напишу скоро.)

История по вики (???)

During World War II, Pascual Jordan first suggested that since the positive energy of a star's mass and the negative energy of its gravitational field together may have zero total energy, conservation of energy would not prevent a star being created by a quantum transition of the vacuum. George Gamow recounted putting this idea to Albert Einstein: "Einstein stopped in his tracks and, since we were crossing a street, several cars had to stop to avoid running us down".[6] Elaboration of the concept was slow, with the first notable calculation being performed by Richard Feynman in 1962.[7] The first known publication on the topic was in 1973, when Edward Tryon proposed in the journal Nature that the universe emerged from a large-scale quantum fluctuation of vacuum energy, resulting in its positive mass-energy being exactly balanced by its negative gravitational potential energy.[4] In the subsequent decades, development of the concept was constantly plagued by the dependence of the calculated masses on the selection of the coordinate systems. In particular, a problem arises due to energy associated with coordinate systems co-rotating with the entire universe.[7] A first constraint was derived in 1987 when Alan Guth published a proof of gravitational energy being negative to matter associated mass-energy.[8] The question of the mechanism permitting generation of both positive and negative energy from null initial solution was not understood, and an ad hoc solution with cyclic time was proposed by Stephen Hawking in 1988.[9] [10]

In 1994, development of the theory resumed[11] following the publication of a work by Nathan Rosen,[12] in which Rosen described a special case of closed universe. In 1995, J.V. Johri demonstrated that the total energy of Rosen's universe is zero in any universe compliant with a Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker metric, and proposed a mechanism of inflation-driven generation of matter in a young universe.[13] The zero energy solution for Minkowski space representing an observable universe, was provided in 2009.[7]

30.5 Fun, But Impossible Objects

30.5.1 Gravity of a Flat Planet (???)

(потом подумаю про это, интересно.)
(тоже может про это возникнуть вопрос, потому что а что если земля плоская, т.п.)

Part X
Appendix

A Introduction to Gravity

Обсудим общие соображения о подходе к общей теории относительности.
(????)

A.1 How Real Professional in Gravity Think?

A.1.1 Other Motivation to Study Gravity

Обсудим особенности ОТО, которые мотивируют её изучать.
(везде потом конкретику и примеры добавлю!!)

Множество современных исследований, использующих ОТО

Изучаются гравитационные волны, гравитационное линзирование,
(большой список, с опытом напишу, пока не так понимаю его)
Так что приложений много.

Способности исследовать астрономические объекты

(именно с помощью ОТО мы и исследуем их. пропишу потом, как конкретно.)

Можно глубже понять электродинамику

Электродинамика строится во многом как ОТО.
пока не до конца разобрался, но вроде как сам метод построения один и тот же, там связность, всё это.
потом пропишу.

Любые науки о космосе базируются на ОТО

в настоящее время ОТО есть центр всех представлений о гравитации и основа для рассмотрения различных моделей Вселенной. Без него никак уже.

Осознание уровня развития Эйнштейна

очень крутой гениальный уровень, очень интересные формулы.

Диаграммы Пенроуза крутейшие

про них тут, насколько классно их рисовать и представлять, как проникаешь в черную дыру, меняешь координаты и все это.

тренировка дифференциальной геометрии и механики

они напрямую тут используются, так что структуры по ним станут в разы сильнее

проводятся эксперименты по изучению гравитационных волн прямо в 2021 году

Поэтому знать их актуально.

A.1.2 Prospects of Studying GR

обсудим, будет ли что-то следовать из ОТО, или это просто старая давно всем понятная теория.

(второе мнение тоже есть и я пока не настолько зрелый, чтобы четко ответить, что тут насколько перспективно и почему)

A.1.3 Motivation for Sections of GR

К построению ОТО

Построение ОТО - самые фундаментальные вопросы

Мотивация понимать тетрадный формализм (??)

очень часто встречается в некоторых книгах!

К черным дырам

ё

Черные дыры - наиболее распространенный объект в ОТО

Можно начать прогнозировать, что находится за черной дырой

А что за черной дырой - всегда максимально интересно, ведь, может, там загробный мир?

К гравитационным волнам

(очень важно прописать мотивацию, потом обязательно это сделаю!!!)

Гравитационно-волновая астрономия (??)

По мнению американского астрофизика Лоуренса Краусса, если в будущем удастся измерить сигнатуру инфляционных гравитационных волн, это позволит существенно приблизить исследования к моменту Большого Взрыва, а также проверить инфляционную модель Вселенной и разрешить другие насущные проблемы теоретической физики и космологии[33].

Гравитонный лазер (???)

Идея гравитонного лазера возникла в связи с появлением лазера и открытием гравитационных волн. Предполагается, что, в силу универсального принципа корпускулярно-волнового дуализма, существуют кванты гравитационного излучения гравитоны (со спином 2). Они, как и кванты электромагнитного излучения фотоны (со спином 1), являются бозонами. Следовательно, теоретически можно создать гравитонный лазер — устройство для гравитационного излучения, подобное лазеру для электромагнитного излучения[34]. Предполагается, что в природе явление, подобное гравитонному лазеру, может существовать в окрестности чёрных дыр[35]. В настоящее время, из-за чрезвычайной малости гравитационной постоянной, генерация вынужденного гравитационного излучения не осуществлена. Обсуждаются лишь гипотетические возможные конструкции гравитационного лазера.

Связь на гравитационных волнах (??)

Теоретически существует возможность использовать гравитационные волны для дальней беспроводной связи; этот принцип был запатентован советским учёным В. А. Буниным в 1972 году[36][37].

Преимуществом гравитационно-волновой связи (устар.: гравиосвязи) по сравнению с радиосвязью является способность гравитационных волн проходить, почти не поглощаясь, сквозь любые вещества, тогда как электромагнитные волны сквозь электропроводящие среды (например, землю и морскую воду) практически не проникают[38].

Работы в этом направлении велись в лабораториях СССР и в других странах[38]. Но на практике из-за трудностей генерации и детектирования гравитационных волн, вызванных крайней малостью гравитационных сил, гравитационно-волновую связь осуществить не удалось.

В настоящее время работы по генерации и детектированию гравитационных волн в лабораторных условиях находятся на теоретической стадии[39]. Изучаются возможности излучения гравитационных волн электродинамическими системами[40].

Выдвинута гипотеза о возможности генерации высокочастотных гравитационных волн в конденсированной диэлектрической среде под действием интенсивного лазерного излучения и обратного процесса детектирования гравитационных волн этой средой путём преобразования гравитационного излучения в оптическое (повторение эксперимента Герца для гравитационных волн).[41]

Гравитационно-волновая связь упоминается как атрибут техники далёкого будущего в ряде произведений научно-фантастической литературы (например, С. Снегов «Люди как боги», К. Булычёв «Похищение Тесея», С. Лукьяненко «Именем Земли» и др.).

Коллапс планетных и галактических систем По мнению американского астрофизика Брайана Грина излучение гравитационных волн при движении различных космических объектов, действует подобно трению и в долгосрочной перспективе приводит к коллапсу космических систем, таких как планетарные системы звезд и галактики[42]

Можно проверять ОТО, детектируя волны (???)

Поэтому большая часть раздела про гравитационные волны связана с их детектированием.

К гравитационному линзированию

A.1.4 My Attitude to the Science of Gravity

(по идее тут что-то общее, забыл уже, что конкретно?)

A.1.5 Which Formalism is the Best?

Обсудим взгляды, которые также есть, но которых я не особо придерживаюсь.

О подходе, что ОТО это дифференциальная геометрия

(такой подход есть, мне он не нравится, потом его опишу. Пока слабо понимаю, почему это не лучший подход, мб смотря на Володю, пойму лучше.)

О координатном подходе

(или подходе в книге Ландау. я так и не понял, почему его критикуют пока что. насколько правильно сразу в координатах работать?)

О подходе связностей и тетрад (??)

(вергелес такого подхода придерживается, я максимально не привык к нему. обсудим потом, насколько такой подход хорош, пока хз)

Об идее записывания уравнений с кручением

(тут рассуждения Вергелеса про то, что вообще-то недоказано, что её нет. мб другие аргументы про это приведу)

A.1.6 How Not to Make Mistakes while Solving Problems on Gravity?

(еще долго тренировать это буду)

Общей внимательности в контексте гравитации

В задачах с геометрией вначале выписывать всегда метрику, компоненты ее метрического и обратного к ней тензора, чтобы не забывать, что конкретно обозначают параметры и где какие знаки! С этого и начинаю решения.

О порядках малости

(там много может быть важностей с ними, потом опишу это с примерами, а также в теории про это тоже.)

Обзор методов для задач на движение частиц в полях

(тут порассуждаю, когда гамильтонов подход работает, когда по Вайнбергу через геодезические решать. пока не знаю, вот разные способы)

О важности рассмотрения следующего порядка малости, прежде чем сделать некоторый принципиальный вывод

(Если Логунову это стоило репутации, то точно лучше пару абзацев написать про это, плюс это интересная тема)

Important technical advice for some transformations

(с опытом допишу, прорешивать дальше каталог нужно)

Обходи типичных тупиков при решении задач про инфляцию

(???? удостоверюсь, что задачи все решаются, этого раздела должно на это хватить.)

• Подумай, по какому времени у нас производная: по конформному или по обычному? Может, всю инфляцию нужно переписать, чтобы путаницы в этом не было? Потому что столько путаницы в этих временах, столько часов уходит только лишь на то, что оказывается, там именно от конформного времени производная! Пока важно просто это помнить, это очень неприятно.

(уже писал в дополнениях, но пусть уж лучше пока 2 раза будет записано, потом мб удалю отсюда)

• Если ты дифференцируешь, то следует помнить, какая функция от какого аргумента или функции зависит, а какой штрих или точка что обозначает.

Часто от этого возникают дополнительные множители, без которых выражение будет не верным.

A.1.7 How to Guess the Main Ideas and Laws of Gravity?

Обсудим, каким образом, глубоко понимая простые идеи ОТО, можно воспроизвести всё, что в ней находится.

(пока я не стал профессионалом, этим заниматься не время мне)

A.1.8 On Bypassing Dead Ends in Understanding Gravity

Обсудим то, что останавливало и останавливает многих людей от понимания гравитации на том уровне, на котором ее понимают одни из лучших экспертов. Лет 100 этот раздел бы был на вес золота.

Почему исторически люди так не скоро догадались про формулы гравитации?

(тоже важный для обзора вопрос)

Об известных технических тупиках

Обсудим тупики вида “человек неправильно поработал с формулами и пришел к неверным выводам”.

A.1.9 Overview of the Most Applied Topics

Обсудим наиболее важные для приложений темы ОТО и то, как их можно использовать в науке и жизни.
(мб что грав волны где-то нужны, пропишу потом. потом подумаю отдельно про приложения, пока хз.)

О применениях ОТО в других разделах физики

(обзор для кругозора, тоже может быть очень полезно)

A.1.10 Features of Effective Studying

Особенности эффективного развития в понимании гравитации

Ограничиваешь себя базовым курсом ОТО - спокойно живешь. Не ограничиваешь - депрессия гарантирована, если ты только не считаешь себя специалистом по какой-то одной особенности

В гравитации есть много всего, что просто вывернет мозг наизнанку. Пока нет уровня аспиранта - точно важно понимать, что следует не ввязываться туда! Сперва очень крепкие основы. И дальше только по потребности что-то начнешь доделывать.

Типа видел же мои разделы вдали в этой записи? Отдельные месяца 3 нужно, чтобы так развиться, чтобы читая их не уехать крышей. Так что нечего ими заниматься сразу! Будут основы - вот постепенно и займешься ими, но опять же, только после сделанных основ и решенных задач.

Поэтому у меня 1я часть многое и не содержит! Не нужно тут многое! Если многое упоминать, то слишком слишком много сил уйдет. Так что ограничиваем всегда себя обычным курсом ОТО, ну и там еще некоторые мелочи и указания. Остальное - отдельные разделы, которые отдельно додумывать нужно, никак не как часть минимального понимания!

Фильтр от дезынформации и некачественно поданной информации особо важен

Если вокруг тебя профессора и ты сразу берешь в первую очередь хорошие лекции и книги, то это можно и не заметить. А вот если нет такого, что почти всегда и происходит, то этот параграф точно будет спасающим жизнь. Абсолютно бесполезно надеятся на понимание гравитации, если у тебя в приоритете плохо написанная по ней книга. Не будет столько времени и столько осмысления, чтобы понять эти темы.

Просто следует позаботится, что в большем приоритете всегда проверенные книги/лекции/статьи. Всегда будет интересно почитать и не такие авторитетные книги, важно осознавать их приоритетность. В первую очередь всегда проверенная теория. Так всегда, просто тут особо легко затупить, особенно если тебе читают лекции по не лучшим книгам, что очень вероятно.

Математика строгая для работы с гравитацией важна, но в то же время на первых этапах ее можно оставить, притворившись, что понимаешь, что происходит

Потому что так и происходит, мы уже научились решать задачи, получили что-то полезное, а дальше вспоминаем, что там начало курса состоит в том, что мы много говорим о диффгеме, топологии, тензорах, и тогда "окей, давайте и это тоже доучим срого, чтобы не было неточных утверждений". Думаю, так и учится. Не стоит того, на начальных этапах засиживаться в математике, это x100 уменьшит мотивацию и наслаждение от науки.

Без засиживания в диффгем и задачи про разные модели все-таки не понять гравитацию нормально

Просто отдельно сложно имеено сидеть на диффгеме и над моделями, но все-таки даже если многое понять, то к этим темам придется вернуться, прежде чем появится уверенность в предмете.
(мб подробнее раскрою это потом.)

Алгоритм изучения ОТО

Учим минимальную базу уравнений, выходим на задачи и их смотрим более всего

Типичное дело.
очень важно тут не отлететь ни в какой диффгем, потому что так можно и не вернуться, цель же - скорее поднять ОТО.
и всё равно, минимальная базовая подготовка займет мб и не месяц, но тем не менее, ничего кроме нее не делаем, как можно скорее выходим на задачи.

Углубляюсь параллельно задачам в суть и построение ОТО

Именно так, фоном с задачами

Об идее учить ОТО с подробного разбора геометрии

(лекции Тонга и Вергелеса говорят, что так нужно. я так не считаю. напишу потом подробно, почему.)

Только после этого открываем темы дифференциальной геометрии

Ибо по сути ОТО держится на диффгеме и без него - никуда.
Поэтому когда уже есть уровень - тогда в него и углубляемся.

Необходимые темы для ОТО

Изучение ОТО не следует начинать без владение на неплохом уровне темами из этого раздела.

Необходимость механики для ОТО

Необходимость основ дифференциальной геометрии для ОТО

очень сильно используется, так что без основных идей тут особенно не сдвинуться. тупо постоянно на конструкцию кривизны пространств и происходит отлет.

классическая теория поля

по сути этот формализм мы и используем.

Дополнительные темы для ОТО

A.2 Acknowledgements

Currently, no one except me has worked on the sections of this note (with the exception of sections taken from books).

A.3 Literature on Gravity

A.3.1 Main Literature

Основная обучающая

Тонг Лекции по ОТО
хорошие лекции с подробностями, много по ним впишу потом. когда-то дойду, пока не дошел

Zhou K. Notes on general relativity
Wonderful brief notes by a wonderful person. I used them in my first part, but later I'll change them much.

Ландау Лифшиц Теория поля
Много основ там отражено, но все-таки мало профессионализма будет, если только ее читать, много тупиков можно найти и профессионалы всегда будут знать многое, что никак не понять, зная только эту теорию.

Хриплович И. Б. ОТО
Когда-то мне показалось, что она полезная, но пока хз, не до нее все время было, мб когда-то дойду, порешаю задачи.

Задачники по ОТО

Лайтман А., Пресс В., Прайс Р., Тюкольски С. Сборник задач по теории относительности и гравитации
Хороший задачник, из которого я многие себе задачи возьму. Чтобы решать их нужен базовый уровень, у меня он только появляется.

Литература крепкого минимума

Вайнберг С. Гравитация и космология
Большая важная, хорошая книга, без которой не начать нормально пользоваться ОТО. Потом из неё многое добавлю.

Thomas Mueller, Frank Grave Catalogue of Spacetimes
Каталог метрик, думаю, это важно для того, чтобы применять ОТО, ибо без этого просто развили формализм и с ним ничего не сделать. Добавлено также многое из этого.

Estelle Asmodelle Tests of General Relativity: A Review May 4th, 2017
Хорошая подготовка к применениям ОТО, тут же указание, какие самые важные задачи для подготовки? Уже заготовлена структура.

Очень интересная обзорная

Thomas Müller Catalogue of Spacetimes
Крутой каталог, многое добавлю потом, по многим пространствам временам можно порешать задачи, должно быть очень прикольно.

A.3.2 Additional Literature

Другая обучающая

Обсудим книги, помогающие в понимании основных.
Лашкевич М. Л. Лекции по ОТО
Очень концентрированные лекции, очень много в них полезного, но лучше не фокусироваться на них много, в других книгах понятнее написано. Но потом их додумывать очень интересно и полезно. Просто подготовки к ним очень много нужно, чтобы в принципе в голове укладывались эти темы.

S. Carroll. Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity
Обычный учебник по гравитации, изложены обычные темы, много теории, есть что почитать. Просто это темы, которые известны всем, знающим основы гравитации, так что ничего супер особенного

C. Mead G4v: An Engineering Approach to Gravitation 4/21/2015 https://www.youtube.com/watch?v=XdiG6ZPib3c&ab_channel=caltech
Interesting talk that shows fundamental approach to gravity, discusses experiments and can teach some important ideas that are not written at all in many student books.

Арифов Л. Я. Общая теория относительности и тяготение. Изд. 2-е, доп. и перераб. Ташкент: изд-во «Фан» УзССР, 1983, с. 304.
показалась книга очень крутой, добавил, потом пройду.

Владимиров Ю. С. Системы отсчета в теории гравитации. М.: Энергоиздат, 1982. - 256 с.
показалась книга очень крутой, добавил, потом пройду.

Вергелес лекции по ОТО
небольшая книга с многими интересными деталями и введением в бескоординатный подход.

Ахмедов лекции по ОТО
мб открою потом, деталей там наверное много интересных.

Профессиональная литература по основам гравитации

Мизер Торн Уиллер т. 1
Очень мощная книга, много подробной, большой теории, которой можно заниматься еще несколько месяцев. Скорее всего, это и буду делать, структуру уже в принципе заготовил, но это сполна профессиональная работа, пока мне актуальнее минимум собрать крепкий.

Мизер Торн Уиллер т. 2
Вроде тоже много полезного.

Мизер Торн Уиллер т. 3

Не уверен, что она нужна, но мб тоже.

Lawrence M. Krauss A Universe from Nothing: Why There Is Something Rather Than Nothing
Рассуждения про вселенную и откуда что пошло. Может, пара недель на это уйдет, много информации, много вопросов, в которым я не готов.

Sean M. Carroll Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity
Интересная книга, где много мелочей, которые я не знаю, так что когда-нибудь может быть пару дней буду дополнять свои записи темами из нее. Пока ничего актуального в ней я не видел, а других книг мне итак хватает.

НОВЕЙШИЕ ПРОБЛЕМЫ ГРАВИТАЦИИ СБОРНИК СТАТЕЙ Перевод Д. В. БЕЛОВА и Б. Т. ВАВИЛОВА Под редакцией и со вступительной статьей Д. Иваненко
Очень интересные статьи, потом почитаю их, добавил уже в структуру.

С.Хокинг, Дж.Эллис, Крупномасштабная структура Вселенной, М., «Мир», 1977
я хз, лашкевич советовал в качестве литературы к курсу, помню, что такое есть, ну и открою только после того, как по главной литературе будет сделано всё главное.

С.Чандрасекар, Математическая теория черных дыр (в 2 томах), М. «Мир» 1986.
я хз, лашкевич советовал в качестве литературы к курсу, помню, что такое есть, ну и открою только после того, как по главной литературе будет сделано всё главное.

Will, Clifford M. Theory and experiment in gravitational physics
Cambridge University Press (Virtual Publishing), 2nd edition, Cambridge, 2018
This should be a great book by a true professional.

Hans Jürgen Treder Gravitationstheorie und Äquivalenzprinzip: Lorentz-Gruppe, Einstein-Gruppe und Raumstruktur Akademie-Verlag, 1971 -
A book about equivalence principle. It is in German, Russian, but not English. Maybe it is useful for deeper understanding GR...

V L Ginzburg, V P Frolov Vacuum in a homogeneous gravitational field and excitation of a uniformly accelerated detector; 1987 Sov. Phys. Usp. 30 1073
I am assured that this is a good article about vacuum.

Профессиональная литература про модификациям и обобщениям гравитации

Freedman, Daniel Z. and Van Proeyen, Antoine Supergravity
Большая книга с очень много чем, так что для детального теоретического понимания гравитации полезно некоторый этап почитать ее.

Д.Д.Иваненко, П.И.Пронин, Г.А.Сарданашвили КАЛИБРОВОЧНАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ М.: Изд-во МГУ, 1985.— 144 с.
Крутая книга Иваненко, точно начну с нее, если усвою обычную ОТО и задумаюсь про обобщения.

John F. Donoghue General relativity as an effective field theory: The leading quantum corrections
Говорят, гравитацию можно рассматривать чисто как теорию поля и она может иметь квантовые поправки к классической теории. Нужно дописать в КТП, что у нас вообще-то даже на классическом уровне есть квантовые эффекты, просто мы их не замечаем! Так и тут. Интересно будет потом про это подумать, пока основы учу.

По гравитационным волнам

Основная по гравитационным волнам

(начну читать - буду добавлять)

B.S. Sathyaprakash, Bernard F. Schutz, Physics, Astrophysics and Cosmology with Gravitational Waves

очень хороший обзор гравитационных волн, до которого еще подрасти нужно. Сделаю ОТО - мб посижу дня 4 в этой статье, пока прямо настолько на волны фокусироваться не по уровню.

Kip S. Thorne Multipole expansions of gravitational radiation

Вроде крутая статья с очень хорошей математикой и решением для гравитационных волн.

Дополнительная по гравитационным волнам

G. B. Lesovik, A. V. Lebedev, V. Mounutcharyan, T. Martin Detection of gravity waves by phase modulation of the light from a distant star

Почти бесполезная статья, где обсуждается детектирование волн через модуляцию света, прошедшего рядом с источником. Полезна лишь для того, чтобы порешать уравнения ОТО, попрактиковаться в выводе формул. Пока не научился их сам выводить, так что мб открою, но точно далеко не в первую очередь, ибо очень низкоприоритетно в этом разбираться.

Medvedev, Alexander S. and Yiğit, Erdal Gravity Waves in Planetary Atmospheres

статья про влияние гравитационных волн на атмосферу, говорят, типичный эффект такой есть. мб почитаю, пока абсолютно это не важно. . вообще, аналогичных статей тоже много, пока я не знаю, что сказать и мне это не актуально

Про ударные волны есть какие-то статьи, на архиве на английском поискать можно это не нужно сейчас.

По другим темам гравитации

Статьи о типичных явлениях ОТО

Christian G Bohmer et al. Classical tests of general relativity in brane world models

Обсуждаются типичные тесты ОТО. Вроде просто теор статья, не особо читал ее, когда-то мб додумаю это.

Основная по электродинамике в искривленном пространстве

Cabral, Francisco and Lobo, Francisco S. N. Electrodynamics and spacetime geometry: Astrophysical applications

разные очень интересные модели электродинамики в искривленном пространстве. проблема в том, что моя электродинамика явно хромает, чтобы смотреть это, так что сперва тяну ее, потом обязательно это пропишу, вроде крутые модели!

Cabral, Francisco and Lobo, Francisco S. N. Electrodynamics and Spacetime Geometry: Foundations

про уравнения максвелла в искривленном пространстве.

Арифов Л. Я. Общая теория относительности и тяготение. Изд. 2-е, доп. и перераб. Ташкент: изд-во «Фан» УзССР, 1983, с. 304.

Куча всего крутого, выгрузил, когда-то разберу по идее.

Дополнительная по электродинамике в искривленном пространстве

Hacyan Sh. Effects of gravitational waves on the polarization of pulsars

вроде бы поляризация света в поле гравитационной волны изучается, пока не понял, что там. но примеры работы с волнами вроде бы можно посмотреть.

Основная по гравитационному линзированию

Обсудим наиболее полезные книги и статьи по гравитационному линзированию.
? Takahiro T. Nakamura, Shuji Deguchi Wave Optics in Gravitational Lensing
Одна из самых полезных записей по гравитационному линзированию. Компактная теория, разве что нет связей с другими теориями, а также программирование не описано.

? Job Feldbrugge, Jean-Luc Lehners, Neil Turok Lorentzian Quantum Cosmology
44 страницы обсуждения каких-то деталей и различные крутейшие иллюстрации, которые обязательно прочитаю и вставлю сюда. а кстати, что за квантовая космология?

Jop Briet and David Hobill Determining the Dimensionality of Spacetime by Gravitational Lensing
статья с решением задачи о движении света в разных центрально-симметричных полях. Хорошо описаны эти методы решения.

Вайнберг С. Космология
Здесь описывается геометрический подход, но до этого я пока не дошел.

? Job Feldbrugge, Ue-Li Pen, and Neil Turok Oscillatory path integrals for radio astronomy
88 страниц примеров катастроф, моделирования и непонятной теории, которая стоит за этим. Чтобы понять математическую теорию, нужно читать Арнольда, а чтобы физическую - просто нужно написать на почту авторам. Потом засяду за переучивание, пока что ОТО и оптику качать итак нужно.

? Захаров Гравитационные линзы и микролинзы
Большая книга с большой непонятной теорией, которую нужно отдельно читать, так что оставлю это всё на далеко в будущее. Может быть, она полезная, но утонуть в ней запросто, а пользу получить затруднительно.

Dominik M. Theory and practice of microlensing light curves around fold singularities
Автор обещает, что тут подробное руководство по моделированию и интерпретации кривых блеска, полученных в событиях, включающих проходы складок и каустики. потом посмотрю, Википедия на него цитируется.

Дополнительная по гравитационному линзированию

(мб вообще перенесу это в запись про линзирование, т.к. вряд ли это буду в ОТО использовать. в той записи еще и деление книг по типам, здесь же просто все дополнительные (удалю те, которые не нужны))
? Шиллинг Г. Складки на ткани пространства-времени: Эйнштейн, гравитационные волны и будущее астрономии
мб почитаю потом, популярная книга.

? Чернин А. Д. Космические иллюзии и миражи
небольшая популярная статья, добавлю ее тоже потом, там просто рассказывается на 7 страниц что происходит в линзировании, полезно очень

Dominik M. Theory and practice of microlensing light curves around fold singularities
Автор обещает, что тут подробное руководство по моделированию и интерпретации кривых блеска, полученных в событиях, включающих проходы складок и каустики. потом посмотрю, сперва статьи Турока! Википедия на него цитируется.

Frederic Courbin и др. Quasar Lensing
Вообще, очень крутая книга. многое обсуждено того, что в других местах не видел. Сделаю основы, потом дойду до нее.

R. Kayser и др. Gravitational Lenses
еще 400 страниц по линзированию, вроде, конкретных примеров много добавлено, интересно будет потом их посмотреть.

? Job Feldbrugge, Neil Turok Gravitational lensing of binary systems in wave optics
Приведен обзор происходящего, даны ссылки на источники, с которыми можно продолжить изучения. Без объясняющих книг статья эта бесполезна, потому что ничего в ней непонятно. Бинарная система очень вкратце обсуждена и приведены просто итоги. Вся эта статья успешно добавлена.

? древняя интересная статья, где сделано то же, что делал Турок. Прикольно, что уже 40 лет назад это было сделано.

Takahiro T. Nakamura, Kenji Tomita и др. Various Approaches to Cosmological Gravitational Lensing in Inhomogeneous Models
Накамура еще например эту статью написал, где изучаются космологические модели и что-то еще. позже дойду, выглядит очень интересно.

Gianfranco Grillo and James Cordes Wave asymptotics and their application to astrophysical plasma lensing
вроде простая статья, изучающая что-то то же, что и я делаю, только без теории Пикара-Лефшеца, вроде с использованием Фурье методов когда сделаю основу свою - скорее всего почитаю, мб добавлю.

По истории ОТО

Hubert F. M. Goenner, "On the history of unified field theories" Living Rev. Relativity, 7,
в одной статье было сказано, что тут хороший обзор истории, потом почитаю.

Литература по альтернативным и скорее всего неверными теориям гравитации

Логунов А.А. Релятивистская теория гравитации
Интересная книга, много раскрыто тем, которые мне интересно понять, но читать побаиваюсь, потому что если будет написана херня, то не распознаю её и так и выучу. Вроде сама теория признана неверной.

Логунов А. А. Лекции по теории относительности и гравитации: Современный анализ проблемы.- М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.- 272 с.
Какой-то тоже пиздец с какими-то деталями, которых нигде не видел до этого. С одной стороны релятивистская механика очень подробно обсуждается, с другой - какие-то обобщенные системы отсчета и две скорости света. Не хочу даже касаться этого, когда-то потом посмотрю, когда будет у кого спросить про всю эту теорию.

По следующим предметам

(тоже полно книг и статей по темам, что следует из ОТО)

Основная по космологии

Вайнберг С. Космология
В этой книге хорошо раскрыт геометрический подход к линзированию (???). Вообще, большая книга, часто не до нее.

Дополнительная по космологии

(это в космологию перенесу когда там структура станет лучше)
? Job Feldbrugge, Jean-Luc Lehners, Neil Turok Lorentzian Quantum Cosmology

44 страницы обсуждения каких-то деталей и различные крутейшие иллюстрации, которые обязательно прочитаю и вставлю сюда. а кстати, что за квантовая космология?

По необходимой математике и физике в помощь

Обсудим статьи и книги с математическими методами, которые используются в разных не типичных вопросах.
Рашевский Риманова геометрия и тензорный анализ
про тензоры и диффгем, мб полезная, я почти не открывал, нет потребности.

Киселев В. В. Лекции по теории поля
Написано введение в ОТО через парадокс близнецов. Просто для развития в физике полезна, особо не нужна.

A.4 Description of this Note

Описание записи в целом

Об индексных обозначениях

У меня не зафиксировано какое-то соглашение про индексы, в разных местах они разные, просто по смыслу можно догадаться, что какие индексы значат. Иногда латинские - это все индексы, иногда - только пространственные. Потом согласую всех их.

О последовательности тем

(напишу потом)

Описание частей

первая часть

вторая часть

О части про основы гравитационных волн

полезная часть, потому что волны - типичное явление, которое с большой вероятностью понадобится в жизни.
(потом подробнее пропишу)

приложения

какие вообще приложения я разбирал?

Обозначения

Типичные обозначения

$g = \det g_{\mu\nu}$.

Сокращения

STF - symmetric trace free.

Формальные индексы

лашкевич что-то такое мутит, я так и не въехал пока что

Использование индексных обозначений компактно, но имеет один недостаток: мы заменяем реальные инвариантные объекты (тензоры) их компонентами, зависящими от выбора базиса. В то же время безындексная запись математически корректна, обща, но громоздка. Поэтому мы часто будем пользоваться методом бормалвных индексов. Рассмотрим тензорное произведение $V \otimes V \otimes V \otimes \cdots$ и перенумеруем входящие в него пространства натуральными числами по порядку. Будем соответствующим числом жирным шрифтом указывать, в каком пространстве расположен или на какое пространство действует объект. Например, u^{k}-это вектор u, расположенный в k-й тензорной компоненте, а ω_{k} 1-форма, действуюШая на k-ю компоненту. Тогда $\omega_1 u^1 = u^1\omega_1 = \omega u = \omega(u)$. Здесь от формального индекса, вроде бы, нет никакой пользы. Но вот $g_{12}u^{\mathbf{1}}v^2 = g(u,v)$ и $g_{12}u^{\mathbf{1}} = (\bar{g}(u))_2$ записать с формальными индексами уже удобней. И все четыре объекта $g, \bar{g}, g^*, \bar{g}^*$ можно теперь обозначать одной буквой g. Действительно,

$$g^{13}g_{32} = \delta^1_2$$

формально похоже на (1.2), но выражает инвариантный факт, что $\bar{g}^* = \bar{g}^{-1}$. На общих многообразиях запись с формальными индексами позволит упростить вывод многих формул по сравнению с выводом в компонентах.

(??? где они нужны??? зачем?? я хз)

нпр

$$R^1_2 = \frac{1}{2}R^1_{2\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$$

Индекс "•"

(????)

Он обозначает прямо все элементы, которые есть при этом индексе..

(пока не уверен, где его использовать буду)

Например, выражение действия поля в искривленном пространстве записывается как

$$S[\phi|g] = \int d^dx\sqrt{|g|}\mathcal{L}\left(\phi, \partial_\bullet\phi|g, \partial_\bullet g, ...\right),$$

что то же самое, что и

(????? потом подумаю, раскрою, пока сложновато этим владеть)

Производная " " и ковариантная производная " ; "

Важно привыкнуть к таким обозначениям, потому что они встречаются много где.

(тут их с примерами объяснение)

Верхняя черта над индексом (????)

)о ней напишу с примерами, потому что максимально часто используется)

Например:

$$\mathrm{tr}\, a = a^{\bar{\mu}}_{\mu} = \eta^{\mu\nu}$$

также:

$$a_{\mu\nu}, (ab)_{\mu\nu} = a_\mu\bar{\lambda}b_{\lambda\nu}$$

(потом подробнее распишу, это важно)

() и [ ] - симметризация и антисимметризация

(тут всё легко, потом с примерами напишу)

Константы

R_g **гравитационный радиус**

Для Солнца $r_g = 3$ км; для Земли $r_g = 0{,}9$ см.

A.5 General Overview of Gravity

A.5.1 Overview of Gravity as a Physical Phenomena

(discuss what can be there and why??)

Обсудим вкратце в порядке актуальности возможные экспериментальные факты, объяснюющиеся гравитацией.

(позже самую суть с формулами выпишу)

О смещении перигелия

Об отклонении луча в поле солнца

Один из самых типичных и принципиально важных эффектов ОТО - об отклонении луча.

(тут вкратце, более подробно в первой части, а в разы подробнее - в теме про линзирования.)

О красном смещении

Изменение частоты света, летящего в гравитационном поле

(хрипл стр 39, очень крутые соображения, позже посмотрю подробнее, пока не до него)

В гравитационном поле частота света меняется как:

$$\Delta\omega = \omega_\tau(r+h) - \omega_\tau(r) = -\omega\frac{kMh}{r^2} = -\omega\frac{gh}{c^2}$$

(дальше будут вкратце пояснения, пока лишь выгрузка, не до неё)

Начнем с оценки возможной величины эффекта. Если говорить о поле Земли, то естественно считать, что относительное смешение частоты света $\Delta\omega/\omega$, зафиксированное приемником, который находится на высоте h над источником, должно быть пропорционально этой высоте, а также ускорению свободного падения g. И тогда простье соображения размерности дают

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \sim \frac{gh}{c^2},$$

где c - скорость света. А теперь - количественное рассмотрение. В постоянном поле (т. е. не зависящем от мирового времени t) сохраняется энергия E. Как известно, она выражается через действие Sс помощью соотношения $E = -\partial S/\partial t$. Точно так же в постоянном поле сохраняется и частота волны ω, связанная с эйконалом Ψ аналогичным соотношением:

$$\omega = -\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

Однако часы, покоящиеся вместе с источником света, и часы, покоящиеся вместе с приемником света, показывают собственное время, каждые свое. Частота по собственному времени τ

$$\omega_\tau = -\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} = -\frac{\partial\Psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\tau} = \frac{\omega}{\sqrt{g_{00}}}$$

в слабом гравитационном поле Земли сводится к

$$\omega_\tau = \omega\left(1 + \frac{kM}{r}\right)$$

Если детектор расположен на высоте h над источником, то частота, зафиксированная детектором, будет сдвинута в красную сторону по сравнению с частотой источника. Этот сдвиг равен (*А.* Эйнштейн, 1907)

$$\omega_\tau(r+h) - \omega_\tau(r) = -\omega\frac{kMh}{r^2} = -\omega\frac{gh}{c^2}$$

В окончательном выражении восстановлена въявь скорость света c. Согласие с исходной простой оценкой очевидно.

Относительная величина поправки очень мала. Даже при $h \sim \sim 100$ м она составляет

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \sim 10^{-14}$$

Эффект был впервые измерен на мэссбауэровском переходе в ^{57}Fe. Предсказание теории подтверждается экспериментально в пределах 1%.

A.5.2 Overview of Gravity as a Science

(discuss what people are writing about it and why??)

Map of gravity

(add picture and discussion about it!!!)

A.5.3 Amazing Facts

Обсудим самое удивительное, что есть в ОТО.
(соберем только то, что заставляет удивляться, лол)

A.5.4 Review of Different Formalisms and Modified Theories of Gravity

(I'll later create a really good review)

A.5.5 Connection of Gravity with Other Sciences

Четко укажем связи ОТО и других наук для четкой ориентации.
(мб сюда перекину то, что в какой-то другой там части.)

Связь с ньютоновской теорией тяготения

(в первую очередь эту связь пропишу)
Поймем ньютоновскую теорию гравитации, подчеркнем контраст между ней и ОТО.

Формула действия для перехода

Действительно, (????) действие есть

$$S = \int dt \left(-m + \frac{mv^2}{2} - m\phi(t, \boldsymbol{r}) \right)$$

где первый член $-m$ добавлен просто для согласованности с релятивистским действием, а $\phi(t, \boldsymbol{r})$ ньютоновский гравитационный потенциал. Сравнивая с действием через метрику, мы получим

$$ds = \left(1 - \frac{v^2}{2} + \phi \right) dt$$

Считая второе и третье слагаемое малым и учитывая, что $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}dt$, получаем

$$ds^2 = (1 + 2\phi)dt^2 - d\boldsymbol{r}^2$$

Мы видим, что в данном приближении

$$g_{00} = 1 + 2\phi, \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ij} = -\delta_{ij}$$

Вывод закона тяготения Ньютона

(пока не очень зашарил, потом буду более четко прописывать)
Уравнение эйнштейна в случае слабых полей есть волновое уравнение на ψ:

$$\Box\psi_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}$$

(а дальше я просто не уверен пока что, так что копия лшк)

Рассмотрим теперь в рамках приближения слабого поля нерелятивистский предел, определяемый условиямИ: 1) скорости частиц много меньше единицы, а поле мы усредняем по временам, большим чем характерные масштабы рассматриваемых областей;

2) плотность энергии совпадает с плотностью массы: $T^{00} = \rho$, а плотности импульса и напряжения малы: $|T^{0i}|, |T^{ij}| \ll \rho$ Первое условие означает также, что мы можем пренебречь производными по времени от метрики и решать задачу как статическую:

$$\Delta\psi_{00}(r) = 16\pi G\rho(r)$$
$$\Delta\psi_{0i}(r) = \Delta\psi_{ij}(r) = 0$$

Здесь $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{d-1} \partial_i^2$ - пространственный лапласиан. Решение уравнения Лапласа, стремящееся к нулю на бесконечности, хорошо известно:

$$\psi_{00}(r) = -\frac{16\pi G}{(d-3)S_{d-1}} \int d^{d-1}x' \frac{\rho(r')}{|r - r'|^{d-3}}, \quad \psi_{0i}(r) = \psi_{ij}(r) = 0$$

где $S_d = d\pi^{d/2}/\Gamma(d/2 + 1)$ - площадь поверхности единичной гиперсферы в d-мерном эвклидовом пространстве. Это решение, очевидно, удовлетворяет калибровочному условию (7.11). Из (7.12) получаем $h_{00} = \frac{d-3}{d-2}\psi_{00}$ и $h_{ij} = \frac{\psi_{00}}{d-2}\delta_{ij}$. Следовательно,

$$h_{00}(r) = (d-3)h_{ii}(r) = -\frac{16\pi G}{(d-2)S_{d-1}} \int d^{d-1}x' \frac{\rho(r')}{|r - r'|^{d-3}}.$$

Сравнивая с (4.8), получаем, что ньютоновский гравитационный потенциал равен $\phi(r) = \frac{1}{2}h_{00}$. Однако пространственная часть метрики не согласуется с (4.8), поскольку согласно этой формуле компоненты h_{ii} должны равняться нулю. На самом деле, для

нерелятивистской частицы ($v^2 \ll 1$) в слабом гравитационном поле ($\phi \ll 1$) вклад $h_{ii} = 2\phi/(d-3)$ в действие является превышением точности. Действительно, для нерелятивистского действия частицы в гравитационном поле имеем

$$S = \int dt \left(-m + \left(1 - \frac{2\phi(r)}{d-3}\right) \frac{mv^2}{2} - m\phi(r) \right).$$

Очевидно, поправка к лагранжиану $\sim m\phi v^2 \ll m\phi, mv^2$, то есть мала по сравнению с остальными членами. Иными словами, вклад h_{ii} пренебрежимо мал, поскольку в нерелятивистском пределе вклад в квадрат собственного времени, пропорциональный dr^2, сам по себе мал по сравнению с dt^2. Если же мы хотим изучать движение релятивистской частицы в слабом гравитационном поле (даже созданном нерелятивистскими объектами), то этим вкладом пренебрегать нельзя. Итак, нерелятивистский потенциал системы масс m_i в точках r_i равен

Итак, нерелятивистский потенциал системы масс m_i в точках $\boldsymbol{r}_i$ равен

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{8\pi G}{(d-2)S_{d-1}} \sum_a \frac{m_a}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a|^{d-3}}$$

При $d = 4$ мы получаем закон всемирного тяготения Ньютона:

$$U(\{\boldsymbol{r}_a\}) = \frac{1}{2} \sum_a \lim_{r' \to r_a} m_a \left(\phi(\boldsymbol{r}') + G\frac{m_a}{|\boldsymbol{r}' - r_a|} \right) = -\sum_{a<b} G\frac{m_a m_b}{|\boldsymbol{r}_a - r_b|}$$

Отсюда заключаем, что константа G в действии Эйнштейна-Гильберта равна гравитационной постоянной Ньютона.

Явное сравнение

(идея четко формульно написать, как в одном и как в другом случае. потом мб пропишу)

Отличие: В ОТО источником гравитации является еще плотность импульса

(хз, почему)
Источником гравитации является не только плотность массы (или плотность энергии), но и плотность импульса (или плотность потока энергии) и даже плотность потока импульса (тензор напряжений).

тут хочу пример, где в у нас у системы плотность импульса дает такой вклад, которого в ньютоновской теории не было бы.

(?)
в солнечной системе вклады потоков энергии и импульса ничтожно малы. Однако в случае более плотных объектов или на больших масштабах их надо учитывать.

Отличие: гравитационное поле в ОТО обладает динамическими степенями свободы, так что источники не могут однозначно задавать конфигурацию поля

(??? хз)
Гравитационное поле в ОТО обладает динамическими степенями свободы, так что источники не могут однозначно задавать конфигурацию поля. Конечно, в отличие от электромагнитного поля, уравнения гравитационного поля нелинейны, так что решение нельзя разбить в сумму вынужденного и свободного поля.

Тем не менее, задача Коши должна содержать не только начальное состояние материи, но и начальное состояние гравитационного поля, а малые возмущения гравитационного поля распространяются как волны.

Связь с СТО

Опишем, как СТО связано с ОТО и укажем все отличия.
(!! очень круто четко указать это прямо формульно!! подробно - где-то в какой-то из частей, тут - коротко и по факту. пока еще тренироваться нужно. хотя, мб только во введении это и оставлю, посмотрим, сколько там будет теории)
(потом пропишу)
время:
В специальной теории относительности можно определять dl как интервал между двумя бесконечно близкими событиями, происходящими в один и тот же момент времени.
В общей теории относительности этого, вообще говоря, уже нельзя сделать, т.е. нельзя определить dl, просто положив $dx^0 = 0$ в ds.
Это связано с тем, что в гравитационном поле собственное время в разных точках пространства различным образом связано с координатой x^0.

Отличия (???)

Общая теория относительности отличается от специальной, тем, что пространство-время общей теории относительности представляет собой псевдориманово многообразие общего вида M сигнатуры $(1, d-1)$
во-вторых, тем, что сама структура многообразия имеет динамику, зависящую от движения вещества.

расширение СТО до ОТО

пропишу потом

лоренцевское сжатие с учетом гравитации

Полагая $dt = 0$, выражаем dr через dl:

$$dr = e^{-2h}\varepsilon^{-1}dl$$

что есть ни что иное как лоренцевское сжатие с учетом гравитации.

Связь с электродинамикой (??!!!)

Говорят, это извечная проблема, которую можно много обсуждать.
(большой будет раздел, пока не готов писать)

О важности понимания связи ЭД и гравитации

пропишу потом, зачем это важно.
Хочется проверить альтернативы теории гравитации Эйнштейна, в частности, те, которые имеют калибровочно-теоретическую природу, такие как теория Эйнштейна-Картана или метрическая аффинная гравитация

Схожесть построения электродинамики и гравитации

(!! важно это выделить, Володя особенно это знает)

Связь с классической механикой

(пока хз)

Используются механические уравнения и законы

(потом подробнее)
уравнение гамильтона-якоби
определения все механические.

Используются типичные модели механики

там модель движения по эллипсу, др.
короче, заготовки по механике необходимы для работающего ОТО.

Связь с астрономией

(пропишу, как она используется там. параллено по астрономии запись буду продвигать, пока только увидел, что это есть)

Свойства астрономических объектов исследуются с помощью ОТО

(напишу потом, как конкретно. нпр теория ниже. поэтому очень важно каталог астрономических объектов и теории о ней создать! создам потом. так вот ОТО и нужно)
PSR B1913+16 (также обозначается как J1915+1606) - пульсар, представляющий собой двойную звёздную систему, состоящую из примерно одинаковых по массе звёзд, около $1,4 M_\odot$. Обнаружен Расселом Халсом и Джозефом Тейлором в 1974 году при проведении наблюдений на радиотелескопе обсерватории Аресибо; они были удостоены Нобелевской премии по физике в 1993 году с формулировкой «за открытше нового типа пульсаров, давшее новые возможности в изучении гравитации».
Вращение звёзд происходит по вытянутым эллиптическим орбитам (эксцентриситет около 0,617), вокруг общего центра масс (период обращения 7,75 часа, минимальное сближение в системе в периастре $1,1 R_\odot$, максимальное удаление в апоастре 4,8 $R_\odot$. Одна из звёзд системы - нейтронная, её период вращения около 17 оборотов в секунду (исходя из измеренного периода импульса излучения 59,03 мс). При этом средняя скорость движения по орбите около 200 км/с.
Орбитальный период обращения сокращается на $76 \pm 0,3$ мкс за год (или на $2,402 \cdot 10^{-12}$ секунды за секунду). Эта величина с точностью до 0,2 % согласуется с решениями уравнений общей теории относительности (ОТО), описывающих потерю энергии звёздной пары, обусловленную гравитационным излучением. ОТО предсказывает уменьшение орбитального периода на 75,8 микросекунд в год. Столкновение этих звёзд случится примерно через 300 млн лет.

Связь с дифференциальной геометрией

Связь этих разделов науки такая большая, что отдельно хотелось бы обсудить её.
много разных мнений, однажды, я и своё сформирую.

о том, как дифференциальная геометрия дает всё в ОТО

и так ли это???
Володя говорит, что так.
сперва пойму, потом напишу.

A.6 Puzzles of Gravity

Соберем интереснейшие вопросы по ОТО и её следствиям.

A.6.1 Popular and Simple Puzzles for a Semi-Philosophical Talk with an Enthusiast

В этом разделе представлены головоломки, которые интересно обсуждать за чашечкой чая.

Головоломки ОТО в обычной жизни

как мяч падает к земле в рамках ото?

вставлю, как типичную задачу поболтать.

Гравитационная энергия от махания кулаком

Автомобилист из Массачусетса рассерженно грозит кулаком другому автомобилисту. Какая доля расходуемой им энергии уходит на гравитационное излучение?
Задача 18.1. лейтмана, как же интересно!

Прохождение гравитационной волны через человека

Подумаем, о том, что Вы почувствуете, если через Вас пройдет гравитационная волна?
(тонг знает)
почему-то ничего, но я хз почему.
частица ничего не почувствует, а человек что почувствует или увидит?
хз

О том, что есть параметры физического мира

Что есть время по ОТО?

(типичный вопрос мб)

сила, действующая на частицу в ОТО

я просто не пойму, вот в ньютановской механике сила имеет известный вид, а в ОТО вообще можно ввести понятие силы???
как тогда эта сила будет выглядеть? то есть, какая поправка к Ньютоновской силе???

Что есть скорость по ОТО?

Возможные и невозможные явления

Можно ли двигаясь со скоростью, менее, чем скорость света, убежать от фотона, летящего вдогонку?

мб и да, я не понял, как, диаграммами для ОТО овладеть нужно, вот что!

Может ли гравитационное поле быть малым при движении немалого объекта со скоростью близкой к скорости света?

(вообще не могу оценивать это пока что)

Может ли ЭМ волна стать гравитационной?

Хриплович говорит, что да, а мне не до этого.

Создает ли ЭМ волна гравитационное поле?

(вроде да, но очень малое, пока в это вообще не въехал)

Можно ли качаться на гравитационных волнах

Тонг знает, я не знаю

A.6.2 Puzzles for a Semi-Philosophical Talk with Someone Who Knows Gravity

В этом разделе собраны головоломки, которые интересно обсуждать с теми, кто имеет подготовку по ОТО и имеет какие-то уже свои представления по поводу этих вопросов.

О создании ОТО

Иногда можно задуматься над самими моделями и уравнениями, в них существует не мало интересных головоломок.

Как построить ОТО из глубокого понимания идеи относительности?

Представим, что мы понимаем простейшие теории инерциальных и неинерциальных систем отсчета, попробуем теперь из этих знаний построить теорию гравитации. Нам приходит в голову, что так как если мы сидим в равноускоренной системе отсчета, на нас действует сила, то почему бы наша Земля не была бы равноускоренной системой отсчета?
однако, она круглая и какие-то дополнительные силы не взять ни от куда.
как из этих соображений выйти на ОТО?
(пока не знаю)
(потом напишу, у Ландау мб достаточно об этом сказано)
(также в механику в параграфы впишу)

Покажите, что при стремлении скорости света к бесконечности мы получаем Ньютоновскую теорию гравитации (??)

(пока не владею этим, плохо.)

Создайте модель пространства с нелинейным временем?

(очень интересно, по факту уже Шварцшильд такой. потом профессионально отвечу на этот вопрос.)

Как догадаться, что уравнения гравитации должны быть нелинейными?

Хриплович сказал, что это следствие тензорной структуры, я хз вообще.

Вывести уравнения Эйнштейна

типичные и классные такие задачки)))
сделаю тут это, сперва пропишу в самой записи.

Как догадаться о тензорной структуре теории гравитации?

хз, заботаю принцип эквивалентности, там ответ.

Об особенностях ОТО

Отличие электродинамики от гравитации

четко потом пропишу отличие.
(Хриплович писал)

Почему в ОТО в отличие от электродинамики динамика сразу материи и поля описывается?

так все говорят, а почему это так?
хз

О том, что есть гравитация

как догадаться, что гравитация это не сила?

а вот я хз даже.

Почему гравитация может быть описана метрикой?

так пока что четко не сформулировал еще.

Гравитационное поле это поле?

Суслов говорил, что нет, потому что у нас плотность энергии в каждом малом объеме ноль, у полей же она была бы малой, но конечной.
это как-то связано с ТЭИ ЛЛ
но пока что я не знаю.

О том, чем может быть гравитация

Может ли быть теория гравитации скалярной?

нет
(потом подумаю, почему, пока туповат я)
Хриплович писал, что
Простейшая мыслимая альтернатива эйнштейновской гравитации - скалярная теория.
Релятивистская инвариантность требует, чтобы скалярное поле взаимодействовало со скалярной характеристикой вещества.
Такой разумной характеристикой служит след T_μ^μ его тензора энергии-импульса.
Однако для частиц с нулевой массой покоя, в том числе и для света, $T_\mu^\mu = 0$. Таким образом, в скалярной теории свет не будет взаимодействовать с гравитационным полем.
Но отклонение луча света гравитационным полем Солнца, задержка луча света в этом поле, а также смещение частоты фотона гравитационным полем Земли твердо установленные экспериментальные факты.
Не лучше обстоит дело и с векторной теорией.
В ней взаимодействие частиц и античастиц имеет (как в обычной электродинамике) разный знак: если протоны притягиваются к Земле, то антипротоны должны были бы от нее отталкиваться.
Но это заведомо не так.
Кроме того, и здесь нейтральный фотон не будет взаимодействовать с гравитационным полем.
Таким образом, общая теория относительности, в которой гравитационное поле описывается симметричным тензором второго ранга, это простейшая теория гравитации, не противоречащая эксперименту.

С наилучшей точностью, $\sim 0,2\%$, предсказания ОТО проверены для задержки света в поле Солнца (см. ниже раздел 6.4).

Строго говоря, нельзя исключить, что на этом уровне существует примесь скалярного поля к тензорному. (??!!!)

про интервалы и промежутки времени какая-то головоломка

Лашкевич мучал ей.

Об аналогии гравитационного поля и неинерциальных систем?

явно это отвечу, там где-то подробно уже ниже это прописано.

Как синхронизовать часы по ОТО?

если никак, то почему?
нужно проработать!

Технические о построении ОТО

Обсудим не такие идейно важные, но тем не менее, интересные вопросы по ОТО.

Однозначно ли определяют уравнения Эйнштейна метрику

лашкевич привел пример, что типа нет, оператор, соответствующий тензору риччи в первом порядке может быть необратим.

а если с точностью до любого порядка?

Калибровочная ли теория ОТО?

в общем случае нет, потому что у нас любые преобразования, то есть нет такой группы, относительно которых они были бы инвариантны.

хз

а в случае малых полей?

Почему отклоняется мировая линия частицы в искривленном пространстве?

Лашкевич в лекции 4 выдал, что потому что замедляется время.
что за скорость течения времени кстати, вот загадка?
я чет вообще не въехал.

О свойствах гравитационного поля

О массе гравитационного поля

в рамках ото оно безмассовое
(пока не четко понимаю, почему)
Хриплович что-то писал про это, я не понял
а что говорят эксперименты кст?

Однородное гравитационное поле это отсутствие гравитации?

говорят, что да, но я не знаю вообще.
тут подумаю, мб четко и отвечу однажды.
пока откуда это следует, не знаю.

О времени на подкинутых часах в сравнении с неподвижными

На поверхности планеты (без атмосферы) стоит зенитная пушка, которая выстреливает часы вертикально вверх. В момент вылета из ствола часы синхронизируются с другими такими же часами, которые прикреплены к пушке. Через некоторое время часы, вылетевшие из ствола пушки, под действием силы тяжести падают рядом со вторыми часами. Какие часы отстанут в момент падения первых часов?

(Вергелес что-то говорил, там сила реации у неподвижных есть, значит, они не по геодезическим... потом подробно напишу ответ. также мб нормально модель изменения времени создам, пока не до этого.)

Идейные парадоксы ОТО о твердых телах

Парадокс Белла в ОТО

Лшк упоминал его.

твердый стержень не может ускоряться так, чтобы все его точки ускорялись с одним и тем же ускорением.

Задний конец должен иметь большее ускорение («парадокс» Белла).

потом подумаю

Невозможность существования твердого тела в рамках ОТО

Ландау писал.

потому что там Лоренцево сокращение.

A.6.3 Fun Puzzles about Models of GR

О популярных моделях ОТО

вывести решение Шварцшильда

Решение Шварцшильда - самое типичное решение уравнений Эйнштейна, так что чаще всего возникает вопрос именно про него. Обсудим, как наиболее быстро его вывести и поясним его суть.

(?)

Способы подступиться к нестандартным задачам

Обсудим задачи, к которым на первый взгляд даже подступиться непонятно как.

Описание динамики спина в гравитационном поле

вообще непонятно, как к этому подойти?

хз

О гравитационных волнах

Очень часто о них можно услышать самые разные вопросы, в которых многое иллюстрируется по ОТО, так что соберем их тут.

(тут самые интересные, большинство - в самой части решены в контексте.)

Почему существуют гравитационные волны?

у Хрипловича написано, суть в том, что уравнения эйнштейна допускают такие решения, покажу потом явно.

Почему масса гравитона нулевая?

хриплович что-то написал, я тупой слишком для этого.
стр 81

Откуда убывает излученная волнами гравитационная энергия (???)

ибо я так и не понял, число частиц одно и то же, другие их характеристики одни и те же, так откуда же убывает энергия???
скорость там уменьшается, вот почему.

космологические головоломки

почему мы всё еще не втянулись в черную дыру

а вот хз.
и даже мб не скоро задумаюсь, хотя следовало бы.

A.6.4 Puzzles for Preparation to Gravity and Introduction

Задачи по геометрии и математике, имеющие отношение к ОТО

В ОТО используется не такая типичная для других разделов физики математика, в которой много есть детали, самые интересные тут обсудим.

Можно ли переставлять частные производные?

говорят, нет, но мб и да, я не знаю просто.

(??) Восстановление символов Кристоффеля по геодезическим

как это сделать?
произвольный набор кристоффелей можно задать и так определить геодезическую.
можно по символов кристоффеля строить геодезические, а по геодезическим - символы кристоффеля.
любую кривую незамкнутую можно назвать геодезической???
например, для кривых, соответствующих равноускоренного движения в пространстве минковского как получить кристоффеля?
(?? вставить в уравнение геодезической?)
просто если уравнения движения зависят от параметра, то тогда кристоффеля будут зависеть от параметра?

О разных интерпретациях ОТО

(пока рано об этом думать)

A.7 History of Research in Gravity in a Nutshell

(I'll write later)

История получения основных законов ОТО

Типичная история ОТО

(из популярной статьи Хрипловича)

Общая теория относительности (ОТО) – современная теория тяготения, связывающая его с кривизной четырехмерного пространства–времени.

В своем, так сказать, классическом варианте теория тяготения была создана Ньютоном еще в XVII веке и до сих пор верно служит человечеству.

Она вполне достаточна для многих, если не для большинства, задач современной астрономии, астрофизики, космонавтики.

Между тем ее принципиальный внутренний недостаток был ясен еще самому Ньютону.

Это теория с дальнодействием: в ней гравитационное действие одного тела на другое передается мгновенно, без запаздывания.

Ньютоновская гравитация так же соотносится с общей теорией относительности, как закон Кулона с максвелловской электродинамикой.

Максвеллу удалось изгнать дальнодействие из электродинамики.

В гравитации это сделал Эйнштейн. Начать рассказ следует с замечательной работы Эйнштейна 1905 года, в которой была сформулирована специальная теория относительности и которая завершила в идейном отношении развитие классической электродинамики.

У этой работы несомненно были предшественники, среди которых нельзя не упомянуть Лоренца и Пуанкаре.

В их статьях уже содержались многие элементы специальной теории относительности.

Однако ясное понимание, цельная картина физики больших скоростей появились лишь в упомянутой работе Эйнштейна. Не случайно, несмотря на наличие прекрасных современных учебников, ее до сих пор можно рекомендовать для первого знакомства с предметом не только студентам, но и старшеклассникам. Что же касается ОТО, то все ее основополагающие элементы были созданы Эйнштейном. Впрочем, предчувствие того, что физика может быть связана с кривизной пространства, можно найти в трудах замечательных ученых прошлого века Гаусса, Римана, Гельмгольца, Клиффорда.

Гаусс, который пришел к идеям неевклидовой геометрии несколько ранее Лобачевского и Больяи, но так и не опубликовал своих исследований в этой области, не только считал, что "геометрию приходится ставить в один ряд не с арифметикой, существующей чисто a priori, а скорее с механикой".

Он пытался проверить экспериментально, путем точных (для того времени) измерений геометрию нашего пространства.

Его идея вдохновила Римана, полагавшего

что наше пространство действительно искривлено (а на малых расстояниях даже дискретно).

Жесткие ограничения на кривизну пространства были получены из астрономических данных Гельмгольцем. Клиффорд считал материю рябью на искривленном пространстве. Однако все эти блестящие догадки и прозрения были явно преждевременны.

Создание современной теории тяготения было немыслимым без специальной теории относительности, без глубокого понимания структуры классической электродинамики, без осознания единства пространства–времени.

Как уже отмечалось, ОТО была создана в основном усилиями одного человека.

Путь Эйнштейна к построению этой теории был долгим и мучительным.

Если его работа 1905 года "К электродинамике движущихся сред" появилась как бы сразу в законченном виде, оставляя вне поля зрения читателя длительные размышления, тяжелый труд автора, то с ОТО дело обстояло совершенно иначе.

Эйнштейн начал работать над ней с 1907 года.

Его путь к ОТО продолжался несколько лет.

Это был путь проб и ошибок, который хотя бы отчасти можно проследить по публикациям Эйнштейна в эти годы.

Окончательно задача была решена им в двух работах, доложенных на заседаниях Прусской Академии наук в Берлине 18 и 25 ноября 1915 года.

В них были сформулированы уравнения гравитационного поля в пустоте и при наличии источников. В последнем этапе создания ОТО принял участие Гильберт, который одновременно и независимо сформулировал уравнения поля с источниками.

Вообще значение математики и математиков для ОТО очень велико.

Ее аппарат, тензорный анализ, или абсолютное дифференциальное исчисление, был развит Риччи и Леви-Чивита.

Друг Эйнштейна, математик Гроссман познакомил его с этой техникой. И все же ОТО – это физическая теория, в основе которой лежит ясный физический принцип, твердо

установленный экспериментальный факт

История появления и развития теории гравитационных волн

Обсудим вкратце теорию гравитационных волн.

Выводы из истории изучения волн

(пока хз)

хронология

в 1900 году Лоренц предположил, что гравитация может распространяться не со скоростью света.
в 1905 Пуанкаре предложил термин "гравитационная волна"
в 1906 Эйнштейн показал, что механическая система должна излучать гравитационная волна с
но немного он ошибался, сферически симметричная система может и не излучать гравитационные волны

про многие сомнения в том, существуют ли гравитационные волны?

даже Эйнштейн постоянно сомневался в том, существуют они или нет?

опыт Джозефа Вебера

интересный опыт, который впервые якобы обнаружил волны.
оказалось, что это шум.
подробно про это.

Сама история изучения волн

(потом на параграфы этапы разделю!)
История самого термина «гравитационная волна», теоретического и экспериментального поиска этих волн, а также их использования для исследований явлений, недоступных иными методами[43].
1900 — Лоренц предположил, что гравитация «...может распространяться со скоростью, не большей скорости света»[44];
1905 — Пуанкаре впервые ввёл термин гравитационная волна (фр. onde gravifique). Пуанкаре на качественном уровне снял устоявшиеся возражения Лапласа[45] и показал, что связанные с гравитационными волнами поправки к общепринятым законам тяготения Ньютона порядка v/c сокращаются, таким образом, предположение о существовании гравитационных волн не противоречит наблюдениям[46];
1916 — Эйнштейн показал, что в рамках ОТО механическая система будет передавать энергию гравитационным волнам и, грубо говоря, любое вращение относительно неподвижных звёзд должно рано или поздно остановиться, хотя, конечно, в обычных условиях потери энергии порядка $1/c^4$ ничтожны и практически не поддаются измерению (в этой работе он ещё ошибочно полагал, что механическая система, постоянно сохраняющая сферическую симметрию, может излучать гравитационные волны)[47];
1918 — Эйнштейн вывел квадрупольную формулу[48], в которой излучение гравитационных волн оказывается эффектом порядка $1/c^5$, тем самым исправив ошибку в своей предыдущей работе (осталась ошибка в коэффициенте, энергия волны в 2 раза меньше[49]);
1923 — Эддингтон — поставил под сомнение физическую реальность гравитационных волн «...распространяются... со скоростью мысли». В 1934 году, при подготовке

русского перевода своей монографии «Теория относительности», Эддингтон добавил несколько глав, включая главы с двумя вариантами расчётов потерь энергии вращающимся стержнем, но отметил, что использованные методы приближенных расчётов ОТО, по его мнению, неприменимы к гравитационно связанным системам, поэтому сомнения остаются[50];

1937 — Эйнштейн совместно с Розеном исследовал цилиндрические волновые решения точных уравнений гравитационного поля. В ходе этих исследований у них возникли сомнения, что гравитационные волны, возможно, являются артефактом приближенных решений уравнений ОТО (известна переписка относительно рецензии на статью Эйнштейна и Розена «Существуют ли гравитационные волны?»[51][52][53]). Позднее он нашёл ошибку в рассуждениях, окончательный вариант статьи с фундаментальными правками был опубликован уже в «Journal of the Franklin Institute»[54];

1957 — Герман Бонди и Ричард Фейнман предложили мысленный эксперимент «трость с бусинками» (англ.)рус. в котором обосновали существование физических последствий гравитационных волн в ОТО

Затем это письмо описывает фейнмановский детектор гравитационных волн: это просто две бусинки, свободно скользящие (но с малым трением) по твёрдому стержню. Когда волны проходят через стержень, атомные силы оставляют длину стержня фиксированной, но соответствующее расстояние между двумя бусинками осциллирует. Таким образом, две бусинки трут стержень, выделяя в результате тепло.[55][56]

1962 — Владислав Пустовойт и Михаил Герценштейн описали принципы использования интерферометров для обнаружения длинноволновых гравитационных волн[57][58];

1964 — Филип Петерс и Джон Мэтью (англ.)рус. теоретически описали гравитационные волны, излучаемые двойными системами[8][59];

1969 — Джозеф Вебер, основатель гравитационно-волновой астрономии, сообщает об обнаружении гравитационных волн с помощью резонансного детектора — механической гравитационной антенны[60][61]. Эти сообщения порождают бурный рост работ в этом направлении во многих странах. В частности, Райнер Вайсс, один из основателей проекта LIGO, начал эксперименты в то время. Ни один из тогдашних опытов, однако, не подтвердил сообщение Вебера.

1978 — Джозеф Тейлор сообщил об обнаружении гравитационного излучения в двойной системе пульсара PSR B1913+16[62]. Исследования Джозефа Тейлора и Рассела Халса заслужили Нобелевскую премию по физике за 1993 год. На начало 2015 года три пост-кеплеровских параметра, включающих уменьшение периода вследствие излучения гравитационных волн, было измерено, как минимум, для 8 подобных систем[63];

2002 — Сергей Копейкин и Эдвард Фомалонт (англ.)рус. произвели с помощью радиоволновой интерферометрии со сверхдлинной базой измерения отклонения света в гравитационном поле Юпитера в динамике, что для некоторого класса гипотетических расширений ОТО позволяет оценить скорость гравитации — отличие от скорости света не должно превышать 20 %;

2006 — международная команда Марты Бургей (англ.)рус. (Обсерватория Паркса (англ.)рус., Австралия) сообщила о существенно более точных подтверждениях ОТО и соответствия ей величины излучения гравитационных волн в системе двух пульсаров PSR J0737-3039A/B[68];

2014 — астрономы Гарвард-Смитсоновского центра астрофизики (BICEP) сообщили об обнаружении первичных гравитационных волн при измерениях флуктуаций реликтового излучения[69][70]. На настоящий момент (2016) обнаруженные флуктуации считаются не имеющими реликтового происхождения, а объясняются излучением пыли в Галактике[69];

2016 — международная коллаборация LIGO сообщила об обнаружении события прохождения гравитационных волн GW150914. Впервые сообщено о прямом наблюдении взаимодействующих массивных тел в сверхсильных гравитационных полях со сверхвысокими относительными скоростями ($v/c > 0,5$), что позволило проверить корректность ОТО с точностью до нескольких постньютоновских членов высоких порядков. Измеренная дисперсия гравитационных волн не противоречит сделанным ранее измерениям дисперсии и верхней границы массы гипотетического гравитона ($< 1{,}2 \times 10^{-22}$ эВ), если он в некотором гипотетическом расширении ОТО будет существовать[18][23].

2017 — впервые зарегистрирован гравитационно-волновой всплеск сопровождаемый электромагнитным излучением, произошедший в результате слияния двух нейтронных звёзд (GW170817).

2019 — впервые зарегистрирован гравитационно-волновой всплеск, произошедший в результате слияния нейтронной звезды и черной дыры (S190426c ВП:БУС).

История

(потом пропишу)
Экспериментальное открытие таких радиационных потерь в 1979 Расселом Халсом и Джозефом Тейлором было первым подтверждением существования гравитационных волн.
В 1991 году авторы открытия были удостоены Нобелевской премии.

Фейнман о гравитационных волнах

(пару вещей про него помню, потом пропишу.)

A noncomprehensive historical overview of the literature on multipole expansion of genera relativistic gravitational fields by Thorne (????)

[Citations in square brackets refer to sections and equations in this article]
A. In Linearized Theory (which totally ignores gravitational forces inside the source of gravitational waves), augmented by "pseudotensor" descriptions of the energy-momentum in the waves:

1. Einstein (1918) derived the "quadrupole-moment formalism" for gravitational-wave generation, including formulas for the metric in the wave zone and for the energy carried off by the waves; but see Ftn. 1 on page 318 [Eqs. (5.27)-(5.30), (4.9), (4.16')].

2. Peters (1964) computed the total angular momentum carried by the quadrupole waves; but see Ftn. 2 on page 319 [Eqs. (4.23)].

3. Papapetrou (1962, 1971) extended Einstein's formalism to include currentquadrupole and mass-octupole radiation, and the energy, linear momentum, and angular momentum carried by the waves [Eqs. (5.27)-(5.30); Sec. IV].

4. Sachs and Bergmann (1958), Sachs (1961), and Pirani (1964) decomposed the general, linearized, vacuum gravitational field into an infinite series of multipole components [Secs. IV.A and VIII].

5. Mathews (1962), Campbell and Morgan (1971), and Campbell, Macek and Morgan (1977) performed this same decomposition, but in different notation; and they augmented it with expressions for all the multipole moments as integrals over the source [Secs. IV.A, VIII, and V.C].

6. Curtis (1978) used Penrose's twistor formalism to define multipole moments.

B. For Slow-Motion Sources with Newtonian Internal Gravity:

1. Landau and Lifshitz (1941) showed that Einstein's quadrupole-moment formulas are valid for such sources [Eqs. (5.27)-(5.30), (4.9), and (4.16')].

2. Alternative derivations of the quadrupole-moment formulas-with emphasis on or exclusive attention to radiation-reaction in the source and the reactioninduced changes in the source's energy, angular momentum, and linear momentum-were given by Peres and Rosen (1960), Peres (1962, including current-quadrupole and mass-octupole contributions), Peters (1964), and with vastly improved rigor by Chandrasekhar and Esposito (1970) [Secs. V.C and IV].

3. Burke (1969, 1971) developed a radiation-reaction formalism that includes all multipole components.

4. This article extends the wave-generation formalism-including the energy, angular momentum, and linear momentum in the waves-to include all multipole components [Secs. V.C and IV].

C. For Slow-Motion Sources with Post-Newtonian Internal Gravity:

1. Epstein and Wagoner (1975) and Wagoner (1977) developed a wave-generation formalism including mass 2-, 3-, 4-, and 5-poles and current 2-, 3-, and 4poles [Secs. V.D and IV].

D. For Slow-Motion Sources with Post-Post-Newtonian Internal Gravity:

1. This article sketches an Epstein-Wagoner type of wave-generation formalism including all multipole components [Secs. V.E and IV].

E. For Time-Independent Sources with Arbitrarily Strong Gravity:

1. Van der Burg (1968), Geroch (1970), Hansen (1974), Clarke and Sciama (1971), and this article [Secs. X and XI] gave definitions of complete sets of multipole moments ("mass moments" and "current moments") and proofs that they fully determine the structure of the vacuum gravitational field, including its nonlinearities. However, nobody has yet elucidated the relationships between the various definitions of multipole moments.

2. Xanthopoulos (1979) proved that a time-independent system is static (its Killing vector is hypersurface orthogonal) if and only if its current multipole moments all vanish.

3. Hoenselaers, Kinnersley, and Xanthopoulos (1979) developed a method for generating the exact solution to the vacuum Einstein field equations with any arbitrary choice for the values of the multipole moments. For further details see Cosgrove (1980).

4. This article [Secs. IX. D, IX. E, IX. F, and X] develops a "nonlinearity expansion" for the general exact solution to the vacuum field equations-an expansion that exhibits the nonlinear coupling of the multipole moments.

5. Dixon (1970, 1977) defined multipole moments for a source that resides in a curved background spacetime rather than being alone in asymptotically flat spacetime.

F. For Slow-Motion Sources with Arbitrarily Strong Internal Gravity:

1. This article shows that the Einstein quadrupole-moment wave-generation formulas, and their generalizations to include higher multipole moments [Secs. A and B of this Box] are valid for such sources [Part Two].

2. Bonnor and Rotenberg (1966), Morgan (1971), and this article [Sec. IX] investigated some features of the nonlinear structure of the near-zone gravitational field.

3. This article [Sec. V.B] expresses the multipole moments as integrals over the source-under the restrictive assumption that the source can be covered by a nonsingular de Donder coordinate system.

G. For Sources with Arbitrary Time Dependence and Arbitrarily Strong Internal Gravity:

1. Janis and Newman (1965), Lamb (1966), Bonnor and Rotenberg (1966), and this article [Sec. IV] gave definitions of complete sets of multipole moments for the radiation field.

2. Bondi, van der Burg, and Metzner (1962) and Sachs (1962) gave an expression for the total energy carried off by the waves and proved theorems about the asymptotic structure of the gravitational field at future null infinity. For reviews of this and later, related work see Sachs (1964) and Penrose (1964, 1968).

3. This article [Sec. IV] gives expressions for the total energy, linear momentum, and angular momentum carried off by the waves.

4. Newman and Penrose (1968) and Bardeen and Press (1973) analyzed backscatter and tails in the radiation field.

5. Bontz and Price (1979) and Wagoner (1979) investigated the low-frequency portion of the gravitational-wave spectrum.

6. Ashtekar and Hansen (1978) developed the beginnings of a unified treatment of spatial and null infinity.

О теориях гравитации до Ньютона

(там чего только люди не думали, укажу интересные истории потом для полноты.)

B Some Mathematics

Обсудим минимально, но достаточно глубоко, всю математику, необходимую для профессионального занятий гравитацией.
(просто это в диффгеме и в других местах написано, так что тут - коротко суть для гравитации)

B.1 Riemannian Geometry

(после записи по геометрии лучше пойму, что тут нужно оставлять для ОТО, а что убрать)

B.1.1 Basics of Differential Geometry

Основные понятия геометрии

Определим типичные конструкции геометрии.
(тут всякие определения того, что итак понятно по идее должно быть)

Касательное пространство

(Определение касательного пространства и все детали. пропишу позже.)

Определение многообразия

классика

Пример, когда нужно понимать определение многообразия

хз кстати.

Конструкция векторных полей на многообразии

коммутатор векторных полей (???)

что это вообще такое????

Криволинейные координаты

Обсудим вмеру подробно, что есть криволинейные координаты и как в них работать.

Формулы криволинейных координат

Преобразование одной системы координат x^0, x^1, x^2, x^3 в другую x'^0, x'^1, x'^2, x'^3 типично задается так:

$$x^i = f^i\left(x'^0, x'^1, x'^2, x^3\right),$$

где f^i - некоторые функции.
(добавлю позже их.)

Векторы и тензоры

Контравариантный и ковариантный 4-вектора

Контравариантным 4-вектором называются любые четыре величины A^i, которые при преобразовании координат преобразуются как:

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k$$

Именно это видно при преобразованиях дифференциалов:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k$$

Ковариантным 4-вектором называется всякая совокупность четырех величин A_i, которые при преобразовании координат преобразуются как производные от скаляра:

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k$$

Пусть φ - некоторый скаляр. Производные $\partial\varphi/\partial x^i$ при преобразовании координат преобразуются согласно формулам

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}$$

Контравариантные A^{ik}, ковариантные A_{ik} и смешанные A^i_k 4-тензоры 2-го ранга

Контравариантным 4-тензором 2-го ранга A^{ik} называется совокупность 16 величин, преобразующихся как произведения двух контравариантных векторов, т.е. по закону

$$A^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} A'^{lm}$$

Ковариантный тензор 2-го ранга A_{ik} преобразуется как:

$$A_{ik} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A'_{lm}$$

Смешанный 4-тензор $A^i{}_k$ преобразуется как:

$$A^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A'^l_m.$$

Данные определения являются естественным обобщением определений 4 -векторов и 4 -тензоров в галилеевых координатах, согласно которым дифференциалы dx^i тоже составляют контравариантный, а производные $\partial\varphi/\partial x^i$ - ковариантный 4-вектор.

Правила образования 4-тензоров путем перемножения или упрощения произведений других 4-тензоров остаются в криволинейных координатах теми же, что и в галилеевых координатах.

Свойства 4-векторов

Скалярное произведение двух 4 -векторов инвариантно

В силу законов преобразования ко- и контра-вариантных 4-векторов, скалярное произведение двух $A^i B_i$ действительно инвариантно:

$$A^i B_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} A'^l B'_m = \frac{\partial x'^m}{\partial x'^l} A'^l B'_m = A'^l B'_l$$

(?? тут чуть не понял последний переход, потом подумаю)

Это важно, потому что мы можем строить с помощью таких комбинаций скаляры (??? да??? пока хз, зачем это)

Единичный 4-тензор в криволинейных координатах

Единичный 4-тензор δ^i_k в криволинейных координатах как и в декартовых: $\delta^i_k = 0$ при $i \neq k$, а при $i = k$ равны 1.

Если A^k есть 4-вектор, то при умножении на δ^i_k мы получим:

$$A^k \delta^i_k = A^i$$

т.е. снова 4-вектор; этим и доказывается, что δ^i_k является тензором.

(не оч зашло пока доказательство)

Длина в искривленном пространстве

(в другое место потом перенесу)

Квадрат элемента длины в криволинейных координатах есть квадратичная форма дифференциалов dx^i:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

где g_{ik} - функции координат; g_{ik} симметричны по индексам i и k:

$$g_{ik} = g_{ki}$$

Поскольку произведение (упрощенное) g_{ik} на контравариантный тензор $dx^i dx^k$ есть скаляр, то g_{ik} составляют ковариантный тензор; он называется метрическим тензором.

Обратный тензор

(??? тут многое можно дополнить и дописать!!!)

Два тензора A_{ik} и B^{ik} называются обратными друг другу, если

$$A_{ik} B^{kl} = \delta^l_i$$

В частности, контравариантным метрическим тензором g^{ik} называется тензор, обратный, тензору g_{ik}, т.е.

$$g_{ik} g^{kl} = \delta^l_i$$

Для тензоров

$$A^i{}_k = g^{il} A_{lk}, \quad A^{ik} = g^{il} g^{km} A_{lm}$$

и т.п.

Поднятие и опускание индексов

Одна и та же векторная физическая величина может быть представлена как в контра-, так и в ковариантных компонентах. Такая связь дается формулами

$$A^i = g^{ik} A_k, \quad A_i = g_{ik} A^k$$

В галилеевой системе координат метрический тензор имеет компоненты:

$$\eta_{ik} = \eta^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому получаем связь $A^0 = A_0, A^{1,2,3} = -A_{1,2,3}$

Четырехмерный Леви-Чивита e^{iklm}

(??? в записи по математике про это укажу лучше, еще не писал!)

Свертки по индексам

Положим $e^{0123} = +1$, при этом $e_{0123} = -1$. Имеем

$$e^{iklm}e_{iklm} = -24$$

Действительно, все отличные от нуля компоненты e^{iklm} равны $+1$ или -1, смотря по тому, четным или нечетным числом перестановок могут быть приведены числа i, k, l, m к последовательности $0, 1, 2, 3$. Число таких компонент равно $4! = 24$. Поэтому $e^{iklm}e_{iklm} = -24$.

Известно, что

$$e^{iklm}e_{prst} = -\begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_r & \delta^i_s & \delta^i_t \\ \delta^k_p & \delta^k_r & \delta^k_s & \delta^k_t \\ \delta^l_p & \delta^l_r & \delta^l_s & \delta^l_t \\ \delta^m_p & \delta^m_r & \delta^m_s & \delta^m_t \end{vmatrix},$$

$$e^{iklm}e_{prsm} = -\begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_r & \delta^i_s \\ \delta^k_p & \delta^k_r & \delta^k_s \\ \delta^l_p & \delta^l_r & \delta^l_s \end{vmatrix},$$

$$e^{iklm}e_{prlm} = -2\left(\delta^i_p\delta^k_r - \delta^i_r\delta^k_p\right),$$

$$e^{iklm}e_{pklm} = -6\delta^i_p,$$

что можно доказать проводя свертку (??? сделаю потом хотя бы раз это). В них можно удостовериться, произведя полную свертку, и получив число -24.

Связи 4-d Леви-Чивита с определителями

Как следствие формулы $e^{iklm}e_{prst}$, (????) имеем:

$$e^{prst}A_{ip}A_{kr}A_{ls}A_{mt} = -Ae_{iklm}, e^{iklm}e^{prst}A_{ip}A_{kr}A_{ls}A_{mt} = 24A,$$

где A - определитель, составленный из величин A_{ik}. Поэтому можно так вот переходить к определителю матрицы. Это свойство очень используется, например, в доказательстве Леви-Чивиты в криволинейных координатах (?? где ещё?).

Тензор Леви-Чивиты e^{iklm} в криволинейных координатах

В криволинейных координатах единичный антисимметричный тензор 4-го ранга Леви-Чивиты E^{iklm} определяется как

$$E^{iklm} = \frac{1}{\sqrt{-g}}e^{iklm}$$

Докажем это. Пусть у нас есть замена координат $\vec{x'} = F(\vec{x})$. Тензор Леви-Чивиты в галилеевых e^{iklm} координатах преобразуется в криволинейные как

$$E^{iklm} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^p}\frac{\partial x'^k}{\partial x^r}\frac{\partial x'^l}{\partial x^s}\frac{\partial x'^m}{\partial x^t}e^{prst}$$

или (?????? а вот тут не понял, как так индексы заменились??? нужно доучить определители!)

$$E^{iklm} = Je^{iklm}$$

где J - определитель, составленный из производных $\partial x^i/\partial x'^p$, или якобиан $J = \frac{\partial(x'^0,x'^1,x'^2,x'^3)}{\partial(x^0,x^1,x^2,x^3)}$. Найдем его из преобразования метрики $g^{ik} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x'^k}{\partial x^m}\eta^{lm}$. Для этого просто вычислим определители левой и правой части. Определитель обратного тензора $\left|g^{ik}\right| = 1/g$, определитель $\left|\eta^{lm}\right| = -1$. Поэтому $1/g = -J^2$, откуда $J = 1/\sqrt{-g}$. Получаем,

$$E^{iklm} = \frac{1}{\sqrt{-g}}e^{iklm}.$$

Его ковариантные компоненты равны

$$E_{iklm} = \sqrt{-g}e_{iklm},$$

потому что опускание индексов осуществляется с помощью формулы $e^{prst}g_{ip}g_{kr}g_{ls}g_{mt} = -ge_{iklm}$.

(?? опять я что-то не догоняю до этих переходов индексов!!! как в конце перешли мы???)

Якобиан перехода

(?? отдельно про него есть смысл говорить?)
якобиан преобразования от галилеевых координат к криволинейным:

$$J = \frac{\partial\left(x^0,x^1,x^2,x^3\right)}{\partial\left(x'^0,x'^1,x'^2,x'^3\right)}$$

Этот якобиан можно выразить через определитель метрического тензора g_{ik} (в системе x^i).

Для этого пишем формулу преобразования метрического тензора:

$$g^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l}\frac{\partial x^k}{\partial x'^m}g^{lm(0)}$$

и приравниваем определители, составленные из величин, стоящих в обеих сторонах этого равенства, получаем

$$J = \frac{1}{\sqrt{-g}}.$$

Площади поверхностей (?)

(не готов писать, в диффгеме сперва напишу.)

B.1.2 Typical Constructions of Differential Geometry

Приведем дополнительную теорию дифференциальной геометрии, изредка нужную в ОТО.

(то, что когда-то встретилось мне и нужно было - сюда вставляю, пока не решу добавлять в структуру выше.)

Производная Ли

Суть производной Ли

(тут вкратце о ней)

Обзор применений производной Ли в ОТО (???!!!)

встречается в полях киллинга
вообще, не уверен, насколько ее нужно для ОТО знать, потом пойму.

Векторные поля Киллинга

(???)

основные методы работы с полями Киллинга

определение полей Киллинга

такие поля, что производная Ли по метрики вдоль них равна 0,
а это и пишется как

$$\zeta_{\mu;\nu} + \zeta_{\nu;\mu} = 0.$$

то есть $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$

Применения векторов Киллинга (???)

Если нет вектора Киллинга, то нет симметрий, а значит, нельзя написать законы сохранения.
(??? почему так??? так типично говорят.)

коммутатор двух векторных полей Киллинга - тоже векторное поле Киллинга

(зачем это нужно???)
Для двух полей Киллинга

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0 \quad \eta_{\mu;\nu} + \eta_{\nu;\mu} = 0$$

поле, являющееся их коммутатором $\zeta = [\xi, \eta]$ также является полем Киллинга

$$\zeta_{\mu;\nu} + \zeta_{\nu;\mu} = 0$$

Proof. расписываем $\zeta_{\mu;\nu} + \zeta_{\nu;\mu}$ через ковариантные производные.
(???????)

□

алгебра полей киллинга (???)

и что с этим?
также поля киллинга образуют алгебру.

поиск всевозможных полей (???)

нужно найти вообще все поля, которые удовлетворяют $\zeta_{\mu;\nu} + \zeta_{\nu;\mu} = 0$
доказывается это тем, что сперва константы смотрим - все хорошо, для первого порядка смотрим - что-то тоже мы получили.
(хз, как сделать это?)

примеры полей Киллинга в ОТО

(?? сперва в нужных местах встрою, потом сюда перенесу)
В сферических координатах векторы Киллинга J_i имеют вид

$$J_x = \sin\varphi\partial_\vartheta + \operatorname{ctg}\vartheta\cos\varphi\partial_\varphi, \quad J_y = -\cos\varphi\partial_\vartheta + \operatorname{ctg}\vartheta\sin\varphi\partial_\varphi, \quad J_z = -\partial_\varphi$$

обзор симметрий

определение

что такое симметрии
такие преобразования, которые сохраняют что-то.

количество симметрий в общем случае (???)

симметрии какие-то у нас их $d + \frac{d(d-1)}{2}$, говорит, что всегда если пространство погружаем куда-то, то столько всегда симметрий.
у гиперболоида сколько симметрий???
типа у сферы столько же симметрий, сколько и у плоскости.
поля Киллинга можно задать на сфере, вложив d мерную сферу в объемлющее пространство, а дальше $\xi^\mu = b^m u_\nu x^\nu$.

поиск симметрий с помощью полей Киллинга

поля киллинга нужны для симмтерий.
(потом разовью эту мысль, зачем?)

(???) симметрии стационарных задачи и поля киллинга

есть стационарные задачи, когда параметры не зависят от времени. а в искривленном пространстве времени это что?
$g^{\mu\nu}(x^1, ..., x^{d-1})$ - не зависит от x_0
то есть стационарная задача - если существует одно поле киллинга.
(понятно, что там какая-то связь есть, погуглю.)
если найти можно времени подобный вектор киллинга - то ее можно представить в виде координат.

B.1.3 Vector Analysis

Приведем формулы векторного анализа, используемые в гравитации с указанием применений.

Формулы усреднения для гравитации

Обсудим необходимые формулы усреднения.

Среднее двух векторов $\overline{n_\alpha n_\beta}$

$$\overline{n_\alpha n_\beta} = \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}.$$

Действительно, тензор $\overline{n_\alpha n_\beta}$ симметричный, так что он может выражаться только через единичный тензор $\delta_{\alpha\beta}$. Коэффициент находим из того, что его след равен 1.
(? где нужно в гравитации?)

Среднее произведения четырех компонент $\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta}$

$$\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta} = \frac{1}{15}\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}\right)$$

(???? ниже общие замечания пока не понимаю.) Правая сторона составляется из единичных тензоров как тензор четвертого ранга, симметричный по всем индексам; общий

коэффициент определяется затем путем свертывания по двум парам индексов, которое должно дать в результате 1.
(???? укажу приложения в грав излучении)

Усреднение двух единичных тензоров (?)

(хз, почему это так, но в гравитационных волнах это нужно)
Усреднение осуществляется формулой

$$\overline{e_{\alpha\beta}e_{\gamma\delta}} = \frac{1}{4}\big\{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta + (n_\alpha n_\beta \delta_{\gamma\delta} + n_\gamma n_\delta \delta_{\alpha\beta}) - \\ - (n_\alpha n_\gamma \delta_{\beta\delta} + n_\beta n_\gamma \delta_{\alpha\delta} + n_\alpha n_\delta \delta_{\beta\gamma} + n_\beta n_\delta \delta_{\alpha\gamma}) - \\ -\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + (\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\beta\gamma}\delta_{\alpha\delta})\big\}$$

(???? укажу приложения в грав излучении)

div, rot, grad для ОТО

(тут из теорпола скопирую, пока там пишу)

Оператор Лапласа для ОТО

(мб в другой раздел перенесу, ибо это к умф относится больше)

Основные формулы оператора Лапласа

(потом пропишу)

Оператор Лапласа в случае гравитационной волны

(тут хорошая теория от Сидоренко, потом повторю это, вроде на самом деле нормально получилось у него)

Интегрирование в криволинейных координатах (?)

(не готов писать про это.)

B.1.4 Metric

Метрика и её основные свойства

Обсудим в деталях метрику.

Определение метрики (?!!!)

Полезно четко помнить, какое определение метрики, ибо она настолько часто встречается, что можно и забыть его.
(спишу вергелеса или др.)
Метрика:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = g_{AB}\omega^A\omega^B$$

О том, поле ли метрика

(где-то посмотрю вопрос про это, наверняка многие это знают.)

Формула $\operatorname{tr}(G^{-1}\partial G) = \partial \log\det G$

(так и не понял, откуда она, тут пропишу подробно)

Связи производных от g^{ik} с производными g_{ik}

$$g_{il}\frac{\partial g^{lk}}{\partial x^m} = -g^{lk}\frac{\partial g_{il}}{\partial x^m}$$

Действительно, продифференцируем равенство $g_{il}g^{lk} = \delta^k_l$.

(????)

Дополнения о метрике

(тут всё разное, которое еще известно и может использоваться в ОТО, но не обязательно знать)

Разница между определенности сигнатуры и определенности g_{00}

Необходимо подчеркнуть разницу между смыслом условия $g_{00} > 0$ и смыслом условия об определенной сигнатуре g_{ik}.

Тензор g_{ik}, не удовлетворяющий второму из этих условий, вообще не может соответствовать какому бы то ни было реальному гравитационному полю, т.е. метрике реального пространства-времени.

Невыполнение же условия положительности нулевой компоненты означало бы лишь, что соответствующая система отсчета не может быть осуществлена реальными телами; (?? поч?)

если условие о главных значениях при этом выполняется, то надлежащим преобразованием координат можно добиться того, что g_{00} станет положительным

Например, вращающаяся система координат.... (хз) (!!! посмотрю!!!)

О сигнатурах метрики

(станет актуальным - разберусь. там что-то разные есть и даже путаются в этом)

О пространствах без метрики (???!!)

(такие тоже есть, не знаю, что сказать про них. узнаю что-нибудь - сюда пропишу.)

Обзор типичных ошибок при понимании и работе с метрикой

(тут по-разному можно её понимать, особенно когда профессионально занимаешься ОТО. так что раздел важный, заполню его потом)

О массе метрики

(Никита Некрасов сказал, что есть какие-то теории, которые придают массу метрике, я хз, почему.)

Тетрады (???)

(у Вергелеса это всё в раздел про связность, так что я пока там писать буду, потом посмотрим. чего еще не выгрузил это?? хз.)

Суть (???)

Тетрадный постулат (???)

(на него ссылок много)

Объемы и площади в криволинейных координатах

(пока всё про них тут, потом посмотрим)

суть риманова объема

(???)

$$dV = d^d\sqrt{|g|}$$

так и не понял, почему именно он нужен.

форма риманова объема

Познакомимся с формой риманова объема и научимся ее применять

$$dV = \frac{1}{d!}\sqrt{|g|}\varepsilon_{\mu_1\dots\mu_d}dx^{\mu_1}\otimes\dots\otimes dx^{\mu_d} = \sqrt{|g|}dx^0\wedge\dots\wedge dx^{d-1}$$

еще диффгем

$$\nabla_\lambda\left(\sqrt{|g|}\varepsilon_{\mu_1\dots\mu_d}\right) = \left(\partial_\lambda\sqrt{|g|} - \sqrt{|g|}\Gamma^\mu_{\lambda\mu}\right)\varepsilon_{\mu_1\dots\mu_d}$$

что такое G????

$$\operatorname{tr}\left(G^{-1}\partial G\right) = \partial\log\det G$$

Объем

В галилеевой системе координат x'^i интеграл от скаляра по $d\Omega' = dx'^0dx'^1dx'^2dx'^3$ тоже есть скаляр, т.е. элемент $d\Omega'$ ведет себя при интегрировании как скаляр.

При преобразовании к криволинейным координатам x^i элемент интегрирования $d\Omega'$ переходит в

$$d\Omega' \to \frac{1}{J}d\Omega = \sqrt{-g}d\Omega$$

Таким образом, в криволинейных координатах у произведение $\sqrt{-g}d\Omega$ ведет себя как инвариант при интегрировании по 4-объем.

Все сказанное в конце §6 относительно элементов интегрирования по гиперповерхности, поверхности и линии остается в силе и в криволинейных координатах, с тем только отличием, что несколько меняется определение дуальных тензоров.

Элемент «площади» гиперповерхности

Элемент «площади» гиперповерхности, построенный на трех бесконечно малых смещениях, есть контравариантный антисимметричный тензор dS^{ikl};

дуальный ему вектор получается при умножении на тензор $\sqrt{-g}e_{iklm}$, т.е. равен

$$\sqrt{-g}dS_i = -\frac{1}{6}e_{iklm}dS^{klm}\sqrt{-g}$$

Аналогично, если df^{ik} есть элемент поверхности (двухмерной), построенный на двух бесконечно малых смещениях, то дуальный ему тензор определяется как

$$\sqrt{-g}df^*_{ik} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}e_{iklm}df^{lm}$$

Мы оставляем здесь обозначения dS_i и $df^*{}_{ik}$, как и прежде, соответственно для $\frac{1}{6}e_{klmi}dS^{klm}$ и $\frac{1}{2}e_{iklm}df^{lm}$ (а не для их произведений на $\sqrt{-g}$); правила (6.14)-(6.19) для преобразования различных интегралов друг в друга остаются тогда теми же самыми, поскольку их вывод имеет формальный характер, не связанный с тензорными свойствами соответствующих величин.

Из них нам в особенности понадобится правило преобразования интеграла по гиперповерхности в интеграл по 4-объему (теорема Гаусса), осуществляющегося заменой

$$dS_i \to d\Omega\frac{\partial}{\partial x^i}$$

Примеры вычислений объемов

(с опытом добавлю примеры)

B.1.5 Covariant Derivative

Обсудим подробно необходимую для ОТО теорию ковариантной производной.

Основная теория

Основные формулы ковариантного дифференцирования

Подставляя???(85.2) и $dA^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^l}dx^l$ в (85.1), имеем:

$$DA^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl}A^k\right)dx^l$$

Аналогично находим для ковариантного вектора:

$$DA_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il}A_k\right)dx^l$$

Выражения, стоящие в скобках выше, являются тензорами, так как умноженные на вектор dx^l они дают снова вектор.

Они и являются теми тензорами, которые осуществляют искомое обобщение понятия производной от вектора на криволинейные координаты.

Эти тензоры носят название ковариантных производных соответственно векторов A^i и A_i.

Таким образом,

$$DA^i = A^i_{;l}dx^l, \quad DA_i = A_{i;l}dx^l$$

а сами ковариантные производные:

$$A^i_{;l} = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl}A^k$$
$$A_{i;l} = \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il}A_k$$

В галилеевых координатах $\Gamma^i_{kl} = 0$ и ковариантные производные переходят в обычные.

В криволинейных координатах dA_i не есть вектор, $\partial A_i/\partial x^k$ не есть тензор

В отличие от галилеевых, где дифференциалы dA_i вектора A_i образуют вектор, а производные $\partial A_i/\partial x^k$ от компонент вектора по координатам образуют тензор.

Это связано с тем, что dA_i есть разность векторов, находящихся в разных (бесконечно близких) точках пространства;

в разных же точках пространства векторы преобразуются различно, так как коэффициенты в формулах преобразования (83.2)????, (83.4) являются функциями координат.

Действительно, посмотрим на формулы преобразования дифференциалов dA_i в криволинейных координатах.

Ковариантный вектор преобразуется согласно формулам

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k$$

поэтому

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k d\frac{\partial x'^k}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + A'_k \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} dx^l$$

Только в случае, если вторые производные $\frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} = 0$, т.е. если x'^k являются линейными функциями от x^k, формулы преобразования имеют вид

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k$$

т.е. dA_i преобразуется как вектор.

Сравнение векторов при параллельном переносе (???)

Мы займемся теперь определением тензора, который играет в криволинейных координатах роль тензора $\partial A_i/\partial x^k$ в галилеевых координатах.

Другими словами, мы должны преобразовать $\partial A_i/\partial x^k$ от галилеевых координат к криволинейным.

Для того чтобы получить в криволинейных координатах дифференциал вектора, являющийся вектором, надо, чтобы оба вычитаемых один из другого вектора находились в одной точке пространства. То есть надо каким-то образом «перенести» один из двух бесконечно близких векторов в точку, где находится второй, после чего определить разность обоих векторов, относящихся теперь к одной и той же точке пространства.

Сама операция переноса должна быть при этом определена таким образом, чтобы в галилеевых координатах указанная разность совпадала с обычным дифференциалом dA_i.

Поскольку dA_i есть просто разность компонент двух бесконечно близких векторов, то это значит, что в результате операции переноса при пользовании галилеевыми координатами компоненты вектора не должны изменяться.

Но такой перенос есть не что иное, как перенос вектора параллельно самому себе.

При параллельном переносе вектора его компоненты в галилеевых координатах не меняются; если же пользоваться криволинейными координатами, то при таком переносе компоненты вектора, вообще говоря, изменятся.

Поэтому в криволинейных координатах разность компонент обоих векторов после перенесения одного из них в точку, где находится второй, не будет совпадать с их разностью до переноса (т.е. с дифференциалом dA_i).

Таким образом, при сравнении двух бесконечно близких векторов мы должны один из них подвергнуть параллельному переносу в точку, где находится второй.

Рассмотрим какой-нибудь контравариантный вектор; если его значение в точке с координатами x^i есть A^i, то в соседней точке $x^i + dx^i$ он равен $A^i + dA^i$.

Вектор A^i подвергнем бесконечно малому параллельному переносу в точку $x^i + dx^i$; его изменение при этом обозначим посредством δA^i.

Тогда разность DA^i между обоими векторами, находящимися теперь в одной точке, равна

$$DA^i = dA^i - \delta A^i$$

Изменение δA^i компонент вектора при бесконечно малом параллельном переносе зависит от величины самих компонент, причем эта зависимость должна быть линейной.

Это следует непосредственно из того, что сумма двух векторов должна преобразовываться по тому же закону, что и каждый из них.

Таким образом, δA^i имеет вид

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{kl} A^k dx^l$$

где Γ^i_{kl} - некоторые функции координат, вид которых зависит, конечно, от выбора системы координат; в галилеевой системе все $\Gamma^i_{kl} = 0$.

(??? не понял)

символы Кристоффеля не тензор

Величины Γ^i_{kl} не образуют тензора, так как тензор, равный нулю в одной системе координат, равен нулю и во всякой другой.

В искривленном пространстве нельзя, конечно, никаким выбором координат обратить все Γ^i_{kl} везде в нуль.

(?? кст, почему?)

Принцип эквивалентности требует, чтобы надлежащим выбором системы координат можно было исключить гравитационное поле в данном бесконечно малом участке пространства, т.е. обратить в нем в нуль величины Γ^i_{kl}, играющие роль напряженностей гравитационного поля. (???)

Мы будем ниже пользоваться также и величинами $\Gamma_{i,kl}$, определяемыми следующим образом:

$$\Gamma_{i,kl} = g_{im}\Gamma^m_{kl}$$

Обратно:

$$\Gamma^i_{kl} = g^{im}\Gamma_{m,kl}$$

изменение компонент ковариантного вектора при параллельном переносе через символы Кристоффеля

Изменение компонент ковариантного вектора при параллельном переносе имеет вид:

$$\delta A_i = \Gamma^k_{il} A_k dx^l,$$

Для этого заметим, что при параллельном переносе скаляры, не меняются.

В частности, не меняется при параллельном переносе скалярное произведение двух векторов.

Пусть A_i и B^i - некоторый ковариантный и некоторый контравариантный векторы.

Тогда из $\delta\left(A_i B^i\right) = 0$ имеем:

$$B^i \delta A_i = -A_i \delta B^i = \Gamma^i_{kl} B^k A_i dx^l$$

или, меняя обозначение индексов,

$$B^i \delta A_i = \Gamma^k_{il} A_k B^i dx^l$$

Отсюда имеем ввиду произвольности B^i:

$$\delta A_i = \Gamma^k_{il} A_k dx^l,$$

чем и определяется изменение ковариантного вектора при параллельном переносе.

Ковариантная производная от тензора

Легко определить также ковариантную производную от тензора, для этого надо определить изменение тензора при бесконечно малом параллельном переносе.

Рассмотрим, например, какой-нибудь контравариантный тензор, являющийся произведением двух контравариантных векторов A^iB^k.

При параллельном переносе имеем:

$$\delta\left(A^iB^k\right) = A^i\delta B^k + B^k\delta A^i = -A^i\Gamma^k_{lm}B^l dx^m - B^k\Gamma^i_{lm}A^l dx^m$$

В силу линейности этого преобразования, оно должно иметь место и для любого тензора A^{ik}:

$$\delta A^{ik} = -\left(A^{lm}\Gamma^k_{ml} + A^{mk}\Gamma^i_{ml}\right)dx^l$$

Подставляя это в

$$DA^{ik} = dA^{ik} - \delta A^{ik} \equiv A^{ik}{}_{;l}dx^l,$$

находим ковариантную производную тензора A^{ik} в виде

$$A^{ik}_{;l} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml}A^{mk} + \Gamma^k_{ml}A^{im}$$

Совершенно аналогично находим ковариантные производные смешанного и ковариантного тензоров в виде

$$A^i_{k;l} = \frac{\partial A^i_k}{\partial x^l} - \Gamma^m_{kl}A^i_m + \Gamma^i_{ml}A^m_k$$
$$A_{ik;l} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^m_{il}A_{mk} - \Gamma^m_{kl}A_{im}$$

Аналогичным образом можно определить ковариантную производную тензора любого ранга.

(? пока не въехал в эту аналогию)

То есть, ковариантная производная тензора $A^{\cdots}_{\cdots}$ по x^l, есть добавление к обычной производной $\partial A\cdots/\partial x^l$ на каждый ковариантный индекс i $(A^{\cdots}_{\cdot i\cdot})$ члена $\Gamma^k_{il}A'_{\cdot k\cdot}$, а на каждый контравариантный индекс i $(A^{i\cdot}_{\cdots})$ - члена $+\Gamma^i_{kl}A^{k\cdot}_{\cdots}$

Ковариантная производная произведения векторов и скаляра

(это ведь из определения следует, нет?)

Можно легко убедиться в том, что ковариантная производная от произведения находится по тем же правилам, что и обычная производная от произведения.

При этом ковариантную производную от скаляра φ надо понимать как обычную производную, т.е. как ковариантный вектор $\varphi_k = \partial\varphi/\partial x^k$, в согласии с тем, что для скаляров $\delta\varphi = 0$ и потому $D\varphi = d\varphi$.

Например, ковариантная производная произведения A_iB_k равна

$$(A_iB_k)_{;l} = A_{i;l}B_k + A_iB_{k;l}$$

Поднимая у ковариантных производных индекс, указывающий дифференцирование, мы получим так называемые контравариантные производные.

Так,

$$A_i{}^{;k} = g^{kl}A_{i;l}, \quad A^{i;k} = g^{kl}A^i_{;l}$$

Ковариантная производная через метрику

(по Вергелесу)
Выпишем в Римановом пространстве величину $\nabla_\mu J^\mu$ для векторного поля, которая является аналогом дивергенции

$$\nabla_\mu J^\mu = \frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\mu_{\nu\mu} J^\nu$$

где $\Gamma^\mu_{\nu\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}$.
Тогда $\mathrm{d}g = g g^{\mu\nu} \mathrm{d}g_{\mu\nu}$. Действительно, $g g^{\mu\nu}$ есть минор элемента $g_{\mu\nu}$ в соответствующем определителе.
При вычислении величины $\mathrm{d}g$ следует взять сумму всех дифференциалов $\mathrm{d}g_{\mu\nu}$, умноженных на свои миноры. Поэтому

$$g^{\mu\sigma} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} = g^{-1} \frac{\partial g}{\partial x^\nu}, \quad \Gamma^\mu_{\nu\mu} = \frac{\partial \ln \sqrt{|g|}}{\partial x^\nu}$$

Отсюда

$$\nabla_\mu J^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{|g|} J^\mu \right)$$

Оператор д'Аламбера в Римановом пространстве

Оператор д'Аламбера в римановом пространстве от скалярного поля ϕ имеет вид:

$$-\Box \phi \equiv \phi^{;\mu}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \right)$$

(??? поч??)

Ковариантная производная от симметричного тензора

Нам понадобится также формула для $\nabla_\nu T^\nu_\mu$, где $T^{\mu\nu}$ - симметричный тензор. Имеем по определению

$$\nabla_\nu T^\nu_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} T^\nu_\mu + \Gamma^\nu_{\lambda\nu} T^\lambda_\mu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} T^\nu_\lambda = \frac{\partial}{\partial x^\nu} T^\nu_\mu + T^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \ln \sqrt{|g|} - \Gamma_{\lambda\mu\nu} T^{\lambda\nu}$$

но, так как $T^{\lambda\nu} = T^{\nu\lambda}$, то

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} T^{\lambda\nu} = \frac{1}{2} \left(\Gamma_{\lambda\mu\nu} + \Gamma_{\nu\mu\lambda} \right) T^{\lambda\nu} = \frac{1}{2} T^{\lambda\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\lambda\nu}$$

Поэтому

$$\nabla_\nu T^\nu_\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\sqrt{|g|} T^\nu_\mu \right) - \frac{1}{2} T^{\lambda\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} g_{\lambda\nu}$$

Формула для $\nabla_\mu J^\mu$ имеет другой вид. Рассмотрим $(n-1)$ - форму

$$\omega_J = \frac{1}{(n-1)!} E_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} J^{\mu_1} \, \mathrm{d}x^{\mu_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_n}$$

где $J^\mu(x)$ - компоненты векторного поля, а $E_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n}(x)$ - абсолютно антисимметричный псевдотензор в кривом пространстве:

$$E_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n}(x) = \sqrt{|g(x)|} \varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n}$$

где $\varepsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}$ - символ Леви-Чивиты.

(??? почему именно так, а не деление на метрику, как в ЛЛ2??)

Легко найти результат преобразования совокупности величин (2.97) при переходе к другим локальным координатам, если эту совокупность величин подвергнуть тем же преобразованиям, что и тензор типа $(n, 0)$:

$$E_{\mu'_1\ldots\mu'_n}\left(x\left(x'\right)\right) = \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\mu'_1}}\ldots\frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x^{\mu'_n}}\sqrt{|g(x)|}\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_n} = \det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)\sqrt{|g(x)|}\varepsilon_{\mu'_1\ldots\mu'_n}$$

Учтём, что

$$g_{\mu'\nu'}\left(x'(x)\right) = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}}g_{\mu\nu}(x) \quad \rightarrow \quad g'\left(x'(x)\right) = \left[\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)\right]^2 g(x)$$

Сопоставляя (2.98) и (2.99), находим:

$$E_{\mu'_1\ldots\mu'_n}\left(x\left(x'\right)\right) = \pm\sqrt{|g'\left(x'\right)|}\varepsilon_{\mu'_1\ldots\mu'_n}$$

здесь справа знак определяется знаком величины $\det\left(\partial x/\partial x'\right)$.

Тем самым установлено, что совокупность числовых величин (2.97) и величина (2.96) являются псевдотензором и глобальной $(n-1)$-формой, соответственно. Вычислим внешний дифференциал формы ω_J:

$$\mathrm{d}\omega_J = \left[\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{|g|}J^{\mu_1}\right)\right] \times \left[\frac{1}{(n-1)!}\sqrt{|g|}\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_n}\,\mathrm{d}x^{\mu}\wedge\mathrm{d}x^{\mu_2}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_n}\right]$$

Здесь оба индекса μ и μ_1 не равны ни одному из попарно различных индексов $\mu_2, \ldots, \mu_n$, и потому $\mu = \mu_1$.

Следовательно, правая часть (2.101) переписывается как (????)

$$\mathrm{d}\omega_J = \left[\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{|g|}J^{\mu}\right)\right] \times \left[\frac{1}{n!}E_{\mu_1\ldots\mu_n}\,\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\mathrm{d}x^{\mu_2}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_n}\right]$$

Пусть y - подмногообразие размерности n с краем или просто некая область в X с регулярной границей. В частности, подмногообразие y может совпадать с X. Согласно теореме Стокса

$$\int\limits_y \mathrm{d}\omega_J = \int\limits_{\partial y}\omega_J$$

Зафиксируем ориентацию локальных систем координат так, чтобы вторая квадратная скобка в (2.102) была положительна, а значит, совпадала с элементом объема (2.50). Тогда последнее равенство переписывается в более привычной форме:

$$\int\limits_y \left(\nabla_{\mu}J^{\mu}\right)\mathrm{d}V = \int\limits_{\partial y} J^{\mu}\mathrm{d}S_{\mu}$$

Элемент площади $(n-1)$-мерной гиперповерхности задается формой

$$\mathrm{d}S_{\mu} = \frac{1}{(n-1)!}E_{\mu\mu_1\ldots\mu_{n-1}}\,\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_{n-1}}$$

Обращение в нуль ковариантной дивергенции для $\nabla_\mu J^\mu$ влечет за собой сохранение некоего заряда

Из (2.103) вытекает, что обращение в нуль ковариантной дивергенции для $\nabla_\mu J^\mu$ влечет за собой сохранение некоего заряда.

Действительно, пусть подмногообразие y представляет собою в локальных координатах слой, ограниченный условием $0 \leq x^0 \leq t$. Имеем $\mathrm{d}x^0|_{\partial y} = 0$. Поэтому в данном случае согласно (2.104) отличной от нуля будет лишь $\mathrm{d}S_0$, которая в локальных координатах x^μ на гиперплоскости $x^0 = t$ равна

$$\mathrm{d}S_0 = \sqrt{|g|}\Big|_t \ \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^{n-1} = \mathrm{d}S_{(t)}$$

Вследствие равенства нулю обеих частей Ур.(2.103) имеем

$$Q = \int \left(J^0\sqrt{|g|}\right)_t \ \mathrm{d}x^1 ... \mathrm{d}x^{(n-1)} = \ \mathrm{Const}$$

Величина Q оказывается сохраняющейся и называется зарядом тока J^μ.

В более общем случае предположим, что граница подмногообразия y состоит из двух несвязных частей $\partial_+ y$ и $\partial_- y$. Тогда при непрерывном изменении конфигурации части границы $\partial_+ y$ заряд

$$Q = \int\limits_{\partial_+ y} J^\mu \mathrm{d}S_\mu$$

сохраняется, если $\nabla_\mu J^\mu = 0$

(??? и какого же???)

Дополнительная теория

(у Мизнера как следует написано!!!! если будет она использоваться - перекину в 1ю часть суть. там скорее всего хватает еще теории, тут раздел на всякий случай)

(?!!!) The Connection One-Form

Given a non-coordinate basis $\{\hat{e}_a\}$, we can define the components of a connection in the usual way (3.8)

$$\nabla_{\hat{e}_c}\hat{e}_b = \Gamma^a_{cb}\hat{e}_a$$

Note that, annoyingly, these are not the same functions as $\Gamma^\mu_{\rho\nu}$, which are the components of the connection computed in the conrdinate hasis! You need to pay attention to whether the components are Greek μ, ν etc which tells you that we're in the coordinate basis, or Roman a, b etc which tells you we're in the vielbein basis.

We then define the matrix-valued connection one-form as

$$\omega^a_b = \Gamma^a_{cb}\hat{\theta}^c$$

This is sometimes referred to as the spin connection because of the role it plays in defining spinors on curved spacetime. We'll describe this in Section 4.5.6.

The connection one-forms don't transform covariantly under local Lorentz transformations (3.43). Instead, in the new basis, the components of the connection one-form are defined as $\nabla_{\tilde{e}_b}\hat{\tilde{e}}_c = \tilde{\Gamma}^a_{bc}\hat{\tilde{e}}_a$. You can check that the connection one-form transforms as

$$\tilde{\omega}^a_b = \Lambda^a_{c\,d}\left(\Lambda^{-1}\right)^d_b + \Lambda^a_c\left(d\Lambda^{-1}\right)^c_b$$

The second term reflects the fact that the original connection components $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ do not transform as a tensor, but with an extra term involving the derivative of the coordinate transformation

(3.13). This now shows up as an extra term involving the derivative of the local Lorentz transformation.

There is a rather simple way to compute the connection one-forms, at least for a torsion free connection. This follows from the first of two Cartan structure relations: Claim: For a torsion free connection,

$$d\hat{\theta}^a + \omega^a_b \wedge \hat{\theta}^b = 0$$

Proof: We first look at the second term,

$$\omega^a_b \wedge \hat{\theta}^b = \Gamma^a_{cb} \left(e^c_\mu dx^\mu\right) \wedge \left(e^b_\nu dx^\nu\right)$$

The components Γ^a_{ch} are related to the coordinate basis components by

$$\Gamma^a_{cb} = e^a_\rho e^\mu_c \left(\partial_\mu e^\rho_b + e^\nu_b \Gamma^\rho_{\mu\nu}\right) = e^a_\rho e^\mu_c \nabla_\mu e^\rho_b$$

So

$$\begin{aligned}\omega^a_b \wedge \hat{\theta}^b &= e^a_\rho e^\lambda_c e^c_\mu e^b_\nu \left(\partial_\lambda e^\rho_b + e^\sigma_b \Gamma^\rho_{\lambda\sigma}\right) dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= e^a_\rho e^b_\nu \partial_\mu e^\rho_b dx^\mu \wedge dx^\nu\end{aligned}$$

where, in the second line we've used $e^\lambda_c e^c_\mu = \delta^\lambda_\mu$ and the fact that the connection is torsion free so $\Gamma^\rho_{[\mu\nu]} = 0$. Now we use the fact that $e^b_\nu e_b{}^\rho = \delta^\rho_\nu$, so $e^b_\nu \partial_\mu e_b{}^\rho = -e_b{}^\rho \partial_\mu e^b_\nu$. We have

$$\begin{aligned}\omega^a_b \wedge \hat{\theta}^b &= -e^a_\rho e^\rho_b \partial_\mu e^b_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= -\partial_\mu e^a{}_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu = -d\hat{\theta}^a\end{aligned}$$

which completes the proof.

The discussion above was for a general connection. For the Levi-Civita connection, we have a stronger result Claim: For the Levi-Civita connection, the connection one-form is anti-symmetric

$$\omega_{ab} = -\omega_{ba}$$

Proof: This follows from the explicit expression (3.47) for the components Γ^a_{bc}. Lowering an index, we have

$$\Gamma_{abc} = \eta_{ad} e^d_\rho e^\mu_b \nabla_\mu e^\rho_c = -\eta_{ad} e^\rho_c e^\mu_b \nabla_\mu e^d_\rho = -\eta_{cf} e^f_\sigma e^\mu_b \nabla_\mu \left(\eta_{ad} g^{\rho\sigma} e^d_\rho\right)$$

where, in the final equality, we've used the fact that the connection is compatible with the metric to raise the indices of e^d_ρ inside the covariant derivative. Finishing off the derivation, we then have

$$\Gamma_{abc} = -\eta_{cf} e^f_\rho e^\mu_b \nabla_\mu e^\rho_a = -\Gamma_{cba}$$

The result then follows from the definition $\omega_{ab} = \Gamma_{acb}\hat{\theta}^c$. The Cartan structure equation (3.46), together with the anti-symmetry condition (3.48), gives a quick way to compute the spin connection. It's instructive to do some counting to see how these two equations uniquely define ω^a_b. In particular, since ω_{ab} is anti-symmetric, one might think that it has $\frac{1}{2}n(n-1)$ independent components, and these can't possibly be fixed by the n Cartan structure equations (3.46). But this is missing the fact that ω_{ab} are not numbers, but are one-forms. So the true number of components in ω_{ab} is $n \times \frac{1}{2}n(n-1)$. Furthermore, the Cartan structure equation is an

equation relating 2 -forms, each of which has $\frac{1}{2}n(n-1)$ components. This means that it's really $n \times \frac{1}{2}n(n-1)$ equations. We see that the counting does work, and the two fix the spin connection uniquely.

Структурные уравнения Картана (??)

(даже не гуглится, так что я хз вообще, нужно ли это, но Вергелес этим пользовался, так что мб что-то в этом и есть.)

Суть

Структурные уравнения Картана есть уравнения:

$$\mathrm{d}\omega^A + \omega^A_B \wedge \omega^B = \frac{1}{2} T^A_{BC} \omega^B \wedge \omega^C$$
$$\mathrm{d}\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B = \frac{1}{2} R^A_B CD^C \wedge \omega^D$$

О применениях структурных уравнений Картана (???)

(самый главный вопрос, почитаю Вергелеса - пойму, пока не знаю)

Теория

Метрика:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = g_{AB}\omega^A\omega^B$$

(тут про 2.65 и 2.74, на которые Вергелес много ссылается)

В нашем приближении величины X^B можно считать постоянными, равными компонентам вектора X в точке $x^\mu(0)$.

Тензор кривизны это 2-форма

$$R^A_B = 2\left(d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B\right)$$

Здесь совокупность 2-форм

$$T^A = 2\left(\ \mathrm{d}\omega^A + \omega^A_B \wedge \omega^B\right)$$

при преобразованиях репера преобразуется как компоненты контравариантного вектора. T^A называется тензором кручения пространства.

В локальных координатах $\omega^\lambda = dx^\lambda$ и $\omega^\mu_\nu = \Gamma^\mu_{\nu\lambda} dx^\lambda$. Поэтому $T^\mu = 2\Gamma^\mu_{\nu\lambda} dx^\lambda \wedge dx^\nu$, или

$$T^\mu_{\nu\lambda} = \Gamma^\mu_{\lambda\nu} - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}$$

и перепишем уравнения (2.65) и (2.74) в виде:

Они получаются (??? каким-то переписыванием определений тензора кривизны и кручения от Вергелеса, которое мне не зашло.)

Обратим внимание на то, что в (2.77) справа нет знака внешнего умножения. В случае ОНБ вместо g_{AB} имеем η_{ab}. Пространства, в которых тензор кручения равен нулю, называются Римановыми пространствами или пространствами без кручения. Вычислим внешний дифференциал от структурных уравнений Картана. При этом учтем, что $d \circ d = 0$, а также повторно воспользуемся структурными уравнениями Картана для исключения 2-форм $\mathrm{d}\omega^a$ и $\mathrm{d}\omega^a_b$.В результате простых, но длительных вычислений мы получим:

$$R^A_{[BCD]} = T^A_{[BC;D]} + T^A_{F[B} T^F_{CD]}$$
$$R^A_{B[CD;F]} = - R^A_{BE[F} T^E_{CD]}.$$

Здесь введены следующие обозначения: $\nabla_A \equiv e^\mu_A \nabla_\mu$, для любых величин ζ_{ABC} с тремя нижними (верхними) индексами, антисимметричных относительно перестановки любых двух индексов, величина $\zeta_{[ABC]}$ есть циклическая сумма

$$\zeta_{[ABC]} = \zeta_{ABC} + \zeta_{BCA} + \zeta_{CAB}$$

и она оказывается полностью антисимметричной, что проверяется непосредственно; оператор частного ковариантного дифференцирования определен согласно (2.22), а индекс после точки с запятой означает соответствующее частное ковариантное дифференцирование.

Соотношения (2.80) и (2.81) называются тождествами Бианки.

В Римановом пространстве тождества Бианки упрощаются. Запишем их в локальных координатах:

$$R_{\mu[\nu\lambda\rho]} = 0, \quad R_{\mu\nu}[\lambda\rho;\sigma] = 0, \quad R_{\mu\nu}\lambda\rho = g_{\mu\sigma} R^\sigma_{\nu\lambda\rho}$$

Пример применений структурных уравнений Картана

(из его космологии скопирую, там что-то про них видел)

Символы Кристоффеля

Обсудим подробно полезную для ОТО теорию символов Кристоффеля.

Основные свойства символов Кристоффеля

Независимость Кристоффелей от метрики

(??? почему это так???)

Преобразования кристоффелей при переходе в новую систему координат

(потом оттренирую, пока лишь верю, что формула такая)

Выведем теперь формулы преобразования от одной системы координат к другой для символов Кристоффеля.

Эти формулы можно получить, сравнивая законы преобразования обеих частей равенств, определяющих любую из ковариантных производных, и требуя, чтобы эти законы для обеих частей были одинаковы.

(тут есть задача проделать эти вычисления, потом мб проделаю)

Простое вычисление приводит к формуле

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma'^m_{np}\frac{\partial x^i}{\partial x'^m}\frac{\partial x'^n}{\partial x^k}\frac{\partial x'^p}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^i}\frac{\partial x^l}{\partial x'^m}$$

Из этой формулы видно, что величины Γ^i_{kl} ведут себя как тензоры лишь по отношению к линейным преобразованиям координат, тогда второй член в законе их преобразования обнуляется.

ИЗ закона преобразования кристоффелей видно, что выражение $S^i_{kl} = \Gamma^i_{kl} - \Gamma^i_{lk}$. преобразуется по тензорному закону:

$$S^i_{kl} = S'^m_{np}\frac{\partial x^i}{\partial x'^m}\frac{\partial x'^n}{\partial x^k}\frac{\partial x'^p}{\partial x^l}$$

т.е. является тензором. Его называют тензором кручения пространства.

Симметрия кристоффелей по нижним индексам

(??)

В случае связности Леви-Чивиты символы Кристоффеля должны быть симметричны по нижним индексам:

$$\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}$$

или

$$\Gamma_{i,kl} = \Gamma_{i,lk}$$

(тут поясню???)

Количество независимых кристоффелей

(почему???)

В общем случае имеется всего 40 различных величин Γ^i_{kl} - для каждого из четырех значений индекса i имеется 10 различных пар значений индексов k и l (считая пары, получающиеся перестановкой k и l одинаковыми).

Локально-инерциальная система отсчета и крстоффеля

Формула преобразования кристоффелей при условии их симметрии позволяет доказать утверждение о возможности выбора системы координат где все Γ^i_{kl} обращаются в нуль в любой наперед заданной точке.

Действительно, пусть заданная точка выбрана в качестве начала координат и величины Γ^i_{kl} имеют в ней первоначально (в координатах x^i) значения $(\Gamma^i_{kl})_0$.

Произведем вблизи этой точки преобразование

$$x'^i = x^i + \frac{1}{2}\left(\Gamma^i_{kl}\right)_0 x^k x^l$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l}\frac{\partial x^i}{\partial x'^m}\right)_0 = \left(\Gamma^i_{kl}\right)_0$$

и согласно $\Gamma^i_{kl} = \Gamma'^m_{np}\frac{\partial x^i}{\partial x'^m}\frac{\partial x'^n}{\partial x^k}\frac{\partial x'^p}{\partial x^l} + \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x^k \partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial x'^m}$ все Γ'^m_{np} обращаются в нуль.

Подчеркнем, что условие симметрии здесь существенно: выражение в левой части равенства $(\Gamma^i_{kl})_0$ симметрично по индексам k, l, поэтому должна быть симметрична и правая часть равенства.

Заметим, что для преобразования (85.18)

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^k}\right)_0 = \delta^i_k$$

поэтому оно не меняет значений любого тензора (в том числе тензора g_{ik}) в заданной точке, так что обращение символов Кристоффеля в нуль может быть осуществлено одновременно с приведением g_{ik} к галилееву виду.

(??? последнее не понял, грусть, потом пойму)

Другие свойства кристоффелей

(это мб потом буду смотреть, а мб и удалю, пока тут лишь зависшие неактуальные идеи)

Символы Кристоффеля не тензор

В случае нелинейных преобразований координат, критоффеля преобразуются не как тензор. Действительно.

....

(надо бы до интуиции довести закон преобразования кристоффелей, чтобы сразу вылетало, что там добавлка прилетает.)

....

Вариация Кристоффелей есть тензор

Вариации символов Кристоффеля преобразуются по тензорному закону:

$$\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \delta\Gamma'^\rho_{\sigma\tau}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\rho \rho}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\nu}$$

(типичная тема, потом проделаю это)

Действительно, $\Gamma^k_{il}A_k dx$ есть изменение вектора при параллельном переносе (см. (85.5)????) из некоторой точки P в бесконечно близкую к ней P'.

Поэтому $\delta\Gamma^k_{il}A_k dx^l$ есть разность двух векторов, получающихся соответственно при двух параллельных переносах (с неварьированными и варьированными Γ^i_{kl}) из точки P в одну и ту же точку P'.

Разность же двух векторов в одной и той же точке является вектором, а потому $\delta\Gamma^i_{kl}$ есть тензор.

(????)

Пример системы координат, где символы Кристоффеля ноль в одной точке (?)

(? пока хз, нужно потренироваться будет)

Символы Кристоффеля не зависят от параметра (??)

говорят, это так.

в аффинном пространстве символы кристофелля равны 0 (??? это не бред)

черт!!!
вроде это бред, но нужно проверить.

Кристоффеля по Вергелесу

(да какая-то жесть, мб у него просто спрошу, что с этим делать)
В Римановом пространстве связность легко выражается через метрический тензор. Обозначим $g_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} = \Gamma_{\nu\mu\lambda}$. Тогда (2.42) принимает вид

$$g_{\mu\nu,\lambda} = \Gamma_{\nu\mu\lambda} + \Gamma_{\mu\nu\lambda}$$

Делая здесь две циклические перестановки индексов (μ, ν, λ), получаем еще два равенства:

$$g_{\nu\lambda,\mu} = \Gamma_{\lambda\nu\mu} + \Gamma_{\nu\lambda\mu}$$
$$g_{\lambda\mu,\nu} = \Gamma_{\mu\lambda\nu} + \Gamma_{\lambda\mu\nu}$$

Сложим первые два равенства и вычтем третье. Учитывая (2.76), находим:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma}\left(\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\sigma}}\right) \equiv \left\{ \begin{array}{c} \nu\lambda \\ \mu \end{array} \right\}$$

Если кручение не равно нулю, то, учитывая Ур. (2.75) и определение $T_{\lambda\mu\nu} \equiv g_{\lambda\rho}T^{\rho}_{\mu\nu}$, аналогичным образом получается формула

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \left\{ \begin{array}{c} \nu\lambda \\ \mu \end{array} \right\} - \frac{1}{2}T^{\mu}_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}\left(T_{\lambda\nu\sigma} + T_{\nu\lambda\sigma}\right)$$

Далее будет использоваться выражение для связности в Римановом пространстве в ОНБ, которое легко находится. Для этого предварительно необходимо установить явный вид форм ω^a. Практически это делается путем диагонализации (приведения к сумме квадратов) метрики (см. равенства (2.45)). Пусть $\mathrm{d}\omega^a = C^a_{bc}\omega^b \wedge \omega^c$, где $C^a_{bc} = -C^a_{cb}$ - известные коэффициенты постольку, поскольку формы ω^a известны. Пусть $\omega^a_b = \gamma^a_{bc}\omega^c$. Из уравнений структуры ($_{\text{р}}$.(2.78) в ОНБ с нулевой правой частью) имеем

$$C_{abc} = \frac{1}{2}\left(\gamma_{abc} - \gamma_{acb}\right)$$

Как обычно $C_{abc} = \eta_{ad}C^d_{bc}$, и $\gamma_{abc} = \eta_{ad}\gamma^d_{bc}, \gamma_{abc} = -\gamma_{bac}$. Последнее равенство является следствием согласованности связности и метрики. Циклически переставляя индексы (a, b, c) два раза, получаем еще два аналогичных уравнения. Складывая первые два из них и вычитая третье, находим однозначное решение:

$$\omega_{ab} = \left(C_{abc} - C_{bac} - C_{cab}\right)\omega^c$$

В случае наличия кручения к правой части следует добавить выражение $\left(T_{bac} - T_{abc} + T_{cab}\right)\omega^c/2$, где $T_{bac} = \eta_{bd}T^d_{ac}$.

Формы связности на сфере

(это напишу более четко, проделал уже раз, вроде суть ясна.)
Для иллюстрации форм смещения и связностей рассмотрим Риманову геометрию на поверхности сферы радиуса a в пространстве $\mathbb{R}^3$. Метрика на поверхности в сферических координатах имеет вид

$$\mathrm{d}s^2 = a^2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2 \right) = \omega_\theta^2 + \omega_\phi^2$$

Отсюда видно, что в ОНБ (e_θ, e_ϕ)

$$\omega_\theta = a\ \mathrm{d}\theta, \quad \omega_\phi = a \sin\theta \mathrm{d}\phi$$

Теперь легко найти связность при помощи Ур.(2.78) с нулевой правой частью. Имеем $\mathrm{d}\omega_\phi = a\cos\theta \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi$ или $\mathrm{d}\omega_\phi - a^{-1}\operatorname{ctg}\theta\omega_\theta \wedge \omega_\phi = 0$. Сравнивая это уравнение с уравнением структуры $\mathrm{d}\omega_\phi + \omega_{\phi\theta} \wedge \omega_\theta = 0$, получаем, что

$$\omega_{\theta\phi} = -\omega_{\phi\theta} = -a^{-1}\operatorname{ctg}\theta\omega_\phi + \gamma\omega_\theta$$

Так как $\mathrm{d}\omega_\theta = 0$, то второе структурное уравнение упрощается: $\omega_{\theta\phi} \wedge \omega_\phi = 0 \to \gamma = 0$. Отсюда окончательно получаем:

$$\omega_{\theta\phi} = -a^{-1}\operatorname{ctg}\theta\omega_\phi$$

Вычисляя внешний дифференциал от формы связности, находим

$$\mathrm{d}\omega_{\theta\phi} = a^{-2}\omega_\theta \wedge \omega_\phi$$

Следовательно, единственная отличная от нуля компонента тензора Римана в выбранном нами ОНБ имеет вид

$$R_{\theta\phi\theta\phi} = a^{-2}$$

(какое-то применение этих формул укажу, типа зачем считали это всё???)

Связь символов Кристоффеля с метрическим тензором

(тут многие формулы выводятся, которые приводятся в 1й части, а также где указывается их вывод.)

связь символов Кристоффеля с римановой кривизной

(потом разберу, откуда эти формулы)

$$\Gamma^\mu_{\lambda\mu} = \partial_\mu \log\sqrt{|g|}$$

$$\nabla_\lambda \left(\sqrt{|g|}\varepsilon_{\mu_1\ldots\mu_d} \right) = 0$$

мда

$$\sqrt{|g|}\nabla_\lambda a^\lambda = \partial_\lambda \left(\sqrt{|g|}a^\lambda \right)$$

ковариантная производная от метрического тензора g_{ik} равна нулю

(?? а это не там основная теорема римановой геометрии? крч, тут такое сомнительное место от Ландау, потом подумаю, но пока так.)

(?? там же если связность не Л-Ч, это не так, да?)

Ковариантная производная от метрического тензора g_{ik} равна нулю. Для этого заметим, что для вектора DA_i, как и для всякого вектора, должно иметь место соотношение

$$DA_i = g_{ik}DA^k$$

С другой стороны, $A_i = g_{ik}A^k$, и потому

$$DA_i = D\left(g_{ik}A^k\right) = g_{ik}DA^k + A^k Dg_{ik}$$

Сравнивая с $DA_i = g_{ik}DA^k$, имеем в виду произвольности вектора A^i:

$$Dg_{ik} = 0$$

Поэтому и ковариантная производная

$$g_{ik;l} = 0$$

Таким образом, при ковариантном дифференцировании g_{ik} надо рассматривать как постоянные.

????????

Формула Γ^i_{kl} через метрический тензор g_{ik}

Вид символов Кристоффеля Γ^i_{kl} через метрический тензор g_{ik} можно найти, воспользовавшись равенством $g_{ik;l} = 0$. напишем согласно определению $A_{ik;l} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^m_{il}A_{mk} - \Gamma^m_{kl}A_{im}$:

$$g_{ik;l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{mk}\Gamma^m_{il} - g_{im}\Gamma^m_{kl} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{k,il} - \Gamma_{i,kl} = 0.$$

Получили вид g_{ik} через кристоффеля. Напишем эти производные, переставляя индексы i, k, l:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \Gamma_{k,il} + \Gamma_{i,kl}, \quad \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} = \Gamma_{i,kl} + \Gamma_{l,ik}, \quad -\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = -\Gamma_{l,ki} - \Gamma_{k,li}$$

Взяв полусумму этих равенств, находим, помня, что $\Gamma_{i,kl} = \Gamma_{i,lk}$:

$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right)$$

Отсюда имеем для символов $\Gamma^i_{kl} = g^{im}\Gamma_{m,kl}$:

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right)$$

Эти формулы и дают искомые выражения символов Кристоффеля через метрический тензор.

Формула Γ^i_{ki}

Имеется выражение:

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} = \Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k}$$

Действительно. Дифференциал dg определителя g, составленного из компонент тензора g_{ik}; dg можно получить, взяв дифференциал от каждой компоненты тензора g_{ik} и умножив ее на свой коэффициент в определителе, т.е. на соответствующий минор. С другой стороны, компоненты тензора g^{ik}, обратного тензору g_{ik}, равны, как известно, минорам определителя из величин g_{ik}, деленным на этот определитель. Поэтому миноры определителя g равны gg^{ik}. Таким образом,

$$dg = gg^{ik} dg_{ik} = -gg_{ik} dg^i,$$

поскольку $g_{ik} g^{ik} = \delta^i_i = 4$, то $g^{ik} dg_{ik} = -g_{ik} dg^{ik}$.

В выражении символов Кристоффеля через метрику имеем: $\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^m} \right)$, меняя местами индексы m и i в третьем и первом членах в скобках, видим, что оба эти члена взаимно сокращаются, так что

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k}$$

или, используя $dg = gg^{ik} dg_{ik}$, имеем:

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k}$$

Формула $g^{kl}\Gamma^i_{kl}$

Выражение для $g^{kl}\Gamma^i_{kl}$ найти можно так:

$$g^{kl}\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{kl} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right) = g^{kl} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right)$$

(??? потом досмотрю) С помощью $dg = gg^{ik} dg_{ik}$ это можно преобразовать к виду

$$g^{kl}\Gamma^i_{kl} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \left(\sqrt{-g} g^{ik} \right)}{\partial x^k}$$

Производные от g^{ik} через величины Γ^i_{kl}

Производные от g^{ik} через величины Γ^i_{kl} выводятся из тождества $g^{ik}{}_{;l} = 0$, в итоге:

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} = -\Gamma^i_{ml} g^{mk} - \Gamma^k_{ml} g^{im}$$

(оно нужно где-то???)

Дивергенция (!!!)

(тут прямо полезные заготовки, потом в 1ю часть добавлю)

С помощью полученных формул можно привести к удобному виду выражение $A^i_{;i}$, являющееся обобщением дивергенции вектора на криволинейные координаты.

Воспользовавшись (86.5), имеем:

$$A^i_{;i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{li} A^l = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^l \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^l}$$

или окончательно

$$A^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \left(\sqrt{-g} A^i\right)}{\partial x^i}$$

Аналогичное выражение можно получить и для дивергенции антисимметричного тензора A^{ik}. Имеем:

$$A^{ik}_{;k} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mk} A^{mk} + \Gamma^k_{mk} A^{im}$$

Но поскольку $A^{mk} = -A^{km}$, то

$$\Gamma^i_{mk} A^{mk} = -\Gamma^i_{km} A^{km} = 0$$

Подставляя выражение для Γ^k_{mk} через $\sqrt{-g}$, находим, следовательно:

$$A^{ik}_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \left(\sqrt{-g} A^{ik}\right)}{\partial x^k}$$

Пусть теперь A_{ik} - симметричный тензор; $A^k_{i,k}$ для его смешанных компонент:

$$A^k_{i;k} = \frac{\partial A^k_i}{\partial x^k} + \Gamma^k_{lk} A^l_i - \Gamma^l_{ik} A^k_l = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \left(A^k_i \sqrt{-g}\right)}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ki} A^k_l$$

Последний член здесь равен

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \right) A^{kl}$$

В силу симметрии тензора A^{kl} два члена в скобках взаимно сокращаются, и остается

$$A^k_{i;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \left(\sqrt{-g} A^k_i\right)}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} A^{kl}$$

О разности производных

(проверю еще внимательно, вроде очевидно)
В декартовых координатах $\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}$ есть антисимметричный тензор.
В криволинейных координатах этот тензор есть $A_{i;k} - A_{k;i}$.
Однако с помощью выражений для $A_{i;k}$ и ввиду того, что $\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}$, имеем:

$$A_{i;k} - A_{k;i} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}$$

(укажу потом важность этого, вроде в ЭД встречается)

Вторые производные от скаляра в криволинейных координатах

Наконец, преобразуем к криволинейным координатам сумму $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x^i}$ вторых производных от некоторого скаляра φ. В криволинейных координатах эта сумма перейдет в $\varphi^{;i}_{;i}$. Но $\varphi_{;i} = \partial\varphi/\partial x^i$, так как ковариантное дифференцирование скаляра сводится к обычному дифференцированию. Поднимая индекс i, имеем:

$$\varphi^{;i} = g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}$$

и с помощью формулы $A^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}A^i\right)}{\partial x^i}$ находим:

$$\varphi^{;i}_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}\right)$$

Аффинная структура

(я хз, что это и зачем она, нужно будет - впишу в этот раздел)

Обзор аффинной структуры

хз, что это.

Аффинная структура задает геодезические, метрика не нужна

вот такое я услышал, потом подумаю, что это????

Согласованность аффинной структуры с метрикой через постулирование, что экстремальные кривые это геодезические (???)

мы постулируем (????) что экстремальные кривые это геодезические
вообще хз, почему так, Мизера читать скорее всего нужно.

B.1.6 Parallel Transport

Геодезические

Обсудим подробно геодезические.
(мб потом расширю раздел)

определение геодезической

Если рассматриваемая кривая является геодезической, то вдоль нее $Du^i = 0$.

Это значит, что если вектор u^i подвергнуть параллельному переносу из точки x^i на геодезической линии в точку $x^i + dx^i$ на той же линии, То он совпадает с вектором $u^i + du^i$ касательным к линии в точке $x^i + dx^i$.

Таким образом, при передвижении вдоль геодезической линии вектор касательной переносится параллельно самому себе.

При параллельном переносе любого вектора вдоль какой-либо геодезической линии угол между этим вектором и касательной к линии остается неизменным.

Другими словами, при параллельном переносе вектора его составляющие по геодезическим линиям во всех точках пути должны быть неизменными.

Разный перенос при переносе по разным путям

Весьма существенно, что в кривом пространстве параллельный перенос вектора из одной заданной точки в другую дает разные результаты, если он совершается по разным путям.

В частности, отсюда следует, что если переносить вектор параллельно самому себе по некоторому замкнутому контуру, то он, возвратившись в первоначальную точку, не совпадет с самим собой.

О важности геодезических

(так пока и не понял, какую роль они во всем играют? казалось бы, можно было бы и забыть о них при построении ОТО. или нет? пока не знаю.)

Любую ли кривую можно назвать геодезической?

геодезическая - решение уравнений геодезической.
то есть найти ткие кристоффеля, чтобы кривая была решением уравнения.
(пока оставленный вопрос)

Параллельный перенос

Параллельный перенос вектора на пальцах

Приведем наиболее очевидную конструкцию параллельного переноса.
(потом мб улучшу, пока лишь абзац из ландау, как попытка раскрытия этой темы)

Подвергнем вектор s параллельному переносу вдоль контура, образованного двумя геодезическими из A в C и из A в B. При передвижении вдоль линии AB вектор $\mathbf{1}$, сохраняя все время одинаковый угол с этой линией, перейдет в вектор 2. При передвижении вдоль BC он таким же образом перейдет в 3. Наконец, при движении из C в A вдоль кривой CA, сохраняя постоянный угол с этой кривой, рассматриваемый вектор перейдет в $\mathbf{1}'$, не совпадающий с вектором $\mathbf{1}$.

(тут потом потренируюсь, найду эту конструкцию, максимально иллюстративную.)

Перенос ковариантного вектора вдоль замкнутого контура

(!! типичная важная конструкция)

Это изменение ΔA_k при переносе по бесконечно малому замкнутому контуру можно записать в виде $\oint \Delta A_k$, где интеграл берется по данному контуру.

Подставляя вместо ΔA_k выражение $\delta A_i = \Gamma^k_{il} A_k dx^l$, имеем:

$$\Delta A_k = \oint \Gamma^i_{kl} A_i dx^l$$

стоящий под интегралом вектор A_i меняется по мере его переноса вдоль контура.

Для дальнейшего преобразования этого интеграла необходимо заметить следующее.

Значения вектора A_i в точках внутри контура неоднозначны - они зависят от пути, по которому мы приходим в данную точку. Мы увидим, однако, из получаемого ниже результата, что эта неоднозначность - второго порядка малости.

Поэтому с достаточной для преобразования точностью до величин первого порядка можно считать компоненты вектора A_i в точках внутри бесконечно малого контура однозначно определяющимися их значениями на самом контуре по формулам $\Delta A_i = \Gamma^n_{il} A_n dx^l$, т.е. по производным

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^l} = \Gamma^n_{il} A_n$$

(????!! тут пока что всё еще туплю!! спрошу потом кого-то. ручками это проделать нужно научиться!!)

Применяя теперь к интегралу ΔA_k теорему Стокса и учитывая, что площадь огибаемой рассматриваемым контуром поверхности есть бесконечно малая величина Δf^{lm}, получим:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\left(\Gamma^i_{km}A_i\right)}{\partial x^l} - \frac{\partial\Gamma^i_{kl}A_i}{\partial x^m}\right]\Delta f^{lm} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x^l}A_i - \frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}A_i + \Gamma^i_{km}\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^i_{kl}\frac{\partial A_i}{\partial x^m}\right]\Delta f^{lm}.$$

Подставляя сюда значения производных из $\frac{\partial A_i}{\partial x^l} = \Gamma^n_{il}A_n$, находим окончательно:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}R^i_{klm}A_i\Delta f^{lm},$$

где R^i_{klm}тензор 4-го ранга: $R^i_{klm} = \frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}$

Перенос контравариантного вектора

Аналогично для контравариантного вектора A^k, заметим, что поскольку при параллельном переносе скаляры не меняются, то $\Delta\left(A^kB_k\right) = 0$, где B_k - любой ковариантный вектор.

С помощью $\Delta A_k = \frac{1}{2}R^i_{klm}A_i\Delta f^{lm}$ имеем отсюда:

$$\begin{aligned}\Delta\left(A^kB_k\right) = A^k\Delta B_k + B_k\Delta A^k =& \frac{1}{2}A^kB_iR^i_{klm}\Delta f^{lm} + B_k\Delta A^k = \\ =& B_k\left(\Delta A^k + \frac{1}{2}A^iR^k_{ilm}\Delta f^{lm}\right) = 0\end{aligned}$$

или, ввиду произвольности вектора B_k:

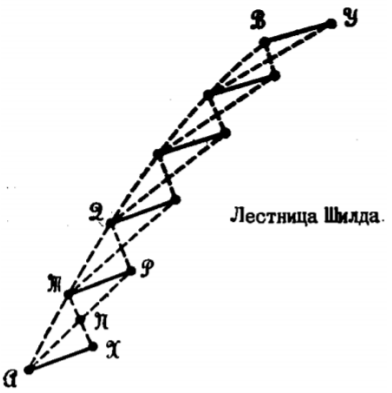
$$\Delta A^k = -\frac{1}{2}R^k_{ilm}A^i\Delta f^{lm}$$

Важность конструкции параллельного переноса лестницы Шилда

(пока что мне она не зашла, мб потом еще раз посмотрю, зачем она? пока помню, что такое есть.)

Конструкция параллельного переноса лестницы Шилда

(спишу потом из Мизнера эту конструкцию, пока что вообще не до неё)



Девиация геодезических

Девиация геодезических по Тонгу (?)

(уже писал это, где искал ускорение частиц, потом свяжу нормально с тем, что тут. у Тонга в разделе про риманову геометрию это...)

Consider now a one-parameter family of geodesics, with coordinates $x^\mu(\tau; s)$. Here τ is the affine parameter along the geodesics, all of which are tangent to the vector field X so that, along the surface spanned by $x^\mu(\tau, s)$, we have

$$X^\mu = \left.\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}\right|_s$$

Meanwhile, s labels the different geodesics, as shown in Figure 26. We take the tangent vector in the s direction to be generated by a second vector field S so that,

$$S^\mu = \left.\frac{\partial x^\mu}{\partial s}\right|_\tau$$

The tangent vector S^μ is sometimes called the deviation vector; it takes us from one geodesic to a nearby geodesic with the same affine parameter τ.

The family of geodesics sweeps out a surface embedded in the manifold. This gives us some freedom in the way we assign coordinates s and τ. In fact, we can always pick coordinates s and t on the surface such that $S = \partial/\partial s$ and $X = \partial/\partial t$, ensuring that

$$[S, X] = 0$$

Roughly speaking, we can do this if we use τ and s as coordinates on some submanifold of M. Then the vector fields can be written simply as $X = \partial/\partial\tau$ and $S = \partial/\partial s$ and $[X, S] = 0$.

We can ask how neighbouring geodesics behave. Do they converge? Or do they move further apart? Now consider a connection Γ with vanishing torsion, so that $\nabla_X S - \nabla_S X = [X, S]$. Since $[X, S] = 0$, we have

$$\nabla_X \nabla_X S = \nabla_X \nabla_S X = \nabla_S \nabla_X X + R(X, S)X$$

where, in the second equality, we've used the expression (3.14) for the Riemann tensor as a differential operator. But $\nabla_X X = 0$ because X is tangent to geodesics, and we have

$$\nabla_X \nabla_X S = R(X, S)X$$

In index notation, this is

$$X^\nu \nabla_\nu \left(X^\rho \nabla_\rho S^\mu\right) = R^\mu_{\nu\rho\sigma} X^\nu X^\rho S^\sigma$$

If we further restrict to an integral curve C associated to the vector field X, as in (3.25), this equation is sometimes written as

$$\frac{D^2 S^\mu}{D\tau^2} = R^\mu_{\nu\rho\sigma} X^\nu X^\rho S^\sigma$$

where $D/D\tau$ is the covariant derivative along the curve C, defined by $D/D\tau = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}\nabla_\mu$. The left-hand-side tells us how the deviation vector S^μ changes as we move along the geodesic. In other words, it is the relative acceleration of neighbouring geodesics. We learn that this relative acceleration is controlled by the Riemann tensor.

Experimentally, such geodesic deviations are called tidal forces. We met a simple example in Section 1.2.4.

о случаях применения (??)

(в грав волнах увидел, вот и засел в эту теорию сполна)

An Example: the Sphere S^2

Again It is simple to determine the geodesics on the sphere $\mathbf{S}^2$ of radius r. Using the Christoffel symbols (3.19), the geodesic equations are

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 \quad \text{and} \quad \frac{d^2\phi}{d\tau^2} = -2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d\phi}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau}$$

The solutions are great circles. The general solution is a little awkward in these coordinates, but there are two simple solutions. - We can set $\theta = \pi/2$ with $\dot{\theta} = 0$ and $\dot{\phi} =$ constant. This is a solution in which the particle moves around the equator. Note that this solution doesn't work for other values of θ. - We can set $\dot{\phi} = 0$ and $\dot{\theta} =$ constant. These are paths of constant longitude and are geodesics for any constant value of ϕ. Note, however, that our coordinates go a little screwy at the poles $\theta = 0$ and $\theta = \pi$.

To illustrate geodesic deviation, we'll look at the second class of solutions; the particle moves along $\theta = v\tau$, with the angle ϕ specifying the geodesic. This set-up is simple enough that we don't need to use any fancy Riemann tensor techniques: we can just understand the geodesic deviation using simple geometry. The distance between the geodesic at $\phi = 0$ and the geodesic at some other longitude ϕ is

$$s(\tau) = r\phi\sin\theta = r\phi\sin(v\tau)$$

Now let's re-derive this result using our fancy technology. The geodesics are generated by the vector field $X^\theta = v$. Meanwhile, the separation between geodesics at a fixed τ is $S^\phi = s(\tau)$. The geodesic deviation equation in the form (3.36) is

$$\frac{d^2s}{d\tau^2} = v^2 R^\phi_{\theta\theta\phi} s(\tau)$$

We computed the Riemann tensor for $\mathbf{S}^2$ in (3.20); the relevant component is

$$R_{\phi\theta\theta\phi} = -r^2\sin^2\theta \quad \Rightarrow \quad R^\phi_{\theta\theta\phi} = g^{\phi\phi}R_{\phi\theta\theta\phi} = -1$$

and the geodesic deviation equation becomes simply

$$\frac{d^2s}{d\tau^2} = -v^2 s$$

which is indeed solved by (3.37).

B.1.7 Riemann, Ricci Tensors

Обсудим подробно полезную для ОТО теорию тензора Римана.

Определение тензора Римана

Основные формулы

(в 1ю часть отнесу потом)
Тензор кривизны это 2-форма

$$R^A_B = 2\left(d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B\right)$$

Перенос вектора с помощью тензора Римана

(выше уже писал об этом, сюда потом добавлю.)

Тензор кривизны действительно тензор

(пока хз, почему)

Тензорный характер R^i_{klm} виден из того, что в $\Delta A_k = \frac{1}{2} R^i_{klm} A_i \Delta f^{lm}$ слева стоит вектор - разность ΔA_k значений вектора в одной и той же точке.

Тензор R^i_{klm} называется тензором кривизньи или тензором Римана.

Определение бесконечно малого параллельного переноса вектора

В общем случае кривого 4-пространства бесконечно малый параллельный перенос вектора определяется как перенос, при котором компоненты вектора не меняются в системе координат, галилеевой в данном бесконечно малом элементе объема.

Если $x^i = x^i(s)$ есть параметрическое уравнение некоторой кривой (s - длина дуги, отсчитываемая от некоторой точки), то вектор $u^i = dx^i/ds$ есть единичный вектор, касательный к кривой.

С другой стороны, при параллельном переносе двух векторов «угол» между ними остается неизменным.

Разность двух ковариантных дифференцирований определяется тензором Римана

Если дважды ковариантно продифференцировать вектор A_i по x^k и по x^l, то результат зависит, вообще говоря, от порядка дифференцирования, в противоположность тому, что имеет место для обычных производных.

Разность $A_{i;k;l} - A_{i;l;k}$ определяется R^m_{ikl} как:

$$A_{i;k;l} - A_{i;l;k} = A_m R^m_{ikl},$$

что легко проверить непосредственным вычислением в локально-геодезической системе координат.

(????)

Аналогично, для контравариантного вектора

$$A^i_{;k;l} - A^i_{;l;k} = -A^m R^i_{mkl}$$

Наконец, легко получить аналогичные формулы для вторых производных от тензоров (это проще всего сделать, рассматривая, например, тензор вида $A_i B_k$ и пользуясь при этом формулами (91.6) – (91.7); Полученные таким образом формулы в силу их линейности имеют место для любого тензора A_{ik}. Так,

$$A_{ik;l;m} - A_{ik;m;l} = A_{in} R^n_{klm} + A_{nk} R^n_{ilm}$$

(?????? хз тут, не усвоено)

Равенство $R^i_{klm} = 0$ эквивалентно плоскости пространства

(подумаю глубже про это. пока поверил и пошел вперед)

В плоском 4-пространстве тензор кривизны равен нулю.

Действительно, в плоском пространстве можно выбрать координаты, в которых везде все $\Gamma^i_{kl} = 0$, а потому и $R^i_{klm} = 0$. В силу тензорного характера R^i_{klm} эти величины равны тогда нулю и в любой другой системе координат.

Это соответствует тому, что в плоском пространстве параллельный перенос вектора из одной точки в другую есть однозначная операция, а при обходе замкнутого контура вектор не меняется.

Имеет место и обратная теорема: если $R^i_{klm} = 0$, то 4-пространство плоское.

Действительно, во всяком пространстве можно выбрать систему координат, галилееву в данном бесконечно малом участке.

При $R^i_{klm} = 0$ параллельный перенос есть однозначная операция, и перенося таким образом галилееву систему из данного малого участка во все остальные, можно построить галилееву систему во всем пространстве, чем и доказывается сделанное утверждение.

Таким образом, равенство или неравенство нулю тензора кривизны является критерием, позволяющим определить, является ли 4-пространство плоским или искривленным.

Заметим, что хотя в кривом пространстве и можно выбрать локально-геодезическую (для данной точки) систему координат, но при этом тензор кривизны в этой точке не обращается в нуль (так как производные от Γ^i_{kl} не обращаются в нуль вместе с самими Γ^i_{kl}).

The Curvature Two-Form по Тонгу

We can compute the components of the Riemann tensor in our non-coordinate basis,

$$R^a_{bcd} = R\left(\hat{\theta}^a; \hat{e}_c, \hat{e}_d, \hat{e}_b\right)$$

The anti-symmetry of the last two indices, $R^a_{bcd} = -R^a_{bdc}$, makes this ripe for turning into a matrix of two-forms,

$$\mathcal{R}^a_b = \frac{1}{2} R^a_{bcd} \hat{\theta}^c \wedge \hat{\theta}^d$$

The second of the two Cartan structure relations states that this can be written in terms of the curvature one-form as

$$\mathcal{R}^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b$$

The proof of this is mechanical and somewhat tedious. It's helpful to define the quantities $[\hat{e}_a, \hat{e}_b] = f_{ab}{}^c \hat{e}_c$ along the way, since they appear on both left and right-hand sides.

Основные свойства тезора Римана

Обсудим подробно основные свойства тензор кривизны.

основные свойства

Тензор кривизны обладает свойствами симметрии, для полного выявления которых следует перейти от смешанных компонент R^i_{klm} к ковариантным:

$$R_{iklm} = g_{in} R^n_{klm}$$

Тензор кривизны через метрику и кристоффеля

Выражение его имеет вид:

$$R_{iklm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l}\right) + g_{np}\left(\Gamma^n_{kl}\Gamma^p_{im} - \Gamma^n_{km}\Gamma^p_{il}\right)$$

Количество независимых компонент тензора Римана (???)

а у него там 20 что ли компонент?
хз

Симмтерии тензора Римана

Из этого выражения очевидны следующие свойства симметрии:

$$R_{iklm} = -R_{kilm} = -R_{ikml}$$
$$R_{iklm} = R_{lmik}$$

т.е. тензор антисимметричен по каждой из пар индексов ik и lm и симметричен по отношению к перестановке этих двух пар друг с другом.

равенство нулю некоторых компонент

(????)
В частности, все компоненты R_{iklm}, диагональные по паре индексов ik или lm, равны нулю.
Далее легко проверить, что равна нулю циклическая сумма из компонент R_{iklm}, образованная по любым трем из их индексов, например:

$$R_{iklm} + R_{imkl} + R_{ilmk} = 0$$

(остальные соотношения такого рода получаются из (92.4) автоматически в силу свойств (92.2) – (92.3)).

Симметрия $R_{abcd} = R_{cdab}$

В Римановом пространстве выполняется:

$$R_{abcd} = R_{cdab}$$

(?? а в неримновом что??? хз, вергелес)
Для доказательства воспользуемся первым из тождеств Бианки:

$$(i) = R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adbc} = 0$$

Отсюда получаем, переставляя циклически индексы (a, b, c, d), еще три тождества:

$$(k) = R_{bcda} + R_{bdac} + R_{bacd} = 0$$
$$(h) = R_{cdab} + R_{cabd} + R_{cbda} = 0$$
$$(l) = R_{dabc} + R_{dbca} + R_{dcab} = 0$$

С учетом свойств (2.83) и (2.84) имеем:

$$\frac{1}{2}\{(i) + (k) - (h) - (l)\} = R_{adbc} - R_{bcad} = 0$$

что и требовалось доказать.

Тождества Бьянки

(их же там 2 вроде, да?)

Суть тождества Бьянки

Известное свойства тензора Римана - тожество Бьянки - имеет вид:

$$R^n_{ikl;m} + R^n_{imk;l} + R^n_{ilm;k} = 0$$

Его удобно проверить, воспользовавшись локально-геодезической системой координат.

В силу тензорного характера тождество Бьянки будет тем самым справедливым и в любой другой системе.

Дифференцируя выражение

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}$$

и полагая затем В нем $\Gamma^i_{kl} = 0$, находим в рассматриваемой точке:

$$R^n_{ikl;m} = \frac{\partial R^n_{ikl}}{\partial x^m} = \frac{\partial^2 \Gamma^n_{il}}{\partial x^m \partial x^k} - \frac{\partial^2 \Gamma^n_{ik}}{\partial x^m \partial x^l}$$

С помощью этого выражения легко убедиться в том, что (92.5) действительно имеет место.

Из тензора кривизны можно путем упрощения построить тензор Второго ранга.

Такое упрощение можно произвести только одним способом: упрощение тензора R_{iklm} по индексам i и k Или l и m дает нуль В силу антисимметричности по ним, а упрощение по любым другим парам дает, с точностью до знака, одинаковый результат.

Мы определим тензор R_{ik} (его называют тензором Ричии) как

Согласно (91.4) имеем:

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}$$

Этот тензор, симметричен:

$$R_{ik} = R_{ki}$$

Наконец, упрощая R_{ik}, получим инвариант

$$R = g^{ik}R_{ik} = g^{il}g^{km}R_{iklm}$$

называемый скалярной кривизной пространства.

Компоненты тензора R_{ik} удовлетворяют дифференциальному тождеству, получаюшемуся упрощением тождества Бианки (92.5) по парам индексов ik и ln:

$$R^l_{m;l} = \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^m}$$

Соотношения (2.80) и (2.81) называются тождествами Бианки.

В Римановом пространстве тождества Бианки упрощаются. Запишем их в локальных координатах:

$$R_{\mu[\nu\lambda\rho]} = 0, \quad R_{\mu\nu}[\lambda\rho;\sigma] = 0, \quad R_{\mu\nu}\lambda\rho = g_{\mu\sigma}R^\sigma_{\nu\lambda\rho}$$

Свойства симметрии тензора кривизны

свойства симметрии:

$$R_{iklm} = -R_{kilm} = -R_{ikml}$$
$$R_{iklm} = R_{lmik}$$

т.е. тензор антисимметричен по каждой из пар индексов ik и lm и симметричен по отношению к перестановке этих двух пар друг с другом.

Действительно, следует перейти от смешанных компонент R^i_{klm} к ковариантным:

$$R_{iklm} = g_{in}R^n_{klm}$$

?????????????? Простыми преобразованиями легко получить для них следующее выражение:

$$R_{iklm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l}\right) + g_{np}\left(\Gamma^n_{kl}\Gamma^p_{im} - \Gamma^n_{km}\Gamma^p_{il}\right)$$

тут получаем нужные свойства.

(? потом проделаю это)

В частности, все компоненты R_{iklm}, диагональные по паре индексов ik или lm, равны нулю.

Цикличная сумма тензора римана равна нулю

Циклическая сумма из компонент R_{iklm}, образованная по любым трем из их индексов, равная нулю. Например:

$$R_{iklm} + R_{imkl} + R_{ilmk} = 0$$

(проверю - пропишу док-во потом.)

О случаях применения тождества Бьянки

(пока хз, но мб ур М записываются в одном из видов за счет него. Володя так сказал, вроде это так, потом пропишу)

Следующие из тензора Римана объекты

О переходе из тензора Римана к тензору Риччи

очень важный переход.

Из тензора кривизны можно путем упрощения построить тензор второго ранга.

Такое упрощение можно произвести только одним способом: упрощение тензора R_{iklm} по индексам i и k или l и m дает нуль в силу антисимметричности по ним, а упрощение по любым другим парам дает, с точностью до знака, одинаковый результат.

Мы определим тензор R_{ik} (его называют тензором Риччи) как

$$R_{ik} = g^{lm} R_{limk} = R^{l}_{ilk}$$

Согласно (91.4) имеем:

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^{l}_{ik}}{\partial x^{l}} - \frac{\partial \Gamma^{l}_{il}}{\partial x^{k}} + \Gamma^{l}_{ik}\Gamma^{m}_{lm} - \Gamma^{m}_{il}\Gamma^{l}_{km}$$

Этот тензор, очевидно, симметричен:

$$R_{ik} = R_{ki}$$

Наконец, упрощая R_{ik}, получим инвариант

$$R = g^{ik} R_{ik} = g^{il} g^{km} R_{iklm}$$

называемый скалярной кривизной пространства.

Компоненты тензора R_{ik} удовлетворяют дифференциальному тождеству, получающемуся упрощением тождества Бианки (92.5) по парам индексов ik и ln :

$$R^{l}_{m;l} = \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^{m}}$$

В силу соотношений (92.2) – (92.4) не все компоненты тензора кривизны независимы.

Определим число независимых компонент.

Определение тензора кривизны, даваемое написанными выше формулами, относится к пространству любого числа измерений.

Рассмотрим сначала случай пространства двух измерений, т.е.

обычную поверхность; обозначим в этом случае (в отличие от четырехмерных величин) тензор кривизны через P_{abcd}, а метрический тензор - через γ_{ab}, где индексы $a, b, ...$ пробегают значения $1, 2$.

Поскольку в каждой из пар ab и cd два индекса должны иметь различные значения, то очевидно, что все отличные от нуля компоненты тензора кривизны либо совпадают друг с другом, либо отличаются знаком.

Таким образом, в этом случае имеется лишь одна независимая компонента, например P_{1212}.

скалярная кривизна

Легко найти, что скалярная кривизна при этом равна

$$P = \frac{2P_{1212}}{\gamma}, \quad \gamma \equiv |\gamma_{ab}| = \gamma_{11}\gamma_{22} - (\gamma_{12})^2$$

Величина P/2 совпадает с так называемой гауссовой кривизной поверхности K:

$$\frac{P}{2} = K = \frac{1}{\rho_1 \rho_2}$$

где ρ_1, ρ_2 -главные радиусы кривизны поверхности в данной ее точке (напомним, что ρ_1 и ρ_2 считаются имеющими одинаковые знаки, если соответствующие им центры кривизны расположены по одну сторону от поверхности, и имеющими разные знаки, если центры кривизны лежат по разные стороны от поверхности; в первом случае $K > 0$, а во втором $K < 0$)[1]).

Перейдем к тензору кривизны трехмерного пространства; обозначим его через $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$, а метрический тензор через $\gamma_{\alpha\beta}$, где индексы $\alpha, \beta, ...$ пробегают значения $1, 2, 3$.

Пары индексов $\alpha\beta$ и $\gamma\delta$ пробегают всего три существенно различных набора значений: 23, 31, 12 (перестановка индексов в паре меняет лишь знак компоненты тензора).

Поскольку тензор $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ симметричен по отношению к перестановке этих пар, то имеется всего $3 \cdot 2/2 = 3$ независимых компоненты с различными парами индексов, а также 3 компоненты с одинаковыми парами.

Тож- дество (92.4) не прибавляет ничего нового к этим ограничениям.

Таким образом, в трехмерном пространстве тензор кривизны имеет шесть независимых компонент.

Столько же компонент имеет симметричный тензор $P_{\alpha\beta}$.

Поэтому из линейных соотношений $P_{\alpha\beta} = g^{\gamma\delta} P_{\gamma\alpha\delta\beta}$ все компоненты тензора $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ могут быть выражены через $P_{\alpha\beta}$ и метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta}$ (см.задачу 1).

Если выбрать систему координат, декартову в данной точке, то надлежащим ее поворотом можно привести тензор $P_{\alpha\beta}$ к главным осям.

Таким образом, кривизна трехмерного пространства в каждой точке определяется тремя величинами [2]).

Наконец, перейдем к четырехмерному пространству.

Пары индексов ik и lm пробегают в этом случае 6 различных наборов значений: 01, 02, 03, 23, 31, 12.

Поэтому имеется 6 компонент R_{iklm} с одинаковыми и $6 \cdot 5/2 = 15$ компонент с различными парами индексов.

Последние, однако, еще не все независимы друг от друга: три компоненты, у которых все четыре индекса различны, связаны в силу (92.4) одним тожДеством:

$$R_{0123} + R_{0312} + R_{0231} = 0$$

Таким образом, в 4-пространстве тензор кривизны имеет всего 20 независимых компонент.

Выбирая систему координат, галилееву в данной точке, и рассматривая преобразования, поворачивающие эту систему (так что значения g_{ik} в данной точке не меняются), можно добиться обращения в нуль шести компонент тензора кривизны (шесть есть число независимых поворотов 4-системы координат).

Таким образом, в общем случае кривизна 4-пространства определяется в каждой точке 14 величинами.

Если $R_{ik} = 0$[3]), то в произвольной системе координат тензор кривизны имеет всего 10 независимых компонент.

Надлежащим преобразованием координат можно тогда привести тензор R_{iklm} (в заданной точке 4-пространства) к «каноническому» виду, в котором его компоненты выражаются в общем случае через 4 независимые величины; в особых случаях это число может оказаться даже меньшим.

Если же $R_{ik} \neq 0$, то все то же самое будет относиться к тензору кривизны после выделения из него определенной части, выражающейся через компоненты R_{ik}.

Именно, составим тензор

$$C_{iklm} = R_{iklm} - \frac{1}{2}R_{il}g_{km} + \frac{1}{2}R_{im}g_{kl} + +\frac{1}{2}R_{kl}g_{im} - \frac{1}{2}R_{km}g_{il} + \frac{1}{6}R\left(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl}\right)$$

Легко видеть, что этот тензор обладает всеми свойствами симметрии тензора R_{iklm}, а при свертывании по паре индексов (il или km) дает нуль.

Дополнительные свойства тезора Римана

свойства, которые я не использовал, но которые типично обсуждаются.

О формуле Кошуля

(у Володи спишу, но вообще, это сперва в диффгеме пишу)

(?) О двух типах индексов в тензоре Римана

(о таком слышал, заниматься этим не буду сейчас, после диффегема мб у Мизнера почитаю. Суслов про это говорил.)

Схожесть тензора Римана с тензором электромагнитного поля (??!!)

(потом пропишу, насколько они похожи)
(??? еще раз потом посмотрю ЛЛ2 про это)
Введем симметричный комплексный тензор

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(A_{\alpha\beta} + 2iB_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta}\right) = A_{\alpha\beta} + iB_{\alpha\beta}$$

Такое объединение двух вещественных трехмерных тензоров $A_{\alpha\beta}$ и $B_{\alpha\beta}$ в один комплексный тензор как раз соответствует объединению двух векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в комплексный вектор $\mathbf{F}$.
(??? там так мы объединяем что ли?)
??? Возникающая в результате связь между $D_{\alpha\beta}$ и 4-тензором R_{iklm} соответствует связи между $\mathbf{F}$ и 4-тензором F_{ik}.

Инварианты тензора кривизны (???)

(???)
Четырехмерные преобразования тензора R_{iklm} эквивалентны трехмерным комплексным поворотам, производимым над тензором $D_{\alpha\beta}$.
По отношению к этим поворотам могут быть определены собственные значения $\lambda = \lambda' + i\lambda''$ и собственные векторы n_α (вообще говоря, комплексные) как решения системы уравнений

$$D_{\alpha\beta}n_\beta = \lambda n_\alpha$$

Величины λ являются инвариантами тензора кривизны.
Поскольку след $D_{\alpha\alpha} = 0$, то равна нулю также и сумма корней уравнения (92.18):

$$\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \lambda^{(3)} = 0$$

Искривленное пространство без меры его кривизны (??!!!)

В этом случае тензор кривизны вовсе не имеет инвариантов, и мы имеем дело со своеобразной ситуацией: 4-пространство искривлено но не существует инвариантов, которые могли бы являться мерой его кривизны.
(???????? посмотрю ЛЛ2 еще раз про это)

Тензор кривизны трехмерного пространства $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ через тензор 2-го ранга $P_{\alpha\beta}$

Выразить тензор кривизны $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ трехмерного пространства через тензор 2-го ранга $P_{\alpha\beta}$.

(????что это вообще такое???)

Ищем $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ в виде

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = A_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta} - A_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma} + A_{\beta\delta}\gamma_{\alpha\gamma} - A_{\beta\gamma}\gamma_{\alpha\delta}$$

удовлетворяющем условиям симметрии;

здесь $A_{\alpha\beta}$ - некоторый симметричный тензор, связь которого с $P_{\alpha\beta}$ определяется путем упрощения написанного выражения по индексам α и γ.

Таким путем находим:

$$P_{\alpha\beta} = A\gamma_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}, \quad A_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}P\gamma_{\alpha\beta}$$

и окончательно:

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = P_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta} - P_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma} + P_{\beta\delta}\gamma_{\alpha\gamma} - P_{\beta\gamma}\gamma_{\alpha\delta} + \frac{P}{2}\left(\gamma_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma} - \gamma_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta}\right)$$

Тензоры R_{iklm} и R_{ik} для диагональной метрики

Вычислим компоненты тензоров R_{iklm} и R_{ik} для метрики, в которой тензор g_{ik} диагональный.

Представим отличные от нуля компоненты метрического тензора в виде

$$g_{ii} = e_i e^{2F_i}, \quad e_0 = 1, \quad e_\alpha = -1$$

Вычисления по формуле

$$R_{iklm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l}\right) + g_{np}\left(\Gamma^n_{kl}\Gamma^p_{im} - \Gamma^n_{km}\Gamma^p_{il}\right)$$

приводят к следующим выражениям для отличных от нуля компонент тензора кривизны:

$$R_{lilk} = e_l e^{2F_l}\left(F_{l,k}F_{k,i} + F_{i,k}F_{l,i} - F_{l,i}F_{l,k} - F_{l,i,k}\right), \quad i \neq k \neq l$$

$$R_{lili} = e_l e^{2F_l}\left(F_{i,l}F_{l,i} - F^2_{l,i} - F_{l,i,i} - \sum_{m\neq i,l} e_i e_m e^{2(F_i - F_m)} F_{i,m}F_{l,m}\right) + e_i e^{2F_i}\left(F_{l,l}F_{i,l} - F^2_{i,l} - F_{i,l,l}\right), \quad i \neq l$$

(по повторяющимся индексам нет суммирования!).

Индексы после запятой означают простое дифференцирование по соответствующей координате.

Упрощая тензор по двум индексам, получим:

$$R_{ik} = \sum_{l\neq i,k}\left(F_{l,k}F_{k,i} + F_{i,k}F_{l,i} - F_{l,i}F_{l,k} - F_{l,i,k}\right), \quad i \neq k$$

(по повторяющимся индексам нет суммирования!).

Индексы после запятой означают простое дифференцирование по соответствующей координате.

Упрощая тензор по двум индексам, получим:

$$R_{ik} = \sum_{l\neq i,k}\left(F_{l,k}F_{k,i} + F_{i,k}F_{l,i} - F_{l,i}F_{l,k} - F_{l,i,k}\right), \quad i \neq k,$$

$$R_{ii} = \sum_{l\neq i}\left[\left(F_{i,l}F_{l,i} - F^2_{l,i} - F_{l,i,i}\right) + e_i e_l e^{2(F_i - F_l)}\left(F_{l,l}F_{i,l} - F^2_{i,l} - F_{i,l,l} - F_{i,l}\sum_{m\neq i,l} F_{m,l}\right)\right]$$

(!!! тут найду пример - напишу, где это используется!!!)

Внутренние и пространственные индексы тензора кривизны

(слышал такое утверждение, пока хз)

Классификации тезора Римана

Обсудим типы тензоров кривизны Римана.
(хз, зачем это нужно вообще, но пока теория про это будет тут находиться. вроде других классфикаций нет)

О случаях применения классификации Петрова (???)

(??? у кого ни спрашивал - никто не применял. так что пока не знаю, узнаю - изучу для полноты. пока пусть весит теория.)

Классификация Петрова тензора Римана

В зависимости от числа независимых собственных векторов n_α мы приходим к следующей классификации возможных случаев приведения тензора кривизны, - к каноническим типам Петрова I-III.
I) Имеются три независимых собственных вектора.
При этом их квадраты $n_\alpha n^\alpha$ отличны от нуля и соответствующим поворотом тензор $D_{\alpha\beta}$, а с ним и $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$ приводятся к диагональному виду:

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)'} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)'} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(1)'} - \lambda^{(2)'} \end{pmatrix}$$
$$B_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)''} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)''} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(1)''} - \lambda^{(2)''} \end{pmatrix}.$$

В этом случае тензор кривизны имеет 4 независимых инварианта.

(???) скаляры I_1, I_2

Комплексные инварианты $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}$ выражаются алгебраически через комплексные скаляры

$$I_1 = \tfrac{1}{48}\left(R_{iklm}R^{iklm} - iR_{iklm}\overset{*}{R}{}^{iklm} \right)$$
$$I_2 = \tfrac{1}{96}\left(R_{iklm}R^{lmpr}R^{ik}_{pr} + iR_{iklm}R^{lmpr}\overset{*}{R}{}^{ik}_{pr} \right)$$

где звездочка над буквой означает дуальный тензор:

$$\overset{*}{R}_{iklm} = \frac{1}{2}E_{ikpr}R^{pr}_{lm}$$

Вычислив I_1, I_2 с помощью матриц выше, получим:

$$I_1 = \frac{1}{3}\left(\lambda^{(1)2} + \lambda^{(2)2} + \lambda^{(1)}\lambda^{(2)}\right), \quad I_2 = \frac{1}{2}\lambda^{(1)}\lambda^{(2)}\left(\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}\right)$$

Эти формулы позволяют вычислить $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}$ исходя из значений R_{iklm} в любой системе отсчета.
(??????????)
II) Имеются два независимых собственных вектора.

Квадрат одного из них при этом равен нулю, в связи с чем он не может быть принят за направление координатной оси.

Можно, однако, принять его лежащим в плоскости x^1, x^2; тогда $n_2 = in_1, n_3 = 0$.

Соответствующие уравнения (92.18) дают:

$$D_{11} + iD_{12} = \lambda, \quad D_{22} - iD_{12} = \lambda$$

откуда

$$D_{11} = \lambda - i\mu, \quad D_{22} = \lambda + i\mu, \quad D_{12} = \mu$$

Комплексная величина $\lambda = \lambda' + i\lambda''$ является скаляром и не может быть изменена.

Величине же μ путем различных комплексных поворотов может быть придано любое (отличное от нуля) значение;

можно поэтому без ограничения общности считать ее вещественной.

В результате получим следующий канонический тип вещественных тензоров $A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta}$:

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \lambda' & \mu & 0 \\ \mu & \lambda' & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda' \end{pmatrix}, \quad B_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \lambda'' - \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda'' + \mu & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda'' \end{pmatrix}$$

В этом случае имеется всего два инварианта λ' и λ''.

При этом согласно (92.21) $I_1 = \lambda^2, I_2 = \lambda^3$, так что $I_1^3 = I_2^2$. III) Имеется всего один собственный вектор с равным нулю квадратом.

Все собственные значения λ при этом одинаковы, а потому равны нулю.

Решения уравнения (92.18) могут быть приведены к виду

$$D_{11} = D_{22} = D_{12} = 0, \bar{D}_{13} = \mu, D_{23} = i\mu, \text{ так что}$$

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & \mu & 0 \end{pmatrix}.$$

классификация Петрова: идея различных типов

Покажем, каким образом строится классификация возможных типов канонической формы тензора кривизны при $R_{ik} = 0$.

Будем считать, что метрика в данной точке 4-пространства приведена к галилеевому виду.

Совокупность 20 независимых компонент тензора R_{iklm} можно представить, как совокупность трех трехмерных тензоров, определенных следующим образом:

$$A_{\alpha\beta} = R_{0\alpha0\beta}, \quad C_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} e_{\alpha\gamma\delta} e_{\beta\lambda\mu} R_{\gamma\delta\lambda\mu}, \quad B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} e_{\alpha\gamma\delta} R_{0\beta\gamma\delta},$$

где $e_{\alpha\beta\gamma}$ - единичный антисимметричный тензор;

поскольку трехмерная метрика декартова, нет необходимости делать при суммировании различие между верхними и нижними индексами).

Тензоры $A_{\alpha\beta}$ и $C_{\alpha\beta}$ по определению симметричны;

тензор $B_{\alpha\beta}$, вообще говоря, несимметричен, а его след равен нулю в силу?????

$$N \approx \frac{a\sqrt{2MU_0}}{\pi} \left(\frac{4a}{\pi} \sqrt{2MU_0} + 1 \right).$$

??? Согласно определениям (92.15) имеем, например:

$$B_{11} = R_{0123}, \quad B_{21} = R_{0131}, \quad B_{31} = R_{0112}, \quad C_{11} = R_{2323}, ...$$

Легко видеть??????, что условия $R_{km} = g^{il} R_{iklm} = 0$ эквивалентны следующим соотношениям между компонентами тензоров (92.15):

$$A_{\alpha\alpha} = 0, \quad B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha}, \quad A_{\alpha\beta} = -C_{\alpha\beta}$$

Далее введем симметричный комплексный тензор

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(A_{\alpha\beta} + 2iB_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta} \right) = A_{\alpha\beta} + iB_{\alpha\beta}$$

Примеры тензоров Римана и объектов с ними

Для полноты приведем заготовки тензоров Римана для разных моделей ОТО.
(не нужно будет - удалю этот раздел и всё. но вроде полезно было бы примеры иметь.)

Тензор Римана в гравитационной волне

(я хз)

гауссова кривизна

хз, зачем она, но тоже каснулись немного мы её.

Формула

Обзор применений

Примеры тензоров Риччи и объектов с ними

Прстранство, в котором $R_{ik} = 0$, $R^i_{klm} \neq 0$

зх, хотел бы привести его.

Обзор применений тензора Риччи

Укажем случаи применения тензора Риччи.
Участвует в уравнениях Эйнштейна:
Из тензора Риччи получается инвариант - так называемая скалярная кривизна:

$$R = g^{ik}R_{ik} = g^{il}g^{km}R_{iklm}$$

Дополнения о тензоре Риччи

(полно про него тем кст, тут некоторые укажу)

О потоках Риччи

(что за они? как связаны с тензором? понятно, в диффгеме пропишу, отсюда удалю.)

B.1.8 Other, Special Constructions of Riemannian Geometry

Тензор Вейля

(в ЛЛ что-то про него есть, я вообще не въеду,зачем он)

Суть тензора Вейля

Our favourite curvature tensors are not invariant under conformal transformations. However, it turns out that there is a combination of curvature tensors that does not change under conformal transformations. This is the Weyl tensor. In a manifold of dimension n, it is defined as

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{2}{n-2}\left(g_{\mu[\rho}R_{\sigma]\nu} - g_{\nu[\rho}R_{\sigma]\mu}\right) + \frac{2}{(n-1)(n-2)}Rg_{\mu[\rho}g_{\sigma]\nu}$$

The Weyl tensor has all the symmetry properties of the Riemann tensor, but with the additional property that if you contract any pair of indices with a metric then it vanishes. In this sense, it can be viewed as the "trace-free" part of the Riemann tensor.

Из ЛЛ2:

$$C_{iklm} = R_{iklm} - \frac{1}{2}R_{il}g_{km} + \frac{1}{2}R_{im}g_{kl} + \frac{1}{2}R_{kl}g_{im} - \frac{1}{2}R_{km}g_{il} + \frac{1}{6}R\left(g_{il}g_{km} - g_{im}g_{kl}\right)$$

Применения

хз вообще.

Нормальные координаты Римана

(хз, читать Вергелеса нужно)
(?!!! у Тонга в разделе про геодезические, я мб тоже туда вставлю их!!! пойму сперва, о чем они.)

Суть (??)

Теория (??)

(пока что вообще максимально не понял их!)
Выберем произвольную точку $p \in \mathfrak{X}$ и построим вблизи неё такую локальную систему координат x^a, в которых метрика максимально близка к псевдоевклидовой и связность в точке p обращается в нуль. Опишем процесс построения таких координат.

Проведем из точки p геодезические по всем направлениям (см. Рис. 2.1). Назовем множество таких геодезических связкой геодезических в точке p. Пусть $\{e_a\}$ - некий ОНБ в точке p. Зададим аффинный параметр s на каждой геодезической. Точка p принадлежит всем геодезическим и по предположению на каждой геодезической в точке p параметр $s = 0$. Пусть

$$v^a = e^a_\mu \frac{\mathrm{d}x^\mu(s)}{\mathrm{d}s}\bigg|_p$$

Здесь $\mathrm{d}x^\mu(s)/\left.ds\right|_p$ - вектор, касательный к некой геодезической в точке p.

Очевидно, набор величин $\{v^a\}$ однозначно задает геодезическую. Введем координаты

$$x^a(s) = v^a s,$$

которые по определению являются координатами точки на геодезической, выходящей из точки p с касательным вектором v^a, и отстоящей от точки p на расстояние s. Это и есть нормальные координаты Римана. Таким образом, в точке p нормальные координаты Римана равны нулю. Вместе с тем Ур. (2.108) является уравнением соответствующей геодезической.

Метрический тензор в нормальных координатах Римана

Вычислим метрический тензор в нормальных координатах Римана.

Далее в этом разделе мы используем только нормальные координаты Римана x^a, но обозначаем их до особой оговорки x^μ.

Заметим, что аффинный параметр геодезической остаётся таковым в любых локальных координатах, что очевидно из бескоординатной записи уравнения геодезической (2.53). В рассматриваемом случае из уравнения геодезической $x^\mu(s) = v^\mu s$ следует, что касательный вектор к этой геодезической

$$\frac{\mathrm{d}x^\mu(s)}{\mathrm{d}s} = v^\mu = \mathrm{const}$$

и для символов Кристоффеля находим:

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu(s)}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x(s))\frac{\mathrm{d}x^\nu(s)}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\lambda(s)}{\mathrm{d}s} = 0 \to \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(vs)v^\nu v^\lambda = 0$$

Перенесем базис $\{e_a\}$ из точки $x^\mu = 0$ параллельно в точку $x^\mu(s)$ вдоль геодезической, соединяющей эти две точки. Сделаем это для каждой геодезической. В полученном таким образом базисе ограничение формы связности на каждую геодезическую из рассматриваемой связки геодезических обращается в нуль:

$$\omega_\mu^{ab}(vs)\mathrm{d}\left(v^\mu s\right) = 0 \to \omega_\mu^{ab}(vs)v^\mu s = 0$$

Воспользуемся тетрадным постулатом:

$$\left(\partial_\mu e_\nu^a\right)(vs) + \omega_{b\mu}^a(vs)e_\nu^b(vs) - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda(vs)e_\lambda^a(vs) = 0$$

Спроектируем ковекторные индексы μ и ν в (2.112) на тензор $v^\mu \otimes v^\nu$, где вектор v^μ является касательным к соответствующей геодезической:

$$v^\nu v^\mu \left(\partial_\mu e_\nu^a\right)(vs) = 0$$

Мы воспользовались равенствами (2.110) и (2.111). Заметим, что дифференциальный оператор $v^\mu\partial_\mu$ действует вдоль геодезической, и потому $v^\nu v^\mu \partial_\mu = v^\mu \partial_\mu v^\nu$, так как вдоль геодезической касательный вектор постоянен. Поэтому равенство (2.113) пере писывается как

$$v^\mu \partial_\mu \left(e_\nu^a v^\nu\right)(vs) = 0$$

Из последнего равенства вытекает необходимый результат:

$$e_\nu^a v^\nu(vs) = e_\nu^a v^\nu(s=0) = v^a$$

Рассмотрим многообразие $X \times I$, где I - единичный отрезок с координатой $0 \le t \le 1$. Таким образом, на многообразии $X \times I$ вблизи точки p локальными координатами является пара $\{x^\mu, t\}$, где x^μ - нормальные координаты Римана. Определим (локально) гладкое отображение пространств

$$X \times I \to X$$

согласно правилу

$$\bar{x}^\mu = tx^\mu$$

Здесь $\bar{x}^\mu$ - нормальные координаты Римана вблизи точки $p \in \mathscr{X}$. Отображение многообразий (2.115) влечёт отображение

$$\Omega^*\mathfrak{X} \to \Omega^*(\mathcal{X} \times I)$$

которое реализуется путём подстановки во все формы в $\Omega^*\mathcal{X}$ полных дифференциалов

$$\mathrm{d}\bar{x}^\mu = x^\mu \mathrm{d}t + t\ \mathrm{d}x^\mu$$

Поскольку отображение (2.117) линейное, то оно сохраняет все соотношения между формами. В частности, в формах связности ω^{ab} и смещения ω^a (см. (2.45)) делаем замену $x^\mu \to \bar{x}^\mu, \mathrm{d}x^\mu \to \mathrm{d}\bar{x}^\mu$. Вследствие (2.111)

$$\omega_\mu^{ab}(\bar{x})\left(x^\mu \mathrm{d}t + t\ \mathrm{d}x^\mu\right) = t\omega_\mu^{ab}(\bar{x})\mathrm{d}x^\mu = \bar{\omega}^{ab}, \quad \bar{\omega}^{ab}\big|_{t=0} = 0$$

Имеем также

$$\omega^a = e_\mu^a(\bar{x})\left(x^\mu \mathrm{d}t + t\ \mathrm{d}x^\mu\right) = e_\mu^a(vst)\left(v^\mu s\ \mathrm{d}t + t\ \mathrm{d}x^\mu\right) = \\ = x^a\ \mathrm{d}t + \bar{\omega}^a, \quad \bar{\omega}^a\big|_{t=0} = 0$$

С этого места мы возвращаемся к начальному обозначению нормальных координат Римана x^a. Здесь формы $\bar{\omega}^{ab}$ и $\bar{\omega}^a$ разлагаются лишь по формам dx^a, но они не содержат форму $\mathrm{d}t$. Вычислим внешние дифференциалы форм (2.119) и (2.120):

$$\mathrm{d}\omega^{ab} = \mathrm{d}t \wedge \frac{\partial\bar{\omega}^{ab}}{\partial t} + \delta\bar{\omega}^{ab}, \quad \mathrm{d}\omega^a = \mathrm{d}t \wedge \left(-\mathrm{d}x^a + \frac{\partial\bar{\omega}^a}{\partial t}\right) + \delta\bar{\omega}^a$$

Здесь символ δ означает внешнее дифференцирование относительно переменных x^a. Теперь подставим правые части $\mathrm{Y_p}$. (2.121) в структурные уравнения (2.78) и (2.79) с нулевым тензором кручения и выделим члены, пропорциональные $\mathrm{d}t$.В результате приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial\bar{\omega}^a}{\partial t} = dx^a + \bar{\omega}^a_b x^b, \quad \frac{\partial\bar{\omega}^a_b}{\partial t} = R^a_{bcd}x^c\bar{\omega}^d, \quad \bar{\omega}^{ab}\big|_{t=0} = \bar{\omega}^a\big|_{t=0} = 0$$

Уравнения (2.122) легко решаются методом итераций относительно параметра t. Находим с точностью $O\left(t^3\right)$:

$$\bar{\omega}^a = t\ \mathrm{d}x^a + \frac{1}{6}t^3R^a_{bcd}x^bx^c\ \mathrm{d}x^d, \quad \bar{\omega}^a_b = \frac{1}{2}t^2R^a_{bcd}x^c\ \mathrm{d}x^d$$

О чевидно, при $t = 1 \quad \bar{\omega}^a = \omega^a, \bar{\omega}^a_b = \omega^a_b$. Поэтому имеем:

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{ab}\omega^a\omega^b = g_{ab}\ \mathrm{d}x^a\ \mathrm{d}x^b, \quad g_{ab} = \eta_{ab} + \frac{1}{3}R_{acdb}x^cx^d$$

$$\omega^a_b = \frac{1}{2}R^a_{bcd}x^c\ \mathrm{d}x^d$$

В (2.123) и (2.124) тензор кривизны берется в точке p. Таким образом, можсно так выбрать координаты, ито связность обращjается в нуль в любой заданной точке. [1] Построенные координаты называются Нормальными координатами Римана, эта система координат здесь обозначаются K_0.

Следует заметить, что однородные преобразования Лоренца трансформируют нормальные координаты Римана в нормальные координаты Римана в той же точке многообразия.

Если $R_{abcd} = 0$ в точке p, то вблизи точки p отклонение метрики от псевдоевклидовой еще меньше. Если же $R_{abcd} = 0$ везде, то из Ур. (2.122) следует, что во всем пространстве координаты можно выбрать так, что метрика будет везде псевдоевклидовой, т.е. в этом случае пространство-время псевдоевклидово (если не учитывать его глобальных топологических свойств).

Тензор кручения

(всё, что нужно - про него тут)

Определение тензора кручения

совокупность 2-форм

$$T^A = 2\left(\ \mathrm{d}\omega^A + \omega^A_B \wedge \omega^B\right)$$

при преобразованиях репера преобразуется как компоненты контравариантного вектора. T^A называется тензором кручения пространства.

В теории с принципом эквивалентности тензор кручения равен нулю

В излагаемой теории, основанной на принципе эквивалентности, тензор кручения должен равняться нулю.

Действительно, в силу этого принципа должна существовать «галилеева» система координат, в которой в данной точке обращаются в нуль величины Γ^i_{kl}, а следовательно и S^i_{kl}. Но поскольку S^i_{kl} - тензор, то, будучи равным нулю в одной системе, он будет равен нулю и в любой системе координат.

Пример применений тензора кручения (?)

(хз)

Связь с теорией Янга-Миллса

(Тонг связь видит, я - нет. потом разберу его идеи.)

Теория

It is no secret that the force of gravity is geometrical. However, the other forces are equally as geometrical. The underlying geometry is something called a fibre bundle, rather than the geometry of spacetime.

We won't describe fibre bundles in this course, but we can exhibit a clear similarity between the structures that arise in general relativity and the structures that arise in the other forces, which are described by Maxwell theory and its generalisation to Yang-Mills theory.

Yang-Mills theory is based on a Lie group G which, for this discussion, we will take to be $SU(N)$ or $U(N)$. If we take $G = U(1)$, then Yang-Mills theory reduces to Maxwell theory. The theory is described in terms of an object that physicists call a gauge potential. This is a spacetime "vector" A_μ which lives in the Lie algebra of G. In more down to earth terms, each component is an anti-Hermitian $N \times N$ matrix, $(A_\mu)^a_{\ b}$, with $a, b = 1, ..., N$. In fact, as we saw above, this "vector" is really a one-form. The novelty is that it's a Lie algebra-valued one-form.

Mathematicians don't refer to A_μ as a gauge potential. Instead, they call it a connection (on a fibre bundle). This relationship becomes clearer if we look at how A_μ changes under a gauge transformation

$$\tilde{A}_\mu = \Omega A_\mu \Omega^{-1} + \Omega \partial_\mu \Omega^{-1}$$

where $\Omega(x) \in G$. This is identical to the transformation property (3.45) of the one-form connection under local Lorentz transformations.

In Yang-Mills, as in Maxwell theory, we construct a field strength. In components, this is given by

$$(F_{\mu\nu})^a_{\ b} = \partial_\mu (A_\nu)^a_{\ b} - \partial_\nu (A_\mu)^a_{\ b} + [A_\mu, A_\nu]^a_{\ b}$$

Alternatively, in the language of forms, the field strength becomes

$$F^a_b = dA^a_b + A^a_c \wedge A^c_b$$

Again, there is an obvious similarity with the curvature 2 -form introduced in (3.50). Mathematicians refer to the Yang-Mills field strength the "curvature".

A particularly quick way to construct the Yang-Mills field strength is to take the commutator of two covariant derivatives. It is simple to check that

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = F_{\mu\nu}$$

where I've suppressed the a, b indices on both sides. This is the gauge theory version of the Ricci identity (3.16): for a torsion free connection,

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] Z^\sigma = R^\sigma_{\rho\mu\nu} Z^\rho$$

B.2 Equations of PDE

Обсудим темы уравнений математической физики, использующиеся в ОТО.
(постепенно собирать буду)

Функции Грина

(потом соберу всю необходимую теорию про неё)

Уравнение Пуассона

типичное дело - решать уравнение пуассона

Типичное решение уравнения Пуассона

Уравнение Пуассона в N размерностях

Лакшкевич говорит, что это нужно.

О применениях уравнения Пуассона в ОТО

(потом пропишу)

B.3 Some Other Constructions of Mathematics for GR

(потом мб сгруппирую иначе)

B.3.1 Numerical Relativity

Обсудим вкратце, как численно решать уравнения Эйнштейна и моделировать ОТО.
(потом мб пропишу тут методы расчета, потом мб моделировать начну. пока знаю, что такое есть и пофиг.)

Обзор

(вики)
Численная относительность (англ. numerical relativity) — область общей теории относительности, которая разрабатывает и использует численные методы и алгоритмы для компьютерного моделирования физических процессов в сильных гравитационных полях, когда необходимо численно решать уравнения Эйнштейна.

Основные физические системы, для описания которых необходима численная относительность, относятся к релятивистской астрофизике и включают в себя гравитационный коллапс, нейтронные звёзды, чёрные дыры, гравитационные волны и другие объекты и явления, для адекватного описания которых необходимо обращаться к полной общей теории относительности без обычных приближений слабых полей и малых скоростей (как в постньютоновских разложениях и теории возмущений на фоне точных решений уравнений Эйнштейна)[1].

Моделирование в этой области требует специальных численных методов из-за сложности и нелинейности уравнений Эйнштейна (например, гиперболичность и корректность постановки задачи Коши их временнОй эволюции зависит от представления уравнений, а также начальных и граничных условий[2]), а также — для большинства трёхмерных задач — большой вычислительной мощности, доступной лишь современным суперкомпьютерам. На данный момент в численной относительности актуальны исследования в области моделирования релятивистских тесных двойных звёзд и связанных с ними гравитационных волн, а также многие другие математические и астрофизические проблемы[1].

B.3.2 Integral Theorems of Analysis

Часто в ОТО используются интегральные теоремы, которые тут обсудим и покажем примеры.

Теорема Стокса

Суть

(сформулирую и докажу)

Обзор применений в ОТО

Пока что так-то и не применял, посмотрим.

Пример применений

Теорема Гаусса

(про неё есть пара идейных вопросов, но пока не буду про это думать, не до этого.)

Суть и формулировка

теорема Гаусса (83.17) для преобразования интеграла от вектора по гиперповерхности в интеграл по 4-объему может быть написана ввиду (86.9) как

$$\oint A^i \sqrt{-g} dS_i = \int A^i_{;i} \sqrt{-g} d\Omega$$

Обзор применений в ОТО

Пока что так-то и не применял, посмотрим.

О теореме Гаусса в пространстве Минковского

(нас вообще не смущает, что метрика там неевклидова? мб пример приведу.)

Пример применений

Доказательство

мб несколько удобнейших приведу.

B.3.3 Catalog of Integrals Useful for GR

(для полноты посчитаем типичные интегралы. мб в матан просто перенесу это и всё.)

Интегралы по 3-поверхности в 4-мерном пространстве

давно было интересно, Мизнер Торн на стр 193 вроде норм прописали

Эллиптические интегралы

важно разобрать, а то часто встречается, а что это - и не понятно.

Основные формулы эллиптических интегралов

Вывод формул эллиптических интегралов

Обзор применений эллиптических интегралов в ОТО

а вот что-то не помню даже, потом проработаю.

B.3.4 Variational Methods

Основные формулы варьирования

хз

О перемене местами варьирования и дифференцирования

пока считаем, что так всегда можно делать.
потом можно поразбираться, когда так нельзя делать, сейчас это не актуально.

B.3.5 Differential Equations

(мб в диффгем перенесу)

Задача Коши для ОТО

часто про это возникает вопрос, как там задать условия, чтобы всё было единственное, тут теоремы на это соберу.

B.3.6 Linear Algebra

Обсудим темы линейной алгебры, использующиеся в ОТО.
(если нужно будет - пропишу сюда)

О двойственности

(часто на первых лекциях она обсуждается)
(пока не готов написать, всё равно, сперва в линале бы писал)

О тензорах

Суть тензоров

(вся теория о них вкратце тут!!!)

возможные типы приведения к каноническому виду симметричного тензора второго ранга

(хз, зачем это, пока просто весит задача. пока не до неё.)
Рассмотреть возможные типы приведения к каноническому виду симметричного тензора второго ранга.

Приведение симметричного тензора A_{ik} к главным осям означает нахождение таких «собственных векторов» n^i, для которых

$$A_{ik}n^k = \lambda n_i$$

Соответствующие главные значения λ получаются как корни уравнения 4-й степени

$$|A_{ik} - \lambda g_{ik}| = 0$$

и являются инвариантами тензора.

Как величины λ, так и соответствующие им собственные векторы могут оказаться комплексными.

(Компоненты же самого тензора A_{ik} предполагаются, разумеется, вещественными.)

Из уравнений (1) легко показать обычным путем, что два вектора $n_i^{(1)}$ и $n_i^{(2)}$, соответствующих двум различным главным значениям $\lambda^{(1)}$ и $\lambda^{(2)}$, взаимно ортогональны:

$$n_i^{(1)} n^{(2)i} = 0$$

В частности, если уравнение (2) имеет комплексно-сопряженные корни λ и λ^*, которым соответствуют комплексно-сопряженные векторы n_i и n_i^*, то должно быть

$$n_i n^{i*} = 0$$

Тензор A_{ik} выражается через свои главные значения и соответствующие собственные векторы формулой

$$A_{ik} = \sum \lambda \frac{n_i n_k}{n_l n^l}$$

(если только какое-либо из $n_l n^l$ не равно нулю - см.

ниже). В зависимости от характера корней уравнения (2) могут иметь место следующие три различных случая. I) Все четыре главных значения λ вещественны.

При этом вещественны также и векторы n^i, а поскольку все они взаимно ортогональны, то три из них должны иметь пространственное, а один - временное направление (их можно

нормировать соответственно условиями $n_l n^l = -1$ и $n_l n^l = 1$).

Выбрав направления осей координат вдоль этих векторов, приведем тензор к виду

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} \lambda^{(0)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^{(3)} \end{pmatrix}$$

II) Уравнение (2) имеет два вещественных $\left(\lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}\right)$ и два комплексносопряженных $(\lambda' \pm i\lambda'')$ корня.

Комплексно-сопряженные векторы $n_i, n_i^*, ...0$ -ответствующие двум последним корням, напишем в виде $a_i \pm ib_i$; поскольку они определены лишь с точностью до произвольного комплексного множителя, можно нормировать их условием $n_i n^i = n_i^* n^{i*} = 1$.

Учитывая также (4), найдем для вещественных векторов a_i, b_i условия:

$$a_i a^i + b_i b^i = 0, \quad a_i b^i = 0, \quad a_i a^i - b_i b^i = 1,$$

откуда $a_i a^i = 1/2, b_i b^i = -1/2$, т.

е.

один из этих векторов имеет временное, а другой - пространственное направление [I]).

Выбрав координатные оси вдоль векторов $a^i, b^i, n^{(2)i}, n^{(3)i}$, приведем (согласно (5)), тензор к виду

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} \lambda' & \lambda'' & 0 & 0 \\ \lambda'' & -\lambda' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^{(3)} \end{pmatrix}$$

III) Если квадрат одного из векторов n^i равен нулю $\left(n_l n^l = 0\right)$, то этот вектор не может быть выбран в качестве направления координатной оси.

Можно, однако, выбрать одну из плоскостей $x^0 x^\alpha$ так, чтобы вектор n^i лежал в ней.

Пусть это будет плоскость $x^0 x^1$.

Тогда из $n_l n^l = 0$ следует, что $n^0 = n^1$ и из уравнений (1) имеем:

$$A_{00} + A_{01} = \lambda, \quad A_{10} + A_{11} = -\lambda$$

откуда

$$A_{00} = \lambda + \mu, \quad A_{11} = -\lambda + \mu, \quad A_{01} = -\mu$$

где μ -неинвариантная величина, меняющаяся при поворотах в плоскости $x^0 x^1$; должным поворотом она всегда может быть сделана вещественной.

Выбирая оси x^2, x^3 по двум другим (пространственным) векторам $n^{(2)i}, n^{(3)i}$, приведем тензор к виду

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} \lambda+\mu & -\mu & 0 & 0 \\ -\mu & -\lambda+\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda^{(3)} \end{pmatrix}$$

Этот случай соответствует равенству двух корней $\left(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}\right)$ уравнения (2).

Отметим, что для физического тензора энергии-импульса T_{ik} вещества, движущегося со скоростями, меньшими скорости света, может иметь место лишь первый случай; это связано с тем, что всегда должна существовать такая система отсчета, в которой поток энергии вещества, т.

е.

компоненты $T_{\alpha 0}$, равен нулю.

Для тензора же энергии-импульса электромагнитных волн имеет место третий случай с $\lambda = \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)} = 0$ (ср.

с.

112); можно показать, что в противном случае существовала бы система отсчета, в которой поток энергии превышал умноженную на c ее плотность.

Зачем то, что выше (??)

(хз, зачем эта задача из ЛЛ2...)

C Some Physics and Programming

C.1 Типичная подразумевающаяся понятной физика для гравитации

Приведем специальную теорию относительности со стороны, которая удобная для расширения её в ОТО.

(не типичную - мб после этого раздела создам, но мб и не создам, посмотрим.)

C.1.1 Other SR and Mechanics

(напишу потом, пока это в теории поля)

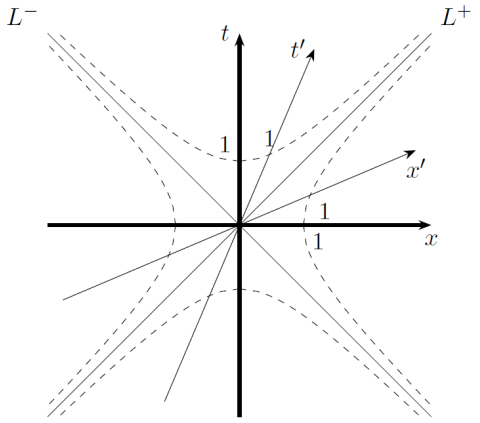
Преобразования Лоренца

Обсудим вкратце преобразования Лоренца.

Суть

Иллюстрация в пространстве $t(r)$

Преобразования Лоренца в пространстве-времени имеют вид на рис. ??.



тут важно, что у нас оси времени и координат поворачиваются к наклонной линии.
пунктирные линии - xз
(тут пояснения, пока что не так уж разобрался)
потом разберусь.

Равноускоренное движение

Суть

(пока xз, не овладел ещё)

Теория Тонга

We will view things from the perspective of an inertial frame, with coordinates (ct, x, y, z). The elevator will experience a constant acceleration a in the x direction. We want to know what this looks like in the inertial frame; clearly the trajectory is not just $x = \frac{1}{2}at^2$ since this would soon exceed the speed of light. Instead we need to be more careful.

Recall that if we do a boost by v_1, followed by a boost by v_2, the resulting velocity is

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2}$$

This motivates us to define the rapidity φ, defined in terms of the velocity v by

$$v = c \tanh \varphi$$

The rapidity has the nice property that is adds linearly under successive boosts: a boost φ_1 followed by a boost φ_2 is the same as a boost $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

A constant acceleration means that the rapidity increases linearly in time, where here "time" is the accelerating observer's time, τ. We have $\varphi = a\tau/c$ and so, from the perspective of the inertial frame, the velocity of the constantly-accelerating elevator

$$v(\tau) = \frac{dx}{dt} = c \tanh\left(\frac{a\tau}{c}\right)$$

To determine the relationship between the observer's time and the time t in the inertial frame, we use

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma(\tau) = \sqrt{\frac{1}{1 - v^2/c^2}} = \cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{c}{a}\sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right)$$

where we've chosen the integration constant so that $\tau = 0$ corresponds to $t = 0$. Then, to determine the distance travelled in the inertial frame, we use

$$v(\tau) = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{d\tau} = c\sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right) \Rightarrow x = \frac{c^2}{a}\cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right) - \frac{c^2}{a}$$

where this time we've chosen the integration constant so that the trajectory passes through the origin. The resulting trajectory is a hyperbola in spacetime, given by

$$\left(x + \frac{c^2}{a}\right)^2 - c^2t^2 = \frac{c^4}{a^2}$$

This trajectory is shown in red in Figure 1. As $\tau \to \pm\infty$, the trajectory asymptotes to the straight lines $ct = \pm(x + c^2/a)$. These are the dotted lines shown in the figure. Now let's consider life from the perspective of guy in the accelerating elevator. What are the natural coordinates that such an observer would use to describe events elsewhere in spacetime? Obviously, for events that happen on his own worldline, we can use the proper time τ. But we would like to extend the definition to assign a time to points in the whole space. Furthermore, we would like to introduce a spatial coordinate, ρ, so that the elevator sits at $\rho = 0$. How to do this?

There is, it turns out, a natural choice of coordinates. First, we draw straight lines connecting the point $(ct, x) = (0, -c^2/a)$ to the point on the trajectory labelled by τ and declare that these are lines of constant τ; these are the pink lines shown in the

figure. Next we note that, for any given τ, there is a Lorentz transformation that maps the x-axis to the pink line of constant τ. We can use this to define the spatial coordinate ρ. The upshot is that we have a map between coordinates (ct, x) in the inertial frame and coordinates $(c\tau, \rho)$ in the accelerating frame given by

$$ct = \left(\rho + \frac{c^2}{a}\right)\sinh\left(\frac{a\tau}{c}\right)$$
$$x = \left(\rho + \frac{c^2}{a}\right)\cosh\left(\frac{a\tau}{c}\right) - \frac{c^2}{a}$$

As promised, the line $\rho = 0$ coincides with the trajectory of the accelerating observer. Moreover, lines of constant $\rho \neq 0$ are also hyperbolae.

The coordinates $(c\tau, \rho)$ do not cover all of Minkowski space, but only the right-hand quadrant as shown in Figure 1. This reflects the fact that signals from some regions will never reach the guy in the elevator. This is closely related to the idea of horizons in general relativity, a topic we'll look explore more closely in later sections.

Finally, we can look at the metric experienced by the accelerating observer, using coordinates ρ and τ. We simply substitute the transformation (1.25) into the Minkowski metric to find

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -\left(1 + \frac{a\rho}{c^2}\right)^2 c^2d\tau^2 + d\rho^2 + dy^2 + dz^2$$

This is the metric of (some part of) Minkowski space, now in coordinates adapted to an accelerating observer. These are known as Kottler-Möller coordinates. (They are closely related to the better known Rindler coordinates. We'll see Rindler space again in Section 6.1.2 when we study the horizon of black holes.) The spatial part of the metric remains flat, but the temporal component is given by

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{a\rho}{c^2}\right)^2 = -\left(1 + \frac{2a\rho}{c^2} + \ldots\right)$$

where the … is simply $a^2\rho^2/c^4$, but we've hidden it because it is sub-leading in $1/c^2$. If we compare this metric with the expectation (1.24), we see that the accelerated observer feels an effective gravitational potential given by

$$\Phi(\rho) = a\rho$$

This is the promised manifestation of the equivalence principle: from the perspective of an uniformly accelerating observer, the acceleration feels indistinguishable from a linearly increasing gravitational field, corresponding to a constant gravitational force.

О применениях равноускоренного движения в ОТО

(пока хз)

Основы механики

Вкратце обсудим основы механики, чтобы не возвращаться к ним далее.
(потом пропишу)

уравнение Гамильтона-Якоби

уравнение Гамильтона-Якоби часто встречается в ОТО, так что полезно четко понимать, как оно работает.

конструкция уравнения Г-Я

(сперва в механике пропишу, потом сюда)

различные виды уравнения Гамильтона-Якоби в ОТО

Покажем примеры уравнений Гамильтона-Якоби, чтобы быть знакомым с ним.
Падение пыли описывается уравнением Гамильтона-Якоби, которое для собственного времени $\tau(t,r)$ пылинок: (?????)

$$e^{2h(r)-2F(t)}\tau_{,t}^2 - e^{-2h(r)}\tau_r^2 = 1$$

Для света оно имеет вид:
????

Частицы в плоском пространстве

Приведем коротко известную теорию релятивистской механики движения частиц.

Вид уравнений

они имеют вид:

$$\dot{\boldsymbol{p}} = e\boldsymbol{E} + e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{A}} - \nabla\varphi, \quad \boldsymbol{H} = \nabla\times\boldsymbol{A}$$

В более инвариантном виде уравнение движения можно записать как

$$m\frac{du^\mu}{ds} = eF^\mu_\nu u^\nu$$

Построение уравнений движения

(пока Лшк, потом от себя напишу)
Электромагнитное поле описывается 4-потенциалом $A_\bullet = (\varphi, -\boldsymbol{A})$ или, более точно, 1-формой $A(x) = A_\mu(x)dx^\mu$. Движение частицы описывается действием

$$S[x] = \int\limits_A^B (-mds - eA) = \int\limits_A^B (-mds - eA_\mu dx^\mu) = \int\limits_{t_A}^{t_B} dt\left(-m\sqrt{1-v^2} + eAv - e\varphi\right).$$

Уравнение движения можно написать в гамильтоновой форме. Имеем для импульсов

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}} + e\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A}$$

и для гамильтониана

$$H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{v}\boldsymbol{P} - L = \sqrt{m^2 + (\boldsymbol{P} - e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}))^2} + e\varphi(\boldsymbol{r})$$

Уравнение движения

$$\dot{\boldsymbol{P}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}}, \quad \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{P}}$$

нетрудно привести к стандартному виду

$$\dot{\boldsymbol{p}} = e\boldsymbol{E} + e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{A}} - \nabla\varphi, \quad \boldsymbol{H} = \nabla\times\boldsymbol{A}$$

В более инвариантном виде уравнение движения можно записать как

$$m\frac{du^\mu}{ds} = eF^\mu_\nu u^\nu$$

где тензор электромагнитного поля определяется как

$$F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu = dA$$

ИлИ

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Об обобщении на случай гравитационного поля

(пропишу потом обобщение)

О движении планет по Ньютону

(для сравнения укажем, как по нему было. максимально коротко, подробно - в механике об этом. скопирую потом от туда.)

C.1.2 Field Theory and Electrodynamics

Обсудим некоторые теоретико-полевые конструкции, которые иногда нужны в ОТО.

обзор отдельных конструкций, которые применяются в ОТО

Формализм теории поля

Для начала обсудим как можно более коротко, что из себя представляет теории поля, чтобы далее пользоваться ей.

Формализм теории поля

теории поля утверждает, что поля задаваться могут через действие:

$$S[\phi] = \int d^d x \mathcal{L}\left(\phi, \partial_\bullet \phi\right)$$

здесь вводится

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^r} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi^r\right)} = 0$$

репараметризационная инвариантность: суть

пусть заменим $\tau = \alpha(\tau)$, это называется *репараметризационная инвариантность*. это нас интересует, так как мы смотрим на мировую линию и ее параметризацию. (там вопросы про неё есть, но это в теории поля я напишу)

репараметризационная инвариантность: применения в ОТО

я не знаю, зачем она нужна в ОТО пока что.

Скалярное поле для ОТО

(вкратце приведу теорию обычного скалярного поля, потом подробно про кривые пространства. сперва об этом в теории поля пропишу)

скалярное поле в искривленном пространстве в двух словах???

Чаще всего лагранжианы имеют вид:

$$\mathcal{L}\left(\phi, \partial_\bullet \phi\right) = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} G_{rs}(\phi)\partial_\mu \phi^r \partial_\nu \phi^s - U(\phi)$$

$$S[\phi] = \frac{1}{2}\int d^{d-1}x \left(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \omega_0^2\phi^2\right)$$

уравнения движения

наши решения придут из уравнения:

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi + \omega_0^2\phi = 0$$

$$\phi_{k,\alpha}(x) = \mathrm{Re}\, e^{\mathbf{i}kx + \mathbf{i}\alpha}$$

$$k^2 = \omega_0^2 \leftrightarrow k^0 = \pm\omega_k \equiv \pm\sqrt{\omega_0^2 + k^2}$$

$$k^2 = \omega_0^2 \leftrightarrow k^0 = \pm\omega_k \equiv \pm\sqrt{\omega_0^2 + k^2}$$

тут такие вот наши решения, и тут вводим обозначения k, ω - первая компонента k.

релятивистский спектр????

так вот распространяется поле с таким лагранжианом.

квантованное скалярное поле???

и еще можно заниматься квантованием этого.

добавление искривленного пространства

по сути самое главное, про что у меня пока ничего не написано.

??? вариация по сдвиговому полю

теперь будем добавлять сдвиги.
типа как переходим в другую С.О.

$$0 = \delta_\xi S = \int d^d x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta_\xi \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\lambda}} \delta \left(\phi_{,\lambda} \right) \right) - \int d^d x \xi^\mu \partial_\mu \mathcal{L}$$

вычитание - это сдвиг по области U, которая конечная и по которой идет у нас интегрирование.

$$\delta_\xi \phi = \xi^\mu \phi_{,\mu}, \quad \delta \left(\xi_{,\lambda} \right) = \xi^\mu \phi_{,\lambda\mu}$$

далее эти производные Ли мы берем и считаем.
это нужно подставить в действие и спустя преобразования мы получаем следующее

$$0 = \delta_\xi S = \int d^d x \xi^\mu \phi_{,\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\lambda}} \right) + \int d^d x \xi^\mu \partial_\lambda T^\lambda_\mu$$

тут первая часть - решения Э-Л, так что она 0.
(над этим моментом и варьированием нужно много думать!!!! типа эти переходы не такие уж простые)

Тензор энергии-импульса в теории поля

(пока в теории поля пишу, потом сюда добавлю суть. так-то в ОТО он выше обсуждается.)

C.1.3 Field Theory in Curved Space in a Nutshell

(мб потом в одну из первых частей закину, вообще пока в теории поля об этом.)

алгоритм построение полей

(вторая часть лекции 5 Лашкевича, хз)

$$S[\phi|g] = \int d^d x \sqrt{|g|} \mathcal{L} \left(\phi, \partial_\bullet \phi | g \right)$$

ковариантность

нам нужна ковариантность лагранжиана.
и что-то нам еще нужно, я хз.

пример

можно привести пример:
(5.21 лашкевич)
может стоять скаляр Риччи, который в плоском пространстве равен 0, а в искривленном - хз.
от метрики зависит он.

минимальная связь с гравитацией

$$\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}, \quad \partial_\mu \to \nabla_\mu$$

производные от метрики - входят только как ковариантные производные - тогда говорим, что связь гравитации и материи минимальная.

теория с минимальным взаимодействием пространства и материи. ЭМ поле кстати такое вот.

посмотрим, что с полями у нас происходит?

??? варьирование

как и в прошлой части, мы занимаемся варьированием (как????)
тут просто одна из важнейших частей работы с полями

$$0 = \delta_\xi S = \int d^d x \left(\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial \phi} \delta_\xi \phi + \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial \phi_{,\lambda}} \delta_\xi \left(\phi_{,\lambda}\right) \right) + \int d^d x \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} \delta_\xi g_{\mu\nu} - \int d^d x \partial_\mu \left(\xi^\mu \sqrt{|g|}\mathcal{L} \right)$$

(тут последнее - согласованность связности с метрикой.
про это также я продумаю.)
это было достаточно мощное разложение.
тут переименуем слагаемые.
"философия в том, что мы не координаты заменяем, а поле само преобразуем"

вид производных Ли (???)

Для производных Ли мы теперь должны использовать полные формулы:
типа как вариации находим:
(см 3 лекцию!!!!!!!!! рил!!!!)

$$\delta_\xi \phi = \xi^\mu \phi_{,\mu}, \quad \delta_\xi \left(\phi_{,\lambda}\right) = \xi^\mu \phi_{;\lambda\mu} + \phi_{,\lambda} \xi^\lambda; \mu, \quad \delta_\xi g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}$$

для решения вариации предлагается сделать:

$$(\mathbf{I}) + (\mathbf{III}) = \int d^d x \sqrt{|g|} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\lambda}} \right) \phi_{,\kappa} \xi^\kappa + \int d^d x \partial_\lambda \left(\sqrt{|g|} \tilde{T}^\lambda_\kappa \xi^\kappa \right)$$

таким образом тут как и ранее, одна из частей - уравнение движения.

$$\frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial \phi} = \partial_\lambda \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial \phi_{,\lambda}}$$

что ж, преобразуем пожалуй его.
и (мб на 3 лект) у нас формула для вынесения метриви была.
в итоге уравнение движения в ковариантной форме это:
(это верно только в случае скалярного поля)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \nabla_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\lambda}}$$

???? вывод метрического тензора энергии-импульса

крч, осталось одно слагаемое

$$(\Pi) = \int d^d x 2 \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} \xi_{\nu;\mu} = \int d^d x \partial_\lambda \left(2 \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\lambda\nu}} \xi_\nu \right) - \int d^d x 2 \sqrt{|g|} \nabla_\mu \frac{\partial(\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\sqrt{|g|}\partial g_{\mu\nu}} \xi_\nu$$

вот это наверное никто не будет проверять:

$$0 = \Delta_\xi S = \int d^d x \left(\sqrt{|g|} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\lambda}} \right) \phi_{,\nu} - 2\sqrt{|g|} \nabla_\mu \frac{\partial (\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\sqrt{|g|}\partial g_{\mu\nu}} \right) \xi^\nu$$
$$+ \int d^d x \partial_\mu \left(\sqrt{|g|} \tilde{T}^{\mu\nu} \xi_\nu + 2 \frac{\partial (\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} \xi_\nu \right)$$

говорим, что это вариационная производная по метрике.
и у нас получился еще *метрический тензор энергии импульса.*
?????????? всё переработать нужно.

связь метрического тензора с каноническим

можно показать, что метрический с точностью до симметризации совпадает с каноническим.

$$2\nabla_\mu \frac{\partial (\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\sqrt{|g|}\partial g_{\mu\nu}} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\lambda}} \right) \phi_{,\nu}$$

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\Delta S}{\Delta g_{\mu\nu}} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}} \left(\frac{\partial (\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial (\sqrt{|g|}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}} + \cdots \right)$$

????????
преобразуем дальше вариацию действия.
за счет того, что мы в теории с минимальной связью, мы зачеркиваем пару слагаемых.
и остается слагаемое

$$0 = \Delta_\xi S = \int\limits_U d^d \sqrt{|g|} T^{\mu\nu}_{;\nu} \xi_\mu + \int\limits_{\partial U} df_\nu) \sqrt{|g|} (\tilde{T^{\mu\nu}} - T^{\mu\nu})) \xi_\mu$$

материя, взаимодействуя с гравитацией обменивается энергией и импульсом.

$$T^{\nu\nu}_{;\nu} = 0$$

и поверхностные короче тоже равны 0.
крч.
чтобы все было равно 0, поэтому только так и может быть.
в общем, чтобы все занулилось - нужно, чтобы канонический тензор энергии импульса равен метрическому.
а в общем случае добавляется к этому равенству $\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\lambda) \sqrt{|g|} \psi^{\mu\nu\lambda})$. то есть для каждого поля это свое.

ТЭИ частиц

Выведем ТЭИ для частицы и укажем его применения.

действие для частицы

ведь там действие уже другое:
(вспоминаем формулу действия откуда-то)
и тут нам предлагается метод:

$$S[x|g] = \int d^d x \int d\tau \delta \left(x^\bullet - x^\bullet(\tau) \right) \left(-m\sqrt{g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu(\tau) \dot{x}^\nu(\tau)} - eA_\mu(x) \dot{x}^\mu(\tau) \right)$$

Здесь дельта-функцию на многообразии мы переписываем как произведение от координат, что как раз изображается через $\bullet$.
????

вывод ТЭИ для частицы???

таким образом для частицы это все такое:

$$T^{\mu\nu} = \int ds \frac{\Delta\left(x^{\bullet} - x^{\bullet}(s)\right)}{\sqrt{|g|}} m\dot{x}^{\mu}(s)\dot{x}^{\nu}(s)$$

$$\delta_g(x,y) = \frac{\delta\left(x^{\bullet} - y^{\bullet}\right)}{\sqrt{|g(y)|}} - \quad \text{дельта функцуия на многообразии}$$

вот решение задачи про частицу:

$$T^{\mu\nu} = \int ds \delta_g(x, x(s)) m\dot{x}^{\mu}(s)\dot{x}^{\nu}(s)$$

Примеры ТЭИ для частиц

Соберем разные тензоры энергии импульса для нашего кругозора, а также для некоторых моделей далее.

ТЭИ движущейся пылевидной материи

это материя, у которой есть масса, но нет давления, значит, нет напряжений
для нее тензор энергии импульса:

$$T^{\nu\mu} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

теперь перейдем в другую С.О., которая движется с u^{μ}
в итоге $T^{\nu\mu} = \rho u^{\nu} u^{\mu}$
?????
теперь сложним систему и добавим давление.
тензор может быть только с диагонаьлными компонентами.

ТЭИ движущейся жидкости

Движущаяся жидкость с плотностью ρ и давлением p
?????

ТЭИ нерелятивистского идеального газа

хз

ТЭИ ультрарелятивистского идеального газа

хз

Электродинамика для теорий гравитации

Часто возниакет вопрос про электромагнитные явления в случае гравитационного поля, поэтому очень удобно под рукой иметь эти нужные основы, ибо вопросов может возникать прямо крайне много.

C.2 Programming for Gravity

(I'll write it very very later)

Определение параметров метрики

(разделю потом, чтобы было удобнее, пока просто такой список.)

```
Clearing the values of symbols:
In[1]:= Clear[coord, metric, inversemetric, affine,
t, r, Theta, Phi]
Setting the dimension:
In[2]:= n:= 4
Defining a list of coordinates:
In[3]:= coord:= {t, r, Theta, Phi}
Defining the metric:
In[4]:= metric:= {{-(1 - rs/r) c^2, 0, 0, 0},
{0, 1/(1 - rs/r), 0, 0},
{0, 0, r^2, 0},
{0, 0, 0, r ^2 Sin[Theta]^2}}
In[5]:= metric // MatrixForm
12 CHAPTER 1. INTRODUCTION AND NOTATION
Calculating the inverse metric:
In[6]:= inversemetric:= Simplify[Inverse[metric]]
In[7]:= inversemetric // MatrixForm
Calculating the Christoffel symbols of the second kind:
In[8]:= affine:= affine = Simplify[
Table[(1/2) Sum[inversemetric[[Mu, Rho]] (
D[metric[[Rho, Nu]], coord[[Lambda]]] +
D[metric[[Rho, Lambda]], coord[[Nu]]] -
D[metric[[Nu, Lambda]], coord[[Rho]]]),
{Rho, 1, n}], {Nu, 1, n}, {Lambda, 1, n}, {Mu, 1, n}]]
Displaying the Christoffel symbols of the second kind:
In[9]:= listaffine:=
Table[If[UnsameQ[affine[[Nu, Lambda, Mu]], 0],
{Style[ Subsuperscript[\[CapitalGamma],
Row[{coord[[Nu]], coord[[Lambda]]}], coord[[Mu]]], 18],
"=",
Style[affine[[Nu, Lambda, Mu]], 14]}],
{Lambda, 1, n}, {Nu, 1, Lambda}, {Mu, 1, n}]
In[10]:= TableForm[Partition[DeleteCases[Flatten[listaffine],
Null], 3],
TableSpacing -> {1, 2}]
Defining the Riemann tensor:
In[11]:= riemann:= riemann =
Table[D[affine[[Nu, Sigma, Mu]], coord[[Rho]]] -
D[affine[[Nu, Rho, Mu]], coord[[Sigma]]] +
Sum[affine[[Rho, Lambda, Mu]]
affine[[Nu, Sigma, Lambda]] -
affine[[Sigma, Lambda, Mu]]
affine[[Nu, Rho, Lambda]],
{Lambda, 1, n}],
{Mu, 1, n}, {Nu, 1, n}, {Rho, 1, n}, {Sigma, 1, n}]
Defining the Riemann tensor with lower indices:
In[12]:= riemannDn:= riemannDn =
Table[Simplify[
Sum[metric[[Mu, Kappa]] riemann[[Kappa, Nu, Rho, Sigma]],
{Kappa, 1, n}]],
{Mu, 1, n}, {Nu, 1, n}, {Rho, 1, n}, {Sigma, 1, n}]
In[13]:= listRiemann:=
Table[If[UnsameQ[riemannDn[[Mu, Nu, Rho, Sigma]], 0],
{Style[Subscript[R, Row[{coord[[Mu]], coord[[Nu]], coord[[Rho]],
coord[[Sigma]]}]], 16], "=",
riemannDn[[Mu, Nu, Rho, Sigma]]}],
{Nu, 1, n}, {Mu, 1, Nu}, {Sigma, 1, n}, {Rho, 1, Sigma}]
In[14]:= TableForm[Partition[DeleteCases[Flatten[listRiemann],
Null], 3],
TableSpacing -> {2, 2}]
Defining the Ricci tensor:
In[15]:= ricci:= ricci =
Table[Simplify[
Sum[riemann[[Rho, Mu, Rho, Nu]], {Rho, 1, n}]],
{Mu, 1, n}, {Nu, 1, n}]
In[16]:= listRicci:=
Table[If[UnsameQ[ricci[[Mu, Nu]], 0],
{Style[Subscript[R, Row[{coord[[Mu]], coord[[Nu]]}]], 16],
"=",
Style[ricci[[Mu, Nu]], 16]}], {Nu, 1, 4}, {Mu, 1, Nu}]
In[17]:= TableForm[Partition[DeleteCases[Flatten[listRicci],
Null], 3],
```

```
TableSpacing -> {1, 2}]
Defining the Ricci scalar:
In[18]:= ricciscalar:= ricciscalar =
Simplify[Sum[
1.10. TOOLS 13
Sum[inversemetric[[Mu, Nu]] ricci[[Nu, Mu]],
{Mu, 1, n}], {Nu, 1, n}]]
Defining the Kretschmann scalar:
In[19]:= riemannUp:= riemannUp =
Table[Simplify[
Sum[inversemetric[[Nu, Kappa]]
riemann[[Mu, Kappa, Rho, Sigma]], {Kappa, 1, n}]],
{Mu, 1, n}, {Nu, 1, n}, {Rho, 1, n}, {Sigma, 1, n}]
In[20]:= kretschmann:= kretschmann =
Simplify[Sum[ Sum[Sum[Sum[
riemannUp[[Mu, Nu, Rho, Sigma]]
riemannUp[[Rho, Sigma, Mu, Nu]],
{Mu, 1, n}], {Nu, 1, n}], {Rho, 1, n}], {Sigma, 1, n}]]
```

Index

репараметризационная инвариантность, 1924

D Bibliography

References

Tong, David: *General relativity.*

Zhou, Kevin: *Lecture Notes on General Relativity*.

Landau, L. D. and Lifshitz, E. M.: *The Classical Theory of Fields.* Nauka, Moscow, 2004. in Russian; 7th edition.

Khriplovich, I. B.: *General Relativity.* Regular and Chaotic Dynamics, Moscow, 2001. in Russian.

Lightman, A., Press, W., Price, R., and Teukolsky, S.: *Problem Book in Relativity and Gravitation.* Mir, Moscow, 1979. Russian translation.

Weinberg, S.: *Cosmology.* Librokom, Moscow, 2013. Russian translation.

Mueller, Thomas and Grave, Frank: *Catalogue of spacetimes*, 2009. https://arxiv.org/abs/0904.4184.

Lashkevich, Yu. M.: *Lectures on general relativity for 3rd year students.* 2019. in Russian.

Carroll, Sean: *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity.* Benjamin Cummings, 2003. http://www.amazon.com/Spacetime-Geometry-Introduction-General-Relativity/dp/0805387323.

Misner, C. W., Thorne, K. S., and Wheeler, J. A.: *Gravitation. Part 1.* Ripol Classic, Moscow, 2009. Russian translation.

Misner, C. W., Thorne, K. S., and Wheeler, J. A.: *Gravitation. Part 2.* Ripol Classic, Moscow, 2009. Russian translation.

Misner, C. W., Thorne, K. S., and Wheeler, J. A.: *Gravitation. Part 3.* Ripol Classic, Moscow, 2009. Russian translation.

Freedman, Daniel Z. and Van Proeyen, Antoine: *Supergravity.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, May 2012, ISBN 78-1-139-36806-3, 978-0-521-19401-3.

Donoghue, John F.: *General relativity as an effective field theory: The leading quantum corrections.* Physical Review D, 50(6):3874–3888, September 1994, ISSN 0556-2821. http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.50.3874.

Lesovik, G. B., Lebedev, A. V., Mounutcharyan, V., and Martin, T.: *Detection of gravity waves by phase modulation of the light from a distant star.* Physical Review D, 71(12), Jun 2005, ISSN 1550-2368. http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.71.122001.

Medvedev, Alexander S. and Yiğit, Erdal: *Gravity waves in planetary atmospheres: Their effects and parameterization in global circulation models.* Atmosphere, 10(9), 2019, ISSN 2073-4433. https://www.mdpi.com/2073-4433/10/9/531.

Cabral, Francisco and Lobo, Francisco S. N.: *Electrodynamics and spacetime geometry: Astrophysical applications.* The European Physical Journal Plus, 132(7), Jul 2017, ISSN 2190-5444. http://dx.doi.org/10.1140/epjp/i2017-11618-2.

Cabral, Francisco and Lobo, Francisco S. N.: *Electrodynamics and spacetime geometry: Foundations.* Foundations of Physics, 47(2):208–228, Nov 2016, ISSN 1572-9516. http://dx.doi.org/10.1007/s10701-016-0051-6.

Hacyan, Shahen: *Effects of gravitational waves on the polarization of pulsars.* International Journal of Modern Physics A, 31(02n03):1641023, Jan 2016, ISSN 1793-656X. http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X16410232.

Briet, Jop and Hobill, David: *Determining the dimensionality of spacetime by gravitational lensing*, 2008.

Dominik, M.: *Theory and practice of microlensing light curves around fold singularities*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 353(1):69–86, Sep 2004, ISSN 1365-2966. http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2004.08046.x.

Courbin, Frederic, Saha, Prasenjit, and Schechter, Paul L: *Quasar lensing*. In *Gravitational Lensing: An Astrophysical Tool*, pages 1–54. Springer, 2002.

Kayser, Rainer, Schramm, Thomas, and Nieser, Lars: *Gravitational lenses*. Gravitational Lenses, 406, 1992.

Tomita, Kenji, Premadi, Premana, and Nakamura, Takahiro T.: *Various approaches to cosmological gravitational lensing in inhomogeneous models*. Progress of Theoretical Physics Supplement, 133:85–113, 1999, ISSN 0375-9687. http://dx.doi.org/10.1143/PTPS.133.85.

Grillo, Gianfranco and Cordes, James: *Wave asymptotics and their application to astrophysical plasma lensing*, 2018.

Kiselev, V. V.: *Seminars on the course "field theory": Lecture notes and exercises*. State Research Center of the Russian Federation, Institute for High Energy Physics, Protvino, 2004. in Russian.

Susskind, L. and Friedman, A.: *Special Relativity and Classical Field Theory: The Theoretical Minimum*. Piter, St. Petersburg, 2021. Russian translation.

Stepanyants, K.: *Classical Field Theory*. Litres, 2018. in Russian.

Belousov, V., Burmistrov, V., and Ternov, I.: *Problems in Theoretical Physics*. Intellect, Moscow, 2013. in Russian.

Ivanov, M. G.: *Some geometric methods in classical field theory: A study guide*. Moscow Institute of Physics and Technology (MIPT), 2004. in Russian.

Ivanov, Mikhail G.: *Electrodynamics*. Moscow Institute of Physics and Technology (MIPT), 2010. in Russian.

Kaku, M.: *Hyperspace: A Scientific Odyssey Through Parallel Universes, Time Warps, and the Tenth Dimension*. Alpina Publisher, Moscow, 2017. Russian translation.

Mao, Shude: *Astrophysical applications of gravitational microlensing*. Research in Astronomy and Astrophysics, 12(8):947–972, aug 2012. https://doi.org/10.1088/1674-4527/12/8/005.

Herrera-Martín, Antonio, Albrow, M. D., and al., A. Udalski et.: *OGLE-2018-BLG-0677lb: A super-earth near the galactic bulge*. The Astronomical Journal, 159(6):256, may 2020. https://doi.org/10.3847/1538-3881/ab893e.

Jung, Youn Kil, Hwang, Kyu Ha, Ryu, Yoon Hyun, and Gould, Andrew et. al.: *Two microlensing binaries composed of planetary-mass companions and very-low-mass primaries*. The Astronomical Journal, 156(5):208, 2018.

From Catalogue of Spacetimes

References

M. Aryal, L. H. Ford, and A. Vilenkin. Cosmic strings and black holes. *Phys. Rev. D*, 34(8):2263–2266, Oct 1986. doi:10.1103/PhysRevD.34.2263.

M. Alcubierre. The warp drive: hyper-fast travel within general relativity. *Class. Quantum Grav.*, 11:L73–L77, 1994. doi:10.1088/0264-9381/11/5/001.

D. R. Brill and J. M. Cohen. Rotating Masses and Their Effect on Inertial Frames. *Phys. Rev.*, 143:1011–1015, 1966. doi:10.1103/PhysRev.143.1011.

D. Bini, C. Cherubini, M. de Mattia, and R. T. Jantzen. Equatorial Plane Circular Orbits in the Taub-NUT Spacetime. *Gen. Relativ. Gravit.*, 35:2249–2260, 2003. doi:10.1023/A:1027357808512.

D. Bini, C. Cherubini, and R. T. Jantzen. Circular holonomy in the Taub-NUT spacetime. *Class. Quantum Grav.*, 19:5481–5488, 2002. doi:10.1088/0264-9381/19/21/313.

D. Bini and R. T. Jantzen. Circular orbits in Kerr spacetime: equatorial plane embedding diagrams. *Class. Quantum Grav.*, 17:1637–1647, 2000. doi:10.1088/0264-9381/17/7/305.

J. Bičák and P. Krtouš. Accelerated sources in de Sitter spacetime and the insufficiency of retarded fields. *Phys. Rev. D*, 64:124020, 2001. doi:10.1103/PhysRevD.64.124020.

R. H. Boyer and R. W. Lindquist. Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric. *J. Math. Phys.*, 8(2):265–281, 1967. doi:10.1063/1.1705193.

W. Bonnor. The sources of the vacuum c-metric. *General Relativity and Gravitation*, 15:535–551, 1983. 10.1007/BF00759569. Available from: http://dx.doi.org/10.1007/BF00759569.

J. M. Bardeen, W. H. Press, and S. A. Teukolsky. Rotating black holes: locally nonrotating frames, energy extraction, and scalar synchrotron radiation. *Astrophys. J.*, 178:347–370, 1972. doi:10.1086/151796.

C. Van Den Broeck. A 'warp drive' with more reasonable total energy requirements. *Class. Quantum Grav.*, 16:3973–3979, 1999. doi:10.1088/0264-9381/16/12/314.

H. A. Buchdahl. Isotropic Coordinates and Schwarzschild Metric. *Int. J. Theoret. Phys.*, 24:731–739, 1985. doi:10.1007/BF00670880.

M. Barriola and A. Vilenkin. Gravitational Field of a Global Monopole. *Phys. Rev. Lett.*, 63:341–343, 1989. doi:10.1103/PhysRevLett.63.341.

S. Chandrasekhar. *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford University Press, 2006.

C. Clark, W. A. Hiscock, and S. L. Larson. Null geodesics in the Alcubierre warp-drive spacetime: the view from the bridge. *Class. Quantum Grav.*, 16:3965–3972, 1999. doi:10.1088/0264-9381/16/12/313.

N. Cruz, M. Olivares, and J. R. Villanueva. The geodesic structure of the Schwarzschild anti-de Sitter black hole. *Class. Quantum Grav.*, 22:1167–1190, 2005. doi:10.1088/0264-9381/22/6/016.

S. V. Dhurandhar and D. N. Sharma. Null geodesics in the static Ernst space-time. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 16:99–106, 1983. doi:10.1088/0305-4470/16/1/017.

A. S. Eddington. A comparison of Whitehead's and Einstein's formulas. *Nature*, 113:192, 1924. doi:10.1038/113192a0.

J. Ehlers and W. Kundt. *Gravitation: An Introduction to Current Research*, chapter Exact solutions of the gravitational field equations, pages 49–101. Wiley (New York), 1962.

H. G. Ellis. Ether flow through a drainhole: a particle model in general relativity. *J. Math. Phys.*, 14:104–118, 1973. Errata: J. Math. Phys. 15, 520 (1974); doi:10.1063/1.1666675. doi:10.1063/1.1666161.

Frederick J. Ernst. Black holes in a magnetic universe. *J. Math. Phys.*, 17:54–56, 1976. doi:10.1063/1.522781.

E. F. Eiroa, G. E. Romero, and D. F. Torres. Reissner-Nordstrøm black hole lensing. *Phys. Rev. D*, 66:024010, 2002. doi:10.1103/PhysRevD.66.024010.

D. Finkelstein. Past-Future Asymmetry of the Gravitational Field of a Point Particle. *Phys. Rev.*, 110:965–967, 1958. doi:10.1103/PhysRev.110.965.

K. Gödel. An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equations of Gravitation. *Rev. Mod. Phys.*, 21:447–450, 1949. doi:10.1103/RevModPhys.21.447.

J. B. Griffiths and J. Podolský. *Exact space-times in Einstein's general relativity.* Cambridge University Press, 2009.

M. Halilsoy. Cross-polarized cylindrical gravitational waves of Einstein and Rosen. *Nuovo Cim. B*, 102:563–571, 1988. doi:10.1007/BF02725615.

S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The large scale structure of space-time.* Cambridge Univ. Press, 1999.

E. Hackmann and C. Lämmerzahl. Geodesic equation in Schwarzschild-(anti-)de Sitter space-times: Analytical solutions and applications. *Phys. Rev. D*, 78:024035, 2008. doi:10.1103/PhysRevD.78.024035.

A. I. Janis, E. T. Newman, and J. Winicour. Reality of the Schwarzschild singularity. *Phys. Rev. Lett.*, 20:878–880, 1968. doi:10.1103/PhysRevLett.20.878.

E. Kasner. Geometrical Theorems on Einstein's Cosmological Equations. *Am. J. Math.*, 43(4):217–221, 1921. Available from: http://www.jstor.org/stable/2370192.

R. P. Kerr. Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics. *Phys. Rev. Lett.*, 11:237–238, 1963. doi:10.1103/PhysRevLett.11.237.

F. Kottler. Über die physikalischen Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie. *Ann. Phys.*, 56:401–461, 1918. doi:10.1002/andp.19183611402.

D. Kramer. Exact gravitational wave solution without diffraction. *Class. Quantum Grav.*, 16:L75–78, 1999. doi:10.1088/0264-9381/16/11/101.

M. D. Kruskal. Maximal Extension of Schwarzschild Metric. *Phys. Rev.*, 119(5):1743–1745, Sep 1960. doi:10.1103/PhysRev.119.1743.

V. Karas and D. Vokrouhlicky. Chaotic Motion of Test Particles in the Ernst Space-time. *Gen. Relativ. Gravit.*, 24:729–743, 1992. doi:10.1007/BF00760079.

E. Kajari, R. Walser, W. P. Schleich, and A. Delgado. Sagnac Effect of Gödel's Universe. *Gen. Rel. Grav.*, 36(10):2289–2316, Oct 2004. doi:10.1023/B:GERG.0000046184.03333.9f.

T. Müller and F. Grave. Motion4D - A library for lightrays and timelike worldlines in the theory of relativity. *Comput. Phys. Comm.*, 180:2355–2360, 2009. doi:10.1016/j.cpc.2009.07.014.

T. Müller and F. Grave. GeodesicViewer - A tool for exploring geodesics in the theory of relativity. *Comput. Phys. Comm.*, 181:413–419, 2010. doi:10.1016/j.cpc.2009.10.010.

K. Martel and E. Poisson. Regular coordinate systems for Schwarzschild and other spherical spacetimes. *Am. J. Phys.*, 69(4):476–480, Apr 2001. doi:10.1119/1.1336836.

M. S. Morris and K. S. Thorne. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *Am. J. Phys.*, 56(5):395–412, 1988. doi:10.1119/1.15620.

C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler. *Gravitation.* W. H. Freeman, 1973.

T. Müller. Visual appearance of a Morris-Thorne-wormhole. *Am. J. Phys.*, 72:1045–1050, 2004. doi:10.1119/1.1758220.

T. Müller. Exact geometric optics in a Morris-Thorne wormhole spacetime. *Phys. Rev. D*, 77:044043, 2008. doi:10.1103/PhysRevD.77.044043.

T. Müller. Falling into a Schwarzschild black hole. *Gen. Relativ. Gravit.*, 40:2185–2199, 2008. doi:10.1007/s10714-008-0623-7.

T. Müller. Analytic observation of a star orbiting a Schwarzschild black hole. *Gen. Relativ. Gravit.*, 41:541–558, 2009. doi:10.1007/s10714-008-0683-8.

M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Adam Hilger, 1990.

J. R. Oppenheimer and H. Snyder. On continued gravitational contraction. *Phys. Rev.*, 56:455–459, 1939. doi:10.1103/PhysRev.56.455.

V. Perlick. Gravitational lensing from a spacetime perspective. *Living Reviews in Relativity*, 7(9), 2004. Available from: http://www.livingreviews.org/lrr-2004-9.

M. J. Pfenning and L. H. Ford. The unphysical nature of 'warp drive'. *Class. Quantum Grav.*, 14:1743–1751, 1997. doi:10.1088/0264-9381/14/7/011.

V. Pravda and A. Pravdová. Co-accelerated particles in the c-metric. *Classical and Quantum Gravity*, 18(7):1205, 2001. Available from: http://stacks.iop.org/0264-9381/18/i=7/a=305.

R. Penrose and W. Rindler. *Spinors and space-time*. Cambridge University Press, 1984.

W. Rindler. Birkhoff's theorem with Λ-term and Bertotti-Kasner space. *Phys. Lett. A*, 245:363–365, 1998. doi:10.1016/S0375-9601(98)00428-9.

W. Rindler. *Relativity - Special, General and Cosmology*. Oxford University Press, 2001.

K. Schwarzschild. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-Phys. Tech.*, pages 189–196, 1916.

K. Schwarzschild. On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory. *Gen. Relativ. Gravit.*, 35:951–959, 2003. doi:10.1023/A:1022919909683.

Joseph Sultana and Charles C. Dyer. Cosmological black holes: A black hole in the Einstein-de Sitter universe. *Gen. Relativ. Gravit.*, 37:1349–1370, 2005. doi:10.1007/s10714-005-0119-7.

Z. Stuchlík and S. Hledík. Photon capture cones and embedding diagrams of the Ernst spacetime. *Class. Quantum Grav.*, 16:1377–1387, 1999. doi:10.1088/0264-9381/16/4/026.

H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, and E. Herlt. *Exact Solutions of the Einstein Field Equations*. Cambridge University Press, 2. edition, 2003.

H. Stephani and J. Stewart. *General Relativity: An Introduction to the Theory of Gravitational Field*. Cambridge University Press, 1990.

H. Stephani. Some remarks on standing gravitational waves. *Gen. Relativ. Gravit.*, 35(3):467–474, 2003. doi:10.1023/A:1022330218708.

R. C. Tolman. *Relativity Thermodynamics and Cosmology*. Oxford at the Clarendon press, 1934.

M. Visser. *Lorentzian Wormholes*. AIP Press, 1995.

R. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.

H. Weyl. Über die statischen kugelsymmetrischen Lösungen von Einsteins kosmologischen Gravitationsgleichungen. *Phys. Z.*, 20:31–34, 1919.

D. C. Wilkins. Bound Geodesics in the Kerr Metric. *Phys. Rev. D*, 5:814–822, 1972. doi:10.1103/PhysRevD.5.814.

From Black holes, gravitational waves and fundamental physics: a roadmap by Leor Barack ad a lot of other authors

(!! separate this into 10 paragraphs!!! It is a bad bibliography, because there are a lot of items, but literally zero structure)

References

B. P. Abbott *et al.* (Virgo, LIGO Scientific), Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016a), arXiv:1602.03837 [gr-qc].

B. P. Abbott *et al.* (Virgo, LIGO Scientific), Phys. Rev. Lett. **116**, 241103 (2016b), arXiv:1606.04855 [gr-qc].

B. P. Abbott *et al.* (Virgo, LIGO Scientific), Phys. Rev. **X6**, 041015 (2016c), arXiv:1606.04856 [gr-qc].

B. P. Abbott *et al.* (Virgo, LIGO Scientific), Phys. Rev. Lett. **116**, 241102 (2016d), arXiv:1602.03840 [gr-qc].

B. P. Abbott *et al.* (Virgo, LIGO Scientific), Astrophys. J. **818**, L22 (2016e), arXiv:1602.03846 [astro-ph.HE].

Benjamin P. Abbott *et al.* (Virgo, LIGO Scientific), Astrophys. J. **832**, L21 (2016f), arXiv:1607.07456 [astro-ph.HE].

Benjamin P. Abbott *et al.* (Virgo, LIGO Scientific), Phys. Rev. Lett. **118**, 121102 (2017a), arXiv:1612.02030 [gr-qc].

B. P. Abbott *et al.* (Virgo, IPN, LIGO Scientific), Astrophys. J. **841**, 89 (2017b), arXiv:1611.07947 [astro-ph.HE].

B. P. Abbott *et al.* (Virgo, LIGO Scientific), Astrophys. J. **833**, L1 (2016g), arXiv:1602.03842 [astro-ph.HE].

B. P. Abbott *et al.* (Virgo, LIGO Scientific), Astrophys. J. Suppl. **227**, 14 (2016h), arXiv:1606.03939 [astro-ph.HE].

Benjamin P. Abbott *et al.* (VIRGO, LIGO Scientific), Phys. Rev. Lett. **118**, 221101 (2017c), arXiv:1706.01812 [gr-qc].

B. P. Abbott *et al.* (InterPlanetary Network, DES, INTEGRAL, et al.), Astrophys. J. **826**, L13 (2016i), arXiv:1602.08492 [astro-ph.HE].

B. P. Abbott *et al.* (InterPlanetary Network, DES, INTEGRAL, et al.), Astrophys. J. Suppl. **225**, 8 (2016j), arXiv:1604.07864 [astro-ph.HE].

Benjamin P. Abbott *et al.* (VIRGO, KAGRA, LIGO Scientific), Living Rev. Rel. **21**, 3 (2018a), arXiv:1304.0670 [gr-qc].

B. S. Sathyaprakash and S. V. Dhurandhar, Physical Review D **44**, 3819–3834 (1991).

B. P. Abbott *et al.* (Virgo, LIGO Scientific), Phys. Rev. **D93**, 122003 (2016k), arXiv:1602.03839 [gr-qc].

B. P. Abbott *et al.* (Virgo, LIGO Scientific), Phys. Rev. Lett. **116**, 221101 (2016l), arXiv:1602.03841 [gr-qc].

B. P. Abbott *et al.* (Virgo, LIGO Scientific), Phys. Rev. Lett. **119**, 141101 (2017d), arXiv:1709.09660 [gr-qc].

B. P. Abbott *et al.* (Virgo, LIGO Scientific), Phys. Rev. **D93**, 122004 (2016m), [Addendum: Phys. Rev.D94,no.6,069903(2016)], arXiv:1602.03843 [gr-qc].

B. P. Abbott *et al.* (Virgo, LIGO Scientific), Astrophys. J. **851**, L35 (2017e), arXiv:1711.05578 [astro-ph.HE].

B. P. Abbott *et al.* (Virgo, LIGO Scientific), Phys. Rev. Lett. **119**, 161101 (2017f), arXiv:1710.05832 [gr-qc].

B. P. Abbott *et al.* (GROND, SALT Group, OzGrav, et al.), Astrophys. J. **848**, L12 (2017g), arXiv:1710.05833 [astro-ph.HE].

B. P. Abbott *et al.* (Virgo, Fermi-GBM, INTEGRAL, LIGO Scientific), Astrophys. J. **848**, L13 (2017h), arXiv:1710.05834 [astro-ph.HE].

B. P. Abbott *et al.* (LIGO Scientific, VINROUGE, Las Cumbres Observatory, DES, DLT40, Virgo, 1M2H, Dark Energy Camera GW-E, MASTER), Nature **551**, 85–88 (2017i), arXiv:1710.05835 [astro-ph.CO].

K. Belczynski, M. Dominik, T. Bulik, R. O'Shaughnessy, C. L. Fryer, and D. E. Holz, Astrophys. J. **715**, L138 (2010a), arXiv:1004.0386 [astro-ph.HE].

M. Spera, M. Mapelli, and A. Bressan, MNRAS **451**, 4086–4103 (2015a), arXiv:1505.05201 [astro-ph.SR].

Krzysztof Belczynski, Daniel E. Holz, Tomasz Bulik, and Richard O'Shaughnessy, Nature **534**, 512 (2016a), arXiv:1602.04531 [astro-ph.HE].

N. Giacobbo, M. Mapelli, and M. Spera, MNRAS **474**, 2959–2974 (2018), arXiv:1711.03556 [astro-ph.SR].

S. E. Woosley, Astrophysical Journal **836**, 244 (2017), arXiv:1608.08939 [astro-ph.HE].

K. Belczynski *et al.*, Astron. Astrophys. **594**, A97 (2016b), arXiv:1607.03116 [astro-ph.HE].

Mario Spera and Michela Mapelli, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **470**, 4739–4749 (2017), arXiv:1706.06109 [astro-ph.SR].

Benjamin P. Abbott *et al.* (LIGO Scientific), Class. Quant. Grav. **34**, 044001 (2017j), arXiv:1607.08697 [astro-ph.IM].

B. Sathyaprakash, M. Abernathy, F. Acernese, P. Ajith, B. Allen, P. Amaro-Seoane, N. Andersson, S. Aoudia, K. Arun, P. Astone, and et al., Classical and Quantum Gravity **29**, 124013 (2012), arXiv:1206.0331 [gr-qc].

A. R. King, S. H. Lubow, G. I. Ogilvie, and J. E. Pringle, MNRAS **363**, 49–56 (2005), astro-ph/0507098.

A. Perego, M. Dotti, M. Colpi, and M. Volonteri, MNRAS **399**, 2249–2263 (2009), arXiv:0907.3742.

Emanuele Berti and Marta Volonteri, Astrophys. J. **684**, 822–828 (2008), arXiv:0802.0025 [astro-ph].

Enrico Barausse, Viktoriya Morozova, and Luciano Rezzolla, Astrophys. J. **758**, 63 (2012a), [Erratum: Astrophys. J.786,76(2014)], arXiv:1206.3803 [gr-qc].

L. Rezzolla, in *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag, Vol. 905, edited by F. Haardt, V. Gorini, U. Moschella, A. Treves, and M. Colpi (2016) p. 1.

A. Merloni, in *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag, Vol. 905, edited by F. Haardt, V. Gorini, U. Moschella, A. Treves, and M. Colpi (2016) p. 101, arXiv:1505.04940 [astro-ph.HE].

J. Kormendy and L. C. Ho, ARA&A **51**, 511–653 (2013a), arXiv:1304.7762.

V. F. Baldassare, A. E. Reines, E. Gallo, and J. E. Greene, Astrophysical Journal **809**, L14 (2015), arXiv:1506.07531.

X.-B. Wu, F. Wang, X. Fan, W. Yi, W. Zuo, F. Bian, L. Jiang, I. D. McGreer, R. Wang, J. Yang, Q. Yang, D. Thompson, and Y. Beletsky, Nature **518**, 512–515 (2015), arXiv:1502.07418.

D. D. Nguyen, A. C. Seth, N. Neumayer, S. Kamann, K. T. Voggel, M. Cappellari, A. Picotti, P. M. Nguyen, T. Böker, V. Debattista, N. Caldwell, R. McDermid, N. Bastian, C. C. Ahn, and R. Pechetti, ApJ **858**, 118 (2018), arXiv:1711.04314.

R. C. E. van den Bosch, Astrophysical Journal **831**, 134 (2016), arXiv:1606.01246.

M. Volonteri, A&A Rev. **18**, 279–315 (2010), arXiv:1003.4404.

L. Jiang, I. D. McGreer, X. Fan, M. A. Strauss, E. Bañados, R. H. Becker, F. Bian, K. Farnsworth, Y. Shen, F. Wang, R. Wang, S. Wang, R. L. White, J. Wu, X.-B. Wu, J. Yang, and Q. Yang, Astrophysical Journal **833**, 222 (2016), arXiv:1610.05369.

A. Marconi, G. Risaliti, R. Gilli, L. K. Hunt, R. Maiolino, and M. Salvati, MNRAS **351**, 169–185 (2004), astro-ph/0311619.

D. R. G. Schleicher, F. Palla, A. Ferrara, D. Galli, and M. Latif, A&A **558**, A59 (2013), arXiv:1305.5923.

Muhammad A. Latif and Andrea Ferrara, Publ. Astron. Soc. Austral. **33**, e051 (2016), arXiv:1605.07391 [astro-ph.GA].

M. Mapelli, MNRAS **459**, 3432–3446 (2016a), arXiv:1604.03559.

B. Devecchi, M. Volonteri, E. M. Rossi, M. Colpi, and S. Portegies Zwart, MNRAS **421**, 1465–1475 (2012), arXiv:1201.3761.

A. Lupi, M. Colpi, B. Devecchi, G. Galanti, and M. Volonteri, MNRAS **442**, 3616–3626 (2014), arXiv:1406.2325.

Davide Gerosa and Emanuele Berti, Phys. Rev. **D95**, 124046 (2017), arXiv:1703.06223 [gr-qc].

A. W. Graham and L. R. Spitler, MNRAS **397**, 2148–2162 (2009), arXiv:0907.5250.

A. Lupi, F. Haardt, M. Dotti, D. Fiacconi, L. Mayer, and P. Madau, MNRAS **456**, 2993–3003 (2016), arXiv:1512.02651.

M. A. Latif, D. R. G. Schleicher, W. Schmidt, and J. C. Niemeyer, MNRAS **436**, 2989–2996 (2013), arXiv:1309.1097.

N. C. Stone, A. H. W. Küpper, and J. P. Ostriker, MNRAS **467**, 4180–4199 (2017a), arXiv:1606.01909.

M. Dijkstra, A. Ferrara, and A. Mesinger, MNRAS **442**, 2036–2047 (2014), arXiv:1405.6743.

M. Habouzit, M. Volonteri, M. Latif, Y. Dubois, and S. Peirani, MNRAS **463**, 529–540 (2016), arXiv:1601.00557.

J. A. Regan, E. Visbal, J. H. Wise, Z. Haiman, P. H. Johansson, and G. L. Bryan, Nature Astronomy **1**, 0075 (2017), arXiv:1703.03805.

M. C. Begelman, MNRAS **402**, 673–681 (2010), arXiv:0910.4398.

L. Mayer, D. Fiacconi, S. Bonoli, T. Quinn, R. Roškar, S. Shen, and J. Wadsley, Astrophysical Journal **810**, 51 (2015), arXiv:1411.5683.

M. Colpi and A. Sesana, "Gravitational Wave Sources in the Era of Multi-Band Gravitational Wave Astronomy," in *An Overview of Gravitational Waves: Theory, Sources and Detection*, edited by G. Augar and E. Plagnol (World Scientific Publishing Co, 2017) pp. 43–140.

Pau Amaro-Seoane *et al.* (LISA), (2017), arXiv:1702.00786 [astro-ph.IM].

M. Colpi, Space Sci. Rev. **183**, 189–221 (2014), arXiv:1407.3102.

Michal Dominik, Krzysztof Belczynski, Christopher Fryer, Daniel E. Holz, Emanuele Berti, Tomasz Bulik, Ilya Mandel, and Richard O'Shaughnessy, Astrophys. J. **779**, 72 (2013), arXiv:1308.1546 [astro-ph.HE].

S. F. Portegies Zwart and S. L. W. McMillan, Astrophysical Journal **528**, L17–L20 (2000), astro-ph/9910061.

M. J. Benacquista and J. M. B. Downing, Living Reviews in Relativity **16** (2013), 10.12942/lrr-2013-4, arXiv:1110.4423 [astro-ph.SR].

Carl L. Rodriguez, Carl-Johan Haster, Sourav Chatterjee, Vicky Kalogera, and Frederic A. Rasio, Astrophys. J. **824**, L8 (2016), arXiv:1604.04254 [astro-ph.HE].

F. Antonini and F. A. Rasio, Astrophysical Journal **831**, 187 (2016), arXiv:1606.04889 [astro-ph.HE].

C.-J. Haster, F. Antonini, V. Kalogera, and I. Mandel, Astrophysical Journal **832**, 192 (2016), arXiv:1606.07097 [astro-ph.HE].

C. Reisswig, C. D. Ott, E. Abdikamalov, R. Haas, P. Mösta, and E. Schnetter, Physical Review Letters **111**, 151101 (2013), arXiv:1304.7787.

R. Valiante, R. Schneider, L. Graziani, and L. Zappacosta, MNRAS **474**, 3825–3834 (2018), arXiv:1711.11033.

Juan Garcia-Bellido, Sebastien Clesse, and Pierre Fleury, Phys. Dark Univ. **20**, 95–100 (2018), arXiv:1712.06574 [astro-ph.CO].

K. Belczynski, T. Ryu, R. Perna, E. Berti, T. L. Tanaka, and T. Bulik, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **471**, 4702–4721 (2017a), arXiv:1612.01524 [astro-ph.HE].

S.-C. Yoon, S. E. Woosley, and N. Langer, The Astrophysical Journal **725**, 940–954 (2010), arXiv:1004.0843 [astro-ph.SR].

B. Paxton, P. Marchant, J. Schwab, E. B. Bauer, L. Bildsten, M. Cantiello, L. Dessart, R. Farmer, H. Hu, N. Langer, R. H. D. Townsend, D. M. Townsley, and F. X. Timmes, The Astrophysical Journal Supplement **220**, 15 (2015), arXiv:1506.03146 [astro-ph.SR].

P. Eggenberger, J. Montalbán, and A. Miglio, A&A **544**, L4 (2012), arXiv:1207.1023 [astro-ph.SR].

C. Georgy, S. Ekström, P. Eggenberger, G. Meynet, L. Haemmerlé, A. Maeder, A. Granada, J. H. Groh, R. Hirschi, N. Mowlavi, N. Yusof, C. Charbonnel, T. Decressin, and F. Barblan, A&A **558**, A103 (2013), arXiv:1308.2914 [astro-ph.SR].

E. O'Connor and C. D. Ott, The Astrophysical Journal **730**, 70 (2011), arXiv:1010.5550 [astro-ph.HE].

C. L. Fryer, K. Belczynski, G. Wiktorowicz, M. Dominik, V. Kalogera, and D. E. Holz, The Astrophysical Journal **749**, 91 (2012).

T. Ertl, H.-T. Janka, S. E. Woosley, T. Sukhbold, and M. Ugliano, The Astrophysical Journal **818**, 124 (2016), arXiv:1503.07522 [astro-ph.SR].

Dennis Alp *et al.*, (2018), arXiv:1805.04526 [astro-ph.HE].

S. M. Adams, C. S. Kochanek, J. R. Gerke, K. Z. Stanek, and X. Dai, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society **468**, 4968–4981 (2017), arXiv:1609.01283 [astro-ph.SR].

C. D. Bailyn, R. K. Jain, P. Coppi, and J. A. Orosz, The Astrophysical Journal **499**, 367–374 (1998), astro-ph/9708032.

F. Özel, D. Psaltis, R. Narayan, and J. E. McClintock, The Astrophysical Journal **725**, 1918–1927 (2010), arXiv:1006.2834.

P. C. C. Freire, S. M. Ransom, S. Bégin, I. H. Stairs, J. W. T. Hessels, L. H. Frey, and F. Camilo, The Astrophysical Journal **675**, 670–682 (2008), arXiv:0711.0925.

M. H. van Kerkwijk, R. P. Breton, and S. R. Kulkarni, The Astrophysical Journal **728**, 95 (2011), arXiv:1009.5427 [astro-ph.HE].

Manuel Linares, Tariq Shahbaz, and Jorge Casares, Astrophys. J. **859**, 54 (2018), arXiv:1805.08799 [astro-ph.HE].

L. Kreidberg, C. D. Bailyn, W. M. Farr, and V. Kalogera, The Astrophysical Journal **757**, 36 (2012), arXiv:1205.1805 [astro-ph.HE].

K. Belczynski, G. Wiktorowicz, C. Fryer, D. Holz, and V. Kalogera, Astrophys. J. **757**, 91 (2012), arXiv:1110.1635 [astro-ph.GA].

A. Heger and S. E. Woosley, The Astrophysical Journal **567**, 532–543 (2002), astro-ph/0107037.

S. E. Woosley, The Astrophysical Journal Letters **824**, L10 (2016), arXiv:1603.00511 [astro-ph.HE].

M. Asplund, N. Grevesse, A. J. Sauval, and P. Scott, ARA&A **47**, 481–522 (2009), arXiv:0909.0948 [astro-ph.SR].

F. L. Villante, A. M. Serenelli, F. Delahaye, and M. H. Pinsonneault, The Astrophysical Journal **787**, 13 (2014).

Krzysztof Belczynski, Tomasz Bulik, Chris L. Fryer, Ashley Ruiter, Jorick S. Vink, and Jarrod R. Hurley, Astrophys. J. **714**, 1217–1226 (2010b), arXiv:0904.2784 [astro-ph.SR].

Matthias U. Kruckow, Thomas M. Tauris, Norbert Langer, Michael Kramer, and Robert G. Izzard, (2018), arXiv:1801.05433 [astro-ph.SR].

J. R. Bond, W. D. Arnett, and B. J. Carr, The Astrophysical Journal **280**, 825–847 (1984).

C. L. Fryer and V. Kalogera, The Astrophysical Journal **554**, 548–560 (2001), astro-ph/9911312.

A. Heger, C. L. Fryer, S. E. Woosley, N. Langer, and D. H. Hartmann, The Astrophysical Journal **591**, 288–300 (2003), astro-ph/0212469.

N. Yusof, R. Hirschi, G. Meynet, P. A. Crowther, S. Ekström, U. Frischknecht, C. Georgy, H. Abu Kassim, and O. Schnurr, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society **433**, 1114–1132 (2013).

M. Spera, M. Mapelli, and A. Bressan, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society **451**, 4086–4103 (2015b).

P. Marchant, N. Langer, P. Podsiadlowski, T. M. Tauris, and T. J. Moriya, A&A **588**, A50 (2016), arXiv:1601.03718 [astro-ph.SR].

Krzysztof Belczynski, Alessandra Buonanno, Matteo Cantiello, Chris L. Fryer, Daniel E. Holz, Ilya Mandel, M. Coleman Miller, and Marek Walczak, Astrophys. J. **789**, 120 (2014), arXiv:1403.0677 [astro-ph.HE].

P. Massey, in *UP2010: Have Observations Revealed a Variable Upper End of the Initial Mass Function?*, Astronomical Society of the Pacific Conference Series, Vol. 440, edited by M. Treyer, T. Wyder, J. Neill, M. Seibert, and J. Lee (2011) p. 29, arXiv:1008.1014 [astro-ph.SR].

P. A. Crowther, R. Hirschi, N. R. Walborn, and N. Yusof, in *Proceedings of a Scientific Meeting in Honor of Anthony F. J. Moffat*, Astronomical Society of the Pacific Conference Series, Vol. 465, edited by L. Drissen, C. Robert, N. St-Louis, and A. F. J. Moffat (2012) p. 196, arXiv:1209.6157 [astro-ph.SR].

P. A. Crowther, O. Schnurr, R. Hirschi, N. Yusof, R. J. Parker, S. P. Goodwin, and H. A. Kassim, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society **408**, 731–751 (2010), arXiv:1007.3284 [astro-ph.SR].

G. Hobbs, D. R. Lorimer, A. G. Lyne, and M. Kramer, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society **360**, 974–992 (2005).

H.-T. Janka and E. Mueller, A&A **290**, 496–502 (1994).

Irene Tamborra, Florian Hanke, Hans-Thomas Janka, Bernhard Müller, Georg G. Raffelt, and Andreas Marek, Astrophys. J. **792**, 96 (2014), arXiv:1402.5418 [astro-ph.SR].

H.-T. Janka, The Astrophysical Journal **837**, 84 (2017), arXiv:1611.07562 [astro-ph.HE].

A. Kusenko and G. Segrè, Physical Review Letters **77**, 4872–4875 (1996), hep-ph/9606428.

C. L. Fryer and A. Kusenko, The Astrophysical Journal Supplement **163**, 335–343 (2006), astro-ph/0512033.

A. Socrates, O. Blaes, A. Hungerford, and C. L. Fryer, The Astrophysical Journal **632**, 531–562 (2005), astro-ph/0412144.

I. Mandel, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society **456**, 578–581 (2016), arXiv:1510.03871 [astro-ph.HE].

S. Repetto, A. P. Igoshev, and G. Nelemans, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society **467**, 298–310 (2017), arXiv:1701.01347 [astro-ph.HE].

G. Nelemans, T. M. Tauris, and E. P. J. van den Heuvel, A&A **352**, L87–L90 (1999), astro-ph/9911054.

F. Mirabel, New A Rev. **78**, 1–15 (2017).

H. C. Spruit, A&A **349**, 189–202 (1999), astro-ph/9907138.

H. C. Spruit, A&A **381**, 923–932 (2002), astro-ph/0108207.

S. Ekström, C. Georgy, P. Eggenberger, G. Meynet, N. Mowlavi, A. Wyttenbach, A. Granada, T. Decressin, R. Hirschi, U. Frischknecht, C. Charbonnel, and A. Maeder, A&A **537**, A146 (2012), arXiv:1110.5049 [astro-ph.SR].

C. Aerts, in *Massive Stars as Cosmic Engines*, IAU Symposium, Vol. 250, edited by F. Bresolin, P. A. Crowther, and J. Puls (2008) pp. 237–244.

K. Belczynski *et al.*, (2017b), arXiv:1706.07053 [astro-ph.HE].

Sophie L. Schrøder, Aldo Batta, and Enrico Ramirez-Ruiz, (2018), arXiv:1805.01269 [astro-ph.HE].

H. Sana, S. E. de Mink, A. de Koter, N. Langer, C. J. Evans, M. Gieles, E. Gosset, R. G. Izzard, J.-B. Le Bouquin, and F. R. N. Schneider, Science **337**, 444 (2012).

P. Podsiadlowski, P. C. Joss, and J. J. L. Hsu, The Astrophysical Journal **391**, 246–264 (1992).

S. Wellstein and N. Langer, A&A **350**, 148–162 (1999), astro-ph/9904256.

G. E. Brown, A. Heger, N. Langer, C.-H. Lee, S. Wellstein, and H. A. Bethe, New A **6**, 457–470 (2001), astro-ph/0102379.

N. Langer, ARA&A **50**, 107–164 (2012), arXiv:1206.5443 [astro-ph.SR].

A. V. Tutukov and L. R. Yungelson, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society **260**, 675–678 (1993).

V. M. Lipunov, K. A. Postnov, and M. E. Prokhorov, Astronomy Letters **23**, 492–497 (1997).

Krzysztof Belczynski, Vassiliki Kalogera, and Tomasz Bulik, Astrophys. J. **572**, 407–431 (2001), arXiv:astro-ph/0111452 [astro-ph].

R. Voss and T. M. Tauris, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society **342**, 1169–1184 (2003), astro-ph/0303227.

N. Mennekens and D. Vanbeveren, A&A **564**, A134 (2014), arXiv:1307.0959 [astro-ph.SR].

J. J. Eldridge and E. R. Stanway, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society **462**, 3302–3313 (2016), arXiv:1602.03790 [astro-ph.HE].

S. Stevenson, A. Vigna-Gómez, I. Mandel, J. W. Barrett, C. J. Neijssel, D. Perkins, and S. E. de Mink, Nature Communications **8**, 14906 (2017), arXiv:1704.01352 [astro-ph.HE].

A. Maeder, A&A **178**, 159–169 (1987).

S.-C. Yoon and N. Langer, A&A **443**, 643–648 (2005), astro-ph/0508242.

I. Mandel and S. E. de Mink, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society **458**, 2634–2647 (2016), arXiv:1601.00007 [astro-ph.HE].

S. E. de Mink and I. Mandel, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society **460**, 3545–3553 (2016), arXiv:1603.02291 [astro-ph.HE].

R. F. Webbink, The Astrophysical Journal **277**, 355–360 (1984).

N. Ivanova, S. Justham, X. Chen, O. De Marco, C. L. Fryer, E. GaburovA&A Rev. **21**, 59 (2013).

P. C. Peters, Phys. Rev. **136**, B1224–B1232 (1964).

E. P. J. van den Heuvel, S. F. Portegies Zwart, and S. E. de Mink, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society **471**, 4256–4264 (2017), arXiv:1701.02355 [astro-ph.SR].

J.-P. Zahn, A&A **265**, 115–132 (1992).

D. Kushnir, M. Zaldarriaga, J. A. Kollmeier, and R. Waldman, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society **462**, 844–849 (2016), arXiv:1605.03839 [astro-ph.HE].

J. Abadie *et al.* (VIRGO, LIGO Scientific), Class. Quant. Grav. **27**, 173001 (2010), arXiv:1003.2480 [astro-ph.HE].

L. Zampieri and T. P. Roberts, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society **400**, 677–686 (2009), arXiv:0909.1017 [astro-ph.HE].

M. Mapelli, M. Colpi, and L. Zampieri, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society **395**, L71–L75 (2009), arXiv:0902.3540 [astro-ph.HE].

Michal Dominik, Krzysztof Belczynski, Christopher Fryer, Daniel Holz, Emanuele Berti, Tomasz Bulik, Ilya Mandel, and Richard O'Shaughnessy, Astrophys. J. **759**, 52 (2012), arXiv:1202.4901 [astro-ph.HE].

Michal Dominik, Emanuele Berti, Richard O'Shaughnessy, Ilya Mandel, Krzysztof Belczynski, Christopher Fryer, Daniel E. Holz, Tomasz Bulik, and Francesco Pannarale, Astrophys. J. **806**, 263 (2015), arXiv:1405.7016 [astro-ph.HE].

T. Bulik, K. Belczynski, and A. Prestwich, The Astrophysical Journal **730**, 140 (2011), arXiv:0803.3516.

C. L. Rodriguez, S. Chatterjee, and F. A. Rasio, Physical Review D **93**, 084029 (2016a), arXiv:1602.02444 [astro-ph.HE].

A. Askar, M. Szkudlarek, D. Gondek-Rosińska, M. Giersz, and T. Bulik, MNRAS **464**, L36–L40 (2017), arXiv:1608.02520 [astro-ph.HE].

T. Fragos and J. E. McClintock, The Astrophysical Journal **800**, 17 (2015), arXiv:1408.2661 [astro-ph.HE].

Fabio Antonini, Carl L. Rodriguez, Cristobal Petrovich, and Caitlin L. Fischer, (2017), arXiv:1711.07142 [astro-ph.HE].

Sebastien Clesse and Juan García-Bellido, (2017a), arXiv:1711.10458 [astro-ph.CO].

T. M. Tauris, M. Kramer, P. C. C. Freire, N. Wex, H.-T. Janka, N. Langer, P. Podsiadlowski, E. Bozzo, S. Chaty, M. U. Kruckow, E. P. J. van den Heuvel, J. Antoniadis, R. P. Breton, and D. J. Champion, The Astrophysical Journal **846**, 170 (2017), arXiv:1706.09438 [astro-ph.HE].

M. Zaldarriaga, D. Kushnir, and J. A. Kollmeier, MNRAS **473**, 4174–4178 (2018), arXiv:1702.00885 [astro-ph.HE].

K. Hotokezaka and T. Piran, The Astrophysical Journal **842**, 111 (2017), arXiv:1702.03952 [astro-ph.HE].

Kenta Hotekezaka and Tsvi Piran, (2017), arXiv:1707.08978 [astro-ph.HE].

Krzysztof Belczynski, Ronald E. Taam, Emmanouela Rantsiou, and Marc van der Sluys, Astrophys. J. **682**, 474 (2008), arXiv:astro-ph/0703131 [ASTRO-PH].

P. M. Ricker and R. E. Taam, The Astrophysical Journal Letters **672**, L41–L44 (2008).

M. MacLeod, A. Antoni, A. Murguia-Berthier, P. Macias, and E. Ramirez-Ruiz, The Astrophysical Journal **838**, 56 (2017), arXiv:1704.02372 [astro-ph.SR].

Ariadna Murguia-Berthier, Morgan MacLeod, Enrico Ramirez-Ruiz, Andrea Antoni, and Phillip Macias, Astrophys. J. **845**, 173 (2017), arXiv:1705.04698 [astro-ph.SR].

A. Miguel Holgado, Paul M. Ricker, and E. A. Huerta, Astrophys. J. **857**, 38 (2018), arXiv:1706.09413 [astro-ph.HE].

R. Tylenda and T. Kamiński, A&A **592**, A134 (2016), arXiv:1606.09426 [astro-ph.SR].

Lidia M. Oskinova, Tomasz Bulik, and Ada Nebot Gómez-Morán, Astron. Astrophys. **613**, L10 (2018), arXiv:1805.08080 [astro-ph.HE].

Krzysztof Belczynski, Serena Repetto, Daniel E. Holz, Richard O'Shaughnessy, Tomasz Bulik, Emanuele Berti, Christopher Fryer, and Michal Dominik, Astrophys. J. **819**, 108 (2016c), arXiv:1510.04615 [astro-ph.HE].

H.-T. Janka, T. Melson, and A. Summa, Annual Review of Nuclear and Particle Science **66**, 341–375 (2016), arXiv:1602.05576 [astro-ph.SR].

V. Connaughton, E. Burns, A. Goldstein, and et al, The Astrophysical Journal Letters **826**, L6 (2016), arXiv:1602.03920 [astro-ph.HE].

S. E. de Mink and A. King, The Astrophysical Journal Letters **839**, L7 (2017), arXiv:1703.07794 [astro-ph.HE].

R. A. Hulse and J. H. Taylor, The Astrophysical Journal **195**, L51–L53 (1975).

D. R. Lorimer and M. Kramer, *Handbook of Pulsar Astronomy* (Cambridge University Press, 2012).

K. Belczynski *et al.*, (2017c), arXiv:1712.00632 [astro-ph.HE].

M. Chruslinska, K. Belczynski, J. Klencki, and M. Benacquista, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society **474**, 2937–2958 (2018), arXiv:1708.07885 [astro-ph.HE].

Alejandro Vigna-Gómez *et al.*, (2018), arXiv:1805.07974 [astro-ph.SR].

M. U. Kruckow, T. M. Tauris, N. Langer, D. Szécsi, P. Marchant, and P. Podsiadlowski, A&A **596**, A58 (2016), arXiv:1610.04417 [astro-ph.SR].

F. Verbunt, A. Igoshev, and E. Cator, A&A **608**, A57 (2017), arXiv:1708.08281 [astro-ph.HE].

M. Soares-Santos, D. E. Holz, J. Annis, and et al., The Astrophysical Journal Letters **848**, L16 (2017), arXiv:1710.05459 [astro-ph.HE].

D. A. Coulter *et al.*, Science (2017), 10.1126/science.aap9811, [Science358,1556(2017)], arXiv:1710.05452 [astro-ph.HE].

W. Fong and E. Berger, The Astrophysical Journal **776**, 18 (2013), arXiv:1307.0819 [astro-ph.HE].

B. D. Metzger, G. Martínez-Pinedo, S. Darbha, E. Quataert, A. Arcones, D. Kasen, R. Thomas, P. Nugent, I. V. Panov, and N. T. Zinner, MNRAS **406**, 2650–2662 (2010), arXiv:1001.5029 [astro-ph.HE].

C. M. Will, Physical Review D **50**, 6058–6067 (1994), gr-qc/9406022.

W. M. Farr, N. Sravan, A. Cantrell, L. Kreidberg, C. D. Bailyn, I. Mandel, and V. Kalogera, Astrophysical Journal **741**, 103 (2011), arXiv:1011.1459.

E. I. Rosenblatt, S. M. Faber, and G. R. Blumenthal, The Astrophysical Journal **330**, 191–200 (1988).

T. Böker, The Astrophysical Journal Letters **672**, L111 (2008), arXiv:0711.4542.

W. E. Harris, G. L. Harris, and M. J. Hudson, The Astrophysical Journal **806**, 36 (2015), arXiv:1504.03199.

L. Spitzer, Jr., The Astrophysical Journal Letters **158**, L139 (1969).

S. Sigurdsson and L. Hernquist, Nature **364**, 423–425 (1993).

N. Ivanova, K. Belczynski, J. M. Fregeau, and F. A. Rasio, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society **358**, 572–584 (2005), astro-ph/0501131.

D. Park, C. Kim, H. M. Lee, Y.-B. Bae, and K. Belczynski, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society **469**, 4665–4674 (2017), arXiv:1703.01568 [astro-ph.HE].

M. Mapelli, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society **459**, 3432–3446 (2016b), arXiv:1604.03559.

S. Banerjee, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society **467**, 524–539 (2017), arXiv:1611.09357 [astro-ph.HE].

P. Kroupa, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society **322**, 231–246 (2001), astro-ph/0009005.

O. Y. Gnedin, J. P. Ostriker, and S. Tremaine, Astrophysical Journal **785**, 71 (2014), arXiv:1308.0021.

M. Arca-Sedda and R. Capuzzo-Dolcetta, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society **444**, 3738–3755 (2014), arXiv:1405.7593.

Giacomo Fragione and Bence Kocsis, (2018), arXiv:1806.02351 [astro-ph.GA].

R. M. O'Leary, B. Kocsis, and A. Loeb, MNRAS **395**, 2127–2146 (2009), arXiv:0807.2638.

F. Antonini and H. B. Perets, Astrophysical Journal **757**, 27 (2012), arXiv:1203.2938.

Bao-Minh Hoang, Smadar Naoz, Bence Kocsis, Frederic A. Rasio, and Fani Dosopoulou, Astrophys. J. **856**, 140 (2018), arXiv:1706.09896 [astro-ph.HE].

C. Petrovich and F. Antonini, The Astrophysical Journal **846**, 146 (2017), arXiv:1705.05848 [astro-ph.HE].

M. Arca-Sedda and A. Gualandris, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society **477**, 4423–4442 (2018), arXiv:1804.06116.

M. Arca-Sedda and Roberto Capuzzo-Dolcetta, (2017), arXiv:1709.05567 [astro-ph.GA].

Adrian S. Hamers, Ben Bar-Or, Cristobal Petrovich, and Fabio Antonini, (2018), arXiv:1805.10313 [astro-ph.HE].

Joseph John Fernández and Shiho Kobayashi, (2018), arXiv:1805.09593 [astro-ph.HE].

Ákos Szölgyén and Bence Kocsis, (2018), arXiv:1803.07090 [astro-ph.GA].

F. Antonini, R. Capuzzo-Dolcetta, A. Mastrobuono-Battisti, and D. Merritt, The Astrophysical Journal **750**, 111 (2012), arXiv:1110.5937.

F. Antonini, The Astrophysical Journal **763**, 62 (2013), arXiv:1207.6589.

M. Arca-Sedda, R. Capuzzo-Dolcetta, F. Antonini, and A. Seth, Astrophysical Journal **806**, 220 (2015), arXiv:1501.04567.

Manuel Arca-Sedda, Bence Kocsis, and Timothy Brandt, (2017), arXiv:1709.03119 [astro-ph.GA].

H. Tagawa, M. Umemura, and N. Gouda, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society **462**, 3812–3822 (2016), arXiv:1602.08767.

H. Tagawa and M. Umemura, The Astrophysical Journal **856**, 47 (2018), arXiv:1802.07473.

Enrico Barausse and Luciano Rezzolla, Phys. Rev. **D77**, 104027 (2008), arXiv:0711.4558 [gr-qc].

B. Kocsis, N. Yunes, and A. Loeb, Physical Review D **84**, 024032 (2011), arXiv:1104.2322.

Hiromichi Tagawa, Bence Kocsis, and Takayuki R. Saitoh, (2018), arXiv:1802.00441 [astro-ph.HE].

I. Bartos, B. Kocsis, Z. Haiman, and S. Márka, Astrophysical Journal **835**, 165 (2017a), arXiv:1602.03831 [astro-ph.HE].

N. C. Stone, B. D. Metzger, and Z. Haiman, MNRAS **464**, 946–954 (2017b), arXiv:1602.04226.

I. Bartos, Z. Haiman, Z. Marka, B. D. Metzger, N. C. Stone, and S. Marka, Nature Communications **8**, 831 (2017b), arXiv:1701.02328 [astro-ph.HE].

K. Silsbee and S. Tremaine, Astrophysical Journal **836**, 39 (2017), arXiv:1608.07642 [astro-ph.HE].

F. Antonini, S. Toonen, and A. S. Hamers, The Astrophysical Journal **841**, 77 (2017), arXiv:1703.06614.

Carl L. Rodriguez and Fabio Antonini, (2018), arXiv:1805.08212 [astro-ph.HE].

Manuel Arca-Sedda, Gongjie Li, and Bence Kocsis, (2018), arXiv:1805.06458 [astro-ph.HE].

Sambaran Banerjee, (2018), arXiv:1805.06466 [astro-ph.HE].

X. Fang, T. A. Thompson, and C. M. Hirata, MNRAS **476**, 4234–4262 (2018), arXiv:1709.08682 [astro-ph.HE].

T. Kinugawa, K. Inayoshi, K. Hotokezaka, D. Nakauchi, and T. Nakamura, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society **442**, 2963–2992 (2014), arXiv:1402.6672 [astro-ph.HE].

Simeon Bird, Ilias Cholis, Julian B. Muñoz, Yacine Ali-Haimoud, Marc Kamionkowski, Ely D. Kovetz, Alvise Raccanelli, and Adam G. Riess, Phys. Rev. Lett. **116**, 201301 (2016), arXiv:1603.00464 [astro-ph.CO].

Timothy D. Brandt, Astrophys. J. **824**, L31 (2016), arXiv:1605.03665 [astro-ph.GA].

Yacine Ali-Haïmoud, Ely D. Kovetz, and Marc Kamionkowski, Phys. Rev. **D96**, 123523 (2017), arXiv:1709.06576 [astro-ph.CO].

Misao Sasaki, Teruaki Suyama, Takahiro Tanaka, and Shuichiro Yokoyama, Phys. Rev. Lett. **117**, 061101 (2016), arXiv:1603.08338 [astro-ph.CO].

Misao Sasaki, Teruaki Suyama, Takahiro Tanaka, and Shuichiro Yokoyama, Class. Quant. Grav. **35**, 063001 (2018), arXiv:1801.05235 [astro-ph.CO].

L. Wang, R. Spurzem, S. Aarseth, M. Giersz, A. Askar, P. Berczik, T. Naab, R. Schadow, and M. B. N. Kouwenhoven, MNRAS **458**, 1450–1465 (2016), arXiv:1602.00759 [astro-ph.SR].

C. L. Rodriguez, M. Morscher, L. Wang, S. Chatterjee, F. A. Rasio, and R. Spurzem, MNRAS **463**, 2109–2118 (2016b), arXiv:1601.04227 [astro-ph.IM].

Taras Panamarev, Andreas Just, Rainer Spurzem, Peter Berczik, Long Wang, and Manuel Arca Sedda, (2018a), arXiv:1805.02153 [astro-ph.GA].

G. F. Kennedy, Y. Meiron, B. Shukirgaliyev, T. Panamarev, P. Berczik, A. Just, and R. Spurzem, MNRAS **460**, 240–255 (2016), arXiv:1604.05309.

Taras Panamarev, Bekdaulet Shukirgaliyev, Yohai Meiron, Peter Berczik, Andreas Just, Rainer Spurzem, Chingis Omarov, and Emmanuil Vilkoviskij, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **476**, 4224–4233 (2018b), arXiv:1802.03027 [astro-ph.GA].

B. Kocsis and S. Tremaine, MNRAS **412**, 187–207 (2011), arXiv:1006.0001 [astro-ph.GA].

H. B. Perets, A. Mastrobuono-Battisti, Y. Meiron, and A. Gualandris, (2018), arXiv:1802.00012.

M. Morscher, B. Pattabiraman, C. Rodriguez, F. A. Rasio, and S. Umbreit, Astrophysical Journal **800**, 9 (2015), arXiv:1409.0866.

M. Arca Sedda, A. Askar, and M. Giersz, (2018), arXiv:1801.00795.

A. Askar, M. A. Sedda, and M. Giersz, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society (2018), 10.1093/mnras/sty1186, arXiv:1802.05284.

S. Chatterjee, C. L. Rodriguez, V. Kalogera, and F. A. Rasio, Astrophysical Journal **836**, L26 (2017), arXiv:1609.06689.

M. Giersz, N. Leigh, A. Hypki, N. Lützgendorf, and A. Askar, MNRAS **454**, 3150–3165 (2015), arXiv:1506.05234.

Carl L. Rodriguez, Pau Amaro-Seoane, Sourav Chatterjee, and Frederic A. Rasio, Phys. Rev. Lett. **120**, 151101 (2018), arXiv:1712.04937 [astro-ph.HE].

J. Samsing, A. Askar, and M. Giersz, The Astrophysical Journal **855**, 124 (2018), arXiv:1712.06186 [astro-ph.HE].

Johan Samsing and Daniel J. D'Orazio, (2018), arXiv:1804.06519 [astro-ph.HE].

Johan Samsing, Nathan W. C. Leigh, and Alessandro A. Trani, (2018a), arXiv:1803.08215 [astro-ph.HE].

K. P. Rauch and S. Tremaine, New A **1**, 149–170 (1996), astro-ph/9603018.

B. Kocsis and S. Tremaine, MNRAS **448**, 3265–3296 (2015), arXiv:1406.1178.

J. Touma and S. Tremaine, J. Phys. A: Math. Theor. **47**, 292001 (2014), arXiv:1401.5534.

Z. Roupas, B. Kocsis, and S. Tremaine, Astrophysical Journal **842**, 90 (2017), arXiv:1701.03271.

Ádám Takács and Bence Kocsis, Astrophys. J. **856**, 113 (2018), arXiv:1712.04449 [astro-ph.GA].

J.-B. Fouvry, C. Pichon, and P.-H. Chavanis, A&A **609**, A38 (2018), arXiv:1705.01131.

S. F. Portegies Zwart and S. L. W. McMillan, Astrophysical Journal **576**, 899–907 (2002), astro-ph/0201055.

Giacomo Fragione, Idan Ginsburg, and Bence Kocsis, Astrophys. J. **856**, 92 (2018), arXiv:1711.00483 [astro-ph.GA].

R. M. O'Leary, Y. Meiron, and B. Kocsis, Astrophysical Journal **824**, L12 (2016), arXiv:1602.02809 [astro-ph.HE].

M. Zevin, C. Pankow, C. L. Rodriguez, L. Sampson, E. Chase, V. Kalogera, and F. A. Rasio, Astrophysical Journal **846**, 82 (2017), arXiv:1704.07379 [astro-ph.HE].

B. Kocsis, T. Suyama, T. Tanaka, and S. Yokoyama, Astrophysical Journal **854**, 41 (2018), arXiv:1709.09007.

Zu-Cheng Chen and Qing-Guo Huang, (2018), arXiv:1801.10327 [astro-ph.CO].

Pau Amaro-Seoane and Xian Chen, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **458**, 3075–3082 (2016), arXiv:1512.04897 [astro-ph.CO].

M. Fishbach, D. E. Holz, and B. Farr, Astrophysical Journal **840**, L24 (2017), arXiv:1703.06869 [astro-ph.HE].

J. Morawski, M. Giersz, A. Askar, and K. Belczynski, (2018), arXiv:1802.01192 [astro-ph.GA].

Laura Brenneman, (2013), 10.1007/978-1-4614-7771-6, arXiv:1309.6334 [astro-ph.HE].

J. E. McClintock, R. Narayan, and J. F. Steiner, Space Sci. Rev. **183**, 295–322 (2014), arXiv:1303.1583 [astro-ph.HE].

W. M. Farr, S. Stevenson, M. C. Miller, I. Mandel, B. Farr, and A. Vecchio, Nature **548**, 426–429 (2017), arXiv:1706.01385 [astro-ph.HE].

B. Farr, D. E. Holz, and W. M. Farr, Astrophysical Journal **854**, L9 (2018), arXiv:1709.07896 [astro-ph.HE].

R. M. O'Leary, F. A. Rasio, J. M. Fregeau, N. Ivanova, and R. O'Shaughnessy, Astrophysical Journal **637**, 937–951 (2006), astro-ph/0508224.

K. Breivik, C. L. Rodriguez, S. L. Larson, V. Kalogera, and F. A. Rasio, Astrophysical Journal **830**, L18 (2016), arXiv:1606.09558.

Daniel J. D'Orazio and Johan Samsing, (2018), arXiv:1805.06194 [astro-ph.HE].

Johan Samsing, Daniel J. D'Orazio, Abbas Askar, and Mirek Giersz, (2018b), arXiv:1802.08654 [astro-ph.HE].

Xian Chen and Pau Amaro-Seoane, Astrophys. J. **842**, L2 (2017), arXiv:1702.08479 [astro-ph.HE].

László Gondán, Bence Kocsis, Péter Raffai, and Zsolt Frei, Astrophys. J. **860**, 5 (2018a), arXiv:1711.09989 [astro-ph.HE].

László Gondán, Bence Kocsis, Péter Raffai, and Zsolt Frei, Astrophys. J. **855**, 34 (2018b), arXiv:1705.10781 [astro-ph.HE].

Kyle Kremer, Sourav Chatterjee, Katelyn Breivik, Carl L. Rodriguez, Shane L. Larson, and Frederic A. Rasio, Phys. Rev. Lett. **120**, 191103 (2018), arXiv:1802.05661 [astro-ph.HE].

N. Yunes, M. C. Miller, and J. Thornburg, Physical Review D **83**, 044030 (2011), arXiv:1010.1721 [astro-ph.GA].

Y. Meiron, B. Kocsis, and A. Loeb, Astrophysical Journal **834**, 200 (2017), arXiv:1604.02148 [astro-ph.HE].

Kohei Inayoshi, Nicola Tamanini, Chiara Caprini, and Zoltan Haiman, Phys. Rev. **D96**, 063014 (2017), arXiv:1702.06529 [astro-ph.HE].

B. Kocsis, Astrophysical Journal **763**, 122 (2013), arXiv:1211.6427 [astro-ph.HE].

Johan Samsing and Teva Ilan, (2017), arXiv:1709.01660 [astro-ph.HE].

Gianfranco Bertone and Dan Hooper, Submitted to: Rev. Mod. Phys. (2016), arXiv:1605.04909 [astro-ph.CO].

J. Silk *et al.*, *Particle Dark Matter: Observations, Models and Searches*, edited by Gianfranco Bertone (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010).

Lars Bergström, Rept. Prog. Phys. **63**, 793 (2000), arXiv:hep-ph/0002126 [hep-ph].

Gianfranco Bertone, Dan Hooper, and Joseph Silk, Phys. Rept. **405**, 279–390 (2005a), arXiv:hep-ph/0404175 [hep-ph].

Jonathan L. Feng, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **48**, 495–545 (2010), arXiv:1003.0904 [astro-ph.CO].

Bernard Carr, Florian Kuhnel, and Marit Sandstad, Phys. Rev. **D94**, 083504 (2016), arXiv:1607.06077 [astro-ph.CO].

Sebastien Clesse and Juan García-Bellido, Phys. Dark Univ. **15**, 142–147 (2017b), arXiv:1603.05234 [astro-ph.CO].

Juan García-Bellido and Sebastien Clesse, Phys. Dark Univ. **19**, 144–148 (2018), arXiv:1710.04694 [astro-ph.CO].

Juan García-Bellido, *Proceedings, 11th International LISA Symposium: Zurich, Switzerland, September 5-9, 2016*, J. Phys. Conf. Ser. **840**, 012032 (2017), arXiv:1702.08275 [astro-ph.CO].

Anne M. Green, Fundam. Theor. Phys. **178**, 129–149 (2015), arXiv:1403.1198 [gr-qc].

Juan Garcia-Bellido, Andrei D. Linde, and David Wands, Phys. Rev. **D54**, 6040–6058 (1996), arXiv:astro-ph/9605094 [astro-ph].

S. Clesse and J. García-Bellido, Phys. Rev. **D92**, 023524 (2015), arXiv:1501.07565 [astro-ph.CO].

Takashi Nakamura, Misao Sasaki, Takahiro Tanaka, and Kip S. Thorne, Astrophys. J. **487**, L139–L142 (1997), arXiv:astro-ph/9708060 [astro-ph].

Kunihito Ioka, Takeshi Chiba, Takahiro Tanaka, and Takashi Nakamura, Phys. Rev. **D58**, 063003 (1998), arXiv:astro-ph/9807018 [astro-ph].

Bradley J. Kavanagh, Daniele Gaggero, and Gianfranco Bertone, (2018), arXiv:1805.09034 [astro-ph.CO].

Yacine Ali-Haïmoud, (2018), arXiv:1805.05912 [astro-ph.CO].

Takeshi Chiba and Shuichiro Yokoyama, PTEP **2017**, 083E01 (2017), arXiv:1704.06573 [gr-qc].

Jose Maria Ezquiaga, Juan Garcia-Bellido, and Ester Ruiz Morales, Phys. Lett. **B776**, 345–349 (2018), arXiv:1705.04861 [astro-ph.CO].

Juan Garcia-Bellido and Ester Ruiz Morales, Phys. Dark Univ. **18**, 47–54 (2017), arXiv:1702.03901 [astro-ph.CO].

Christian T. Byrnes, Mark Hindmarsh, Sam Young, and Michael R. S. Hawkins, (2018), arXiv:1801.06138 [astro-ph.CO].

Tomohiro Nakama, Joseph Silk, and Marc Kamionkowski, Phys. Rev. **D95**, 043511 (2017), arXiv:1612.06264 [astro-ph.CO].

Juan Garcia-Bellido, Marco Peloso, and Caner Unal, JCAP **1709**, 013 (2017), arXiv:1707.02441 [astro-ph.CO].

R. A. Allsman *et al.* (Macho), Astrophys. J. **550**, L169 (2001), arXiv:astro-ph/0011506 [astro-ph].

P. Tisserand *et al.* (EROS-2), Astron. Astrophys. **469**, 387–404 (2007), arXiv:astro-ph/0607207 [astro-ph].

M. R. S. Hawkins, Astron. Astrophys. **575**, A107 (2015), arXiv:1503.01935 [astro-ph.GA].

Sebastiano Calchi Novati *et al.* (POINT-AGAPE), Astron. Astrophys. **443**, 911 (2005), arXiv:astro-ph/0504188 [astro-ph].

C. H. Lee, A. Riffeser, S. Seitz, R. Bender, and J. Koppenhoefer, Astrophys. J. **806**, 161 (2015), arXiv:1504.07246 [astro-ph.GA].

Miguel Zumalacarregui and Uros Seljak, (2017), arXiv:1712.02240 [astro-ph.CO].

B. J. Carr, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **194**, 639–668 (1981).

Massimo Ricotti, Jeremiah P. Ostriker, and Katherine J. Mack, Astrophys. J. **680**, 829 (2008), arXiv:0709.0524 [astro-ph].

Lu Chen, Qing-Guo Huang, and Ke Wang, JCAP **1612**, 044 (2016), arXiv:1608.02174 [astro-ph.CO].

Daniel Aloni, Kfir Blum, and Raphael Flauger, JCAP **1705**, 017 (2017), arXiv:1612.06811 [astro-ph.CO].

Yacine Ali-Haïmoud and Marc Kamionkowski, Phys. Rev. **D95**, 043534 (2017), arXiv:1612.05644 [astro-ph.CO].

Sebastien Clesse and Juan García-Bellido, Phys. Dark Univ. **18**, 105–114 (2017), arXiv:1610.08479 [astro-ph.CO].

Vivian Poulin, Pasquale D. Serpico, Francesca Calore, Sebastien Clesse, and Kazunori Kohri, Phys. Rev. **D96**, 083524 (2017), arXiv:1707.04206 [astro-ph.CO].

Miguel A. Monroy-Rodríguez and Christine Allen, Astrophys. J. **790**, 159 (2014), arXiv:1406.5169 [astro-ph.GA].

Savvas M. Koushiappas and Abraham Loeb, Phys. Rev. Lett. **119**, 041102 (2017a), arXiv:1704.01668 [astro-ph.GA].

T. S. Li *et al.* (DES), Astrophys. J. **838**, 8 (2017a), arXiv:1611.05052 [astro-ph.GA].

Daniele Gaggero, Gianfranco Bertone, Francesca Calore, Riley M. T. Connors, Mark Lovell, Sera Markoff, and Emma Storm, Phys. Rev. Lett. **118**, 241101 (2017), arXiv:1612.00457 [astro-ph.HE].

Anne M. Green, Phys. Rev. **D94**, 063530 (2016), arXiv:1609.01143 [astro-ph.CO].

Nicola Bellomo, José Luis Bernal, Alvise Raccanelli, and Licia Verde, JCAP **1801**, 004 (2018), arXiv:1709.07467 [astro-ph.CO].

Florian Kühnel and Katherine Freese, Phys. Rev. **D95**, 083508 (2017), arXiv:1701.07223 [astro-ph.CO].

Bernard Carr, Martti Raidal, Tommi Tenkanen, Ville Vaskonen, and Hardi Veermäe, Phys. Rev. **D96**, 023514 (2017), arXiv:1705.05567 [astro-ph.CO].

Benjamin V. Lehmann, Stefano Profumo, and Jackson Yant, JCAP **1804**, 007 (2018), arXiv:1801.00808 [astro-ph.CO].

Savvas M. Koushiappas and Abraham Loeb, Phys. Rev. Lett. **119**, 221104 (2017b), arXiv:1708.07380 [astro-ph.CO].

F. Governato, M. Colpi, and L. Maraschi, MNRAS **271** (1994), 10.1093/mnras/271.2.317, astro-ph/9407018.

Fazeel M. Khan, Davide Fiacconi, Lucio Mayer, Peter Berczik, and Andreas Just, Astrophys. J. **828**, 73 (2016a), arXiv:1604.00015 [astro-ph.GA].

P. R. Capelo, M. Volonteri, M. Dotti, J. M. Bellovary, L. Mayer, and F. Governato, MNRAS **447**, 2123–2143 (2015), arXiv:1409.0004.

D. Fiacconi, L. Mayer, R. Roškar, and M. Colpi, Astrophysical Journal **777**, L14 (2013), arXiv:1307.0822.

A. Lupi, F. Haardt, and M. Dotti, MNRAS **446**, 1765–1774 (2015a), arXiv:1410.0959.

V. Tamburello, P. R. Capelo, L. Mayer, J. M. Bellovary, and J. W. Wadsley, MNRAS **464**, 2952–2962 (2017), arXiv:1603.00021.

A. Lupi, F. Haardt, M. Dotti, and M. Colpi, MNRAS **453**, 3437–3446 (2015b), arXiv:1509.02920.

E. Vasiliev, F. Antonini, and D. Merritt, Astrophysical Journal **810**, 49 (2015), arXiv:1505.05480.

C. Roedig, A. Sesana, M. Dotti, J. Cuadra, P. Amaro-Seoane, and F. Haardt, A&A **545**, A127 (2012), arXiv:1202.6063 [astro-ph.CO].

S. Callegari, L. Mayer, S. Kazantzidis, M. Colpi, F. Governato, T. Quinn, and J. Wadsley, Astrophysical Journal **696**, L89–L92 (2009), arXiv:0811.0615.

M. Tremmel, F. Governato, M. Volonteri, T. R. Quinn, and A. Pontzen, MNRAS (2018), 10.1093/mnras/sty139, arXiv:1708.07126.

M. Volonteri and R. Perna, MNRAS **358**, 913–922 (2005), astro-ph/0501345.

J. M. Bellovary, F. Governato, T. R. Quinn, J. Wadsley, S. Shen, and M. Volonteri, Astrophysical Journal **721**, L148–L152 (2010), arXiv:1008.5147 [astro-ph.CO].

M. Volonteri, Y. Dubois, C. Pichon, and J. Devriendt, MNRAS **460**, 2979–2996 (2016), arXiv:1602.01941.

Q. Yu, MNRAS **331**, 935–958 (2002), astro-ph/0109530.

L. Mayer, S. Kazantzidis, P. Madau, M. Colpi, T. Quinn, and J. Wadsley, Science **316**, 1874 (2007), arXiv:0706.1562.

R. Roškar, D. Fiacconi, L. Mayer, S. Kazantzidis, T. R. Quinn, and J. Wadsley, MNRAS **449**, 494–505 (2015), arXiv:1406.4505.

H. Pfister, A. Lupi, P. R. Capelo, M. Volonteri, J. M. Bellovary, and M. Dotti, MNRAS **471**, 3646–3656 (2017), arXiv:1706.04010.

Marta Volonteri, Francesco Haardt, and Piero Madau, Astrophys. J. **582**, 559–573 (2003), arXiv:astro-ph/0207276 [astro-ph].

F. Dosopoulou and F. Antonini, Astrophysical Journal **840**, 31 (2017), arXiv:1611.06573.

M. C. Begelman, R. D. Blandford, and M. J. Rees, Nature **287**, 307–309 (1980).

P. Goldreich and S. Tremaine, Astrophysical Journal **241**, 425–441 (1980).

P. Berczik, D. Merritt, R. Spurzem, and H.-P. Bischof, Astrophysical Journal **642**, L21–L24 (2006), astro-ph/0601698.

A. Sesana and F. M. Khan, MNRAS **454**, L66–L70 (2015), arXiv:1505.02062.

N. I. Shakura and R. A. Sunyaev, A&A **24**, 337–355 (1973).

P. J. Armitage and P. Natarajan, ApJ **634**, 921–927 (2005).

A. I. MacFadyen and M. Milosavljević, Astrophysical Journal **672**, 83–93 (2008), astro-ph/0607467.

Z. Haiman, B. Kocsis, and K. Menou, Astrophysical Journal **700**, 1952–1969 (2009), arXiv:0904.1383 [astro-ph.CO].

C. Roedig, M. Dotti, A. Sesana, J. Cuadra, and M. Colpi, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **415**, 3033–3041 (2011), arXiv:1104.3868 [astro-ph.CO].

J.-M. Shi, J. H. Krolik, S. H. Lubow, and J. F. Hawley, Astrophysical Journal **749**, 118 (2012), arXiv:1110.4866 [astro-ph.HE].

D. J. D'Orazio, Z. Haiman, and A. MacFadyen, MNRAS **436**, 2997–3020 (2013), arXiv:1210.0536 [astro-ph.GA].

J.-M. Shi and J. H. Krolik, Astrophys. J. **807**, 131 (2015), arXiv:1503.05561 [astro-ph.HE].

M. Boylan-Kolchin, C.-P. Ma, and E. Quataert, MNRAS **383**, 93–101 (2008), arXiv:0707.2960.

S. T. McWilliams, J. P. Ostriker, and F. Pretorius, Astrophysical Journal **789**, 156 (2014).

M. V. Sazhin, Soviet Journal of Astronomy **22**, 36–38 (1978).

S. Detweiler, Astrophys. J. **234**, 1100–1104 (1979).

D. C. Backer, S. R. Kulkarni, C. Heiles, M. M. Davis, and W. M. Goss, Nature **300**, 615–618 (1982).

R. W. Hellings and G. S. Downs, The Astrophysical Journal **265**, L39–L42 (1983).

R.W. Romani, in *Timing Neutron Stars*, NATO ASI Series, Series C, Vol. 262, edited by H. Ögelman and E.P.J. van den Heuvel (Kluwer, Dordrecht, Netherlands; Boston, U.S.A., 1989) pp. 113–117.

Sarah Burke-Spolaor, (2015), arXiv:1511.07869 [astro-ph.IM].

A. N. Lommen, Reports on Progress in Physics **78**, 124901 (2015).

A. N. Lommen, Nature Astronomy **1**, 809–811 (2017).

R. S. Foster and D. C. Backer, Astrophys. J. **361**, 300–308 (1990).

M. Rajagopal and R. W. Romani, Astrophys. J. **446**, 543 (1995), astro-ph/9412038.

A. H. Jaffe and D. C. Backer, Astrophys. J. **583**, 616–631 (2003), astro-ph/0210148.

J. S. B. Wyithe and A. Loeb, Astrophys. J. **590**, 691–706 (2003), astro-ph/0211556.

A. Sesana, F. Haardt, P. Madau, and M. Volonteri, Astrophys. J. **611**, 623–632 (2004), astro-ph/0401543.

A. Sesana, A. Vecchio, and C. N. Colacino, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **390**, 192–209 (2008), arXiv:0804.4476.

A. Sesana, A. Vecchio, and M. Volonteri, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **394**, 2255–2265 (2009), arXiv:0809.3412.

C. M. F. Mingarelli, T. J. W. Lazio, A. Sesana, J. E. Greene, J. A. Ellis, C.-P. Ma, S. Croft, S. Burke-Spolaor, and S. R. Taylor, Nature Astronomy **1**, 886–892 (2017), arXiv:1708.03491.

R. van Haasteren and Y. Levin, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **401**, 2372–2378 (2010), arXiv:0909.0954 [astro-ph.IM].

D. R. Madison, D. F. Chernoff, and J. M. Cordes, Phys. Rev. D **96**, 123016 (2017), arXiv:1710.04974.

Xavier Siemens, Jolien Creighton, Irit Maor, Saikat Ray Majumder, Kipp Cannon, and Jocelyn Read, Phys. Rev. **D73**, 105001 (2006), arXiv:gr-qc/0603115 [gr-qc].

L. Leblond, B. Shlaer, and X. Siemens, Phys. Rev. D **79**, 123519–+ (2009), arXiv:0903.4686 [astro-ph.CO].

S. A. Sanidas, R. A. Battye, and B. W. Stappers, Astrophys. J. **764**, 108 (2013), arXiv:1211.5042.

Paul D. Lasky *et al.*, Phys. Rev. **X6**, 011035 (2016), arXiv:1511.05994 [astro-ph.CO].

K. J. Lee, F. A. Jenet, and R. H. Price, Astrophys. J. **685**, 1304–1319 (2008).

S. J. Chamberlin and X. Siemens, Physical Review D **85**, 082001 (2012), arXiv:1111.5661 [astro-ph.HE].

C. M. F. Mingarelli, T. Sidery, I. Mandel, and A. Vecchio, Phys. Rev. D **88**, 062005 (2013), arXiv:1306.5394 [astro-ph.HE].

S. R. Taylor and J. R. Gair, Phys. Rev. D **88**, 084001 (2013), arXiv:1306.5395 [gr-qc].

C. M. F. Mingarelli and T. Sidery, Phys. Rev. D **90**, 062011 (2014), arXiv:1408.6840 [astro-ph.HE].

Neil J. Cornish and Rutger van Haasteren, (2014), arXiv:1406.4511 [gr-qc].

J. Gair, J. D. Romano, S. Taylor, and C. M. F. Mingarelli, Phys. Rev. D **90**, 082001 (2014), arXiv:1406.4664 [gr-qc].

S. R. Taylor, C. M. F. Mingarelli, J. R. Gair, A. Sesana, G. Theureau, S. Babak, C. G. Bassa, P. Brem, M. Burgay, R. N. Caballero, D. J. Champion, I. Cognard, G. Desvignes, L. Guillemot, J. W. T. Hessels, G. H. Janssen, R. Karuppusamy, M. Kramer, A. Lassus, P. Lazarus, L. Lentati, K. Liu, S. Osłowski, D. Perrodin, A. Petiteau, A. Possenti, M. B. Purver, P. A. Rosado, S. A. Sanidas, R. Smits, B. Stappers, C. Tiburzi, R. van Haasteren, A. Vecchio, J. P. W. Verbiest, and EPTA Collaboration, Physical Review Letters **115**, 041101 (2015), arXiv:1506.08817 [astro-ph.HE].

Zaven Arzoumanian *et al.* (NANOGrav), Astrophys. J. Suppl. **235**, 37 (2018a), arXiv:1801.01837 [astro-ph.HE].

G. Desvignes, R. N. Caballero, L. Lentati, J. P. W. Verbiest, D. J. Champion, B. W. Stappers, G. H. Janssen, P. Lazarus, S. Osłowski, S. Babak, C. G. Bassa, P. Brem, M. Burgay, I. Cognard, J. R. Gair, E. Graikou, L. Guillemot, J. W. T. Hessels, A. Jessner, C. Jordan, R. Karuppusamy, M. Kramer, A. Lassus, K. Lazaridis, K. J. Lee, K. Liu, A. G. Lyne, J. McKee, C. M. F. Mingarelli, D. Perrodin, A. Petiteau, A. Possenti, M. B. Purver, P. A. Rosado, S. Sanidas, A. Sesana, G. Shaifullah, R. Smits, S. R. Taylor, G. Theureau, C. Tiburzi, R. van Haasteren, and A. Vecchio, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **458**, 3341–3380 (2016), arXiv:1602.08511 [astro-ph.HE].

R. M. Shannon, V. Ravi, L. T. Lentati, P. D. Lasky, G. Hobbs, M. Kerr, R. N. Manchester, W. A. Coles, Y. Levin, M. Bailes, N. D. R. Bhat, S. Burke-Spolaor, S. Dai, M. J. Keith, S. Osłowski, D. J. Reardon, W. van Straten, L. Toomey, J.-B. Wang, L. Wen, J. S. B. Wyithe, and X.-J. Zhu, Science **349**, 1522–1525 (2015), arXiv:1509.07320.

J. P. W. Verbiest, L. Lentati, G. Hobbs, R. van Haasteren, P. B. Demorest, G. H. Janssen, J.-B. Wang, G. Desvignes, R. N. Caballero, M. J. Keith, D. J. Champion, Z. Arzoumanian, S. Babak, C. G. Bassa, N. D. R. Bhat, A. Brazier, P. Brem, M. Burgay, S. Burke-Spolaor, S. J. Chamberlin, S. Chatterjee, B. Christy, I. Cognard, J. M. Cordes, S. Dai, T. Dolch, J. A. Ellis, R. D. Ferdman, E. Fonseca, J. R. Gair, N. E. Garver-Daniels, P. Gentile, M. E. Gonzalez, E. Graikou, L. Guillemot, J. W. T. Hessels, G. Jones, R. Karuppusamy, M. Kerr, M. Kramer, M. T. Lam, P. D. Lasky, A. Lassus, P. Lazarus, T. J. W. Lazio, K. J. Lee, L. Levin, K. Liu, R. S. Lynch, A. G. Lyne, J. Mckee, M. A. McLaughlin, S. T. McWilliams, D. R. Madison, R. N. Manchester, C. M. F. Mingarelli, D. J. Nice, S. Osłowski, N. T. Palliyaguru, T. T. Pennucci, B. B. P. Perera, D. Perrodin, A. Possenti, A. Petiteau, S. M. Ransom, D. Reardon, P. A. Rosado, S. A. Sanidas, A. Sesana, G. Shaifullah, R. M. Shannon, X. Siemens, J. Simon, R. Smits, R. Spiewak, I. H. Stairs, B. W. Stappers, D. R. Stinebring, K. Stovall, J. K. Swiggum, S. R. Taylor, G. Theureau, C. Tiburzi, L. Toomey, M. Vallisneri, W. van Straten, A. Vecchio, Y. Wang, L. Wen, X. P. You, W. W. Zhu, and X.-J. Zhu, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **458**, 1267–1288 (2016), arXiv:1602.03640 [astro-ph.IM].

Xavier Siemens, Justin Ellis, Fredrick Jenet, and Joseph D. Romano, Class. Quant. Grav. **30**, 224015 (2013), arXiv:1305.3196 [astro-ph.IM].

P. A. Rosado, A. Sesana, and J. Gair, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **451**, 2417–2433 (2015), arXiv:1503.04803 [astro-ph.HE].

S. R. Taylor, M. Vallisneri, J. A. Ellis, C. M. F. Mingarelli, T. J. W. Lazio, and R. van Haasteren, The Astrophysical Journal Letters **819**, L6 (2016), arXiv:1511.05564 [astro-ph.IM].

E. S. Phinney, (2001), arXiv:astro-ph/0108028 [astro-ph].

B. Kocsis and A. Sesana, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **411**, 1467–1479 (2011), arXiv:1002.0584 [astro-ph.CO].

V. Ravi, J. S. B. Wyithe, R. M. Shannon, G. Hobbs, and R. N. Manchester, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **442**, 56–68 (2014), arXiv:1404.5183.

L. Sampson, N. J. Cornish, and S. T. McWilliams, Phys. Rev. D **91**, 084055 (2015), arXiv:1503.02662 [gr-qc].

Z. Arzoumanian, A. Brazier, S. Burke-Spolaor, S. J. Chamberlin, S. Chatterjee, B. Christy, J. M. Cordes, N. J. Cornish, K. Crowter, P. B. Demorest, X. Deng, T. Dolch, J. A. Ellis, R. D. Ferdman, E. Fonseca, N. Garver-Daniels, M. E. Gonzalez, F. Jenet, G. Jones, M. L. Jones, V. M. Kaspi, M. Koop, M. T. Lam, T. J. W. Lazio, L. Levin, A. N. Lommen, D. R. Lorimer, J. Luo, R. S. Lynch, D. R. Madison, M. A. McLaughlin, S. T. McWilliams, C. M. F. Mingarelli, D. J. Nice, N. Palliyaguru, T. T. Pennucci, S. M. Ransom, L. Sampson, S. A. Sanidas, A. Sesana, X. Siemens, J. Simon, I. H. Stairs, D. R. Stinebring, K. Stovall, J. Swiggum, S. R. Taylor, M. Vallisneri, R. van Haasteren, Y. Wang, W. W. Zhu, and NANOGrav Collaboration, Astrophysical Journal **821**, 13 (2016), arXiv:1508.03024.

A. Sesana, Classical and Quantum Gravity **30**, 224014 (2013), arXiv:1307.2600.

S. R. Taylor, J. Simon, and L. Sampson, Physical Review Letters **118**, 181102 (2017), arXiv:1612.02817.

S. Chen, H. Middleton, A. Sesana, W. Del Pozzo, and A. Vecchio, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society **468**, 404–417 (2017), arXiv:1612.02826 [astro-ph.HE].

T. Ryu, R. Perna, Z. Haiman, J. P. Ostriker, and N. C. Stone, MNRAS **473**, 3410–3433 (2018), arXiv:1709.06501.

L. Z. Kelley, L. Blecha, L. Hernquist, A. Sesana, and S. R. Taylor, MNRAS **471**, 4508–4526 (2017), arXiv:1702.02180 [astro-ph.HE].

E. Roebber, G. Holder, D. E. Holz, and M. Warren, ApJ **819**, 163 (2016), arXiv:1508.07336.

K. Inayoshi, K. Ichikawa, and Z. Haiman, ArXiv e-prints (2018), arXiv:1805.05334.

Hannah Middleton, Walter Del Pozzo, Will M. Farr, Alberto Sesana, and Alberto Vecchio, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **455**, L72–L76 (2016), arXiv:1507.00992 [astro-ph.CO].

J. Kormendy and L. C. Ho, Annu. Rev. Astron. Astrophys **51**, 511–653 (2013b), arXiv:1304.7762 [astro-ph.CO].

H. Middleton, S. Chen, W. Del Pozzo, A. Sesana, and A. Vecchio, Nature Communications **9**, 573 (2018), arXiv:1707.00623.

L. Lentati *et al.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **453**, 2576–2598 (2015), arXiv:1504.03692 [astro-ph.CO].

Z. Arzoumanian *et al.* (NANOGRAV), Astrophys. J. **859**, 47 (2018b), arXiv:1801.02617 [astro-ph.HE].

Gemma Janssen *et al.*, *Proceedings, Advancing Astrophysics with the Square Kilometre Array (AASKA14): Giardini Naxos, Italy, June 9-13, 2014*, PoS **AASKA14**, 037 (2015), arXiv:1501.00127 [astro-ph.IM].

C. Tiburzi, G. Hobbs, M. Kerr, W. A. Coles, S. Dai, R. N. Manchester, A. Possenti, R. M. Shannon, and X. P. You, Monthly Notices of The Royal Astronomical Society **455**, 4339–4350 (2016), arXiv:1510.02363 [astro-ph.IM].

C. M. F. Mingarelli and A. B. Mingarelli, ArXiv e-prints (2018), arXiv:1806.06979 [astro-ph.IM].

C. J. Moore, R. H. Cole, and C. P. L. Berry, Class. Quant. Grav. **32**, 015014 (2015), arXiv:1408.0740 [gr-qc].

K. J. Lee, N. Wex, M. Kramer, B. W. Stappers, C. G. Bassa, G. H. Janssen, R. Karuppusamy, and R. Smits, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **414**, 3251–3264 (2011), arXiv:1103.0115 [astro-ph.HE].

S. Babak and A. Sesana, Physical Review D **85**, 044034 (2012), arXiv:1112.1075.

Z. Arzoumanian, A. Brazier, S. Burke-Spolaor, S. J. Chamberlin, S. Chatterjee, J. M. Cordes, P. B. Demorest, X. Deng, T. Dolch, J. A. Ellis, R. D. Ferdman, N. Garver-Daniels, F. Jenet, G. Jones, V. M. Kaspi, M. Koop, M. T. Lam, T. J. W. Lazio, A. N. Lommen, D. R. Lorimer, J. Luo, R. S. Lynch, D. R. Madison, M. A. McLaughlin, S. T. McWilliams, D. J. Nice, N. Palliyaguru, T. T. Pennucci, S. M. Ransom, A. Sesana, X. Siemens, I. H. Stairs, D. R. Stinebring, K. Stovall, J. Swiggum, M. Vallisneri, R. van Haasteren, Y. Wang, W. W. Zhu, and NANOGrav Collaboration, Astrophysical Journal **794**, 141 (2014), arXiv:1404.1267.

Stanislav Babak *et al.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **455**, 1665–1679 (2016), arXiv:1509.02165 [astro-ph.CO].

A. Sesana and A. Vecchio, Phys. Rev. D **81**, 104008–+ (2010), arXiv:1003.0677 [astro-ph.CO].

J. Simon, A. Polin, A. Lommen, B. Stappers, L. S. Finn, F. A. Jenet, and B. Christy, ApJ **784**, 60 (2014), arXiv:1402.1140 [astro-ph.CO].

C. M. F. Mingarelli, K. Grover, T. Sidery, R. J. E. Smith, and A. Vecchio, Physical Review Letters **109**, 081104 (2012), arXiv:1207.5645 [astro-ph.HE].

A. Sesana, C. Roedig, M. T. Reynolds, and M. Dotti, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **420**, 860–877 (2012), arXiv:1107.2927 [astro-ph.CO].

T. Tanaka, K. Menou, and Z. Haiman, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **420**, 705–719 (2012), arXiv:1107.2937 [astro-ph.CO].

Sarah Burke-Spolaor, Class. Quant. Grav. **30**, 224013 (2013), arXiv:1308.4408 [astro-ph.CO].

L. A. Moustakas, Nature Astronomy **1**, 825–826 (2017).

Stephan Rosswog, Int. J. Mod. Phys. **D24**, 1530012 (2015), arXiv:1501.02081 [astro-ph.HE].

Masaru Shibata and Keisuke Taniguchi, Living Rev. Rel. **14**, 6 (2011).

Luca Baiotti and Luciano Rezzolla, Rept. Prog. Phys. **80**, 096901 (2017), arXiv:1607.03540 [gr-qc].

Vasileios Paschalidis, Class. Quant. Grav. **34**, 084002 (2017), arXiv:1611.01519 [astro-ph.HE].

D. Eichler, M. Livio, T. Piran, and D. N. Schramm, Nature **340**, 126–128 (1989a).

B. Paczynski, Astrop. J. Lett. **308**, L43–L46 (1986).

Edo Berger, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **52**, 43–105 (2014), arXiv:1311.2603 [astro-ph.HE].

J. M. Lattimer and D. N. Schramm, Astrop. J. Lett. **192**, L145–L147 (1974).

D. M. Meyer, D. E. Welty, and D. G. York, "Astrop. J. Lett." **343**, L37–L40 (1989).

C. Freiburghaus, S. Rosswog, and F.-K. Thielemann, The Astrophysical Journal **525**, L121–L124 (1999).

B. Paczynski, Astrop. J. Lett. **494**, L45 (1998), astro-ph/9710086.

S.R. Kulkarni, (2005), arXiv:astro-ph/0510256 [astro-ph].

E. Pian *et al.*, Nature **551**, 67–70 (2017), arXiv:1710.05858 [astro-ph.HE].

N. R. Tanvir *et al.*, Astrophys. J. **848**, L27 (2017), arXiv:1710.05455 [astro-ph.HE].

Sebastiano Bernuzzi, Alessandro Nagar, Tim Dietrich, and Thibault Damour, Phys. Rev. Lett. **114**, 161103 (2015), arXiv:1412.4553 [gr-qc].

K. Kiuchi, K. Kawaguchi, K. Kyutoku, Y. Sekiguchi, M. Shibata, and K. Taniguchi, Physical Review D **96**, 084060 (2017), arXiv:1708.08926 [astro-ph.HE].

David Radice, Luciano Rezzolla, and Filippo Galeazzi, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **437**, L46–L50 (2014), arXiv:1306.6052 [gr-qc].

Wolfgang Tichy, Phys. Rev. **D86**, 064024 (2012), arXiv:1209.5336 [gr-qc].

Sebastiano Bernuzzi, Tim Dietrich, Wolfgang Tichy, and Bernd Brügmann, Phys. Rev. **D89**, 104021 (2014), arXiv:1311.4443 [gr-qc].

T. Dietrich, N. Moldenhauer, N. K. Johnson-McDaniel, S. Bernuzzi, C. M. Markakis, B. Brügmann, and W. Tichy, Physical Review D **92**, 124007 (2015), arXiv:1507.07100 [gr-qc].

T. Dietrich, S. Bernuzzi, M. Ujevic, and W. Tichy, Physical Review D **95**, 044045 (2017), arXiv:1611.07367 [gr-qc].

K. Hotokezaka, K. Kyutoku, Y.-i. Sekiguchi, and M. Shibata, Physical Review D **93**, 064082 (2016), arXiv:1603.01286 [gr-qc].

Tanja Hinderer *et al.*, Phys. Rev. Lett. **116**, 181101 (2016), arXiv:1602.00599 [gr-qc].

T. Dietrich and M. Ujevic, Classical and Quantum Gravity **34**, 105014 (2017), arXiv:1612.03665 [gr-qc].

K. Hotokezaka, K. Kiuchi, K. Kyutoku, T. Muranushi, Y.-i. Sekiguchi, M. Shibata, and K. Taniguchi, Physical Review D **88**, 044026 (2013), arXiv:1307.5888 [astro-ph.HE].

A. Bauswein, T. W. Baumgarte, and H. T. Janka, Phys. Rev. Lett. **111**, 131101 (2013), arXiv:1307.5191 [astro-ph.SR].

Francesco Zappa, Sebastiano Bernuzzi, David Radice, Albino Perego, and Tim Dietrich, Phys. Rev. Lett. **120**, 111101 (2018), arXiv:1712.04267 [gr-qc].

Andreas Bauswein, Nikolaos Stergioulas, and Hans-Thomas Janka, Eur. Phys. J. **A52**, 56 (2016), arXiv:1508.05493 [astro-ph.HE].

Luciano Rezzolla and Kentaro Takami, Phys. Rev. **D93**, 124051 (2016), arXiv:1604.00246 [gr-qc].

R. Ciolfi, W. Kastaun, B. Giacomazzo, A. Endrizzi, D. M. Siegel, and R. Perna, Physical Review D **95**, 063016 (2017), arXiv:1701.08738 [astro-ph.HE].

Vasileios Paschalidis, William E. East, Frans Pretorius, and Stuart L. Shapiro, Phys. Rev. **D92**, 121502 (2015), arXiv:1510.03432 [astro-ph.HE].

David Radice, Sebastiano Bernuzzi, and Christian D. Ott, Phys. Rev. **D94**, 064011 (2016a), arXiv:1603.05726 [gr-qc].

Luis Lehner, Steven L. Liebling, Carlos Palenzuela, and Patrick M. Motl, Phys. Rev. **D94**, 043003 (2016), arXiv:1605.02369 [gr-qc].

Roberto De Pietri, Alessandra Feo, José A. Font, Frank Löffler, Francesco Maione, Michele Pasquali, and Nikolaos Stergioulas, Phys. Rev. Lett. **120**, 221101 (2018), arXiv:1802.03288 [gr-qc].

B. P. Abbott *et al.* (Virgo, LIGO Scientific), Astrophys. J. **851**, L16 (2017k), arXiv:1710.09320 [astro-ph.HE].

O. Korobkin, S. Rosswog, A. Arcones, and C. Winteler, MNRAS **426**, 1940–1949 (2012), arXiv:1206.2379 [astro-ph.SR].

Yuichiro Sekiguchi, Kenta Kiuchi, Koutarou Kyutoku, and Masaru Shibata, Phys. Rev. **D91**, 064059 (2015), arXiv:1502.06660 [astro-ph.HE].

Francois Foucart, Roland Haas, Matthew D. Duez, Evan O'Connor, Christian D. Ott, Luke Roberts, Lawrence E. Kidder, Jonas Lippuner, Harald P. Pfeiffer, and Mark A. Scheel, Phys. Rev. **D93**, 044019 (2016), arXiv:1510.06398 [astro-ph.HE].

David Radice, Filippo Galeazzi, Jonas Lippuner, Luke F. Roberts, Christian D. Ott, and Luciano Rezzolla, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **460**, 3255–3271 (2016b), arXiv:1601.02426 [astro-ph.HE].

L. Bovard, D. Martin, F. Guercilena, A. Arcones, L. Rezzolla, and O. Korobkin, Physical Review D **96**, 124005 (2017), arXiv:1709.09630 [gr-qc].

Shinya Wanajo, Yuichiro Sekiguchi, Nobuya Nishimura, Kenta Kiuchi, Koutarou Kyutoku, and Masaru Shibata, Astrophys. J. **789**, L39 (2014), arXiv:1402.7317 [astro-ph.SR].

S. Goriely, A. Bauswein, O. Just, E. Pllumbi, and H.-T. Janka, MNRAS **452**, 3894–3904 (2015), arXiv:1504.04377 [astro-ph.SR].

D. Martin, A. Perego, W. Kastaun, and A. Arcones, Classical and Quantum Gravity **35**, 034001 (2018), arXiv:1710.04900 [astro-ph.HE].

A. Perego, Stephan Rosswog, Ruben M. Cabezón, Oleg Korobkin, Roger Käppeli, Almudena Arcones, and Matthias Liebendörfer, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **443**, 3134–3156 (2014), arXiv:1405.6730 [astro-ph.HE].

S. Fujibayashi, Y. Sekiguchi, K. Kiuchi, and M. Shibata, The Astrophysical Journal **846**, 114 (2017).

R. Fernández and B. D. Metzger, MNRAS **435**, 502–517 (2013), arXiv:1304.6720 [astro-ph.HE].

Oliver Just, Andreas Bauswein, Ricard Ardevol Pulpillo, Stephane Goriely, and H. Thomas Janka, *Proceedings, 13th International Symposium on Nuclei in the Cosmos (NIC XIII): Debrecen, Hungary, July 7-11, 2014*, PoS **NICXIII**, 103 (2015), arXiv:1504.05448 [astro-ph.SR].

Daniel M. Siegel and Brian D. Metzger, Astrophys. J. **858**, 52 (2018), arXiv:1711.00868 [astro-ph.HE].

Sho Fujibayashi, Kenta Kiuchi, Nobuya Nishimura, Yuichiro Sekiguchi, and Masaru Shibata, Astrophys. J. **860**, 64 (2018), arXiv:1711.02093 [astro-ph.HE].

Daniel M. Siegel, Riccardo Ciolfi, and Luciano Rezzolla, Astrophys. J. **785**, L6 (2014), arXiv:1401.4544 [astro-ph.HE].

J. Lippuner, R. Fernández, L. F. Roberts, F. Foucart, D. Kasen, B. D. Metzger, and C. D. Ott, MNRAS **472**, 904–918 (2017), arXiv:1703.06216 [astro-ph.HE].

M.-R. Wu, I. Tamborra, O. Just, and H.-T. Janka, Physical Review D **96**, 123015 (2017), arXiv:1711.00477 [astro-ph.HE].

R. Fernández and B. D. Metzger, Annual Review of Nuclear and Particle Science **66**, 23–45 (2016), arXiv:1512.05435 [astro-ph.HE].

Brian D. Metzger, Living Rev. Rel. **20**, 3 (2017), arXiv:1610.09381 [astro-ph.HE].

Jennifer Barnes and Daniel Kasen, Astrophys. J. **775**, 18 (2013), arXiv:1303.5787 [astro-ph.HE].

Masaomi Tanaka and Kenta Hotokezaka, Astrophys. J. **775**, 113 (2013), arXiv:1306.3742 [astro-ph.HE].

D. Kasen, R. Fernández, and B. D. Metzger, MNRAS **450**, 1777–1786 (2015), arXiv:1411.3726 [astro-ph.HE].

Ryan T. Wollaeger, Oleg Korobkin, Christopher J. Fontes, Stephan K. Rosswog, Wesley P. Even, Christopher L. Fryer, Jesper Sollerman, Aimee L. Hungerford, Daniel R. van Rossum, and Allan B. Wollaber, (2017), arXiv:1705.07084 [astro-ph.HE].

D. Grossman, O. Korobkin, S. Rosswog, and T. Piran, MNRAS **439**, 757–770 (2014), arXiv:1307.2943 [astro-ph.HE].

S. Rosswog, U. Feindt, O. Korobkin, M. R. Wu, J. Sollerman, A. Goobar, and G. Martinez-Pinedo, Class. Quant. Grav. **34**, 104001 (2017), arXiv:1611.09822 [astro-ph.HE].

B. D. Metzger and R. Fernández, MNRAS **441**, 3444–3453 (2014), arXiv:1402.4803 [astro-ph.HE].

Dirk Martin, Albino Perego, Almudena Arcones, Friedrich-Karl Thielemann, Oleg Korobkin, and Stephan Rosswog, Astrophys. J. **813**, 2 (2015), arXiv:1506.05048 [astro-ph.SR].

V. Ashley Villar *et al.*, Astrophys. J. **851**, L21 (2017), arXiv:1710.11576 [astro-ph.HE].

Masaomi Tanaka *et al.*, Publ. Astron. Soc. Jap. (2017), 10.1093/pasj/psx121, arXiv:1710.05850 [astro-ph.HE].

Albino Perego, David Radice, and Sebastiano Bernuzzi, Astrophys. J. **850**, L37 (2017a), arXiv:1711.03982 [astro-ph.HE].

A. Murguia-Berthier, E. Ramirez-Ruiz, C. D. Kilpatrick, R. J. Foley, D. Kasen, W. H. Lee, A. L. Piro, D. A. Coulter, M. R. Drout, B. F. Madore, B. J. Shappee, Y.-C. Pan, J. X. Prochaska, A. Rest, C. Rojas-Bravo, M. R. Siebert, and J. D. Simon, The Astrophysical Journal **848**, L34 (2017), arXiv:1710.05453 [astro-ph.HE].

A. Bauswein, O. Just, H.-T. Janka, and N. Stergioulas, The Astrophysical Journal **850**, L34 (2017), arXiv:1710.06843 [astro-ph.HE].

David Radice, Albino Perego, Francesco Zappa, and Sebastiano Bernuzzi, Astrophys. J. **852**, L29 (2018), arXiv:1711.03647 [astro-ph.HE].

B. Margalit and B. D. Metzger, The Astrophysical Journal **850**, L19 (2017), arXiv:1710.05938 [astro-ph.HE].

K. Kyutoku, K. Ioka, and M. Shibata, Physical Review D **88**, 041503 (2013), arXiv:1305.6309 [astro-ph.HE].

M. B. Deaton, M. D. Duez, F. Foucart, E. O'Connor, C. D. Ott, L. E. Kidder, C. D. Muhlberger, M. A. Scheel, and B. Szilagyi, The Astrophysical Journal **776**, 47 (2013), arXiv:1304.3384 [astro-ph.HE].

F. Foucart, M. B. Deaton, M. D. Duez, E. O'Connor, C. D. Ott, R. Haas, L. E. Kidder, H. P. Pfeiffer, M. A. Scheel, and B. Szilagyi, Physical Review D **90**, 024026 (2014), arXiv:1405.1121 [astro-ph.HE].

Luke F. Roberts, Jonas Lippuner, Matthew D. Duez, Joshua A. Faber, Francois Foucart, James C. Lombardi, Sandra Ning, Christian D. Ott, and Marcelo Ponce, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **464**, 3907–3919 (2017), arXiv:1601.07942 [astro-ph.HE].

K. Kiuchi, Y. Sekiguchi, K. Kyutoku, M. Shibata, K. Taniguchi, and T. Wada, Physical Review D **92**, 064034 (2015), arXiv:1506.06811 [astro-ph.HE].

R. Fernández, F. Foucart, D. Kasen, J. Lippuner, D. Desai, and L. F. Roberts, Classical and Quantum Gravity **34**, 154001 (2017), arXiv:1612.04829 [astro-ph.HE].

A. Perego, R. M. Cabezón, and R. Käppeli, The Astrophysical Journal **223**, 22 (2016), arXiv:1511.08519 [astro-ph.IM].

F. Foucart, E. O'Connor, L. Roberts, L. E. Kidder, H. P. Pfeiffer, and M. A. Scheel, Physical Review D **94**, 123016 (2016), arXiv:1607.07450 [astro-ph.HE].

F. Foucart, MNRAS **475**, 4186–4207 (2018), arXiv:1708.08452 [astro-ph.HE].

A. Malkus, G. C. McLaughlin, and R. Surman, Physical Review D **93**, 045021 (2016), arXiv:1507.00946 [hep-ph].

J. Y. Tian, A. V. Patwardhan, and G. M. Fuller, Physical Review D **96**, 043001 (2017), arXiv:1703.03039 [astro-ph.HE].

Y. L. Zhu, A. Perego, and G. C. McLaughlin, Physical Review D **94**, 105006 (2016), arXiv:1607.04671 [hep-ph].

M. Frensel, M.-R. Wu, C. Volpe, and A. Perego, Physical Review D **95**, 023011 (2017), arXiv:1607.05938 [astro-ph.HE].

S. Chandrasekhar, Proceedings of the National Academy of Science **46**, 253–257 (1960).

Kenta Kiuchi, Koutarou Kyutoku, Yuichiro Sekiguchi, and Masaru Shibata, Phys. Rev. D **97**, 124039 (2018), arXiv:1710.01311 [astro-ph.HE].

C. Palenzuela, S. L. Liebling, D. Neilsen, L. Lehner, O. L. Caballero, E. O'Connor, and M. Anderson, "Phys. Rev. D" **92**, 044045 (2015), arXiv:1505.01607 [gr-qc].

A. Endrizzi, R. Ciolfi, B. Giacomazzo, W. Kastaun, and T. Kawamura, Classical and Quantum Gravity **33**, 164001 (2016), arXiv:1604.03445 [astro-ph.HE].

David Radice, Astrophys. J. **838**, L2 (2017), arXiv:1703.02046 [astro-ph.HE].

Masaru Shibata, Kenta Kiuchi, and Yu-ichiro Sekiguchi, Phys. Rev. **D95**, 083005 (2017), arXiv:1703.10303 [astro-ph.HE].

Mark G. Alford, Luke Bovard, Matthias Hanauske, Luciano Rezzolla, and Kai Schwenzer, Phys. Rev. Lett. **120**, 041101 (2018), arXiv:1707.09475 [gr-qc].

Albino Perego, Hannah Yasin, and Almudena Arcones, J. Phys. **G44**, 084007 (2017b), arXiv:1701.02017 [astro-ph.HE].

Charles D. Kilpatrick *et al.*, Science **358**, 1583–1587 (2017), arXiv:1710.05434 [astro-ph.HE].

M. R. Drout *et al.*, Science **358**, 1570–1574 (2017), arXiv:1710.05443 [astro-ph.HE].

S. J. Smartt *et al.*, Nature **551**, 75–79 (2017), arXiv:1710.05841 [astro-ph.HE].

R. Chornock *et al.*, Astrophys. J. **848**, L19 (2017), arXiv:1710.05454 [astro-ph.HE].

Iair Arcavi *et al.*, Nature **551**, 64 (2017), arXiv:1710.05843 [astro-ph.HE].

B. J. Shappee *et al.*, Science **358**, 1574 (2017), arXiv:1710.05432 [astro-ph.HE].

M. M. Kasliwal *et al.*, Science **358**, 1559 (2017), arXiv:1710.05436 [astro-ph.HE].

I. Andreoni *et al.*, Publ. Astron. Soc. Austral. **34**, e069 (2017), arXiv:1710.05846 [astro-ph.HE].

Curtis McCully *et al.*, Astrophys. J. **848**, L32 (2017), arXiv:1710.05853 [astro-ph.HE].

P. S. Cowperthwaite *et al.*, Astrophys. J. **848**, L17 (2017), arXiv:1710.05840 [astro-ph.HE].

E. Troja *et al.*, Nature **551**, 71–74 (2017), [Nature551,71(2017)], arXiv:1710.05433 [astro-ph.HE].

Daryl Haggard, Melania Nynka, John J. Ruan, Vicky Kalogera, S. Bradley Cenko, Phil Evans, and Jamie A. Kennea, Astrophys. J. **848**, L25 (2017), arXiv:1710.05852 [astro-ph.HE].

Raffaella Margutti *et al.*, Astrophys. J. **848**, L20 (2017), arXiv:1710.05431 [astro-ph.HE].

G. Hallinan *et al.*, Science **358**, 1579 (2017), arXiv:1710.05435 [astro-ph.HE].

K. P. Mooley *et al.*, Nature **554**, 207 (2018), arXiv:1711.11573 [astro-ph.HE].

Ramesh Narayan, Bohdan Paczynski, and Tsvi Piran, Astrophys. J. **395**, L83–L86 (1992), arXiv:astro-ph/9204001 [astro-ph].

A. Goldstein *et al.*, Astrophys. J. **848**, L14 (2017), arXiv:1710.05446 [astro-ph.HE].

V. Savchenko *et al.*, Astrophys. J. **848**, L15 (2017), arXiv:1710.05449 [astro-ph.HE].

R. Margutti *et al.*, Astrophys. J. **856**, L18 (2018), arXiv:1801.03531 [astro-ph.HE].

D. Eichler, M. Livio, T. Piran, and D. N. Schramm, Nature **340**, 126–128 (1989b).

S. Rosswog, M. Liebendoerfer, F. K. Thielemann, M. B. Davies, W. Benz, and T. Piran, Astron. Astrophys. **341**, 499–526 (1999), arXiv:astro-ph/9811367 [astro-ph].

Li-Xin Li and Bohdan Paczynski, Astrophys. J. **507**, L59 (1998), arXiv:astro-ph/9807272 [astro-ph].

Daniel Kasen, Brian Metzger, Jennifer Barnes, Eliot Quataert, and Enrico Ramirez-Ruiz, Nature (2017), 10.1038/nature24453, [Nature551,80(2017)], arXiv:1710.05463 [astro-ph.HE].

M. Nicholl *et al.*, Astrophys. J. **848**, L18 (2017), arXiv:1710.05456 [astro-ph.HE].

Eli Waxman, Eran O. Ofek, Doron Kushnir, and Avishay Gal-Yam, (2017), arXiv:1711.09638 [astro-ph.HE].

Ehud Nakar and Tsvi Piran, Nature **478**, 82–84 (2011), arXiv:1102.1020 [astro-ph.HE].

Wen-fai Fong, Edo Berger, Raffaella Margutti, and B. Ashley Zauderer, Astrophys. J. **815**, 102 (2015), arXiv:1509.02922 [astro-ph.HE].

Assaf Horesh, Kenta Hotokezaka, Tsvi Piran, Ehud Nakar, and Paul Hancock, Astrophys. J. **819**, L22 (2016), arXiv:1601.01692 [astro-ph.HE].

Wen-fai Fong, Brian D. Metzger, Edo Berger, and Feryal Ozel, Astrophys. J. **831**, 141 (2016), arXiv:1607.00416 [astro-ph.HE].

K. D. Alexander *et al.*, Astrophys. J. **848**, L21 (2017), arXiv:1710.05457 [astro-ph.HE].

S. Kim *et al.* (ALMA), Astrophys. J. **850**, L21 (2017), arXiv:1710.05847 [astro-ph.HE].

Gavin P. Lamb and Shiho Kobayashi, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **472**, 4953–4964 (2017), arXiv:1706.03000 [astro-ph.HE].

Ore Gottlieb, Ehud Nakar, Tsvi Piran, and Kenta Hotokezaka, (2017), arXiv:1710.05896 [astro-ph.HE].

H.-J. Grimm, M. Gilfanov, and R. Sunyaev, A&A **391**, 923–944 (2002), astro-ph/0109239.

Q. Z. Liu, J. van Paradijs, and E. P. J. van den Heuvel, A&A **455**, 1165–1168 (2006), arXiv:0707.0549.

Q. Z. Liu, J. van Paradijs, and E. P. J. van den Heuvel, A&A **469**, 807–810 (2007), arXiv:0707.0544.

J. E. McClintock and R. A. Remillard, "Black hole binaries," in *Compact stellar X-ray sources*, edited by W. H. G. Lewin and M. van der Klis (Cambridge University Press, 2006) Chap. 4, pp. 157–213.

B. E. Tetarenko, G. R. Sivakoff, C. O. Heinke, and J. C. Gladstone, Astrophysical Journal **222**, 15 (2016), arXiv:1512.00778 [astro-ph.HE].

"TeVCat," `http://tevcat2.uchicago.edu/` (accessed June 2018).

G. Dubus, A&A Rev. **21**, 64 (2013), arXiv:1307.7083 [astro-ph.HE].

R. Mirzoyan and R. Mukherjee, The Astronomer's Telegram **10971** (2017)
.

P. Eger, H. Laffon, P. Bordas, *et al.*, MNRAS **457**, 1753–1758 (2016), arXiv:1601.03208 [astro-ph.HE]
.

A. A. Abdo, M. Ackermann, M. Ajello, *et al.*, Astrophysical Journal **736**, L11 (2011), arXiv:1103.4108 [astro-ph.HE]
.

M. Chernyakova, A. Neronov, B. van Soelen, *et al.*, MNRAS **454**, 1358–1370 (2015), arXiv:1508.01339 [astro-ph.HE]
.

A. A. Zdziarski, A. Neronov, and M. Chernyakova, MNRAS **403**, 1873–1886 (2010), arXiv:0802.1174.

M. Massi, S. Migliari, and M. Chernyakova, MNRAS **468**, 3689–3693 (2017), arXiv:1704.01335 [astro-ph.HE].

Q.-X. Yang, F.-G. Xie, F. Yuan, A. A. Zdziarski, M. Gierlinski, L. C. Ho, and Z. Yu, Publication of Korean Astronomical Society **30**, 565–568 (2015).

Valenti Bosch-Ramon and J. M. Paredes, *5th Microquasar Workshop: Microquasars and Related Astrophysics Beijing, China, June 7-13, 2004*, Chin. J. Astron. Astrophys. **5**, 133–138 (2005), arXiv:astro-ph/0411509 [astro-ph].

M. Massi and G. Torricelli-Ciamponi, A&A **585**, A123 (2016), arXiv:1511.05621 [astro-ph.HE].

X. Paredes-Fortuny, M. Ribó, V. Bosch-Ramon, J. Casares, O. Fors, and J. Núñez, A&A **575**, L6 (2015), arXiv:1501.02208 [astro-ph.HE].

R. Zanin, A. Fernández-Barral, E. de Oña Wilhelmi, F. Aharonian, O. Blanch, V. Bosch-Ramon, and D. Galindo, A&A **596**, A55 (2016), arXiv:1605.05914 [astro-ph.HE].

A. A. Zdziarski, D. Malyshev, M. Chernyakova, and G. G. Pooley, MNRAS **471**, 3657–3667 (2017), arXiv:1607.05059 [astro-ph.HE].

C. C. Cheung and A. Loh, The Astronomer's Telegram **9502** (2016).

CTA Consortium, *Science with the Cherenkov Telescope Array* (World Scientific, 2018) arXiv:1709.07997.

P. Artymowicz and S. H. Lubow, Astrophys. J. **421**, 651–667 (1994).

B. D. Farris, P. Duffell, A. I. MacFadyen, and Z. Haiman, MNRAS **446**, L36–L40 (2015), arXiv:1406.0007 [astro-ph.HE].

C. Roedig, J. H. Krolik, and M. C. Miller, Astrophys. J. **785**, 115 (2014), arXiv:1402.7098 [astro-ph.HE].

G. Ryan and A. MacFadyen, The Astrophysical Journal **835**, 199 (2017), arXiv:1611.00341 [astro-ph.HE].

S. Komossa, in *The Astrophysics of Gravitational Wave Sources*, American Institute of Physics Conference Series, Vol. 686, edited by J. M. Centrella (2003) pp. 161–174, astro-ph/0306439.

T. Bogdanović, B. D. Smith, S. Sigurdsson, and M. Eracleous, The Astrophysical Journal **174**, 455-480 (2008), arXiv:0708.0414.

T. Bogdanović, in *Gravitational Wave Astrophysics*, Astrophysics and Space Science Proceedings, Vol. 40, edited by C. F. Sopuerta (2015) p. 103, arXiv:1406.5193 [astro-ph.HE].

M. J. Graham, S. G. Djorgovski, D. Stern, E. Glikman, A. J. Drake, A. A. Mahabal, C. Donalek, S. Larson, and E. Christensen, Nature **518**, 74–76 (2015a), arXiv:1501.01375.

K. Nguyen and T. Bogdanović, The Astrophysical Journal **828**, 68 (2016), arXiv:1605.09389 [astro-ph.HE].

S. Komossa, Journal of High Energy Astrophysics **7**, 148–157 (2015), arXiv:1505.01093 [astro-ph.HE].

Di-Fu Guo, Shao-Ming Hu, Jun Tao, Hong-Xing Yin, Xu Chen, and Hong-Jian Pan, Res. Astron. Astrophys. **14**, 923–932 (2014), arXiv:1405.4636 [astro-ph.HE].

V. L. Oknyanskij, N. V. Metlova, N. A. Huseynov, D.-F. Guo, and V. M. Lyuty, Odessa Astronomical Publications **29**, 95 (2016).

H. Netzer, *The Physics and Evolution of Active Galactic Nuclei* (Cambridge University Press, 2013).

E. Bon, P. Jovanovic, P. Marziani, N. Bon, and A. Otasevic, (2018), 10.3389/fspas.2018.00019, arXiv:1805.07007 [astro-ph.GA].

L. Č. Popović, New A Rev. **56**, 74–91 (2012), arXiv:1109.0710.

E. Bon, P. Jovanović, P. Marziani, A. I. Shapovalova, N. Bon, V. Borka Jovanović, D. Borka, J. Sulentic, and L. Č. Popović, The Astrophysical Journal **759**, 118 (2012), arXiv:1209.4524 [astro-ph.HE].

E. Bon, S. Zucker, H. Netzer, P. Marziani, N. Bon, P. Jovanović, A. I. Shapovalova, S. Komossa, C. M. Gaskell, L. Č. Popović, S. Britzen, V. H. Chavushyan, A. N. Burenkov, S. Sergeev, G. La Mura, J. R. Valdés, and M. Stalevski, The Astrophysical Journal **225**, 29 (2016), arXiv:1606.04606 [astro-ph.HE].

Y.-R. Li, J.-M. Wang, L. C. Ho, K.-X. Lu, J. Qiu, P. Du, C. Hu, Y.-K. Huang, Z.-X. Zhang, K. Wang, and J.-M. Bai, The Astrophysical Journal **822**, 4 (2016), arXiv:1602.05005.

T. Simm, M. Salvato, R. Saglia, G. Ponti, G. Lanzuisi, B. Trakhtenbrot, K. Nandra, and R. Bender, A&A **585**, A129 (2016), arXiv:1510.06737.

S. Vaughan, P. Uttley, A. G. Markowitz, D. Huppenkothen, M. J. Middleton, W. N. Alston, J. D. Scargle, and W. M. Farr, MNRAS **461**, 3145–3152 (2016), arXiv:1606.02620 [astro-ph.IM].

J. D. Scargle, The Astrophysical Journal **263**, 835–853 (1982).

E. Bon, P. Marziani, and N. Bon, in *New Frontiers in Black Hole Astrophysics*, IAU Symposium, Vol. 324, edited by A. Gomboc (2017) pp. 176–179, arXiv:1702.07210.

A. Sillanpaa, S. Haarala, M. J. Valtonen, B. Sundelius, and G. G. Byrd, The Astrophysical Journal **325**, 628–634 (1988).

M. J. Graham, S. G. Djorgovski, D. Stern, A. J. Drake, A. A. Mahabal, C. Donalek, E. Glikman, S. Larson, and E. Christensen, MNRAS **453**, 1562–1576 (2015b), arXiv:1507.07603.

M. Charisi, I. Bartos, Z. Haiman, A. M. Price-Whelan, M. J. Graham, E. C. Bellm, R. R. Laher, and S. Márka, MNRAS **463**, 2145–2171 (2016), arXiv:1604.01020.

T. Liu, S. Gezari, W. Burgett, K. Chambers, P. Draper, K. Hodapp, M. Huber, R.-P. Kudritzki, E. Magnier, N. Metcalfe, J. Tonry, R. Wainscoat, and C. Waters, The Astrophysical Journal **833**, 6 (2016), arXiv:1609.09503 [astro-ph.HE].

G. Bhatta, S. Zola, Ł. Stawarz, M. Ostrowski, M. Winiarski, W. Ogłoza, M. Dróżdż, M. Siwak, A. Liakos, D. Kozieł-Wierzbowska, K. Gazeas, B. Debski, T. Kundera, G. Stachowski, and V. S. Paliya, The Astrophysical Journal **832**, 47 (2016), arXiv:1609.02388 [astro-ph.HE].

A. Kovačević, L. Č. Popović, A. I. Shapovalova, and D. Ilić, Ap&SS **362**, 31 (2017), arXiv:1701.01566.

M. Ackermann *et al.* (Fermi-LAT), Astrophys. J. **813**, L41 (2015), arXiv:1509.02063 [astro-ph.HE].

Yan-Rong Li *et al.*, (2017b), arXiv:1705.07781 [astro-ph.HE].

J. Cuadra, P. J. Armitage, R. D. Alexander, and M. C. Begelman, MNRAS **393**, 1423–1432 (2009), arXiv:0809.0311.

K. Hayasaki, S. Mineshige, and L. C. Ho, The Astrophysical Journal **682**, 1134-1140 (2008), arXiv:0708.2555.

Y. Tang, A. MacFadyen, and Z. Haiman, MNRAS **469**, 4258–4267 (2017), arXiv:1703.03913 [astro-ph.HE].

R. Miranda, D. J. Muñoz, and D. Lai, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **466**, 1170–1191 (2017), arXiv:1610.07263 [astro-ph.SR].

K. Hayasaki, H. Saito, and S. Mineshige, PASJ **65**, 86 (2013), arXiv:1211.5137.

E. Sobacchi, M. C. Sormani, and A. Stamerra, MNRAS **465**, 161–172 (2017), arXiv:1610.04709 [astro-ph.HE].

F. M. Rieger, The Astrophysical Journal **615**, L5–L8 (2004), astro-ph/0410188.

D. A. Prokhorov and A. Moraghan, MNRAS **471**, 3036–3042 (2017), arXiv:1707.05829 [astro-ph.HE].

A. Sandrinelli, S. Covino, and A. Treves, The Astrophysical Journal **820**, 20 (2016), arXiv:1512.08801.

E. Kun, K. É. Gabányi, M. Karouzos, S. Britzen, and L. Á. Gergely, MNRAS **445**, 1370–1382 (2014), arXiv:1402.2644 [astro-ph.HE].

A. Sesana, Z. Haiman, B. Kocsis, and L. Z. Kelley, The Astrophysical Journal **856**, 42 (2018), arXiv:1703.10611 [astro-ph.HE].

Nicola Tamanini, Chiara Caprini, Enrico Barausse, Alberto Sesana, Antoine Klein, and Antoine Petiteau, JCAP **1604**, 002 (2016), arXiv:1601.07112 [astro-ph.CO].

Y. Tang, Z. Haiman, and A. MacFadyen, MNRAS **476**, 2249–2257 (2018), arXiv:1801.02266 [astro-ph.HE].

D. B. Bowen, V. Mewes, M. Campanelli, S. C. Noble, J. H. Krolik, and M. Zilhão, Astrophys. J. Letters **853**, L17 (2018), arXiv:1712.05451 [astro-ph.HE].

P. J. Armitage and P. Natarajan, Astrophys. J. Letters **567**, L9–L12 (2002), astro-ph/0201318.

A. Cerioli, G. Lodato, and D. J. Price, MNRAS **457**, 939–948 (2016), arXiv:1601.03776 [astro-ph.HE].

C. Fontecilla, X. Chen, and J. Cuadra, MNRAS **468**, L50–L54 (2017), arXiv:1610.09382 [astro-ph.HE].

Carlos Palenzuela, Luis Lehner, and Steven L. Liebling, Science **329**, 927 (2010), arXiv:1005.1067 [astro-ph.HE].

P. Moesta, D. Alic, L. Rezzolla, O. Zanotti, and C. Palenzuela, "Astrop. J. Lett." **749**, L32 (2012), arXiv:1109.1177 [gr-qc].

R. Gold, V. Paschalidis, M. Ruiz, S. L. Shapiro, Z. B. Etienne, and H. P. Pfeiffer, Phys. Rev. D **90**, 104030 (2014), arXiv:1410.1543.

M. J. Fitchett, MNRAS **203**, 1049–1062 (1983).

Manuela Campanelli, Carlos O. Lousto, Yosef Zlochower, and David Merritt, Astrophys. J. **659**, L5–L8 (2007a), arXiv:gr-qc/0701164 [gr-qc].

Z. Lippai, Z. Frei, and Z. Haiman, Astrophys. J. Letters **676**, L5 (2008), arXiv:0801.0739.

J. D. Schnittman and J. H. Krolik, Astrophys. J. **684**, 835–844 (2008), arXiv:0802.3556.

G. A. Shields and E. W. Bonning, Astrophys. J. **682**, 758–766 (2008), arXiv:0802.3873.

M. Megevand, M. Anderson, J. Frank, E. W. Hirschmann, L. Lehner, S. L. Liebling, P. M. Motl, and D. Neilsen, Phys. Rev. D **80**, 024012 (2009), arXiv:0905.3390 [astro-ph.HE].

E. M. Rossi, G. Lodato, P. J. Armitage, J. E. Pringle, and A. R. King, MNRAS **401**, 2021–2035 (2010), arXiv:0910.0002 [astro-ph.HE].

R. Perna, D. Lazzati, and B. Giacomazzo, Astrophys. J. Letters **821**, L18 (2016), arXiv:1602.05140 [astro-ph.HE].

J. D. Schnittman, J. H. Krolik, and S. C. Noble, Astrophys. J. **819**, 48 (2016), arXiv:1512.00729 [astro-ph.HE].

Michele Maggiore, *Gravitational Waves. Vol. 1: Theory and Experiments*, Oxford Master Series in Physics (Oxford University Press, 2007).

Bernard F. Schutz, Nature **323**, 310–311 (1986).

Daniel E. Holz and Scott A. Hughes, Astrophys. J. **629**, 15–22 (2005), arXiv:astro-ph/0504616 [astro-ph].

Chelsea L. MacLeod and Craig J. Hogan, Phys. Rev. **D77**, 043512 (2008), arXiv:0712.0618 [astro-ph].

Jakob Jonsson, Ariel Goobar, and Edvard Mortsell, Astrophys. J. **658**, 52–59 (2007), arXiv:astro-ph/0611334 [astro-ph].

Charles Shapiro, David Bacon, Martin Hendry, and Ben Hoyle, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **404**, 858–866 (2010), arXiv:0907.3635 [astro-ph.CO].

Christopher M. Hirata, Daniel E. Holz, and Curt Cutler, Phys. Rev. **D81**, 124046 (2010), arXiv:1004.3988 [astro-ph.CO].

Stefan Hilbert, Jonathan R. Gair, and Lindsay J. King, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **412**, 1023–1037 (2011), arXiv:1007.2468 [astro-ph.CO].

P. A. R. Ade *et al.* (Planck), Astron. Astrophys. **594**, A13 (2016), arXiv:1502.01589 [astro-ph.CO].

Adam G. Riess *et al.*, Astrophys. J. **826**, 56 (2016), arXiv:1604.01424 [astro-ph.CO].

Neal Dalal, Daniel E. Holz, Scott A. Hughes, and Bhuvnesh Jain, Phys. Rev. **D74**, 063006 (2006), arXiv:astro-ph/0601275 [astro-ph].

Samaya Nissanke, Daniel E. Holz, Scott A. Hughes, Neal Dalal, and Jonathan L. Sievers, Astrophys. J. **725**, 496–514 (2010), arXiv:0904.1017 [astro-ph.CO].

Walter Del Pozzo, Phys. Rev. **D86**, 043011 (2012), arXiv:1108.1317 [astro-ph.CO].

Samaya Nissanke, Daniel E. Holz, Neal Dalal, Scott A. Hughes, Jonathan L. Sievers, and Christopher M. Hirata, (2013), arXiv:1307.2638 [astro-ph.CO].

Kristen Menou, Zoltan Haiman, and Bence Kocsis, New Astron. Rev. **51**, 884–890 (2008), arXiv:0803.3627 [astro-ph].

Adamantios Stavridis, K. G. Arun, and Clifford M. Will, Phys. Rev. **D80**, 067501 (2009), arXiv:0907.4686 [gr-qc].

Chris Van Den Broeck, M. Trias, B. S. Sathyaprakash, and A. M. Sintes, Phys. Rev. **D81**, 124031 (2010), arXiv:1001.3099 [gr-qc].

Cien Shang and Zoltan Haiman, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **411**, 9 (2011), arXiv:1004.3562 [astro-ph.CO].

M. Sereno, Ph. Jetzer, A. Sesana, and M. Volonteri, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **415**, 2773 (2011), arXiv:1104.1977 [astro-ph.CO].

Antoine Petiteau, Stanislav Babak, and Alberto Sesana, Astrophys. J. **732**, 82 (2011), arXiv:1102.0769 [astro-ph.CO].

Hsin-Yu Chen, Maya Fishbach, and Daniel E. Holz, (2017), arXiv:1712.06531 [astro-ph.CO].

Naoki Seto and Koutarou Kyutoku, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **475**, 4133–4139 (2018), arXiv:1710.06424 [astro-ph.CO].

Atsushi Nishizawa, Phys. Rev. **D96**, 101303 (2017), arXiv:1612.06060 [astro-ph.CO].

B. S. Sathyaprakash, B. F. Schutz, and C. Van Den Broeck, Class. Quant. Grav. **27**, 215006 (2010), arXiv:0906.4151 [astro-ph.CO].

Stephen R. Taylor and Jonathan R. Gair, Phys. Rev. **D86**, 023502 (2012), arXiv:1204.6739 [astro-ph.CO].

Rong-Gen Cai and Tao Yang, Phys. Rev. **D95**, 044024 (2017), arXiv:1608.08008 [astro-ph.CO].

C. Messenger and J. Read, Phys. Rev. Lett. **108**, 091101 (2012), arXiv:1107.5725 [gr-qc].

Stephen R. Taylor, Jonathan R. Gair, and Ilya Mandel, Phys. Rev. **D85**, 023535 (2012), arXiv:1108.5161 [gr-qc].

Walter Del Pozzo, Tjonnie G. F. Li, and Chris Messenger, Phys. Rev. **D95**, 043502 (2017), arXiv:1506.06590 [gr-qc].

Koutarou Kyutoku and Naoki Seto, Phys. Rev. **D95**, 083525 (2017), arXiv:1609.07142 [astro-ph.CO].

Walter Del Pozzo, Alberto Sesana, and Antoine Klein, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **475**, 3485–3492 (2018), arXiv:1703.01300 [astro-ph.CO].

Chiara Caprini and Nicola Tamanini, JCAP **1610**, 006 (2016), arXiv:1607.08755 [astro-ph.CO].

Rong-Gen Cai, Nicola Tamanini, and Tao Yang, JCAP **1705**, 031 (2017), arXiv:1703.07323 [astro-ph.CO].

Curt Cutler and Daniel E. Holz, Phys. Rev. **D80**, 104009 (2009), arXiv:0906.3752 [astro-ph.CO].

Atsushi Nishizawa, Atsushi Taruya, and Shun Saito, Phys. Rev. **D83**, 084045 (2011), arXiv:1011.5000 [astro-ph.CO].

Seiji Kawamura *et al.*, *Laser interferometer space antenna. Proceedings, 8th International LISA Symposium, Stanford, USA, June 28-July 2, 2010*, Class. Quant. Grav. **28**, 094011 (2011).

Maryam Arabsalmani, Varun Sahni, and Tarun Deep Saini, Phys. Rev. **D87**, 083001 (2013), arXiv:1301.5779 [astro-ph.CO].

Naoki Seto, Seiji Kawamura, and Takashi Nakamura, Phys. Rev. Lett. **87**, 221103 (2001), arXiv:astro-ph/0108011 [astro-ph].

Atsushi Nishizawa, Kent Yagi, Atsushi Taruya, and Takahiro Tanaka, Phys. Rev. **D85**, 044047 (2012), arXiv:1110.2865 [astro-ph.CO].

Camille Bonvin, Chiara Caprini, Riccardo Sturani, and Nicola Tamanini, Phys. Rev. **D95**, 044029 (2017), arXiv:1609.08093 [astro-ph.CO].

Salvatore Vitale and Hsin-Yu Chen, (2018), arXiv:1804.07337 [astro-ph.CO].

Stanislav Babak, Jonathan Gair, Alberto Sesana, Enrico Barausse, Carlos F. Sopuerta, Christopher P. L. Berry, Emanuele Berti, Pau Amaro-Seoane, Antoine Petiteau, and Antoine Klein, Phys. Rev. **D95**, 103012 (2017a), arXiv:1703.09722 [gr-qc].

Nicola Tamanini, *Proceedings, 11th International LISA Symposium: Zurich, Switzerland, September 5-9, 2016*, J. Phys. Conf. Ser. **840**, 012029 (2017), arXiv:1612.02634 [astro-ph.CO].

Paolo Creminelli and Filippo Vernizzi, Phys. Rev. Lett. **119**, 251302 (2017), arXiv:1710.05877 [astro-ph.CO].

Jose María Ezquiaga and Miguel Zumalacárregui, Phys. Rev. Lett. **119**, 251304 (2017), arXiv:1710.05901 [astro-ph.CO].

T. Baker, E. Bellini, P. G. Ferreira, M. Lagos, J. Noller, and I. Sawicki, Phys. Rev. Lett. **119**, 251301 (2017), arXiv:1710.06394 [astro-ph.CO].

Jeremy Sakstein and Bhuvnesh Jain, Phys. Rev. Lett. **119**, 251303 (2017), arXiv:1710.05893 [astro-ph.CO].

Enis Belgacem, Yves Dirian, Stefano Foffa, and Michele Maggiore, Phys. Rev. **D97**, 104066 (2018), arXiv:1712.08108 [astro-ph.CO].

Luca Amendola, Ignacy Sawicki, Martin Kunz, and Ippocratis D. Saltas, (2017), arXiv:1712.08623 [astro-ph.CO].

Eric V. Linder, JCAP **1803**, 005 (2018), arXiv:1801.01503 [astro-ph.CO].

Kris Pardo, Maya Fishbach, Daniel E. Holz, and David N. Spergel, (2018), arXiv:1801.08160 [gr-qc].

Kent Yagi, Atsushi Nishizawa, and Chul-Moon Yoo, JCAP **1204**, 031 (2012a), arXiv:1112.6040 [astro-ph.CO].

Toshiya Namikawa, Atsushi Nishizawa, and Atsushi Taruya, Phys. Rev. Lett. **116**, 121302 (2016), arXiv:1511.04638 [astro-ph.CO].

Rong-Gen Cai, Tong-Bo Liu, Xue-Wen Liu, Shao-Jiang Wang, and Tao Yang, Phys. Rev. **D97**, 103005 (2018), arXiv:1712.00952 [astro-ph.CO].

Stefano Camera and Atsushi Nishizawa, Phys. Rev. Lett. **110**, 151103 (2013), arXiv:1303.5446 [astro-ph.CO].

Masamune Oguri, Phys. Rev. **D93**, 083511 (2016), arXiv:1603.02356 [astro-ph.CO].

Alvise Raccanelli, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **469**, 656–670 (2017), arXiv:1609.09377 [astro-ph.CO].

Joseph D. Romano and Neil J. Cornish, Living Rev. Rel. **20**, 2 (2017), arXiv:1608.06889 [gr-qc].

Chiara Caprini and Daniel G. Figueroa, (2018), arXiv:1801.04268 [astro-ph.CO].

Benjamin P. Abbott *et al.* (Virgo, LIGO Scientific), Phys. Rev. Lett. **118**, 121101 (2017l), [Erratum: Phys. Rev. Lett.119,no.2,029901(2017)], arXiv:1612.02029 [gr-qc].

B. P. Abbott *et al.* (Virgo, LIGO Scientific), Phys. Rev. **D97**, 102002 (2018b), arXiv:1712.01168 [gr-qc].

Benjamin P. Abbott *et al.* (Virgo, LIGO Scientific), Phys. Rev. Lett. **120**, 091101 (2018c), arXiv:1710.05837 [gr-qc].

Chiara Caprini *et al.* (LISA Cosmology Working Group), (in preparation).

Matthew R. Adams and Neil J. Cornish, Phys. Rev. **D89**, 022001 (2014), arXiv:1307.4116 [gr-qc].

T. Regimbau, M. Evans, N. Christensen, E. Katsavounidis, B. Sathyaprakash, and S. Vitale, Phys. Rev. Lett. **118**, 151105 (2017), arXiv:1611.08943 [astro-ph.CO].

Alberto Sesana, Phys. Rev. Lett. **116**, 231102 (2016), arXiv:1602.06951 [gr-qc].

John Magorrian, Scott Tremaine, Douglas Richstone, Ralf Bender, Gary Bower, *et al.*, Astron. J. **115**, 2285 (1998), arXiv:astro-ph/9708072 [astro-ph].

Jonathan R. Gair, Leor Barack, Teviet Creighton, Curt Cutler, Shane L. Larson, *et al.*, Class. Quant. Grav. **21**, S1595–S1606 (2004), arXiv:gr-qc/0405137 [gr-qc].

Pau Amaro-Seoane, Jonathan R. Gair, Marc Freitag, M. Coleman Miller, Ilya Mandel, Curt J. Cutler, and Stanislav Babak, Class. Quant. Grav. **24**, R113–R169 (2007), arXiv:astro-ph/0703495 [ASTRO-PH].

Jonathan R. Gair, Class. Quant. Grav. **26**, 094034 (2009), arXiv:0811.0188 [gr-qc].

Pau Amaro-Seoane *et al.*, GW Notes **6**, 4–110 (2013), arXiv:1201.3621 [astro-ph.CO].

Tanja Hinderer and Eanna E. Flanagan, Phys. Rev. **D78**, 064028 (2008), arXiv:0805.3337 [gr-qc].

Soichiro Isoyama, Ryuichi Fujita, Norichika Sago, Hideyuki Tagoshi, and Takahiro Tanaka, Phys. Rev. **D87**, 024010 (2013), arXiv:1210.2569 [gr-qc].

Lior M. Burko and Gaurav Khanna, Phys. Rev. **D88**, 024002 (2013), arXiv:1304.5296 [gr-qc].

LISA Mission web site, `https://www.lisamission.org` (accessed June 2018).

Leor Barack and Curt Cutler, Phys. Rev. **D69**, 082005 (2004), arXiv:gr-qc/0310125 [gr-qc].

Stanislav Babak, Jonathan R. Gair, Antoine Petiteau, and Alberto Sesana, Class. Quant. Grav. **28**, 114001 (2011), arXiv:1011.2062 [gr-qc].

Jonathan R. Gair, Alberto Sesana, Emanuele Berti, and Marta Volonteri, Class. Quant. Grav. **28**, 094018 (2011a), arXiv:1009.6172 [gr-qc].

Benjamin P. Abbott *et al.* (Virgo, LIGO Scientific), Phys. Rev. **D96**, 022001 (2017m), arXiv:1704.04628 [gr-qc].

Carl-Johan Haster, Zhilu Wang, Christopher P. L. Berry, Simon Stevenson, John Veitch, and Ilya Mandel, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **457**, 4499–4506 (2016), arXiv:1511.01431 [astro-ph.HE].

Kostas Glampedakis and Daniel Kennefick, Phys. Rev. **D66**, 044002 (2002), arXiv:gr-qc/0203086 [gr-qc].

Yasushi Mino, Phys. Rev. **D67**, 084027 (2003), arXiv:gr-qc/0302075 [gr-qc].

Scott A. Hughes, Steve Drasco, Eanna E. Flanagan, and Joel Franklin, Phys. Rev. Lett. **94**, 221101 (2005), arXiv:gr-qc/0504015 [gr-qc].

Norichika Sago, Takahiro Tanaka, Wataru Hikida, Katsuhiko Ganz, and Hiroyuki Nakano, Prog. Theor. Phys. **115**, 873–907 (2006), arXiv:gr-qc/0511151 [gr-qc].

Steve Drasco, Eanna E. Flanagan, and Scott A. Hughes, Class. Quant. Grav. **22**, S801–846 (2005), arXiv:gr-qc/0505075 [gr-qc].

Steve Drasco and Scott A. Hughes, Phys. Rev. **D73**, 024027 (2006), [Erratum: Phys. Rev.D90,no.10,109905(2014)], arXiv:gr-qc/0509101 [gr-qc].

Pranesh A. Sundararajan, Gaurav Khanna, and Scott A. Hughes, Phys. Rev. **D76**, 104005 (2007), arXiv:gr-qc/0703028 [gr-qc].

Ryuichi Fujita, Wataru Hikida, and Hideyuki Tagoshi, Prog. Theor. Phys. **121**, 843–874 (2009), arXiv:0904.3810 [gr-qc].

Eric Poisson, Adam Pound, and Ian Vega, Living Rev. Rel. **14**, 7 (2011), arXiv:1102.0529 [gr-qc].

Leor Barack and Adam Pound, (2018), arXiv:1805.10385 [gr-qc].

Bryce S. DeWitt and Robert W. Brehme, Annals Phys. **9**, 220–259 (1960).

J. M. Hobbs, Ann. Phys. **47**, 141 (1968).

Yasushi Mino, Misao Sasaki, and Takahiro Tanaka, Phys. Rev. **D55**, 3457–3476 (1997), arXiv:gr-qc/9606018 [gr-qc].

Theodore C. Quinn and Robert M. Wald, Phys. Rev. **D56**, 3381–3394 (1997), arXiv:gr-qc/9610053 [gr-qc].

Steven L. Detweiler and Bernard F. Whiting, Phys. Rev. **D67**, 024025 (2003), arXiv:gr-qc/0202086 [gr-qc].

Samuel E. Gralla and Robert M. Wald, Class. Quant. Grav. **25**, 205009 (2008), arXiv:0806.3293 [gr-qc].

Adam Pound, Phys. Rev. **D81**, 024023 (2010a), arXiv:0907.5197 [gr-qc].

Adam Pound, Phys. Rev. **D81**, 124009 (2010b), arXiv:1003.3954 [gr-qc].

Adam Pound, Phys. Rev. **D86**, 084019 (2012a), arXiv:1206.6538 [gr-qc].

Eran Rosenthal, Phys. Rev. **D72**, 121503 (2005), arXiv:gr-qc/0508050 [gr-qc].

Eran Rosenthal, Phys. Rev. **D74**, 084018 (2006), arXiv:gr-qc/0609069 [gr-qc].

Steven Detweiler, Phys. Rev. **D85**, 044048 (2012), arXiv:1107.2098 [gr-qc].

Samuel E. Gralla, Phys. Rev. **D85**, 124011 (2012), arXiv:1203.3189 [gr-qc].

Adam Pound, Phys. Rev. Lett. **109**, 051101 (2012b), arXiv:1201.5089 [gr-qc].

Adam Pound and Jeremy Miller, Phys. Rev. **D89**, 104020 (2014), arXiv:1403.1843 [gr-qc].

Abraham I. Harte, Class. Quant. Grav. **25**, 235020 (2008), arXiv:0807.1150 [gr-qc].

Abraham I. Harte, Class. Quant. Grav. **27**, 135002 (2010), arXiv:0910.4614 [gr-qc].

Abraham I. Harte, Class. Quant. Grav. **29**, 055012 (2012), arXiv:1103.0543 [gr-qc].

D. V. Gal'tsov, Journal of Physics A Mathematical General **15**, 3737–3749 (1982).

E. Poisson and A. G. Wiseman, "Suggestion at the 1st Capra Ranch meeting on Radiation Reaction," (1998).

Leor Barack and Amos Ori, Phys. Rev. **D61**, 061502 (2000), arXiv:gr-qc/9912010 [gr-qc].

Leor Barack, Yasushi Mino, Hiroyuki Nakano, Amos Ori, and Misao Sasaki, Phys. Rev. Lett. **88**, 091101 (2002), arXiv:gr-qc/0111001 [gr-qc].

Warren G. Anderson and Alan G. Wiseman, Class. Quant. Grav. **22**, S783–S800 (2005), arXiv:gr-qc/0506136 [gr-qc].

Leor Barack and Darren A. Golbourn, Phys. Rev. **D76**, 044020 (2007), arXiv:0705.3620 [gr-qc].

Ian Vega and Steven L. Detweiler, Phys. Rev. **D77**, 084008 (2008), arXiv:0712.4405 [gr-qc].

Maarten van de Meent, Phys. Rev. **D97**, 104033 (2018), arXiv:1711.09607 [gr-qc].

Barry Wardell and Achamveedu Gopakumar, *Proceedings, 524th WE-Heraeus-Seminar: Equations of Motion in Relativistic Gravity (EOM 2013): Bad Honnef, Germany, February 17-23, 2013*, Fund. Theor. Phys. **179**, 487–522 (2015), arXiv:1501.07322 [gr-qc].

Leor Barack and Lior M. Burko, Phys. Rev. **D62**, 084040 (2000), arXiv:gr-qc/0007033 [gr-qc].

Lior M. Burko, Phys. Rev. Lett. **84**, 4529 (2000), arXiv:gr-qc/0003074 [gr-qc].

Lior M. Burko and Yuk Tung Liu, Phys. Rev. **D64**, 024006 (2001), arXiv:gr-qc/0103008 [gr-qc].

Steven L. Detweiler, Eirini Messaritaki, and Bernard F. Whiting, Phys. Rev. **D67**, 104016 (2003), arXiv:gr-qc/0205079 [gr-qc].

Luz Maria Diaz-Rivera, Eirini Messaritaki, Bernard F. Whiting, and Steven L. Detweiler, Phys. Rev. **D70**, 124018 (2004), arXiv:gr-qc/0410011 [gr-qc].

Roland Haas, Phys. Rev. **D75**, 124011 (2007), arXiv:0704.0797 [gr-qc].

Adrian C. Ottewill and Barry Wardell, Phys. Rev. **D77**, 104002 (2008), arXiv:0711.2469 [gr-qc].

Adrian C. Ottewill and Barry Wardell, Phys. Rev. **D79**, 024031 (2009), arXiv:0810.1961 [gr-qc].

Carlos O. Lousto and Hiroyuki Nakano, Class. Quant. Grav. **25**, 145018 (2008), arXiv:0802.4277 [gr-qc].

Ian Vega, Peter Diener, Wolfgang Tichy, and Steven L. Detweiler, Phys. Rev. **D80**, 084021 (2009), arXiv:0908.2138 [gr-qc].

Priscilla Canizares and Carlos F. Sopuerta, Phys. Rev. **D79**, 084020 (2009), arXiv:0903.0505 [gr-qc].

Sam R. Dolan and Leor Barack, Phys. Rev. **D83**, 024019 (2011), arXiv:1010.5255 [gr-qc].

Jonathan Thornburg, (2010), arXiv:1006.3788 [gr-qc].

Priscilla Canizares, Carlos F. Sopuerta, and Jose Luis Jaramillo, Phys. Rev. **D82**, 044023 (2010), arXiv:1006.3201 [gr-qc].

Niels Warburton and Leor Barack, Phys. Rev. **D81**, 084039 (2010), arXiv:1003.1860 [gr-qc].

Niels Warburton and Leor Barack, Phys. Rev. **D83**, 124038 (2011), arXiv:1103.0287 [gr-qc].

Peter Diener, Ian Vega, Barry Wardell, and Steven Detweiler, Phys. Rev. Lett. **108**, 191102 (2012), arXiv:1112.4821 [gr-qc].

Sam R. Dolan, Leor Barack, and Barry Wardell, Phys. Rev. **D84**, 084001 (2011), arXiv:1107.0012 [gr-qc].

Marc Casals, Eric Poisson, and Ian Vega, Phys. Rev. **D86**, 064033 (2012), arXiv:1206.3772 [gr-qc].

Adrian C. Ottewill and Peter Taylor, Phys. Rev. **D86**, 024036 (2012), arXiv:1205.5587 [gr-qc].

Marc Casals, Sam Dolan, Adrian C. Ottewill, and Barry Wardell, Phys. Rev. **D88**, 044022 (2013), arXiv:1306.0884 [gr-qc].

Niels Warburton and Barry Wardell, Phys. Rev. **D89**, 044046 (2014), arXiv:1311.3104 [gr-qc].

Ian Vega, Barry Wardell, Peter Diener, Samuel Cupp, and Roland Haas, Phys. Rev. **D88**, 084021 (2013), arXiv:1307.3476 [gr-qc].

Barry Wardell, Chad R. Galley, Anil Zenginoglu, Marc Casals, Sam R. Dolan, *et al.*, Phys. Rev. **D89**, 084021 (2014), arXiv:1401.1506 [gr-qc].

Niels Warburton, Phys. Rev. **D91**, 024045 (2015), arXiv:1408.2885 [gr-qc].

Samuel E. Gralla, Achilleas P. Porfyriadis, and Niels Warburton, Phys. Rev. **D92**, 064029 (2015), arXiv:1506.08496 [gr-qc].

Jonathan Thornburg and Barry Wardell, Phys. Rev. **D95**, 084043 (2017), arXiv:1610.09319 [gr-qc].

Anna Heffernan, Adrian C. Ottewill, Niels Warburton, Barry Wardell, and Peter Diener, (2017), arXiv:1712.01098 [gr-qc].

Leor Barack and Carlos O. Lousto, Phys. Rev. **D66**, 061502 (2002), arXiv:gr-qc/0205043 [gr-qc].

Leor Barack and Carlos O. Lousto, Phys. Rev. **D72**, 104026 (2005), arXiv:gr-qc/0510019 [gr-qc].

Leor Barack and Norichika Sago, Phys. Rev. **D75**, 064021 (2007), arXiv:gr-qc/0701069 [gr-qc].

Norichika Sago, Class. Quant. Grav. **26**, 094025 (2009).

Abhay G. Shah, Tobias S. Keidl, John L. Friedman, Dong-Hoon Kim, and Larry R. Price, Phys. Rev. **D83**, 064018 (2011), arXiv:1009.4876 [gr-qc].

Sarp Akcay, Phys. Rev. **D83**, 124026 (2011), arXiv:1012.5860 [gr-qc].

Leor Barack and Norichika Sago, Phys. Rev. **D81**, 084021 (2010), arXiv:1002.2386 [gr-qc].

Tobias S. Keidl, Abhay G. Shah, John L. Friedman, Dong-Hoon Kim, and Larry R. Price, Phys. Rev. **D82**, 124012 (2010), arXiv:1004.2276 [gr-qc].

Niels Warburton, Sarp Akcay, Leor Barack, Jonathan R. Gair, and Norichika Sago, Phys. Rev. **D85**, 061501 (2012), arXiv:1111.6908 [gr-qc].

Sam R. Dolan and Leor Barack, Phys. Rev. **D87**, 084066 (2013), arXiv:1211.4586 [gr-qc].

Abhay G. Shah, John L. Friedman, and Tobias S. Keidl, Phys. Rev. **D86**, 084059 (2012), arXiv:1207.5595 [gr-qc].

Sam Dolan, "Approaches to Self-Force Calculations on Kerr Spacetime," (2013), 16th Capra Meeting on Radiation Reaction in General Relativity, `http://maths.ucd.ie/capra16/talks/Dolan.pdf`.

Sarp Akcay, Niels Warburton, and Leor Barack, Phys. Rev. **D88**, 104009 (2013), arXiv:1308.5223 [gr-qc].

Adam Pound, Cesar Merlin, and Leor Barack, Phys. Rev. **D89**, 024009 (2014), arXiv:1310.1513 [gr-qc].

Soichiro Isoyama, Leor Barack, Sam R. Dolan, Alexandre Le Tiec, Hiroyuki Nakano, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **113**, 161101 (2014), arXiv:1404.6133 [gr-qc].

Cesar Merlin and Abhay G. Shah, Phys. Rev. **D91**, 024005 (2015), arXiv:1410.2998 [gr-qc].

Thomas Osburn, Niels Warburton, and Charles R. Evans, Phys. Rev. **D93**, 064024 (2016), arXiv:1511.01498 [gr-qc].

Samuel E. Gralla, Scott A. Hughes, and Niels Warburton, Class. Quant. Grav. **33**, 155002 (2016), arXiv:1603.01221 [gr-qc].

Seth Hopper and Charles R. Evans, Phys. Rev. **D87**, 064008 (2013), arXiv:1210.7969 [gr-qc].

Thomas Osburn, Erik Forseth, Charles R. Evans, and Seth Hopper, Phys. Rev. **D90**, 104031 (2014), arXiv:1409.4419 [gr-qc].

Adam Pound, Phys. Rev. **D92**, 044021 (2015a), arXiv:1506.02894 [gr-qc].

Abhay G. Shah, Bernard F. Whiting, Steffen Aksteiner, Lars Andersson, and Thomas Backdähl, (2016), arXiv:1611.08291 [gr-qc].

Jonathan E. Thompson, Jonathan Thompson, Bernard F. Whiting, and Hector Chen, Class. Quant. Grav. **34**, 174001 (2017), arXiv:1611.06214 [gr-qc].

Roland Haas and Eric Poisson, Phys. Rev. **D74**, 044009 (2006), arXiv:gr-qc/0605077 [gr-qc].

Leor Barack, Darren A. Golbourn, and Norichika Sago, Phys. Rev. **D76**, 124036 (2007), arXiv:0709.4588 [gr-qc].

Barry Wardell, Ian Vega, Jonathan Thornburg, and Peter Diener, Phys. Rev. **D85**, 104044 (2012), arXiv:1112.6355 [gr-qc].

Ian Vega, Barry Wardell, and Peter Diener, Class. Quant. Grav. **28**, 134010 (2011), arXiv:1101.2925 [gr-qc].

Anna Heffernan, Adrian Ottewill, and Barry Wardell, Phys. Rev. **D86**, 104023 (2012), arXiv:1204.0794 [gr-qc].

Anna Heffernan, Adrian Ottewill, and Barry Wardell, Phys. Rev. **D89**, 024030 (2014), arXiv:1211.6446 [gr-qc].

Thomas M. Linz, John L. Friedman, and Alan G. Wiseman, Phys. Rev. **D90**, 024064 (2014), arXiv:1404.7039 [gr-qc].

Barry Wardell and Niels Warburton, Phys. Rev. **D92**, 084019 (2015), arXiv:1505.07841 [gr-qc].

Leor Barack, Amos Ori, and Norichika Sago, Phys. Rev. **D78**, 084021 (2008), arXiv:0808.2315 [gr-qc].

Scott E. Field, Jan S. Hesthaven, and Stephen R. Lau, Class. Quant. Grav. **26**, 165010 (2009), arXiv:0902.1287 [gr-qc].

Scott E. Field, Jan S. Hesthaven, and Stephen R. Lau, Phys. Rev. **D81**, 124030 (2010), arXiv:1001.2578 [gr-qc].

Seth Hopper and Charles R. Evans, Phys. Rev. **D82**, 084010 (2010), arXiv:1006.4907 [gr-qc].

Seth Hopper, Erik Forseth, Thomas Osburn, and Charles R. Evans, Phys. Rev. **D92**, 044048 (2015), arXiv:1506.04742 [gr-qc].

Seth Hopper, Phys. Rev. **D97**, 064007 (2018), arXiv:1706.05455 [gr-qc].

Leor Barack and Paco Giudice, Phys. Rev. **D95**, 104033 (2017), arXiv:1702.04204 [gr-qc].

Leor Barack and Amos Ori, Phys. Rev. **D64**, 124003 (2001), arXiv:gr-qc/0107056 [gr-qc].

Samuel E. Gralla, Phys. Rev. **D84**, 084050 (2011), arXiv:1104.5635 [gr-qc].

Steven L. Detweiler, Phys. Rev. **D77**, 124026 (2008), arXiv:0804.3529 [gr-qc].

Leor Barack and Norichika Sago, Phys. Rev. Lett. **102**, 191101 (2009), arXiv:0902.0573 [gr-qc].

Leor Barack, Thibault Damour, and Norichika Sago, Phys. Rev. **D82**, 084036 (2010), arXiv:1008.0935 [gr-qc].

Maarten van de Meent, Phys. Rev. Lett. **118**, 011101 (2017), arXiv:1610.03497 [gr-qc].

Sam R. Dolan, Niels Warburton, Abraham I. Harte, Alexandre Le Tiec, Barry Wardell, *et al.*, Phys. Rev. **D89**, 064011 (2014), arXiv:1312.0775 [gr-qc].

Abhay G. Shah and Adam Pound, Phys. Rev. **D91**, 124022 (2015), arXiv:1503.02414 [gr-qc].

Sarp Akcay, David Dempsey, and Sam R. Dolan, Class. Quant. Grav. **34**, 084001 (2017), arXiv:1608.04811 [gr-qc].

Sarp Akcay, Phys. Rev. **D96**, 044024 (2017), arXiv:1705.03282 [gr-qc].

Sam R Dolan, Patrick Nolan, Adrian C Ottewill, Niels Warburton, and Barry Wardell, Phys. Rev. **D91**, 023009 (2015), arXiv:1406.4890 [gr-qc].

Patrick Nolan, Chris Kavanagh, Sam R. Dolan, Adrian C. Ottewill, Niels Warburton, and Barry Wardell, Phys. Rev. **D92**, 123008 (2015), arXiv:1505.04447 [gr-qc].

Norichika Sago, Leor Barack, and Steven L. Detweiler, Phys. Rev. **D78**, 124024 (2008), arXiv:0810.2530 [gr-qc].

Luc Blanchet, Steven L. Detweiler, Alexandre Le Tiec, and Bernard F. Whiting, Phys. Rev. **D81**, 084033 (2010a), arXiv:1002.0726 [gr-qc].

Luc Blanchet, Steven L. Detweiler, Alexandre Le Tiec, and Bernard F. Whiting, Phys. Rev. **D81**, 064004 (2010b), arXiv:0910.0207 [gr-qc].

Sarp Akcay, Leor Barack, Thibault Damour, and Norichika Sago, Phys. Rev. **D86**, 104041 (2012), arXiv:1209.0964 [gr-qc].

Donato Bini and Thibault Damour, Phys. Rev. **D90**, 124037 (2014a), arXiv:1409.6933 [gr-qc].

Luc Blanchet, Guillaume Faye, and Bernard F. Whiting, Phys. Rev. **D90**, 044017 (2014a), arXiv:1405.5151 [gr-qc].

Donato Bini, Thibault Damour, and Andrea Geralico, Phys. Rev. **D92**, 124058 (2015), [Erratum: Phys. Rev.D93,no.10,109902(2016)], arXiv:1510.06230 [gr-qc].

Donato Bini, Thibault Damour, and Andrea Geralico, Phys. Rev. **D93**, 064023 (2016a), arXiv:1511.04533 [gr-qc].

Chris Kavanagh, Adrian C. Ottewill, and Barry Wardell, Phys. Rev. **D92**, 084025 (2015), arXiv:1503.02334 [gr-qc].

Sarp Akcay and Maarten van de Meent, Phys. Rev. **D93**, 064063 (2016), arXiv:1512.03392 [gr-qc].

Sarp Akcay, Alexandre Le Tiec, Leor Barack, Norichika Sago, and Niels Warburton, Phys. Rev. **D91**, 124014 (2015), arXiv:1503.01374 [gr-qc].

Seth Hopper, Chris Kavanagh, and Adrian C. Ottewill, Phys. Rev. **D93**, 044010 (2016), arXiv:1512.01556 [gr-qc].

Chris Kavanagh, Adrian C. Ottewill, and Barry Wardell, Phys. Rev. **D93**, 124038 (2016), arXiv:1601.03394 [gr-qc].

Donato Bini, Thibault Damour, and andrea Geralico, Phys. Rev. **D93**, 104017 (2016b), arXiv:1601.02988 [gr-qc].

Donato Bini, Thibault Damour, and Andrea Geralico, Phys. Rev. **D93**, 124058 (2016c), arXiv:1602.08282 [gr-qc].

Chris Kavanagh, Donato Bini, Thibault Damour, Seth Hopper, Adrian C. Ottewill, and Barry Wardell, Phys. Rev. **D96**, 064012 (2017), arXiv:1706.00459 [gr-qc].

Alexandre Le Tiec, Abdul H. Mroue, Leor Barack, Alessandra Buonanno, Harald P. Pfeiffer, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **107**, 141101 (2011), arXiv:1106.3278 [gr-qc].

Alexandre Le Tiec, Enrico Barausse, and Alessandra Buonanno, Phys. Rev. Lett. **108**, 131103 (2012a), arXiv:1111.5609 [gr-qc].

Alexandre Le Tiec, Alessandra Buonanno, Abdul H. Mroué, Harald P. Pfeiffer, Daniel A. Hemberger, *et al.*, Phys. Rev. **D88**, 124027 (2013), arXiv:1309.0541 [gr-qc].

Aaron Zimmerman, Adam G. M. Lewis, and Harald P. Pfeiffer, Phys. Rev. Lett. **117**, 191101 (2016), arXiv:1606.08056 [gr-qc].

Alexandre Le Tiec and Philippe Grandclément, (2017), arXiv:1710.03673 [gr-qc].

Leor Barack and Norichika Sago, Phys. Rev. **D83**, 084023 (2011), arXiv:1101.3331 [gr-qc].

Steven L. Detweiler, Class. Quant. Grav. **22**, S681–S716 (2005), arXiv:gr-qc/0501004 [gr-qc].

Seth Hopper and Vitor Cardoso, Phys. Rev. **D97**, 044031 (2018), arXiv:1706.02791 [gr-qc].

S.A. Teukolsky, Phys. Rev. Lett. **29**, 1114–1118 (1972).

Saul A. Teukolsky, Astrophys. J. **185**, 635–647 (1973).

Cesar Merlin, Amos Ori, Leor Barack, Adam Pound, and Maarten van de Meent, Phys. Rev. **D94**, 104066 (2016), arXiv:1609.01227 [gr-qc].

Maarten van De Meent, Class. Quant. Grav. **34**, 124003 (2017), arXiv:1702.00969 [gr-qc].

Maarten van de Meent and Abhay G. Shah, Phys. Rev. **D92**, 064025 (2015), arXiv:1506.04755 [gr-qc].

Maarten van de Meent, Phys. Rev. **D94**, 044034 (2016), arXiv:1606.06297 [gr-qc].

E. W. Leaver, Journal of Mathematical Physics **27**, 1238–1265 (1986).

Shuhei Mano, Hisao Suzuki, and Eiichi Takasugi, Prog. Theor. Phys. **95**, 1079–1096 (1996), arXiv:gr-qc/9603020 [gr-qc].

Misao Sasaki and Hideyuki Tagoshi, Living Rev. Rel. **6**, 6 (2003), arXiv:gr-qc/0306120 [gr-qc].

Abhay G Shah, John L Friedman, and Bernard F Whiting, Phys. Rev. **D89**, 064042 (2014), arXiv:1312.1952 [gr-qc].

Abhay G. Shah, Phys. Rev. **D90**, 044025 (2014), arXiv:1403.2697 [gr-qc].

Nathan K. Johnson-McDaniel, Abhay G. Shah, and Bernard F. Whiting, Phys. Rev. **D92**, 044007 (2015), arXiv:1503.02638 [gr-qc].

Donato Bini and Thibault Damour, Phys. Rev. **D91**, 064050 (2015a), arXiv:1502.02450 [gr-qc].

Donato Bini and Thibault Damour, Phys. Rev. **D91**, 064064 (2015b), arXiv:1503.01272 [gr-qc].

Achilleas P. Porfyriadis and Andrew Strominger, Phys. Rev. **D90**, 044038 (2014), arXiv:1401.3746 [hep-th].

Shahar Hadar, Achilleas P. Porfyriadis, and Andrew Strominger, Phys. Rev. **D90**, 064045 (2014), arXiv:1403.2797 [hep-th].

Shahar Hadar, Achilleas P. Porfyriadis, and Andrew Strominger, JHEP **07**, 078 (2015), arXiv:1504.07650 [hep-th].

Shahar Hadar and Achilleas P. Porfyriadis, JHEP **03**, 014 (2017), arXiv:1611.09834 [hep-th].

Geoffrey Compère, Kwinten Fransen, Thomas Hertog, and Jiang Long, Class. Quant. Grav. **35**, 104002 (2018), arXiv:1712.07130 [gr-qc].

Ted Jacobson and Thomas P. Sotiriou, Phys. Rev. Lett. **103**, 141101 (2009), [Erratum: Phys. Rev. Lett.103,209903(2009)], arXiv:0907.4146 [gr-qc].

Veronika E. Hubeny, Phys. Rev. **D59**, 064013 (1999), arXiv:gr-qc/9808043 [gr-qc].

Alberto Saa and Raphael Santarelli, Phys. Rev. **D84**, 027501 (2011), arXiv:1105.3950 [gr-qc].

Sijie Gao and Yuan Zhang, Phys. Rev. **D87**, 044028 (2013), arXiv:1211.2631 [gr-qc].

Enrico Barausse, Vitor Cardoso, and Gaurav Khanna, Phys. Rev. Lett. **105**, 261102 (2010), arXiv:1008.5159 [gr-qc].

Peter Zimmerman, Ian Vega, Eric Poisson, and Roland Haas, Phys. Rev. **D87**, 041501 (2013), arXiv:1211.3889 [gr-qc].

Karl Simon Revelar and Ian Vega, Phys. Rev. **D96**, 064010 (2017), arXiv:1706.07190 [gr-qc].

Marta Colleoni and Leor Barack, Phys. Rev. **D91**, 104024 (2015), arXiv:1501.07330 [gr-qc].

Marta Colleoni, Leor Barack, Abhay G. Shah, and Maarten van de Meent, Phys. Rev. **D92**, 084044 (2015), arXiv:1508.04031 [gr-qc].

Jonathan Sorce and Robert M. Wald, Phys. Rev. **D96**, 104014 (2017), arXiv:1707.05862 [gr-qc].

Niels Warburton, Thomas Osburn, and Charles R. Evans, Phys. Rev. **D96**, 084057 (2017), arXiv:1708.03720 [gr-qc].

Pranesh A. Sundararajan, Gaurav Khanna, Scott A. Hughes, and Steve Drasco, Phys. Rev. **D78**, 024022 (2008), arXiv:0803.0317 [gr-qc].

Alvin J. K. Chua, Christopher J. Moore, and Jonathan R. Gair, Phys. Rev. **D96**, 044005 (2017), arXiv:1705.04259 [gr-qc].

C. P. L. Berry and J. R. Gair, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **429**, 589–612 (2013), arXiv:1210.2778 [astro-ph.HE].

Maarten Van De Meent and Niels Warburton, (2018), arXiv:1802.05281 [gr-qc].

Chad R. Galley and Ira Z. Rothstein, Phys. Rev. **D95**, 104054 (2017), arXiv:1609.08268 [gr-qc].

Jordan Moxon and Éanna Flanagan, Phys. Rev. **D97**, 105001 (2018), arXiv:1711.05212 [gr-qc].

Eanna E. Flanagan and Tanja Hinderer, Phys. Rev. Lett. **109**, 071102 (2012), arXiv:1009.4923 [gr-qc].

Éanna E. Flanagan, Scott A. Hughes, and Uchupol Ruangsri, Phys. Rev. **D89**, 084028 (2014), arXiv:1208.3906 [gr-qc].

Maarten van de Meent, Phys. Rev. **D89**, 084033 (2014a), arXiv:1311.4457 [gr-qc].

Maarten van de Meent, Phys. Rev. **D90**, 044027 (2014b), arXiv:1406.2594 [gr-qc].

Jeandrew Brink, Marisa Geyer, and Tanja Hinderer, Phys. Rev. Lett. **114**, 081102 (2015), arXiv:1304.0330 [gr-qc].

Christopher P. L. Berry, Robert H. Cole, Priscilla Cañizares, and Jonathan R. Gair, Phys. Rev. **D94**, 124042 (2016), arXiv:1608.08951 [gr-qc].

C. P. L. Berry, R. H. Cole, P. Cañizares, and J. R. Gair, *Proceedings, 11th International LISA Symposium: Zurich, Switzerland, September 5-9, 2016*, J. Phys. Conf. Ser. **840**, 012052 (2017), arXiv:1702.05481 [gr-qc].

Adam Pound, Phys. Rev. **D90**, 084039 (2014), arXiv:1404.1543 [gr-qc].

Adam Pound, Phys. Rev. **D92**, 104047 (2015b), arXiv:1510.05172 [gr-qc].

Jeremy Miller, Barry Wardell, and Adam Pound, Phys. Rev. **D94**, 104018 (2016), arXiv:1608.06783 [gr-qc].

Adam Pound, Phys. Rev. **D95**, 104056 (2017), arXiv:1703.02836 [gr-qc].

Uchupol Ruangsri, Sarah J. Vigeland, and Scott A. Hughes, Phys. Rev. **D94**, 044008 (2016), arXiv:1512.00376 [gr-qc].

Guillaume Faye, Luc Blanchet, and Alessandra Buonanno, Phys. Rev. **D74**, 104033 (2006), arXiv:gr-qc/0605139 [gr-qc].

Wen-Biao Han, Phys. Rev. **D82**, 084013 (2010), arXiv:1008.3324 [gr-qc].

Enno Harms, Georgios Lukes-Gerakopoulos, Sebastiano Bernuzzi, and Alessandro Nagar, Phys. Rev. **D94**, 104010 (2016), arXiv:1609.00356 [gr-qc].

Natalia T. Maia, Chad R. Galley, Adam K. Leibovich, and Rafael A. Porto, Phys. Rev. **D96**, 084064 (2017a), arXiv:1705.07934 [gr-qc].

Natalia T. Maia, Chad R. Galley, Adam K. Leibovich, and Rafael A. Porto, Phys. Rev. **D96**, 084065 (2017b), arXiv:1705.07938 [gr-qc].

Georgios Lukes-Gerakopoulos, Enno Harms, Sebastiano Bernuzzi, and Alessandro Nagar, Phys. Rev. **D96**, 064051 (2017), arXiv:1707.07537 [gr-qc].

Peter Zimmerman, Phys. Rev. **D92**, 064051 (2015), arXiv:1507.04076 [gr-qc].

Vitor Cardoso and other, "Gravitation in técnico: files," https://centra.tecnico.ulisboa.pt/network/grit/files/ (accessed June 2018).

Emanuele Berti, "Ringdown resources," http://www.phy.olemiss.edu/~berti/ringdown/ (2017 (accessed June 2018)).

Alvin Chua and Jonathan Gair, "EMRI Kludge Suite," https://github.com/alvincjk/EMRI_Kludge_Suite (2017).

Ryuichi Fujita, Hiroyuki Nakano, Norichika Sago, Misao Sasaki, and Takahiro Tanaka, "Black hole perturbation club," http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~misao.sasaki/BHPC/ (2017a).

"Black hole perturbation toolkit," http://bhptoolkit.org/ (2017).

T. Futamase and Y. Itoh, Living Rev. Relativity **10**, 2 (2007).

Luc Blanchet, *Mass and motion in general relativity. Proceedings, School on Mass, Orleans, France, June 23-25, 2008*, Fundam. Theor. Phys. **162**, 125–166 (2011), [,125(2009)], arXiv:0907.3596 [gr-qc].

Gerhard Schäfer, "Post-Newtonian methods: Analytic results on the binary problem," in *Mass and Motion in General Relativity (Fundamental Theories of Physics, Vol. 162)* (Springer, New York, 2010) Chap. 6, arXiv:0910.2857 [gr-qc].

Stefano Foffa and Riccardo Sturani, Class. Quant. Grav. **31**, 043001 (2014), arXiv:1309.3474 [gr-qc].

Ira Z. Rothstein, Gen. Rel. Grav. **46**, 1726 (2014).

Luc Blanchet, Living Rev. Rel. **17**, 2 (2014), arXiv:1310.1528 [gr-qc].

Rafael A. Porto, Phys. Rept. **633**, 1–104 (2016a), arXiv:1601.04914 [hep-th].

Gerhard Schäfer and Piotr Jaranowski, (2018), arXiv:1805.07240 [gr-qc].

E. Poisson and C.M. Will, *Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2014).

Luc Blanchet, Guillaume Faye, and Benedicte Ponsot, Phys. Rev. **D58**, 124002 (1998), arXiv:gr-qc/9804079 [gr-qc].

Luc Blanchet and Guillaume Faye, Phys. Rev. **D63**, 062005 (2001), arXiv:gr-qc/0007051 [gr-qc].

Vanessa C. de Andrade, Luc Blanchet, and Guillaume Faye, Class. Quant. Grav. **18**, 753–778 (2001), arXiv:gr-qc/0011063 [gr-qc].

Luc Blanchet, Thibault Damour, and Gilles Esposito-Farese, Phys. Rev. **D69**, 124007 (2004a), arXiv:gr-qc/0311052 [gr-qc].

Thomas Mitchell and Clifford M. Will, Phys. Rev. **D75**, 124025 (2007), arXiv:0704.2243 [gr-qc].

Piotr Jaranowski and Gerhard Schaefer, Phys. Rev. **D57**, 7274–7291 (1998), [Erratum: Phys. Rev.D63,029902(2001)], arXiv:gr-qc/9712075 [gr-qc].

Thibault Damour, Piotr Jaranowski, and Gerhard Schaefer, Phys. Rev. **D62**, 021501 (2000), [Erratum: Phys. Rev.D63,029903(2001)], arXiv:gr-qc/0003051 [gr-qc].

Thibault Damour, Piotr Jaranowski, and Gerhard Schaefer, Phys. Lett. **B513**, 147–155 (2001), arXiv:gr-qc/0105038 [gr-qc].

Yousuke Itoh, Toshifumi Futamase, and Hideki Asada, Phys. Rev. **D63**, 064038 (2001), arXiv:gr-qc/0101114 [gr-qc].

Yousuke Itoh and Toshifumi Futamase, Phys. Rev. **D68**, 121501 (2003), arXiv:gr-qc/0310028 [gr-qc].

Yousuke Itoh, Phys. Rev. **D69**, 064018 (2004), arXiv:gr-qc/0310029 [gr-qc].

Walter D. Goldberger and Ira Z. Rothstein, Phys. Rev. **D73**, 104029 (2006), arXiv:hep-th/0409156 [hep-th].

Stefano Foffa and Riccardo Sturani, Phys. Rev. **D84**, 044031 (2011), arXiv:1104.1122 [gr-qc].

Bala R. Iyer and C. M. Will, Phys. Rev. Lett. **70**, 113–116 (1993).

Bala R. Iyer and C. M. Will, Phys. Rev. **D52**, 6882–6893 (1995).

Piotr Jaranowski and Gerhard Schaefer, Phys. Rev. **D55**, 4712–4722 (1997).

Michael E. Pati and Clifford M. Will, Phys. Rev. **D65**, 104008 (2002), arXiv:gr-qc/0201001 [gr-qc].

Christian Konigsdorffer, Guillaume Faye, and Gerhard Schaefer, Phys. Rev. **D68**, 044004 (2003), arXiv:gr-qc/0305048 [gr-qc].

Samaya Nissanke and Luc Blanchet, Class. Quant. Grav. **22**, 1007–1032 (2005), arXiv:gr-qc/0412018 [gr-qc].

Luc Blanchet and Thibault Damour, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. **A320**, 379–430 (1986).

Luc Blanchet, Proc. Roy. Soc. Lond. **A409**, 383–399 (1987).

Luc Blanchet, Class. Quant. Grav. **15**, 1971–1999 (1998), arXiv:gr-qc/9801101 [gr-qc].

Clifford M. Will and Alan G. Wiseman, Phys. Rev. **D54**, 4813–4848 (1996), arXiv:gr-qc/9608012 [gr-qc].

Michael E. Pati and Clifford M. Will, Phys. Rev. **D62**, 124015 (2000), arXiv:gr-qc/0007087 [gr-qc].

Walter D. Goldberger and Andreas Ross, Phys. Rev. **D81**, 124015 (2010), arXiv:0912.4254 [gr-qc].

Andreas Ross, Phys. Rev. **D85**, 125033 (2012), arXiv:1202.4750 [gr-qc].

Luc Blanchet, Bala R. Iyer, and Benoit Joguet, Phys. Rev. **D65**, 064005 (2002a), [Erratum: Phys. Rev.D71,129903(2005)], arXiv:gr-qc/0105098 [gr-qc].

Luc Blanchet, Guillaume Faye, Bala R. Iyer, and Benoit Joguet, Phys. Rev. **D65**, 061501 (2002b), [Erratum: Phys. Rev.D71,129902(2005)], arXiv:gr-qc/0105099 [gr-qc].

Luc Blanchet, Thibault Damour, Gilles Esposito-Farese, and Bala R. Iyer, Phys. Rev. Lett. **93**, 091101 (2004b), arXiv:gr-qc/0406012 [gr-qc].

Luc Blanchet, Thibault Damour, Gilles Esposito-Farese, and Bala R. Iyer, Phys. Rev. **D71**, 124004 (2005), arXiv:gr-qc/0503044 [gr-qc].

K. G. Arun, Luc Blanchet, Bala R. Iyer, and Moh'd S. S. Qusailah, Phys. Rev. **D77**, 064034 (2008a), arXiv:0711.0250 [gr-qc].

K. G. Arun, Luc Blanchet, Bala R. Iyer, and Moh'd S. S. Qusailah, Phys. Rev. **D77**, 064035 (2008b), arXiv:0711.0302 [gr-qc].

K. G. Arun, Luc Blanchet, Bala R. Iyer, and Siddhartha Sinha, Phys. Rev. **D80**, 124018 (2009), arXiv:0908.3854 [gr-qc].

Blake Moore, Marc Favata, K. G. Arun, and Chandra Kant Mishra, Phys. Rev. **D93**, 124061 (2016), arXiv:1605.00304 [gr-qc].

K. G. Arun, Luc Blanchet, Bala R. Iyer, and Moh'd S. S. Qusailah, Class. Quant. Grav. **21**, 3771–3802 (2004), [Erratum: Class. Quant. Grav.22,3115(2005)], arXiv:gr-qc/0404085 [gr-qc].

Lawrence E. Kidder, Luc Blanchet, and Bala R. Iyer, Class. Quant. Grav. **24**, 5307–5312 (2007), arXiv:0706.0726 [gr-qc].

Lawrence E. Kidder, Phys. Rev. **D77**, 044016 (2008), arXiv:0710.0614 [gr-qc].

Luc Blanchet, Guillaume Faye, Bala R. Iyer, and Siddhartha Sinha, Class. Quant. Grav. **25**, 165003 (2008), [Erratum: Class. Quant. Grav.29,239501(2012)], arXiv:0802.1249 [gr-qc].

Guillaume Faye, Sylvain Marsat, Luc Blanchet, and Bala R. Iyer, Class. Quant. Grav. **29**, 175004 (2012), arXiv:1204.1043 [gr-qc].

Chandra Kant Mishra, K. G. Arun, and Bala R. Iyer, Phys. Rev. **D91**, 084040 (2015), arXiv:1501.07096 [gr-qc].

Stefano Foffa, Phys. Rev. **D89**, 024019 (2014), arXiv:1309.3956 [gr-qc].

Piotr Jaranowski and Gerhard Schafer, Phys. Rev. **D86**, 061503 (2012), arXiv:1207.5448 [gr-qc].

Piotr Jaranowski and Gerhard Schäfer, Phys. Rev. **D87**, 081503 (2013), arXiv:1303.3225 [gr-qc].

Thibault Damour, Piotr Jaranowski, and Gerhard Schäfer, Phys. Rev. **D89**, 064058 (2014a), arXiv:1401.4548 [gr-qc].

Piotr Jaranowski and Gerhard Schäfer, Phys. Rev. **D92**, 124043 (2015), arXiv:1508.01016 [gr-qc].

Thibault Damour, Piotr Jaranowski, and Gerhard Schäfer, Phys. Rev. **D93**, 084014 (2016), arXiv:1601.01283 [gr-qc].

Thibault Damour and Piotr Jaranowski, Phys. Rev. **D95**, 084005 (2017), arXiv:1701.02645 [gr-qc].

Laura Bernard, Luc Blanchet, Alejandro Bohé, Guillaume Faye, and Sylvain Marsat, Phys. Rev. **D93**, 084037 (2016), arXiv:1512.02876 [gr-qc].

Laura Bernard, Luc Blanchet, Alejandro Bohé, Guillaume Faye, and Sylvain Marsat, Phys. Rev. **D95**, 044026 (2017a), arXiv:1610.07934 [gr-qc].

Laura Bernard, Luc Blanchet, Alejandro Bohé, Guillaume Faye, and Sylvain Marsat, Phys. Rev. **D96**, 104043 (2017b), arXiv:1706.08480 [gr-qc].

Tanguy Marchand, Laura Bernard, Luc Blanchet, and Guillaume Faye, Phys. Rev. **D97**, 044023 (2018), arXiv:1707.09289 [gr-qc].

Laura Bernard, Luc Blanchet, Guillaume Faye, and Tanguy Marchand, Phys. Rev. **D97**, 044037 (2018), arXiv:1711.00283 [gr-qc].

Stefano Foffa and Riccardo Sturani, Phys. Rev. **D87**, 064011 (2013a), arXiv:1206.7087 [gr-qc].

Stefano Foffa, Pierpaolo Mastrolia, Riccardo Sturani, and Christian Sturm, Phys. Rev. **D95**, 104009 (2017), arXiv:1612.00482 [gr-qc].

Rafael A. Porto and Ira Z. Rothstein, Phys. Rev. **D96**, 024062 (2017), arXiv:1703.06433 [gr-qc].

Thibault Damour, Piotr Jaranowski, and Gerhard Schäfer, Phys. Rev. **D91**, 084024 (2015), arXiv:1502.07245 [gr-qc].

Donato Bini and Thibault Damour, Phys. Rev. **D87**, 121501 (2013), arXiv:1305.4884 [gr-qc].

Luc Blanchet and Thibault Damour, Phys. Rev. **D37**, 1410 (1988).

S. Foffa and Riccardo Sturani, Phys. Rev. **D87**, 044056 (2013b), arXiv:1111.5488 [gr-qc].

Chad R. Galley, Adam K. Leibovich, Rafael A. Porto, and Andreas Ross, Phys. Rev. **D93**, 124010 (2016), arXiv:1511.07379 [gr-qc].

Christopher S. Reynolds, Class. Quant. Grav. **30**, 244004 (2013), arXiv:1307.3246 [astro-ph.HE].

M. Coleman Miller and Jon M. Miller, Phys. Rept. **548**, 1–34 (2014), arXiv:1408.4145 [astro-ph.HE].

Johannes Hartung and Jan Steinhoff, Annalen Phys. **523**, 783–790 (2011a), arXiv:1104.3079 [gr-qc].

Johannes Hartung, Jan Steinhoff, and Gerhard Schafer, Annalen Phys. **525**, 359–394 (2013), arXiv:1302.6723 [gr-qc].

Sylvain Marsat, Alejandro Bohe, Guillaume Faye, and Luc Blanchet, Class. Quant. Grav. **30**, 055007 (2013), arXiv:1210.4143 [gr-qc].

Alejandro Bohe, Sylvain Marsat, Guillaume Faye, and Luc Blanchet, Class. Quant. Grav. **30**, 075017 (2013), arXiv:1212.5520 [gr-qc].

Michele Levi and Jan Steinhoff, JCAP **1601**, 011 (2016a), arXiv:1506.05056 [gr-qc].

Johannes Hartung and Jan Steinhoff, Annalen Phys. **523**, 919–924 (2011b), arXiv:1107.4294 [gr-qc].

Michele Levi, Phys. Rev. **D85**, 064043 (2012), arXiv:1107.4322 [gr-qc].

Michele Levi and Jan Steinhoff, JCAP **1412**, 003 (2014), arXiv:1408.5762 [gr-qc].

Michele Levi and Jan Steinhoff, JCAP **1601**, 008 (2016b), arXiv:1506.05794 [gr-qc].

Michele Levi and Jan Steinhoff, (2016c), arXiv:1607.04252 [gr-qc].

Steven Hergt and Gerhard Schaefer, Phys. Rev. **D77**, 104001 (2008a), arXiv:0712.1515 [gr-qc].

Steven Hergt and Gerhard Schaefer, Phys. Rev. **D78**, 124004 (2008b), arXiv:0809.2208 [gr-qc].

Sylvain Marsat, Class. Quant. Grav. **32**, 085008 (2015), arXiv:1411.4118 [gr-qc].

Michele Levi and Jan Steinhoff, JHEP **06**, 059 (2015), arXiv:1410.2601 [gr-qc].

Varun Vaidya, Phys. Rev. **D91**, 024017 (2015), arXiv:1410.5348 [hep-th].

Justin Vines and Jan Steinhoff, Phys. Rev. **D97**, 064010 (2018), arXiv:1606.08832 [gr-qc].

Davide Gerosa, Michael Kesden, Ulrich Sperhake, Emanuele Berti, and Richard O'Shaughnessy, Phys. Rev. **D92**, 064016 (2015a), arXiv:1506.03492 [gr-qc].

Michael Kesden, Davide Gerosa, Richard O'Shaughnessy, Emanuele Berti, and Ulrich Sperhake, Phys. Rev. Lett. **114**, 081103 (2015), arXiv:1411.0674 [gr-qc].

Davide Gerosa, Michael Kesden, Richard O'Shaughnessy, Antoine Klein, Emanuele Berti, Ulrich Sperhake, and Daniele Trifirò, Phys. Rev. Lett. **115**, 141102 (2015b), arXiv:1506.09116 [gr-qc].

Xinyu Zhao, Michael Kesden, and Davide Gerosa, Phys. Rev. **D96**, 024007 (2017), arXiv:1705.02369 [gr-qc].

Alejandro Bohé, Sylvain Marsat, and Luc Blanchet, Class. Quant. Grav. **30**, 135009 (2013), arXiv:1303.7412 [gr-qc].

Sylvain Marsat, Alejandro Bohé, Luc Blanchet, and Alessandra Buonanno, Class. Quant. Grav. **31**, 025023 (2014), arXiv:1307.6793 [gr-qc].

Alessandra Buonanno, Guillaume Faye, and Tanja Hinderer, Phys. Rev. **D87**, 044009 (2013), arXiv:1209.6349 [gr-qc].

Chandra Kant Mishra, Aditya Kela, K. G. Arun, and Guillaume Faye, Phys. Rev. **D93**, 084054 (2016), arXiv:1601.05588 [gr-qc].

Rafael A. Porto, Andreas Ross, and Ira Z. Rothstein, JCAP **1103**, 009 (2011), arXiv:1007.1312 [gr-qc].

Alejandro Bohé, Guillaume Faye, Sylvain Marsat, and Edward K. Porter, Class. Quant. Grav. **32**, 195010 (2015), arXiv:1501.01529 [gr-qc].

Rafael A. Porto, Andreas Ross, and Ira Z. Rothstein, JCAP **1209**, 028 (2012), arXiv:1203.2962 [gr-qc].

Justin Vines, Class. Quant. Grav. **35**, 084002 (2018), arXiv:1709.06016 [gr-qc].

Thibault Damour, Phys. Rev. **D81**, 024017 (2010), arXiv:0910.5533 [gr-qc].

Luc Blanchet, Guillaume Faye, and Bernard F. Whiting, Phys. Rev. **D89**, 064026 (2014b), arXiv:1312.2975 [gr-qc].

Shuhei Mano and Eiichi Takasugi, Prog. Theor. Phys. **97**, 213–232 (1997), arXiv:gr-qc/9611014 [gr-qc].

Donato Bini and Thibault Damour, Phys. Rev. **D89**, 064063 (2014b), arXiv:1312.2503 [gr-qc].

Donato Bini and Thibault Damour, Phys. Rev. **D89**, 104047 (2014c), arXiv:1403.2366 [gr-qc].

Donato Bini and Thibault Damour, Phys. Rev. **D90**, 024039 (2014d), arXiv:1404.2747 [gr-qc].

Alexandre Le Tiec, Luc Blanchet, and Bernard F. Whiting, Phys. Rev. **D85**, 064039 (2012b), arXiv:1111.5378 [gr-qc].

John L. Friedman, Koji Uryu, and Masaru Shibata, Phys. Rev. **D65**, 064035 (2002), [Erratum: Phys. Rev.D70,129904(2004)], arXiv:gr-qc/0108070 [gr-qc].

Luc Blanchet, Alessandra Buonanno, and Alexandre Le Tiec, Phys. Rev. **D87**, 024030 (2013), arXiv:1211.1060 [gr-qc].

Alexandre Le Tiec, Phys. Rev. **D92**, 084021 (2015), arXiv:1506.05648 [gr-qc].

Luc Blanchet and Alexandre Le Tiec, Class. Quant. Grav. **34**, 164001 (2017), arXiv:1702.06839 [gr-qc].

Samuel E. Gralla and Alexandre Le Tiec, Phys. Rev. **D88**, 044021 (2013), arXiv:1210.8444 [gr-qc].

Alexandre Le Tiec, Class. Quant. Grav. **31**, 097001 (2014), arXiv:1311.3836 [gr-qc].

Ryuichi Fujita, Soichiro Isoyama, Alexandre Le Tiec, Hiroyuki Nakano, Norichika Sago, and Takahiro Tanaka, Class. Quant. Grav. **34**, 134001 (2017b), arXiv:1612.02504 [gr-qc].

Enrico Barausse, Alessandra Buonanno, and Alexandre Le Tiec, Phys. Rev. **D85**, 064010 (2012b), arXiv:1111.5610 [gr-qc].

Tanguy Marchand, Luc Blanchet, and Guillaume Faye, Class. Quant. Grav. **33**, 244003 (2016), arXiv:1607.07601 [gr-qc].

Benjamin P. Abbott *et al.* (Virgo, LIGO Scientific), Class. Quant. Grav. **34**, 104002 (2017n), arXiv:1611.07531 [gr-qc].

T. Damour, F. Guercilena, I. Hinder, S. Hopper, A. Nagar, and L. Rezzolla, Phys. Rev. D **89**, 081503 (2014b), 1402.7307.

Donato Bini and Thibault Damour, (2018), arXiv:1805.10809 [gr-qc].

Donato Bini and Thibault Damour, Phys. Rev. **D96**, 064021 (2017a), arXiv:1706.06877 [gr-qc].

Saeed Mirshekari and Clifford M. Will, Phys. Rev. **D87**, 084070 (2013), arXiv:1301.4680 [gr-qc].

Ryan N. Lang, Phys. Rev. **D89**, 084014 (2014), arXiv:1310.3320 [gr-qc].

Ryan N. Lang, Phys. Rev. **D91**, 084027 (2015), arXiv:1411.3073 [gr-qc].

Noah Sennett, Sylvain Marsat, and Alessandra Buonanno, Phys. Rev. **D94**, 084003 (2016), arXiv:1607.01420 [gr-qc].

L. Bernard, (2018), arXiv:1802.10201 [gr-qc].

Kent Yagi, Leo C. Stein, Nicolás Yunes, and Takahiro Tanaka, Phys. Rev. **D85**, 064022 (2012b), [Erratum: Phys. Rev.D93,no.2,029902(2016)], arXiv:1110.5950 [gr-qc].

Kent Yagi, Leo C. Stein, Nicolas Yunes, and Takahiro Tanaka, Phys. Rev. **D87**, 084058 (2013), [Erratum: Phys. Rev.D93,no.8,089909(2016)], arXiv:1302.1918 [gr-qc].

Thibault Damour, Phys. Rev. **D94**, 104015 (2016), arXiv:1609.00354 [gr-qc].

Donato Bini and Thibault Damour, Phys. Rev. **D96**, 104038 (2017b), arXiv:1709.00590 [gr-qc].

Thibault Damour, Phys. Rev. **D97**, 044038 (2018), arXiv:1710.10599 [gr-qc].

Frans Pretorius, Phys. Rev. Lett. **95**, 121101 (2005a), arXiv:gr-qc/0507014 [gr-qc].

Manuela Campanelli, C. O. Lousto, P. Marronetti, and Y. Zlochower, Phys. Rev. Lett. **96**, 111101 (2006a), arXiv:gr-qc/0511048 [gr-qc].

John G. Baker, Joan Centrella, Dae-Il Choi, Michael Koppitz, and James van Meter, Phys. Rev. Lett. **96**, 111102 (2006a), arXiv:gr-qc/0511103 [gr-qc].

Ulrich Sperhake, Class. Quant. Grav. **32**, 124011 (2015), arXiv:1411.3997 [gr-qc].

Manuela Campanelli, C. O. Lousto, and Y. Zlochower, Phys. Rev. D **74**, 041501 (2006b), arXiv:gr-qc/0604012 [gr-qc].

Mark Hannam, Sascha Husa, Bernd Bruegmann, and Achamveedu Gopakumar, Phys. Rev. **D78**, 104007 (2008a), arXiv:0712.3787 [gr-qc].

Sergio Dain, Carlos O. Lousto, and Yosef Zlochower, Phys. Rev. **D78**, 024039 (2008), arXiv:0803.0351 [gr-qc].

Manuela Campanelli, Carlos O. Lousto, Yosef Zlochower, Badri Krishnan, and David Merritt, Phys. Rev. **D75**, 064030 (2007b), arXiv:gr-qc/0612076 [gr-qc].

Manuela Campanelli, Carlos O. Lousto, Hiroyuki Nakano, and Yosef Zlochower, Phys. Rev. **D79**, 084010 (2009), arXiv:0808.0713 [gr-qc].

Patricia Schmidt, Mark Hannam, Sascha Husa, and P. Ajith, Phys. Rev. **D84**, 024046 (2011), arXiv:1012.2879 [gr-qc].

Ulrich Sperhake, Emanuele Berti, Vitor Cardoso, Jose A. Gonzalez, Bernd Bruegmann, and Marcus Ansorg, Phys. Rev. **D78**, 064069 (2008a), arXiv:0710.3823 [gr-qc].

Ian Hinder, Birjoo Vaishnav, Frank Herrmann, Deirdre Shoemaker, and Pablo Laguna, Phys. Rev. **D77**, 081502 (2008), arXiv:0710.5167 [gr-qc].

Béla Szilágyi, Jonathan Blackman, Alessandra Buonanno, Andrea Taracchini, Harald P. Pfeiffer, Mark A. Scheel, Tony Chu, Lawrence E. Kidder, and Yi Pan, Phys. Rev. Lett. **115**, 031102 (2015), arXiv:1502.04953 [gr-qc].

Bernd Bruegmann, Jose A. Gonzalez, Mark Hannam, Sascha Husa, Ulrich Sperhake, and Wolfgang Tichy, Phys. Rev. **D77**, 024027 (2008a), arXiv:gr-qc/0610128 [gr-qc].

Frank Loffler *et al.*, Class. Quant. Grav. **29**, 115001 (2012), arXiv:1111.3344 [gr-qc].

Manuela Campanelli, C. O. Lousto, and Y. Zlochower, Phys. Rev. **D73**, 061501 (2006c), arXiv:gr-qc/0601091 [gr-qc].

Birjoo Vaishnav, Ian Hinder, Frank Herrmann, and Deirdre Shoemaker, Phys. Rev. **D76**, 084020 (2007), arXiv:0705.3829 [gr-qc].

Ulrich Sperhake, Phys. Rev. **D76**, 104015 (2007), arXiv:gr-qc/0606079 [gr-qc].

John G. Baker, Joan Centrella, Dae-Il Choi, Michael Koppitz, and James van Meter, Phys. Rev. **D73**, 104002 (2006b), arXiv:gr-qc/0602026 [gr-qc].

Frans Pretorius, Class. Quant. Grav. **22**, 425–452 (2005b), arXiv:gr-qc/0407110 [gr-qc].

Mark A. Scheel, Harald P. Pfeiffer, Lee Lindblom, Lawrence E. Kidder, Oliver Rinne, and Saul A. Teukolsky, Phys. Rev. **D74**, 104006 (2006), arXiv:gr-qc/0607056 [gr-qc].

David Hilditch, Andreas Weyhausen, and Bernd Brügmann, Phys. Rev. **D93**, 063006 (2016), arXiv:1504.04732 [gr-qc].

Katy Clough, Pau Figueras, Hal Finkel, Markus Kunesch, Eugene A. Lim, and Saran Tunyasuvunakool, Class. Quant. Grav. **32**, 245011 (2015), [Class. Quant. Grav.32,24(2015)], arXiv:1503.03436 [gr-qc].

Abdul H. Mroue *et al.*, Phys. Rev. Lett. **111**, 241104 (2013), arXiv:1304.6077 [gr-qc].

Tony Chu, Heather Fong, Prayush Kumar, Harald P. Pfeiffer, Michael Boyle, Daniel A. Hemberger, Lawrence E. Kidder, Mark A. Scheel, and Bela Szilagyi, Class. Quant. Grav. **33**, 165001 (2016), arXiv:1512.06800 [gr-qc].

Karan Jani, James Healy, James A. Clark, Lionel London, Pablo Laguna, and Deirdre Shoemaker, Class. Quant. Grav. **33**, 204001 (2016), arXiv:1605.03204 [gr-qc].

James Healy, Carlos O. Lousto, Yosef Zlochower, and Manuela Campanelli, Class. Quant. Grav. **34**, 224001 (2017), arXiv:1703.03423 [gr-qc].

J Thornburg, Classical and Quantum Gravity **4**, 1119 (1987).

Gregory B. Cook and Harald P. Pfeiffer, Phys. Rev. **D70**, 104016 (2004), arXiv:gr-qc/0407078 [gr-qc].

Béla Szilágyi, Int. J. Mod. Phys. **D23**, 1430014 (2014), arXiv:1405.3693 [gr-qc].

Lawrence E. Kidder, Mark A. Scheel, Saul A. Teukolsky, Eric D. Carlson, and Gregory B. Cook, Phys. Rev. **D62**, 084032 (2000), arXiv:gr-qc/0005056 [gr-qc].

Steven Brandt and Bernd Bruegmann, Phys. Rev. Lett. **78**, 3606–3609 (1997), arXiv:gr-qc/9703066 [gr-qc].

Mark Hannam, Sascha Husa, Frank Ohme, Bernd Bruegmann, and Niall O'Murchadha, Phys. Rev. **D78**, 064020 (2008b), arXiv:0804.0628 [gr-qc].

James R. van Meter, John G. Baker, Michael Koppitz, and Dae-Il Choi, Phys. Rev. **D73**, 124011 (2006), arXiv:gr-qc/0605030 [gr-qc].

Carsten Gundlach and Jose M. Martin-Garcia, Phys. Rev. **D74**, 024016 (2006), arXiv:gr-qc/0604035 [gr-qc].

Jeffrey M. Bowen and James W. York, Jr., Phys. Rev. **D21**, 2047–2056 (1980).

Sergio Dain, Carlos O. Lousto, and Ryoji Takahashi, Phys. Rev. **D65**, 104038 (2002), arXiv:gr-qc/0201062 [gr-qc].

James W. York, Jr., Phys. Rev. Lett. **82**, 1350–1353 (1999), arXiv:gr-qc/9810051 [gr-qc].

Eric Gourgoulhon, Philippe Grandclement, and Silvano Bonazzola, Phys. Rev. **D65**, 044020 (2002), arXiv:gr-qc/0106015 [gr-qc].

Philippe Grandclement, Eric Gourgoulhon, and Silvano Bonazzola, Phys. Rev. **D65**, 044021 (2002), arXiv:gr-qc/0106016 [gr-qc].

Gregory B. Cook, Phys. Rev. **D65**, 084003 (2002), arXiv:gr-qc/0108076 [gr-qc].

Harald P. Pfeiffer and James W. York, Jr., Phys. Rev. **D67**, 044022 (2003), arXiv:gr-qc/0207095 [gr-qc].

Geoffrey Lovelace, Robert Owen, Harald P. Pfeiffer, and Tony Chu, Phys. Rev. **D78**, 084017 (2008), arXiv:0805.4192 [gr-qc].

Ian Ruchlin, James Healy, Carlos O. Lousto, and Yosef Zlochower, Phys. Rev. **D95**, 024033 (2017), arXiv:1410.8607 [gr-qc].

Yosef Zlochower, James Healy, Carlos O. Lousto, and Ian Ruchlin, Phys. Rev. **D96**, 044002 (2017), arXiv:1706.01980 [gr-qc].

Helmut Friedrich and Alan D. Rendall, *In *Schmidt, B.G. (ed.): Einstein's field equations and their physical implications* 127-224.*, Lect. Notes Phys. **540**, 127–224 (2000), arXiv:gr-qc/0002074 [gr-qc].

Lee Lindblom, Mark A. Scheel, Lawrence E. Kidder, Robert Owen, and Oliver Rinne, Class. Quant. Grav. **23**, S447–S462 (2006), arXiv:gr-qc/0512093 [gr-qc].

Masaru Shibata and Takashi Nakamura, Phys. Rev. D **52**, 5428–5444 (1995).

Thomas W. Baumgarte and Stuart L. Shapiro, Phys. Rev. **D59**, 024007 (1999), arXiv:gr-qc/9810065 [gr-qc].

C. Bona, T. Ledvinka, C. Palenzuela, and M. Zacek, Phys. Rev. **D67**, 104005 (2003), arXiv:gr-qc/0302083 [gr-qc].

C. Bona and C. Palenzuela, Phys. Rev. **D69**, 104003 (2004), arXiv:gr-qc/0401019 [gr-qc].

Carsten Gundlach, Jose M. Martin-Garcia, Gioel Calabrese, and Ian Hinder, Class. Quant. Grav. **22**, 3767–3774 (2005), arXiv:gr-qc/0504114 [gr-qc].

David Hilditch, Sebastiano Bernuzzi, Marcus Thierfelder, Zhoujian Cao, Wolfgang Tichy, and Bernd Bruegmann, Phys. Rev. **D88**, 084057 (2013), arXiv:1212.2901 [gr-qc].

Sebastiano Bernuzzi and David Hilditch, Phys. Rev. **D81**, 084003 (2010), arXiv:0912.2920 [gr-qc].

Daniela Alic, Carles Bona-Casas, Carles Bona, Luciano Rezzolla, and Carlos Palenzuela, Phys. Rev. **D85**, 064040 (2012), arXiv:1106.2254 [gr-qc].

Michael Dumbser, Federico Guercilena, Sven Köppel, Luciano Rezzolla, and Olindo Zanotti, Phys. Rev. **D97**, 084053 (2018), arXiv:1707.09910 [gr-qc].

Ezra Newman and Roger Penrose, J. Math. Phys. **3**, 566–578 (1962).

J. M. Stewart, *Advanced General Relativity* (Cambridge University Press, 1990).

Nigel T. Bishop, Roberto Gomez, Luis Lehner, and Jeffrey Winicour, Phys. Rev. **D54**, 6153–6165 (1996).

Jeffrey Winicour, *Proceedings, 9th Yukawa International Seminar on Black Holes and Gravitational Waves: New Eyes in the 21st Century (YKIS 99): Kyoto, Japan, June 28-July 2, 1999*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **136**, 57–71 (1999), arXiv:gr-qc/9911106 [gr-qc].

H. Bondi, M. G. J. van der Burg, and A. W. K. Metzner, Proc. Roy. Soc. Lond. **269**, 21–52 (1962).

Rainer K. Sachs, Proc. Roy. Soc. Lond. **270**, 103–126 (1962).

Sascha Husa, Sebastian Khan, Mark Hannam, Michael Puerrer, Frank Ohme, Xisco Jimenez Forteza, and Alejandro Bohe, Phys. Rev. D **93**, 044006 (2016), arXiv:1508.07250 [gr-qc].

Mark A. Scheel, Matthew Giesler, Daniel A. Hemberger, Geoffrey Lovelace, Kevin Kuper, Michael Boyle, B. Szilágyi, and Lawrence E. Kidder, Class. Quant. Grav. **32**, 105009 (2015), arXiv:1412.1803 [gr-qc].

Kip S. Thorne, Astrophys. J. **191**, 507–520 (1974).

Carlos O. Lousto and Yosef Zlochower, Phys. Rev. Lett. **106**, 041101 (2011a), arXiv:1009.0292 [gr-qc].

Stephen R. Lau, Geoffrey Lovelace, and Harald P. Pfeiffer, Phys. Rev. **D84**, 084023 (2011), arXiv:1105.3922 [gr-qc].

Mark Hannam, *Numerical relativity data analysis. Proceedings, 2nd Meeting, NRDA 2008, Syracuse, USA, August 11-14, 2008*, Class. Quant. Grav. **26**, 114001 (2009), arXiv:0901.2931 [gr-qc].

Emanuele Berti, Vitor Cardoso, Leonardo Gualtieri, Michael Horbatsch, and Ulrich Sperhake, Phys. Rev. **D87**, 124020 (2013), arXiv:1304.2836 [gr-qc].

M. Okounkova, L. C. Stein, M. A. Scheel, and D. A. Hemberger, Phys. Rev. D **96**, 044020 (2017), 1705.07924.

Giuseppe Papallo and Harvey S. Reall, Phys. Rev. **D96**, 044019 (2017), arXiv:1705.04370 [gr-qc].

Térence Delsate, David Hilditch, and Helvi Witek, Phys. Rev. **D91**, 024027 (2015), arXiv:1407.6727 [gr-qc].

Sebastian Khan, Sascha Husa, Mark Hannam, Frank Ohme, Michael Puerrer, Xisco Jimenez Forteza, and Alejandro Bohe, Phys. Rev. **D93**, 044007 (2016b), arXiv:1508.07253 [gr-qc].

Alejandro Bohé *et al.*, Phys. Rev. D **95**, 044028 (2017), arXiv:1611.03703 [gr-qc].

Theocharis A. Apostolatos, Curt Cutler, Gerald J. Sussman, and Kip S. Thorne, Phys. Rev. **D49**, 6274–6297 (1994).

Lawrence E. Kidder, Phys. Rev. **D52**, 821–847 (1995), arXiv:gr-qc/9506022 [gr-qc].

Mark Hannam, Patricia Schmidt, Alejandro Bohe, Leila Haegel, Sascha Husa, Frank Ohme, Geraint Pratten, and Michael Puerrer, Phys. Rev. Lett. **113**, 151101 (2014), arXiv:1308.3271 [gr-qc].

Yi Pan, Alessandra Buonanno, Andrea Taracchini, Lawrence E. Kidder, Abdul H. Mroué, Harald P. Pfeiffer, Mark A. Scheel, and Béla Szilágyi, Phys. Rev. D **89**, 084006 (2014), arXiv:1307.6232 [gr-qc].

B. P. Abbott *et al.* (Virgo, LIGO Scientific), Phys. Rev. **D94**, 064035 (2016n), arXiv:1606.01262 [gr-qc].

J. Lange *et al.*, Phys. Rev. **D96**, 104041 (2017), arXiv:1705.09833 [gr-qc].

Jonathan Blackman, Scott E. Field, Chad R. Galley, Béla Szilágyi, Mark A. Scheel, Manuel Tiglio, and Daniel A. Hemberger, Phys. Rev. Lett. **115**, 121102 (2015), arXiv:1502.07758 [gr-qc].

Jonathan Blackman, Scott E. Field, Mark A. Scheel, Chad R. Galley, Daniel A. Hemberger, Patricia Schmidt, and Rory Smith, Phys. Rev. **D95**, 104023 (2017a), arXiv:1701.00550 [gr-qc].

Jonathan Blackman, Scott E. Field, Mark A. Scheel, Chad R. Galley, Christian D. Ott, Michael Boyle, Lawrence E. Kidder, Harald P. Pfeiffer, and Béla Szilágyi, Phys. Rev. **D96**, 024058 (2017b), arXiv:1705.07089 [gr-qc].

Kostas D. Kokkotas and Bernd G. Schmidt, Living Rev. Rel. **2**, 2 (1999), arXiv:gr-qc/9909058 [gr-qc].

Ioannis Kamaretsos, Mark Hannam, Sascha Husa, and B. S. Sathyaprakash, Phys. Rev. **D85**, 024018 (2012a), arXiv:1107.0854 [gr-qc].

Ioannis Kamaretsos, Mark Hannam, and B. Sathyaprakash, Phys. Rev. Lett. **109**, 141102 (2012b), arXiv:1207.0399 [gr-qc].

Emanuele Berti, Vitor Cardoso, and Clifford M. Will, Phys. Rev. **D73**, 064030 (2006), arXiv:gr-qc/0512160 [gr-qc].

Enrico Barausse and Luciano Rezzolla, Astrophys. J. **704**, L40–L44 (2009), arXiv:0904.2577 [gr-qc].

Daniel A. Hemberger, Geoffrey Lovelace, Thomas J. Loredo, Lawrence E. Kidder, Mark A. Scheel, Béla Szilágyi, Nicholas W. Taylor, and Saul A. Teukolsky, Phys. Rev. **D88**, 064014 (2013), arXiv:1305.5991 [gr-qc].

Fabian Hofmann, Enrico Barausse, and Luciano Rezzolla, Astrophys. J. **825**, L19 (2016), arXiv:1605.01938 [gr-qc].

James Healy and Carlos O. Lousto, Phys. Rev. **D95**, 024037 (2017), arXiv:1610.09713 [gr-qc].

Xisco Jiménez-Forteza, David Keitel, Sascha Husa, Mark Hannam, Sebastian Khan, and Michael Pürrer, Phys. Rev. **D95**, 064024 (2017), arXiv:1611.00332 [gr-qc].

Alessandra Buonanno, Lawrence E. Kidder, and Luis Lehner, Phys. Rev. **D77**, 026004 (2008), arXiv:0709.3839 [astro-ph].

Luciano Rezzolla, Enrico Barausse, Ernst Nils Dorband, Denis Pollney, Christian Reisswig, Jennifer Seiler, and Sascha Husa, Phys. Rev. **D78**, 044002 (2008), arXiv:0712.3541 [gr-qc].

Carlos O. Lousto, Manuela Campanelli, Yosef Zlochower, and Hiroyuki Nakano, *Numerical relativity and data analysis. Proceedings, 3rd Annual Meeting, NRDA 2009, Potsdam, Germany, July 6-9, 2009*, Class. Quant. Grav. **27**, 114006 (2010), arXiv:0904.3541 [gr-qc].

Abhirup Ghosh *et al.*, Phys. Rev. **D94**, 021101 (2016), arXiv:1602.02453 [gr-qc].

Jose A. Gonzalez, Ulrich Sperhake, Bernd Bruegmann, Mark Hannam, and Sascha Husa, Phys. Rev. Lett. **98**, 091101 (2007a), arXiv:gr-qc/0610154 [gr-qc].

J. A. Gonzalez, M. D. Hannam, U. Sperhake, Bernd Bruegmann, and S. Husa, Phys. Rev. Lett. **98**, 231101 (2007b), arXiv:gr-qc/0702052 [GR-QC].

Bernd Bruegmann, Jose A. Gonzalez, Mark Hannam, Sascha Husa, and Ulrich Sperhake, Phys. Rev. **D77**, 124047 (2008b), arXiv:0707.0135 [gr-qc].

Carlos O. Lousto and Yosef Zlochower, Phys. Rev. Lett. **107**, 231102 (2011b), arXiv:1108.2009 [gr-qc].

Davide Gerosa, François Hébert, and Leo C. Stein, Phys. Rev. **D97**, 104049 (2018), arXiv:1802.04276 [gr-qc].

Davide Gerosa and Christopher J. Moore, Phys. Rev. Lett. **117**, 011101 (2016), arXiv:1606.04226 [gr-qc].

Carlos O. Lousto, James Healy, and Hiroyuki Nakano, Phys. Rev. **D93**, 044031 (2016), arXiv:1506.04768 [gr-qc].

Emanuele Berti, *Gravitational wave data analysis. Proceedings, 10th Workshop, GWDAW-10, Brownsville, USA, December 14-17, 2005*, Class. Quant. Grav. **23**, S785–S798 (2006), arXiv:astro-ph/0602470 [astro-ph].

Curt Cutler and Michele Vallisneri, Phys. Rev. **D76**, 104018 (2007), arXiv:0707.2982 [gr-qc].

M. Kowalski *et al.* (Supernova Cosmology Project), Astrophys. J. **686**, 749–778 (2008), 0804.4142.

M. W. Choptuik, Phys. Rev. Lett. **70**, 9–12 (1993).

M. Yu. Khlopov, Mod. Phys. Lett. **A32**, 1702001 (2017), 1704.06511.

Asimina Arvanitaki and Sergei Dubovsky, Phys. Rev. **D83**, 044026 (2011), arXiv:1004.3558 [hep-th].

Lotty Ackerman, Matthew R. Buckley, Sean M. Carroll, and Marc Kamionkowski, *Proceedings, 7th International Heidelberg Conference on Dark Matter in Astro and Particle Physics (DARK 2009): Christchurch, New Zealand, January 18-24, 2009*, Phys. Rev. **D79**, 023519 (2009), arXiv:0810.5126 [hep-ph].

M. Klasen, M. Pohl, and G. Sigl, Prog. Part. Nucl. Phys. **85**, 1–32 (2015), 1507.03800.

Helvi Witek, Vitor Cardoso, Akihiro Ishibashi, and Ulrich Sperhake, Phys. Rev. **D87**, 043513 (2013), arXiv:1212.0551 [gr-qc].

H. Okawa, H. Witek, and V. Cardoso, Phys. Rev. D **89**, 104032 (2014), 1401.1548.

M. Zilhão, H. Witek, and V. Cardoso, Class. Quant. Grav. **32**, 234003 (2015), 1505.00797.

Ya. B. Zel'dovich, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **14**, 270 (1971).

Ya. B. Zel'dovich, Zh. Eksp. Teor. Fiz **62**, 2076 (1972).

C. W. Misner, Phys. Rev. Lett. **28**, 994–997 (1972).

Richard Brito, Vitor Cardoso, and Paolo Pani, Lect. Notes Phys. **906**, pp.1–237 (2015a), arXiv:1501.06570 [gr-qc].

R. Penrose and R. M. Floyd, Nature **229**, 177–179 (1971).

W. H. Press and S. A. Teukolsky, Nature **238**, 211–212 (1972).

Vitor Cardoso, Oscar J. C. Dias, Jose P. S. Lemos, and Shijun Yoshida, Phys. Rev. **D70**, 044039 (2004), arXiv:hep-th/0404096.

Vitor Cardoso, Sayan Chakrabarti, Paolo Pani, Emanuele Berti, and Leonardo Gualtieri, Phys. Rev. Lett. **107**, 241101 (2011), arXiv:1109.6021 [gr-qc].

Ryuichi Fujita and Vitor Cardoso, Phys. Rev. **D95**, 044016 (2017), arXiv:1612.00978 [gr-qc].

William E. East, Fethi M. Ramazanoğlu, and Frans Pretorius, Phys. Rev. **D89**, 061503 (2014), arXiv:1312.4529 [gr-qc].

P. Bosch, S. R. Green, and L. Lehner, Phys. Rev. Lett. **116**, 141102 (2016), 1601.01384.

Nicolas Sanchis-Gual, Juan Carlos Degollado, Carlos Herdeiro, José A. Font, and Pedro J. Montero, Phys. Rev. **D94**, 044061 (2016), arXiv:1607.06304 [gr-qc].

Paul M. Chesler and David A. Lowe, (2018), arXiv:1801.09711 [gr-qc].

William E. East and Frans Pretorius, Phys. Rev. Lett. **119**, 041101 (2017), arXiv:1704.04791 [gr-qc].

Richard Brito, Vitor Cardoso, and Hirotada Okawa, Phys. Rev. Lett. **115**, 111301 (2015b), arXiv:1508.04773 [gr-qc].

Carlos A. R. Herdeiro and Eugen Radu, Phys. Rev. Lett. **112**, 221101 (2014a), arXiv:1403.2757 [gr-qc].

Y. Brihaye, C. Herdeiro, and E. Radu, Phys. Lett. B **739**, 1–7 (2014), 1408.5581.

C. L. Benone, L. C. B. Crispino, C. Herdeiro, and E. Radu, Phys. Rev. D **90**, 104024 (2014), 1409.1593.

Carlos Herdeiro, Eugen Radu, and Helgi Runarsson, Class. Quant. Grav. **33**, 154001 (2016), arXiv:1603.02687 [gr-qc].

Otis Chodosh and Yakov Shlapentokh-Rothman, Commun. Math. Phys. **356**, 1155–1250 (2017), arXiv:1510.08025 [gr-qc].

Juan Carlos Degollado, Carlos A. R. Herdeiro, and Eugen Radu, Phys. Lett. **B781**, 651–655 (2018), arXiv:1802.07266 [gr-qc].

J. A. Wheeler, Phys. Rev. **97**, 511–536 (1955).

David J. Kaup, Phys. Rev. **172**, 1331–1342 (1968).

Philippe Jetzer, Phys. Rept. **220**, 163 (1992).

B. C. Mundim, *A Numerical Study of Boson Star Binaries*, Ph.D. thesis, British Columbia U. (2010), 1003.0239.

Steven L. Liebling and Carlos Palenzuela, Living Rev. Rel. **15**, 6 (2012), 1202.5809.

E. W. Mielke and F. E. Schunck, in *Recent developments in theoretical and experimental general relativity, gravitation, and relativistic field theories. Proceedings, 8th Marcel Grossmann meeting, MG8, Jerusalem, Israel, June 22-27, 1997. Pts. A, B* (1997) pp. 1607–1626, gr-qc/9801063.

M. Colpi, S. L. Shapiro, and I. Wasserman, Phys. Rev. Lett. **57**, 2485–2488 (1986).

T. Helfer, D. J. E. Marsh, K. Clough, M. Fairbairn, E. A. Lim, and R. Becerril, JCAP **1703**, 055 (2017), 1609.04724.

Y. Kobayashi, M. Kasai, and T. Futamase, Phys. Rev. D **50**, 7721–7724 (1994).

R. Brito, V. Cardoso, C. A. R. Herdeiro, and E. Radu, Phys. Lett. **B752**, 291–295 (2016a), 1508.05395.

E. Seidel and W. M. Suen, Phys. Rev. Lett. **66**, 1659–1662 (1991).

F. S. Guzman and J. M. Rueda-Becerril, Phys. Rev. D **80**, 084023 (2009), 1009.1250.

Vitor Cardoso, Caio F. B. Macedo, Paolo Pani, and Valeria Ferrari, JCAP **1605**, 054 (2016a), arXiv:1604.07845 [hep-ph].

N. Sennett, T. Hinderer, J. Steinhoff, A. Buonanno, and S. Ossokine, Phys. Rev. D **96**, 024002 (2017), 1704.08651.

J. Balakrishna, E. Seidel, and W.-M. Suen, Phys. Rev. D **58**, 104004 (1998), gr-qc/9712064.

S. Valdez-Alvarado, C. Palenzuela, D. Alic, and L. A. Ureña-López, Phys. Rev. D **87**, 084040 (2013), 1210.2299.

Lucas G. Collodel, Burkhard Kleihaus, and Jutta Kunz, Phys. Rev. **D96**, 084066 (2017), arXiv:1708.02057 [gr-qc].

Nicolas Sanchis-Gual, Carlos Herdeiro, Eugen Radu, Juan Carlos Degollado, and José A. Font, Phys. Rev. **D95**, 104028 (2017), arXiv:1702.04532 [gr-qc].

C. Palenzuela, I. Olabarrieta, L. Lehner, and S. L. Liebling, Phys. Rev. D **75**, 064005 (2007), gr-qc/0612067.

Miguel Bezares, Carlos Palenzuela, and Carles Bona, Phys. Rev. D **95**, 124005 (2017), 1705.01071.

Matthew W. Choptuik and Frans Pretorius, Phys. Rev. Lett. **104**, 111101 (2010), arXiv:0908.1780 [gr-qc].

C. Palenzuela, L. Lehner, and S. L. Liebling, Phys. Rev. D **77**, 044036 (2008), 0706.2435.

Carlos Palenzuela, Paolo Pani, Miguel Bezares, Vitor Cardoso, Luis Lehner, and Steven Liebling, Phys. Rev. **D96**, 104058 (2017), arXiv:1710.09432 [gr-qc].

Emanuele Berti *et al.*, Class. Quant. Grav. **32**, 243001 (2015), arXiv:1501.07274 [gr-qc].

Y. Fujii and K. Maeda, *The scalar-tensor theory of gravitation* (Cambridge University Press, 2007).

C. Brans and R.H. Dicke, Phys. Rev. **124**, 925–935 (1961).

Antonio De Felice and Shinji Tsujikawa, Living Rev. Rel. **13**, 3 (2010), arXiv:1002.4928 [gr-qc].

T. Damour and G. Esposito-Farése, Class. Quant. Grav. **9**, 2093–2176 (1992).

Marcelo Salgado, Class. Quant. Grav. **23**, 4719–4742 (2006), arXiv:gr-qc/0509001 [gr-qc].

Marcelo Salgado, David Martinez-del Rio, Miguel Alcubierre, and Dario Nunez, Phys. Rev. **D77**, 104010 (2008), arXiv:0801.2372 [gr-qc].

A. Jakubiec and J. Kijowski, Jour. Math. Phys. **30**, 1073–1076 (1989).

T. Damour and G. Esposito-Farèse, Phys. Rev. Lett. **70**, 2220–2223 (1993).

F. M. Ramazanoğlu, Phys. Rev. D **96**, 064009 (2017), 1706.01056.

B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora, Nature **425**, 374–376 (2003).

Daniela D. Doneva, Stoytcho S. Yazadjiev, Nikolaos Stergioulas, and Kostas D. Kokkotas, Phys. Rev. **D88**, 084060 (2013), arXiv:1309.0605 [gr-qc].

Raissa F. P. Mendes, Phys. Rev. **D91**, 064024 (2015), arXiv:1412.6789 [gr-qc].

Hector O. Silva, Caio F. B. Macedo, Emanuele Berti, and Luís C. B. Crispino, Class. Quant. Grav. **32**, 145008 (2015), arXiv:1411.6286 [gr-qc].

Michael Horbatsch, Hector O. Silva, Davide Gerosa, Paolo Pani, Emanuele Berti, Leonardo Gualtieri, and Ulrich Sperhake, Class. Quant. Grav. **32**, 204001 (2015), arXiv:1505.07462 [gr-qc].

C. Palenzuela and S. L. Liebling, Phys. Rev. D **93**, 044009 (2016), 1510.03471.

Fethi M. Ramazanoğlu and Frans Pretorius, Phys. Rev. **D93**, 064005 (2016), arXiv:1601.07475 [gr-qc].

Soichiro Morisaki and Teruaki Suyama, Phys. Rev. D **96**, 084026 (2017), 1707.02809.

M. Shibata, K. Nakao, and T. Nakamura, Phys. Rev. D **50**, 7304–7317 (1994).

M. A. Scheel, S. L. Shapiro, and S. A. Teukolsky, Phys. Rev. D **51**, 4208–4235 (1995a).

M. A. Scheel, S. L. Shapiro, and S. A. Teukolsky, Phys. Rev. D **51**, 4236–4249 (1995b).

T. Harada, T. Chiba, K.-i. Nakao, and T. Nakamura, Phys. Rev. D **55**, 2024–2037 (1997), gr-qc/9611031.

Jerome Novak, Phys. Rev. **D57**, 4789–4801 (1998a), arXiv:gr-qc/9707041 [gr-qc].

Jerome Novak, Phys. Rev. **D58**, 064019 (1998b), arXiv:gr-qc/9806022 [gr-qc].

Jerome Novak and Jose M. Ibanez, Astrophys. J. **533**, 392–405 (2000), arXiv:astro-ph/9911298 [astro-ph].

Davide Gerosa, Ulrich Sperhake, and Christian D. Ott, Class. Quant. Grav. **33**, 135002 (2016), arXiv:1602.06952 [gr-qc].

Justin Alsing, Emanuele Berti, Clifford M. Will, and Helmut Zaglauer, Phys. Rev. **D85**, 064041 (2012), arXiv:1112.4903 [gr-qc].

Ulrich Sperhake, Christopher J. Moore, Roxana Rosca, Michalis Agathos, Davide Gerosa, and Christian D. Ott, Phys. Rev. Lett. **119**, 201103 (2017), arXiv:1708.03651 [gr-qc].

James Healy, Tanja Bode, Roland Haas, Enrique Pazos, Pablo Laguna, Deirdre M. Shoemaker, and Nicolas Yunes, Class. Quant. Grav. **29**, 232002 (2012), arXiv:1112.3928 [gr-qc].

Enrico Barausse, Carlos Palenzuela, Marcelo Ponce, and Luis Lehner, Phys. Rev. **D87**, 081506 (2013), arXiv:1212.5053 [gr-qc].

Carlos Palenzuela, Enrico Barausse, Marcelo Ponce, and Luis Lehner, Phys. Rev. **D89**, 044024 (2014), arXiv:1310.4481 [gr-qc].

Ignatios Antoniadis, Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos, and G. R. Dvali, Phys. Lett. **B436**, 257–263 (1998), arXiv:hep-ph/9804398 [hep-ph].

Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos, and G. R. Dvali, Phys. Lett. **B429**, 263–272 (1998), arXiv:hep-ph/9803315 [hep-ph].

Lisa Randall and Raman Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370–3373 (1999a), arXiv:hep-ph/9905221 [hep-ph].

Lisa Randall and Raman Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690–4693 (1999b), arXiv:hep-th/9906064 [hep-th].

Tom Banks and Willy Fischler, (1999), arXiv:hep-th/9906038 [hep-th].

Savas Dimopoulos and Greg L. Landsberg, Phys. Rev. Lett. **87**, 161602 (2001), arXiv:hep-ph/0106295 [hep-ph].

Steven B. Giddings and Scott D. Thomas, Phys. Rev. **D65**, 056010 (2002), arXiv:hep-ph/0106219 [hep-ph].

James A. Frost, Jonathan R. Gaunt, Marco O. P. Sampaio, Marc Casals, Sam R. Dolan, Michael Andrew Parker, and Bryan R. Webber, JHEP **10**, 014 (2009), arXiv:0904.0979 [hep-ph].

Ulrich Sperhake, Vitor Cardoso, Frans Pretorius, Emanuele Berti, and Jose A. Gonzalez, Phys. Rev. Lett. **101**, 161101 (2008b), arXiv:0806.1738 [gr-qc].

J. Healy, I. Ruchlin, C. O. Lousto, and Y. Zlochower, Phys. Rev. D **94**, 104020 (2016), 1506.06153.

Masaru Shibata, Hirotada Okawa, and Tetsuro Yamamoto, Phys. Rev. **D78**, 101501 (2008), arXiv:0810.4735 [gr-qc].

Frans Pretorius and Deepak Khurana, *New frontiers in numerical relativity. Proceedings, International Meeting, NFNR 2006, Potsdam, Germany, July 17-21, 2006*, Class. Quant. Grav. **24**, S83–S108 (2007), arXiv:gr-qc/0702084 [GR-QC].

Ulrich Sperhake, Vitor Cardoso, Frans Pretorius, Emanuele Berti, Tanja Hinderer, and Nicolas Yunes, Phys. Rev. Lett. **103**, 131102 (2009), arXiv:0907.1252 [gr-qc].

Ulrich Sperhake, Emanuele Berti, Vitor Cardoso, and Frans Pretorius, Phys. Rev. Lett. **111**, 041101 (2013), arXiv:1211.6114 [gr-qc].

William E. East and Frans Pretorius, Phys. Rev. Lett. **110**, 101101 (2013), arXiv:1210.0443 [gr-qc].

Luciano Rezzolla and Kentaro Takami, Class. Quant. Grav. **30**, 012001 (2013), arXiv:1209.6138 [gr-qc].

Ulrich Sperhake, Emanuele Berti, Vitor Cardoso, and Frans Pretorius, Phys. Rev. **D93**, 044012 (2016), arXiv:1511.08209 [gr-qc].

Dmitry V. Galtsov, Georgios Kofinas, Pavel Spirin, and Theodore N. Tomaras, JHEP **05**, 055 (2010), arXiv:1003.2982 [hep-th].

Emanuele Berti, Vitor Cardoso, and Barnabas Kipapa, Phys. Rev. **D83**, 084018 (2011), arXiv:1010.3874 [gr-qc].

Dmitry Gal'tsov, Pavel Spirin, and Theodore N. Tomaras, JHEP **01**, 087 (2013), arXiv:1210.6976 [hep-th].

Miguel Zilhao, Helvi Witek, Ulrich Sperhake, Vitor Cardoso, Leonardo Gualtieri, Carlos Herdeiro, and Andrea Nerozzi, Phys. Rev. **D81**, 084052 (2010), arXiv:1001.2302 [gr-qc].

H. Yoshino and M. Shibata, Prog. Theor. Phys. Suppl. **189**, 269–310 (2011a).

H. Yoshino and M. Shibata, Prog. Theor. Phys. Suppl. **190**, 282–303 (2011b).

William G. Cook, Pau Figueras, Markus Kunesch, Ulrich Sperhake, and Saran Tunyasuvunakool, *Proceedings, 3rd Amazonian Symposium on Physics: Belem, Brazil, September 28-October 2, 2015*, Int. J. Mod. Phys. **D25**, 1641013 (2016), arXiv:1603.00362 [gr-qc].

Hideo Kodama and Akihiro Ishibashi, Prog. Theor. Phys. **110**, 701–722 (2003), arXiv:hep-th/0305147 [hep-th].

Hideo Kodama and Akihiro Ishibashi, Prog. Theor. Phys. **111**, 29–73 (2004), arXiv:hep-th/0308128 [hep-th].

Helvi Witek, Miguel Zilhao, Leonardo Gualtieri, Vitor Cardoso, Carlos Herdeiro, Andrea Nerozzi, and Ulrich Sperhake, Phys. Rev. **D82**, 104014 (2010), arXiv:1006.3081 [gr-qc].

Hirotaka Yoshino and Masaru Shibata, Phys. Rev. **D80**, 084025 (2009), arXiv:0907.2760 [gr-qc].

Mahdi Godazgar and Harvey S. Reall, Phys. Rev. **D85**, 084021 (2012), arXiv:1201.4373 [gr-qc].

William G. Cook and Ulrich Sperhake, Class. Quant. Grav. **34**, 035010 (2017), arXiv:1609.01292 [gr-qc].

Miguel Zilhao, Marcus Ansorg, Vitor Cardoso, Leonardo Gualtieri, Carlos Herdeiro, Ulrich Sperhake, and Helvi Witek, Phys. Rev. **D84**, 084039 (2011), arXiv:1109.2149 [gr-qc].

Hirotada Okawa, Ken-ichi Nakao, and Masaru Shibata, Phys. Rev. **D83**, 121501 (2011), arXiv:1105.3331 [gr-qc].

William G. Cook, Ulrich Sperhake, Emanuele Berti, and Vitor Cardoso, Phys. Rev. **D96**, 124006 (2017), arXiv:1709.10514 [gr-qc].

Helvi Witek, Vitor Cardoso, Leonardo Gualtieri, Carlos Herdeiro, Ulrich Sperhake, and Miguel Zilhao, Phys. Rev. **D83**, 044017 (2011), arXiv:1011.0742 [gr-qc].

Helvi Witek, Hirotada Okawa, Vitor Cardoso, Leonardo Gualtieri, Carlos Herdeiro, Masaru Shibata, Ulrich Sperhake, and Miguel Zilhao, Phys. Rev. **D90**, 084014 (2014), arXiv:1406.2703 [gr-qc].

Ulrich Sperhake, Int. J. Mod. Phys. **D22**, 1330005 (2013), arXiv:1301.3772 [gr-qc].

Vitor Cardoso, Leonardo Gualtieri, Carlos Herdeiro, and Ulrich Sperhake, Living Rev. Relativity **18**, 1 (2015), arXiv:1409.0014 [gr-qc].

Roberto Emparan and Harvey S. Reall, Living Rev. Rel. **11**, 6 (2008), arXiv:0801.3471 [hep-th].

R. Gregory and R. Laflamme, Phys. Rev. Lett. **70**, 2837–2840 (1993), arXiv:hep-th/9301052 [hep-th].

Pau Figueras, Markus Kunesch, and Saran Tunyasuvunakool, Phys. Rev. Lett. **116**, 071102 (2016), arXiv:1512.04532 [hep-th].

Luis Lehner and Frans Pretorius, Phys. Rev. Lett. **105**, 101102 (2010), arXiv:1006.5960 [hep-th].

Masaru Shibata and Hirotaka Yoshino, Phys. Rev. **D81**, 104035 (2010), arXiv:1004.4970 [gr-qc].

P. Figueras, M. Kunesch, L. Lehner, and S. Tunyasuvunakool, Phys. Rev. Lett. **118**, 151103 (2017), 1702.01755.

Piotr Bizon and Andrzej Rostworowski, Phys. Rev. Lett. **107**, 031102 (2011), arXiv:1104.3702 [gr-qc].

Joanna Jalmuzna, Andrzej Rostworowski, and Piotr Bizon, Phys. Rev. **D84**, 085021 (2011), arXiv:1108.4539 [gr-qc].

Alex Buchel, Luis Lehner, and Steven L. Liebling, Phys. Rev. **D86**, 123011 (2012), arXiv:1210.0890 [gr-qc].

Piotr Bizoń and Joanna Jałmużna, Phys. Rev. Lett. **111**, 041102 (2013), arXiv:1306.0317 [gr-qc].

D. Santos-Oliván and C. F. Sopuerta, Phys. Rev. Lett. **116**, 041101 (2016), 1511.04344.

Hans Bantilan, Pau Figueras, Markus Kunesch, and Paul Romatschke, Phys. Rev. Lett. **119**, 191103 (2017), arXiv:1706.04199 [hep-th].

Hans Bantilan, Frans Pretorius, and Steven S. Gubser, Phys. Rev. **D85**, 084038 (2012), arXiv:1201.2132 [hep-th].

Hans Bantilan and Paul Romatschke, Phys. Rev. Lett. **114**, 081601 (2015), arXiv:1410.4799 [hep-th].

Eloisa Bentivegna and Mikolaj Korzynski, Class. Quant. Grav. **29**, 165007 (2012), arXiv:1204.3568 [gr-qc].

Chul-Moon Yoo, Hirotada Okawa, and Ken-ichi Nakao, Phys. Rev. Lett. **111**, 161102 (2013), arXiv:1306.1389 [gr-qc].

C.-M. Yoo and H. Okawa, Phys. Rev. D **89**, 123502 (2014), 1404.1435.

E. Bentivegna and M. Bruni, Phys. Rev. Lett. **116**, 251302 (2016), 1511.05124.

J. B. Mertens, J. T. Giblin, and G. D. Starkman, Phys. Rev. D **93**, 124059 (2016), 1511.01106.

K. Clough, E. A. Lim, B. S. DiNunno, W. Fischler, R. Flauger, and S. Paban, JCAP **1709**, 025 (2017), 1608.04408.

E. Bentivegna, M. Korzyński, I. Hinder, and D. Gerlicher, JCAP **1703**, 014 (2017), 1611.09275.

Miguel Zilhao, Vitor Cardoso, Leonardo Gualtieri, Carlos Herdeiro, Ulrich Sperhake, and Helvi Witek, Phys. Rev. **D85**, 104039 (2012), arXiv:1204.2019 [gr-qc].

Alessandra Buonanno and B.S. Sathyaprakash, in *General Relativity and Gravitation: A Centennial Perspective*, edited by A. Ashtekar, B. Berger, J. Isenberg, and M. A. H. MacCallum (Cambridge University Press, 2015) arXiv:1410.7832 [gr-qc].

Mark Hannam, Gen. Rel. Grav. **46**, 1767 (2014), arXiv:1312.3641 [gr-qc].

Thibault Damour, *Relativistic field theories. Proceedings, 2nd Stueckelberg Workshop, Pescara, Italy, September 3-8, 2007*, Int. J. Mod. Phys. **A23**, 1130–1148 (2008), arXiv:0802.4047 [gr-qc].

A. Buonanno and T. Damour, Phys. Rev. **D59**, 084006 (1999), arXiv:gr-qc/9811091 [gr-qc].

Alessandra Buonanno and Thibault Damour, Phys. Rev. **D62**, 064015 (2000), arXiv:gr-qc/0001013 [gr-qc].

Amar Maheshwari, Emil Nissimov, and Ivan Todorov, Lett. Math. Phys. **5**, 359–366 (1981), arXiv:1611.02943 [gr-qc].

E. Brezin, C. Itzykson, and Jean Zinn-Justin, Phys. Rev. **D1**, 2349–2355 (1970).

Enrico Barausse, Etienne Racine, and Alessandra Buonanno, Phys. Rev. **D80**, 104025 (2009), [Erratum: Phys. Rev.D85,069904(2012)], arXiv:0907.4745 [gr-qc].

Enrico Barausse and Alessandra Buonanno, Phys. Rev. **D81**, 084024 (2010), arXiv:0912.3517 [gr-qc].

Enrico Barausse and Alessandra Buonanno, Phys. Rev. **D84**, 104027 (2011), arXiv:1107.2904 [gr-qc].

Andrea Taracchini *et al.*, Phys. Rev. **D89**, 061502 (2014), arXiv:1311.2544 [gr-qc].

Thibault Damour, Phys. Rev. **D64**, 124013 (2001), arXiv:gr-qc/0103018 [gr-qc].

Thibault Damour, Piotr Jaranowski, and Gerhard Schaefer, Phys. Rev. **D78**, 024009 (2008), arXiv:0803.0915 [gr-qc].

Alessandro Nagar, Phys. Rev. **D84**, 084028 (2011), [Erratum: Phys. Rev.D88,no.8,089901(2013)], arXiv:1106.4349 [gr-qc].

Simone Balmelli and Philippe Jetzer, Phys. Rev. **D91**, 064011 (2015), arXiv:1502.01343 [gr-qc].

Thibault Damour and Alessandro Nagar, Phys. Rev. **D90**, 044018 (2014a), arXiv:1406.6913 [gr-qc].

Thibault Damour and Alessandro Nagar, Phys. Rev. **D76**, 064028 (2007), arXiv:0705.2519 [gr-qc].

Thibault Damour, Bala R. Iyer, and Alessandro Nagar, Phys. Rev. **D79**, 064004 (2009), arXiv:0811.2069 [gr-qc].

Thibault Damour, Bala R. Iyer, Piotr Jaranowski, and B. S. Sathyaprakash, Phys. Rev. **D67**, 064028 (2003), arXiv:gr-qc/0211041 [gr-qc].

Andrea Taracchini, Yi Pan, Alessandra Buonanno, Enrico Barausse, Michael Boyle, Tony Chu, Geoffrey Lovelace, Harald P. Pfeiffer, and Mark A. Scheel, Phys. Rev. **D86**, 024011 (2012), arXiv:1202.0790 [gr-qc].

Thibault Damour, Alessandro Nagar, and Sebastiano Bernuzzi, Phys. Rev. **D87**, 084035 (2013), arXiv:1212.4357 [gr-qc].

Richard H. Price and Jorge Pullin, Phys. Rev. Lett. **72**, 3297–3300 (1994), arXiv:gr-qc/9402039 [gr-qc].

John G. Baker, William D. Boggs, Joan Centrella, Bernard J. Kelly, Sean T. McWilliams, and James R. van Meter, Phys. Rev. **D78**, 044046 (2008), arXiv:0805.1428 [gr-qc].

Thibault Damour and Alessandro Nagar, Phys. Rev. **D90**, 024054 (2014b), arXiv:1406.0401 [gr-qc].

Yi Pan, Alessandra Buonanno, Ryuichi Fujita, Etienne Racine, and Hideyuki Tagoshi, Phys. Rev. **D83**, 064003 (2011a), [Erratum: Phys. Rev.D87,no.10,109901(2013)], arXiv:1006.0431 [gr-qc].

Stanislav Babak, Andrea Taracchini, and Alessandra Buonanno, Phys. Rev. **D95**, 024010 (2017b), arXiv:1607.05661 [gr-qc].

Alessandro Nagar *et al.*, (2018), arXiv:1806.01772 [gr-qc].

Thibault Damour and Alessandro Nagar, Phys. Rev. **D81**, 084016 (2010), arXiv:0911.5041 [gr-qc].

Donato Bini, Thibault Damour, and Guillaume Faye, Phys. Rev. **D85**, 124034 (2012), arXiv:1202.3565 [gr-qc].

Jan Steinhoff, Tanja Hinderer, Alessandra Buonanno, and Andrea Taracchini, Phys. Rev. **D94**, 104028 (2016), arXiv:1608.01907 [gr-qc].

Parameswaran Ajith *et al.*, *Gravitational wave data analysis. Proceedings: 11th Workshop, GWDAW-11, Potsdam, Germany, Dec 18-21, 2006*, Class. Quant. Grav. **24**, S689–S700 (2007), arXiv:0704.3764 [gr-qc].

P. Ajith *et al.*, Phys. Rev. **D77**, 104017 (2008), [Erratum: Phys. Rev.D79,129901(2009)], arXiv:0710.2335 [gr-qc].

P. Ajith *et al.*, Phys. Rev. Lett. **106**, 241101 (2011), arXiv:0909.2867 [gr-qc].

L. Santamaria *et al.*, Phys. Rev. **D82**, 064016 (2010), arXiv:1005.3306 [gr-qc].

Patricia Schmidt, Mark Hannam, and Sascha Husa, Phys. Rev. **D86**, 104063 (2012), arXiv:1207.3088 [gr-qc].

Patricia Schmidt, Frank Ohme, and Mark Hannam, Phys. Rev. **D91**, 024043 (2015), arXiv:1408.1810 [gr-qc].

N. V. Krishnendu, K. G. Arun, and Chandra Kant Mishra, Phys. Rev. Lett. **119**, 091101 (2017), arXiv:1701.06318 [gr-qc].

Justin Vines, Eanna E. Flanagan, and Tanja Hinderer, Phys. Rev. **D83**, 084051 (2011), arXiv:1101.1673 [gr-qc].

Thibault Damour, Alessandro Nagar, and Loic Villain, Phys. Rev. **D85**, 123007 (2012), arXiv:1203.4352 [gr-qc].

Tim Dietrich, Sebastiano Bernuzzi, and Wolfgang Tichy, Phys. Rev. **D96**, 121501 (2017), arXiv:1706.02969 [gr-qc].

Tim Dietrich *et al.*, (2018), arXiv:1804.02235 [gr-qc].

Yi Pan, Alessandra Buonanno, Michael Boyle, Luisa T. Buchman, Lawrence E. Kidder, Harald P. Pfeiffer, and Mark A. Scheel, Phys. Rev. **D84**, 124052 (2011b), arXiv:1106.1021 [gr-qc].

Roberto Cotesta, Alessandra Buonanno, Alejandro Bohé, Andrea Taracchini, Ian Hinder, and Serguei Ossokine, (2018), arXiv:1803.10701 [gr-qc].

Juan Calderon Bustillo, Alejandro Bohe, Sascha Husa, Alicia M. Sintes, Mark Hannam, and Michael Puerrer, (2015), arXiv:1501.00918 [gr-qc].

E. A. Huerta *et al.*, Phys. Rev. **D95**, 024038 (2017), arXiv:1609.05933 [gr-qc].

Ian Hinder, Lawrence E. Kidder, and Harald P. Pfeiffer, (2017), arXiv:1709.02007 [gr-qc].

Tanja Hinderer and Stanislav Babak, Phys. Rev. **D96**, 104048 (2017), arXiv:1707.08426 [gr-qc].

Michael Puerrer, Phys. Rev. **D93**, 064041 (2016), arXiv:1512.02248 [gr-qc].

Michalis Agathos, Walter Del Pozzo, Tjonnie G. F. Li, Chris Van Den Broeck, John Veitch, and Salvatore Vitale, Phys. Rev. **D89**, 082001 (2014), arXiv:1311.0420 [gr-qc].

Richard Brito, Alessandra Buonanno, and Vivien Raymond, (2018), arXiv:1805.00293 [gr-qc].

S. Klimenko, I. Yakushin, A. Mercer, and G. Mitselmakher, Classical and Quantum Gravity **25**, 114029 (2008), arXiv:0802.3232 [gr-qc].

P. J. Sutton, G. Jones, S. Chatterji, P. Kalmus, I. Leonor, S. Poprocki, J. Rollins, A. Searle, L. Stein, M. Tinto, and M. Was, New Journal of Physics **12**, 053034 (2010), arXiv:0908.3665 [gr-qc].

M. Wąs, P. J. Sutton, G. Jones, and I. Leonor, Physical Review D **86**, 022003 (2012), arXiv:1201.5599 [gr-qc].

N. J. Cornish and T. B. Littenberg, Classical and Quantum Gravity **32**, 135012 (2015), arXiv:1410.3835 [gr-qc].

Tito Dal Canton *et al.*, Phys. Rev. **D90**, 082004 (2014), arXiv:1405.6731 [gr-qc].

Samantha A. Usman *et al.*, Class. Quant. Grav. **33**, 215004 (2016), arXiv:1508.02357 [gr-qc].

K. Cannon, R. Cariou, A. Chapman, M. Crispin-Ortuzar, N. Fotopoulos, M. Frei, C. Hanna, E. Kara, D. Keppel, L. Liao, S. Privitera, A. Searle, L. Singer, and A. Weinstein, The Astrophysical Journal **748**, 136 (2012), arXiv:1107.2665 [astro-ph.IM].

S. Privitera, S. R. P. Mohapatra, P. Ajith, K. Cannon, N. Fotopoulos, M. A. Frei, C. Hanna, A. J. Weinstein, and J. T. Whelan, Physical Review D **89**, 024003 (2014), arXiv:1310.5633 [gr-qc].

J. Veitch, V. Raymond, B. Farr, W. Farr, P. Graff, S. Vitale, B. Aylott, K. Blackburn, N. Christensen, M. Coughlin, W. Del Pozzo, F. Feroz, J. Gair, C.-J. Haster, V. Kalogera, T. Littenberg, I. Mandel, R. O'Shaughnessy, M. Pitkin, C. Rodriguez, C. Röver, T. Sidery, R. Smith, M. Van Der Sluys, A. Vecchio, W. Vousden, and L. Wade, Physical Review D **91**, 042003 (2015), arXiv:1409.7215 [gr-qc].

C. Pankow, P. Brady, E. Ochsner, and R. O'Shaughnessy, Phys. Rev. **D92**, 023002 (2015), arXiv:1502.04370 [gr-qc].

Jacob Lange, Richard O'Shaughnessy, and Monica Rizzo, (2018), arXiv:1805.10457 [gr-qc].

J. Veitch and A. Vecchio, Physical Review D **81**, 062003 (2010), arXiv:0911.3820.

M. V. van der Sluys, C. Röver, A. Stroeer, V. Raymond, I. Mandel, N. Christensen, V. Kalogera, R. Meyer, and A. Vecchio, Astrophys. J. Lett. **688**, L61 (2008), arXiv:0710.1897.

B. P. Abbott *et al.* (Virgo, LIGO Scientific), (2018d), arXiv:1805.11579 [gr-qc].

D. A. Brown, J. Brink, H. Fang, J. R. Gair, C. Li, G. Lovelace, I. Mandel, and K. S. Thorne, Physical Review Letters **99**, 201102–+ (2007), gr-qc/0612060.

Jonathan R. Gair, Ilya Mandel, M. Coleman Miller, and Marta Volonteri, Gen. Rel. Grav. **43**, 485–518 (2011b), arXiv:0907.5450 [astro-ph.CO].

E. A. Huerta and J. R. Gair, Phys. Rev. D **83**, 044020–+ (2011a), arXiv:1009.1985 [gr-qc].

E. A. Huerta and J. R. Gair, Phys. Rev. D **83**, 044021–+ (2011b), arXiv:1011.0421 [gr-qc].

E. A. Huerta, J. R. Gair, and D. A. Brown, Physical Review D **85**, 064023 (2012a), arXiv:1111.3243 [gr-qc].

E. A. Huerta, P. Kumar, and D. A. Brown, Physical Review D **86**, 024024 (2012b), arXiv:1205.5562 [gr-qc].

Enrico Barausse, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **423**, 2533–2557 (2012), arXiv:1201.5888 [astro-ph.CO].

Daniel Wysocki, Davide Gerosa, Richard O'Shaughnessy, Krzysztof Belczynski, Wojciech Gladysz, Emanuele Berti, Michael Kesden, and Daniel E. Holz, Phys. Rev. **D97**, 043014 (2018a), arXiv:1709.01943 [astro-ph.HE].

Daniel Wysocki, Jacob Lange, and Richard O. 'shaughnessy, (2018b), arXiv:1805.06442 [gr-qc].

Pau Amaro-Seoane, Living Rev. Rel. **21**, 4 (2018), arXiv:1205.5240 [astro-ph.CO].

Jonathan R. Gair, Michele Vallisneri, Shane L. Larson, and John G. Baker, Living Rev. Rel. **16**, 7 (2013), arXiv:1212.5575 [gr-qc].

M. Pürrer, Classical and Quantum Gravity **31**, 195010 (2014), arXiv:1402.4146 [gr-qc].

S. E. Field, C. R. Galley, F. Herrmann, J. S. Hesthaven, E. Ochsner, and M. Tiglio, Physical Review Letters **106**, 221102 (2011), arXiv:1101.3765 [gr-qc].

S. E. Field, C. R. Galley, and E. Ochsner, Physical Review D **86**, 084046 (2012), arXiv:1205.6009 [gr-qc].

P. Canizares, S. E. Field, J. R. Gair, and M. Tiglio, Physical Review D **87**, 124005 (2013), arXiv:1304.0462 [gr-qc].

S. E. Field, C. R. Galley, J. S. Hesthaven, J. Kaye, and M. Tiglio, Physical Review X **4**, 031006 (2014), arXiv:1308.3565 [gr-qc].

P. Canizares, S. E. Field, J. Gair, V. Raymond, R. Smith, and M. Tiglio, Physical Review Letters **114**, 071104 (2015), arXiv:1404.6284 [gr-qc].

R. Smith, S. E. Field, K. Blackburn, C.-J. Haster, M. Pürrer, V. Raymond, and P. Schmidt, Physical Review D **94**, 044031 (2016), arXiv:1604.08253 [gr-qc].

P. C. Peters and J. Mathews, Physical Review **131**, 435–440 (1963).

K. A. Arnaud, S. Babak, J. G. Baker, M. J. Benacquista, N. J. Cornish, C. Cutler, L. S. Finn, S. L. Larson, T. Littenberg, E. K. Porter, M. Vallisneri, A. Vecchio, J.-Y. Vinet, and T. M. L. Data Challenge Task Force, Classical and Quantum Gravity **24**, S551–S564 (2007), gr-qc/0701170.

Stanislav Babak *et al.* (Mock LISA Data Challenge Task Force), *Proceedings, 18th International Conference on General Relativity and Gravitation (GRG18) and 7th Edoardo Amaldi Conference on Gravitational Waves (Amaldi7), Sydney, Australia, July 2007*, Class. Quant. Grav. **25**, 114037 (2008), arXiv:0711.2667 [gr-qc].

Leor Barack and Curt Cutler, Phys. Rev. **D75**, 042003 (2007), arXiv:gr-qc/0612029 [gr-qc].

Jonathan Gair and Nicolas Yunes, Phys. Rev. **D84**, 064016 (2011), arXiv:1106.6313 [gr-qc].

Jonathan R Gair and Kostas Glampedakis, Phys. Rev. **D73**, 064037 (2006), arXiv:gr-qc/0510129.

Stanislav Babak, Hua Fang, Jonathan R. Gair, Kostas Glampedakis, and Scott A. Hughes, Phys. Rev. **D75**, 024005 (2007), [Erratum: Phys. Rev.D77,04990(2008)], arXiv:gr-qc/0607007 [gr-qc].

E. A. Huerta and J. R. Gair, Physical Review D **79**, 084021–+ (2009), arXiv:0812.4208 [gr-qc].

Adam Pound and Eric Poisson, Phys. Rev. **D77**, 044013 (2008), arXiv:0708.3033 [gr-qc].

Jonathan R. Gair, Eanna E. Flanagan, Steve Drasco, Tanja Hinderer, and Stanislav Babak, Phys. Rev. **D83**, 044037 (2011c).

A. J. K. Chua and J. R. Gair, Classical and Quantum Gravity **32**, 232002 (2015), arXiv:1510.06245 [gr-qc].

Piotr T. Chrusciel, Joao Lopes Costa, and Markus Heusler, Living Rev. Rel. **15**, 7 (2012), arXiv:1205.6112 [gr-qc].

S. Alexakis, A. D. Ionescu, and S. Klainerman, Commun. Math. Phys. **299**, 89–127 (2010), arXiv:0904.0982 [gr-qc].

S. Alexakis, A.D. Ionescu, and S. Klainerman, Duke Math. J. **163**, 2603–2615 (2014), arXiv:1304.0487 [gr-qc].

Christopher S. Reynolds, Space Sci. Rev. **183**, 277–294 (2014), arXiv:1302.3260 [astro-ph.HE].

Semyon Dyatlov, Commun. Math. Phys. **306**, 119–163 (2011).

Semyon Dyatlov, Commun. Math. Phys. **335**, 1445–1485 (2015).

Mihalis Dafermos, Gustav Holzegel, and Igor Rodnianski, (2018), arXiv:1601.06467 [gr-qc].

Sergiu Klainerman and Jeremie Szeftel, (2017), arXiv:1711.07597 [gr-qc].

László B. Szabados, Living Rev. Rel. **12**, 4 (2009).

Po-Ning Chen, Mu-Tao Wang, and Shing-Tung Yau, (2018), arXiv:1804.08216 [math.DG].

Po-Ning Chen, Mu-Tao Wang, Ye-Kai Wang, and Shing-Tung Yau, (2019), arXiv:1901.06952 [gr-qc].

B. Gustafsson, H.-O. Kreiss, and J. Oliger, *Time-dependent problems and difference methods*, 2nd ed., Pure and Applied Mathematics (Hoboken) (John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2013) pp. xiv+509.

Olivier Sarbach and Manuel Tiglio, Living Rev. Rel. **15**, 9 (2012), arXiv:1203.6443 [gr-qc].

Thomas P Sotiriou, Valerio Faraoni, and Stefano Liberati, Int. J. Mod. Phys. **D17**, 399–423 (2008), arXiv:0707.2748 [gr-qc].

L. Perivolaropoulos, Phys. Rev. **D81**, 047501 (2010), arXiv:0911.3401 [gr-qc].

Thibault Damour and Gilles Esposito-Farese, Phys. Rev. **D54**, 1474–1491 (1996), arXiv:gr-qc/9602056 [gr-qc].

Clifford M. Will, Living Rev. Rel. **17**, 4 (2014), arXiv:1403.7377 [gr-qc].

Paulo C. C. Freire, Norbert Wex, Gilles Esposito-Farese, Joris P. W. Verbiest, Matthew Bailes, Bryan A. Jacoby, Michael Kramer, Ingrid H. Stairs, John Antoniadis, and Gemma H. Janssen, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **423**, 3328 (2012), arXiv:1205.1450 [astro-ph.GA].

Lijing Shao, Noah Sennett, Alessandra Buonanno, Michael Kramer, and Norbert Wex, Phys. Rev. **X7**, 041025 (2017), arXiv:1704.07561 [gr-qc].

Masaru Shibata, Keisuke Taniguchi, Hirotada Okawa, and Alessandra Buonanno, Phys. Rev. **D89**, 084005 (2014), arXiv:1310.0627 [gr-qc].

Keisuke Taniguchi, Masaru Shibata, and Alessandra Buonanno, Phys. Rev. **D91**, 024033 (2015), arXiv:1410.0738 [gr-qc].

Noah Sennett and Alessandra Buonanno, Phys. Rev. **D93**, 124004 (2016), arXiv:1603.03300 [gr-qc].

Laura Sampson, Nicolás Yunes, Neil Cornish, Marcelo Ponce, Enrico Barausse, Antoine Klein, Carlos Palenzuela, and Luis Lehner, Phys. Rev. **D90**, 124091 (2014), arXiv:1407.7038 [gr-qc].

David Anderson and Nicolás Yunes, Phys. Rev. **D96**, 064037 (2017), arXiv:1705.06351 [gr-qc].

S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **25**, 167–171 (1972a).

J. D. Bekenstein, Phys. Rev. **D51**, R6608 (1995).

Thomas P. Sotiriou and Valerio Faraoni, Phys. Rev. Lett. **108**, 081103 (2012), arXiv:1109.6324 [gr-qc].

Thomas P. Sotiriou, Class. Quant. Grav. **32**, 214002 (2015a), arXiv:1505.00248 [gr-qc].

Gregory Walter Horndeski, Int. J. Theor. Phys. **10**, 363–384 (1974).

C. Deffayet, S. Deser, and G. Esposito-Farese, Phys. Rev. **D80**, 064015 (2009), arXiv:0906.1967 [gr-qc].

Alberto Nicolis, Riccardo Rattazzi, and Enrico Trincherini, Phys. Rev. **D79**, 064036 (2009), arXiv:0811.2197 [hep-th].

Lam Hui and Alberto Nicolis, Phys. Rev. Lett. **110**, 241104 (2013), arXiv:1202.1296 [hep-th].

Thomas P. Sotiriou and Shuang-Yong Zhou, Phys. Rev. Lett. **112**, 251102 (2014a), arXiv:1312.3622 [gr-qc].

Tsutomu Kobayashi, Masahide Yamaguchi, and Jun'ichi Yokoyama, Prog. Theor. Phys. **126**, 511–529 (2011), arXiv:1105.5723 [hep-th].

Nicolas Yunes and Leo C. Stein, Phys. Rev. **D83**, 104002 (2011), arXiv:1101.2921 [gr-qc].

Thomas P. Sotiriou and Shuang-Yong Zhou, Phys. Rev. **D90**, 124063 (2014b), arXiv:1408.1698 [gr-qc].

Bruce A. Campbell, Nemanja Kaloper, and Keith A. Olive, Phys. Lett. **B285**, 199–205 (1992).

P. Kanti, N. E. Mavromatos, J. Rizos, K. Tamvakis, and E. Winstanley, Phys. Rev. **D54**, 5049–5058 (1996), arXiv:hep-th/9511071 [hep-th].

R. R. Metsaev and Arkady A. Tseytlin, Nucl. Phys. **B293**, 385–419 (1987).

Kei-ichi Maeda, Nobuyoshi Ohta, and Yukinori Sasagawa, Phys. Rev. **D80**, 104032 (2009), arXiv:0908.4151 [hep-th].

Hector O. Silva, Jeremy Sakstein, Leonardo Gualtieri, Thomas P. Sotiriou, and Emanuele Berti, Phys. Rev. Lett. **120**, 131104 (2018), arXiv:1711.02080 [gr-qc].

G. Antoniou, A. Bakopoulos, and P. Kanti, Phys. Rev. Lett. **120**, 131102 (2018a), arXiv:1711.03390 [hep-th].

Daniela D. Doneva and Stoytcho S. Yazadjiev, Phys. Rev. Lett. **120**, 131103 (2018), arXiv:1711.01187 [gr-qc].

G. Antoniou, A. Bakopoulos, and P. Kanti, Phys. Rev. **D97**, 084037 (2018b), arXiv:1711.07431 [hep-th].

Jose Luis Blázquez-Salcedo, Daniela D. Doneva, Jutta Kunz, and Stoytcho S. Yazadjiev, (2018), arXiv:1805.05755 [gr-qc].

Enrico Barausse and Kent Yagi, Phys. Rev. Lett. **115**, 211105 (2015), arXiv:1509.04539 [gr-qc].

Enrico Barausse, *Proceedings, 3rd International Symposium on Quest for the Origin of Particles and the Universe (KMI2017): Nagoya, Japan, January 5-7, 2017*, PoS **KMI2017**, 029 (2017), arXiv:1703.05699 [gr-qc].

Antoine Lehébel, Eugeny Babichev, and Christos Charmousis, JCAP **1707**, 037 (2017), arXiv:1706.04989 [gr-qc].

Kent Yagi, Leo C. Stein, and Nicolas Yunes, Phys. Rev. **D93**, 024010 (2016), arXiv:1510.02152 [gr-qc].

Lucas Lombriser and Nelson A. Lima, Phys. Lett. **B765**, 382–385 (2017), arXiv:1602.07670 [astro-ph.CO].

Lucas Lombriser and Andy Taylor, JCAP **1603**, 031 (2016), arXiv:1509.08458 [astro-ph.CO].

Miguel Zumalacárregui and Juan García-Bellido, Phys. Rev. **D89**, 064046 (2014), arXiv:1308.4685 [gr-qc].

Jérôme Gleyzes, David Langlois, Federico Piazza, and Filippo Vernizzi, Phys. Rev. Lett. **114**, 211101 (2015a), arXiv:1404.6495 [hep-th].

Jérôme Gleyzes, David Langlois, Federico Piazza, and Filippo Vernizzi, JCAP **1502**, 018 (2015b), arXiv:1408.1952 [astro-ph.CO].

David Langlois and Karim Noui, JCAP **1602**, 034 (2016), arXiv:1510.06930 [gr-qc].

Marco Crisostomi, Kazuya Koyama, and Gianmassimo Tasinato, JCAP **1604**, 044 (2016), arXiv:1602.03119 [hep-th].

Jibril Ben Achour, David Langlois, and Karim Noui, Phys. Rev. **D93**, 124005 (2016), arXiv:1602.08398 [gr-qc].

R. Jackiw and S. Y. Pi, Phys. Rev. **D68**, 104012 (2003), arXiv:gr-qc/0308071 [gr-qc].

Stephon Alexander and Nicolas Yunes, Phys. Rept. **480**, 1–55 (2009), arXiv:0907.2562 [hep-th].

Steven Weinberg, *The quantum theory of fields. Vol. 2: Modern applications* (Cambridge University Press, 2013).

Michael B. Green, J. H. Schwarz, and Edward Witten, *Superstring Theory. Vol. 2: Loop Amplitudes, Anomalies And Phenomenology* (Cambridge University Press, 1988).

Abhay Ashtekar, A. P. Balachandran, and Sang Jo, Int. J. Mod. Phys. **A4**, 1493 (1989).

Stephon H. S. Alexander and S. James Gates, Jr., JCAP **0606**, 018 (2006), arXiv:hep-th/0409014 [hep-th].

Victor Taveras and Nicolas Yunes, Phys. Rev. **D78**, 064070 (2008), arXiv:0807.2652 [gr-qc].

Gianluca Calcagni and Simone Mercuri, Phys. Rev. **D79**, 084004 (2009), arXiv:0902.0957 [gr-qc].

Jr. Gates, S.James, Sergei V. Ketov, and Nicolas Yunes, Phys. Rev. **D80**, 065003 (2009), arXiv:0906.4978 [hep-th].

Steven Weinberg, Phys. Rev. **D77**, 123541 (2008), arXiv:0804.4291 [hep-th].

Marco Crisostomi, Karim Noui, Christos Charmousis, and David Langlois, Phys. Rev. **D97**, 044034 (2018), arXiv:1710.04531 [hep-th].

Nicolas Yunes and Frans Pretorius, Phys. Rev. **D79**, 084043 (2009a), arXiv:0902.4669 [gr-qc].

Kohkichi Konno, Toyoki Matsuyama, and Satoshi Tanda, Prog. Theor. Phys. **122**, 561–568 (2009), arXiv:0902.4767 [gr-qc].

Kent Yagi, Nicolas Yunes, and Takahiro Tanaka, Phys. Rev. **D86**, 044037 (2012c), [Erratum: Phys. Rev.D89,049902(2014)], arXiv:1206.6130 [gr-qc].

Leo C. Stein, Phys. Rev. **D90**, 044061 (2014), arXiv:1407.2350 [gr-qc].

Robert McNees, Leo C. Stein, and Nicolás Yunes, Class. Quant. Grav. **33**, 235013 (2016), arXiv:1512.05453 [gr-qc].

Baoyi Chen and Leo C. Stein, Phys. Rev. **D97**, 084012 (2018), arXiv:1802.02159 [gr-qc].

Carlos F. Sopuerta and Nicolas Yunes, Phys. Rev. **D80**, 064006 (2009), arXiv:0904.4501 [gr-qc].

Paolo Pani, Vitor Cardoso, and Leonardo Gualtieri, Phys. Rev. **D83**, 104048 (2011), arXiv:1104.1183 [gr-qc].

Kent Yagi, Nicolas Yunes, and Takahiro Tanaka, Phys. Rev. Lett. **109**, 251105 (2012d), [Erratum: Phys. Rev. Lett.116,no.16,169902(2016)], arXiv:1208.5102 [gr-qc].

Priscilla Canizares, Jonathan R. Gair, and Carlos F. Sopuerta, Phys. Rev. **D86**, 044010 (2012), arXiv:1205.1253 [gr-qc].

Yacine Ali-Haimoud and Yanbei Chen, Phys. Rev. **D84**, 124033 (2011), arXiv:1110.5329 [astro-ph.HE].

Stephon Alexander, Lee Samuel Finn, and Nicolas Yunes, Phys. Rev. **D78**, 066005 (2008), arXiv:0712.2542 [gr-qc].

Nicolas Yunes and Lee Samuel Finn, *Laser Interferometer Space Antenna. Proceedings, 7th international LISA Symposium, Barcelona, Spain, June 16-20, 2008*, J. Phys. Conf. Ser. **154**, 012041 (2009), arXiv:0811.0181 [gr-qc].

Nicolas Yunes, Richard O'Shaughnessy, Benjamin J. Owen, and Stephon Alexander, Phys. Rev. **D82**, 064017 (2010), arXiv:1005.3310 [gr-qc].

Kent Yagi and Huan Yang, Phys. Rev. **D97**, 104018 (2018), arXiv:1712.00682 [gr-qc].

Tristan L. Smith, Adrienne L. Erickcek, Robert R. Caldwell, and Marc Kamionkowski, Phys. Rev. **D77**, 024015 (2008), arXiv:0708.0001 [astro-ph].

Nicolas Yunes and David N. Spergel, Phys. Rev. **D80**, 042004 (2009), arXiv:0810.5541 [gr-qc].

Yacine Ali-Haimoud, Phys. Rev. **D83**, 124050 (2011), arXiv:1105.0009 [astro-ph.HE].

V. Faraoni, *Cosmology in Scalar-Tensor Gravity* (Kluwer Academic Publishers, 2004).

Cédric Deffayet and Danièle A. Steer, Class. Quant. Grav. **30**, 214006 (2013), arXiv:1307.2450 [hep-th].

Thomas P. Sotiriou, *Proceedings of the 7th Aegean Summer School : Beyond Einstein's theory of gravity. Modifications of Einstein's Theory of Gravity at Large Distances.: Paros, Greece, September 23-28, 2013*, Lect. Notes Phys. **892**, 3–24 (2015b), arXiv:1404.2955 [gr-qc].

Ted Jacobson and David Mattingly, Phys. Rev. **D64**, 024028 (2001), arXiv:gr-qc/0007031 [gr-qc].

Benjamin Withers, *Strings, Supergravity and Gauge Theories. Proceedings, CERN Winter School, CERN, Geneva, Switzerland, February 9-13 2009*, Class. Quant. Grav. **26**, 225009 (2009), arXiv:0905.2446 [gr-qc].

Ted Jacobson, Phys. Rev. **D81**, 101502 (2010), [Erratum: Phys. Rev.D82,129901(2010)], arXiv:1001.4823 [hep-th].

Petr Horava, Phys. Rev. **D79**, 084008 (2009), arXiv:0901.3775 [hep-th].

D. Blas, O. Pujolas, and S. Sibiryakov, Phys. Rev. Lett. **104**, 181302 (2010), arXiv:0909.3525 [hep-th].

Matt Visser, Phys. Rev. **D80**, 025011 (2009a), arXiv:0902.0590 [hep-th].

Matt Visser, (2009b), arXiv:0912.4757 [hep-th].

Thomas P. Sotiriou, Matt Visser, and Silke Weinfurtner, Phys. Rev. Lett. **102**, 251601 (2009a), arXiv:0904.4464 [hep-th].

Andrei O. Barvinsky, Diego Blas, Mario Herrero-Valea, Sergey M. Sibiryakov, and Christian F. Steinwachs, Phys. Rev. **D93**, 064022 (2016), arXiv:1512.02250 [hep-th].

Thomas P. Sotiriou, Matt Visser, and Silke Weinfurtner, Phys. Rev. **D83**, 124021 (2011), arXiv:1103.3013 [hep-th].

Andrei O. Barvinsky, Diego Blas, Mario Herrero-Valea, Sergey M. Sibiryakov, and Christian F. Steinwachs, Phys. Rev. Lett. **119**, 211301 (2017), arXiv:1706.06809 [hep-th].

Thomas P. Sotiriou, Matt Visser, and Silke Weinfurtner, JHEP **10**, 033 (2009b), arXiv:0905.2798 [hep-th].

Christos Charmousis, Gustavo Niz, Antonio Padilla, and Paul M. Saffin, JHEP **08**, 070 (2009), arXiv:0905.2579 [hep-th].

D. Blas, O. Pujolas, and S. Sibiryakov, JHEP **10**, 029 (2009), arXiv:0906.3046 [hep-th].

Kazuya Koyama and Frederico Arroja, JHEP **03**, 061 (2010), arXiv:0910.1998 [hep-th].

Thomas P. Sotiriou, Phys. Rev. Lett. **120**, 041104 (2018), arXiv:1709.00940 [gr-qc].

D. Blas and S. Sibiryakov, Phys. Rev. **D84**, 124043 (2011), arXiv:1110.2195 [hep-th].

Jishnu Bhattacharyya, Andrew Coates, Mattia Colombo, and Thomas P. Sotiriou, Phys. Rev. **D93**, 064056 (2016a), arXiv:1512.04899 [gr-qc].

Jishnu Bhattacharyya, Mattia Colombo, and Thomas P. Sotiriou, Class. Quant. Grav. **33**, 235003 (2016b), arXiv:1509.01558 [gr-qc].

Enrico Barausse and Thomas P. Sotiriou, Class. Quant. Grav. **30**, 244010 (2013a), arXiv:1307.3359 [gr-qc].

Ted Jacobson, *Proceedings, Workshop on From quantum to emergent gravity: Theory and phenomenology (QG-Ph): Trieste, Italy, June 11-15, 2007*, PoS **QG-PH**, 020 (2007), arXiv:0801.1547 [gr-qc].

Thomas P. Sotiriou, *Proceedings, 14th Conference on Recent developments in gravity (NEB 14): Ioannina, Greece, June 8-11, 2010*, J. Phys. Conf. Ser. **283**, 012034 (2011), arXiv:1010.3218 [hep-th].

A. Emir Gumrukcuoglu, Mehdi Saravani, and Thomas P. Sotiriou, Phys. Rev. **D97**, 024032 (2018), arXiv:1711.08845 [gr-qc].

Jacob Oost, Shinji Mukohyama, and Anzhong Wang, Phys. Rev. **D97**, 124023 (2018), arXiv:1802.04303 [gr-qc].

Claudia de Rham, Gregory Gabadadze, and Andrew J. Tolley, Phys. Rev. Lett. **106**, 231101 (2011), arXiv:1011.1232 [hep-th].

S. F. Hassan and Rachel A. Rosen, Phys. Rev. Lett. **108**, 041101 (2012a), arXiv:1106.3344 [hep-th].

S. F. Hassan and Rachel A. Rosen, JHEP **02**, 126 (2012b), arXiv:1109.3515 [hep-th].

Angnis Schmidt-May and Mikael von Strauss, J. Phys. **A49**, 183001 (2016), arXiv:1512.00021 [hep-th].

Claudia de Rham, J. Tate Deskins, Andrew J. Tolley, and Shuang-Yong Zhou, Rev. Mod. Phys. **89**, 025004 (2017), arXiv:1606.08462 [astro-ph.CO].

Yashar Akrami, S. F. Hassan, Frank Könnig, Angnis Schmidt-May, and Adam R. Solomon, Phys. Lett. **B748**, 37–44 (2015), arXiv:1503.07521 [gr-qc].

Katsuki Aoki and Kei-ichi Maeda, Phys. Rev. **D97**, 044002 (2018), arXiv:1707.05003 [hep-th].

Eugeny Babichev, Luca Marzola, Martti Raidal, Angnis Schmidt-May, Federico Urban, Hardi Veermäe, and Mikael von Strauss, JCAP **1609**, 016 (2016), arXiv:1607.03497 [hep-th].

S. F. Hassan and Mikica Kocic, JHEP **05**, 099 (2018), arXiv:1706.07806 [hep-th].

Mikica Kocic, (2018), arXiv:1804.03659 [hep-th].

Kent Yagi, Diego Blas, Nicolás Yunes, and Enrico Barausse, Phys. Rev. Lett. **112**, 161101 (2014), arXiv:1307.6219 [gr-qc].

Saeed Mirshekari, Nicolas Yunes, and Clifford M. Will, Phys. Rev. **D85**, 024041 (2012), arXiv:1110.2720 [gr-qc].

V. Alan Kostelecký and Matthew Mewes, Phys. Lett. **B757**, 510–514 (2016), arXiv:1602.04782 [gr-qc].

Nicolas Yunes, Kent Yagi, and Frans Pretorius, Phys. Rev. **D94**, 084002 (2016), arXiv:1603.08955 [gr-qc].

Clifford M. Will, (2018), arXiv:1805.10523 [gr-qc].

K. G. Arun, Bala R. Iyer, M. S. S. Qusailah, and B. S. Sathyaprakash, Class. Quant. Grav. **23**, L37–L43 (2006a), arXiv:gr-qc/0604018 [gr-qc].

K. G. Arun, Bala R. Iyer, M. S. S. Qusailah, and B. S. Sathyaprakash, Phys. Rev. **D74**, 024006 (2006b), arXiv:gr-qc/0604067 [gr-qc].

Chandra Kant Mishra, K. G. Arun, Bala R. Iyer, and B. S. Sathyaprakash, Phys. Rev. **D82**, 064010 (2010), arXiv:1005.0304 [gr-qc].

Ingrid H. Stairs, Living Rev. Rel. **6**, 5 (2003), arXiv:astro-ph/0307536 [astro-ph].

Delphine Perrodin and Alberto Sesana, (2017), arXiv:1709.02816 [astro-ph.HE].

Nicolas Yunes and Frans Pretorius, Phys. Rev. **D80**, 122003 (2009b), arXiv:0909.3328 [gr-qc].

Puttarak Jai-akson, Auttakit Chatrabhuti, Oleg Evnin, and Luis Lehner, Phys. Rev. **D96**, 044031 (2017), arXiv:1706.06519 [gr-qc].

Eric W. Hirschmann, Luis Lehner, Steven L. Liebling, and Carlos Palenzuela, Phys. Rev. **D97**, 064032 (2018), arXiv:1706.09875 [gr-qc].

Valeria Ferrari and Leonardo Gualtieri, Gen. Rel. Grav. **40**, 945–970 (2008), arXiv:0709.0657 [gr-qc].

Emanuele Berti, Vitor Cardoso, and Andrei O. Starinets, Class. Quantum Grav. **26**, 163001 (2009), arXiv:0905.2975 [gr-qc].

R. A. Konoplya, Phys. Rev. **D68**, 024018 (2003), arXiv:gr-qc/0303052 [gr-qc].

Vitor Cardoso and Leonardo Gualtieri, Class. Quant. Grav. **33**, 174001 (2016), arXiv:1607.03133 [gr-qc].

B. Carter, Phys. Rev. Lett. **26**, 331–333 (1971).

D. Robinson, "Four decades of black holes uniqueness theorems," in *The Kerr spacetime: Rotating black holes in general relativity*, edited by David Wiltshire, Matt Visser, and Susan Scott (Cambridge University Press, 2009).

S. Gossan, J. Veitch, and B. S. Sathyaprakash, Phys. Rev. **D85**, 124056 (2012), arXiv:1111.5819 [gr-qc].

Emanuele Berti, Alberto Sesana, Enrico Barausse, Vitor Cardoso, and Krzysztof Belczynski, Phys. Rev. Lett. **117**, 101102 (2016), arXiv:1605.09286 [gr-qc].

J. Meidam, M. Agathos, C. Van Den Broeck, J. Veitch, and B. S. Sathyaprakash, Phys. Rev. **D90**, 064009 (2014), arXiv:1406.3201 [gr-qc].

C. V. Vishveshwara, Phys. Rev. D **1**, 2870–2879 (1970).

Tullio Regge and John A. Wheeler, Phys. Rev. **108**, 1063–1069 (1957).

Frank J. Zerilli, Phys. Rev. Lett. **24**, 737–738 (1970).

Subrahmanyan Chandrasekhar, *The mathematical theory of black holes* (Clarendon Press, 1998).

Paolo Pani, Vitor Cardoso, Leonardo Gualtieri, Emanuele Berti, and Akihiro Ishibashi, Phys. Rev. **D86**, 104017 (2012a), arXiv:1209.0773 [gr-qc].

Paolo Pani, *Proceedings, Spring School on Numerical Relativity and High Energy Physics (NR/HEP2)*, Int. J. Mod. Phys. **A28**, 1340018 (2013), arXiv:1305.6759 [gr-qc].

Óscar J. C. Dias, Jorge E. Santos, and Benson Way, Class. Quant. Grav. **33**, 133001 (2016), arXiv:1510.02804 [hep-th].

Enrico Barausse, Vitor Cardoso, and Paolo Pani, Phys. Rev. **D89**, 104059 (2014), arXiv:1404.7149 [gr-qc].

Valeria Ferrari and Bahram Mashhoon, Phys. Rev. **D30**, 295–304 (1984).

Vitor Cardoso, Alex S. Miranda, Emanuele Berti, Helvi Witek, and Vilson T. Zanchin, Phys. Rev. **D79**, 064016 (2009), arXiv:0812.1806 [hep-th].

Huan Yang, David A. Nichols, Fan Zhang, Aaron Zimmerman, Zhongyang Zhang, and Yanbei Chen, Phys. Rev. **D86**, 104006 (2012), arXiv:1207.4253 [gr-qc].

Jose Luis Blazquez-Salcedo, Caio F. B. Macedo, Vitor Cardoso, Valeria Ferrari, Leonardo Gualtieri, Fech Scen Khoo, Jutta Kunz, and Paolo Pani, Phys. Rev. **D94**, 104024 (2016), arXiv:1609.01286 [gr-qc].

Kostas Glampedakis, George Pappas, Hector O. Silva, and Emanuele Berti, Phys. Rev. **D96**, 064054 (2017), arXiv:1706.07658 [gr-qc].

R. A. Konoplya and Z. Stuchlík, Phys. Lett. **B771**, 597–602 (2017), arXiv:1705.05928 [gr-qc].

Enrico Barausse and Thomas P. Sotiriou, Phys. Rev. Lett. **101**, 099001 (2008), arXiv:0803.3433 [gr-qc].

Alessandra Buonanno, Gregory B. Cook, and Frans Pretorius, Phys. Rev. **D75**, 124018 (2007), arXiv:gr-qc/0610122 [gr-qc].

Emanuele Berti, Vitor Cardoso, Jose A. Gonzalez, Ulrich Sperhake, Mark Hannam, Sascha Husa, and Bernd Bruegmann, Phys. Rev. **D76**, 064034 (2007a), arXiv:gr-qc/0703053 [GR-QC].

Enrico Barausse, Alessandra Buonanno, Scott A. Hughes, Gaurav Khanna, Stephen O'Sullivan, and Yi Pan, Phys. Rev. **D85**, 024046 (2012c), arXiv:1110.3081 [gr-qc].

Vishal Baibhav, Emanuele Berti, Vitor Cardoso, and Gaurav Khanna, Phys. Rev. **D97**, 044048 (2018), arXiv:1710.02156 [gr-qc].

Emanuele Berti, Alessandra Buonanno, and Clifford M. Will, Phys. Rev. **D71**, 084025 (2005), arXiv:gr-qc/0411129 [gr-qc].

Emanuele Berti, Jaime Cardoso, Vitor Cardoso, and Marco Cavaglia, Phys. Rev. **D76**, 104044 (2007b), arXiv:0707.1202 [gr-qc].

Huan Yang, Kent Yagi, Jonathan Blackman, Luis Lehner, Vasileios Paschalidis, Frans Pretorius, and Nicolás Yunes, Phys. Rev. Lett. **118**, 161101 (2017), arXiv:1701.05808 [gr-qc].

Swetha Bhagwat, Maria Okounkova, Stefan W. Ballmer, Duncan A. Brown, Matthew Giesler, Mark A. Scheel, and Saul A. Teukolsky, Phys. Rev. **D97**, 104065 (2018), arXiv:1711.00926 [gr-qc].

Paolo Pani, Emanuele Berti, Vitor Cardoso, Yanbei Chen, and Richard Norte, Phys. Rev. **D80**, 124047 (2009), arXiv:0909.0287 [gr-qc].

Caio F. B. Macedo, Paolo Pani, Vitor Cardoso, and Luís C. B. Crispino, Phys. Rev. **D88**, 064046 (2013a), arXiv:1307.4812 [gr-qc].

Cecilia Chirenti and Luciano Rezzolla, Phys. Rev. **D94**, 084016 (2016), arXiv:1602.08759 [gr-qc].

Vitor Cardoso, Edgardo Franzin, and Paolo Pani, Phys. Rev. Lett. **116**, 171101 (2016b), [Erratum: Phys. Rev. Lett.117,no.8,089902(2016)], arXiv:1602.07309 [gr-qc].

Vitor Cardoso, Seth Hopper, Caio F. B. Macedo, Carlos Palenzuela, and Paolo Pani, Phys. Rev. **D94**, 084031 (2016c), arXiv:1608.08637 [gr-qc].

Vitor Cardoso and Paolo Pani, Nat. Astron. **1**, 586–591 (2017a), arXiv:1709.01525 [gr-qc].

Oliver J. Tattersall, Pedro G. Ferreira, and Macarena Lagos, Phys. Rev. **D97**, 044021 (2018), arXiv:1711.01992 [gr-qc].

Oliver J. Tattersall and Pedro G. Ferreira, Phys. Rev. **D97**, 104047 (2018), arXiv:1804.08950 [gr-qc].

Ram Brustein, A. J. M. Medved, and K. Yagi, Phys. Rev. **D96**, 064033 (2017a), arXiv:1704.05789 [gr-qc].

Vitor Cardoso, Isabella P. Carucci, Paolo Pani, and Thomas P. Sotiriou, Phys. Rev. Lett. **111**, 111101 (2013a), arXiv:1308.6587 [gr-qc].

Vitor Cardoso, Isabella P. Carucci, Paolo Pani, and Thomas P. Sotiriou, Phys. Rev. **D88**, 044056 (2013b), arXiv:1305.6936 [gr-qc].

Eugeny Babichev and Alessandro Fabbri, Class. Quant. Grav. **30**, 152001 (2013), arXiv:1304.5992 [gr-qc].

Richard Brito, Vitor Cardoso, and Paolo Pani, Phys. Rev. **D88**, 023514 (2013a), arXiv:1304.6725 [gr-qc].

Pedro V. P. Cunha, Emanuele Berti, and Carlos A. R. Herdeiro, Phys. Rev. Lett. **119**, 251102 (2017), arXiv:1708.04211 [gr-qc].

Nathan A. Collins and Scott A. Hughes, Phys. Rev. **D69**, 124022 (2004), arXiv:gr-qc/0402063 [gr-qc].

Sarah J. Vigeland and Scott A. Hughes, Phys. Rev. **D81**, 024030 (2010), arXiv:0911.1756 [gr-qc].

Sarah J. Vigeland, Phys. Rev. **D82**, 104041 (2010), arXiv:1008.1278 [gr-qc].

E. T. Newman and A. I. Janis, J. Math. Phys. **6**, 915–917 (1965).

James B. Hartle and Kip S. Thorne, Astrophys. J. **153**, 807 (1968).

Kostas Glampedakis and Stanislav Babak, Class. Quant. Grav. **23**, 4167–4188 (2006), arXiv:gr-qc/0510057 [gr-qc].

Sarah Vigeland, Nicolas Yunes, and Leo Stein, Phys. Rev. **D83**, 104027 (2011), arXiv:1102.3706 [gr-qc].

Tim Johannsen, Phys. Rev. **D88**, 044002 (2013a), arXiv:1501.02809 [gr-qc].

Tim Johannsen and Dimitrios Psaltis, Phys. Rev. **D83**, 124015 (2011), arXiv:1105.3191 [gr-qc].

Vitor Cardoso, Paolo Pani, and Joao Rico, Phys. Rev. **D89**, 064007 (2014a), arXiv:1401.0528 [gr-qc].

Luciano Rezzolla and Alexander Zhidenko, Phys. Rev. **D90**, 084009 (2014), arXiv:1407.3086 [gr-qc].

Roman Konoplya, Luciano Rezzolla, and Alexander Zhidenko, Phys. Rev. **D93**, 064015 (2016), arXiv:1602.02378 [gr-qc].

Nan Lin, Naoki Tsukamoto, M. Ghasemi-Nodehi, and Cosimo Bambi, Eur. Phys. J. **C75**, 599 (2015), arXiv:1512.00724 [gr-qc].

M. Ghasemi-Nodehi and Cosimo Bambi, Eur. Phys. J. **C76**, 290 (2016), arXiv:1604.07032 [gr-qc].

Tim Johannsen, Phys. Rev. **D87**, 124017 (2013b), arXiv:1304.7786 [gr-qc].

Kent Yagi and Leo C. Stein, Class. Quant. Grav. **33**, 054001 (2016), arXiv:1602.02413 [gr-qc].

Christopher J. Moore, Alvin J. K. Chua, and Jonathan R. Gair, Class. Quant. Grav. **34**, 195009 (2017), arXiv:1707.00712 [gr-qc].

Y. Fourès-Bruhat, Acta Mathematica, Volume 88, Issue 1, pp 141-225 **88** (1952), 10.1007/BF02392131.

Giuseppe Papallo, Phys. Rev. **D96**, 124036 (2017), arXiv:1710.10155 [gr-qc].

W. Israel, Annals Phys. **100**, 310–331 (1976).

W. Israel and J. M. Stewart, Physics Letters A **58**, 213–215 (1976).

W. Israel and J. M. Stewart, Annals Phys. **118**, 341–372 (1979).

J. Cayuso, N. Ortiz, and L. Lehner, "Phys. Rev. D" **96**, 084043 (2017), arXiv:1706.07421 [gr-qc].

L. Bel and H. Sirousse Zia, Phys. Rev. **D32**, 3128–3135 (1985).

Jonathan Z. Simon, Phys. Rev. **D41**, 3720 (1990).

Thomas P. Sotiriou, Phys. Rev. **D79**, 044035 (2009), arXiv:0811.1799 [gr-qc].

Robert Benkel, Thomas P. Sotiriou, and Helvi Witek, Phys. Rev. **D94**, 121503 (2016), arXiv:1612.08184 [gr-qc].

Robert Benkel, Thomas P. Sotiriou, and Helvi Witek, Class. Quant. Grav. **34**, 064001 (2017), arXiv:1610.09168 [gr-qc].

Thomas P. Sotiriou and Valerio Faraoni, Rev. Mod. Phys. **82**, 451–497 (2010), arXiv:0805.1726 [gr-qc].

Nicolas Lanahan-Tremblay and Valerio Faraoni, Class. Quant. Grav. **24**, 5667–5680 (2007), arXiv:0709.4414 [gr-qc].

Laura Sagunski, Jun Zhang, Matthew C. Johnson, Luis Lehner, Mairi Sakellariadou, Steven L. Liebling, Carlos Palenzuela, and David Neilsen, Phys. Rev. **D97**, 064016 (2018), arXiv:1709.06634 [gr-qc].

Karl Schwarzschild, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1916**, 189–196 (1916), arXiv:physics/9905030 [physics].

Albert Einstein, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1915**, 844–847 (1915).

Roy P. Kerr, Phys. Rev. Lett. **11**, 237–238 (1963).

Roy P. Kerr, in *Kerr Fest: Black Holes in Astrophysics, General Relativity and Quantum Gravity Christchurch, New Zealand, August 26-28, 2004* (2007) arXiv:0706.1109 [gr-qc].

J. A. Wheeler and K. Ford, *Geons, black holes, and quantum foam: A life in physics* (W. W. Norton & Company, 1998).

Werner Israel, Phys. Rev. **164**, 1776–1779 (1967).

D. C. Robinson, Phys. Rev. Lett. **34**, 905–906 (1975).

B. Carter, in *Recent developments in theoretical and experimental general relativity, gravitation, and relativistic field theories. Proceedings, 8th Marcel Grossmann meeting, MG8, Jerusalem, Israel, June 22-27, 1997. Pts. A, B* (1997) pp. 136–155, arXiv:gr-qc/9712038 [gr-qc].

S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **25**, 152–166 (1972b).

R. O. Hansen, J. Math. Phys. **15**, 46–52 (1974).

Remo Ruffini and John A. Wheeler, Phys. Today **24**, 30 (1971).

Ramesh Narayan and Jeffrey E. McClintock, (2013), arXiv:1312.6698 [astro-ph.HE].

E. L. Schucking, Phys. Today **42**, 46–52 (1989).

Charles W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1973).

S. Chandrasekhar, *Truth and Beauty* (University Of Chicago Press, Chicago, 1987).

Jacob D. Bekenstein, in *Physics. Proceedings, 2nd International A.D. Sakharov Conference, Moscow, Russia, May 20-24, 1996* (1996) pp. 216–219, arXiv:gr-qc/9605059 [gr-qc].

Carlos A. R. Herdeiro and Eugen Radu, *Proceedings, 7th Black Holes Workshop 2014: Aveiro, Portugal, December 18-19, 2014*, Int. J. Mod. Phys. **D24**, 1542014 (2015a), arXiv:1504.08209 [gr-qc].

Mikhail S. Volkov, in *Proceedings, 14th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics, and Relativistic Field Theories (MG14) (In 4 Volumes): Rome, Italy, July 12-18, 2015*, Vol. 2 (2017) pp. 1779–1798, arXiv:1601.08230 [gr-qc].

J. E. Chase, Commun. Math. Phys. **19**, 276–288 (1970).

R. Penney, Phys. Rev. **174**, 1578–1579 (1968).

Jacob D. Bekenstein, Phys. Rev. **D5**, 1239–1246 (1972a).

J. D. Bekenstein, Phys. Rev. **D5**, 2403–2412 (1972b).

J. D. Bekenstein, Phys. Rev. Lett. **28**, 452–455 (1972c).

Piotr Bizon, Acta Phys. Polon. **B25**, 877–898 (1994), arXiv:gr-qc/9402016 [gr-qc].

Mikhail S. Volkov and Dmitri V. Gal'tsov, Phys. Rept. **319**, 1–83 (1999), arXiv:hep-th/9810070 [hep-th].

M. S. Volkov and D. V. Galtsov, JETP Lett. **50**, 346–350 (1989), [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.50,312(1989)].

M. S. Volkov and D. V. Galtsov, Sov. J. Nucl. Phys. **51**, 747–753 (1990), [Yad. Fiz.51,1171(1990)].

H. P. Künzle and A. K. M. Masood-ul-Alam, Journal of Mathematical Physics **31**, 928–935 (1990).

P. Bizon, Phys. Rev. Lett. **64**, 2844–2847 (1990).

Takashi Torii, Kengo Maeda, and Makoto Narita, Phys. Rev. **D64**, 044007 (2001).

Ted Jacobson, Phys. Rev. Lett. **83**, 2699–2702 (1999), arXiv:astro-ph/9905303 [astro-ph].

M. W. Horbatsch and C. P. Burgess, JCAP **1205**, 010 (2012), arXiv:1111.4009 [gr-qc].

Ivica Smolić, Phys. Rev. **D95**, 024016 (2017), arXiv:1609.04013 [gr-qc].

Carlos Herdeiro and Eugen Radu, Class. Quant. Grav. **32**, 144001 (2015b), arXiv:1501.04319 [gr-qc].

Burkhard Kleihaus, Jutta Kunz, and Stoytcho Yazadjiev, Phys. Lett. **B744**, 406–412 (2015), arXiv:1503.01672 [gr-qc].

Carlos A. R. Herdeiro, Eugen Radu, and Helgi Rúnarsson, Phys. Rev. **D92**, 084059 (2015), arXiv:1509.02923 [gr-qc].

Asimina Arvanitaki, Savas Dimopoulos, Sergei Dubovsky, Nemanja Kaloper, and John March-Russell, Phys. Rev. **D81**, 123530 (2010), arXiv:0905.4720 [hep-th].

Carlos A. R. Herdeiro and Eugen Radu, Phys. Rev. Lett. **119**, 261101 (2017), arXiv:1706.06597 [gr-qc].

Carlos Herdeiro and Eugen Radu, Phys. Rev. **D89**, 124018 (2014b), arXiv:1406.1225 [gr-qc].

Bogdan Ganchev and Jorge E. Santos, Phys. Rev. Lett. **120**, 171101 (2018), arXiv:1711.08464 [gr-qc].

Eugeny Babichev and Christos Charmousis, JHEP **08**, 106 (2014), arXiv:1312.3204 [gr-qc].

Eugeny Babichev, Christos Charmousis, and Antoine Lehébel, JCAP **1704**, 027 (2017a), arXiv:1702.01938 [gr-qc].

Hiromu Ogawa, Tsutomu Kobayashi, and Teruaki Suyama, Phys. Rev. **D93**, 064078 (2016), arXiv:1510.07400 [gr-qc].

Eugeny Babichev, Christos Charmousis, Gilles Esposito-Farèse, and Antoine Lehébel, Phys. Rev. Lett. **120**, 241101 (2018a), arXiv:1712.04398 [gr-qc].

Eugeny Babichev, Christos Charmousis, Gilles Esposito-Farese, and Antoine Lehebel, (2018b), arXiv:1803.11444 [gr-qc].

Lavinia Heisenberg, J. Cosm. Astropart. **1405**, 015 (2014), arXiv:1402.7026 [hep-th].

Jose Beltran Jimenez and Lavinia Heisenberg, Phys. Lett. **B757**, 405–411 (2016), arXiv:1602.03410 [hep-th].

Javier Chagoya, Gustavo Niz, and Gianmassimo Tasinato, Class. Quant. Grav. **33**, 175007 (2016), arXiv:1602.08697 [hep-th].

Masato Minamitsuji, Phys. Rev. **D94**, 084039 (2016), arXiv:1607.06278 [gr-qc].

Lavinia Heisenberg, Ryotaro Kase, Masato Minamitsuji, and Shinji Tsujikawa, Phys. Rev. **D96**, 084049 (2017a), arXiv:1705.09662 [gr-qc].

Lavinia Heisenberg, Ryotaro Kase, Masato Minamitsuji, and Shinji Tsujikawa, JCAP **1708**, 024 (2017b), arXiv:1706.05115 [gr-qc].

Zhong-Ying Fan, JHEP **09**, 039 (2016), arXiv:1606.00684 [hep-th].

Adolfo Cisterna, Mokhtar Hassaine, Julio Oliva, and Massimiliano Rinaldi, Phys. Rev. **D94**, 104039 (2016), arXiv:1609.03430 [gr-qc].

Eugeny Babichev, Christos Charmousis, and Mokhtar Hassaine, JHEP **05**, 114 (2017b), arXiv:1703.07676 [gr-qc].

Lavinia Heisenberg, (2018), arXiv:1801.01523 [gr-qc].

Lavinia Heisenberg and Shinji Tsujikawa, Phys. Lett. **B780**, 638–646 (2018), arXiv:1802.07035 [gr-qc].

Lavinia Heisenberg, Ryotaro Kase, and Shinji Tsujikawa, (2018), arXiv:1804.00535 [gr-qc].

Mikhail S. Volkov, Phys. Rev. **D85**, 124043 (2012), arXiv:1202.6682 [hep-th].

Mikhail S. Volkov, Class. Quant. Grav. **30**, 184009 (2013), arXiv:1304.0238 [hep-th].

Richard Brito, Vitor Cardoso, and Paolo Pani, Phys. Rev. **D88**, 064006 (2013b), arXiv:1309.0818 [gr-qc].

Mikhail S. Volkov, *Proceedings of the 7th Aegean Summer School : Beyond Einstein's theory of gravity. Modifications of Einstein's Theory of Gravity at Large Distances.: Paros, Greece, September 23-28, 2013*, Lect. Notes Phys. **892**, 161–180 (2015), arXiv:1405.1742 [hep-th].

Eugeny Babichev and Richard Brito, Class. Quant. Grav. **32**, 154001 (2015), arXiv:1503.07529 [gr-qc].

Francesco Torsello, Mikica Kocic, and Edvard Mortsell, Phys. Rev. **D96**, 064003 (2017), arXiv:1703.07787 [gr-qc].

C. Deffayet and Ted Jacobson, Class. Quant. Grav. **29**, 065009 (2012), arXiv:1107.4978 [gr-qc].

Eugeny Babichev and Alessandro Fabbri, Phys. Rev. **D89**, 081502 (2014), arXiv:1401.6871 [gr-qc].

Rachel A Rosen, JHEP **10**, 206 (2017), arXiv:1702.06543 [hep-th].

Christopher Eling and Ted Jacobson, Class. Quant. Grav. **23**, 5643–5660 (2006), [Erratum: Class. Quant. Grav.27,049802(2010)], arXiv:gr-qc/0604088 [gr-qc].

Enrico Barausse, Ted Jacobson, and Thomas P. Sotiriou, Phys. Rev. **D83**, 124043 (2011), arXiv:1104.2889 [gr-qc].

Enrico Barausse and Thomas P. Sotiriou, Phys. Rev. **D87**, 087504 (2013b), arXiv:1212.1334 [gr-qc].

Thomas P. Sotiriou, Ian Vega, and Daniele Vernieri, Phys. Rev. **D90**, 044046 (2014), arXiv:1405.3715 [gr-qc].

Enrico Barausse, Thomas P. Sotiriou, and Ian Vega, Phys. Rev. **D93**, 044044 (2016), arXiv:1512.05894 [gr-qc].

Marek A. Abramowicz, Wlodek Kluzniak, and Jean-Pierre Lasota, Astron. Astrophys. **396**, L31–L34 (2002), arXiv:astro-ph/0207270 [astro-ph].

Vitor Cardoso and Paolo Pani, Nature Astronomy **1**, 586 (2017b), arXiv:1707.03021 [gr-qc].

Pawel O. Mazur and Emil Mottola, Proc. Nat. Acad. Sci. **101**, 9545–9550 (2004), arXiv:gr-qc/0407075 [gr-qc].

Samir D. Mathur, Fortsch. Phys. **53**, 793–827 (2005), arXiv:hep-th/0502050 [hep-th].

Samir D. Mathur, Adv. Sci. Lett. **2**, 133–150 (2009), arXiv:0810.4525 [hep-th].

Carlos Barceló, Raúl Carballo-Rubio, and Luis J. Garay, Universe **2**, 7 (2016), arXiv:1510.04957 [gr-qc].

U. H. Danielsson, G. Dibitetto, and S. Giri, JHEP **10**, 171 (2017), arXiv:1705.10172 [hep-th].

Ulf Danielsson and Suvendu Giri, JHEP **07**, 070 (2018), arXiv:1712.00511 [hep-th].

Clement Berthiere, Debajyoti Sarkar, and Sergey N. Solodukhin, (2017), arXiv:1712.09914 [hep-th].

Steven B. Giddings, Phys. Rev. **D88**, 024018 (2013), arXiv:1302.2613 [hep-th].

Steven B. Giddings, Phys. Lett. **B738**, 92–96 (2014), arXiv:1401.5804 [hep-th].

Steven B. Giddings, JHEP **12**, 047 (2017), arXiv:1701.08765 [hep-th].

David A. Feinblum and William A. McKinley, Phys. Rev. **168**, 1445–1450 (1968).

R. Ruffini and S. Bonazzola, Phys. Rev. **187**, 1767–1783 (1969).

S. L. Liebling and C. Palenzuela, Living Reviews in Relativity **20**, 5 (2017).

Pawel O. Mazur and Emil Mottola, (2001), arXiv:gr-qc/0109035 [gr-qc].

Celine Cattoen, Tristan Faber, and Matt Visser, Class. Quant. Grav. **22**, 4189–4202 (2005), arXiv:gr-qc/0505137 [gr-qc].

Cecilia B. M. H. Chirenti and Luciano Rezzolla, Class. Quant. Grav. **24**, 4191–4206 (2007), arXiv:0706.1513 [gr-qc].

Emil Mottola and Ruslan Vaulin, Phys. Rev. **D74**, 064004 (2006), arXiv:gr-qc/0604051 [gr-qc].

Carlos Barceló, Stefano Liberati, Sebastiano Sonego, and Matt Visser, Sci. Am. **301**, 38–45 (2009).

Eric G. Gimon and Petr Horava, Phys. Lett. **B672**, 299–302 (2009), arXiv:0706.2873 [hep-th].

Ram Brustein and A. J. M. Medved, Fortsch. Phys. **65**, 0114 (2017), arXiv:1602.07706 [hep-th].

Ram Brustein, A. J. M. Medved, and K. Yagi, Phys. Rev. **D96**, 124021 (2017b), arXiv:1701.07444 [gr-qc].

Bob Holdom and Jing Ren, Phys. Rev. **D95**, 084034 (2017), arXiv:1612.04889 [gr-qc].

John L. Friedman, Commun. Math. Phys. **62**, 247–278 (1978).

N. Comins and B. F. Schutz, Proceedings of the Royal Society of London Series A **364**, 211–226 (1978).

S. Yoshida and Y. Eriguchi, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **282**, 580–586 (1996).

K. D. Kokkotas, J. Ruoff, and N. Andersson, Physical Review D **70**, 043003 (2004), astro-ph/0212429.

Georgios Moschidis, Commun. Math. Phys. **358**, 437–520 (2018), arXiv:1608.02035 [math.AP].

Vitor Cardoso, Paolo Pani, Mariano Cadoni, and Marco Cavaglia, Phys. Rev. **D77**, 124044 (2008), arXiv:0709.0532 [gr-qc].

Cecilia B. M. H. Chirenti and Luciano Rezzolla, Phys. Rev. **D78**, 084011 (2008), arXiv:0808.4080 [gr-qc].

Vitor Cardoso, Luís C. B. Crispino, Caio F. B. Macedo, Hirotada Okawa, and Paolo Pani, Phys. Rev. **D90**, 044069 (2014b), arXiv:1406.5510 [gr-qc].

Elisa Maggio, Paolo Pani, and Valeria Ferrari, Phys. Rev. **D96**, 104047 (2017), arXiv:1703.03696 [gr-qc].

J. M. Bardeen, in *Black Holes (Les Astres Occlus)*, edited by C. Dewitt and B. S. Dewitt (1973) pp. 215–239.

H. Falcke, F. Melia, and E. Agol, The Astrophysical Journal **528**, L13–L16 (2000), astro-ph/9912263.

Sheperd Doeleman *et al.*, (2009), arXiv:0906.3899 [astro-ph.CO].

Pedro V. P. Cunha and Carlos A. R. Herdeiro, Gen. Rel. Grav. **50**, 42 (2018), arXiv:1801.00860 [gr-qc].

A. Grenzebach, V. Perlick, and C. Lämmerzahl, Physical Review D **89**, 124004 (2014), arXiv:1403.5234 [gr-qc].

Masoumeh Ghasemi-Nodehi, Zilong Li, and Cosimo Bambi, Eur. Phys. J. **C75**, 315 (2015), arXiv:1506.02627 [gr-qc].

M. Wang, S. Chen, and J. Jing, JCAP **10**, 051 (2017), arXiv:1707.09451 [gr-qc].

L. Amarilla and E. F. Eiroa, Physical Review D **85**, 064019 (2012), arXiv:1112.6349 [gr-qc].

L. Amarilla and E. F. Eiroa, Physical Review D **87**, 044057 (2013), arXiv:1301.0532 [gr-qc].

S.-W. Wei and Y.-X. Liu, JCAP **11**, 063 (2013), arXiv:1311.4251 [gr-qc].

F. H. Vincent, Classical and Quantum Gravity **31**, 025010 (2014), arXiv:1311.3251 [astro-ph.HE].

V. K. Tinchev and S. S. Yazadjiev, International Journal of Modern Physics D **23**, 1450060 (2014), arXiv:1311.1353 [gr-qc].

J. W. Moffat, European Physical Journal C **75**, 130 (2015), arXiv:1502.01677 [gr-qc].

J. Schee and Z. Stuchlík, European Physical Journal C **76**, 643 (2016), arXiv:1606.09037 [astro-ph.HE].

P. V. P. Cunha, C. A. R. Herdeiro, B. Kleihaus, J. Kunz, and E. Radu, Physics Letters B **768**, 373–379 (2017), arXiv:1701.00079 [gr-qc].

Kenta Hioki and Kei-ichi Maeda, Phys. Rev. D **80**, 024042 (2009).

P. G. Nedkova, V. K. Tinchev, and S. S. Yazadjiev, Physical Review D **88**, 124019 (2013), arXiv:1307.7647 [gr-qc].

P. V. P. Cunha, C. A. R. Herdeiro, E. Radu, and H. F. Rúnarsson, Physical Review Letters **115**, 211102 (2015), arXiv:1509.00021 [gr-qc].

F. H. Vincent, Z. Meliani, P. Grandclément, E. Gourgoulhon, and O. Straub, Classical and Quantum Gravity **33**, 105015 (2016), arXiv:1510.04170 [gr-qc].

D. Psaltis, F. Özel, C.-K. Chan, and D. P. Marrone, The Astrophysical Journal **814**, 115 (2015), arXiv:1411.1454 [astro-ph.HE].

Yosuke Mizuno, Ziri Younsi, Christian M. Fromm, Oliver Porth, Mariafelicia De Laurentis, Hector Olivares, Heino Falcke, Michael Kramer, and Luciano Rezzolla, (2018), 10.1038/s41550-018-0449-5, arXiv:1804.05812 [astro-ph.GA].

C. S. Reynolds and M. A. Nowak, "Physics Reports" **377**, 389–466 (2003), astro-ph/0212065.

J. E. McClintock, R. Narayan, S. W. Davis, L. Gou, A. Kulkarni, J. A. Orosz, R. F. Penna, R. A. Remillard, and J. F. Steiner, Classical and Quantum Gravity **28**, 114009 (2011), arXiv:1101.0811 [astro-ph.HE].

Cosimo Bambi, Rev. Mod. Phys. **89**, 025001 (2017), arXiv:1509.03884 [gr-qc].

T. Johannsen and D. Psaltis, The Astrophysical Journal **773**, 57 (2013), arXiv:1202.6069 [astro-ph.HE].

C. J. Moore and J. R. Gair, Physical Review D **92**, 024039 (2015), arXiv:1507.02998 [gr-qc].

Y. Ni, J. Jiang, and C. Bambi, JCAP **9**, 014 (2016a), arXiv:1607.04893 [gr-qc].

T. Harko, Z. Kovács, and F. S. N. Lobo, Classical and Quantum Gravity **26**, 215006 (2009a), arXiv:0905.1355 [gr-qc].

T. Harko, Z. Kovács, and F. S. N. Lobo, Physical Review D **80**, 044021 (2009b), arXiv:0907.1449 [gr-qc].

J. Schee and Z. Stuchlík, General Relativity and Gravitation **41**, 1795–1818 (2009), arXiv:0812.3017.

Z. Cao, A. Cárdenas-Avendaño, M. Zhou, C. Bambi, C. A. R. Herdeiro, and E. Radu, JCAP **10**, 003 (2016), arXiv:1609.00901 [gr-qc].

Y. Ni, M. Zhou, A. Cárdenas-Avendaño, C. Bambi, C. A. R. Herdeiro, and E. Radu, JCAP **7**, 049 (2016b), arXiv:1606.04654 [gr-qc].

R. A. Remillard and J. E. McClintock, "Ann. Rev. Astron. Astrophys" **44**, 49–92 (2006), astro-ph/0606352.

T. Johannsen and D. Psaltis, The Astrophysical Journal **726**, 11 (2011), arXiv:1010.1000 [astro-ph.HE].

C. Bambi and S. Nampalliwar, EPL (Europhysics Letters) **116**, 30006 (2016), arXiv:1604.02643 [gr-qc].

A. Maselli, L. Gualtieri, P. Pani, L. Stella, and V. Ferrari, The Astrophysical Journal **801**, 115 (2015), arXiv:1412.3473 [astro-ph.HE].

S. Chen, M. Wang, and J. Jing, Classical and Quantum Gravity **33**, 195002 (2016), arXiv:1604.07106 [gr-qc].

N. Franchini, P. Pani, A. Maselli, L. Gualtieri, C. A. R. Herdeiro, E. Radu, and V. Ferrari, Physical Review D **95**, 124025 (2017), arXiv:1612.00038 [astro-ph.HE].

J. H. Taylor, Jr., Reviews of Modern Physics **66**, 711–719 (1994).

M. Kramer *et al.*, Science **314**, 97–102 (2006), arXiv:astro-ph/0609417 [astro-ph].

Michael Kramer, Astrophys. J. **509**, 856 (1998), arXiv:astro-ph/9808127 [astro-ph].

Rene P. Breton, Victoria M. Kaspi, Michael Kramer, Maura A. McLaughlin, Maxim Lyutikov, Scott M. Ransom, Ingrid H. Stairs, Robert D. Ferdman, Fernando Camilo, and Andrea Possenti, Science **321**, 104–107 (2008), arXiv:0807.2644 [astro-ph].

N. Wex and S. Kopeikin, Astrophys. J. **514**, 388 (1999), arXiv:astro-ph/9811052 [astro-ph].

R. S. Wharton, S. Chatterjee, J. M. Cordes, J. S. Deneva, and T. J. W. Lazio, Astrophys. J. **753**, 108 (2012), arXiv:1111.4216 [astro-ph.HE].

K. Liu, N. Wex, M. Kramer, J. M. Cordes, and T. J. W. Lazio, Astrophys. J. **747**, 1 (2012), arXiv:1112.2151 [astro-ph.HE].

K. Liu, R. P. Eatough, N. Wex, and M. Kramer, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **445**, 3115–3132 (2014), arXiv:1409.3882 [astro-ph.GA].

Fupeng Zhang and Prasenjit Saha, Astrophys. J. **849**, 33 (2017), arXiv:1709.08341 [astro-ph.GA].

Dimitrios Psaltis, Norbert Wex, and Michael Kramer, Astrophys. J. **818**, 121 (2016), arXiv:1510.00394 [astro-ph.HE].

John H. Simonetti, Michael Kavic, Djordje Minic, Umair Surani, and Vipin Vejayan, Astrophys. J. **737**, L28 (2011), arXiv:1010.5245 [astro-ph.HE].

John Estes, Michael Kavic, Matthew Lippert, and John H. Simonetti, Astrophys. J. **837**, 87 (2017), arXiv:1607.00018 [hep-th].

A. D. Cameron *et al.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **475**, L57–L61 (2018), arXiv:1711.07697 [astro-ph.HE].

J. W. T. Hessels, A. Possenti, M. Bailes, C. G. Bassa, P. C. C. Freire, D. R. Lorimer, R. Lynch, S. M. Ransom, and I. H. Stairs, *Proceedings, Advancing Astrophysics with the Square Kilometre Array (AASKA14): Giardini Naxos, Italy, June 9-13, 2014*, PoS **AASKA14**, 047 (2015), arXiv:1501.00086 [astro-ph.HE].

R. P. Eatough *et al.*, *Proceedings, Advancing Astrophysics with the Square Kilometre Array (AASKA14): Giardini Naxos, Italy, June 9-13, 2014*, PoS **AASKA14**, 045 (2015), arXiv:1501.00281 [astro-ph.IM].

R. P. Eatough *et al.*, Nature **501**, 391–394 (2013), arXiv:1308.3147 [astro-ph.GA].

J. Dexter, A. Deller, G. C. Bower, P. Demorest, M. Kramer, B. W. Stappers, A. G. Lyne, M. Kerr, L. G. Spitler, D. Psaltis, M. Johnson, and R. Narayan, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **471**, 3563–3576 (2017), arXiv:1707.03842.

C. Goddi *et al.*, *Proceedings, 14th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics, and Relativistic Field Theories (MG14) (In 4 Volumes): Rome, Italy, July 12-18, 2015*, Int. J. Mod. Phys. **D26**, 1730001 (2016), arXiv:1606.08879 [astro-ph.HE].

B. Kızıltan, H. Baumgardt, and A. Loeb, Nature **542**, 203–205 (2017), arXiv:1702.02149.

P. C. C. Freire *et al.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **471**, 857–876 (2017), arXiv:1706.04908 [astro-ph.HE].

B. B. P. Perera, B. W. Stappers, A. G. Lyne, C. G. Bassa, I. Cognard, L. Guillemot, M. Kramer, G. Theureau, and G. Desvignes, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **468**, 2114–2127 (2017), arXiv:1705.01612 [astro-ph.HE].

B. B. P. Perera, B. W. Stappers, A. G. Lyne, C. G. Bassa, I. Cognard, L. Guillemot, M. Kramer, G. Theureau, and G. Desvignes, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **471**, 1258–1258 (2017).

Brian J. Prager, Scott M. Ransom, Paulo C. C. Freire, Jason W. T. Hessels, Ingrid H. Stairs, Phil Arras, and Mario Cadelano, Astrophys. J. **845**, 148 (2017), arXiv:1612.04395 [astro-ph.SR].

S. Chandrasekhar and V. Ferrari, Proc. Roy. Soc. Lond. **A434**, 449–457 (1991).

Subrahmanyan Chandrasekhar and V. Ferrari, Proc. Roy. Soc. Lond. **A437**, 133–149 (1992).

Miguel R. Correia and Vitor Cardoso, Phys. Rev. **D97**, 084030 (2018), arXiv:1802.07735 [gr-qc].

Rodrigo Vicente, Vitor Cardoso, and Jorge C. Lopes, Phys. Rev. **D97**, 084032 (2018), arXiv:1803.08060 [gr-qc].

Jahed Abedi, Hannah Dykaar, and Niayesh Afshordi, Phys. Rev. **D96**, 082004 (2017a), arXiv:1612.00266 [gr-qc].

Paolo Pani and Valeria Ferrari, (2018), arXiv:1804.01444 [gr-qc].

Paolo Pani, Phys. Rev. **D92**, 124030 (2015a), arXiv:1506.06050 [gr-qc].

Nami Uchikata, Shijun Yoshida, and Paolo Pani, Phys. Rev. **D94**, 064015 (2016), arXiv:1607.03593 [gr-qc].

Kent Yagi and Nicolás Yunes, Phys. Rev. **D91**, 123008 (2015), arXiv:1503.02726 [gr-qc].

Kent Yagi and Nicolas Yunes, Science **341**, 365–368 (2013), arXiv:1302.4499 [gr-qc].

Kent Yagi and Nicolás Yunes, Phys. Rept. **681**, 1–72 (2017), arXiv:1608.02582 [gr-qc].

Kashif Alvi, Phys. Rev. **D64**, 104020 (2001), arXiv:gr-qc/0107080 [gr-qc].

Scott A. Hughes, Phys. Rev. **D64**, 064004 (2001), [Erratum: Phys. Rev.D88,no.10,109902(2013)], arXiv:gr-qc/0104041 [gr-qc].

Stephanne Taylor and Eric Poisson, Phys. Rev. **D78**, 084016 (2008), arXiv:0806.3052 [gr-qc].

Eric Poisson, Phys. Rev. **D80**, 064029 (2009), arXiv:0907.0874 [gr-qc].

Katerina Chatziioannou, Eric Poisson, and Nicolas Yunes, Phys. Rev. **D87**, 044022 (2013), arXiv:1211.1686 [gr-qc].

Vitor Cardoso and Paolo Pani, Class. Quant. Grav. **30**, 045011 (2013), arXiv:1205.3184 [gr-qc].

Andrea Maselli, Paolo Pani, Vitor Cardoso, Tiziano Abdelsalhin, Leonardo Gualtieri, and Valeria Ferrari, Phys. Rev. Lett. **120**, 081101 (2018), arXiv:1703.10612 [gr-qc].

Taylor Binnington and Eric Poisson, Phys. Rev. **D80**, 084018 (2009), arXiv:0906.1366 [gr-qc].

Thibault Damour and Alessandro Nagar, Phys. Rev. **D80**, 084035 (2009), arXiv:0906.0096 [gr-qc].

Hua Fang and Geoffrey Lovelace, Phys. Rev. **D72**, 124016 (2005), arXiv:gr-qc/0505156 [gr-qc].

Norman Gürlebeck, Phys. Rev. Lett. **114**, 151102 (2015), arXiv:1503.03240 [gr-qc].

Eric Poisson, Phys. Rev. **D91**, 044004 (2015), arXiv:1411.4711 [gr-qc].

Paolo Pani, Leonardo Gualtieri, Andrea Maselli, and Valeria Ferrari, Phys. Rev. **D92**, 024010 (2015a), arXiv:1503.07365 [gr-qc].

Paolo Pani, Leonardo Gualtieri, and Valeria Ferrari, Phys. Rev. **D92**, 124003 (2015b), arXiv:1509.02171 [gr-qc].

Rafael A. Porto, Fortsch. Phys. **64**, 723–729 (2016b), arXiv:1606.08895 [gr-qc].

Vitor Cardoso, Edgardo Franzin, Andrea Maselli, Paolo Pani, and Guilherme Raposo, Phys. Rev. **D95**, 084014 (2017a), arXiv:1701.01116 [gr-qc].

Eanna E. Flanagan and Tanja Hinderer, Phys. Rev. **D77**, 021502 (2008), arXiv:0709.1915 [astro-ph].

Tanja Hinderer, Astrophys. J. **677**, 1216–1220 (2008), Erratum: *ibid.* **697**, 964 (2009), arXiv:0711.2420 [astro-ph].

Nathan K. Johnson-McDaniel, Arunava Mukherjee, Rahul Kashyap, Parameswaran Ajith, Walter Del Pozzo, and Salvatore Vitale, (2018), arXiv:1804.08026 [gr-qc].

Paolo Pani, Emanuele Berti, Vitor Cardoso, Yanbei Chen, and Richard Norte, Phys. Rev. **D81**, 084011 (2010), arXiv:1001.3031 [gr-qc].

Caio F. B. Macedo, Paolo Pani, Vitor Cardoso, and Luís C. B. Crispino, Astrophys. J. **774**, 48 (2013b), arXiv:1302.2646 [gr-qc].

Hiroyuki Nakano, Norichika Sago, Hideyuki Tagoshi, and Takahiro Tanaka, PTEP **2017**, 071E01 (2017), arXiv:1704.07175 [gr-qc].

Zachary Mark, Aaron Zimmerman, Song Ming Du, and Yanbei Chen, Phys. Rev. **D96**, 084002 (2017), arXiv:1706.06155 [gr-qc].

Sebastian H. Voelkel and Kostas D. Kokkotas, Class. Quant. Grav. **34**, 175015 (2017), arXiv:1704.07517 [gr-qc].

Pablo Bueno, Pablo A. Cano, Frederik Goelen, Thomas Hertog, and Bert Vercnocke, Phys. Rev. **D97**, 024040 (2018), arXiv:1711.00391 [gr-qc].

Andrea Maselli, Sebastian H. Voelkel, and Kostas D. Kokkotas, Phys. Rev. **D96**, 064045 (2017a), arXiv:1708.02217 [gr-qc].

Yu-Tong Wang, Zhi-Peng Li, Jun Zhang, Shuang-Yong Zhou, and Yun-Song Piao, Eur. Phys. J. **C78**, 482 (2018a), arXiv:1802.02003 [gr-qc].

Qingwen Wang and Niayesh Afshordi, (2018), arXiv:1803.02845 [gr-qc].

Gregory Ashton, Ofek Birnholtz, Miriam Cabero, Collin Capano, Thomas Dent, Badri Krishnan, Grant David Meadors, Alex B. Nielsen, Alex Nitz, and Julian Westerweck, (2016), arXiv:1612.05625 [gr-qc].

Jahed Abedi, Hannah Dykaar, and Niayesh Afshordi, (2017b), arXiv:1701.03485 [gr-qc].

Randy S. Conklin, Bob Holdom, and Jing Ren, (2017), arXiv:1712.06517 [gr-qc].

Julian Westerweck, Alex Nielsen, Ofek Fischer-Birnholtz, Miriam Cabero, Collin Capano, Thomas Dent, Badri Krishnan, Grant Meadors, and Alexander H. Nitz, Phys. Rev. **D97**, 124037 (2018), arXiv:1712.09966 [gr-qc].

Jahed Abedi, Hannah Dykaar, and Niayesh Afshordi, (2018), arXiv:1803.08565 [gr-qc].

Alex B. Nielsen, Collin D. Capano, Ofek Birnholtz, and Julian Westerweck, (2018), arXiv:1811.04904 [gr-qc].

R. K. L. Lo, T. G. F. Li, and A. J. Weinstein, (2018), arXiv:1811.07431 [gr-qc].

Ka Wa Tsang, Michiel Rollier, Archisman Ghosh, Anuradha Samajdar, Michalis Agathos, Katerina Chatziioannou, Vitor Cardoso, Gaurav Khanna, and Chris Van Den Broeck, Phys. Rev. **D98**, 024023 (2018), arXiv:1804.04877 [gr-qc].

Sean M. Carroll, Living Rev. Rel. **4**, 1 (2001), arXiv:astro-ph/0004075 [astro-ph].

Edmund J. Copeland, M. Sami, and Shinji Tsujikawa, Int. J. Mod. Phys. **D15**, 1753–1936 (2006), arXiv:hep-th/0603057 [hep-th].

Annika H. G. Peter, (2012), arXiv:1201.3942 [astro-ph.CO].

A. Kashlinsky, Astrophys. J. **823**, L25 (2016), arXiv:1605.04023 [astro-ph.CO].

Sai Wang, Yi-Fan Wang, Qing-Guo Huang, and Tjonnie G. F. Li, Phys. Rev. Lett. **120**, 191102 (2018b), arXiv:1610.08725 [astro-ph.CO].

Bernard J. Carr and S. W. Hawking, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **168**, 399–415 (1974).

Bernard J. Carr, Astrophys. J. **201**, 1–19 (1975).

Christian T. Byrnes, Edmund J. Copeland, and Anne M. Green, Phys. Rev. **D86**, 043512 (2012), arXiv:1206.4188 [astro-ph.CO].

Martti Raidal, Sergey Solodukhin, Ville Vaskonen, and Hardi Veermäe, Phys. Rev. **D97**, 123520 (2018), arXiv:1802.07728 [astro-ph.CO].

Bohdan Paczynski, Astrophys. J. **304**, 1–5 (1986).

Kim Griest, Astrophys. J. **366**, 412–421 (1991).

A. De Rujula, P. Jetzer, and E. Masso, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **250**, 348 (1991).

C. Alcock *et al.* (MACHO), Astrophys. J. **486**, 697–726 (1997), arXiv:astro-ph/9606165 [astro-ph].

Anne M Green, Phys. Rev. **D96**, 043020 (2017), arXiv:1705.10818 [astro-ph.CO].

Yoshiyuki Inoue and Alexander Kusenko, JCAP **1710**, 034 (2017), arXiv:1705.00791 [astro-ph.CO].

Mathias Garny, McCullen Sandora, and Martin S. Sloth, Phys. Rev. Lett. **116**, 101302 (2016), arXiv:1511.03278 [hep-ph].

S. Tremaine and J. E. Gunn, Phys. Rev. Lett. **42**, 407–410 (1979).

Julien Baur, Nathalie Palanque-Delabrouille, Christophe Yèche, Christophe Magneville, and Matteo Viel, *SDSS-IV Collaboration Meeting, July 20-23, 2015*, JCAP **1608**, 012 (2016), arXiv:1512.01981 [astro-ph.CO].

Raffaele Tito D'Agnolo, Duccio Pappadopulo, and Joshua T. Ruderman, Phys. Rev. Lett. **119**, 061102 (2017), arXiv:1705.08450 [hep-ph].

David J. E. Marsh, Phys. Rept. **643**, 1–79 (2016), arXiv:1510.07633 [astro-ph.CO].

Miguel Pato, Fabio Iocco, and Gianfranco Bertone, JCAP **1512**, 001 (2015), arXiv:1504.06324 [astro-ph.GA].

Hsi-Yu Schive, Tzihong Chiueh, and Tom Broadhurst, Nature Phys. **10**, 496–499 (2014a), arXiv:1406.6586 [astro-ph.GA].

Nitsan Bar, Diego Blas, Kfir Blum, and Sergey Sibiryakov, (2018), arXiv:1805.00122 [astro-ph.CO].

E. Aprile *et al.* (XENON), Phys. Rev. Lett. **119**, 181301 (2017), arXiv:1705.06655 [astro-ph.CO].

Xiangyi Cui *et al.* (PandaX-II), Phys. Rev. Lett. **119**, 181302 (2017), arXiv:1708.06917 [astro-ph.CO].

Martin Hoferichter, Philipp Klos, Javier Menéndez, and Achim Schwenk, Phys. Rev. Lett. **119**, 181803 (2017), arXiv:1708.02245 [hep-ph].

Farinaldo S. Queiroz, in *2017 European Physical Society Conference on High Energy Physics (EPS-HEP 2017) Venice, Italy, July 5-12, 2017* (2017) arXiv:1711.02463 [hep-ph].

Dan Hooper, APS Physics **10**, 119 (2017).

Austin Joyce, Lucas Lombriser, and Fabian Schmidt, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **66**, 95–122 (2016), arXiv:1601.06133 [astro-ph.CO].

Tonatiuh Matos and L. Arturo Urena-Lopez, Phys. Rev. **D63**, 063506 (2001), arXiv:astro-ph/0006024 [astro-ph].

Wayne Hu, Rennan Barkana, and Andrei Gruzinov, Phys. Rev. Lett. **85**, 1158–1161 (2000), arXiv:astro-ph/0003365 [astro-ph].

Lam Hui, Jeremiah P. Ostriker, Scott Tremaine, and Edward Witten, Phys. Rev. **D95**, 043541 (2017), arXiv:1610.08297 [astro-ph.CO].

Abril Suárez, Victor H. Robles, and Tonatiuh Matos, *Proceedings of 4th International Meeting on Gravitation and Cosmology (MGC 4): Santa Clara, Cuba, June 1-4, 2009*, Astrophys. Space Sci. Proc. **38**, 107–142 (2014), arXiv:1302.0903 [astro-ph.CO].

Ui-Han Zhang and Tzihong Chiueh, Phys. Rev. **D96**, 063522 (2017), arXiv:1705.01439 [astro-ph.CO].

Francisco X. Linares Cedeño, Alma X. González-Morales, and L. Arturo Ureña-López, Phys. Rev. **D96**, 061301 (2017), arXiv:1703.10180 [gr-qc].

L. Arturo Urena-Lopez and Alma X. Gonzalez-Morales, JCAP **1607**, 048 (2016), arXiv:1511.08195 [astro-ph.CO].

Renée Hlozek, Daniel Grin, David J. E. Marsh, and Pedro G. Ferreira, Phys. Rev. **D91**, 103512 (2015), arXiv:1410.2896 [astro-ph.CO].

Philip Mocz, Mark Vogelsberger, Victor Robles, Jesus Zavala, Michael Boylan-Kolchin, and Lars Hernquist, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **471**, 4559 (2017), arXiv:1705.05845 [astro-ph.CO].

Bodo Schwabe, Jens C. Niemeyer, and Jan F. Engels, Phys. Rev. **D94**, 043513 (2016), arXiv:1606.05151 [astro-ph.CO].

Hsi-Yu Schive, Ming-Hsuan Liao, Tak-Pong Woo, Shing-Kwong Wong, Tzihong Chiueh, Tom Broadhurst, and W. Y. Pauchy Hwang, Phys. Rev. Lett. **113**, 261302 (2014b), arXiv:1407.7762 [astro-ph.GA].

L. Arturo Urena-Lopez, Victor H. Robles, and T. Matos, Phys. Rev. **D96**, 043005 (2017), arXiv:1702.05103 [astro-ph.CO].

Heling Deng, Mark P. Hertzberg, Mohammad Hossein Namjoo, and Ali Masoumi, (2018), arXiv:1804.05921 [astro-ph.CO].

Nathalie Palanque-Delabrouille *et al.*, Astron. Astrophys. **559**, A85 (2013), arXiv:1306.5896 [astro-ph.CO].

Takeshi Kobayashi, Riccardo Murgia, Andrea De Simone, Vid Iršič, and Matteo Viel, Phys. Rev. **D96**, 123514 (2017), arXiv:1708.00015 [astro-ph.CO].

Richard Brito, Vitor Cardoso, and Paolo Pani, Class. Quant. Grav. **32**, 134001 (2015c), arXiv:1411.0686 [gr-qc].

Richard Brito, Shrobana Ghosh, Enrico Barausse, Emanuele Berti, Vitor Cardoso, Irina Dvorkin, Antoine Klein, and Paolo Pani, Phys. Rev. Lett. **119**, 131101 (2017a), arXiv:1706.05097 [gr-qc].

William H. Press and David N. Spergel, Astrophys. J. **296**, 679–684 (1985).

Andrew Gould, Bruce T. Draine, Roger W. Romani, and Shmuel Nussinov, Phys. Lett. **B238**, 337 (1990).

I. Goldman and S. Nussinov, Phys. Rev. **D40**, 3221–3230 (1989).

Gianfranco Bertone and Malcolm Fairbairn, Phys. Rev. **D77**, 043515 (2008), arXiv:0709.1485 [astro-ph].

Richard Brito, Vitor Cardoso, Caio F. B. Macedo, Hirotada Okawa, and Carlos Palenzuela, Phys. Rev. **D93**, 044045 (2016b), arXiv:1512.00466 [astro-ph.SR].

Raphael Flauger and Steven Weinberg, Phys. Rev. **D97**, 123506 (2018), arXiv:1801.00386 [astro-ph.CO].

K. S. Thorne, unpublished (1989 (accessed May 2017)), http://elmer.tapir.caltech.edu/ph237/week6/KipNewWindow5.pdf.

Lorenzo Annulli, Laura Bernard, Diego Blas, and Vitor Cardoso, Phys. Rev. **D98**, 084001 (2018), arXiv:1809.05108 [gr-qc].

Paolo Gondolo and Joseph Silk, Phys. Rev. Lett. **83**, 1719–1722 (1999), arXiv:astro-ph/9906391 [astro-ph].

Gianfranco Bertone, Andrew R. Zentner, and Joseph Silk, Phys. Rev. **D72**, 103517 (2005b), arXiv:astro-ph/0509565 [astro-ph].

Hong-Sheng Zhao and Joseph Silk, Phys. Rev. Lett. **95**, 011301 (2005), arXiv:astro-ph/0501625 [astro-ph].

Kazunari Eda, Yousuke Itoh, Sachiko Kuroyanagi, and Joseph Silk, Phys. Rev. **D91**, 044045 (2015), arXiv:1408.3534 [gr-qc].

Xiao-Jun Yue and Wen-Biao Han, Phys. Rev. **D97**, 064003 (2018), arXiv:1711.09706 [gr-qc].

Otto A. Hannuksela, Richard Brito, Emanuele Berti, and Tjonnie G. F. Li, (2018), arXiv:1804.09659 [astro-ph.HE].

Andrea Maselli, Pantelis Pnigouras, Niklas Grønlund Nielsen, Chris Kouvaris, and Kostas D. Kokkotas, Phys. Rev. **D96**, 023005 (2017b), arXiv:1704.07286 [astro-ph.HE].

John Ellis, Andi Hektor, Gert Hütsi, Kristjan Kannike, Luca Marzola, Martti Raidal, and Ville Vaskonen, Phys. Lett. **B781**, 607–610 (2018), arXiv:1710.05540 [astro-ph.CO].

Paolo Pani, Vitor Cardoso, Leonardo Gualtieri, Emanuele Berti, and Akihiro Ishibashi, Phys. Rev. Lett. **109**, 131102 (2012b), arXiv:1209.0465 [gr-qc].

Asimina Arvanitaki, Masha Baryakhtar, and Xinlu Huang, Phys. Rev. **D91**, 084011 (2015), arXiv:1411.2263 [hep-ph].

Asimina Arvanitaki, Masha Baryakhtar, Savas Dimopoulos, Sergei Dubovsky, and Robert Lasenby, Phys. Rev. **D95**, 043001 (2017), arXiv:1604.03958 [hep-ph].

Hirotaka Yoshino and Hideo Kodama, PTEP **2015**, 061E01 (2014), arXiv:1407.2030 [gr-qc].

Masha Baryakhtar, Robert Lasenby, and Mae Teo, Phys. Rev. **D96**, 035019 (2017), arXiv:1704.05081 [hep-ph].

Richard Brito, Shrobana Ghosh, Enrico Barausse, Emanuele Berti, Vitor Cardoso, Irina Dvorkin, Antoine Klein, and Paolo Pani, Phys. Rev. **D96**, 064050 (2017b), arXiv:1706.06311 [gr-qc].

Rouven Essig *et al.*, in *Proceedings, 2013 Community Summer Study on the Future of U.S. Particle Physics: Snowmass on the Mississippi (CSS2013): Minneapolis, MN, USA, July 29-August 6, 2013* (2013) arXiv:1311.0029 [hep-ph].

Joao G. Rosa and Thomas W. Kephart, Phys. Rev. Lett. **120**, 231102 (2018), arXiv:1709.06581 [gr-qc].

Vitor Cardoso, Paolo Pani, and Tien-Tien Yu, Phys. Rev. **D95**, 124056 (2017b), arXiv:1704.06151 [gr-qc].

William E. East, Phys. Rev. **D96**, 024004 (2017), arXiv:1705.01544 [gr-qc].

Solomon Endlich and Riccardo Penco, JHEP **05**, 052 (2017), arXiv:1609.06723 [hep-th].

Vitor Cardoso, Óscar J. C. Dias, Gavin S. Hartnett, Matthew Middleton, Paolo Pani, and Jorge E. Santos, JCAP **1803**, 043 (2018), arXiv:1801.01420 [gr-qc].

Valeri P. Frolov, Pavel Krtouš, David Kubizňák, and Jorge E. Santos, Phys. Rev. Lett. **120**, 231103 (2018), arXiv:1804.00030 [hep-th].

Hirotaka Yoshino and Hideo Kodama, Prog. Theor. Phys. **128**, 153–190 (2012), arXiv:1203.5070 [gr-qc].

Paolo Pani, Phys. Rev. **D92**, 123530 (2015b), arXiv:1512.01236 [astro-ph.HE].

Andrea Caputo, Jesús Zavala, and Diego Blas, Phys. Dark Univ. **19**, 1–11 (2018), arXiv:1709.03991 [astro-ph.HE].

Andrei Khmelnitsky and Valery Rubakov, JCAP **1402**, 019 (2014), arXiv:1309.5888 [astro-ph.CO].

Diego Blas, Diana Lopez Nacir, and Sergey Sibiryakov, Phys. Rev. Lett. **118**, 261102 (2017), arXiv:1612.06789 [hep-ph].

Miguel C. Ferreira, Caio F. B. Macedo, and Vitor Cardoso, Phys. Rev. **D96**, 083017 (2017), arXiv:1710.00830 [gr-qc].

Jacob Bekenstein and Joao Magueijo, Phys. Rev. **D73**, 103513 (2006), arXiv:astro-ph/0602266 [astro-ph].

Evan D. Hall, Thomas Callister, Valery V. Frolov, Holger Müller, Maxim Pospelov, and Rana X Adhikari, (2016), arXiv:1605.01103 [gr-qc].

Christoph Englert, Stefan Hild, and Michael Spannowsky, (2017), arXiv:1712.04481 [hep-ph].

From Phantom

References

Abel T., 2011, MNRAS, 413, 271

Abel T., Anninos P., Zhang Y., Norman M. L., 1997, New A, 2, 181

Agertz O., et al., 2007, MNRAS, 380, 963

Alexiades V., Amiez G., Gremaud P.-A., 1996, Communications in Numerical Methods in Engineering, 12, 31

Allen C., Santillan A., 1991, RMxAA, 22, 255

Andrews S. M., et al., 2016, ApJ, 820, L40

Artymowicz P., Lubow S. H., 1994, ApJ, 421, 651

Artymowicz P., Lubow S. H., 1996, ApJ, 467, L77

Athanassoula E., Fady E., Lambert J. C., Bosma A., 2000, MNRAS, 314, 475

Bagla J. S., Khandai N., 2009, MNRAS, 396, 2211

Ballabio G., Dipierro G., Veronesi B., Lodato G., Hutchison M., Laibe G., Price D. J., 2018, MNRAS,

Balsara D. S., 1995, J. Comp. Phys., 121, 357

Balsara D. S., 1996, ApJ, 465, 775

Balsara D. S., 1998, ApJS, 116, 133

Balsara D. S., Kim J., 2004, ApJ, 602, 1079

Balsara D. S., Spicer D., 1999, J. Comp. Phys., 148, 133

Balsara D. S., Kim J., Mac Low M.-M., Mathews G. J., 2004, ApJ, 617, 339

Barmin A., Kulikovskiy A. G., Pogorelov N. V., 1996, J. Comp. Phys., 126, 77

Barnes D. J., Kawata D., Wu K., 2012, MNRAS, 420, 3195

Bartosch L., 2001, International Journal of Modern Physics C, 12, 851

Bate M. R., 1995, PhD thesis, University of Cambridge, Cambridge, UK

Bate M. R., 2009a, MNRAS, 392, 590

Bate M. R., 2009b, MNRAS, 392, 1363

Bate M. R., Bonnell I. A., 1997, MNRAS, 285, 33

Bate M. R., Burkert A., 1997, MNRAS, 288, 1060

Bate M. R., Bonnell I. A., Price N. M., 1995, MNRAS, 277, 362

Bate M. R., Bonnell I. A., Bromm V., 2003, MNRAS, 339, 577

Bauer A., Springel V., 2012, MNRAS, 423, 2558

Beck A. M., et al., 2016, MNRAS, 455, 2110

Begeman K. G., Broeils A. H., Sanders R. H., 1991, MNRAS, 249, 523

Benz W., 1990, in Buchler J. R., ed., Numerical Modelling of Nonlinear Stellar Pulsations Problems and Prospects. p. 269

Benz W., Cameron A. G. W., Press W. H., Bowers R. L., 1990, ApJ, 348, 647

Bergin E. A., Hartmann L. W., Raymond J. C., Ballesteros-Paredes J., 2004, ApJ, 612, 921

Biermann L., 1950, Zeitschrift Naturforschung Teil A, 5, 65

Binney J., Tremaine S., 1987, *Galactic Dynamics*. Princeton, NJ, Princeton University Press

Bocquet S., Saro A., Dolag K., Mohr J. J., 2016, MNRAS, 456, 2361

Boily C. M., Kroupa P., Peñarrubia-Garrido J., 2001, New A, 6, 27

Bonafede A., Dolag K., Stasyszyn F., Murante G., Borgani S., 2011, MNRAS, 418, 2234

Bonet J., Lok T-S. L., 1999, Computer methods in applied mechanics and engineering, 180, 97

Bonnell I. A., Bate M. R., Clarke C. J., Pringle J. E., 1997, MNRAS, 285, 201

Bonnerot C., Rossi E. M., Lodato G., Price D. J., 2016, MNRAS, 455, 2253

Bonnerot C., Price D. J., Lodato G., Rossi E. M., 2017, MNRAS, 469, 4879

Børve S., Omang M., Trulsen J., 2001, ApJ, 561, 82

Børve S., Omang M., Trulsen J., 2004, ApJS, 153, 447

Brio M., Wu C. C., 1988, J. Comp. Phys., 75, 400

Brookshaw L., 1985, PASA, 6, 207

Brookshaw L., 1994, Mem. Soc. Astron. Italiana, 65, 1033

Bürzle F., Clark P. C., Stasyszyn F., Greif T., Dolag K., Klessen R. S., Nielaba P., 2011a, MNRAS, 412, 171

Bürzle F., Clark P. C., Stasyszyn F., Dolag K., Klessen R. S., 2011b, MNRAS, 417, L61

Cabezón R. M., García-Senz D., Relaño A., 2008, J. Comp. Phys., 227, 8523

Caldwell J. A. R., Ostriker J. P., 1981, ApJ, 251, 61

Cartwright A., Stamatellos D., Whitworth A. P., 2009, MNRAS, 395, 2373

Cavaliere A., Fusco-Femiano R., 1976, A&A, 49, 137

Cerioli A., Lodato G., Price D. J., 2016, MNRAS, 457, 939

Cha S.-H., Whitworth A. P., 2003, MNRAS, 340, 73

Chabrier G., 2005, in Corbelli E., Palla F., Zinnecker H., eds, Astrophys. Space Sci. Libr. Vol. 327, The Initial Mass Function 50 Years Later. p. 41 (arXiv:astro-ph/0409465)

Chapman S., Cowling T. G., 1970, The mathematical theory of non-uniform gases. an account of the kinetic theory of viscosity, thermal conduction and diffusion in gases. Cambridge, Cambridge University Press

Chin S. A., Chen C. R., 2005, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 91, 301

Choi E., Kim J., Wiita P. J., 2009, ApJS, 181, 413

Chow E., Monaghan J. J., 1997, J. Comp. Phys., 134, 296

Cossins P., Lodato G., Clarke C. J., 2009, MNRAS, 393, 1157

Couchman H. M. P., 1991, ApJ, 368, L23

Couchman H. M. P., Thomas P. A., Pearce F. R., 1995, ApJ, 452, 797

Coughlin E. R., Nixon C., 2015, ApJ, 808, L11

Coughlin E. R., Armitage P. J., Nixon C., Begelman M. C., 2016a, preprint, (arXiv:1608.05711)

Coughlin E. R., Nixon C., Begelman M. C., Armitage P. J., 2016b, MNRAS, 459, 3089

Courant R., Friedrichs K., Lewy H., 1928, Mathematische Annalen, 100, 32

Cox D. P., Gómez G. C., 2002, ApJS, 142, 261

Cullen L., Dehnen W., 2010, MNRAS, 408, 669

Cummins S. J., Rudman M., 1999, J. Comp. Phys., 152, 584

Dahlburg R. B., Picone J. M., 1989, Physics of Fluids B, 1, 2153

Dai W., Woodward P. R., 1994a, J. Comp. Phys., 111, 354

Dai W., Woodward P. R., 1994b, J. Comp. Phys., 115, 485

Dai W., Woodward P. R., 1998, ApJ, 494, 317

Dedner A., Kemm F., Kröner D., Munz C.-D., Schnitzer T., Wesenberg M., 2002, J. Comp. Phys., 175, 645

Dehnen W., 2000a, AJ, 119, 800

Dehnen W., 2000b, ApJ, 536, L39

Dehnen W., 2001, MNRAS, 324, 273

Dehnen W., Aly H., 2012, MNRAS, 425, 1068

Dehnen W., Read J. I., 2011, European Physical Journal Plus, 126, 55

Diehl S., Rockefeller G., Fryer C. L., Riethmiller D., Statler T. S., 2015, PASA, 32, 48

Dipierro G., Laibe G., 2017, MNRAS, 469, 1932

Dipierro G., Price D., Laibe G., Hirsh K., Cerioli A., Lodato G., 2015, MNRAS, 453, L73

Dipierro G., Laibe G., Price D. J., Lodato G., 2016, MNRAS, 459, L1

Dobbs C. L., Glover S. C. O., Clark P. C., Klessen R. S., 2008, MNRAS, 389, 1097

Dobbs C. L., Price D. J., Pettitt A. R., Bate M. R., Tricco T. S., 2016, MNRAS, 461, 4482

Dolag K., Stasyszyn F., 2009, MNRAS, 398, 1678

Dolag K., Vazza F., Brunetti G., Tormen G., 2005, MNRAS, 364, 753

Dopcke G., Glover S. C. O., Clark P. C., Klessen R. S., 2011, ApJ, 729, L3

Doğan S., Nixon C., King A., Price D. J., 2015, MNRAS, 449, 1251

Draine B. T., Bertoldi F., 1996, ApJ, 468, 269

Epstein P. S., 1924, Physical Review, 23, 710

Escala A., Larson R. B., Coppi P. S., Mardones D., 2004, ApJ, 607, 765

Español P., Revenga M., 2003, Phys. Rev. E, 67, 026705

Eswaran V., Pope S. B., 1988, Computers and Fluids, 16, 257

Evrard A. E., 1988, MNRAS, 235, 911

Facchini S., Lodato G., Price D. J., 2013, MNRAS, 433, 2142

Falle S. A. E. G., 2003, MNRAS, 344, 1210

Falle S. A. E. G., Komissarov S. S., 2001, Journal of Plasma Physics, 65, 29

Fan L.-S., Zhu C., 1998, Principles of Gas-Solid Flows. Cambridge University Press

Farr W. M., Bertschinger E., 2007, ApJ, 663, 1420

Fassio F., Probstein R. F., 1970, AIAA Journal, 8, 772

Federrath C., Klessen R. S., Schmidt W., 2008, ApJ, 688, L79

Federrath C., Roman-Duval J., Klessen R. S., Schmidt W., Mac Low M.-M., 2010a, A&A, 512, A81

Federrath C., Banerjee R., Clark P. C., Klessen R. S., 2010b, ApJ, 713, 269

Feng H. Q., Lin C. C., Chao J. K., Wu D. J., Lyu L. H., Lee L.-C., 2007, Journal of Geophysical Research (Space Physics), 112, 10104

Ferland G. J., Peterson B. M., Horne K., Welsh W. F., Nahar S. N., 1992, ApJ, 387, 95

Flebbe O., Muenzel S., Herold H., Riffert H., Ruder H., 1994, ApJ, 431, 754

Forgan D., Price D. J., Bonnell I., 2017, MNRAS, 466, 3406

Fryer C. L., Hungerford A. L., Rockefeller G., 2007, International Journal of Modern Physics D, 16, 941

Fulk D. A., Quinn D. W., 1996, J. Comp. Phys., 126, 165

Furth H. P., Killeen J., Rosenbluth M. N., 1963, Physics of Fluids, 6, 459

Gafton E., Rosswog S., 2011, MNRAS, 418, 770

Gammie C. F., 2001, ApJ, 553, 174

García-Senz D., Cabezón R. M., Escartín J. A., Ebinger K., 2014, A&A, 570, A14

Gardiner T. A., Stone J. M., 2005, J. Comp. Phys., 205, 509

Gardiner T. A., Stone J. M., 2008, J. Comp. Phys., 227, 4123

Gingold R. A., Monaghan J. J., 1977, MNRAS, 181, 375

Gingold R. A., Monaghan J. J., 1978, MNRAS, 184, 481

Gingold R. A., Monaghan J. J., 1980, MNRAS, 191, 897

Gingold R. A., Monaghan J. J., 1982a, PASA, 4, 378

Gingold R. A., Monaghan J. J., 1982b, J. Comp. Phys., 46, 429

Gingold R. A., Monaghan J. J., 1983, MNRAS, 204, 715

Glover S. C. O., Clark P. C., 2012, MNRAS, 421, 116

Glover S. C. O., Jappsen A.-K., 2007, ApJ, 666, 1

Glover S. C. O., Mac Low M.-M., 2007, ApJS, 169, 239

Glover S. C. O., Federrath C., Mac Low M.-M., Klessen R. S., 2010, MNRAS, 404, 2

Goffrey T., et al., 2016, preprint, (arXiv:1610.10053)

Goldreich P., Tremaine S., 1979, ApJ, 233, 857

Goldreich P., Tremaine S., 1980, ApJ, 241, 425

Goldsmith P. F., Langer W. D., 1978, ApJ, 222, 881

Gray J., Monaghan J. J., Swift R. P., 2001, Computer methods in applied mechanics and engineering, 190, 6641

Graziani C., Tzeferacos P., Lee D., Lamb D. Q., Weide K., Fatenejad M., Miller J., 2015, ApJ, 802, 43

Hairer E., Lubich C., Wanner G., 2003, Acta Numerica, pp 399–450

Haworth T. J., et al., 2016, PASA, 33, e053

Herant M., 1994, Mem. Soc. Astron. Italiana, 65, 1013

Hernquist L., 1990, ApJ, 356, 359

Hernquist L., Barnes J. E., 1990, ApJ, 349, 562

Hernquist L., Katz N., 1989, ApJS, 70, 419

Hollenbach D., McKee C. F., 1989, ApJ, 342, 306

Hopkins P. F., Raives M. J., 2016, MNRAS, 455, 51

Hosking J. G., Whitworth A. P., 2004, MNRAS, 347, 994

Hu X. Y., Adams N. A., 2006, Physics of Fluids, 18, 101702

Hu C.-Y., Naab T., Walch S., Moster B. P., Oser L., 2014, MNRAS, 443, 1173

Hubber D. A., Batty C. P., McLeod A., Whitworth A. P., 2011, A&A, 529, A27

Hubber D. A., Allison R. J., Smith R., Goodwin S. P., 2013a, MNRAS, 430, 1599

Hubber D. A., Walch S., Whitworth A. P., 2013b, MNRAS, 430, 3261

Hubber D. A., Falle S. A. E. G., Goodwin S. P., 2013c, MNRAS, 432, 711

Hubble E. P., 1930, ApJ, 71, 231

Hut P., Makino J., McMillan S., 1995, ApJ, 443, L93

Hutchison M. A., Price D. J., Laibe G., Maddison S. T., 2016, MNRAS, 461, 742

Iaconi R., Reichardt T., Staff J., De Marco O., Passy J.-C., Price D., Wurster J., Herwig F., 2017, MNRAS, 464, 4028

Iannuzzi F., Dolag K., 2011, MNRAS, 417, 2846

Inutsuka S.-I., 2002, J. Comp. Phys., 179, 238

Iwasaki K., 2015, J. Comp. Phys., 302, 359

Jubelgas M., Springel V., Dolag K., 2004, MNRAS, 351, 423

Kaufmann T., Mayer L., Wadsley J., Stadel J., Moore B., 2007, MNRAS, 375, 53

Khomenko E., Vitas N., Collados M., de Vicente A., 2017, A&A, 604, A66

Khoperskov S. A., Vasiliev E. O., Sobolev A. M., Khoperskov A. V., 2013, MNRAS, 428, 2311

Kim J., Balsara D., Mac Low M.-M., 2001, Journal of Korean Astronomical Society, 34, 333

Kitsionas S., et al., 2009, A&A, 508, 541

Krumholz M. R., 2006, ApJ, 641, L45

Kuijken K., Dubinski J., 1995a, MNRAS, 277, 1341

Kuijken K., Dubinski J., 1995b, MNRAS, 277, 1341

Kwok S., 1975, ApJ, 198, 583

Laibe G., Price D. J., 2011, MNRAS, 418, 1491

Laibe G., Price D. J., 2012a, MNRAS, 420, 2345

Laibe G., Price D. J., 2012b, MNRAS, 420, 2365

Laibe G., Price D. J., 2014a, MNRAS, 440, 2136

Laibe G., Price D. J., 2014b, MNRAS, 440, 2147

Laibe G., Price D. J., 2014c, MNRAS, 444, 1940

Larson R. B., 1981, MNRAS, 194, 809

Lattanzio J., Monaghan J., Pongracic H., Schwarz M., 1986, SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 7, 591

Le Bourlot J., Pineau des Forêts G., Flower D. R., 1999, MNRAS, 305, 802

Lecoanet D., et al., 2016, MNRAS, 455, 4274

Lense J., Thirring H., 1918, Physikalische Zeitschrift, 19, 156

Lewis B. T., Bate M. R., Price D. J., 2015, MNRAS, 451, 288

Liptai D., Price D. J., Wurster J., Bate M. R., 2017, MNRAS, 465, 105

Lodato G., Price D. J., 2010, MNRAS, 405, 1212

Lodato G., Pringle J. E., 2007, MNRAS, 381, 1287

Lodato G., Rice W. K. M., 2004, MNRAS, 351, 630

Lodato G., Nayakshin S., King A. R., Pringle J. E., 2009, MNRAS, 398, 1392

Lombardi J. C., Sills A., Rasio F. A., Shapiro S. L., 1999, J. Comp. Phys., 152, 687

Londrillo P., Del Zanna L., 2000, ApJ, 530, 508

Long K., Murali C., 1992, ApJ, 397, 44

Lorén-Aguilar P., Bate M. R., 2014, MNRAS, 443, 927

Low C., Lynden-Bell D., 1976, MNRAS, 176, 367

Lubow S. H., Ogilvie G. I., 2000, ApJ, 538, 326

Lubow S. H., Ogilvie G. I., Pringle J. E., 2002, MNRAS, 337, 706

Lucy L. B., 1977, AJ, 82, 1013

Lynden-Bell D., Pringle J. E., 1974, MNRAS, 168, 603

Mac Low M.-M., Balsara D. S., Kim J., de Avillez M. A., 2005, ApJ, 626, 864

Maddison S. T., 1998, PhD thesis, Department of Mathematics, Monash University

Maddison S. T., Murray J. R., Monaghan J. J., 1996, PASA, 13, 66

Makino J., Aarseth S. J., 1992, PASJ, 44, 141

Makino J., Hut P., Kaplan M., Saygın H., 2006, New A, 12, 124

Martin R. G., Nixon C., Armitage P. J., Lubow S. H., Price D. J., 2014a, ApJ, 790, L34

Martin R. G., Nixon C., Lubow S. H., Armitage P. J., Price D. J., Doğan S., King A., 2014b, ApJ, 792, L33

Martos M., Hernandez X., Yáñez M., Moreno E., Pichardo B., 2004, MNRAS, 350, L47

Matzner C. D., Levin Y., 2005, ApJ, 628, 817

McMillan P. J., Dehnen W., 2007, MNRAS, 378, 541

McNally C. P., Lyra W., Passy J.-C., 2012, ApJS, 201, 18

Merritt D., 1996, AJ, 111, 2462

Meru F., Bate M. R., 2011, MNRAS, 411, L1

Meru F., Bate M. R., 2012, MNRAS, 427, 2022

Miller M. C., Lamb F. K., 1993, ApJ, 413, L43

Miniati F., 2010, J. Comp. Phys., 229, 3916

Miura H., Glass I. I., 1982, Royal Society of London Proceedings Series A, 382, 373

Miyamoto M., Nagai R., 1975, PASJ, 27, 533

Monaghan J. J., 1989, J. Comp. Phys., 82, 1

Monaghan J. J., 1992, ARA&A, 30, 543

Monaghan J. J., 1997, J. Comp. Phys., 136, 298

Monaghan J. J., 2000, J. Comp. Phys., 159, 290

Monaghan J. J., 2002, MNRAS, 335, 843

Monaghan J. J., 2005, Reports on Progress in Physics, 68, 1703

Monaghan J. J., 2012, Annual Review of Fluid Mechanics, 44, 323

Monaghan J. J., Kocharyan A., 1995, Computer Physics Communications, 87, 225

Monaghan J. J., Lattanzio J. C., 1985, A&A, 149, 135

Monaghan J. J., Lattanzio J. C., 1986, A&A, 158, 207

Monaghan J. J., Lattanzio J. C., 1991, ApJ, 375, 177

Monaghan J. J., Price D. J., 2001, MNRAS, 328, 381

Monaghan J. J., Price D. J., 2006, MNRAS, 365, 991

Morris J. P., 1996a, PhD thesis, Monash University, Melbourne, Australia

Morris J. P., 1996b, PASA, 13, 97

Morris J. P., Monaghan J. J., 1997, J. Comp. Phys., 136, 41

Müller K., Fedosov D. A., Gompper G., 2015, J. Comp. Phys., 281, 301

Murray J. R., 1996, MNRAS, 279, 402

Nagasawa M., Nakamura T., Miyama S. M., 1988, PASJ, 40, 691

Navarro J. F., Frenk C. S., White S. D. M., 1996, ApJ, 462, 563

Nealon R., Price D. J., Nixon C. J., 2015, MNRAS, 448, 1526

Nealon R., Nixon C., Price D. J., King A., 2016, MNRAS, 455, L62

Nelson R. P., Langer W. D., 1997, ApJ, 482, 796

Nelson R. P., Papaloizou J. C. B., 2000, MNRAS, 315, 570

Neufeld D. A., Kaufman M. J., 1993, ApJ, 418, 263

Neufeld D. A., Lepp S., Melnick G. J., 1995, ApJS, 100, 132

Nixon C. J., King A. R., Price D. J., 2012a, MNRAS, 422, 2547

Nixon C., King A., Price D., Frank J., 2012b, ApJ, 757, L24

Nixon C., King A., Price D., 2013, MNRAS, 434, 1946

Nordlund A. K., Padoan P., 1999, in Franco J., Carraminana A., eds, Interstellar Turbulence. Cambridge; CUP, p. 218 (arXiv:astro-ph/9810074)

O'Sullivan S., Downes T. P., 2006, MNRAS, 366, 1329

Ogilvie G. I., 1999, MNRAS, 304, 557

Ogilvie G. I., Lubow S. H., 2002, MNRAS, 330, 950

Omelyan I. P., Mryglod I. M., Folk R., 2002, Computer Physics Communications, 146, 188

Orszag S. A., Tang C.-M., 1979, J. Fluid Mech., 90, 129

Ostriker E. C., Gammie C. F., Stone J. M., 1999, ApJ, 513, 259

Paardekooper S.-J., Mellema G., 2004, A&A, 425, L9

Paardekooper S.-J., Mellema G., 2006, A&A, 453, 1129

Pandey B. P., Wardle M., 2008, MNRAS, 385, 2269

Papaloizou J. C. B., Pringle J. E., 1983, MNRAS, 202, 1181

Passy J.-C., et al., 2012, ApJ, 744, 52

Paxton B., Bildsten L., Dotter A., Herwig F., Lesaffre P., Timmes F., 2011, ApJS, 192, 3

Pettitt A. R., Dobbs C. L., Acreman D. M., Price D. J., 2014, MNRAS, 444, 919

Pettitt A. R., Dobbs C. L., Acreman D. M., Bate M. R., 2015, MNRAS, 449, 3911

Phillips G. J., 1982, PASA, 4, 371

Phillips G. J., 1986a, MNRAS, 221, 571

Phillips G. J., 1986b, MNRAS, 222, 111

Phillips G. J., Monaghan J. J., 1985, MNRAS, 216, 883

Pichardo B., Martos M., Moreno E., Espresate J., 2003, ApJ, 582, 230

Picone J. M., Dahlburg R. B., 1991, Physics of Fluids B, 3, 29

Plummer H. C., 1911, MNRAS, 71, 460

Politano H., Pouquet A., Sulem P. L., 1989, Physics of Fluids B, 1, 2330

Potekhin A. Y., Chabrier G., 2010, Contributions to Plasma Physics, 50, 82

Powell K. G., Roe P. L., Linde T. J., Gombosi T. I., de Zeeuw D. L., 1999, J. Comp. Phys., 154, 284

Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P., 1992, Numerical recipes in FORTRAN. The art of scientific computing. Cambridge: University Press

Price D. J., 2004, PhD thesis, University of Cambridge, Cambridge, UK. astro-ph/0507472

Price D. J., 2007, PASA, 24, 159

Price D. J., 2008, J. Comp. Phys., 227, 10040

Price D. J., 2010, MNRAS, 401, 1475

Price D. J., 2012a, J. Comp. Phys., 231, 759

Price D. J., 2012b, MNRAS, 420, L33

Price D. J., Bate M. R., 2007, MNRAS, 377, 77

Price D. J., Bate M. R., 2009, MNRAS, 398, 33

Price D. J., Federrath C., 2010, MNRAS, 406, 1659

Price D. J., Laibe G., 2015a, MNRAS, 451, 5332

Price D. J., Laibe G., 2015b, MNRAS, 454, 2320

Price D. J., Monaghan J. J., 2004a, MNRAS, 348, 123

Price D. J., Monaghan J. J., 2004b, MNRAS, 348, 139

Price D. J., Monaghan J. J., 2005, MNRAS, 364, 384

Price D. J., Monaghan J. J., 2007, MNRAS, 374, 1347

Price D. J., Federrath C., Brunt C. M., 2011, ApJ, 727, L21

Price D. J., Tricco T. S., Bate M. R., 2012, MNRAS, 423, L45

Priest E. R., 1985, Reports on Progress in Physics, 48, 955

Pringle J. E., 1981, ARA&A, 19, 137

Pringle J. E., 1992, MNRAS, 258, 811

Puri K., Ramachandran P., 2014, J. Comp. Phys., 256, 308

Quinn T., Katz N., Stadel J., Lake G., 1997, ArXiv Astrophysics e-prints,

Quinn T., Perrine R. P., Richardson D. C., Barnes R., 2010, AJ, 139, 803

Ragusa E., Lodato G., Price D. J., 2016, MNRAS, 460, 1243

Ragusa E., Dipierro G., Lodato G., Laibe G., Price D. J., 2017, MNRAS, 464, 1449

Read J. I., Hayfield T., 2012, MNRAS, 422, 3037

Rees M. J., 1976, MNRAS, 176, 483

Rein H., Tremaine S., 2011, MNRAS, 415, 3168

Richardson M. L. A., Scannapieco E., Devriendt J., Slyz A., Thacker R. J., Dubois Y., Wurster J., Silk J., 2016, ApJ, 825, 83

Robertson B. E., Kravtsov A. V., Gnedin N. Y., Abel T., Rudd D. H., 2010, MNRAS, 401, 2463

Rogers F. J., Nayfonov A., 2002, ApJ, 576, 1064

Rosotti G. P., Lodato G., Price D. J., 2012, MNRAS, 425, 1958

Rosswog S., 2009, New A Rev., 53, 78

Rosswog S., 2015, MNRAS, 448, 3628

Rosswog S., Price D., 2007, MNRAS, 379, 915

Rosswog S., Ramirez-Ruiz E., Hix W. R., 2009, ApJ, 695, 404

Ryu D., Jones T. W., 1995, ApJ, 442, 228

Ryu D., Jones T. W., Frank A., 1995, ApJ, 452, 785

Saitoh T. R., Makino J., 2009, ApJ, 697, L99

Saitoh T. R., Makino J., 2010, PASJ, 62, 301

Saumon D., Chabrier G., van Horn H. M., 1995, ApJS, 99, 713

Schmidt W., Hillebrandt W., Niemeyer J. C., 2006, Computers & Fluids, 35, 353

Schoenberg I. J., 1946, Q. Appl. Math., 4, 45

Schwarzschild K., 1916, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), 1916, Seite 189-196,

Sedov L. I., 1959, Similarity and Dimensional Methods in Mechanics. New York; Academic Press

Sembach K. R., Howk J. C., Ryans R. S. I., Keenan F. P., 2000, ApJ, 528, 310

Sembolini F., et al., 2016, MNRAS, 457, 4063

Shakura N. I., Sunyaev R. A., 1973, A&A, 24, 337

Shu F. H., Galli D., Lizano S., Cai M., 2006, ApJ, 647, 382

Sijacki D., Springel V., 2006, MNRAS, 371, 1025

Sod G. A., 1978, J. Comp. Phys., 27, 1

Sofue Y., 2012, PASJ, 64, 75

Springel V., 2005, MNRAS, 364, 1105

Springel V., 2010, ARA&A, 48, 391

Springel V., Hernquist L., 2002, MNRAS, 333, 649

Springel V., Yoshida N., White S. D. M., 2001, New A, 6, 79

Springel V., Di Matteo T., Hernquist L., 2005, MNRAS, 361, 776

Steinmetz M., Mueller E., 1993, A&A, 268, 391

Stepinski T. F., Valageas P., 1996, A&A, 309, 301

Stone J. M., Hawley J. F., Evans C. R., Norman M. L., 1992, ApJ, 388, 415

Stone J. M., Gardiner T. A., Teuben P., Hawley J. F., Simon J. B., 2008, ApJS, 178, 137

Sutherland R. S., Dopita M. A., 1993, ApJS, 88, 253

Suttner G., Smith M. D., Yorke H. W., Zinnecker H., 1997, A&A, 318, 595

Syrovatskii S. I., 1981, ARA&A, 19, 163

Takahashi K., Yamada S., Yamada 2013, Journal of Plasma Physics, 79, 335

Tasker E. J., Brunino R., Mitchell N. L., Michielsen D., Hopton S., Pearce F. R., Bryan G. L., Theuns T., 2008, MNRAS, 390, 1267

Taylor G., 1950a, Proceedings of the Royal Society of London Series A, 201, 159

Taylor G., 1950b, Proceedings of the Royal Society of London Series A, 201, 175

Taylor G. I., Green A. E., 1937, Proceedings of the Royal Society of London Series A, 158, 499

Tejeda E., Rosswog S., 2013, MNRAS, 433, 1930

Teyssier R., 2002, A&A, 385, 337

Thacker R. J., Couchman H. M. P., 2006, Computer Physics Communications, 174, 540

Thacker R. J., Tittley E. R., Pearce F. R., Couchman H. M. P., Thomas P. A., 2000, MNRAS, 319, 619

Thomas P. A., Couchman H. M. P., 1992, MNRAS, 257, 11

Timmes F. X., Arnett D., 1999, ApJS, 125, 277

Timmes F. X., Swesty F. D., 2000, ApJS, 126, 501

Tóth G., 2000, J. Comp. Phys., 161, 605

Toupin S., Braun K., Siess L., Jorissen A., Gail H.-P., Price D., 2015a, in EAS Publications Series. pp 173–174, doi:10.1051/eas/1571038

Toupin S., Braun K., Siess L., Jorissen A., Price D., 2015b, in Kerschbaum F., Wing R. F., Hron J., eds, ASP Conf. Ser. Vol. 497, Why Galaxies Care about AGB Stars III: A Closer Look in Space and Time. p. 225

Townsend R. H. D., 2009, ApJS, 181, 391

Tricco T. S., Price D. J., 2012, J. Comp. Phys., 231, 7214

Tricco T. S., Price D. J., 2013, MNRAS, 436, 2810

Tricco T. S., Price D. J., Bate M. R., 2016a, J. Comp. Phys., 322, 326

Tricco T. S., Price D. J., Federrath C., 2016b, MNRAS, 461, 1260

Tricco T. S., Price D. J., Laibe G., 2017, MNRAS, 471, L52

Tsukamoto Y., Iwasaki K., Inutsuka S.-i., 2013, MNRAS, 434, 2593

Tsukamoto Y., Iwasaki K., Okuzumi S., Machida M. N., Inutsuka S., 2015, ApJ, 810, L26

Tuckerman M., Berne B. J., Martyna G. J., 1992, J. Chem. Phys., 97, 1990

Uhlenbeck G. E., Ornstein L. S., 1930, Physical Review, 36, 823

Valdarnini R., 2011, A&A, 526, A158

Valdarnini R., 2012, A&A, 546, A45

Valdarnini R., 2016, ApJ, 831, 103

Vanaverbeke S., Keppens R., Poedts S., Boffin H., 2009, Computer Physics Communications, 180, 1164

Vanaverbeke S., Keppens R., Poedts S., 2014, Computer Physics Communications, 185, 1053

Vazquez-Semadeni E., 1994, ApJ, 423, 681

Verlet L., 1967, Physical Review, 159, 98

Violeau D., Leroy A., 2014, J. Comp. Phys., 256, 388

Vogt D., Letelier P. S., 2011, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 411, 2371

Von Neumann J., Richtmyer R. D., 1950, J. Appl. Phys., 21, 232

Wada K., Koda J., 2001, PASJ, 53, 1163

Wadsley J. W., Stadel J., Quinn T., 2004, New A, 9, 137

Wadsley J. W., Veeravalli G., Couchman H. M. P., 2008, MNRAS, 387, 427

Wadsley J. W., Keller B. W., Quinn T. R., 2017, MNRAS, 471, 2357

Wang H.-H., Klessen R. S., Dullemond C. P., van den Bosch F. C., Fuchs B., 2010, MNRAS, 407, 705

Wang Y., Zhao H., Mao S., Rich R. M., 2012, MNRAS, 427, 1429

Wardle M., Ng C., 1999, MNRAS, 303, 239

Watkins S. J., Bhattal A. S., Francis N., Turner J. A., Whitworth A. P., 1996, A&AS, 119, 177

Weidenschilling S. J., 1977, MNRAS, 180, 57

Weingartner J. C., Draine B. T., 2001, ApJ, 563, 842

Wendland H., 1995, Advances in Computational Mathematics, 4, 389

Whipple F. L., 1972, in Elvius A., ed., From Plasma to Planet. p. 211

Whitehouse S. C., Bate M. R., 2004, MNRAS, 353, 1078

Whitehouse S. C., Bate M. R., 2006, MNRAS, 367, 32

Whitehouse S. C., Bate M. R., Monaghan J. J., 2005, MNRAS, 364, 1367

Widrow L. M., Dubinski J., 2005, ApJ, 631, 838

Widrow L. M., Pym B., Dubinski J., 2008, ApJ, 679, 1239

Wilde O., 1892, Lady Windermere's Fan, Act III

Woitke P., Helling C., 2003, A&A, 399, 297

Wolfire M. G., Hollenbach D., McKee C. F., Tielens A. G. G. M., Bakes E. L. O., 1995, ApJ, 443, 152

Wolfire M. G., McKee C. F., Hollenbach D., Tielens A. G. G. M., 2003, ApJ, 587, 278

Worpel H., 2015, PhD thesis, Monash University

Wu C. C., 1988, J. Geophys. Res., 93, 987

Wurster J., 2016, PASA, 33, e041

Wurster J., Thacker R. J., 2013a, MNRAS, 431, 539

Wurster J., Thacker R. J., 2013b, MNRAS, 431, 2513

Wurster J., Price D., Ayliffe B., 2014, MNRAS, 444, 1104

Wurster J., Price D. J., Bate M. R., 2016, MNRAS, 457, 1037

Wurster J., Price D. J., Bate M. R., 2017, MNRAS, 466, 1788

Wurster J., Bate M. R., Price D. J., 2018, MNRAS, 475, 1859

Youdin A. N., Goodman J., 2005, ApJ, 620, 459

Yurin D., Springel V., 2014, MNRAS, 444, 62

Ziegler U., Yorke H. W., Kaisig M., 1996, A&A, 305, 114

Zurek W. H., Benz W., 1986, ApJ, 308, 123

de Val-Borro M., et al., 2006, MNRAS, 370, 529

van Boekel R., et al., 2017, ApJ, 837, 132

From Prospects for Fundamental Physics with LISA

References

Pau Amaro-Seoane *et al.* (LISA Collaboration), (2017), arXiv:1702.00786 [astro-ph.IM].

B. P. Abbott *et al.* (Virgo, LIGO Scientific), Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016), arXiv:1602.03837 [gr-qc] .

B. P. Abbott *et al.* (Virgo, LIGO Scientific), Phys. Rev. Lett. **119**, 221101 (2017), arXiv:1710.05832 [gr-qc] .

B. P. Abbott *et al.* (Virgo, LIGO Scientific), Phys. Rev. X9 **3**, 031040 (2019), arXiv:1811.12907 [gr-qc] .

I. Bartos, B. Kocsis, Z. Haiman, and S. Màrka, Astrophys. J. **835**, 165 (2017), arXiv:1602.03831 [astro-ph.HE] .

C. J. Moore, D. Gerosa, and A. Klein, (2019), arXiv:1905.11998 [astro-ph.HE] .

C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation* (W.H. Freeman, San Francisco, 1973).

J. M. Ezquiaga and M. Zumalacárregui, Phys. Rev. Lett. **119**, 251304 (2017), arXiv:1710.05901 [astro-ph.CO] .

T. Baker, E. Bellini, P. G. Ferreira, M. Lagos, J. Noller, and I. Sawicki, (2017), arXiv:1710.06394 [astro-ph.CO] .

J. M. Ezquiaga and M. Zumalacárregui, Front. Astron. Space Sci. **5**, 44 (2018), arXiv:1807.09241 [astro-ph.CO] .

J. Sakstein and B. Jain, (2017), arXiv:1710.05893 [astro-ph.CO] .

O. J. Tattersall, P. G. Ferreira, and M. Lagos, Phys. Rev. **D97**, 084005 (2018), arXiv:1802.08606 [gr-qc] .

S. H. Alexander and N. Yunes, Phys. Rev. **D97**, 064033 (2018), arXiv:1712.01853 [gr-qc] .

S. Mirshekari, N. Yunes, and C. M. Will, Phys. Rev. D **85**, 024041 (2012), 10.1103/PhysRevD.85.024041, arXiv:1110.2720 [gr-qc] .

N. Yunes and X. Siemens, Living Reviews in Relativity **16**, 9 (2013).

K. Chamberlain and N. Yunes, Phys. Rev. **D96**, 084039 (2017), arXiv:1704.08268 [gr-qc] .

D. Blas, M. M. Ivanov, I. Sawicki, and S. Sibiryakov, JETP Lett. **103**, 624 (2016), [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.103,no.10,708(2016)], arXiv:1602.04188 [gr-qc] .

N. Cornish, D. Blas, and G. Nardini, Phys. Rev. Lett. **119**, 161102 (2017), arXiv:1707.06101 [gr-qc] .

B. P. Abbott *et al.* (LIGO Scientific, Virgo, Fermi-GBM, INTEGRAL), Astrophys. J. **848**, L13 (2017a), arXiv:1710.05834 [astro-ph.HE] .

T. Dal Canton, A. Mangiagli, S. C. Noble, J. Schnittman, A. Ptak, A. Klein, A. Sesana, and J. Camp, (2019), arXiv:1902.01538 [astro-ph.HE] .

V. A. Kostelecky and M. Mewes, Phys. Lett. **B757**, 510 (2016), arXiv:1602.04782 [gr-qc] .

M. Mewes, Phys. Rev. **D99**, 104062 (2019), arXiv:1905.00409 [gr-qc] .

C. M. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge; New York, 1993).

D. Lovelock, J. Math. Phys. **13**, 874 (1972).

T. P. Sotiriou, *Proceedings of the 7th Aegean Summer School : Beyond Einstein's theory of gravity. Modifications of Einstein's Theory of Gravity at Large Distances.: Paros, Greece, September 23-28, 2013*, Lect. Notes Phys. **892**, 3 (2015a), arXiv:1404.2955 [gr-qc] .

E. E. Flanagan, Phys. Rev. Lett. **92**, 071101 (2004), arXiv:astro-ph/0308111 [astro-ph] .

E. Barausse, T. P. Sotiriou, and J. C. Miller, Class. Quant. Grav. **25**, 062001 (2008), arXiv:gr-qc/0703132 [GR-QC] .

P. Pani and T. P. Sotiriou, Phys. Rev. Lett. **109**, 251102 (2012), arXiv:1209.2972 [gr-qc] .

P. Pani, T. P. Sotiriou, and D. Vernieri, Phys. Rev. **D88**, 121502 (2013), arXiv:1306.1835 [gr-qc] .

E. Barausse and T. P. Sotiriou, Phys. Rev. Lett. **101**, 099001 (2008), arXiv:0803.3433 [gr-qc] .

C. Molina, P. Pani, V. Cardoso, and L. Gualtieri, Phys. Rev. **D81**, 124021 (2010), arXiv:1004.4007 [gr-qc] .

O. J. Tattersall and P. G. Ferreira, Phys. Rev. **D97**, 104047 (2018), arXiv:1804.08950 [gr-qc] .

S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **25**, 167 (1972).

T. P. Sotiriou and V. Faraoni, Phys. Rev. Lett. **108**, 081103 (2012), arXiv:1109.6324 [gr-qc] .

L. Hui and A. Nicolis, Phys. Rev. Lett. **110**, 241104 (2013), arXiv:1202.1296 [hep-th] .

H. O. Silva, J. Sakstein, L. Gualtieri, T. P. Sotiriou, and E. Berti, Phys. Rev. Lett. **120**, 131104 (2018), arXiv:1711.02080 [gr-qc] .

T. P. Sotiriou, Class. Quant. Grav. **32**, 214002 (2015b), arXiv:1505.00248 [gr-qc] .

C. A. R. Herdeiro and E. Radu, *Proceedings, 7th Black Holes Workshop 2014: Aveiro, Portugal, December 18-19, 2014*, Int. J. Mod. Phys. **D24**, 1542014 (2015), arXiv:1504.08209 [gr-qc] .

B. A. Campbell, N. Kaloper, and K. A. Olive, Phys. Lett. **B285**, 199 (1992).

P. Kanti, N. E. Mavromatos, J. Rizos, K. Tamvakis, and E. Winstanley, Phys. Rev. D **54**, 5049 (1996), arXiv:hep-th/9511071 .

N. Yunes and L. C. Stein, Phys. Rev. D **83**, 104002 (2011), arXiv:1101.2921 [gr-qc] .

T. P. Sotiriou and S.-Y. Zhou, Phys. Rev. Lett. **112**, 251102 (2014a), arXiv:1312.3622 [gr-qc] .

T. P. Sotiriou and S.-Y. Zhou, Phys. Rev. **D90**, 124063 (2014b), arXiv:1408.1698 [gr-qc] .

G. Antoniou, A. Bakopoulos, and P. Kanti, Phys. Rev. Lett. **120**, 131102 (2018), arXiv:1711.03390 [hep-th] .

R. Benkel, T. P. Sotiriou, and H. Witek, Phys. Rev. **D94**, 121503 (2016), arXiv:1612.08184 [gr-qc] .

R. Benkel, T. P. Sotiriou, and H. Witek, Class. Quant. Grav. **34**, 064001 (2017), arXiv:1610.09168 [gr-qc] .

N. Yunes and F. Pretorius, Phys. Rev. D **79**, 084043 (2009a), arXiv:0902.4669 [gr-qc] .

L. C. Stein, Phys. Rev. **D90**, 044061 (2014), arXiv:1407.2350 [gr-qc] .

R. R. Metsaev and A. A. Tseytlin, Nucl. Phys. **B293**, 385 (1987).

K.-i. Maeda, N. Ohta, and Y. Sasagawa, Phys. Rev. **D80**, vv 104032 (2009), arXiv:0908.4151 [hep-th] .

R. Jackiw and S.-Y. Pi, Phys. Rev. D **68**, 104012 (2003), gr-qc/0308071 .

M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, *Superstring Theory. Vol 2: Loop Amplitudes, Anomalies and Phenomenology*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press, Cambridge; New York, 1987).

A. Ashtekar, A. P. Balachandran, and S. Jo, Int. J. Mod. Phys. A **4**, 1493 (1989).

S. Alexander and N. Yunes, Phys. Rep. **480**, 1 (2009), arXiv:0907.2562 [hep-th] .

D. D. Doneva and S. S. Yazadjiev, Phys. Rev. Lett. **120**, 131103 (2018), arXiv:1711.01187 [gr-qc] .

M. Okounkova, L. C. Stein, M. A. Scheel, and D. A. Hemberger, Phys. Rev. **D96**, 044020 (2017), arXiv:1705.07924 [gr-qc] .

H. Witek, L. Gualtieri, P. Pani, and T. P. Sotiriou, Phys. Rev. **D99**, 064035 (2019), arXiv:1810.05177 [gr-qc] .

M. Okounkova, L. C. Stein, M. A. Scheel, and S. A. Teukolsky, (2019), arXiv:1906.08789 [gr-qc] .

A. Arvanitaki and S. Dubovsky, Phys. Rev. **D83**, 044026 (2011), arXiv:1004.3558 [hep-th] .

R. Brito, V. Cardoso, and P. Pani, Lect. Notes Phys. **906**, pp.1 (2015a), arXiv:1501.06570 [gr-qc] .

C. A. R. Herdeiro and E. Radu, Phys. Rev. Lett. **112**, 221101 (2014), arXiv:1403.2757 [gr-qc] .

J. Barranco, A. Bernal, J. C. Degollado, A. Diez-Tejedor, M. Megevand, M. Alcubierre, D. Nunez, and O. Sarbach, Phys. Rev. Lett. **109**, 081102 (2012), arXiv:1207.2153 [gr-qc] .

J. Barranco, A. Bernal, J. C. Degollado, A. Diez-Tejedor, M. Megevand, M. Alcubierre, D. Nùñez, and O. Sarbach, Phys. Rev. **D89**, 083006 (2014), arXiv:1312.5808 [gr-qc] .

E. Babichev and C. Charmousis, JHEP **08**, 106 (2014), arXiv:1312.3204 [gr-qc] .

K. Clough, P. G. Ferreira, and M. Lagos, (2019), arXiv:1904.12783 [gr-qc] .

L. Hui, D. Kabat, X. Li, L. Santoni, and S. S. C. Wong, (2019), arXiv:1904.12803 [gr-qc] .

E. Berti, V. Cardoso, L. Gualtieri, M. Horbatsch, and U. Sperhake, Phys. Rev. **D87**, 124020 (2013), arXiv:1304.2836 [gr-qc] .

J. Healy, T. Bode, R. Haas, E. Pazos, P. Laguna, D. M. Shoemaker, and N. Yunes, Class. Quant. Grav. **29**, 232002 (2012), arXiv:1112.3928 [gr-qc] .

V. Cardoso, I. P. Carucci, P. Pani, and T. P. Sotiriou, Phys. Rev. Lett. **111**, 111101 (2013), arXiv:1308.6587 [gr-qc] .

E. W. Hirschmann, L. Lehner, S. L. Liebling, and C. Palenzuela, Phys. Rev. **D97**, 064032 (2018), arXiv:1706.09875 [gr-qc] .

F.-L. Juliè, JCAP **1810**, 033 (2018), arXiv:1809.05041 [gr-qc] .

D. Astefanesei, C. Herdeiro, A. Pombo, and E. Radu, (2019), arXiv:1905.08304 [hep-th] .

M. Minamitsuji, Gen. Rel. Grav. **49**, 86 (2017).

E. Babichev, C. Charmousis, and M. Hassaine, JHEP **05**, 114 (2017), arXiv:1703.07676 [gr-qc] .

L. Heisenberg, R. Kase, M. Minamitsuji, and S. Tsujikawa, Phys. Rev. **D96**, 084049 (2017), arXiv:1705.09662 [gr-qc] .

R. Kase, M. Minamitsuji, and S. Tsujikawa, Phys. Lett. **B782**, 541 (2018), arXiv:1803.06335 [gr-qc] .

M. Rahman and A. A. Sen, Phys. Rev. **D99**, 024052 (2019), arXiv:1810.09200 [gr-qc] .

G. Amelino-Camelia, J. R. Ellis, N. E. Mavromatos, D. V. Nanopoulos, and S. Sarkar, Nature **393**, 763 (1998), arXiv:astro-ph/9712103 [astro-ph] .

T. P. Sotiriou, Phys. Rev. Lett. **120**, 041104 (2018), arXiv:1709.00940 [gr-qc] .

A. Emir Gumrukcuoglu, M. Saravani, and T. P. Sotiriou, Phys. Rev. **D97**, 024032 (2018), arXiv:1711.08845 [gr-qc] .

J. Oost, S. Mukohyama, and A. Wang, Phys. Rev. **D97**, 124023 (2018), arXiv:1802.04303 [gr-qc] .

T. Jacobson and D. Mattingly, Phys.Rev. **D64**, 024028 (2001), arXiv:gr-qc/0007031 [gr-qc] .

T. Jacobson, *Proceedings, Workshop on From quantum to emergent gravity: Theory and phenomenology (QG-Ph): Trieste, Italy, June 11-15, 2007*, PoS **QG-PH**, 020 (2007), arXiv:0801.1547 [gr-qc] .

P. Horava, Phys. Rev. **D79**, 084008 (2009), arXiv:0901.3775 [hep-th] .

D. Blas, O. Pujolas, and S. Sibiryakov, Phys.Rev.Lett. **104**, 181302 (2010), arXiv:0909.3525 [hep-th] .

T. P. Sotiriou, *Proceedings, 14th Conference on Recent developments in gravity (NEB 14): Ioannina, Greece, June 8-11, 2010*, J. Phys. Conf. Ser. **283**, 012034 (2011), arXiv:1010.3218 [hep-th] .

D. Blas and S. Sibiryakov, Phys.Rev. **D84**, 124043 (2011), arXiv:1110.2195 [hep-th] .

J. Bhattacharyya, A. Coates, M. Colombo, and T. P. Sotiriou, Phys. Rev. **D93**, 064056 (2016a), arXiv:1512.04899 [gr-qc] .

C. Eling and T. Jacobson, Class. Quant. Grav. **23**, 5643 (2006), [Erratum: Class. Quant. Grav.27,049802(2010)], arXiv:gr-qc/0604088 [gr-qc] .

E. Barausse, T. Jacobson, and T. P. Sotiriou, Phys. Rev. **D83**, 124043 (2011), arXiv:1104.2889 [gr-qc] .

J. Bhattacharyya, M. Colombo, and T. P. Sotiriou, Class. Quant. Grav. **33**, 235003 (2016b), arXiv:1509.01558 [gr-qc] .

O. Ramos and E. Barausse, Phys. Rev. **D99**, 024034 (2019), arXiv:1811.07786 [gr-qc] .

G. Bozzola and V. Paschalidis, Phys. Rev. **D99**, 104044 (2019), arXiv:1903.01036 [gr-qc] .

O. Dreyer, B. J. Kelly, B. Krishnan, L. S. Finn, D. Garrison, and R. Lopez-Aleman, Class. Quant. Grav. **21**, 787 (2004), arXiv:gr-qc/0309007 [gr-qc] .

E. Berti, V. Cardoso, and C. M. Will, Phys. Rev. D **73**, 064030 (2006), arXiv:gr-qc/0512160 .

E. Berti, A. Sesana, E. Barausse, V. Cardoso, and K. Belczynski, Phys. Rev. Lett. **117**, 101102 (2016), arXiv:1605.09286 [gr-qc] .

G. Raposo, P. Pani, and R. Emparan, Phys. Rev. **D99**, 104050 (2019), arXiv:1812.07615 [gr-qc] .

S. Kastha, A. Gupta, K. G. Arun, B. S. Sathyaprakash, and C. Van Den Broeck, Phys. Rev. **D98**, 124033 (2018), arXiv:1809.10465 [gr-qc] .

L. Barack and C. Cutler, Phys. Rev. D **75**, 042003 (2007), arXiv:gr-qc/0612029 .

P. Amaro-Seoane, J. R. Gair, M. Freitag, M. C. Miller, I. Mandel, C. J. Cutler, and S. Babak, Class. Quantum Grav. **24**, R113 (2007), arXiv:astro-ph/0703495 .

S. Babak, J. Gair, A. Sesana, E. Barausse, C. F. Sopuerta, C. P. L. Berry, E. Berti, P. Amaro-Seoane, A. Petiteau, and A. Klein, Phys. Rev. **D95**, 103012 (2017), arXiv:1703.09722 [gr-qc] .

F. D. Ryan, Phys. Rev. D **52**, 5707 (1995).

F. D. Ryan, Phys. Rev. D **56**, 1845 (1997).

T. P. Sotiriou and T. A. Apostolatos, Phys. Rev. **D71**, 044005 (2005), arXiv:gr-qc/0410102 [gr-qc] .

V. Cardoso, S. Chakrabarti, P. Pani, E. Berti, and L. Gualtieri, Phys. Rev. Lett. **107**, 241101 (2011), arXiv:1109.6021 [gr-qc] .

N. Yunes, P. Pani, and V. Cardoso, Phys. Rev. D **85**, 102003 (2012), arXiv:1112.3351 [gr-qc] .

E. Barausse, N. Yunes, and K. Chamberlain, Phys. Rev. Lett. **116**, 241104 (2016), arXiv:1603.04075 [gr-qc] .

A. Cardenas-Avendaño, A. F. Gutierrez, L. A. Pachón, and N. Yunes, Class. Quant. Grav. **35**, 165010 (2018), arXiv:1804.04002 [gr-qc] .

G. Pappas and K. Glampedakis, (2018), arXiv:1806.04091 [gr-qc] .

T. A. Apostolatos, G. Lukes-Gerakopoulos, and G. Contopoulos, Phys. Rev. Lett. **103**, 111101 (2009), arXiv:0906.0093 [gr-qc] .

G. Lukes-Gerakopoulos, T. A. Apostolatos, and G. Contopoulos, Phys. Rev. **D81**, 124005 (2010), arXiv:1003.3120 [gr-qc] .

G. Lukes-Gerakopoulos, G. Contopoulos, and T. A. Apostolatos, *Proceedings, Relativity and Gravitation : 100 Years after Einstein in Prague: Prague, Czech Republic, June 25-29, 2012*, Springer Proc. Phys. **157**, 129 (2014), arXiv:1408.4697 [gr-qc] .

G. Contopoulos, G. Lukes-Gerakopoulos, and T. A. Apostolatos, Int. J. Bifurc. Chaos **21**, 2261 (2011), arXiv:1108.5057 [gr-qc] .

G. Lukes-Gerakopoulos and O. Kopàcek, Int. J. Mod. Phys. **D27**, 1850010 (2017), arXiv:1709.08446 [gr-qc] .

P. Jetzer, Phys. Rept. **220**, 163 (1992).

S. L. Liebling and C. Palenzuela, Living Rev. Rel. **15**, 6 (2012), arXiv:1202.5809 [gr-qc] .

V. Cardoso and P. Pani, Living Rev. Rel. **22**, 4 (2019), arXiv:1904.05363 [gr-qc] .

N. V. Krishnendu, K. G. Arun, and C. K. Mishra, Phys. Rev. Lett. **119**, 091101 (2017), arXiv:1701.06318 [gr-qc] .

A. Maselli, P. Pani, V. Cardoso, T. Abdelsalhin, L. Gualtieri, and V. Ferrari, Phys. Rev. Lett. **120**, 081101 (2018), arXiv:1703.10612 [gr-qc] .

A. Addazi, A. Marciano, and N. Yunes, Phys. Rev. Lett. **122**, 081301 (2019), arXiv:1810.10417 [gr-qc] .

G. Compère, K. Fransen, T. Hertog, and J. Long, Class. Quant. Grav. **35**, 104002 (2018), arXiv:1712.07130 [gr-qc] .

P. Pani and A. Maselli, Int. J. Mod. Phys. **D28**, 1944001 (2019), arXiv:1905.03947 [gr-qc] .

C. B. M. H. Chirenti and L. Rezzolla, Class. Quant. Grav. **24**, 4191 (2007), arXiv:0706.1513 [gr-qc] .

P. Pani, E. Berti, V. Cardoso, Y. Chen, and R. Norte, Phys. Rev. **D80**, 124047 (2009), arXiv:0909.0287 [gr-qc] .

K. Glampedakis and G. Pappas, Phys. Rev. **D97**, 041502 (2018), arXiv:1710.02136 [gr-qc] .

V. Cardoso, E. Franzin, and P. Pani, Phys. Rev. Lett. **116**, 171101 (2016a), [Erratum: Phys. Rev. Lett.117,no.8,089902(2016)], arXiv:1602.07309 [gr-qc] .

V. Cardoso, S. Hopper, C. F. B. Macedo, C. Palenzuela, and P. Pani, Phys. Rev. **D94**, 084031 (2016b), arXiv:1608.08637 [gr-qc] .

V. Cardoso and P. Pani, Nat. Astron. **1**, 586 (2017), arXiv:1709.01525 [gr-qc] .

P. Bueno, P. A. Cano, F. Goelen, T. Hertog, and B. Vercnocke, Phys. Rev. **D97**, 024040 (2018), arXiv:1711.00391 [gr-qc] .

A. Testa and P. Pani, Phys. Rev. **D98**, 044018 (2018), arXiv:1806.04253 [gr-qc] .

G. Compère (2019) arXiv:1902.04504 [gr-qc] .

S. B. Giddings, S. Koren, and G. Treviño, Phys. Rev. **D100**, 044005 (2019), arXiv:1904.04258 [gr-qc] .

F. C. Eperon, H. S. Reall, and J. E. Santos, JHEP **10**, 031 (2016), arXiv:1607.06828 [hep-th] .

J. Keir, Class. Quant. Grav. **33**, 135009 (2016), arXiv:1404.7036 [gr-qc] .

V. Cardoso, L. C. B. Crispino, C. F. B. Macedo, H. Okawa, and P. Pani, Phys. Rev. **D90**, 044069 (2014), arXiv:1406.5510 [gr-qc] .

P. V. P. Cunha, E. Berti, and C. A. R. Herdeiro, Phys. Rev. Lett. **119**, 251102 (2017), arXiv:1708.04211 [gr-qc] .

E. Maggio, V. Cardoso, S. R. Dolan, and P. Pani, Phys. Rev. **D99**, 064007 (2019), arXiv:1807.08840 [gr-qc] .

E. Maggio, P. Pani, and V. Ferrari, Phys. Rev. **D96**, 104047 (2017), arXiv:1703.03696 [gr-qc] .

B. Chen, Y. Chen, Y. Ma, K.-L. R. Lo, and L. Sun, (2019), arXiv:1902.08180 [gr-qc] .

N. Yunes, (2019), in preparation.

T. Hertog and J. Hartle, (2017), arXiv:1704.02123 [hep-th] .

A. G. Riess *et al.*, Astrophys. J. **826**, 56 (2016), arXiv:1604.01424 [astro-ph.CO] .

P. A. R. Ade *et al.* (Planck), Astron. Astrophys. **594**, A13 (2016), arXiv:1502.01589 [astro-ph.CO] .

M. Betoule *et al.* (SDSS), Astron. Astrophys. **568**, A22 (2014), arXiv:1401.4064 [astro-ph.CO] .

N. Aghanim *et al.* (Planck), (2018), arXiv:1807.06209 [astro-ph.CO] .

E. J. Copeland, M. Sami, and S. Tsujikawa, Int. J. Mod. Phys. **D15**, 1753 (2006), arXiv:hep-th/0603057 [hep-th] .

S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989).

J. Martin, Comptes Rendus Physique **13**, 566 (2012), arXiv:1205.3365 [astro-ph.CO] .

A. G. Riess *et al.*, Astrophys. J. **861**, 126 (2018), arXiv:1804.10655 [astro-ph.CO] .

A. G. Riess, S. Casertano, W. Yuan, L. M. Macri, and D. Scolnic, Astrophys. J. **876**, 85 (2019), arXiv:1903.07603 [astro-ph.CO] .

A. Joyce, L. Lombriser, and F. Schmidt, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **66**, 95 (2016), arXiv:1601.06133 [astro-ph.CO] .

B. F. Schutz, Nature **323**, 310 (1986).

D. E. Holz and S. A. Hughes, Astrophys. J. **629**, 15 (2005), arXiv:astro-ph/0504616 [astro-ph] .

W. Del Pozzo, Phys. Rev. **D86**, 043011 (2012), arXiv:1108.1317 [astro-ph.CO] .

K. Kyutoku and N. Seto, Phys. Rev. **D95**, 083525 (2017), arXiv:1609.07142 [astro-ph.CO] .

W. Del Pozzo, A. Sesana, and A. Klein, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **475**, 3485 (2018), arXiv:1703.01300 [astro-ph.CO] .

C. L. MacLeod and C. J. Hogan, Phys. Rev. **D77**, 043512 (2008), arXiv:0712.0618 [astro-ph] .

N. Tamanini, C. Caprini, E. Barausse, A. Sesana, A. Klein, and A. Petiteau, JCAP **1604**, 002 (2016), arXiv:1601.07112 [astro-ph.CO] .

N. Tamanini, *Proceedings, 11th International LISA Symposium: Zurich, Switzerland, September 5-9, 2016*, J. Phys. Conf. Ser. **840**, 012029 (2017), arXiv:1612.02634 [astro-ph.CO] .

M. Maggiore, Phys. Rev. **D89**, 043008 (2014), arXiv:1307.3898 [hep-th] .

E. Belgacem, Y. Dirian, S. Foffa, and M. Maggiore, JCAP **1803**, 002 (2018a), arXiv:1712.07066 [hep-th] .

L. Lombriser and A. Taylor, JCAP **1603**, 031 (2016), arXiv:1509.08458 [astro-ph.CO] .

A. Nishizawa, Phys. Rev. **D97**, 104037 (2018), arXiv:1710.04825 [gr-qc] .

E. Belgacem, Y. Dirian, S. Foffa, and M. Maggiore, Phys. Rev. **D97**, 104066 (2018b), arXiv:1712.08108 [astro-ph.CO] .

E. Belgacem, Y. Dirian, S. Foffa, and M. Maggiore, Phys. Rev. **D98**, 023510 (2018c), arXiv:1805.08731 [gr-qc] .

C. Deffayet and K. Menou, Astrophys. J. **668**, L143 (2007), arXiv:0709.0003 [astro-ph] .

K. Pardo, M. Fishbach, D. E. Holz, and D. N. Spergel, JCAP **1807**, 048 (2018), arXiv:1801.08160 [gr-qc] .

B. P. Abbott *et al.* (LIGO Scientific, Virgo), (2018), arXiv:1811.00364 [gr-qc] .

B. P. Abbott *et al.* (LIGO Scientific, Virgo, 1M2H, Dark Energy Camera GW-E, DES, DLT40, Las Cumbres Observatory, VINROUGE, MASTER), Nature **551**, 85 (2017b), arXiv:1710.05835 [astro-ph.CO] .

M. Fishbach *et al.* (LIGO Scientific, Virgo), Astrophys. J. **871**, L13 (2019), arXiv:1807.05667 [astro-ph.CO] .

M. Soares-Santos *et al.* (DES, LIGO Scientific, Virgo), Astrophys. J. **876**, L7 (2019), arXiv:1901.01540 [astro-ph.CO] .

H.-Y. Chen, M. Fishbach, and D. E. Holz, Nature **562**, 545 (2018), arXiv:1712.06531 [astro-ph.CO] .

C. Caprini and N. Tamanini, JCAP **1610**, 006 (2016), arXiv:1607.08755 [astro-ph.CO] .

R.-G. Cai, N. Tamanini, and T. Yang, JCAP **1705**, 031 (2017), arXiv:1703.07323 [astro-ph.CO] .

E. Belgacem *et al.* (LISA Cosmology Working Group), JCAP **1907**, 024 (2019), arXiv:1906.01593 [astro-ph.CO] .

A.-L. S. W. Group, "Athena-lisa synergies," .

ESA, "A unique experiment to explore black holes," .

D. J. E. Marsh, Phys. Rept. **643**, 1 (2016), arXiv:1510.07633 [astro-ph.CO] .

L. Hui, J. P. Ostriker, S. Tremaine, and E. Witten, Phys. Rev. **D95**, 043541 (2017), arXiv:1610.08297 [astro-ph.CO] .

S. L. Detweiler, Phys. Rev. D **22**, 2323 (1980).

T. Damour, N. Deruelle, and R. Ruffini, Lett. Nuovo Cim. **15**, 257 (1976).

S. R. Dolan, Phys. Rev. **D76**, 084001 (2007), arXiv:0705.2880 [gr-qc] .

Y. Shlapentokh-Rothman, Commun. Math. Phys. **329**, 859 (2014), arXiv:1302.3448 [gr-qc] .

G. Moschidis, (2016), arXiv:1608.02041 [math.AP] .

V. P. Frolov, P. Krtous, D. Kubiznák, and J. E. Santos, Phys. Rev. Lett. **120**, 231103 (2018), arXiv:1804.00030 [hep-th] .

S. R. Dolan, Phys. Rev. **D98**, 104006 (2018), arXiv:1806.01604 [gr-qc] .

W. H. Press and S. A. Teukolsky, Nature **238**, 211 (1972).

R. Brito, V. Cardoso, and P. Pani, Class. Quant. Grav. **32**, 134001 (2015b), arXiv:1411.0686 [gr-qc] .

A. Arvanitaki, M. Baryakhtar, and X. Huang, Phys. Rev. **D91**, 084011 (2015), arXiv:1411.2263 [hep-ph] .

H. Yoshino and H. Kodama, PTEP **2015**, 061E01 (2015), arXiv:1407.2030 [gr-qc] .

A. Arvanitaki, M. Baryakhtar, S. Dimopoulos, S. Dubovsky, and R. Lasenby, Phys. Rev. **D95**, 043001 (2017), arXiv:1604.03958 [hep-ph] .

M. Baryakhtar, R. Lasenby, and M. Teo, Phys. Rev. **D96**, 035019 (2017), arXiv:1704.05081 [hep-ph] .

W. E. East and F. Pretorius, Phys. Rev. Lett. **119**, 041101 (2017), arXiv:1704.04791 [gr-qc] .

G. Ficarra, P. Pani, and H. Witek, Phys. Rev. **D99**, 104019 (2019), arXiv:1812.02758 [gr-qc] .

D. Blas, D. L. Nacir, and S. Sibiryakov, Phys. Rev. Lett. **118**, 261102 (2017), arXiv:1612.06789 [hep-ph] .

D. Baumann, H. S. Chia, and R. A. Porto, Phys. Rev. **D99**, 044001 (2019a), arXiv:1804.03208 [gr-qc] .

E. Berti, R. Brito, C. F. B. Macedo, G. Raposo, and J. L. Rosa, (2019), arXiv:1904.03131 [gr-qc] .

D. Baumann, H. S. Chia, R. A. Porto, and J. Stout, (2019b), arXiv:1912.04932 [gr-qc] .

V. Cardoso, F. Duque, and T. Ikeda, (2020), arXiv:2001.01729 [gr-qc] .

L. K. Wong, A.-C. Davis, and R. Gregory, Phys. Rev. **D100**, 024010 (2019), arXiv:1903.07080 [hep-th] .

L. K. Wong, (2019), arXiv:1905.08543 [hep-th] .

H. Witek, V. Cardoso, A. Ishibashi, and U. Sperhake, Phys. Rev. **D87**, 043513 (2013), arXiv:1212.0551 [gr-qc] .

A. Arvanitaki, S. Dimopoulos, S. Dubovsky, N. Kaloper, and J. March-Russell, Phys. Rev. **D81**, 123530 (2010), arXiv:0905.4720 [hep-th] .

R. Brito, S. Ghosh, E. Barausse, E. Berti, V. Cardoso, I. Dvorkin, A. Klein, and P. Pani, Phys. Rev. Lett. **119**, 131101 (2017a), arXiv:1706.05097 [gr-qc] .

R. Brito, S. Ghosh, E. Barausse, E. Berti, V. Cardoso, I. Dvorkin, A. Klein, and P. Pani, Phys. Rev. **D96**, 064050 (2017b), arXiv:1706.06311 [gr-qc] .

M. Isi, L. Sun, R. Brito, and A. Melatos, Phys. Rev. **D99**, 084042 (2019), arXiv:1810.03812 [gr-qc] .

S. Ghosh, E. Berti, R. Brito, and M. Richartz, (2018a), arXiv:1812.01620 [gr-qc] .

L. Tsukada, T. Callister, A. Matas, and P. Meyers, (2018), arXiv:1812.09622 [astro-ph.HE] .

K. Eda, Y. Itoh, S. Kuroyanagi, and J. Silk, Phys. Rev. Lett. **110**, 221101 (2013), arXiv:1301.5971 [gr-qc] .

C. F. B. Macedo, P. Pani, V. Cardoso, and L. C. B. Crispino, Astrophys. J. **774**, 48 (2013), arXiv:1302.2646 [gr-qc] .

K. Eda, Y. Itoh, S. Kuroyanagi, and J. Silk, Phys. Rev. **D91**, 044045 (2015), arXiv:1408.3534 [gr-qc] .

O. A. Hannuksela, K. W. K. Wong, R. Brito, E. Berti, and T. G. F. Li, Nature Astron. (2019), 10.1038/s41550-019-0712-4, arXiv:1804.09659 [astro-ph.HE] .

S. Naoz and J. Silk, (2019), arXiv:1905.03790 [astro-ph.HE] .

P. Jovanovic, New Astronomy Reviews **56**, 37 (2012), arXiv:1112.0172 .

V. Cardoso, et al., Journal of Cosmology and Astroparticle Physics **2018**, (2018), arXiv:1801.01420 .

P. Pani, V. Cardoso, L. Gualtieri, E. Berti, and A. Ishibashi, Phys. Rev. Lett. **109**, 131102 (2012), arXiv:1209.0465 [gr-qc]
.

R. Brito, V. Cardoso, and P. Pani, Phys. Rev. D **88**, 023514 (2013), arXiv:1304.6725 [gr-qc] .

E. Barausse, R. Brito, V. Cardoso, I. Dvorkin, and P. Pani, Class. Quant. Grav. **35**, 20LT01 (2018), arXiv:1805.08229 [gr-qc] .

S. Alexander, E. McDonough, R. Sims, and N. Yunes, Class. Quant. Grav. **35**, 235012 (2018), arXiv:1808.05286 [gr-qc] .

J. Pollack, D. N. Spergel, and P. J. Steinhardt, Astrophys. J. **804**, 131 (2015), arXiv:1501.00017 [astro-ph.CO] .

S. Hawking, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **152**, 75 (1971).

S. Bird, I. Cholis, J. B. Muñoz, Y. Ali-Haimoud, M. Kamionkowski, E. D. Kovetz, A. Raccanelli, and A. G. Riess, Phys. Rev. Lett. **116**, 201301 (2016), arXiv:1603.00464 [astro-ph.CO] .

S. Clesse and J. García-Bellido, Phys. Dark Univ. **15**, 142 (2017a), arXiv:1603.05234 [astro-ph.CO] .

M. Sasaki, T. Suyama, T. Tanaka, and S. Yokoyama, Phys. Rev. Lett. **117**, 061101 (2016), [erratum: Phys. Rev. Lett.121,no.5,059901(2018)], arXiv:1603.08338 [astro-ph.CO] .

M. Sasaki, T. Suyama, T. Tanaka, and S. Yokoyama, Class. Quant. Grav. **35**, 063001 (2018), arXiv:1801.05235 [astro-ph.CO] .

Y. Ali-Haimoud, E. D. Kovetz, and M. Kamionkowski, Phys. Rev. **D96**, 123523 (2017), arXiv:1709.06576 [astro-ph.CO] .

E. D. Kovetz, Phys. Rev. Lett. **119**, 131301 (2017), arXiv:1705.09182 [astro-ph.CO] .

v I. Cholis, E. D. Kovetz, Y. Ali-Haimoud, S. Bird, M. Kamionkowski, J. B. Muñoz, and A. Raccanelli, Phys. Rev. **D94**, 084013 (2016), arXiv:1606.07437 [astro-ph.HE] .

E. D. Kovetz, I. Cholis, P. C. Breysse, and M. Kamionkowski, Phys. Rev. **D95**, 103010 (2017), arXiv:1611.01157 [astro-ph.CO] .

V. Mandic, S. Bird, and I. Cholis, Phys. Rev. Lett. **117**, 201102 (2016), arXiv:1608.06699 [astro-ph.CO] .

S. Clesse and J. García-Bellido, Phys. Dark Univ. **18**, 105 (2017b), arXiv:1610.08479 [astro-ph.CO] .

K. N. Ananda, C. Clarkson, and D. Wands, Phys. Rev. **D75**, 123518 (2007), arXiv:gr-qc/0612013 [gr-qc] .

D. Baumann, P. J. Steinhardt, K. Takahashi, and K. Ichiki, Phys. Rev. **D76**, 084019 (2007), arXiv:hep-th/0703290 [hep-th] .

J. Garcia-Bellido, M. Peloso, and C. Unal, JCAP **1709**, 013 (2017), arXiv:1707.02441 [astro-ph.CO] .

N. Bartolo, V. De Luca, G. Franciolini, A. Lewis, M. Peloso, and A. Riotto, (2018a), arXiv:1810.12218 [astro-ph.CO] .

N. Bartolo, V. De Luca, G. Franciolini, M. Peloso, D. Racco, and A. Riotto, (2018b), arXiv:1810.12224 [astro-ph.CO] .

R.-g. Cai, S. Pi, and M. Sasaki, (2018), arXiv:1810.11000 [astro-ph.CO] .

N. Bartolo *et al.*, JCAP **1612**, 026 (2016), arXiv:1610.06481 [astro-ph.CO] .

N. Bartolo, V. Domcke, D. G. Figueroa, J. García-Bellido, M. Peloso, M. Pieroni, A. Ricciardone, M. Sakellariadou, L. Sorbo, and G. Tasinato, JCAP **1811**, 034 (2018c), arXiv:1806.02819 [astro-ph.CO] .

B. P. Abbott *et al.* (Virgo, LIGO Scientific), Phys. Rev. Lett. **116**, 221101 (2016), arXiv:1602.03841 [gr-qc] .

B. P. Abbott *et al.* (Virgo, LIGO Scientific), Phys. Rev. D **100**, 104036 (2019), arXiv:1903.04467 [gr-qc] .

A. Ghosh *et al.*, Phys. Rev. **D94**, 021101 (2016), arXiv:1602.02453 [gr-qc] .

A. Ghosh, N. K. Johnson-Mcdaniel, A. Ghosh, C. K. Mishra, P. Ajith, W. Del Pozzo, C. P. L. Berry, A. B. Nielsen, and L. London, Class. Quant. Grav. **35**, 014002 (2018b), arXiv:1704.06784 [gr-qc] .

K. G. Arun, B. R. Iyer, M. S. S. Qusailah, and B. S. Sathyaprakash, Class. Quantum Grav. **23**, L37 (2006), arXiv:gr-qc/0604018 .

C. K. Mishra, K. G. Arun, B. R. Iyer, and B. S. Sathyaprakash, Phys. Rev. D **82**, 064010 (2010), arXiv:1005.0304 [gr-qc] .

N. Yunes and F. Pretorius, Phys. Rev. D **80**, 122003 (2009b), arXiv:0909.3328 [gr-qc] .

N. J. Cornish, L. Sampson, N. Yunes, and F. Pretorius, Phys. Rev. D **84**, 062003 (2011), arXiv:1105.2088 [gr-qc] .

C. Huwyler, A. Klein, and P. Jetzer, Phys. Rev. D **86**, 084028 (2012), arXiv:1108.1826 [gr-qc] .

L. Blanchet, Living Rev. Rel. **17**, 2 (2014), arXiv:1310.1528 [gr-qc] .

N. Yunes, K. Yagi, and F. Pretorius, Phys. Rev. **D94**, 084002 (2016), arXiv:1603.08955 [gr-qc] .

A. Sesana, Phys. Rev. Lett. **116**, 231102 (2016), arXiv:1602.06951 [gr-qc] .

A. Sesana, *Proceedings, 11th International LISA Symposium: Zurich, Switzerland, September 5-9, 2016*, J. Phys. Conf. Ser. **840**, 012018 (2017), [,59(2017)], arXiv:1702.04356 [astro-ph.HE] .

R. Tso, D. Gerosa, and Y. Chen, (2018), arXiv:1807.00075 [gr-qc] .

D. Gerosa, S. Ma, K. W. K. Wong, E. Berti, R. O'Shaughnessy, Y. Chen, and K. Belczynski, (2019), arXiv:1902.00021 [astro-ph.HE] .

C. Cutler *et al.*, (2019), arXiv:1903.04069 [astro-ph.HE] .

S. Vitale, Phys. Rev. Lett. **117**, 051102 (2016), arXiv:1605.01037 [gr-qc] .

Z. Carson and K. Yagi, Class. Quant. Grav. **37**, 02LT01 (2020), arXiv:1905.13155 [gr-qc] .

G. Gnocchi, A. Maselli, T. Abdelsalhin, N. Giacobbo, and M. Mapelli, (2019), arXiv:1905.13460 [gr-qc] .

Z. Carson and K. Yagi, (2019a), arXiv:1911.05258 [gr-qc] .

Z. Carson and K. Yagi, in *Proceedings, Recent Progress in Relativistic Astrophysics: Shanghai, China, May 6-8, 2019* (2019) arXiv:1908.07103 [gr-qc] .

K. Chatziioannou, N. Yunes, and N. Cornish, Phys. Rev. D **86**, 022004 (2012), arXiv:1204.2585 [gr-qc] .

B. P. Abbott *et al.* (LIGO Scientific, Virgo), Phys. Rev. Lett. **119**, 141101 (2017c), arXiv:1709.09660 [gr-qc] .

C. M. Will, Living Rev. Relativity **9**, lrr-2006-3 (2006), 10.12942/lrr-2006-3, arXiv:gr-qc/0510072 .

M. Tinto and M. E. da Silva Alves, Phys. Rev. **D82**, 122003 (2010), arXiv:1010.1302 [gr-qc] .

N. Seto, Phys. Rev. Lett. **97**, 151101 (2006), arXiv:astro-ph/0609504 [astro-ph] .

N. Seto, Phys. Rev. **D75**, 061302 (2007), arXiv:astro-ph/0609633 [astro-ph] .

T. L. Smith and R. Caldwell, Phys. Rev. **D95**, 044036 (2017), arXiv:1609.05901 [gr-qc] .

E. Berti, A. Buonanno, and C. M. Will, Phys. Rev. D **71**, 084025 (2005), 10.1103/PhysRevD.71.084025, arXiv:gr-qc/0411129 [gr-qc] .

K. Yagi, L. C. Stein, N. Yunes, and T. Tanaka, Phys. Rev. D **85**, 064022 (2012), 10.1103/PhysRevD.85.064022, arXiv:1110.5950 [gr-qc] .

B. Z. Foster, Phys.Rev. **D73**, 104012 (2006), arXiv:gr-qc/0602004 [gr-qc] .

B. Z. Foster, Phys.Rev. **D76**, 084033 (2007), arXiv:0706.0704 [gr-qc] .

D. Blas and H. Sanctuary, Phys. Rev. D **84**, 064004 (2011), 10.1103/PhysRevD.84.064004, arXiv:1105.5149 [gr-qc] .

K. Yagi, D. Blas, E. Barausse, and N. Yunes, Phys. Rev. **D89**, 084067 (2014), [Erratum: Phys. Rev.D90,no.6,069901(2014)], arXiv:1311.7144 [gr-qc] .

D. Hansen, N. Yunes, and K. Yagi, Phys. Rev. **D91**, 082003 (2015), arXiv:1412.4132 [gr-qc] .

T. B. Littenberg and N. Yunes, (2018), arXiv:1811.01093 [gr-qc] .

E. Barausse, V. Cardoso, and P. Pani, *Proceedings, 10th International LISA Symposium: Gainesville, Florida, USA, May 18-23, 2014*, J. Phys. Conf. Ser. **610**, 012044 (2015), arXiv:1404.7140 [astro-ph.CO] .

E. Barausse, V. Cardoso, and P. Pani, Phys. Rev. **D89**, 104059 (2014), arXiv:1404.7149 [gr-qc] .

F. Shankar, D. H. Weinberg, and J. Miralda-Escude', Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **428**, 421 (2013), arXiv:1111.3574 [astro-ph.CO] .

K. Pardo, A. D. Goulding, J. E. Greene, R. S. Somerville, E. Gallo, R. C. Hickox, B. P. Miller, A. E. Reines, and J. D. Silverman, ApJ **831**, 203 (2016), arXiv:1603.01622 [astro-ph.GA] .

M. L. Jones, R. C. Hickox, C. S. Black, K. N. Hainline, M. A. DiPompeo, and A. D. Goulding, ApJ **826**, 12 (2016), arXiv:1605.01739 [astro-ph.GA] .

C. Palenzuela, L. Lehner, and S. L. Liebling, Science **329**, 927 (2010), arXiv:1005.1067 [astro-ph.HE] .

B. Giacomazzo, J. G. Baker, M. C. Miller, C. S. Reynolds, and J. R. van Meter, Astrophys. J. **752**, L15 (2012), arXiv:1203.6108 [astro-ph.HE] .

N. Yunes, B. Kocsis, A. Loeb, and Z. Haiman, Phys. Rev. Lett. **107**, 171103 (2011), arXiv:1103.4609 [astro-ph.CO] .

B. Kocsis, N. Yunes, and A. Loeb, Phys. Rev. **D84**, 024032 (2011), arXiv:1104.2322 [astro-ph.GA] .

B. Kocsis, Z. Haiman, and A. Loeb, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **427**, 2660 (2012a), arXiv:1205.4714 [astro-ph.EP] .

B. Kocsis, Z. Haiman, and A. Loeb, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **427**, 2680 (2012b), arXiv:1205.5268 [astro-ph.HE] .

A. Derdzinski, D. D'Orazio, P. Duffell, Z. Haiman, and A. MacFadyen, arXiv e-prints , arXiv:1810.03623 (2018), arXiv:1810.03623 [astro-ph.HE] .

E. Barausse and L. Rezzolla, Phys. Rev. **D77**, 104027 (2008), arXiv:0711.4558 [gr-qc] .

B. Bonga, H. Yang, and S. A. Hughes, (2019), arXiv:1905.00030 [gr-qc] .

P. Gondolo and J. Silk, Phys. Rev. Lett. **83**, 1719 (1999), arXiv:astro-ph/9906391 [astro-ph] .

H. Okawa, H. Witek, and V. Cardoso, Phys. Rev. **D89**, 104032 (2014), arXiv:1401.1548 [gr-qc] .

M. Vallisneri, Phys. Rev. D **77**, 042001 (2008), arXiv:gr-qc/0703086 .

L. Lindblom, B. J. Owen, and D. A. Brown, Phys. Rev. **D78**, 124020 (2008), arXiv:0809.3844 [gr-qc] .

M. Vallisneri, Phys. Rev. Lett. **107**, 191104 (2011), 10.1103/PhysRevLett.107.191104, arXiv:1108.1158 [gr-qc] .

M. Bonetti, A. Sesana, F. Haardt, E. Barausse, and M. Colpi, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **486**, 4044 (2019), arXiv:1812.01011 [astro-ph.GA] .

D. Bini, T. Damour, and A. Geralico, Phys. Rev. **D93**, 064023 (2016), arXiv:1511.04533 [gr-qc] .

W. D. Goldberger and I. Z. Rothstein, Phys. Rev. **D73**, 104029 (2006), arXiv:hep-th/0409156 [hep-th] .

T. Marchand, L. Bernard, L. Blanchet, and G. Faye, Phys. Rev. **D97**, 044023 (2018), arXiv:1707.09289 [gr-qc] .

T. Damour, P. Jaranowski, and G. Schaefer, Phys. Rev. **D93**, 084014 (2016), arXiv:1601.01283 [gr-qc] .

M. Boyle *et al.*, (2019), arXiv:1904.04831 [gr-qc] .

SXS Collaboration, "Sxs gravitational waveform database," https://data.black-holes.org/waveforms/index.html .

GATech, "Georgia tech catalog of binary black hole simulations," http://www.einstein.gatech.edu/catalog/ .

RIT, "Rit catalog of numerical simulations," https://ccrg.rit.edu/ RITCatalog/ .

S. Husa, S. Khan, M. Hannam, M. Puerrer, F. Ohme, X. Jimenez Forteza, and A. Bohe, Phys. Rev. **D93**, 044006 (2016), arXiv:1508.07250 [gr-qc] .

S. Khan, S. Husa, M. Hannam, F. Ohme, M. Puerrer, X. Jimenez Forteza, and A. Bohe, Phys. Rev. **D93**, 044007 (2016), arXiv:1508.07253 [gr-qc] .

A. Buonanno and T. Damour, Phys. Rev. **D59**, 084006 (1999), arXiv:gr-qc/9811091 [gr-qc] .

A. Buonanno and T. Damour, Phys. Rev. **D62**, 064015 (2000), arXiv:gr-qc/0001013 [gr-qc] .

E. Poisson, A. Pound, and I. Vega, Living Rev. Rel. **14**, 7 (2011), arXiv:1102.0529 [gr-qc] .

L. Barack and A. Pound, Rept. Prog. Phys. **82**, 016904 (2019), arXiv:1805.10385 [gr-qc] .

S. A. Hughes, in *Proceedings, 14th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics, and Relativistic Field Theories (MG14) (In 4 Volumes): Rome, Italy, July 12-18, 2015*, Vol. 2 (2017) pp. 1953–1959, arXiv:1601.02042 [gr-qc] .

V. Witzany, (2019), arXiv:1903.03649 [gr-qc] .

E. E. Flanagan and T. Hinderer, Phys. Rev. Lett. **109**, 071102 (2012), arXiv:1009.4923 [gr-qc] .

E. E. Flanagan, S. A. Hughes, and U. Ruangsri, Phys. Rev. **D89**, 084028 (2014), arXiv:1208.3906 [gr-qc] .

N. Yunes and E. Berti, Phys. Rev. **D77**, 124006 (2008), [Erratum: Phys. Rev.D83,109901(2011)], arXiv:0803.1853 [gr-qc] .

G. Calcagni, S. Kuroyanagi, S. Marsat, M. Sakellariadou, N. Tamanini, and G. Tasinato, Phys. Lett. **B798**, 135000 (2019a), arXiv:1904.00384 [gr-qc] .

G. Calcagni, S. Kuroyanagi, S. Marsat, M. Sakellariadou, N. Tamanini, and G. Tasinato, JCAP **1910**, 012 (2019b), arXiv:1907.02489 [gr-qc] .